# Logică Matematică și Computațională
## Liste de subiecte date la examenul parțial din preliminariile algebrice

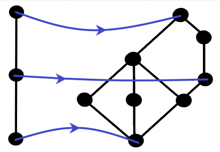
Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

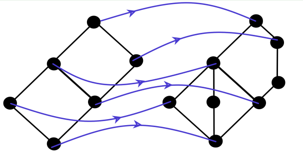
Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2020–2021, Semestrul I

În enunțurile următoare, poseturile sau laticile din subiectele individuale pentru fiecare student sunt indicate în listele studenților participanți la examen conform unei reguli specificate în lista de subiecte; de exemplu, indicii $j$ și $k$ în denumirile acestora semnifică faptul că, pentru fiecare student, $j$ este prima cifră, iar $k$ este a doua cifră a numărului sau perechii de cifre care precedă numele studentului în lista studenților din grupa sau seria care dă examenul respectiv.

Subposeturile sau sublaticile cerute la al doilea exercițiu din fiecare listă de subiecte nu trebuie scrise prin simpla enumerare a elementelor acestora, ci desenându–le diagramele Hasse, cu nodurile etichetate.
Funcțiile cerute la acest exercițiu nu trebuie date prin tabele, ci prin astfel de diagrame, dar în care nodurile trebuie etichetate:





Nu este necesară nicio justificare la acest exercițiu în afară de aceste diagrame sau, unde este cazul, specificarea faptului că nu există subposeturi, sublatici sau funcții de tipul cerut.

# Lista 1 de subiecte

Prin *sublatice* a unui poset înțelegem subposet al acelui poset care este latice. Dacă $\mathcal{M}$ este o mulțime de latici, numim *clasă de izomorfism* a unei latici $M \in \mathcal{M}$ submulțimea lui $\mathcal{M}$ formată din laticile izomorfe cu $M$: $\{N \in \mathcal{M} \mid (\exists f : M \to N)(f \text{ e izomorfism de latici})\}$.

## Exercițiu (punctaj: **0,75 puncte**)

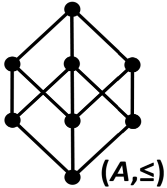
Fie $X$ o mulțime nevidă. Să se determine toate poseturile având mulțimea suport $X$ care nu au nicio sublatice cu cel puțin două elemente distincte, adică toate poseturile $(X, \leq)$ astfel încât, dacă $(S, \leq)$ este o sublatice a lui $(X, \leq)$, atunci $|S| \leq 1$.

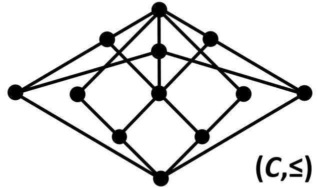
## Exercițiu (punctaj: **2,25 puncte**; fiecare cerință: **0,75 puncte**)

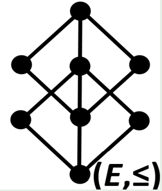
Să se eticheteze elementele poseturilor $(P, \leq)$ și $(Q, \leq)$ de mai jos, apoi:

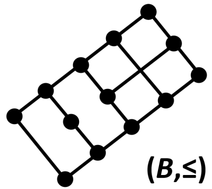
1. să se enumere toate sublaticile de cardinal maxim ale posetului $(Q, \leq)$ și, în mulțimea tuturor acestora, să se determine clasa de izomorfism a fiecăreia dintre aceste latici;
2. să se enumere toate sublaticile distributive de cardinal maxim ale posetului $(P, \leq)$ și, în mulțimea tuturor acestora, să se determine clasa de izomorfism a fiecăreia dintre aceste latici;
3. pentru fiecare clasă de izomorfism $\mathcal{K}$ de la punctul 2 și fiecare clasă de izomorfism $\mathcal{L}$ de la punctul 1, să se considere câte o latice $K$ din $\mathcal{K}$ și câte o latice $L$ din $\mathcal{L}$ și să se determine toate morfismele de latici mărginite $h : K \to L$.

