NOŢIUNI DE TOPOLOGIE ÎN SPAŢI METRICE

Mulţime deschisă şi mulţime închisă
Vecinătate a unui punct
Punct interior al unei mulţimi
Punct de acumulare al unei mulţimi
Teorema intervalelor nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$
Teorema Bolzano-Weierstrass
Teorema de structură a mulţimilor deschise
Definiţia spaţiului topologic
Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Recapitulare.

Definiţie. *Fie X o multime nevidă.*
a) *O funcţie $d : X \times X \to [0, \infty)$ se numeşte distanţa dacă:*
i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in X$
iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ *pentru orice* $x, y \in X$.
Perechea (X, d) se numeşte spaţiu metric.
b) *Fie (X, d) un spaţiu metric, un element $a \in X$ şi $r > 0$.*
i) Mulţimea $\{x \in X : d(x, a) < r\}$ se numeşte bila (sfera) de centru a şi rază r şi se notează cu $B(a, r)$.
ii) O mulţime $A \subset X$ se numeşte mărginită daca există o bilă $B(a, r)$ astfel încât $A \subset B(a, r)$.
c) *Fie (X, d) un spaţiu metric. Un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se numeşte convergent la un element $a \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, a) < \varepsilon$ ($\Leftrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ ($\Longleftrightarrow d(x_n, a) \to 0$).*

Observaţie. Pentru noi cazul cel mai important va fi $\mathbb{R}^n$ cu distanţa euclidiană.

Mulţime deschisă şi mulţime închisă

Noţiunile de mulţime deschisă şi mulţime închisă sunt esenţiale. Ele intervin, în mod explicit sau implicit, în aproape orice definiţie sau teoremă din acest curs (vezi spre exemplu: noţiunile de vecinătate, punct de acumulare, punct frontieră, mulţime compactă, mulţime conexă, definiţia limitei unui şir, definiţia funcţiei continue, definiţia limitei unei funcţii într-un punct etc).

Definiţie. *Fie (X, d) un spaţiu metric. O submulţime D a lui X se numeşte deschisă în X (sau, simplu, deschisă) dacă pentru orice punct x din D există un număr real strict pozitiv r_x astfel încât bila deschisă cu centrul x şi rază r_x să fie conţinută în D.*

Observaţie. *Altfel spus, mulţimea D din X este deschisă dacă orice punct al său este centrul unei bile deschise conţinută în D.*

Exemplu. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $x \in X$ şi $r > 0$. Atunci $B(x,r)$ este o mulţime deschisă.*

Fie $y \in B(x,r)$. Notăm $r_y = r - d(x,y)$. Dacă $z \in B(y,r_y)$ rezultă că $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r$. Deci $z \in B(x,r)$. Rezultă că $B(y,r_y) \subset B(x,r)$.

Observaţie. O muţime D *este deschisă dacă şi numai dacă este o reuniune de bile deschise.*

Exemple-Exerciţii

1. $\mathbb{R}^n$ este deschisă în $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

2. $(0,1)$ este deschisă în $\mathbb{R}$, dar $[0,1]$ nu este deschisă în $\mathbb{R}$.

3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ şi $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$ sunt deschise în $\mathbb{R}^2$, dar $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1)$ şi $y = 0\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$ (a se compara cu 2).

5. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0,1)\}$ este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

6. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1)\}$ nu este deschisă în $\mathbb{R}^2$.

Rezultatul de mai jos colectează proprietăţile esenţiale ale mulţimilor deschise.

Proprietăţile mulţimilor deschise

1. *$\emptyset$ şi X sunt deschise (în X).*

2. *Intersecţia oricăror două mulţimi deschise din X este o mulţime deschisă din X.*

3. *Reuniunea unei familii arbitrare de mulţimi deschise din X este o mulţime deschisă din X.*

Demonstraţie.

1. $X = \bigcup\limits_{x \in X} B(x,1)$.

2. Fie D_1 şi D_2 două mulţimi deschise din X şi $x \in D_1 \cap D_2$. Rezultă că există $r_1 > 0$ şi $r_2 > 0$ astfel încât $B(x,r_1) \subset D_1$ şi $B(x,r_2) \subset D_2$. Notăm $r = \min(r_1,r_2) > 0$. Atunci $B(x,r) \subset B(x,r_1) \cap B(x,r_2) \subset D_1 \cap D_2$.

