Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Relaţii

Definiţie. *Se numeşte relaţie pe o mulţime nevidă X, orice submulţime nevidă ρ a lui $X \times X$. Dacă $(x, y) \in \rho$, vom scrie $x\rho y$.*

Definiţie. *O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte:*
- reflexivă dacă $x\rho x$ pentru orice $x \in X$;
- simetrică dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$ pentru orice $x, y \in X$;
- antisimetrică dacă $x\rho y$ şi $y\rho x \Rightarrow x = y$ pentru orice $x, y \in X$;
- tranzitivă dacă $x\rho y$ şi $y\rho z \Rightarrow x\rho z$ pentru orice $x, y, z \in X$.

Definiţie. *O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

Observaţie. *De multe ori relaţia de echivalenţă ρ se notează prin $\sim$. Astfel $x\rho y$ se scrie sub forma $x \sim y$.*

Exemple. Relaţiile de congruenţa, asemănare şi paralelism de la geometrie şi relaţia de congruenţa modulo n, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$, din algebră.

Definiţie. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X şi $x \in X$. Mulţimea $\hat{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$ se numeşte clasa de echivalenţă a lui x.*

Observaţie. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X şi $x, y \in X$. Atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.*

Definiţie. *Fie $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe X. Mulţimea $\{\hat{x} \mid x \in X\}$, notată $X/\sim$, se numeşte mulţimea cât (sau factor) a lui X generată de $\sim$.*

Funcţia $p : X \to X/\sim$, dată de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in X$, se numeşte surjecţia canonică generată de $\sim$.

Exemplu. Dacă pe $\mathbb{Z}$ considerăm relaţia de congruenţa modulo 3 notată cu $\equiv$ atunci $\mathbb{Z}/\equiv$ este $\mathbb{Z}_3$, iar $p : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_3, \oplus)$este un morfism de grupuri.

Definiţie. *O relaţie ρ pe o mulţime nevidă X se numeşte relaţie de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.*

Exemple. Relaţia de incluziune şi relaţia de ordine din $\mathbb{R}$, relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{N}$.

Observaţie. *De multe ori relaţia de ordine ρ se notează prin $\leq$. Astfel $x\rho y$ se scrie sub forma $x \leq y$.*

Definiţie. *Un cuplu $(X, \leq)$, unde X este o mulţime nevidă, iar $\leq$ este o relaţie de ordine pe X, se numeşte mulţime ordonată.*

Definiţie. *Mulţimea ordonată $(X, \leq)$ se numeşte total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (i.e. orice două elemente sunt comparabile).*

Definiţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă a lui X şi $m \in X$. Atunci*

1) *m se numeşte majorant (minorant) al lui A dacă pentru orice $a \in A$, avem $a \leq m$ (respectiv $a \geq m$).*

2) *Dacă există un majorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este majorată (mărginită superior). Dacă există un minorant $m \in X$ al lui A, atunci spunem că A este minorată (mărginită inferior). Dacă A este mărginită inferior şi superior, atunci A se numeşte mărginită.*

Observaţie. *Dacă m este majorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic cu acestă proprietate şi se numeşte maximul lui A (şi se notează cu* $\max(A)$*) sau ultim element al lui A sau cel mai mare element al lui A. Dacă m este minorant al lui A şi $m \in A$, atunci m este unic cu acestă proprietate şi se numeşte minimul lui A (şi se notează cu* $\min(A)$*) sau prim element al lui A sau cel mai mic element al lui A.*

Definiţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată şi A o submulţime nevidă majorată a lui X.*

1) *Se spune că A are margine superioară dacă există cel mai mic majorant (i.e. mulţimea majoranţilor lui A are minim, sau, altfel spus, mulţimea majoranţilor lui A are un cel mai mic element, adică, echivalent, mulţimea majoranţilor lui A are un prim element). În acest caz notăm cu* $\sup A$ *cel mai mic majorant al lui A.* $\sup A$ *se numeşte marginea superioară a lui A sau supremum de A.*

2) *Se spune că A are margine inferioară dacă există cel mai mare minorant (i.e. mulţimea minoranţilor lui A are maxim, sau, altfel spus mulţimea*

minoranţilor lui A are un cel mai mare element, sau, echivalent, mulţimea minoranţilor lui A are un ultim element). În acest caz notăm cu $\inf A$ *cel mai mare minorant al lui A.* $\inf A$ *se numeşte marginea inferioară a lui A, sau infimum de A.*

Observaţie. *Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă majorată a lui X. Dacă există* $\max A$*, atunci există şi* $\sup A$ *şi* $\sup A = \max A$.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată, A o submulţime nevidă minorată a lui X. Dacă există $\min A$*, atunci există şi* $\inf A$ *şi* $\inf A = \min A$.

Definiţie. *O relaţie de ordine $\leq$ pe mulţimea nevidă X se numeşte completă dacă pentru orice submulţime nevidă majorată A a lui X există* $\sup A$ şi $\inf A$. *Se spune în acest caz că mulţimea ordonată $(X, \leq)$ este complet ordonată.*

Exerciţii

1. Fie A o mulţime şi $(A_i)_{i \in I}$ o partiţie a lui A (i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice $i \neq j$). Să se arate că $x \sim y$ dacă şi numai dacă există $i \in I$ astfel încât $x, y \in A_i$ defineşte o relaţie de echivalenţă pe A, pentru care clasele de echivalenţă coincid cu elementele partiţiei considerate.

2. Fie X o mulţime nevidă. Pe $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ se consideră relaţia dată de $A \rho B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$. Să se arate că ρ este o relaţie de ordine care nu este totală dacă X are cel puţin două elemente.

3. Cu notaţiile de la punctul 2 considerăm mulţimea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Atunci $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$ şi $\inf \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i$.

4. Considerăm mulţimea ordonată $(\mathbb{N}, |)$ şi $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{N}$. Atunci $\sup A$= **c.m.m.m.c**$\{a_1, ..., a_n\}$ şi inf = **c.m.m.d.c**$\{b_1, ..., b_n\}$.

Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ (recapitulare)

Vom semnala proprietăţile definitorii ale $+$, $\cdot$ şi $\leq$ pe $\mathbb{R}$.

Propoziţie. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *este corp comutativ.*

Definiţie. *Un element* $M \in \mathbb{R}$ *se numeşte majorant al submulţimii* A *a lui* $\mathbb{R}$ *dacă*

$$a \leq M,$$

pentru orice $a \in A$.

