

# Subșir crescător de lungime maximă



Se consideră vectorul  $a = (a_1, \dots, a_n)$ .

Să se determine lungimea maximă a unui subșir crescător din  $a$  și un astfel de subșir de lungime maximă

## Exemplu

Pentru

$$a = (8, 1, 7, 4, 6, 5, 11)$$

lungimea maximă este 4, un subșir fiind

$$1, \quad 4, \quad 6, \quad 11$$

# Subșir crescător de lungime maximă

## Principiu de optimalitate:

Dacă

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip},$$

este un subșir optim care începe pe poziția  $i1$ , atunci:

$$a_{i2}, \dots, a_{ip}$$

este un subșir optim care **începe pe poziția  $i2$** ;

Mai general

$$a_{ik}, \dots, a_{ip}$$

este un subșir optim care începe pe poziția  $ik$ .



# Subșir crescător de lungime maximă

## Principiu de optimalitate



### Subprobleme:

Calculăm pentru fiecare poziție  $i$  lungimea maximă a unui subșir crescător ce începe pe poziția  $i$  (cu elementul  $a_i$ )

# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ **Subproblemă:**

$\text{lung}[i]$  = lungimea maximă a unui subșir crescător ce începe pe poziția  $i$

- ▶ **Soluție problemă:**

$\text{lmax} = \max\{\text{lung}[i] \mid i = 1, 2, \dots, n\}$

# Subșir crescător de lungime maximă

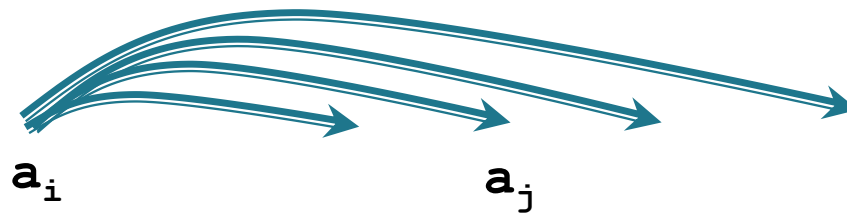
- ▶ **Subproblemă:**

$\text{lung}[i]$  = lungimea maximă a unui subșir crescător ce începe pe poziția  $i$

- ▶ **Știm direct**     $\text{lung}[n] = 1$

- ▶ **Relație de recurență**

$$\text{lung}[i] = 1 + \max\{\text{lung}[j] \mid j > i, a_i < a_j\}$$



# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ **Subproblemă:**

$\text{lung}[i]$  = lungimea maximă a unui subșir crescător ce începe pe poziția  $i$

- ▶ **Știm direct**      $\text{lung}[n] = 1$

- ▶ **Relație de recurență**

$$\text{lung}[i] = 1 + \max\{\text{lung}[j] \mid j > i, a_i < a_j\}$$

- ▶ **Ordinea de calcul**

$$i = n, n-1, \dots, 1$$

# Subșir crescător de lungime maximă



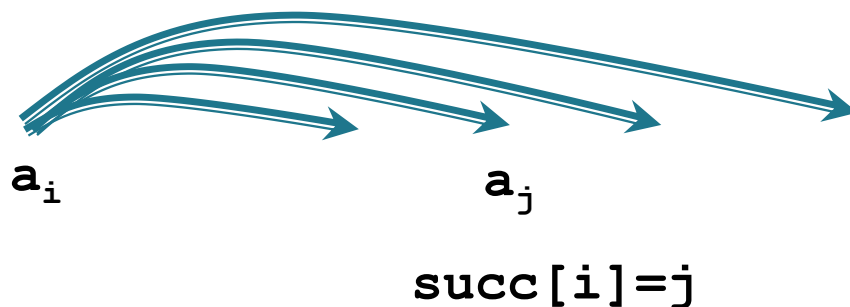
Cum determinăm un subșir maxim?

# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ Pentru a determina și un subșir optim putem memora în plus

$\text{succ}[i]$  = indicele următorului element dintr-un subșir optim care începe pe poziția  $i$  ( $n+1$  dacă nu există)

= **indicele pentru care se realizează maximul în relația de recurență**





# Subșir crescător de lungime maximă

a:            8      1      7      4      6      5      11  
                 1      2      3      4      5      6      7

lung :

succ :



