

CURSUL 1: MULȚIMI

SAI

1. MULȚIMI

Definiția 1. (Cantor) O mulțime este o "grupare" într-un tot a unor "obiecte" distincte ale intuiției sau gândirii noastre.

Vom nota faptul că obiectul x este element al mulțimii M prin $x \in M$.

Vom considera că **două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă au aceleași elemente.**

Cea mai naturală metodă de a reprezenta o mulțime este de a enumera efectiv elementele acesteia; în mod standard, elementele respective se scriu între acolade, fără repetiții și în orice ordine dorim.

Exemplul 2. a) $\{1, 3, -5\}$; $\{-\frac{7}{3}, \pi\}$; $\{a; b; 1, 2(3)\}$, $\{3, -5, 1\}$, $\{-3, 5, 1\}$.
Reamintim aici și mulțimile „uzuale” de numere:

b) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulțimea numerelor naturale.

c) $\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ - mulțimea numerelor întregi.

Observația 3. $\{1, 3, -5\} = \{3, -5, 1\}$, dar $\{1, 3, -5\} \neq \{-1, 3, 5\}$.

Nu toate mulțimile pot fi reprezentate de maniera sintetică propusă anterior, de cele mai multe ori motivul fiind acela că respectivele mulțimi au „prea multe” elemente pentru a fi posibilă (sau utilă!) o astfel de reprezentare. În astfel de situații, apelăm la reprezentarea mulțimilor cu ajutorul unei proprietăți caracteristice elementelor lor.

Exemplul 4. a) $\{a \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} a = 2k + 1\}$ - mulțimea numerelor naturale impare

b) $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ - mulțimea numerelor raționale.

c) \mathbb{R} = mulțimea numerelor ce corespund punctelor unei drepte¹ - mulțimea numerelor reale.

d) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ - mulțimea numerelor complexe.

¹pe care am fixat originea și unitatea

Definiția 5. Spunem că mulțimea A este **inclusă** în mulțimea B dacă orice element al lui A îi aparține și lui B . Această situație este descrisă și de exprimarea „ **A este submulțime a mulțimii B** ”.

Desemnăm situația în care mulțimea A este inclusă în mulțimea B prin notația $A \subseteq B$.

Observația 6. Dacă $A \subseteq B$, putem avea $A = B$ sau nu. Dacă nu are loc egalitatea celor două mulțimi, spunem că A este **inclusă strict în** B și scriem $A \subset B$ sau $A \subsetneq B$.

Observația 7. Dată fiind o mulțime M și o proprietate \mathcal{P} care are sens pentru cel puțin unul dintre elementele lui M , admitem că

$$\{x \in M \mid x \text{ are proprietatea } \mathcal{P}\}$$

este o submulțime a lui M . Acest lucru conferă legitimitate manierei ”analitice” de prezentare a mulțimilor pe care am amintit-o mai sus².

Observația 8. Mulțimile A și B sunt egale dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

O consecință foarte importantă a observației 8 este următoarea:

Observația 9. Întotdeauna egalitatea de mulțimi se demonstrează prin dublă incluziune.

Observația 10. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Niciuna dintre aceste incluziuni nu este egalitate.

Definiția 11. Considerăm că există o mulțime care nu are niciun element. Ea se notează cu \emptyset și se numește **mulțimea vidă**.

Observația 12. Pentru orice mulțime M avem $\emptyset = \{x \in M \mid x \neq x\}$. Prin urmare, $\emptyset \subset M$.

Se consideră că, dată fiind o mulțime M , submulțimile sale constituie o mulțime.

Definiția 13. Dată fiind mulțimea M , mulțimea $\{A \mid A \subseteq M\}$ se numește **mulțimea părților lui M** . Vom nota această mulțime cu $\mathcal{P}(M)$.

²Atragem atenția asupra faptului că, în lipsa unei mulțimi inițiale M în cadrul căreia să punem problema elementelor cu proprietatea \mathcal{P} , nu avem garanția că acestea constituie o mulțime. Persistența în a lucra cu astfel de ”mulțimi” poate conduce la paradoxuri.

2. OPERAȚII CU MULȚIMI

În fiecare dintre situațiile care urmează, în lipsa vreunei alte mențiuni, vom considera că există o mulțime „mare” care conține toate mulțimile în discuție.

Considerăm mulțimile A și B .

Definiția 14. Mulțimea $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ se numește **reuniunea** mulțimilor A și B .

Definiția 15. Mulțimea $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ se numește **intersecția** mulțimilor A și B .

Definiția 16. Dacă $A \cap B = \emptyset$, spunem că mulțimile A și B sunt **disjuncte**.

