Logică Matematică şi Computaţională
Cursul II

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Produsul direct a două mulțimi

Notație (a se vedea definiția axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I)

Pentru orice elemente a și b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b.

Definiție (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente)

Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Produsul direct a două mulțimi

Remarcă (TEMĂ OBLIGATORIE – va fi adusă într–un singur exemplar de fiecare grupă, rezolvată pe foi, înainte de vacanța de iarnă; a se vedea discuția despre examen de la sfârșitul acestui curs)

Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea fără elemente rezultă că, pentru orice mulțime A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$. De asemenea, se demonstrează ușor că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta), adică, pentru orice mulțimi A, B și C, au loc egalitățile:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
4. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Indicație: se folosesc, în mod direct, definițiile acestor operații cu mulțimi. La (1) se folosește și **distributivitatea conjuncției față de disjuncție**, iar (4) poate fi demonstrată prin calcul direct, pe baza lui (1) și (3).

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

La operațiile cu mulțimi cunoscute până acum $(\cup, \cap, \setminus, \Delta, \times)$ adăugăm **reuniunea disjunctă:**

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \coprod B$ și definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Atunci:

$$A \coprod B = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**).

Într–adevăr, pentru orice mulțimi A și B, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$, pentru că, dacă, prin absurd, ar exista un element $\alpha \in (A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\})$, atunci, conform definiției produsului direct:

$$\alpha \in A \times \{1\}, \text{ adică există } a \in A \text{ a. î. } \alpha = (a, 1)$$

și

$$\alpha \in B \times \{2\}, \text{ adică există } b \in B \text{ a. î. } \alpha = (b, 2),$$

$$\text{prin urmare } (a, 1) = \alpha = (b, 2),$$

$$\text{deci } (a, 1) = (b, 2), \text{ adică}$$

$$\begin{cases} a = b \\ \text{și} \\ 1 = 2, & \text{iar această ultimă egalitate nu este satisfăcută,} \\ & \text{ceea ce înseamnă că am obținut o contradicție.} \end{cases}$$

Definiția unei funcții

Definiție

Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$. Scris desfășurat:

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in G) \text{ și}$$
$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in B \text{ și } d \in B \text{ și } (a, c) \in G \text{ și } (a, d) \in G) \Rightarrow c = d]]].$$

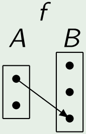
Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

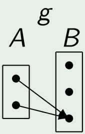
Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f, B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numește *graficul* lui f.

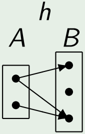
Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a*.

Exemplu

Care dintre următoarele corespondențe este o funcție de la A la B?







Egalitatea a două funcții

Remarcă ($(a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$)

Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiție

Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

  $A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
  $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) și
  $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcții, ceea ce, conform scrierii acestor grafice din remarca anterioară, se transcrie în egalitate punctuală, adică egalitate în fiecare punct: pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulțime a. î. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că *f și g coincid pe X* ddacă f și g au aceleași valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Există o unică funcție de la $\emptyset$ la o mulțime arbitrară

Notație (putere de mulțimi)

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarcă (pentru orice B, $B^{\emptyset}$ are exact un element)

Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci există o unică funcție $f : \emptyset \to B$.

Într–adevăr, o funcție $f : \emptyset \to B$ trebuie să fie un triplet $f = (\emptyset, G, B)$, cu $G \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, există cel mult o funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$ este unica posibilitate. Să arătăm că acest triplet satisface definiția funcției:

$$(\forall\, a \in \emptyset)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in \emptyset \Rightarrow (\exists\,!\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in \emptyset)].$$

Pentru orice element a, proprietatea $a \in \emptyset$ este falsă, așadar, pentru orice element a, implicația $[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată. Iar acest lucru înseamnă exact faptul că întreaga proprietate $(\forall a)[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată, deci f este funcție. Prin urmare, există o unică funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$.

Nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la $\emptyset$

Remarcă (pentru orice $A \neq \emptyset$, $\emptyset^A = \emptyset$)

Fie A o mulțime **nevidă** (i. e. $A \neq \emptyset$). Atunci nu există nicio funcție $f : A \to \emptyset$. Într–adevăr, o funcție $f : A \to \emptyset$ trebuie să fie un triplet $f = (A, G, \emptyset)$, cu $G \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, dacă ar exista o funcție $f : A \to \emptyset$, atunci am avea neapărat $f = (A, \emptyset, \emptyset)$. Să vedem dacă acest triplet verifică definiția funcției:

$$(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in \emptyset)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in \emptyset \text{ și } (a, b) \in \emptyset) \text{ și}$$

$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in \emptyset \text{ și } d \in \emptyset \text{ și } (a, c) \in \emptyset \text{ și } (a, d) \in \emptyset) \Rightarrow c = d]]].$$

