Problema discretă a rucsacului

Se consideră un rucsac de capacitate (greutate) maximă G **(număr <u>natural</u>**) şi n obiecte caracterizate prin:

- greutăţile lor **(numere <u>naturale</u>**) $g_1,\ldots,g_n$;
- câştigurile $c_1,\ldots,c_n$ obţinute la încărcarea lor în totalitate în rucsac.

Un obiect **nu poate fi fracționat**.

Se cere o modalitate de încărcare de obiecte în rucsac, astfel încât câştigul total să fie maxim.

Problema discretă a rucsacului

Caz particular

Date n obiecte cu ponderile w_1, w_2,…, w_n și o limită W, să se selecteze o submulțime de obiecte cu suma ponderilor maximă, fără a depăși însă ponderea W

Problema discretă a rucsacului

Caz particular

Date n obiecte cu ponderile w_1, w_2,…, w_n și o limită W, să se selecteze o submulțime de obiecte cu suma ponderilor maximă, fără a depăși însă ponderea W

Interpretări

- Submulțime de sumă maximă mai mică sau egală cu o valoare M dată (v. Greedy)
- n activități cu duratele w_1, w_2, …,w_n necesită o resursă. Știind că timpul maxim de funcționare a resursei este W, să se selecteze o submulțime de activități care țin resursa ocupată un timp cât mai lung (maxim)

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

```
G = 8
n = 4 obiecte
g:  3  4   4   6
c:  3  9  10  18
```

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

```
G = 8
n = 4 obiecte
g:  3  4   4   6
c:  3  9  10  18
```

Greedy – în ordinea descrescătoare a raportului c/g

- Alege întâi obiectul 4 de greutate 6
- Nu se mai poate pune nici un alt obiect întreg în rucsac
- Câştigul Greedy: **18**

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

```
G = 8
n = 4 obiecte
g:  3  4   4   6
c:  3  9  10  18
```

Greedy – în ordinea descrescătoare a raportului c/g

- Alege întâi obiectul 4 de greutate 6
- Nu se mai poate pune nici un alt obiect întreg în rucsac
- Câştigul Greedy: **18**

Soluţia optimă:

- Alegem obiectele 2 şi 3
- Câştigul total 10 + 9 = **19**

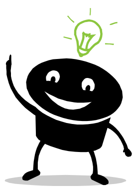
Problema discretă a rucsacului

- Care este primul obiect pe care îl adăugăm în rucsac? -> **Adăugăm sau nu primul obiect în rucsac?**

Problema discretă a rucsacului

- Adăugăm sau nu primul/**ultimul** obiect în rucsac?

```
G = 8
 n = 4 obiecte
 g:  3  4   4   6
 c:  3  9  10  18
```



Dacă adăugăm obiectul (3,3) , mai rămân 2 obiecte și greutatea G - 3 = 5

Dacă nu îl adăugăm rămânem cu două obiecte și greutatea G

$\Rightarrow$ Subprobleme utile:

Câștigul optim pentru primele/ultimele i obiecte și greutatea g $\leq$ G – se suprapun

– mai simplu (ca scriere) este să reducem problema la primele i obiecte (nu la ultimele)

Problema discretă a rucsacului

- **Principiu de optimalitate**

  Dacă **S** este soluție optimă pentru greutatea **g** și obiectele **{1,2,...,n} care**

  - **conţine n** atunci **S – {n}** este soluție optimă pentru

    greutatea $\mathbf{g - g_n}$ și

    obiectele **{1,2,..., n–1}**

  - **nu conţine n** atunci **S** este soluție optimă pentru

    greutatea **g** și

    obiectele **{1,2,..., n–1}**

Problema discretă a rucsacului

- **Subproblemă:**

  `s[i][g]` = câștigul maxim pentru greutatea g și obiectele {1,...,i}

- **Soluție** `s[n][G]`

Problema discretă a rucsacului

- **Știm direct**

$$s[i][0] = 0,\ \forall i=0,...,n$$
$$s[0][g] = 0,\ \forall g=0,...,G$$

- **Relație de recurență**

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

- **Ordinea de parcurgere**

$$i = 1,\dots,n, \quad g = 1,\dots,G$$

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** `G = 8, n = 4 obiecte`

```
g:  3  4   4   6
c:  3  9  10  18
```

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0								
2	0								
3	0								
4	0								

Coloana g – capacitatea rucsacului este g

Linia i – pot lua și obiectul i (avem la dispoziție obiectele {1,…,i})

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3					
2	0								
3	0								
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0								
3	0								
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** `G = 8,  n = 4 obiecte`

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9				
3	0								
4	0								

s[2][4] = soluția optimă pentru obiectele {1,2} și g=4

s[2][4] =max{c_2 + s[1][0], s[1][4] } = max{9 +0, 3 } = 9

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	
3	0								
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10				
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	?	
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	
4	0								

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

câștig optim s[4][8]

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel}\end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

La pasul i obiectul i a fost luat ⇔ s[i][g] > s[i−1][g]

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

egale=>4 nu a fost luat

La pasul i obiectul i a fost luat ⇔ s[i][g] > s[i-1][g]

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g]=\begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i>g \\ \max\{c_i+s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

diferite=>3 a fost luat

egale=>4 nu a fost luat

$s[3][8] = s[2][4]+c_3$ (valoarea din (3,8) provine din (2,4), deci obiectul 3 a fost luat)

Problema discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g:	3	4	4	6
c:	3	9	10	18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], \text{ daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, \text{ altfel} \end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

diferite=> 2 a fost luat

diferite=>3 a fost luat

egale=>4 nu a fost luat

s[2][4] = s[1][0]+c_2 (valoarea din (2,4) provine din (1,0), deci obiectul 2 a fost luat)

Problemă discretă a rucsacului

- **Exemplu** G = 8, n = 4 obiecte

g: 3 4 4 6

c: 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i],\ s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Soluție:

s:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

0=> 1 nu a fost luat

diferite=> 2 a fost luat

diferite=>3 a fost luat

egale=>4 nu a fost luat

Problema discretă a rucsacului

- O(nG)