3. Fie $(D_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi deschise din X şi $x \in \bigcup\limits_{i \in I} D_i$. Atunci există un $j \in I$ şi un $r > 0$ astfel încât $x \in D_j$ şi $B(x,r) \subset D_j$. Atunci $x \in B(x,r) \subset D_j \subset \bigcup\limits_{i \in I} D_i$.

Observaţie. *Intersecţia unei familii finite de mulţimi deschise din X este o mulţime deschisă din X.*

Intersecţia unei familii infinite de mulţimi deschise din X nu este, în general, o mulţime deschisă din X, aşa cum arată următorul exemplu: $D_n = (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$ este o mulţime deschisă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n = [0,1]$ nu este mulţime deschisă.

Definiţie. *O submulţime F a lui X se numeşte închisă în X (sau simplu, închisă) dacă $X - F$ este deschisă în X.*

Exemple-Exerciţii

1. $\mathbb{R}^n$ este închisă.
2. $[0,1]$ şi $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ sunt închise în $\mathbb{R}$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este închisă în $\mathbb{R}^2$.
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ este închisă în $\mathbb{R}^2$.
5. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ este închisă în $\mathbb{R}^3$.
6. Orice bilă închisă din $\mathbb{R}^n$ este închisă în $\mathbb{R}^n$.

Rezultatul de mai jos colectează proprietăţile esenţiale ale mulţimilor închise.

Proprietăţile mulţimilor închise
Fie (X,d) un spaţiu metric. Atunci:
1. *$\emptyset$ şi X sunt închise (în X).*
2. *Reuniunea oricăror două mulţimi închise din X este o mulţime închisă din X.*
3. *Intersecţia unei familii arbitrare de mulţimi închise din X este o mulţime închisă din X.*

Observaţie. *Deşi în vorbirea curentă, ca de exemplu atunci când ne referim la o uşă sau la o fereastră, cuvintele deschis şi închis sunt antonime, nu acelaşi lucru este valabil în contextul de mai sus. Spre exemplu $\mathbb{R}^n$ şi $\emptyset$ sunt mulţimi deschise şi închise (în $\mathbb{R}^n$), iar $[0,1)$ nu este nici deschisă, nici închisă (în $\mathbb{R}$).*

Vecinătate a unui punct

Vom introduce acum o altă noţiune topologică care ne va fi utilă ulterior şi care permite caracterizarea mulţimilor deschise şi închise.

Definiţie. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Dacă $x \in X$, atunci orice mulţime care conţine o mulţime deschisă (în X) ce conţine x se numeşte vecinătate (în X) a lui x. Mulţimea vecinătăţilor lui x se notează cu $\mathcal{V}_x$.*

Notă. $V \in \mathcal{V}_x$ dacă şi numai dacă există $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset V$ dacă şi numai dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset V$.

Propoziţie. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $x \in X$ şi $\mathcal{V}_x$ mulţimea vecinătăţilor lui x. Atunci:*
1) *Dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.*
2) *Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ şi $V \subset W$ atunci $W \in \mathcal{V}_x$.*
3) *Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ atunci $x \in V$.*
4) *Dacă $V \in \mathcal{V}_x$ atunci $W \in \mathcal{V}_x$ există astfel încât $W \subset V$ şi pentru orice $y \in W$ rezultă că $W \in \mathcal{V}_y$.*

Punct interior al unei mulţimi

Definiţie. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Un element $x \in X$ se numeşte punct interior al mulţimii $A \subset X$ dacă aceasta este o vecinătate (în X) a lui x.*

Obsevaţie. *(X, d) un spaţiu metric. Un element $x \in X$ este punct interior al mulţimii $A \subset X$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_n$ astfel încât $x_n \to x$ să rezulte că există n_0 astfel încât $x_n \in A$ pentru orice $n \geq n_0$.*

Rezultatul de mai jos prezintă o caracterizare a mulţimilor deschise în termeni de puncte interioare şi în termeni de vecinătăţi.