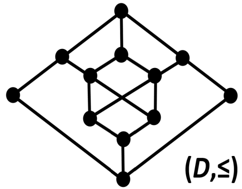
## $((P,\leq)/(Q,\leq)$ din partea individuală a subiectului fiecărui student:)



# Lista 2 de subiecte

Fie $(P, \leq^P)$ și $(Q, \leq^Q)$ poseturi, iar $f : P \to Q$.
Spunem că funcția $f$ *reflectă relația de ordine* ddacă, pentru orice $x, y \in P$, $f(x) \leq^Q f(y) \ \Rightarrow \ x \leq^P y$.
Amintesc că $||$ este relația de *incomparabilitate*, i.e. complementara relației $\leq \cup \geq = \leq \cup \leq^{-1}$: în posetul $(P, \leq^P)$, $||^P = \{(x, y) \in P^2 \mid x \not\leq^P y \text{ și } x \not\geq^P y\}$, iar, în posetul $(Q, \leq^Q)$, $||^Q = \{(x, y) \in Q^2 \mid x \not\leq^Q y \text{ și } x \not\geq^Q y\}$.
Spunem că funcția $f$ *păstrează relația* $||$ ddacă, pentru orice $x, y \in P$, $x ||^P y \ \Rightarrow \ f(x) ||^Q f(y)$.
Spunem că funcția $f$ *reflectă relația* $||$ ddacă, pentru orice $x, y \in P$, $f(x) ||^Q f(y) \ \Rightarrow \ x ||^P y$.

## Exercițiu (punctaj: **1 punct**; fiecare cerință: **0,5 puncte**)

Să se demonstreze că:

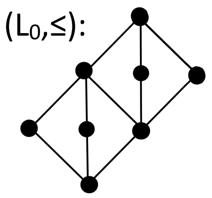
1. dacă un morfism $h$ de poseturi păstrează relația $||$, atunci $h$ reflectă relația $||$ și reflectă relația de ordine;
2. dacă un morfism bijectiv $h$ de poseturi păstrează relația $||$, atunci $h$ este izomorfism de poseturi.

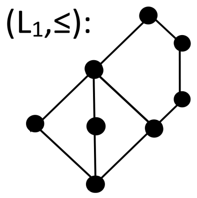
## Exercițiu (punctaj: **2 puncte**; fiecare cerință: **0,5 puncte**)

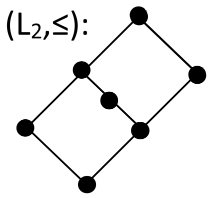
Considerăm laticile $(L_j, \leq)$ și $(M_k, \leq)$ de mai jos. Să se determine:

1. funcțiile de la $(L_j, \leq)$ la $(M_k, \leq)$ care păstrează $||$;
2. morfismele de poseturi de la $(L_j, \leq)$ la $(M_k, \leq)$ care păstrează $||$;
3. morfismele de latici de la $(L_j, \leq)$ la $(M_k, \leq)$ care păstrează $||$;
4. morfismele de latici mărginite de la $(L_j, \leq)$ la $(M_k, \leq)$ care păstrează $||$.

## (Lista laticilor $(L_j, \leq)$ din părțile individuale ale subiectelor:)

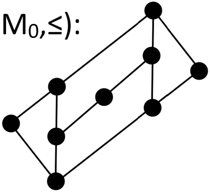


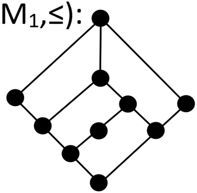



## (Lista laticilor $(M_k, \leq)$ din părțile individuale ale subiectelor:)

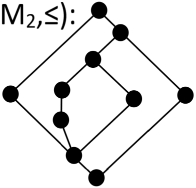
$(M_0,\leq)$:



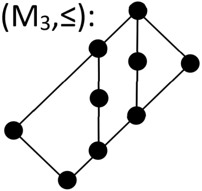
$(M_1,\leq)$:



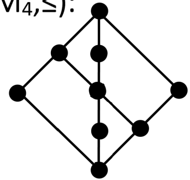
$(M_2,\leq)$:



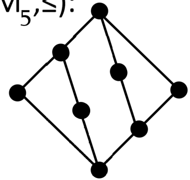
$(M_3,\leq)$:



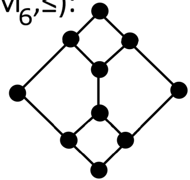
$(M_4,\leq)$:



