Tutoriat 3

PUMF, Legi de compoziție

· Clasele de echivalență: Fie A mulțime, $\sim$ relație de echivalență pe A, $a \in A$.

Atunci $\hat{a} \overset{def}{:=} \{ b \in A \mid b \sim a \}$

· Mulțimea factor: $A/_{\sim} := \{ \hat{a} \mid a \in A \}$

TEOREMĂ (Proprietatea de Universalitate a Mulțimii Factor — PUMF)

Fie A o mulțime, $\sim$ relație de echivalență pe A, și $\pi : A \to A/_{\sim}$, $\pi(a) = \hat{a}$ proiecția canonică. Atunci:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & A/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\forall X$ o mulțime, $\forall f : A \to X$ funcție cu $\sim \subseteq \rho_f \Longrightarrow \exists!\ \bar{f} : A/_{\sim} \to X$ o funcție a.î. $\bar{f} \circ \pi = f$

În plus,

- $\bar{f}$ surjectivă $\Longleftrightarrow$ f surjectivă
- $\bar{f}$ injectivă $\Longleftrightarrow$ $\rho_f = \sim$

$\boxed{\text{Ex}}$ 1) Pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relația: $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a + d = b + c$

$\pi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim}$, $\pi((a,b)) = \widehat{(a,b)}$

Cioarnă:

$a + d = b + c$
$\Updownarrow$
$a - b = c - d \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}\times\mathbb{N} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "\exists!\, \bar{f}"] \\ \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f((a,b)) = a - b$

Afirm: $\rho_f = \sim$

$(a,b)\,\rho_f\,(c,d) \Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d)) \Longleftrightarrow a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c \Leftrightarrow (a,b) \sim (c,d)$

$\forall\ a,b,c,d \in \mathbb{N}$

Evident, f e surjectivă.

Din PUMF $\Longrightarrow \exists!\ \bar{f} : \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} \longrightarrow \mathbb{Z}$ funcție a.î. $\bar{f}(\widehat{(a,b)}) = a-b$

Cum f e surjectivă $\Big| \Longrightarrow \bar{f}$ bijectivă

$\rho_f = \sim$

<u>Extra</u> $(a,b)\sim(c,d) \iff a-b = c-d$

$\widehat{(a,b)} = \{(c,d) \mid (c,d)\sim(a,b)\}$

$(3,5)\sim(c,d) \iff 3-5 = c-d \iff c-d = -2$, $c,d\in\mathbb{N}$

2) Pe $\mathbb{R}$: $x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Z}$ $(\iff \{x\}=\{y\})$. <u>Arătați că $\mathbb{R}/_{\sim} \simeq [0,1)$</u>

(Tutoriat 2): sistem de reprezentanți: $[0,1)$

ex: $0,13$ – toate nr. reale x cu $\{x\}=0,13$

un reprezentant

$\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/_{\sim}$, $\pi(r) = \hat{r}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}/_{\sim} \arrow[dl, dashed, "\exists!\ \bar{f}"] \\
{[0,1)} &
\end{tikzcd}$$

Caut un f „bun" (Vreau $\mathbb{R}/_{\sim} \simeq [0,1)$)

$f : \mathbb{R} \to [0,1)$, $f(x) = \{x\}$

1) Evident f surjectivă:

$r\in[0,1) \Rightarrow f(r) = r$

2) Arăt că $\rho_f = \sim$

$x\,\rho_f\,y \iff f(x) = f(y) \iff \{x\} = \{y\} \iff \{x\}-\{y\} = 0$

$\Updownarrow$

$x-[x]-y+[y]\in\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$x-y-\underbrace{([x]-[y])}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$x-y\in\mathbb{Z} \iff x\sim y$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$

Din PUMF $\Longrightarrow \exists!\ \bar{f} : \mathbb{R}/_{\sim} \longrightarrow [0,1)$

$\bar{f}(\hat{x}) = \{x\}$

Din 1), 2) $\Longrightarrow \bar{f}$ bijectivă

Deci $\mathbb{R}/_{\sim} \simeq [0,1)$

3)

Exercitiul 1: (a) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$. Arataţi că f nu este surjectiva si calculaţi $f^{-1}((1,3))$ si $f((1,3))$, unde $(1,3)$ este intervalul deschis din $\mathbb{R}$. (1 punct)