Teoremă. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Pentru o submulţime A a lui X, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) A este deschisă (în X).
ii) Orice punct al lui A este un punct interior al lui A.
iii) A este vecinătate (în X) pentru orice punct al său.
Demonstraţie. (exerciţiu).

Punct de acumulare al unei mulţimi

Definiţie. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Un element $x \in X$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă orice vecinătate (în X) a lui x conţine cel puţin un punct al lui A diferit de x. Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se notează cu $A^{'}$.*

Observaţie. $A^{'} = \{x \in X \mid$ există $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to x$ şi $x_n \neq x\}$.

Lemă. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Pentru A şi B submulţimi a lui X, avem:*
i) $A \subseteq B \Rightarrow A^{'} \subseteq B^{'}$;
ii) $(A \cup B)^{'} = A^{'} \cup B^{'}$;
iii) $(A^{'})^{'} \subseteq A^{'}$;
iv) $A^{'}$ este închisă.

Exerciţii

1. O mulţime $V \subseteq X$ este vecinătate a lui $x \in X$ dacă şi numai dacă există o bilă deschisă din X, cu centrul în x, conţinută în V.

2. Un element $x \in X$ este punct interior al mulţimii A dacă şi numai dacă există o bilă deschisă din X, cu centrul în x, conţinută în A.

3. Un element $x \in \mathbb{R}^p$ este punct de acumulare al mulţimii A dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A$ astfel încât $0 < \|x - x_n\| < \frac{1}{n}$.

4. Orice punct din $[0, 1]$ este punct de acumulare al lui $[0, 1]$. Orice punct din $(0, 1)$ este punct interior al lui $[0, 1]$, dar 0 şi 1 nu sunt puncte interioare ale lui $[0, 1]$.

5. Orice punct al lui $(0,1)$ este punct de acumulare şi punct interior al lui $(0,1)$. Totuşi, 0 şi 1 sunt de asemenea puncte de acumulare ale lui $(0,1)$, deci *un punct de acumulare al unei mulţimi nu aparţine neapărat mulţimii respective.*

6. Să se determine punctele de acumulare şi cele interioare pentru mulţimea $[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

7. O submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ nu are puncte de acumulare şi nici puncte interioare.

Următorul rezultat, care furnizează o caracterizare a mulţimilor închise în termeni de puncte de acumulare, este extrem de util (vezi demonstraţia teoremei Heine-Borel şi a Teoremei de permanenţă a compacităţii pentru funcţii continue).

Teorema de caracterizare a mulţimilor închise cu ajutorul punctelor de acumulare. *Fie (X,d) un spaţiu metric. Pentru o submulţime F a lui X, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) F este închisă;

ii) $F^{'}\subseteq F$ i.e. F conţine orice punct de acumulare al său.

Demonstraţie.

i)⇒ii) Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $x\in F^{'}\setminus F$. Atunci $x\in X\setminus F$ şi, cum $X\setminus F$ este mulţime deschisă, deducem că $X\setminus F$ este o vecinătate a lui x, deci $X\setminus F$ conţine cel puţin un punct din F. Această contradicţie încheie demonstraţia acestei implicaţii.

ii)⇒i) Vom arăta că $X\setminus F$ este deschisă. Dacă $y\in X\setminus F$, atunci $y\notin F^{'}$, deci există o vecinătate V a lui y care nu conţine puncte din F, i.e. $V\subseteq X\setminus F$, adică $X\setminus F$ este o vecinătate a lui y. Prin urmare, cum y a fost ales arbitrar în $X\setminus F$, deducem că $X\setminus F$ este deschisă. □

Teorema intervalelor nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$

Reamintim că dacă $a,b\in\mathbb{R}$, cu $a\leq b$, intervalul deschis din $\mathbb{R}$, notat cu (a,b), este mulţimea deschisă $\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$. Similar, intervalul închis din $\mathbb{R}$, notat cu $[a,b]$, este mulţimea închisă $\{x\in\mathbb{R}\mid a\leq x\leq b\}$. Produsul cartezian a două intervale se numeşte dreptunghi, iar produsul cartezian a trei intervale se numeşte paralelipiped. Pentru simplitate, vom folosi termenul de interval (din $\mathbb{R}^n$), indiferent de n, mai precis vom adopta următoarea:

Definiţie. *Un interval deschis J, din $\mathbb{R}^n$, este produsul a n intervale deschise din $\mathbb{R}$.*

Observaţie. *Prin urmare, dat un interval deschis J, din $\mathbb{R}^n$, există a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n\in\mathbb{R}$, $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, ..., $a_n<b_n$, astfel încât*

$$J=\{x=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in\mathbb{R}^n\mid a_i<\zeta_i<b_i,\text{ pentru orice } i\in\{1,2,...n\}\}=\underset{i=1}{\overset{n}{\times}}(a_i,b_i).$$

Similar, avem:

Definiţie. *Un interval închis I, din $\mathbb{R}^n$, este produsul a n intervale închise din $\mathbb{R}$.*

Observaţie. *Prin urmare, pentru un interval închis I, din $\mathbb{R}^n$, există a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., $b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$, ..., $a_n \leq b_n$, astfel încât*

$$I = \{x = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq \zeta_i \leq b_i, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, ...n\}\} = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} [a_i, b_i].$$

Exerciţii

1. Un interval deschis din $\mathbb{R}^n$ este mulţime deschisă.

2. Un interval închis din $\mathbb{R}^n$ este mulţime închisă.

3. O submulţime a lui $\mathbb{R}^n$ este mărginită dacă şi numai dacă există un interval în care este conţinută.

Aşa cum am văzut, proprietatea crucială a sistemului numerelor reale, echivalentă cu faptul că relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă, este aceea că pentru orice şir de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}$, există un element, din $\mathbb{R}$, care se află în fiecare interval. Această proprietate este valabilă într-un cadru mai general (anume în $\mathbb{R}^n$). Mai precis este valabilă următoarea:

Teorema intervalelor nevide închise incluse. *Fie $(I_m)_{m \geq 1}$ un şir de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$, deci, astfel încât $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_m \supseteq I_{m+1} \supseteq ....$ Atunci există un element din $\mathbb{R}^n$ care se află în fiecare interval.*

Demonstraţie. Dacă $I_m = I_1^m \times I_2^m \times ... \times I_n^m$ (unde $I_1^m, I_2^m, ..., I_n^m$ sunt intervale nevide închise din $\mathbb{R}$) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, atunci $I_i^{m+1} \subset I_i^m$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$ şi orice $m \in \mathbb{N}$. Aplicând Principiul intervalelor nevide închise incluse din $\mathbb{R}$, deducem că, pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, există $\zeta_i \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_i^m$. Prin urmare $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} I_m$. $\square$

Teorema Bolzano-Weierstrass. *Orice submulţime mărginită şi infinită a lui $\mathbb{R}^n$ are (cel puţin) un punct de acumulare.*

Demonstraţie. Fie A o submulţime mărginită şi infinită a lui $\mathbb{R}^n$ şi I_1 un interval închis astfel încât $A \subseteq I_1$.

Prin înjumătăţirea "laturilor" lui I_1 se obţin 2^n intervale închise incluse în I_1. Deoarece A este infinită, cel puţin unul dintre cele 2^n intervale închise incluse în I_1 va conţine o infinitate de elemente din A. Fie I_2 un astfel de interval închis inclus în I_1. Se repetă procedeul de mai sus şi se obţine un şir $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse din $\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că mulţimea $I_k \cap A$ este infinită pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Conform Teoremei intervalelor nevide închise incluse există $\eta \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\eta \in I_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că η este punct de acumulare al lui A, ceea ce va încheia demonstraţia.