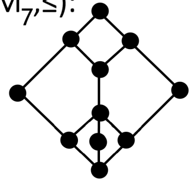
$(M_5,\leq)$:



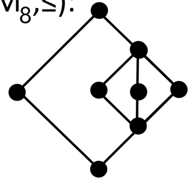
$(M_6,\leq)$:



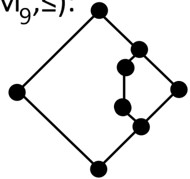
$(M_7,\leq)$:



$(M_8,\leq)$:



$(M_9,\leq)$:



# Lista 3 de subiecte

Pentru orice mulțimi $M$, $N$, orice relație binară $\rho \subseteq M^2$ și orice funcție $f : M \to N$, notăm:

$$f(\rho) = \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in M\} \subseteq N^2.$$

Pentru orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, notăm:

$$\gamma(L) = \{(x, y) \in L^2 \mid x \vee y = 1 \text{ și } x \wedge y = 0\}.$$

Pentru orice latici mărginite $K$ și $L$, notăm cu $\mathrm{Hom}(K, L)$ mulțimea morfismelor de latici mărginite de la $K$ la $L$.

## Exercițiu (punctaj: **1,5 puncte**; fiecare cerință: **0,3 puncte**)

Fie $(K, \vee^K, \wedge^K, \leq^K, 0^K, 1^K)$ și $(L, \vee^L, \wedge^L, \leq^L, 0^L, 1^L)$ latici mărginite, având relațiile de succesiune $\prec^K$, respectiv $\prec^L$, iar $h : K \to L$ un morfism de latici mărginite. Să se demonstreze că:

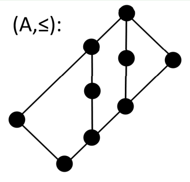
1. dacă $h(\gamma(K)) \subseteq \leq^L$, atunci $|L| = 1$;
2. dacă $h(\leq^K) \subseteq \gamma(L)$, atunci $h(K) = \{0^L, 1^L\}$;
3. $h(\gamma(K)) \nsubseteq \prec^L$;
4. $h(\leq^K) \nsubseteq \prec^L$;
5. dacă $h(\leq^K) \subseteq \mathcal{R}(\prec^L)$, atunci $h(K) = \{0^L, 1^L\}$.

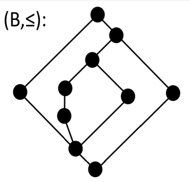
## Exercițiu (punctaj: **1,5 puncte**; fiecare cerință: **0,3 puncte**)

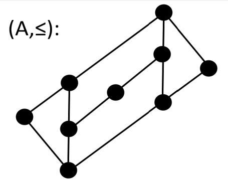
Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ laticile date de diagramele Hasse de mai jos. Să se eticheteze nodurile din aceste diagrame Hasse, apoi să se determine:

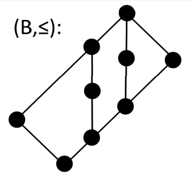
1. toate morfismele injective de poseturi de la $(A, \leq)$ la $(B, \leq)$;
2. toate morfismele surjective de poseturi de la $(A, \leq)$ la $(B, \leq)$;
3. toate morfismele de latici de la $(A, \leq)$ la $(B, \leq)$;
4. toate morfismele de latici mărginite de la $(A, \leq)$ la $(B, \leq)$;
5. toate tripletele $(S, T, \mathrm{Hom}(S, T))$, unde:
   $S$ e o sublatice mărginită complementată a lui $A$,
   $T$ e o sublatice mărginită complementată a lui $B$,
   iar $\mathrm{Hom}(S, T) \neq \emptyset$.

## (Partea individuală a subiectului fiecărui student: $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$)

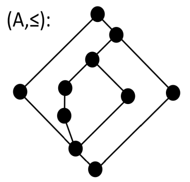


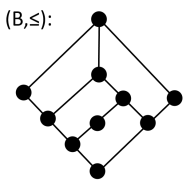



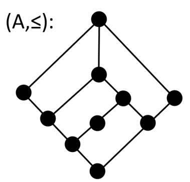



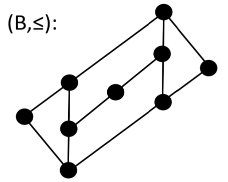



## (Partea individuală a subiectului fiecărui student: $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$)



# Lista 4 de subiecte

Pentru orice mulțimi $A$ și $B$, orice relații binare $\rho \subseteq A^2$ și $\sigma \subseteq B^2$ și orice funcție $f : A \to B$, spunem că $f$ *duce relația* $\rho$ *în relația* $\sigma$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, $x \, \rho \, y$ implică $f(x) \, \sigma \, f(y)$.