Definiţie. *O submulţime* A *a lui* $\mathbb{R}$ *se numeşte majorantă (sau mărginită superior) dacă există un majorant al său.*

Definiţie. *Dacă pentru submulţime* A *a lui* $\mathbb{R}$ *există un majorant al său care aparţine lui* A *acesta este unic şi se numeşte maximul (sau cel mai mare element al lui* A *sau ultimul element al lui* A*) şi se notează cu* $\max A$.

Remarcă. *Definiţia de mai sus implică aşa numita axiomă a lui Cantor care afirmă că orice submulţime nevidă şi majorată a lui* $\mathbb{R}$ *admite supremum.*

Remarcă. *Similar se definesc noţiunile de minorant, mulţime minorată şi minim.*

Definiţie. *Pentru o submulţime* A *a lui* $\mathbb{R}$ *majorată şi nevidă, mulţimea majoranţilor săi are un cel mai mic element care poartă numele de marginea superioară a lui* A *şi care se notează cu* $\sup A$.

Aşadar $\sup A$ este cel mai mic majorant al lui A.

Remarcă. *Similar se defineşte noţiunea de margine inferioară a unei submulţimi a lui* $\mathbb{R}$ *minorată şi nevidă, care se notează cu* $\inf A$.

Aşadar $\inf A$ este cel mai mare minorant al lui A.

Propoziţie. *Relaţia de ordine* $\leq$ *pe* $\mathbb{R}$ *are următoarele proprietăţi:*
i) este compatibilă cu structura algebrică, i.e.

a)

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;

b)

$$x \leq y \ \& \ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz,$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$;

ii) este total ordonată i.e. pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$

iii) este complet ordonată i.e. orice submulţime nevidă şi majorată a lui $\mathbb{R}$ admite supremum.

Exemple

1. *Să se determine* $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ *şi* $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$*;*

Deoarece $0 \leq \frac{m}{1+m+n}$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este minorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x > 0$ minorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $x < \frac{1}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{1}{x} - 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\inf\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Deoarece $\frac{m}{1+m+n} \leq 1$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, tragem concluzia că 1 este majorant pentru mulţimea $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Dacă, prin reducere la absurd, există $x < 1$ majorant al mulţimii $\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deducem că $\frac{n}{n+2} < x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. $n < \frac{2x}{1-x}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, mulţimea $\mathbb{N}$ este mărginită, ceea ce constituie o contradicţie.

Aşadar $\sup\{\frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\} = 1$.

2. *Să se arate că inegalitatea* $\inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$ *este valabilă pentru orice* $\emptyset \neq B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, A *mărginită.*

Deoarece $x \leq \sup A$ pentru orice $x \in A$ şi $B \subseteq A$, deducem că $\sup A$ este majorant pentru B, deci, cum $\sup B$ este cel mai mic majorant al lui B, obţinem că $\sup B \leq \sup A$.

Similar se arată că $\inf A \leq \inf B$.

Temă

1. Să se determine:

i) $\inf[0, 1)$ şi $\sup[0, 1)$

ii) $\inf[0, 1) \cup \{2, 3\}$ şi $\sup[0, 1) \cup \{2, 3\}$

iii) $\inf(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$ şi $\sup(-1, 1] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{5}]$

iv) $\inf\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, \ m < 2n\}$ şi $\sup\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n\}$*;*

2. Să se arate că dacă A şi B sunt submulţimi nevide şi mărginite ale lui $\mathbb{R}$, atunci $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

3. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$

ii). $f(xy) = f(x) f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Indicaţie. Este mai uşor să determinăm funcţiile continue (monotone) care verifică i) şi ii).

Teoremă de caracterizare cu ε a marginilor unei mulţimi. *Pentru orice mulţime nevidă mărginită de numere reale A şi $a, b \in \mathbb{R}$, avem:*

α) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $\sup A = a$*;*

ii) ($x \leq a$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$).

β) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $\inf A = b$*;*

ii) ($b \leq x$, pentru orice $x \in A$) şi (pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x' \in A$ astfel încât $x' < b + \varepsilon$).

Demonstraţie.

α) i)$\Rightarrow$ii) Deoarece a este majorant al lui A, deducem că $x \leq a$ pentru orice $x \in A$. Deoarece $a - \varepsilon < a$, iar a este cel mai mic majorant al lui A, deducem că $a - \varepsilon$ nu este majorant al lui A, deci există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$.

ii)$\Rightarrow$i) Deoarece $x \leq a$, pentru orice $x \in A$, deducem că a este majorant al lui A.

Vom arăta acum că a este cel mai mic majorant al lui A.

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că există b majorant al lui A astfel încât $b < a$. Atunci, conform Teoremei privind calitatea de corp arhimedeean a lui $\mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $1 < n(a-b)$, i.e. $\frac{1}{n} < a-b$, de unde $x \leq b < a - \frac{1}{n}$ pentru orice $x \in A$, fapt care, în conformitate cu ipoteza, contrazice existenţa unui element $x' \in A$ astfel încât $a - \frac{1}{n} < x'$. Aşadar a este cel mai mic majorant al lui A.

Prin urmare $a = \sup A$.

β) Demonstraţia este similară. $\square$

Temă

3. Pentru două mulţimi mărginite $A, B \subseteq \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$ definim $a + A = \{a + x \mid x \in A\}$, $-A = \{-a \mid x \in A\}$, $A + B = \{a + b \mid a \in A$ şi $b \in B\}$ şi $A \cdot B = \{ab \mid a \in A$ şi $b \in B\}$. Arătaţi că:

i) $\sup(a + A) = a + \sup(A)$

ii) $\sup(-A) = -\inf(A)$

iii) $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

iv) dacă $A \subseteq B$ atunci $\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$, i.e. marginile unei submulţimi se situează între marginile mulţimii

v) dacă $a \geq 0$ şi $b \geq 0$, pentru orice $a \in A$ şi $b \in B$, atunci $A \cdot B$ este mărginită şi $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Observaţie. *Dacă A şi B nu sunt mulţimi care au toate elementele pozitive, egalitatea* $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B)$ *nu mai rămâne valabilă,* aşa cum arată următorul exemplu: $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{-1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, pentru care $\inf A = 0$, $\inf B = -2$ şi $\inf(A \cdot B) = -2$.

vi) $A \cup B$ este mărginită şi $\inf\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

Principiul intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat extrem de util, echivalent cu Axioma lui Cantor şi cu Criteriul lui Cauchy, care se va utiliza, spre exemplu, pentru a justifica faptul că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Principiul intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor. *Fie* a_n,$b_n \in \mathbb{R}$, *unde* $n \in \mathbb{N}$, *astfel încât:*

a) $a_n < b_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$;

b) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Demonstraţie. Deoarece mulţimile $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ şi $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt minorate de a_1 şi majorate de b_1, conform Axiomei lui Cantor, există $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ şi $b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Deoarece $a_n \leq b_m$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deducem că $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci $[a, b] \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$, de unde $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. $\square$

Exerciţiu

Să se arate că $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$.