Oricare ar fi elementul b, proprietatea $b \in \emptyset$ este falsă, deci, oricare ar fi elementele a și b, conjuncția $(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, deci, oricare ar fi elementul a, proprietatea $(\exists\, b)\,(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, așadar, oricare ar fi elementul a, conjuncția care succede mai sus implicației având ca antecedent pe $a \in A$ este falsă. În schimb, întrucât A este nevidă, rezultă că proprietatea $a \in A$ este adevărată pentru măcar un element a. Prin urmare, implicația $[a \in A \Rightarrow \ldots]$ de mai sus este falsă pentru cel puțin un element a, ceea ce înseamnă că întreaga proprietate $(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow \ldots]$ este falsă, și deci f nu este funcție.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, orice funcție $f : A \to B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulțimea lui B:
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$
- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f*:
$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$
- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A:
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Funcții injective, surjective, bijective

Definiție

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
    - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
    - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
    - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
    - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b)$)
    - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
    - f este simultan injectivă și surjectivă
    - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\,!\, a \in A)\,(f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecții*, *surjecții*, respectiv *bijecții*.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Când notăm $f : A \to B$, subînțelegem că A și B sunt mulțimi.

Remarcă

Pentru orice funcție $f : A \to B$, $f^{-1}(B) = A$.

Remarcă

Pentru orice funcție $f : A \to B$:

- $f(\emptyset) = \emptyset$;
- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Într–adevăr:
$f(\emptyset) = \{f(a) \mid a \in \emptyset\} = \emptyset$, întrucât proprietatea $a \in \emptyset$ este **falsă** pentru orice a, așadar $f(\emptyset)$ nu are elemente; altfel redactat:
$f(\emptyset) = \{b \in B \mid (\exists\, a \in \emptyset)\,(f(a) = b)\} = \{b \in B \mid (\exists\, a)\,(a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b)\} = \emptyset$, pentru că proprietatea $a \in \emptyset$, deci și $[a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b]$, este **falsă** pentru orice a, așadar proprietatea $(\exists\, a)\,(a \in \emptyset \text{ și } f(a) = b)$ este **falsă**, deci nu există elemente $b \in B$ care să satisfacă această proprietate;
$f^{-1}(\emptyset) = \{a \in A \mid f(a) \in \emptyset\} = \emptyset$, întrucât proprietatea $f(a) \in \emptyset$ este **falsă** pentru orice $a \in A$, așadar $f^{-1}(\emptyset)$ nu are elemente.

Remarcă (imaginea și preimaginea păstrează incluziunea nestrictă)

Pentru orice funcție $f : A \to B$:

- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$.

Într–adevăr:
dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, iar $b \in f(X)$, atunci $b = f(a)$ pentru un $a \in X$, deci $a \in Y$, așadar $b \in f(Y)$; prin urmare $f(X) \subseteq f(Y)$;
dacă $V \subseteq W \subseteq B$, iar $a \in f^{-1}(V)$, atunci $f(a) \in V$, deci $f(a) \in W$, așadar $a \in f^{-1}(W)$; prin urmare $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$.

Remarcă (temă – a se vedea și un exercițiu care urmează)

Pentru orice mulțimi nevide A și B și orice funcție $f : A \to B$, au loc incluziunile:

- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiție (funcția identitate a unei mulțimi)

Pentru orice mulțime A, notăm cu id_A *funcția identică a lui* A (numită și *funcția identitate a lui* A sau *identitatea lui* A): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiție (compunerea de funcții)

Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ sunt funcții, atunci *compunerea funcției g cu funcția f* este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \rightarrow C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiție (inversa unei funcții)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Următoarele proprietăți sunt cunoscute din liceu. A se vedea și exercițiul următor.

Remarcă (dacă există, inversa unei funcții este unică)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \rightarrow A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiție

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \rightarrow A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \rightarrow A$) și se numește *inversa lui f*.

Remarcă

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \rightarrow B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Proprietăți ale funcțiilor

Exercițiu (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

1. f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform (3) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
2. f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f;
3. f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform (1) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
4. f este bijectivă ddacă $(\exists\,!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f;
5. după cum știm, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ și $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f*; dar, conform (1) și (3), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ și $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (2) și (4), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Proprietăți ale funcțiilor

Exercițiu (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

1. f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
2. f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
3. din (1) și (2), obținem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* și f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

Numere cardinale

Definiție

Două mulțimi A și B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcție bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiție

Pentru orice mulțime A, se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Este simplu de demonstrat, folosind operații cu bijecții pe care le considerăm cunoscute din gimnaziu și liceu, că:

- pentru orice mulțime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Operații cu numere cardinale

Definiție (suma, produsul și puterea de numere cardinale)