**Exercițiu (punctaj: 1,5 puncte; fiecare cerință: 0,25 puncte)**

Fie $A$ și $B$ mulțimi, $\rho \subseteq A^2$, $\sigma \subseteq B^2$ și $f : A \to B$. Să se demonstreze că:

1. dacă $f$ duce relația $\rho$ în relația $\sigma$, atunci $f$ duce relația $\mathcal{R}(\rho)$ în relația $\mathcal{R}(\sigma)$;
2. dacă $f$ duce relația $\rho$ în relația $\sigma$, atunci $f$ duce relația $\mathcal{S}(\rho)$ în relația $\mathcal{S}(\sigma)$;
3. dacă $f$ duce relația $\rho$ în relația $\sigma$, atunci $f$ duce relația $\mathcal{T}(\rho)$ în relația $\mathcal{T}(\sigma)$;
4. dacă $f$ duce relația $\rho$ în relația $\sigma$, atunci $f$ duce relația $Pre(\rho)$ în relația $Pre(\sigma)$;
5. dacă $f$ duce relația $\rho$ în relația $\sigma$, atunci $f$ duce relația $\mathcal{E}(\rho)$ în relația $\mathcal{E}(\sigma)$;
6. să se dea câte un contraexemplu pentru reciproca fiecărei implicații de la punctele anterioare, i.e. câte un exemplu de funcție $f : A \to B$ și de relații binare $\rho \subseteq A^2$ și $\sigma \subseteq B^2$ astfel încât $f$ duce închiderea respectivă a lui $\rho$ în aceeași închidere aplicată lui $\sigma$, dar nu duce pe $\rho$ în $\sigma$.

## Exercițiu (punctaj: **1,5 puncte**; fiecare cerință: **0,25 puncte**)

Notăm cu $\prec$ atât relația de succesiune a lui $(A_i, \leq)$, cât și cea a lui $(B_j, \leq)$. Să se eticheteze nodurile din diagramele Hasse ale laticilor $(A_i, \leq)$ și $(B_j, \leq)$, apoi:

1. să se deseneze diagrama Hasse a laticii $(A_i, \leq)$ și diagrama prin graf orientat a relației $\prec \circ \prec$ de pe $B_j$;
2. să se determine toate funcțiile $f : A_i \to B_j$ care duc relația $\prec$ de pe $A_i$ în relația $\prec \circ \prec$ de pe $B_j$;
3. să se indice toate funcțiile de la punctul 2 a căror imagine este o sublatice a lui $(B_j, \leq)$;
4. să se indice toate funcțiile de la punctul 2 a căror imagine este o sublatice mărginită a lui $(B_j, \leq)$;
5. să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal maxim $S$ ale lui $(A_i, \leq)$ astfel încât există cel puțin un morfism injectiv de latici de la $(S, \leq)$ la $(B_j, \leq)$;
6. să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal maxim $S$ ale lui $(A_i, \leq)$ astfel încât există cel puțin un morfism injectiv de latici mărginite de la $(S, \leq)$ la $(B_j, \leq)$.

# (Lista laticilor $(A_i, \leq)$ și $(B_j, \leq)$:)

$(A_1, \leq) = \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ $\quad$ $(A_2, \leq) = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2$ $\quad$ $(A_3, \leq) = \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2^2$

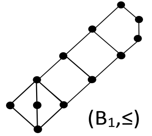
$(A_4, \leq) = \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ $\quad$ $(A_5, \leq) = \mathcal{M}_3 \oplus \mathcal{L}_2$ $\quad$ $(A_6, \leq) = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{M}_3$