Dreapta reală încheiată $\overline{\mathbb{R}}$

Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, unde elementele $-\infty$ şi ∞ sunt exterioare lui $\mathbb{R}$ şi convenim că

$$-\infty < x < \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi poartă numele de dreapta reală încheiată.

Remarcă. *Dacă submulţimea nevidă A a lui $\mathbb{R}$ nu este mărginită superior, atunci convenim să spunem că marginea superioară a lui A este ∞ şi să scriem $\sup A = \infty$. Similar, dacă submulţimea nevidă A a lui $\mathbb{R}$ nu este mărginită inferior, atunci convenim să spunem că marginea inferioară a lui A este $-\infty$ şi să scriem $\inf A = -\infty$.*

Remarcă. *Intervalele pe $\overline{\mathbb{R}}$ se definesc similar celor pe $\mathbb{R}$.*

Exemplu. $\sup\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \infty$ deoarece mulţimea $\{\frac{n^2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior căci $n - 1 < \frac{n^2}{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Temă. Să se determine $\inf A$ şi $\sup A$ în următoarele cazuri:
i) $A = \{x^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$;
ii) $A = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$;
iii) $A = \mathbb{Q}$.

Intervale pe $\mathbb{R}$

Definiţie. O mulţime se numeşte inteval dacă pentru orice trei numere reale $a < c < b$ astfel încât $a, b \in I$ să avem $c \in I$.

Pentru $a, b \in \mathbb{R}$ considerăm următoarele mulţimi, numite intervale:

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Construcţia lui $\mathbb{R}$

Axiomele lui Peano

Se consideră ca noţiuni primare mulţimea $\mathbb{N}$ şi o lege care asociază oricărui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n^{'} \in \mathbb{N}$ numit succesorul lui n.

AP1. *Orice* $n \in \mathbb{N}$ *are un unic succesor (deci* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *dată de* $s(n) = n^{'}$ *este funcţie).*
AP2. *Există un element din* $\mathbb{N}$*, desemnat prin* 0*, care are proprietatea că* $n^{'} \neq 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *(deci* $0 \notin s(\mathbb{N})$*). Notam*
AP3. *Pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $m \neq n$*, avem* $m^{'} \neq n^{'}$ *(deci* s *este injectivă).*
AP4. *Dacă* $S \subseteq \mathbb{N}$*,* $0 \in S$ *şi* $(n \in S \Rightarrow n^{'} \in S)$*, atunci* $S = \mathbb{N}$.

Din motive evidente, ultima axiomă poartă numele de axioma inducţiei matematice.

Notaţie. $\mathbb{N}^{*}=s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Adunarea pe $\mathbb{N}$

Definim $1 = 0^{'}$. *Fiecărui cuplu* (m, n) *de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin* $m+n$ *definit prin inducţie matematică după* n *astfel:*$m + 0 = m$, $m + 1 = m^{'}$ *şi* $m + n^{'} = (m + n)^{'}$.

Înmulţirea pe $\mathbb{N}$

Fiecărui cuplu (m, n) *de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin* $m \cdot n$ *definit prin inducţie matematică după* n *astfel:* $m \cdot 0 = 0$, $m \cdot 1 = m$ *şi* $m \cdot n^{'} = mn + m$.

Relaţia de ordine pe $\mathbb{N}$

Teoremă. *Dacă* $m, n \in \mathbb{N}$ *avem una şi numai una dintre următoarele situaţii:*
a) $m = n$;
b) există $p \in \mathbb{N}^{*}$ *astfel încât* $m = n + p$;
c) există $q \in \mathbb{N}^{*}$ *astfel încât* $n = m + q$.

Definiţie. *Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin $m < n$, dacă există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n = m + p$.*

Observaţie. *Pe $\mathbb{N}$ putem introduce relaţia $\leq$ dată de echivalenţa $n \leq m \Leftrightarrow n < m$ sau $n = m$. Conform teoremei de mai sus, $\mathbb{N}$, cu această relaţie, devine o mulţime total ordonată.*

Mulţimi finite şi infinite

Definiţie. *Un segment iniţial al lui $\mathbb{N}$, determinat de $k \in \mathbb{N}$, este o submulţime a lui $\mathbb{N}$ de forma $\{0, 1, 2, ..., k\}$. O mulţime A se numeşte finită dacă este vidă sau dacă există o bijecţie între ea şi un segment iniţial al lui $\mathbb{N}$. În caz contrar, mulţimea se numeşte infinită.*

Mulţimi numărabile şi mulţimi cel mult numărabile

Definiţie. *O mulţime A se numeşte numărabilă dacă există o bijecţie între ea şi $\mathbb{N}$. O mulţime A se numeşte cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.*

Propoziţie. *Orice submulţime a unei mulţimi finite este finită. Orice submulţime a unei mulţimi numărabile este cel mult numărabilă.*

Teoremă. *Reuniunea unei familii finite de mulţimi finite este finită. Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.*

Exemple.

1) $\mathbb{Z}$ este numărabilă. Considerăm funcţia bijectivă $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită de $f(n) = \begin{cases} 2n \text{ dacă } n \in \mathbb{N} \\ -2n - 1 \text{ dacă } n \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă. Considerăm funcţia bijectivă $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definită de $f(n, m) = 2^n (2m + 1) - 1$.

3) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstraţie. Deoarece $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$, unde $A_n = \{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, ...\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_0 = \{0\}$, deducem că $\mathbb{Q}$ este cel mult numărabilă. Cum $\mathbb{Q}$ este infinită, deducem că $\mathbb{Q}$ este numărabilă. $\square$

$\mathbb{R}$ nu este cel mult numărabilă

Teoremă. *$\mathbb{R}$ nu este cel mult numărabilă.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea infinită $\mathbb{N}$ este o submulţime a lui $\mathbb{R}$, deducem că $\mathbb{R}$ este infinită.