Pentru orice mulțimi A și B, avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Observăm că operațiile cu numere cardinale au fost definite în funcție de reprezentanți ai claselor date de cardinalele $|A|, |B|$, anume de mulțimile $A \in |A|$ și $B \in |B|$. Pentru ca definiția anterioară să fie corectă (și, în caz afirmativ, spunem că operațiile cu cardinali sunt *bine definite* ca mai sus), trebuie ca, dacă luăm, în definițiile de mai sus ale acestor operații, alți reprezentanți pentru clasele $|A|, |B|$, adică alte mulțimi $A' \in |A|$ și $B' \in |B|$, atunci, prin înlocuirea lui A cu A' și a lui B cu B' în egalitățile de mai sus, să obținem aceleași rezultate, i. e. aceleași cardinale. Această problemă se pune ori de câte ori definim ceva pentru clase prin intermediul unor *reprezentanți ai claselor* respective, adică al unor obiecte din clasele respective, în cazul acesta al unor mulțimi din respectivele clase de cardinal echivalență. Corectitudinea unei astfel de definiții înseamnă *independența* acelei definiții *de reprezentanții claselor*, adică faptul că, indiferent ce reprezentanți alegem pentru acele clase, obiectul definit nu se schimbă.

Operațiile cu numere cardinale sunt bine definite

Propoziție (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale)

Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, **nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență***, adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Demonstrație: temă. Indicație: dacă $\varphi : A \to A'$ și $\psi : B \to B'$ sunt bijecții, atunci funcțiile $f : A \coprod B \to A' \coprod B'$, $g : A \times B \to A' \times B'$ și $h : B^A \to (B')^{(A')}$, definite prin: pentru orice $a \in A$, orice $b \in B$ și orice $p : A \to B$, $f(a, 1) := (\varphi(a), 1)$, $f(b, 2) := (\psi(b), 2)$, $g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))$ și $h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$, sunt, de asemenea, bijecții.

Observație

În indicația de mai sus, am folosit **licența de scriere (convenția)** ca în scrierea funcțiilor aplicate unor perechi de elemente să eliminăm o pereche de paranteze: de exemplu, scriem $g(a, b)$ în loc de $g((a, b))$.

Inegalități între numere cardinale

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \to B$

Remarcă

Rezultă imediat, din faptul că o compunere de bijecții este bijecție și compunerea unei bijecții cu o injecție este injecție, că definiția anterioară este **independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarcă

Este clar că, dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcția incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Inegalități între numere cardinale

Remarcă (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale)

Se demonstrează că, pentru orice mulțimi A și B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \to A$ ddacă [există o mulțime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \to A$] ddacă [există o mulțime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Într–adevăr, cu notațiile din definiția anterioară și cele de mai sus, se tratează cazul extrem $A = \emptyset$ separat, iar, în cazul $A \neq \emptyset$:

- pentru implicațiile directe, t și C pot fi definite prin:
  - $t(j(a)) = a$ pentru orice $a \in A$, și $t(b) \in A$, arbitrar, pentru $b \in B \setminus f(A)$; injectivitatea lui j arată că t este corect definită;
  - $C = B \setminus f(A)$,
- iar, pentru implicațiile reciproce, j poate fi definită prin:
  - pentru orice $a \in A$, $j(a) \in \{b \in B \mid t(b) = a\}$, arbitrar; faptul că t e funcție arată că j e injectivă;
  - respectiv $j(a) = (a, 1)$ pentru orice $a \in A$.

Inegalități între numere cardinale

Observație

Pentru a demonstra caracterizările anterioare pentru inegalitățile între numerele cardinale, se poate folosi și exercițiul de mai sus privind caracterizarea surjectivității și a injectivității prin existența unei inverse la dreapta, respectiv la stânga.

Remarcă

Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B, $|A| = |B|$ ddacă $[|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|]$.

Notație

Desigur, folosim și notațiile $\geq$ și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B.

Teoremă (Cantor)

Pentru orice mulțime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Demonstrație: Dacă $X = \emptyset$, atunci unica funcție $f : X = \emptyset \rightarrow \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, este injecție, dar nu este surjecție, deci nu este bijecție.

Inegalități între numere cardinale. Teorema lui Cantor privind cardinalul mulțimii părților unei mulțimi

Într–adevăr, enunțul:

$$(\forall\, a_1, a_2 \in \emptyset)(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

este echivalent cu:

$$(\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)],$$

$$(\text{altfel scris: } (\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset \text{ și } f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2])$$

care este adevărat, pentru că, oricare ar fi a_1, a_2, enunțul $a_1 \in \emptyset$ și $a_2 \in \emptyset$ este fals, deci implicația $[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)]$ este adevărată. Așadar f este injectivă, deci $|\emptyset| \leq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Însă, pentru $b := \emptyset \in \{\emptyset\}$, nu există $a \in \emptyset$ cu $f(a) = b$, deoarece nu există $a \in \emptyset$ ($\emptyset$ nu are elemente). Așadar f nu este surjectivă, deci nu e bijectivă. Prin urmare, nu există nicio funcție bijectivă de la $\emptyset$ la $\{\emptyset\}$, deci $|\emptyset| \neq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Rezultă că $|\emptyset| < |\mathcal{P}(\emptyset)|$.