Într-adevăr, adoptând notaţia $l(I_k) \overset{def}{=} \max\{b_1^k - a_1^k, ..., b_n^k - a_n^k\}$, unde $I_k = [a_1^k, b_1^k] \times ... \times [a_n^k, b_n^k]$, observăm că $0 < l(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Pentru o vecinătate arbitrară V a lui η există $r > 0$ cu proprietatea că $B(\eta, r) \subseteq V$. Există k_0 astfel încât $I_{k_0} \subseteq V$. Într-adevăr, deoarece $\|\eta - w\| \leq \sqrt{n} l(I_k) = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} l(I_1)$ pentru orice η şi w din I_k, există k, suficient de mare, astfel încât $\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} l(I_1) < r$, iar pentru un astfel de k avem $I_k \subseteq V$. Deoarece $I_{k_0} \cap A$ este infinită, deducem că V conţine cel puţin un element al lui A diferit de η. Prin urmare η este punct de acumulare al lui A. $\square$

Exerciţii

1. Să se găsească o submulţime a lui $\mathbb{R}^2$ care nu este nici deschisă, nici închisă.

2. Orice submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ este reuniunea unei familii numărabile de mulţimi închise.

3. Orice submulţime închisă a lui $\mathbb{R}^n$ este intersecţia unei familii numărabile de mulţimi deschise.

Definiţie. (**Aderenţa sau închiderea unei mulţimi**) *Pentru o submulţime A a lui X, fie $\overline{A}$ intersecţia tuturor submulţimilor închise a lui X care conţin pe A. $\overline{A}$ se numeşte închiderea (sau aderenţa) lui A şi este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care conţine pe A.*

Exerciţii

Fie (X, d) un spaţiu metric. Să se arate că, pentru A şi B submulţimi a lui X, avem:

i) $\overline{A}$ este o mulţime închisă;

ii) $A \subseteq \overline{A}$;

iiii) A este închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$;

iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

v) $\overline{A} = \{x \in X \mid B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pentru orice $r > 0\} = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset$ pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x\} = \{x \in X \mid$ există $(x_n)_n \subset A$ astfel încât $x_n \to x\}$;

vi) dacă $A \subseteq B \subseteq X$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$;

vii) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

Exerciţii

Fie (X, d) un spaţiu metric. Să se arate că, pentru orice submulţime A a lui X, avem:

i) $\overline{A} = A \cup A^{'}$;

ii) A este închisă $\Longleftrightarrow A^{'} \subseteq A$.

Definiţie. (**Interiorul unei mulţimi**) Pentru o submulţime A a lui X, fie $\overset{\circ}{A}$ reuniunea tuturor submulţimilor deschise a lui X care sunt conţinute în A. $\overset{\circ}{A}$ se numeşte interiorul lui A şi este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulţime deschisă care este conţinută în A.

Lemă. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Să se arate că, pentru A şi B submulţimi a lui X, avem:*

i) $\overset{\circ}{A}$ *este o mulţime deschisă;*

ii) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$*;*

iii) A *este deschisă* $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$*;*

iv) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$*;*

v) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid$ *există* $r > 0$ *astfel încât* $B(x,r) \subseteq A\} = \{x \in X \mid$ *există o mulţime deschisă* D *astfel încât* $x \in D \subseteq A\}$*;*

vi) dacă $A \subseteq B \subseteq X$*, atunci* $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$*;*

vii) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$*.*

Demonstraţie. (exerciţiu).

Exerciţii.

1. Există o submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ şi $\overline{A} = \mathbb{R}^n$?

2. Să se arate că, pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}^n$, avem: $\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - \overset{\circ}{A}$ şi $\overset{\circ}{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - \overline{A}$.

3. Să se arate că dacă A şi B sunt mulţimi deschise din $\mathbb{R}$, atunci $A \times B$ este mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$.

4. Fie A şi B submulţimi ale lui $\mathbb{R}$. Atunci $A \times B$ este o mulţime închisă din $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă A şi B sunt mulţimi închise din $\mathbb{R}$.

5. Dacă A este o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$, atunci $x \in \mathbb{R}^n$ este un punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă orice vecinătate a lui x conţine o infinitate de puncte din A.

6. O submulţime finită a lui $\mathbb{R}^n$ nu are puncte de acumulare. Există submulţimi nemărginite ale lui $\mathbb{R}^n$ care nu au puncte de acumulare.