Vom arăta acum că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Într-adevăr, să presupunem, prin reducere la absurd, că $\mathbb{R}$ este numărabilă. Atunci există x_n, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n \neq x_m$ pentru orice $n \neq m$ şi $\mathbb{R} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Fie a_1 şi b_1 cu proprietatea că $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Împărţim intervalul $[a_1, b_1]$ în trei părţi egale. Atunci cel puţin unul dintre aceste trei subintervale nu va conţine pe x_2. Aşadar există a_2 şi b_2 astfel încât $[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$ şi $x_2 \notin [a_2, b_2]$. Repetând acest procedeu, găsim a_n şi b_n cu următoarele proprietăţi: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ şi $x_n \notin [a_n, b_n]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Conform Principiului intervalelor nevide închise incluse al lui Cantor, există $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$. Atunci $x \neq x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde obţinem contradicţia $x \notin \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \mathbb{R}$. $\square$

Observaţie. *Mulţimea numerelor iraţionale este infinită şi nu este numărabilă.*

$m - n = m' - n'$

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI $\mathbb{Z}$

Definiţie. *Pe mulţimea* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *definim următoarea relaţie binară:* $(m, n) \equiv (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'$.

Observaţie. *Definiţia relaţiei binare de mai sus, care se dovedeşte a fi o relaţie de echivalenţă, este naturală deoarece ecuaţiile* $x+n = m$ *şi* $x+n' = m'$ *au aceeaşi soluţie dacă şi numai dacă* $m + n' = n + m'$ *".*

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *două operaţii, anume:*
- *o adunare prin* $(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$;
- *o înmulţire prin* $(m, n) \cdot (m', n') = (mm' + nn', mn' + nm')$.

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ *două operaţii, anume:*

- *o adunare prin* $\widehat{(m, n)} + \widehat{(m', n')} = \widehat{(m + m', n + n')}$, *i.e.* $\widehat{(m, n)} + \widehat{(m', n')} = \widehat{(m, n) + (m', n')}$;

- *o înmulţire prin* $\widehat{(m,n)} \cdot \widehat{(m',n')} = \widehat{(mm'+nn', mn'+nm')}$, *i.e.* $\widehat{(m,n)} \cdot \widehat{(m',n')} = \widehat{(m,n) \cdot (m',n')}$.

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii pe* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ *sunt corecte, adică nu depind de reprezentanţii aleşi.*

Definiţie. *Mulţimea* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\equiv$ *înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin* $\mathbb{Z}$, *iar elementele sale se numesc numere întregi.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{Z}$

Să observăm că elementele lui $\mathbb{Z}$, diferite de 0, sunt mulţimile de forma $\{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sau $\{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $r, s \in \mathbb{N}^*$.

Definiţie. *Spunem că* $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ *este pozitiv dacă* $u > v$, *adică dacă există* $r \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\alpha = \{(n+r,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. *Spunem că* $\alpha = \widehat{(u,v)} \in \mathbb{Z}$ *este negativ dacă* $u < v$, *adică dacă există* $s \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\alpha = \{(n,n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Observaţii

1. *Orice număr întreg este fie* 0, *fie pozitiv, fie negativ.*
2. *Suma şi produsul a două numere întregi pozitive sunt pozitive.*

Scufundarea lui $\mathbb{N}$ în $\mathbb{Z}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dată de $f(p) = \widehat{(p,0)}$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are următoarele proprietăţi:
a) $f(p+q) = f(p) + f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$;
b) $f(pq) = f(p)f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$;
c) $p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$.
Prin urmare f *este injectivă şi, ca atare, putem identifica* $p \in \mathbb{N}$ *cu* $f(p) \in \mathbb{Z}$, *deci* f *generează o scufundare a lui* $\mathbb{N}$ *în* $\mathbb{Z}$.

Construcţia lui $\mathbb{Q}$

Faptul că o ecuaţie precum $x \cdot 2 = 3$ nu are soluţii în $\mathbb{Z}$ ne determină să încercăm "lărgirea" mulţimii $\mathbb{Z}$ astfel încât să putem rezolva ecuaţia de mai sus în mulţimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluţii ale unei ecuaţii de tipul $x \cdot n = m$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Vom obţine astfel mulţimea numerelor raţionale, notată cu $\mathbb{Q}$. În cele ce urmează vom folosi următoarea notaţie: $\mathbb{Z}^* \overset{not}{=} \mathbb{Z} - \{0\}$.

$q \neq 0$

Definiţie. *Pe mulţimea* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ *definim următoarea relaţie binară:* $(p, q) \equiv (p', q') \Leftrightarrow p \cdot q' = q \cdot p'$.

Definiţie. *Definim pe* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *două operaţii, anume:*

- *o adunare prin* $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+p'q}{qq'}$;
- *o înmulţire prin* $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$.

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Observaţie. *Definiţiile adunării şi înmulţirii pe* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ *sunt corecte, adică nu depind de reprezentanţii aleşi.*

$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$

Definiţie. *Mulţimea* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\equiv$ *înzestrată cu adunarea şi înmulţirea se desemnează prin* $\mathbb{Q}$*, iar elementele sale se numesc numere raţionale.*

Propoziţie. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *este corp comutativ.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$

Definiţie. *Spunem că un număr raţional* $\alpha = \widehat{\frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}$ *este pozitiv (negativ) dacă* $pq > 0$ (< 0).

Observaţii

1. *Definiţia de mai sus este corectă, adică nu depinde de reprezentantul ales.*

2. *Orice număr raţional este fie* 0*, fie pozitiv, fie negativ.*

Definiţie. *Spunem că numărul raţional* α *este mai mic decât numărul raţional* β*, şi notăm această situaţie prin* $\alpha < \beta$*, dacă există un număr raţional pozitiv* γ *astfel încât* $\alpha + \gamma = \beta$.

Observaţie. *Relaţia binară pe* $\mathbb{Q}$ *dată de* $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ *sau* $\alpha = \beta$ *este o relaţie de ordine totală.*

Scufundarea lui $\mathbb{Z}$ în $\mathbb{Q}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, dată de $f(p) = \widehat{\frac{p}{1}}$ pentru orice $p \in \mathbb{Z}$, are următoarele proprietăţi:

a) $f(p+q) = f(p) + f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$;

b) $f(pq) = f(p)f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$;

c) $p < q \Rightarrow f(p) < f(q)$ pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare f este injectivă şi, ca atare, putem identifica $p \in \mathbb{Z}$ cu $f(p) \in \mathbb{Q}$, deci f generează o scufundare a lui $\mathbb{Z}$ în $\mathbb{Q}$.

Teorema de necompletitudine a relaţiei de ordine pe $\mathbb{Q}$. *Nu orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{Q}$ are margine superioară (i.e. relaţia de ordine pe $\mathbb{Q}$ nu este completă).*

Demonstraţie. Mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0,\ x^2 < 2\}$ are următoarele proprietăţi:

a) $A \neq \emptyset$, deoarece $1 \in A$.

b) A este majorată, 2 fiind un majorant al său.

c) Nu există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$.