Făcută

(b) Pe mulţimea $\mathbb{R}$ definim relaţia: $x\approx y \Leftrightarrow x^2+4y=y^2+4x$. Arataţi ca: $\approx$ este o relaţie de echivalenţa pe $\mathbb{R}$, calculaţi clasele de echivalenţa, arataţi ca $\mathbb{R}/\approx\ \cong [-1,+\infty)$ si indicaţi doua sisteme de reprezentanţi ai relaţiei $\approx$. (1,5 puncte)

$\hat{x}=\{x,4-x\}$

$[2,\infty)$

$x\approx y \Leftrightarrow x^2+4y=y^2+4x \Leftrightarrow x^2-4x+3=y^2-\cancel{4y}+3$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}/_\approx \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ [-1,\infty) & & \end{array}$$

De ce adunăm 3?

$f_1(x)=x^2-4x$ $V_{f_1}=\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ -

2 -4

$f:A\to B$ surjectivă $\Rightarrow \operatorname{Im} f=f(A)=B$

Luăm $f:\mathbb{R}\to[-1,\infty)$, $f(x)=x^2-4x+3$ surjectivă (1)

$\operatorname{Im} f=\left[\frac{-\Delta}{4a},\infty\right)=[-1,\infty)$

(2) Arătăm: $\rho_f=\approx$

$x\,\rho_f\,y \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x^2-4x+3=y^2-4y+3 \Leftrightarrow x\approx y$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$

$\xrightarrow[(1),(2)]{\text{PUMF}}\ \exists!\ \bar{f}:\mathbb{R}/_\approx \xrightarrow{\sim}[-1,\infty)$, $\bar{f}(\hat{x})=f(x)$

bijectivă

Ciornă

$x^2-4x+3=y^2-4y+3$

$x^2-4x+3-(y^2-4y+3)=0$

$\Delta_x=16-4(3-(\ ))=16-12+4y^2-\cancel{16y}+12=4(y^2-4y+4)=[2(y-2)]^2$

$x_{1,2}=\frac{4\pm2(y-2)}{2}=2\pm(y-2)$ y, $4-y$

$\hat{x}=\{x,4-x\}$

$x=4-x\Rightarrow x=2$

$[2,\infty)$

Logică: $|(a,b)|=|(c,d)|=|\mathbb{R}|=c$

$[0,1]\to\mathbb{R}$

Legi de compoziție
(și ce mai apucăm azi să facem)

<u>Definiție 1</u>) Fie A o mulțime. O funcție $\varphi: A\times A \to A$ se numește <u>lege de compoziție pe A</u>.

- φ este asociativă dacă $\varphi(a, \varphi(b,c)) = \varphi(\varphi(a,b),c), \forall a,b,c \in A$
- φ are element neutru dacă $\exists e \in A$ a.î. $\forall a \in A$ avem $\varphi(e,a) = \varphi(a,e) = a$

<u>Notații standard</u>:

$\varphi(a,b) \overset{not}{=\!=} a\cdot b$ (cazul multiplicativ)

SAU

$\varphi(a,b) \overset{not}{=\!=} a+b$ (cazul aditiv)

<u>Definiție 2</u>

Numim perechea

$(\underset{\text{mulțime}}{S},\varphi)$ SEMIGRUP dacă: φ lege de comp. asociativă

$(\underset{\text{mulțime}}{M},\varphi)$ MONOID dacă: φ lege de comp. asociativă cu element neutru

(notații: 1_M, 1)

<u>Ex</u>: $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$ monoid.

<u>Definiție 3</u>:

a) Fie $(S_1, \perp)$, $(S_2, \circ)$ semigrupuri, $f: S_1 \to S_2$

Spunem că f este MORFISM DE SEMIGRUPURI dacă

$f(x\perp y) = f(x)\circ f(y)$ $\forall x,y \in S_1$

b) Similar, $(M_1, *)$, (M_2, Δ) monoizi, $f: M_1 \to M_2$

f este MORFISM DE MONOIZI dacă:

$f(x * y) = f(x)\,\Delta\, f(y)$, $\forall x,y \in M_1$

și $f(e_1) = e_2$ $\qquad$ e_i element neutru în M_i, $i=\overline{1,2}$

Ex: $f_a : (\mathbb{N}, +) \longrightarrow (\mathbb{N}^*, \cdot)$, $f_a(n) = a^n$, $a \in \mathbb{N}^*$ fixat

monoizi

$\cdot\ f_a(n+m) = a^{n+m} = a^n \cdot a^m = f_a(n) \cdot f_a(m)$

$\cdot\ f_a(0) = a^0 = 1$

$\Rightarrow f$ morfism de monoizi

Propoziție 4: Fie $f: M_1 \longrightarrow M_2$ morfism bijectiv. Atunci $\exists f^{-1}: M_2 \to M_1$ morfism.