Definiţie. (**Frontiera unei mulţimi**) *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Dacă* A *este o submulţime a lui* X*, atunci* $x \in X$ *se numeşte punct frontieră al lui* A *dacă orice vecinătate a lui* x *conţine (cel puţin) un punct din* A *şi (cel puţin) un punct din* $X - A$*. Mulţimea punctelor frontieră se notează cu* $Fr(A)$*.*

Lemă. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric. Să se arate că, pentru* A *şi* B *submulţimi a lui* X*, avem:*

i) $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$*;*

ii) $Fr(A) = Fr(X - A)$*;*

iii) A *este deschisă* $\Leftrightarrow Fr(A) = \overline{A} - A \Leftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset$*;*

iv) A *este închisă* $\Leftrightarrow Fr(A) = A - \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow Fr(A) \subseteq A$*;*

v) A *este deschisă şi închisă* $\Leftrightarrow Fr(A) = \emptyset$*;*

vi) $A = \{x \in X \mid$ *există două şiruri* $(x_n)_n \subset A$ *şii* $(y_n)_n \subset X - A$ *astfel încât* $x_n \to x$ *şi* $y_n \to x\}$*.*

Demonstraţie. (exerciţiu).

Observaţie. *Noţiunea de frontieră a unei mulţimi din* X *intervine, în mod esenţial, în teoria integralei Riemann pentru funcţii de mai multe variabile.*

Exerciţii. Să se determine $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, A' şi $Fr(A)$, pentru următoarele submulţimi ale lui $\mathbb{R}$:
a) $A = [0,1] \cup \{2\}$;
b) $A = \{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$;
c) $A = \mathbb{Q}$;
d) $A = (0,1) \cap \mathbb{Q}$;
e) $A = \mathbb{N}$.

Teorema de structură a mulţimilor deschise

Rezultatul de mai jos arată că intervalele deschise constituie "cărămizile" cu ajutorul cărora se poate construi orice mulţime deschisă a dreptei reale.

Teorema de structură a mulţimilor deschise. *Orice mulţime deschisă şi nevidă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise, nevide, disjuncte două câte două.*

Demonstraţie. Fie U o mulţime deschisă a dreptei reale.

Afirmaţia 1. *Pentru orice punct $x \in U$ există un cel mai mare interval deschis care conţine pe x şi care este conţinut în U, interval notat cu I_x şi numit componentă a lui U.*

Justificarea afirmaţiei 1. Deoarece U este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$, deci există un interval deschis care conţine pe x şi care este conţinut în U. Pentru a "maximiza la dreapta" acest interval, vom considera mulţimea $S = \{y \in \mathbb{R} \mid x < y \text{ şi } y \notin U\}$.

Dacă $S = \emptyset$, atunci $(x, \infty) \subseteq U$.

Dacă $S \neq \emptyset$, atunci, cum S este minorată, există $\zeta = \inf S$.

Relativ la ζ, avem următoarele două proprietăţi:

a) $\zeta \notin U$ (în particular, avem $x \neq \zeta$).

Justificarea proprietăţii a): Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $\zeta \in U$, atunci, cum U este deschisă, există $\delta > 0$ astfel încât $(\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U$. Deoarece $\inf S = \zeta < \zeta + \delta$, conform Teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulţimi, există $y \in S$ cu proprietatea că $\zeta - \delta < \zeta < y < \zeta + \delta$, deci $y \in (\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U$, de unde obţinem contradicţia $y \notin S$.

b) $(x, \zeta) \subseteq U$.

Justificarea proprietăţii b): Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există $x_0 \in (x, \zeta)$ astfel încât $x_0 \notin U$, atunci $x_0 \in S$, de unde contradicţia $\zeta \leq x_0$.

O construcţie analoagă la stânga punctului x ne asigură existenţa unui interval deschis $I_x = (\eta, \zeta) \subseteq U$, unde $\eta, \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, cu proprietatea că $\eta, \zeta \notin U$, ceea ce încheie justificarea afirmaţiei 1.

Este evident acum, în baza Afirmaţiei 1, că $U = \bigcup_{x \in U} I_x$.

Afirmaţia 2. *Pentru orice două componente I_{x_1} şi I_{x_2} ale lui U, avem* $I_{x_1} \cap I_{x_2} \neq \emptyset \Rightarrow I_{x_1} = I_{x_2}$.