Iată justificarea proprietăţii c):

Dacă presupunem , prin reducere la absurd, contrariul, i.e. că există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$, atunci $a \geq 1$ (căci $1 \in A$).

Ne putem plasa în una şi numai una dintre următoarele două situaţii:

A. $a^2 < 2$

B. $a^2 > 2$.

Dacă ne situăm în situaţia A, considerăm $b = \frac{2-a^2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că $a + b \in A$, de unde, deoarece a este majorant al lui A, obţinem $a + b \leq a$, inegalitate care conduce la contradicţia $b \leq 0$. Rămâne să arătăm că $a + b \in A$, i.e. $(a + b)^2 < 2$. În acest scop, să observăm că $b(a + 1)^2 = \frac{2-a^2}{2} < 1$, deci $b < \frac{1}{(a+1)^2} < 1$. Atunci $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + 2ab + b < a^2 + 2ab + b + a^2 b = a^2 + b(a + 1)^2 = \frac{a^2+2}{2} < 2$.

Dacă ne situăm în situaţia B, considerăm $c = \frac{a^2-2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}$. Vom arăta că $a - c$ este majorant al lui A, deci $a \leq a - c$, inegalitate care conduce la contradicţia $c \leq 0$. Rămâne să arătăm că $x \leq a - c$ pentru orice $x \in A$. Cum $x^2 < 2$ pentru orice $x \in A$, este suficient să arătăm că $2 < (a - c)^2$. Să observăm că $c < 1$, fapt echivalent cu $0 < (a+2)^2$. Atunci $(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2 > a^2 - 2ac - c^2 > a^2 - 2ac - c > a^2 - 2ac - c - a^2 c = a^2 - c(a+1)^2 = \frac{a^2+2}{2} > 2$.

În acest mod demonstraţia este încheiată. $\square$

Construcţia lui $\mathbb{R}$

$I \cup J \supset \mathbb{Q} \setminus \{\alpha\}$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \alpha) = I$ $\qquad$ $\mathbb{Q} \cap (\alpha, \infty) = J$

Faptul că o ecuaţie precum $x^2 = 2$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$ ne determină să încercăm "lărgirea" mulţimii $\mathbb{Q}$ astfel încât să putem rezolva ecuaţia de mai sus în mulţimea lărgită. Vom obţine astfel mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$.

Definiţie. *Un cuplu (I, J) de mulţimi disjuncte de numere raţionale se numeşte tăietură (în $\mathbb{Q}$) dacă satisface următoarele trei proprietăţi*:

i) pentru orice $a \in I$ şi orice $a' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a' < a$, avem $a' \in I$;

ii) pentru orice $A \in J$ şi orice $A' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $A < A'$, avem $A' \in J$;

iii) pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, există $a \in I$ şi $A \in J$ astfel încât $A - a < r$;

iv) pentru orice $a \in I$ există $b \in I$ astfel încât $a < b$ şi pentru orice $A \in J$ există $B \in J$ astfel încât $A > B$.

I se numeşte prima clasă a tăieturii, iar J se numeşte a doua clasă a tăieturii.

Dacă s este o tăietură, atunci notăm prima clasa a sa prin I_s, iar pe cea de-a doua prin J_s.

Lemă. *Fie $I, J \subseteq \mathbb{Q}$ astfel încât $I \cap J = \emptyset$, $I, J \neq \emptyset$ şi $I \cup J = \mathbb{Q}$. Dacă sunt verificate condiţiile 1 şi 2 din definiţia tăieturii, atunci (I, J) este o tăietură.*

Obsevaţii. *Fie s o tăietură. Atunci:*

i) dacă $a \in I_s$ şi $A \in J_s$, atunci $a < A$.

ii) $I \cap J = \emptyset$, $I, J \neq \emptyset$ şi $\mathbb{Q} \setminus (I \cup J)$ are cel mult un element.

Exemple

1. (I, J), unde $I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0$ şi $a^2 < 2\}$ şi $J = \{A \in \mathbb{Q} \mid 2 < A^2\}$, este o tăietură.

2. Pentru $l \in \mathbb{Q}$, cuplul $(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\})$ este o tăietură, numită tăietura determinată de l şi o vom nota cu (l).

Propoziţie. *Fie $l \in \mathbb{Q}$ şi s o tăietură în $\mathbb{Q}$. Dacă pentru orice $a \in I_s$ şi orice $A \in J_s$, avem $a \leq l \leq A$, atunci s este tăietura determinată de l.*

Adunarea pe $\mathbb{R}$

Definiţie. *Pe τ definim o adunare astfel: dacă $s, t \in \tau$, atunci $s + t = (I_{s+t}, J_{s+t})$, unde $I_{s+t} = I_s + I_t = \{a + b \mid a \in I_s$ şi $b \in I_t\}$ şi $J_{s+t} = J_s + J_t = \{A + B \mid A \in J_s$ şi $B \in J_t\}$.*

Se constată că $s + t \in \tau$.

Notaţie. *Mulţimea* $\tau / \equiv$ *se va nota cu* $\mathbb{R}$*, iar elementele sale se numesc numere reale.*

Observaţie. *Dacă* $s \in \tau$*, atunci* $(\{-A \mid A \in J_s\}, \{-a \mid a \in I_s\})$ *este o tăietură pe care o vom nota cu* $-s$*. Dacă* s *este determinată de* $l \in \mathbb{Q}$*, atunci* $-s$ *este determinată de* $-l$*.*

Observaţii

1. *Pe* $\mathbb{R}$ *se poate defini operaţia de scădere în modul următor:* $x - y \stackrel{def}{=} x + (-y)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

2. $(\mathbb{R}, +)$ *este grup abelian.*

Definiţie. *O tăietură în* $\mathbb{Q}$ *se numeşte pozitivă (negativă) atunci când în prima clasă (în a doua clasă) a sa se află un număr raţional pozitiv (negativ).*

Notaţie. *Vom nota cu* τ_+ *mulţimea tăieturilor pozitive.*

Propoziţie. *O tăietură în* $\mathbb{Q}$ *este fie pozitivă, fie negativă, fie determinată de* 0*.*

Observaţie. *Dacă* s *este una dintre tăieturile determinate de* $l \in \mathbb{Q}$*, atunci* s *este pozitivă (negativă) dacă şi numai dacă* $l > 0$ $(l < 0)$*.*

Propoziţie. *Suma a două tăieturi pozitive (negative) este o tăietură pozitivă (negativă).*

Definiţie. *Un număr real se numeşte pozitiv (negativ) atunci când are ca reprezentant o tăietură pozitivă (negativă).*

Înmulţirea pe $\mathbb{R}$

Definiţie. *Pe* τ_+ *definim o înmulţire astfel: dacă* $s, t \in \tau_+$*, atunci* $s \cdot t = (I_{st}, J_{st})$*, unde* $I_{s \cdot t} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in I_s,\ a > 0$ *şi* $b \in I_t, b > 0\}$ *şi* $J_{s \cdot t} = \{AB \mid A \in J_s$ *şi* $B \in J_t\}$*.*

Se constată că $s \cdot t \in \tau$.

