Curs 10

Fie $X \neq \emptyset$, $p \in \mathbb{N}$, $(f_n)_{n \geq p}$ un șir de funcții, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall\, n \geq p$ și $s_n : X \to \mathbb{R}$, $s_n(x) = f_p(x) + f_{p+1}(x) + \ldots + f_n(x)$ $\forall\, n \geq p$.

<u>Definiție</u>. Perechea $\left((f_n)_{n \geq p}, (s_n)_{n \geq p}\right)$ se numește serie de funcții asociată șirului de funcții $(f_n)_{n \geq p}$ și se notează cu $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f_n$ (sau $\sum\limits_{n \geq p} f_n$ sau $\sum\limits_{n} f_n$)

<u>Observație</u>. În general $p = 0$ sau $p = 1$.

Fie $\sum\limits_{n} f_n$ o serie de funcții ($f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$)

<u>Definiție</u>. 1. Spunem că seria de funcții $\sum\limits_{n} f_n$ converge simplu (sau este simplu convergentă) dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge simplu (sau este simplu convergent).

2. Spunem că că seria de funcții

$\sum_n f_n$ converge uniform (sau este uniform convergentă) dacă șirul de funcții $(s_n)_n$ converge uniform (sau este uniform convergent).

3. Spunem că seria de funcții $\sum_n f_n$ converge absolut (sau este absolut convergentă) dacă, pentru orice $x \in X$, seria $\sum_n |f_n(x)|$ este convergentă.

<u>Definiție.</u> Dacă seria de funcții $\sum_n f_n$ converge simplu, limita (simplă) a șirului de funcții $(s_n)_n$ se numește suma seriei de funcții $\sum_n f_n$ și se notează tot cu $\sum_n f_n$

<u>Teoremă.</u> Presupunem că (X, τ) este spațiu topologic și că seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform către funcția $f: X \to \mathbb{R}$ (i.e. $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$).

Dacă f_n este continuă $\forall\, n \in \mathbb{N}$, atunci f este continuă.

<u>Teoremă (Teorema lui Weierstrass).</u> Presupunem că există un șir de numere reale $(\alpha_n)_n$ a.î.:

1) $\alpha_n \geq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $\sum_n \alpha_n$ convergentă.

3) $|f_n(x)| \leq \alpha_n \ \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci seria de funcții $\sum_n f_n$ converge uniform și absolut.

Definiție. Mulțimea $A \overset{def.}{=} \{x \in X \mid \sum_n f_n(x)$ este convergentă$\}$ se numește mulțimea de convergență a seriei de funcții $\sum_n f_n$.

Exercițiu. Considerăm seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Arătați că această serie de funcții este uniform convergentă.

Soluție. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_n = \frac{1}{n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Conform Teoremei lui Weierstrass rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este uniform convergentă. $\square$

Serii de puteri

Fie $p \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq p} \subset \mathbb{R}$ şi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = a_n x^n$ $\forall\, n \geq p$ ($0^0 = 1$ prin convenţie).

Definiţie. Seria de funcţii $\sum\limits_{n=p}^{\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ se numeşte serie de puteri.

Observaţie. În general $p=0$ sau $p=1$.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri ($(a_n)_n \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$).

Definiţie. 1) Definim $R \overset{\text{def.}}{=} \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0 \right)$.

Acest R se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n} a_n x^n$.

2) Intervalul $(-R, R)$ se numeşte intervalul de convergenţă al seriei de puteri $\sum\limits_{n} a_n x^n$.

3) Mulţimea $A \overset{\text{def.}}{=} \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{n} a_n x^n$ este convergentă$\}$ se numeşte mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n} a_n x^n$.

<u>Teoremă.</u> Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri și R raza sa de convergență.

1. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\in [0,\infty])$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right).$$

2. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ $(\in [0,\infty])$, atunci

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} \quad \left(\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{\infty} = 0\right).$$

<u>Teoremă (Teorema I a lui Abel).</u> Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R.

1) Pentru orice $x \in (-R, R)$, seria $\sum_n a_n x^n$ este absolut convergentă (i.e. $\sum_n |a_n x^n|$ e convergentă).

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, seria $\sum_n a_n x^n$ este divergentă.

<u>Corolar.</u> Cu notațiile de mai sus avem $(-R,R) \subset A \subset [-R,R]$.

<u>Exercițiu.</u> Determinați mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

<u>Soluție.</u> $a_n = (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+ \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}\right).$$

$$0 \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \le \frac{\frac{1}{n+1}}{1} = \frac{1}{n+1} \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\searrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$
$$0$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = 0$, i.e. $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1+0=1$

Așadar $R = \frac{1}{1} = 1$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) x^n$.

Avem $(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$.

Studiem dacă $-1\in A$ și $1\in A$.

Dacă $x=-1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(-1)^n=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Am arătat (vezi Cursul 1) că șirul $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)_n$ nu este convergent, deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ este divergentă, i.e. $-1\notin A$.

Dacă $x=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)1^n=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Arătăm că $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$.

Dacă, prin absurd, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$, atunci $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right|=0$, deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=0$, contradicție.

Așadar $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\neq 0$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$ divergentă, i.e. $1\notin A$.

Prin urmare $A=(-1,1)$. $\square$

<u>Teoremă (Teorema a II-a a lui Abel).</u> Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $R>0$ și mulțimea de convergență A. Atunci funcția $s: A \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este continuă.

<u>Explicații pentru Teorema a II-a a lui Abel</u>

1) Pentru orice $a \in (-R, R)$, s este continuă în a.

2) Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în R (respectiv în $-R$), atunci s este continuă în R (respectiv în $-R$), i.e. $\lim\limits_{\substack{x \to R \\ x<R}} s(x) = s(R) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ $\left(\text{respectiv } \lim\limits_{\substack{x \to -R \\ x>-R}} s(x) = s(-R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n\right)$.

<u>Teoremă (Teorema de derivare „termen cu termen" a seriilor de puteri).</u> Fie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \underset{n-1=m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^m =$$

Scanned with CamScanner

$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ are aceeași rază de convergență R

Dacă $R>0$, atunci funcția $s:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ este derivabilă și $s'(x)=$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

<u>Teoremă (Teorema de integrare „termen cu termen" a seriilor de puteri).</u> Fie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență R. Atunci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ are aceeași rază de convergență R. Dacă $R>0$, $s, S:(-R,R)\to\mathbb{R}$, $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ și $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, atunci S este o primitivă a lui s, i.e. $S'(x)=s(x)$ $\forall x\in(-R,R)$.