Definiția 17. Mulțimea $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ se numește **diferența** mulțimilor A și B .

Definiția 18. $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ se numește **perechea ordonată** determinată de elementele a și b .

Observația 19. Drept consecință a axiomelor teoriei mulțimilor obținem în acest context faptul că toate perechile ordonate (a, b) cu $a \in A$ și $b \in B$ constituie o mulțime.

Definiția 20. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ se numește **produsul cartezian** al mulțimilor A și B .

Propoziția 21. Pentru orice mulțimi A , B și C au loc relațiile:

- a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.
- b) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
- c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exercițiul 22. Demonstrați propoziția 21!

Punctul c) al propoziției 21 ne sugerează următoarele definiții:

Definiția 23. $A \cup B \cup C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cup B) \cup C$;

$A \cap B \cap C \stackrel{\text{def}}{=} (A \cap B) \cap C$.

Fie E o mulțime.

Definiția 24. Pentru $A \subseteq E$, definim **complementara lui A în raport cu E** ca fiind mulțimea $E \setminus A$.

Notăția utilizată pentru complementara lui A în raport cu E este $\mathbb{C}_E A$. Dacă E este subînțeleasă în context, atunci complementara lui A în raport cu E se mai notează și $\mathbb{C}A$ sau \bar{A} .

Regulile lui de Morgan: Dacă $A, B \subseteq E$, atunci:

$$\mathbb{C}_E(A \cup B) = (\mathbb{C}_E A) \cap (\mathbb{C}_E B) \quad \text{și} \quad \mathbb{C}_E(A \cap B) = (\mathbb{C}_E A) \cup (\mathbb{C}_E B).$$

Exercițiul 25. Demonstrați regulile lui de Morgan!

Definiția 26. Dacă E este o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție $\circ : E \times E \rightarrow E$ iar $A, B \subseteq E$, definim $A \circ B = \{a \circ b \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Dacă $a \in E$, notăm $a \circ E$ (respectiv, $E \circ a$) în loc de $\{a\} \circ E$ (respectiv, de $E \circ \{a\}$).

Exemplul 27. a) $\{1, 2, 3\} + \{10, 20\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 23\}$
b) $\{1, 2, 3\} - \{10, 20\} = \{-19, -18, -17, -9, -8, -7\}$
c) $\{1, 2, 3\} \cdot \{10, 20\} = \{10, 20, 30, 40, 60\}$
d) $2\mathbb{Z}$ = mulțimea numerelor întregi pare.
e) $3\mathbb{Z} + 1$ = mulțimea acelor numere întregi care prin împărțire la 3 dau restul 1.
f) $\{-1, 1\} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

3. FAMILII DE MULȚIMI

Pentru generalizarea chestiunilor din paragraful precedent, este necesară o modalitate de a gestiona „multe” mulțimi. Una dintre cele mai frecvente abordări ale chestiunii este următoarea³:

Definiția 28. Prin **familie de mulțimi indexată după mulțimea** I înțelegem o funcție definită pe I și ale cărei valori sunt mulțimi.

Vom nota familia mulțimilor M_i , $i \in I$, cu $(M_i)_{i \in I}$.

O consecință imediată a axiomelor teoriei mulțimilor este aceea că putem defini reuniunea oricărei mulțimi de mulțimi. Este legitimă deci:

Definiția 29. Prin **reuniunea** familiei de mulțimi $(M_i)_{i \in I}$ înțelegem mulțimea $\{x \mid \exists i \in I \ x \in M_i\}$.

Notăția pe care o vom folosi pentru reuniunea familiei de mulțimi $(M_i)_{i \in I}$ este $\bigcup_{i \in I} M_i$. În situația în care $I = \{1, 2, \dots, n\}$, reuniunea

³ Pentru a plasa aceste considerații imediat după cele pe care le generalizează, utilizăm aici noțiunea de funcție; aceasta este definită în cursul 3, iar definiția respectivă nu se bazează pe chestiunile din acest paragraf.

familiei menționate se notează și $\bigcup_{i=1}^n M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, reuniunea

familiei $(M_i)_{i \in I}$ se notează și $\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i$ sau $\bigcup_{i \geq 0} M_i$

Definiția 30. Prin **intersecția** familiei de mulțimi $(M_i)_{i \in I}$ înțelegem mulțimea $\{x \mid \forall i \in I \ x \in M_i\}$.