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :							1
succ :							8



# Subșir crescător de lungime maximă

**a:**

8

1

7

4

6

# 5

11

1

2

3

4

5

6

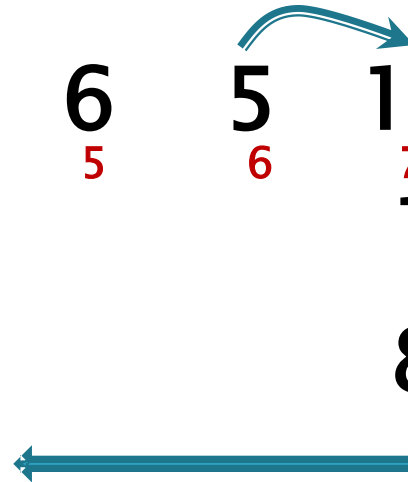
7

lung :

1

**SUCC :**

8

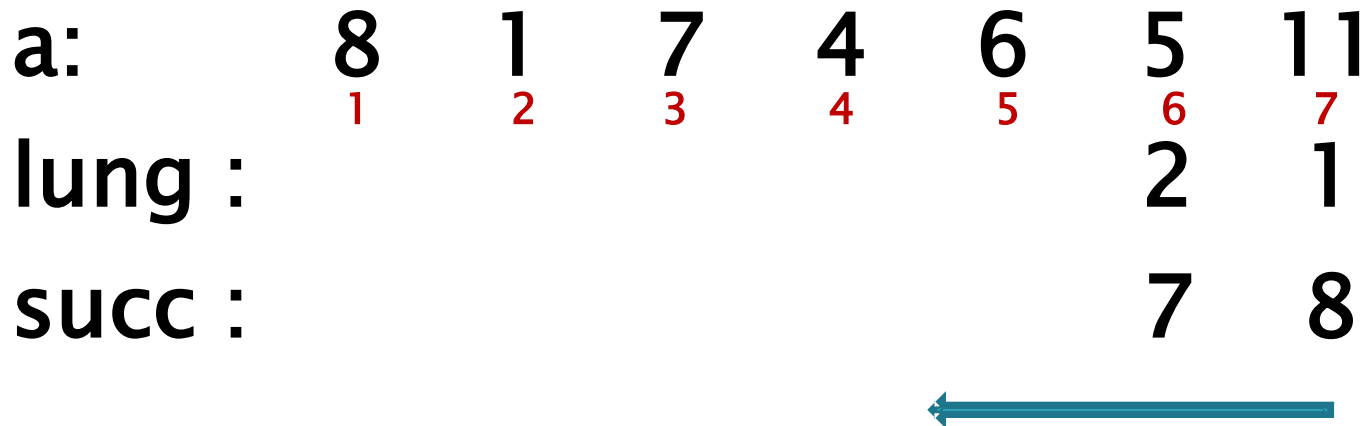


# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :						2	1
succ :						7	8



# Subșir crescător de lungime maximă



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :					2	2	1
succ :					7	7	8



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :					2	2	1
succ :					7	7	8



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :				3	2	2	1
succ :				5	7	7	8





# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :				3	2	2	1
succ :				5	7	7	8