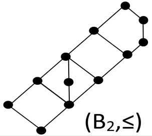
$(A_7, \leq) = \mathcal{M}_3 \oplus \mathcal{L}_2^2$ $\quad$ $(A_8, \leq) = \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{M}_3$ $\quad$ $(A_9, \leq) = \mathcal{M}_3 \oplus \mathcal{M}_3$

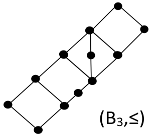
$(A_{10}, \leq) = \mathcal{N}_5 \oplus \mathcal{L}_2$ $\quad$ $(A_{11}, \leq) = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{N}_5$ $\quad$ $(A_{12}, \leq) = \mathcal{N}_5 \oplus \mathcal{L}_2^2$

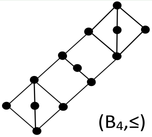
$(A_{13}, \leq) = \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{N}_5$ $\quad$ $(A_{14}, \leq) = \mathcal{N}_5 \oplus \mathcal{M}_3$ $\quad$ $(A_{15}, \leq) = \mathcal{M}_3 \oplus \mathcal{N}_5$

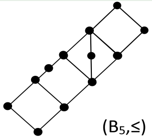
$(A_{16}, \leq) = \mathcal{N}_5 \oplus \mathcal{N}_5$

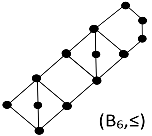

$(B_1, \leq)$

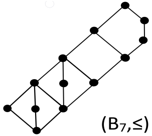

$(B_2, \leq)$

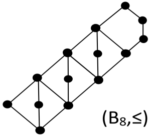

$(B_3, \leq)$

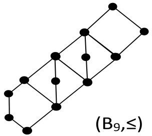

$(B_4, \leq)$

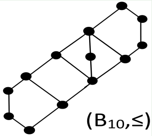

$(B_5, \leq)$

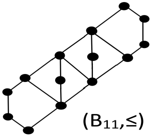

$(B_6, \leq)$

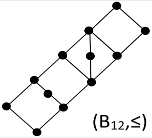

$(B_7, \leq)$

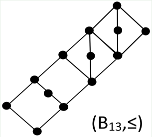

$(B_8, \leq)$

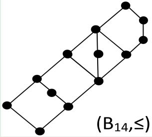

$(B_9, \leq)$


$(B_{10}, \leq)$


$(B_{11}, \leq)$


$(B_{12}, \leq)$


$(B_{13}, \leq)$


$(B_{14}, \leq)$

# Lista 5 de subiecte

Amintesc că, pentru orice poseturi $(P, \leq)$ și $(Q, \leq)$, spunem că o funcție $f : P \to Q$ păstrează relația de succesiune ddacă, pentru orice $x, y \in P$, $x \prec y$ implică $f(x) \prec f(y)$.

**Exercițiu (punctaj: 1 punct; fiecare cerință: 0,5 puncte)**

1. Să se demonstreze că, dacă o funcție între două poseturi finite păstrează relația de succesiune, atunci acea funcție este morfism de poseturi.
2. Să se dea un exemplu de funcție între două poseturi care păstrează relația de succesiune, dar nu este morfism de poseturi.

**Exercițiu (punctaj: 1 punct; fiecare cerință: 0,5 puncte)**

Să se eticheteze nodurile din diagramele Hasse ale laticilor $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$, apoi:

1. să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal maxim $L$ ale lui $(A, \leq)$ și $M$ ale lui $(B, \leq)$ astfel încât $L$ este distributivă și izomorfă cu $M$;
2. să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal minim $R$ ale lui $(A, \leq)$ și $S$ ale lui $(B, \leq)$ astfel încât $R$ este izomorfă cu $S$ și are loc măcar una dintre următoarele proprietăți:
   - $R$ conține toate elementele complementate ale lui $(A, \leq)$;
   - $S$ conține toate elementele complementate ale lui $(B, \leq)$.

## Exerciţiu (punctaj: **1 punct**; fiecare cerinţă: **0,5 puncte**)

1. Să se determine toate funcţiile de la posetul $(A, \leq)$ la posetul $(B, \leq)$ care păstrează relaţia de succesiune.
2. Să se determine toate morfismele de latici mărginite de la $(A, \leq)$ la $(B, \leq)$.

## (Lista laticilor $(A, \leq)/(B, \leq)$:)