Observaţii

1. *Se constată că dacă* $s, t \in \tau_+$, *atunci* $s \cdot t$ *este pozitivă şi că înmulţirea în* τ_+ *este asociativă şi comutativă.*

2. *Pentru* $s \in \tau_+$, *definim tăietura, notată* s^{-1}, *dată de* $(I_{s^{-1}}, J_{s^{-1}})$, *unde* $I_{s^{-1}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{\frac{1}{A} \mid A \in J_s\}$ *şi* $J_{s^{-1}} = \{\frac{1}{a} \mid a \in I_s$ *şi* $a > 0\}$. *Evident* $s^{-1} \in \tau_+$.

Proprietăţi

1. *Dacă* $s \in \tau_+$, *atunci* $s \cdot s^{-1} = (1)$.

2. *Dacă* $s, t, u \in \tau_+$, *atunci* $s \cdot (t + u) = s \cdot t + s \cdot u$.

3. *Dacă* s, $s^{'}$ *şi* $s^{''}$ *sunt cele trei tăieturi determinate de* $l \in \mathbb{Q}$, $l > 0$, *iar* t *este o tăietură de speţa a doua, atunci* $s \cdot t = s^{'} \cdot t = s^{''} \cdot t$ *este o tăietură de speţa a doua.*

4. *Dacă* $l, l^{'} \in \mathbb{Q}$, $l, l^{'} > 0$, *atunci* $(l) \cdot (l^{'}) = (ll^{'})$.

Definiţie. *Definim înmulţirea în* $\mathbb{R}$ *astfel:*

$$\alpha \cdot \beta = \{ \begin{array}{cc} \widehat{st}, & \alpha, \beta > 0 \\ -\alpha \cdot (-\beta), & \alpha > 0, \beta < 0 \\ -(-\alpha) \cdot \beta, & \alpha < 0, \beta > 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0, & \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0 \end{array} ,$$

unde $\alpha = \hat{s}$ *şi* $\beta = \hat{t}$, $s, t \in \tau$.

Scufundarea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Să observăm că aplicaţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, dată de $f(r) = \hat{r}$ pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, are următoarele proprietăţi:

a) $f(r + r^{'}) = f(r) + f(r^{'})$ pentru orice $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$;

b) $f(rr^{'}) = f(r)f(r^{'})$ pentru orice $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$;

c) $r < r^{'} \Rightarrow f(r) < f(r^{'})$ pentru orice $r, r^{'} \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare f *este injectivă şi, ca atare, putem identifica* $r \in \mathbb{Q}$ *cu* $f(r) \in \mathbb{R}$, *deci* f *generează o scufundare a lui* $\mathbb{Q}$ *în* $\mathbb{R}$.

Definiţie. *Elementele mulţimii* $\mathbb{R} - f(\mathbb{Q})$ *se numesc numere iraţionale.*

Relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă

Teorema de mai jos marchează una dintre deosebirile esenţiale dintre $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$. Ea este echivalentă cu Principiul intervalelor nevide închise incluse şi cu Criteriul lui Cauchy. Aceste trei fapte echivalente constituie o trăsătură definitorie a lui $\mathbb{R}$ care explică de ce se "face" Analiză Matematică pe $\mathbb{R}$ şi nu pe $\mathbb{Q}$.

Teorema privind completitudinea relaţiei de ordine pe $\mathbb{R}$. *Orice submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ are margine superioară (i.e. relaţia de ordine pe $\mathbb{R}$ este completă).*

Demonstraţie. Fie A o submulţime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$. Prin urmare, există $\alpha \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$. Fie $I = \{r \in \mathbb{Q}$ |există $x' \in A$ astfel încât $r < x'\}$ şi $J = \{r \in \mathbb{Q} \mid x \leq r$ pentru orice $x \in A\}$. Să observăm că $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$ (deoarece $\alpha \in J$), $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = \mathbb{Q}$ şi că sunt verificate primele două proprietăţi din definiţia tăieturii. Atunci, conform lemei ce urmează definiţiei tăieturii, (I, J) este o tăietură pe care o vom nota cu s.

Vom arăta că $M \overset{def}{=} \hat{s}$ este marginea superioară a lui A.

Afirmaţia 1. *M este majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 1. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că M nu este majorant al lui A, atunci există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Conform celei de a patra proprietăţi a relaţiei de ordine pe $\mathbb{R}$, există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M = \hat{s} < r < x$, deci $r \in I$ şi drept urmare, având în vedere cea de a treia proprietate a relaţiei de ordine pe $\mathbb{R}$, obţinem contradicţia $r \leq M$.

Afirmaţia 2. *M este cel mai mic majorant al lui A.*

Justificarea afirmaţiei 2. Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există un majorant M_1 al lui A astfel încât $M_1 < M$, atunci alegem $r \in \mathbb{Q}$ cu proprietatea că $M_1 < r < M$. Drept urmare $r \in J$ (deoarece $x \leq M_1 < r$, pentru orice $x \in A$), de unde contradicţia $M \leq r$.

Din cele două afirmaţii de mai sus, deducem că $M = \sup A$. $\square$

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale

Vom prezenta definiţia "abstractă" a mulţimii numerelor reale, adică vom pune în evidenţă lista proprietăţilor definitorii ale lui $\mathbb{R}$.

Definiţie. *O mulţime nevidă $\mathbb{R}$ pe care sunt definite două operaţii interne, $+$ (adunarea) şi $\cdot$ (înmulţirea), precum şi o relaţie de ordine $\leq$, se numeşte o mulţime a numerelor reale dacă:*
i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *este corp comutativ;*
ii) $\leq$ *este compatibilă cu structura de corp, i.e.*
iia) pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \geq 0$ şi $a \leq b$, rezultă $a + x \leq b + x$ şi $a \cdot y \leq b \cdot y$;
iib) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$;
iii) pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}$, care este nevidă şi mărginită superior, există $\sup A$.