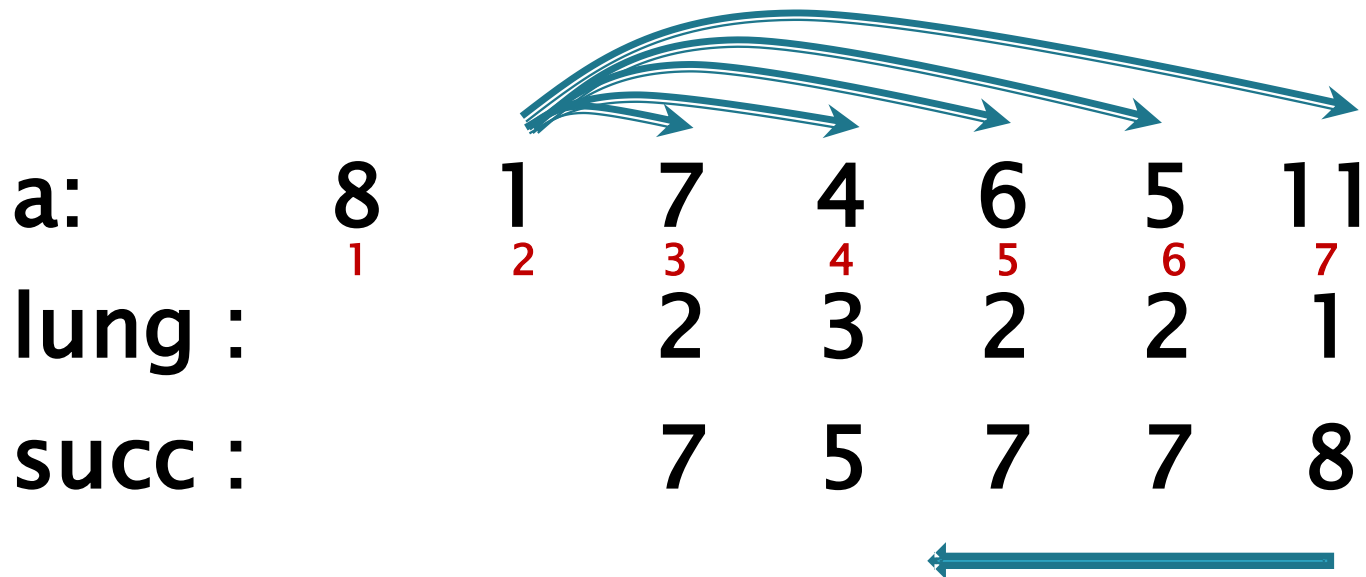


# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :			2	3	2	2	1
succ :			7	5	7	7	8



# Subșir crescător de lungime maximă

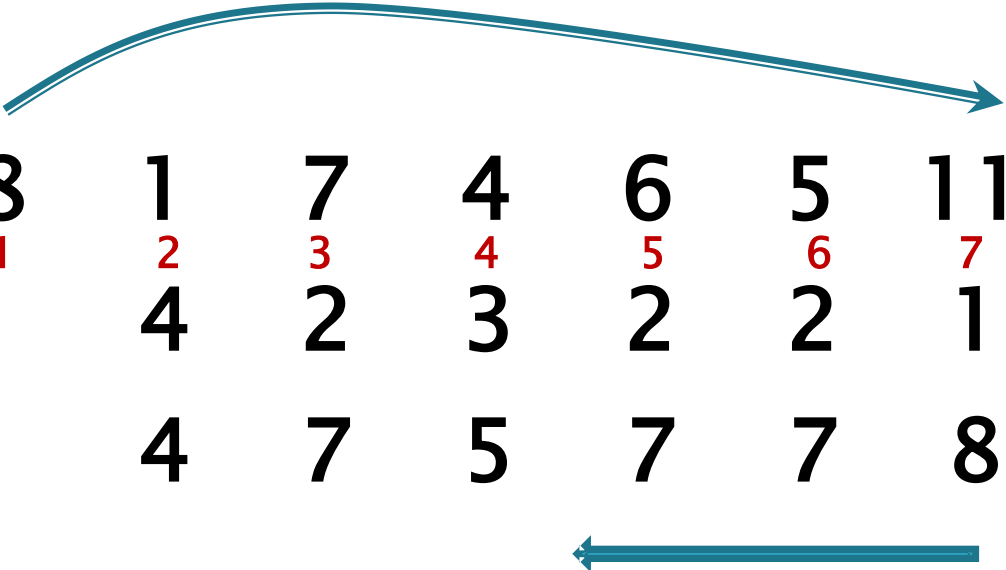


# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :		4	2	3	2	2	1
succ :		4	7	5	7	7	8



# Subșir crescător de lungime maximă



a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :		4	2	3	2	2	1
succ :		4	7	5	7	7	8

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Soluție: lung = 4

# Subșir crescător de lungime maximă


a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sup>1</sup>	<sup>2</sup>	<sup>3</sup>	<sup>4</sup>	<sup>5</sup>	<sup>6</sup>	<sup>7</sup>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subșir: 1,



# Subșir crescător de lungime maximă


a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8



Subșir: 1,

# Subșir crescător de lungime maximă


a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8



Subșir: 1, 4,

# Subșir crescător de lungime maximă


a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8



Subșir: 1, 4, 6

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8



Subșir: 1, 4, 6, 11

## ► Altă soluție

### Principiu de optimalitate:

Dacă

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip},$$

este un subșir optim care se termină pe poziția  $ip$ ,  
atunci

$$a_{i1}, \dots, a_{ik}$$

este un subșir optim care se **termină pe poziția  $ik$** .