Definiție 5: $f: M_1 \longrightarrow M_2$ s.n. IZOMORFISM dacă f este morfism bijectiv.

Reguli de calcul în monoizi

Fie M monoid cu operație multiplicativă. Pt. $x \in M$, $m \in \mathbb{N}$, avem:

1) $x^0 = 1$

2) $(x^m)^n = x^{mn}$

3) Dacă $xy = yx$ (comutativitate) $\Rightarrow (xy)^n = x^n y^n$

Elemente inversabile în monoizi

Def. 6: Fie $(M, \cdot)$ monoid cu element neutru 1.

$a \in M$ s.n. element INVERSABIL dacă $\exists\, a' \in M$ a.î.

$aa' = a'a = 1$ (notație: $a' = a^{-1}$)

Notație: $U(M) := \{ a \in M \mid a \text{ inversabil} \}$

Ex: $(\mathbb{N}, \cdot)$, $U(\mathbb{N}) = \{1\}$ $\quad U((\mathbb{Q}, \cdot)) = \mathbb{Q}^*$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$, $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$

$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\}$ $\quad \hat{2} + \hat{3} = \hat{5}$ (în $\mathbb{Z}_4$)

$\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6}$

$U((\mathbb{Z}_n, \cdot)) = \{ \hat{x} \in \mathbb{Z}_n \mid (x, n) = 1 \}$ $\quad (U(\mathbb{Z}_7) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ $\quad \hat{2} \cdot \hat{3} \cdot \hat{5} \neq \hat{1})$

Prop 7: Fie $(M, \cdot)$ monoid, $x_1, x_2, \dots, x_n \in U(M)$

Atunci $(x_1 x_2 \dots x_n)^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \dots x_2^{-1} x_1^{-1}$

Dem: $x_1 \dots x_n (x_n^{-1} \dots x_1^{-1}) = x_1 \dots x_{n-1} \underbrace{(x_n x_n^{-1})}_{1} x_{n-1}^{-1} \dots x_1 = x_1 \dots x_{n-2} (x_{n-1} x_{n-1}^{-1}) \dots x_1^{-1}$

Inductiv $x_1 \cdot x_1^{-1} = 1$ ✓

Rezolvarea temei

Exercitiul [redacted]:Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim relaţia binară: $x \sim y$ dacă si numai dacă $x^2 - x = y^2 - y$.

(a) Arătaţi că $\sim$ e o relatie de echivalenţa pe $\mathbb{R}$, calculaţi clasele de echivalenţa $\hat{2}$ si $\hat{\frac{1}{2}}$ precum si un sistem de reprezentanţi ai relaţiei $\sim$.

(b) Arătaţi că exista o funcţie bijectivă $\mathbb{R}/\sim \cong [-\frac{1}{4}, +\infty)$. (Putem să o facem cu PUMF)

SOL: a) $\sim$ relatie de echivalentă

Calculăm clasele de echivalentă:

$$x^2 - x - (y^2 - y) = 0 \iff x^2 - y^2 - (x-y) = 0 \iff (x-y)(x+y) - (x-y) = 0$$

$$(x-y)(x+y-1) = 0 \quad \begin{cases} x = y \\ x = 1-y \end{cases}$$

$$\hat{x} = \{x, 1-x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\hat{2} = \{2, -1\} \qquad \hat{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$\Rightarrow$ sist. de reprez: $[\frac{1}{2}, \infty)$ sau $[-\infty, \frac{1}{2}]$

b)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}/\sim \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ {[-\frac{1}{4}, \infty)} & \end{tikzcd}$$