Observaţie. *În condiţiile definiţiei de mai sus, relaţia de ordine este totală. Afirmaţia de la iii) este cunoscută sub numele de Axioma lui Cantor.*

În capitolul precedent am construit un model pentru mulţimea numerelor reale (anume modelul lui Dedekind). Deoarece există şi alte modele pentru $\mathbb{R}$ (precum cel al lui Cauchy sau cel al lui Weierstrass), se pune problema unicităţii sistemului numerelor reale. Această problemă este rezolvată de următoarea

Teorema privind unicitatea sistemului numerelor reale. *Dacă* $(\mathbb{R}^{'}, +, \cdot, \leq)$ *şi* $(\mathbb{R}^{''}, +, \cdot, \leq)$ *satisfac condiţiile definiţiei de mai sus, atunci există o (unică) funcţie surjectivă $f : \mathbb{R}^{'} \to \mathbb{R}^{''}$ astfel încât:*
α) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$;
β) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$;
γ) $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^{'}$.
Mai mult, avem:
δ) pentru orice submulţime A a lui $\mathbb{R}^{'}$ care este nevidă şi mărginită superior, $f(A)$ este nevidă şi mărginită superior şi $\sup f(A) = f(\sup A)$.
Demonstraţie (schiţă).
Se poate arăta că:
$f\left(0^{'}\right) = 0^{''}$ ($x = y = 0^{'}$ în α))
$f\left(1^{'}\right) = 1^{''}$ ($x = y = 1^{'}$ în β))

$f\left(n^{'}\right)=n^{''}$ *pentru orice* $n^{'}\in\mathbb{N}^{'}$ (prin inducţie) $(n^{'}=\underbrace{1^{'}+...+1^{'}}_{n\text{ ori}})$
$f\left(n^{'}\right)=n^{''}$ *pentru orice* $n^{'}\in\mathbb{Z}^{'}$ (deoarece $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$)
$f\left(r^{'}\right)=r^{''}$ *pentru orice* $n^{'}\in\mathbb{Q}^{'}$ (din β)$(r^{'}=\frac{n^{'}}{m^{'}}$ si $r^{''}=\frac{n^{''}}{m^{''}})$.
În final definim $f\left(x\right)=\sup_{\mathbb{R}^{''}}\{f\left(r^{'}\right)\mid r^{'}<x\}=\inf_{\mathbb{R}^{''}}\{f\left(r^{'}\right)\mid r^{'}>x\}$.

Observaţii

1. *Prin urmare, din punct de vedere abstract, există o unică mulţime de numere reale. Orice obiect care se încadrează în definiţia de mai sus se va numi mulţimea numerelor reale şi se va nota cu* $\mathbb{R}$.

2. *Mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$ *se defineşte, în acest context al prezentării axiomatice a mulţimii numerelor reale, ca fiind cea mai mică submulţime a lui* $\mathbb{R}$ *care conţine pe* 0 *şi care are proprietatea ca pentru orice element* x *al său,* $x+1$ *este, de asemenea, un element al său. Cu notaţiile* $1+1=2$, $1+1+1=3$, *etc, avem* $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$. *Mulţimea numerelor întregi* $\mathbb{Z}$ *se defineşte ca fiind* $\mathbb{N}\cup(-\mathbb{N})$, *unde* $-\mathbb{N}=\{-n\mid n\in\mathbb{N}\}$, *mulţimea numerelor raţionale* $\mathbb{Q}$ *se defineşte ca fiind* $\{mn^{-1}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$, *iar mulţimea numerelor iraţionale* $\mathbb{Q}$ *se defineşte ca fiind* $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$ este un corp arhimedeean

Următorul rezultat pune în evidenţă o proprietate esenţială a sistemului numerelor reale, anume aceea care afirmă că orice număr real strict pozitiv adunat cu el însuşi de un număr suficient de ori se va poziţiona la dreapta oricărui alt număr real.

Teorema privind calitatea de corp arhimedeean a lui $\mathbb{R}$. *Pentru orice* $a,b\in\mathbb{R}$, $b>0$, *există* $n\in\mathbb{N}$ *astfel încât* $a<nb$, *i.e.* $\mathbb{R}$ *este un corp arhimedeean.*

Demonstraţie. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a,b\in\mathbb{R}$, $b>0$ astfel încât $nb\leq a$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Atunci mulţimea de numere reale $A=\{nb\mid n\in\mathbb{N}\}$ este nevidă şi majorată, deci, există $z=\sup A$. Prin urmare, avem $mb+b=(m+1)b\leq z$, i.e. $mb\leq z-b$ pentru orice $m\in\mathbb{N}$. Aşadar $z-b$ este un majorant al lui A şi cum z este cel mai mic majorant al lui A, obţinem că $z\leq z-b$, i.e. contradicţia $b\leq 0$. $\square$

Observaţie. *Teorema anterioară arată că pentru orice număr real există un număr natural mai mare decât el. Prin urmare* $\mathbb{N}$ *este nemărginită superior.*

Exerciţii

1. Să se arate că pentru $x \in [0, \infty)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

a) $x = 0$;

b) $x \leq \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $x \leq \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

2. Să se arate că $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$.

3. Pentru orice numere reale $x < y$ există un număr raţional r astfel încât $x < r < y$.

Funcţiile exponenţială şi logaritmică

În cele ce urmează vom introduce funcţiile exponenţială şi logaritmică.

Puterea de exponent natural a unui număr real

Definiţie. *Pentru* $x \in \mathbb{R}$ *şi* $n \in \mathbb{N}$*, definim* x^n*, inductiv, astfel:* $x^0 = 1$, $x^1 = x$ *şi* $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Proprietăţi. *Pentru* $x, y \in \mathbb{R}$ *şi* $n, m \in \mathbb{N}^*$*, avem:*

1. $x^n = 0$ *dacă şi numai dacă* $x = 0$;

2. $1^n = 1$;

3. $(xy)^n = x^n y^n$;

4. *dacă* $x \neq 0$*, atunci* $(\frac{1}{x})^n = \frac{1}{x^n}$;

5. $0 < x < y \Rightarrow 0 < x^n < y^n$;

6. *dacă* $n \geq 2$*, atunci* $0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x$ *şi* $x > 1 \Rightarrow x^n > x$;

7. $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ *şi* $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$.