Notația pe care o vom folosi pentru intersecția familiei de mulțimi $(M_i)_{i \in I}$ este $\bigcap_{i \in I} M_i$. În situația în care $I = \{1, 2, \dots, n\}$, intersecția

familiei menționate se notează și $\bigcap_{i=1}^n M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, intersecția

familiei $(M_i)_{i \in I}$ se notează și $\bigcap_{i=0}^{\infty} M_i$ sau $\bigcap_{i \geq 0} M_i$

Afirmațiile propoziției 21 se generalizează astfel:

Propoziția 31. Pentru orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și pentru orice mulțime B au loc relațiile⁴:

$$a') \forall i \in I \quad \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

c') Dacă $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, iar mulțimile familiei $(I_j)_{j \in J}$ sunt disjuncte două câte două, atunci

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} A_i \right) \quad \text{și} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} \left(\bigcap_{i \in I_j} A_i \right).$$

$$d') B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \quad \text{și} \quad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i).$$

$$e') B \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \times A_i) \quad \text{și} \quad B \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \times A_i).$$

Toate considerațiile anterioare sunt, desigur, valabile și pentru familii de submulțimi ale unei mulțimi date. În acest context funcționează următoarea variantă generalizată a regulilor lui de Morgan:

⁴Punctul b) al propoziției 21 se generalizează la:

b') Pentru orice funcție bijectivă $\sigma : I \rightarrow I$,

$\bigcup_{i \in I} A_{\sigma(i)} = \bigcup_{i \in I} A_i$ și $\bigcap_{i \in I} A_{\sigma(i)} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Propoziția 32. Dată fiind familia $(A_i)_{i \in I}$ de submulțimi ale mulțimii E , au loc relațiile:

$$\mathfrak{C}_E \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{C}_E A_i \quad \text{și} \quad \mathfrak{C}_E \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{C}_E A_i$$

4. RELATII, COMPUNEREA RELATIILOR

Definiția 33. Numim **corespondență** orice triplet de mulțimi $\alpha = (A, B, \rho)$ cu proprietatea $\rho \subseteq A \times B$. ρ se numește relație de la A la B sau **graficul** corespondenței α .

Definiția 34. Considerăm corespondențele $\alpha = (A, B, \rho)$ și $\beta = (B, C, \sigma)$. Corespondența $\beta \circ \alpha = (A, C, \sigma \circ \rho)$, unde

$$\sigma \circ \rho = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B \ (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma\},$$

se numește **compusa corespondențelor** β și α iar $\sigma \circ \rho$ se numește **compusa relațiilor** σ și ρ .

Propoziția 35. Date fiind corespondențele $\alpha = (A, B, \rho)$, $\beta = (B, C, \sigma)$ și $\gamma = (C, D, \tau)$, are loc egalitatea

$$(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha).$$

Definiția 36.

$$\gamma \circ \beta \circ \alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\gamma \circ \beta) \circ \alpha.$$

Definiția 37. Date fiind $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, și corespondențele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pentru care expresiile de mai jos au sens, definim

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_{n-1}) \circ \alpha_n.$$

Observația 38. Operațiile de compunere din expresia $\alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \dots \circ \alpha_n$ pot fi făcute în orice ordine dorim⁵.

Definiția 39. Dată fiind corespondența $\alpha = (A, A, \rho)$,

- (i) $\alpha^1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$ și
- (ii) Pentru $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $\alpha^n \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \circ \alpha^{n-1}$.

Observația 40. $\alpha^2 = \alpha \circ \alpha$, iar $\alpha^3 = \alpha \circ \alpha^2$.

Definiția 41. Dată fiind o mulțime A , corespondența $\text{id}_A = (A, A, \Delta_A)$, unde $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ se numește **corespondența identică** (sau **corespondența unitate**) a mulțimii A .

Propoziția 42. Dată fiind corespondența $\alpha = (A, B, \rho)$, au loc egalitățile

$$\text{id}_B \circ \alpha = \alpha \quad \text{și} \quad \alpha \circ \text{id}_A = \alpha.$$

⁵ fără a modifica însă ordinea termenilor!

4.1. Inversarea corespondențelor.

Definiția 43. Numim **inversa** corespondenței $\alpha = (A, B, \rho)$ corespondența $\alpha^{-1} = (B, A, \rho^{-1})$, unde $\rho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \rho\}$. ρ^{-1} se numește *inversa relației* ρ .

Observația 44. Dacă $\alpha = (A, B, \rho)$ este o corespondență, nu este obligatoriu ca $\alpha \circ \alpha^{-1} = \text{id}_B$ sau ca $\alpha^{-1} \circ \alpha = \text{id}_A$.

Propoziția 45. Date fiind corespondențele $\alpha = (A, B, \rho)$ și $\beta = (B, C, \sigma)$, au loc egalitățile:

- (i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$
- (ii) $(\beta \circ \alpha)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.
- [4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.