Caut un f „bun"

$$f : \mathbb{R} \to [-\tfrac{1}{4}, \infty), \quad f(x) = x^2 - x$$

$$\operatorname{Im} f = \left[\frac{-\Delta}{4a}, \infty\right) = \left[\frac{-1}{4}, \infty\right) \Rightarrow f \text{ surjectivă } (1)$$

$$(2) \quad \rho_f = \sim$$

$$\boxed{x \rho_f y \iff f(x) = f(y)} \iff x^2 - x = y^2 - y \iff \underline{x \sim y} \quad \forall x, y$$

$$\overset{\text{PUMF}}{\underset{(1),(2)}{\Longrightarrow}} \exists! \ \bar{f} : \mathbb{R}/\sim \xrightarrow{\sim} [-\tfrac{1}{4}, \infty), \quad \bar{f}(\hat{x}) = x^2 - x$$

$$\bar{f} \text{ bijectivă} \iff \mathbb{R}/\sim \ \simeq [-\tfrac{1}{4}, \infty)$$

---

2) Pe $\mathbb{R}$ definim relatia $x \sim y \iff x^2 + 6y = y^2 + 6x \iff x^2 - 6x = y^2 - 6y$

Arătati că $\sim$ e relatie de echivalentă, calculati clasele de echivalentă si indicati (cel putin) un sistem de reprezentant.

SOL: Similar cu 1 a) de sus

$$(x-y)(x+y) - 6(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y-6) = 0 \quad \begin{cases} x = y \\ x = 6-y \end{cases}$$

$$\hat{x} = \{x, 6-x\}$$

$[3, \infty)$

$[-\infty, 3]$

$$x = 6 - x \Rightarrow x = 3$$

Extra: Arătaţi că $\mathbb{R}/_\sim \simeq [-9,\infty)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{R}/_\sim \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ {[-9,\infty)} & \end{tikzcd}$$

$f(x) = x^2 - 6x$

$\operatorname{Im} f = [-9,\infty) \Rightarrow f$ surj.

$\rho_f = \sim$ (vezi)

$\overset{\text{PUMF}}{\Longrightarrow} \exists!\, \bar{f} : \mathbb{R}/_\sim \xrightarrow{\sim} [-9,\infty)$, $\bar{f}(\hat{x}) = x^2 - 6x$ bijectivă

Lucrarea mea de seminar (vezi site-ul lui Gigel Militaru)

Exercitiul 3: Fie $A := (0, +\infty)$ si definim legea de compoziţie

$$\varphi : A \times A \to A, \quad \varphi(x,y) = x * y \overset{\text{def}}{:=} \frac{xy}{x+y}, \ \forall\, x,y > 0$$

[redacted]

(b) Studiaţi proprietaţile acestei legi de compoziţie. (1 punct)

(c) Calculaţi numărul

$$\frac{1}{2020} * \Big(\frac{1}{2019} * \cdots * \big(\frac{1}{3} * \big(\frac{1}{2} * \frac{1}{1}\big)\big)\cdots\Big) \qquad \text{(1 punct)}$$

b) $\cdot\ \forall x,y \in (0,\infty)$, $x * y \in (0,\infty)$

$\left.\begin{array}{l} xy > 0 \\ x+y > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \dfrac{xy}{x+y} > 0 \Rightarrow$ parte stabilă

. asociativitatea: $\forall x,y,z > 0$

$(x*y)*z = \dfrac{xy}{x+y} * z = \dfrac{\frac{xy}{x+y}\cdot z}{\frac{xy}{x+y} + z} = \dfrac{xyz}{xy+yz+xz} = x*(y*z)$ ✓

. $*$ comutativă

. elem. neutru ?

Pp $\exists e \in (0,\infty)$ a.î. $\forall x \in (0,\infty)$, $\underbrace{e*x = x*e = x}$

$\dfrac{xe}{x+e} = x \ \Big/ : x > 0$

$\dfrac{e}{x+e} = 1 \underset{(x+e>0)}{\Rightarrow} e = x+e \ \forall x$

$x = 0$ ✗ (contradicţie)

Deci $*$ nu are elem. neutru

Deci $(A, *)$ semigrup (comutativ)

(c) Calculaţi numărul

$$\frac{1}{2020} * \left(\frac{1}{2019} * \cdots * (\frac{1}{3} * (\frac{1}{2} * \frac{1}{1}))\cdots\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} * \frac{1}{1}}_{} = \frac{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} *}_{} = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} * = \frac{1}{4} * \frac{1}{6} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{10}{24}} = \frac{1}{10}$$

Inductiv, $\frac{1}{n} * \left(\frac{1}{n-1} * \cdots * \left(\frac{1}{2} * \frac{1}{1}\right)\cdots\right) = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$, $n \geq 2$