Puterea de exponent raţional a unui număr real pozitiv

Observaţie. Pentru $a \in \mathbb{R}$ şi $n \geq 2$, folosind faptul că este un corp complet ordonat, putem defini $\sqrt[n]{a} = \sup\{x \mid x > 0 \text{ şi } x^n < a\} = \inf\{x \mid x > 0 \text{ şi } x^n > a\}$.

Pentru început vom prezenta o teoremă de punct fix care ne va fi utilă în definirea rădăcinii aritmetice de ordin n a unui număr real pozitiv.

Definiţie. *O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$, se numeşte:*

- crescătoare (respectiv strict crescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem: $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (respectiv $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$);

- descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem: $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (respectiv $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).

O funcţie care este crescătoare sau descrescătoare se numeşte monotonă, iar o funcţie care este strict crescătoare sau strict descrescătoare se numeşte strict monotonă.

Teorema de punct fix a lui Knaster. *Pentru orice funcţie crescătoare $f : [a, b] \to [a, b]$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $f(x_0) = x_0$.*

Demonstraţie. Mulţimea $M = \{x \in [a, b] \mid x \leq f(x)\}$ este nevidă (căci $a \in M$) şi majorată (de exemplu, b este un majorant al lui M), deci există $\sup M \overset{not}{=} x_0 \in [a, b]$ (căci, pe de o parte, $a \in M$, deci $a \leq x_0$, iar, pe de altă parte, $M \subseteq [a, b]$, deci $x_0 \leq b$).

Având în vedere că f este crescătoare şi că x_0 este majorant pentru M, deducem că $x \leq f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in M$. Prin urmare $f(x_0)$ este majorant pentru M şi cum x_0 este cel mai mic majorant al lui M, obţinem că

$$x_0 \leq f(x_0). \tag{1}$$

Din ultima inegalitate, folosind faptul că f este crescătoare, deducem că $f(x_0) \leq f(f(x_0))$, deci $f(x_0) \in M$ şi cum x_0 este majorant pentru M, deducem că

$$f(x_0) \leq x_0. \tag{2}$$

Din (1) şi (2), concluzionăm că $f(x_0) = x_0$. $\square$

Propoziţia privind existenţa rădăcinii aritmetice de ordin n. *Pentru orice $x \in [0, \infty)$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un unic $a \in [0, \infty)$ astfel încât $a^n = x$.*

Demonstraţie. Fie $f : [0, x + 1] \to \mathbb{R}$, dată de $f(t) = t + \frac{x-t^n}{n(x+1)^n}$ pentru orice $t \in [0, x + 1]$.

Afirmaţia 1. f este crescătoare.

Justificarea afirmaţiei 1. Totul decurge din relaţiile

$$f(t_2) - f(t_1) = (t_2 - t_1)[1 - \frac{t_2^{n-1} + t_2^{n-2}t_1 + ... + t_2t_1^{n-2} + t_1^{n-1}}{n(x + 1)^{n-1}}]$$

şi
$$1-\frac{t_2^{n-1}+t_2^{n-2}t_1+...+t_2t_1^{n-2}+t_1^{n-1}}{n(x+1)^{n-1}}\geq 0,$$
care sunt valabile pentru orice $t_1,t_2\in[0,x+1]$.

Afirmaţia 2. $f([0,x+1])\subseteq[0,x+1]$.

Justificarea afirmaţiei 2. Deoarece f este crescătoare, avem $f([0,x+1])\subseteq[f(0),f(x+1)]$ şi cum $f(0)=\frac{x}{n(x+1)^{n-1}}\geq 0$ şi $f(x+1)=x+1+\frac{x-(x+1)^n}{n(x+1)^{n-1}}\leq x+1$, deducem că $f([0,x+1])\subseteq[0,x+1]$.

Din cele două afirmaţii, conform teoremei de punct fix a lui Knaster, există $a\in[0,x+1]$ astfel încât $f(a)=a$, i.e. $a^n=x$.

Unicitatea lui a decurge din faptul că, pentru $a_1,a_2\in[0,\infty)$, este validă următoarea echivalenţă: $a_1<a_2\Leftrightarrow a_1^n<a_2^n$. $\square$

Definiţie. *a se numeşte rădăcina aritmetică de ordin n a lui x şi vom folosi notaţia* $a\overset{not}{=}x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$.

Definiţie. *Pentru $x\in(0,\infty)$ şi $r\in\mathbb{Q}$, $r=\frac{p}{q}$, cu $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ şi $q\in\mathbb{N}$, elementul $(x^p)^{\frac{1}{q}}=(x^{\frac{1}{q}})^p$, care nu depinde de fracţia $\frac{p}{q}$ care reprezintă pe r, se numeşte puterea de exponent r a lui x şi se va nota cu x^r.*

Dacă $r\in\mathbb{Q}$ şi $r<0$, definim $x^r\overset{def}{=}\frac{1}{x^{-r}}=(\frac{1}{x})^{-r}$.

Puterea de exponent real a unui număr real pozitiv şi funcţia logaritmică

Propoziţie. *Pentru orice $x\in(0,\infty)$, $x>1$ (respectiv $x<1$) există o unică funcţie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ astfel încât:*

a) f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare);

b) $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$;

c) $f(1)=x$.

Observaţii

1. *Dacă $a\in\mathbb{Q}$, atunci $f(a)=x^a$.*

2. *Mai general, pentru $a\in\mathbb{R}$, avem:*

α) $f(a)=\sup\{x^r\mid r\in\mathbb{Q}$ şi $r<a\}=\inf\{x^r\mid r\in\mathbb{Q}$ şi $r>a\}$ pentru orice $x>1$ şi $a\in\mathbb{R}$;

β) $f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r < a\} = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q}$ şi $r > a\}$ pentru orice $x < 1$ şi $a \in \mathbb{R}$.

3. *Funcţia de mai sus este surjectivă.*

4. *Funcţia de mai sus se numeşte funcţia exponenţială de bază x şi se notează cu $\exp_x$, iar, pentru $x \neq 1$, inversa ei se numeşte funcţia logaritmică de bază x şi se notează cu $\log_x$.*

Pentru $x > 1$, funcţia $\log_x$ este strict crescătoare, iar pentru $x < 1$ funcţia $\log_x$ este strict descrescătoare.

Mai mult, avem $\log_x(x) = 1$ şi $\log_x(ab) = \log_x(a) + \log_x(b)$ pentru orice $a, b \in (0, \infty)$.

5. *Pentru $a \in \mathbb{R}$ funcţia $p : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dată de $p(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x^a, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{array} \right.$, se numeşte funcţia putere de exponent a.*

6. *Pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ şi orice $a \in \mathbb{R}$, avem $(xy)^a = x^a y^a$.*