Justificarea afirmaţiei 2. Fie $x_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$, unde $I_{x_1} = (\eta_1, \zeta_1)$ şi $I_{x_2} = (\eta_2, \zeta_2)$. Atunci $\eta_1 < x_0 < \zeta_1$ şi $\eta_2 < x_0 < \zeta_2$. Dacă $\zeta_1 < \zeta_2$, atunci $\eta_2 < x_0 < \zeta_1 < \zeta_2$, de unde $\zeta_1 \in (\eta_2, \zeta_2) \subseteq U$, contradicţie care arată că $\zeta_1 \geq \zeta_2$. Similar obţinem că $\zeta_1 \leq \zeta_2$. Deci $\zeta_1 = \zeta_2$. Analog se arată că $\eta_1 = \eta_2$, ceea ce încheie justificarea afirmaţiei 1.

Dacă $\mathcal{M}$ reprezintă familia componentelor distincte ale lui U, putem considera funcţia $f : \mathcal{M} \to \mathbb{Q}$ dată de $f(I_x) = r_x$, unde $r_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$. Deoarece elementele familiei $\mathcal{M}$ sunt distincte, conform Afirmaţiei 2, f este injectivă, deci, cum $\mathbb{Q}$ este numărabilă, $\mathcal{M}$ este cel mult numărabilă. $\square$

Marginile unei mulţimi mărginite de numere reale sunt puncte aderente ale mulţimii

Rezultatul de mai jos arată că deşi marginile unei mulţimi mărginite de numere reale pot să nu aparţină mulţimii, ele se află într-o strânsă relaţie de natură topologică cu mulţimea.

Teorema privind apartenenţa marginilor unei mulţimi la aderenţa acesteia. *Pentru orice mulţime mărginită de numere reale A, avem:*
α) $\sup A \in \overline{A}$ şi $\inf A \in \overline{A}$;
β) dacă $\sup A \notin A$, atunci $\sup A \in A^{'}$ şi dacă $\inf A \notin A$, atunci $\inf A \in A^{'}$.
Demonstraţie.
α) Pentru orice $V \in \mathcal{V}_{\sup A}$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât este validă inegalitatea $(\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \subseteq V$. Atunci, conform teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulţimi, există $a \in A$ cu proprietatea că $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$, deci $a \in (\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \cap A \subseteq V \cap A$, adică $V \cap A \neq \emptyset$, ceea ce arată că $\sup A \in \overline{A}$. Similar se dovedeşte că $\inf A \in \overline{A}$.
β) Dacă $\sup A \notin A$, raţionamentul de mai sus arată $(V \setminus \{\sup A\}) \cap A \neq \emptyset$, deci $\sup A \in A^{'}$. Similar se justifică afirmaţia privitoare la marginea inferioară a lui A. $\square$

Definiţia spaţiului topologic

Din cele discutate mai sus se degajă, la un nivel de abstractizare mai ridicat, următoarele definiţii:

Definiţie. *Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte topologie pe X o familie de submulţimi ale lui X, notată cu τ, care verifică următoarele trei axiome:*
1) $\emptyset$, $X \in \tau$;
2) dacă D_1, $D_2 \in \tau$, atunci $D_1 \cap D_2 \in \tau$;
3) dacă $D_i \in \tau$, pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup\limits_{i \in I} D_i \in \tau$.

Se numeşte spaţiu topologic un dublet (X, τ), unde X este o mulţime nevidă şi τ este o topologie pe mulţimea X. Elementele mulţimii τ se numesc mulţimi deschise. O submulţime F a lui X se numeşte închisă în X dacă $X - F$ este deschisă în X.

Observaţie. *Noţiunile de mulţime închisă, vecinătate a unui punct, punct interior al unei mulţimi, punct de acumulare al unei mulţimi, închidere a unei mulţimi, interior al unei mulţimi şi cea de frontieră a unei mulţimi au sens în cadrul mai general al unui spaţiu topologic.*

Proprietăţile mulţimilor deschise
Fie (X, τ) *un spaţiu topologic. Atunci:*
1. $\emptyset$ *şi* X *sunt deschise (în* X*).*
2. *Intersecţia oricăror două mulţimi deschise din* X *este o mulţime deschisă din* X*.*
3. *Reuniunea unei familii arbitrare de mulţimi deschise din* X *este o mulţime deschisă din* X*.*