### Subproblemă:

Calculăm pentru fiecare poziție  $i$  lungimea maximă a  
unui subșir crescător ce se termină pe poziția  $i$

# Subșir crescător de lungime maximă

a:            8      1      7      4      6      5      11  
                 1      2      3      4      5      6      7

lung :

pred :



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1						
pred :	0						



# Subșir crescător de lungime maximă


a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1					
pred :	0	0					





# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1	2				
pred :	0	0	2				



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1	2	2			
pred :	0	0	2	2			



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1	2	2	3		
pred :	0	0	2	2	4		



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1	2	2	3	3	
pred :	0	0	2	2	4	4	



# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	1	1	2	2	3	3	4
pred :	0	0	2	2	4	4	6



# Subșir crescător de lungime maximă



**Numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă ale șirului**

# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ **nr[i]** = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția i

# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶  $nr[i]$  = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția  $i$
- ▶ În calculul lui  $nr[i]$  intervin doar acei indici  $j$  pentru cu proprietatea că  $a_j$  este **succesor** al lui  $a_i$  într-un subșir **de lungime maximă** care începe cu  $a_i$ :
  - $j > i, a_i < a_j$  **pentru care**  $lung[i] = lung[j] + 1$

(adică acei  $j$  pentru care se atinge max în relația de recurență  
 $lung[i] = 1 + \max\{lung[j] \mid j > i, a_i < a_j\}$  )



# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ **Subprobleme**

$nr[i]$  = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția  $i$

- ▶ **Soluție problema inițială**

- ▶ **Știm să rezolvăm direct**

- ▶ **Relații de recurență**

- ▶ **Ordinea de rezolvare a recurențelor**  $i=n, \dots, 1$

# Subșir crescător de lungime maximă

- ▶ **Subprobleme**

$nr[i]$  = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția  $i$

- ▶ **Soluție problema inițială**

$$\sum_{\substack{poz=1,\dots,n \\ lung[poz]=lmax}} nr[poz]$$

- ▶ **Știm să rezolvăm direct**

- ▶ **Relații de recurență**

- ▶ **Ordinea de rezolvare a recurențelor**  $i=n, \dots, 1$

# Subșir crescător de lungime maximă

## ► Subprobleme

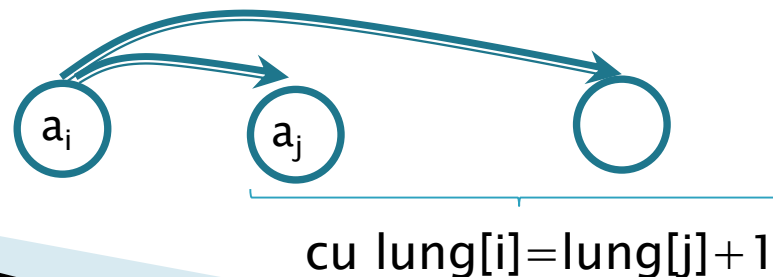
$nr[i]$  = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția  $i$

## ► Soluție problema inițială $\sum_{\substack{poz=1,\dots,n \\ lung[poz]=lmax}} nr[poz]$

## ► Știm să rezolvăm direct $nr[n] = 1$

## ► Relații de recurență

$$nr[i] = \begin{cases} \sum_{\substack{i < j, a_j > a_i \\ lung[i] = lung[j] + 1}} nr[j], & \text{dacă există } j > i \text{ cu } a_j > a_i \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$



# Subșir crescător de lungime maximă

## ▶ Subprobleme

$nr[i]$  = numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziția  $i$

## ▶ Soluție problema inițială

$$\sum_{\substack{poz=1,\dots,n \\ lung[poz]=lmax}} nr[poz]$$

## ▶ Știm să rezolvăm direct $nr[n] = 1$

## ▶ Relații de recurență

$$nr[i] = \begin{cases} \sum_{\substack{i < j, a_j > a_i \\ lung[i] = lung[j] + 1}} nr[j], & \text{dacă există } j > i \text{ cu } a_j > a_i \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

## ▶ Ordinea de rezolvare a recurențelor $i=n, \dots, 1$

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:							1


# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:						1	1

`nr[6] = nr[7]`

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:					1	1	1



`nr[5] = nr[7]`


# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:				2	1	1	1

$$\text{nr}[4] = \text{nr}[5] + \text{nr}[6]$$




# Subșir crescător de lungime maximă



a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:			2	2	1	1	1

`nr[3] = nr[4]`


# Subșir crescător de lungime maximă



a:	8	3	1	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:		2	2	2	1	1	1

`nr[2] = nr[4]`

# Subșir crescător de lungime maximă



a:	8	3	1	4	6	5	11
	<sub>1</sub>	<sub>2</sub>	<sub>3</sub>	<sub>4</sub>	<sub>5</sub>	<sub>6</sub>	<sub>7</sub>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

`nr[1] = nr[7]`

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

# Subșir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	<small>1</small>	<small>2</small>	<small>3</small>	<small>4</small>	<small>5</small>	<small>6</small>	<small>7</small>
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

Soluție: `nr[2]+nr[3]=4`