Proprietăţile mulţimilor închise
Fie (X, τ) *un spaţiu topologic. Atunci:*
1. $\emptyset$ *şi* X *sunt închise (în* X*).*
2. *Reuniunea oricăror două mulţimi închise din* X *este o mulţime închisă din* X*.*
3. *Intersecţia unei familii arbitrare de mulţimi închise din* X *este o mulţime închisă din* X*.*

Definiţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $x \in X$*. O mulţime* V *se numeşte vecinătate a lui* x *dacă există* $D \in \tau$ *astfel încât* $x \in D \subset V$*. Notăm cu* $\mathcal{V}_x$ *mulţimea vecinătăţilor lui* x*.*

Propoziţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic,* $x \in X$ *şi* $\mathcal{V}_x$ *mulţimea vecinătăţilor lui* x*. Atunci:*
1) *Dacă* $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ *atunci* $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$*.*
2) *Dacă* $V \in \mathcal{V}_x$ *şi* $V \subset W$ *atunci* $W \in \mathcal{V}_x$*.*
3) *Dacă* $V \in \mathcal{V}_x$ *atunci* $x \in V$*.*
4) *Dacă* $V \in \mathcal{V}_x$ *atunci* $W \in \mathcal{V}_x$ *există astfel încât* $W \subset V$ *şi pentru orice* $y \in W$ *rezultă că* $W \in \mathcal{V}_y$*.*

Definiţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $x \in X$*. Un şir* $(x_n)_{n \geq 1}$ *se numeşte convergent la* $a \in I$ *dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}_y$ *există* n_ε *astfel încât* $x_n \in V$ *pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$*.*

Observaţie. Intr-un spaţiu topologic limita nu este unică.

Definiţie. *Fie* (X, τ) *un spaţiu topologic şi* $A \subset X$*. Atunci*
1) $\overset{\circ}{A} = \{x \in X \mid$ există o mulţime deschisă D astfel încât $x \in D \subseteq A\} = \{x \in X \mid A \in \mathcal{V}_x\}$ este interiorul lui A.
2) $\overline{A} = \{x \in X \mid V \cap A \neq \emptyset$ pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x\}$ este închiderea lui A.
3) $A' = \{x \in X \mid V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_x\}$ este mulţimea punctelor de acumulare a mulţimii A.

4) $Fr\,(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ este frontiera lui A.
5) $iz\,(A) = A \setminus A'$ este mulţimea punctelor izolate.

Propoziţie. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subset X$. Atunci*
1) $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} = A' \cup A$.
2) Dacă $A \subset B$ atunci $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$, $A' \subset B'$ şi $\overline{A} \subset \overline{B}$.
3) $(A \cup B)' = A' \cup B'$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ şi $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = A \overset{\circ}{\cap} B$.
4) $Fr(A) = Fr(X - A) = \overline{A} \cap \overline{X - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$;
5) $\overline{A}$ este o mulţime închisă şi $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă.

Observaţie. Într-un spaţiu topologic este posibil ca A' să nu fiie închisă.

Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Propoziţie. *Mulţimea $\tau = \{D \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $y \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup (x, \infty] \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}\} \cup \{D \cup (x, \infty] \cup [-\infty, y) \mid D$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi $x, y \in \mathbb{R}\}$ este o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$, numită topologia uzuală pe $\overline{\mathbb{R}}$.*

Observaţie. *Toate noţiunile topologice descrise mai sus au sens în $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exemple. Să se arate că următoarele structuri sunt spaţii topologice:
1) (X, τ) unde $\tau = P\,(X)$.
2) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, X\}$.
3) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ şi A este o mulţime cu propritatea că $\emptyset \neq A \neq X$.
4) (X, τ) unde $\tau = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ şi A este o mulţime cu propritatea că $\emptyset \neq A \neq X$.
5) $(\mathbb{R}, \tau)$ unde $\tau = \{(a, \infty) \mid a \in \overline{\mathbb{R}}\}$.
Să se dermine mulţimile închise, şirurile convergente şi familia vecinătăţilor pentru un element din spaţiile topologice de mai sus.