Inegalități între numere cardinale. Teorema lui Cantor privind cardinalul mulțimii părților unei mulțimi

Pentru cele ce urmează, să presupunem că $X \neq \emptyset$.
Definim $j : X \to \mathcal{P}(X)$, pentru orice $x \in X$, $j(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Funcția j este bine definită și injectivă, pentru că, oricare ar fi $x, y \in X$ cu $j(x) = j(y)$, i. e. $\{x\} = \{y\}$, rezultă $x = y$ (deoarece două mulțimi coincid ddacă au aceleași elemente). Așadar $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.
Să presupunem prin absurd că există o surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$. Deci, pentru orice $x \in X$, $g(x) \in \mathcal{P}(X)$, i. e. $g(x) \subseteq X$. Să notăm $A := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. g este surjectivă, prin urmare există un element $x_0 \in X$ a. î. $g(x_0) = A$.
Paradox: $x_0 \in g(x_0) = A$ sau $x_0 \notin g(x_0) = A$?
Dacă $x_0 \in g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \notin g(x_0) = A$.
Dacă $x_0 \notin g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \in g(x_0) = A$.
Am obținut o contradicție (în fiecare situație posibilă), prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică nu există nicio surjecție $g : X \to \mathcal{P}(X)$, deci nu există nicio bijecție $f : X \to \mathcal{P}(X)$, așadar $X \ncong \mathcal{P}(X)$, deci $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.
Așadar $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0,1,2,\ldots,n\}|$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.
În **definițiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanții lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, ...
Definiția de mai sus pentru **mulțimea** $\mathbb{N}$ **a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducției matematice**:

(Principiul inducției matematice)

Dacă o submulțime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n+1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Într–o demonstrație prin inducție a unei proprietăți P asupra elementelor lui $\mathbb{N}$, ne referim la submulțimea $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$.

În cadrul *sistemului axiomatic von Neumann–Bernays–Gödel*, **axioma VI (a infinității)** permite definirea mulțimii $\mathbb{N}$ a numerelor naturale ca mai sus; amintim că această axiomă spune că recurența $\begin{cases} 0 \in S, \\ (\forall\, n)\,(n \in S \Rightarrow n+1 \in S) \end{cases}$ definește o mulțime S, pe care o notăm $\mathbb{N} := S$.

Având mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ și se definesc operațiile și relațiile de ordine pe aceste mulțimi în modul cunoscut din liceu.

Mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

- Ce este o *mulțime finită?*
- Ce este o *mulțime infinită?*
- Ce este o *mulțime numărabilă?*

Mulțimi numărabile

Notație ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$)

Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunțat "alef 0".

Definiție

O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarcă

Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$. Într–adevăr, $\mathbb{N}^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})\}$, și se arată, la fel ca în demonstrația teoremei lui Cantor de mai sus pentru $(\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, că $(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})$ este funcție injectivă, dar nesurjectivă, prin urmare $0 = |\emptyset| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Iar, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, așadar $|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| \leq |\mathbb{N}|$, și, pentru orice funcție $f : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \mathbb{N}$, dacă M este cel mai mare dintre numerele naturale $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$ ($\mathbb{N}$ este ceea ce vom numi o mulțime **total ordonată**, așadar există $i_1, \ldots, i_n \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, două câte două distincte, a. î. $f(i_1) \leq \ldots \leq f(i_n) = M$), atunci $M + 1 \in \mathbb{N}$, dar $M + 1 \notin Im(f)$, așadar f este nesurjectivă, deci nu e bijectivă, prin urmare $|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| \neq |\mathbb{N}|$. Așadar, $n = |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Mulțimi infinite

Notă

Demonstrația remarcii anterioare nu face parte din materia pentru examen.

Definiție

O mulțime X se zice *infinită*:

1. *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$
2. *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă
3. *în sens obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teoremă

Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Notă

Pentru demonstrația teoremei anterioare, a se vedea finalul primului capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002. Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

- Demonstrațiile tuturor proprietăților care nu sunt justificate în curs sau seminar nu fac parte din materia pentru examen.

Mulțimi finite

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiție

O *mulțime finită* este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a face mai clară legătura dintre mulțimile finite și construcția numerelor naturale prezentată mai sus, putem formula echivalent definiția anterioară, astfel: o mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (unde $n-1$ este predecesorul lui n în $\mathbb{N}$, în construcția anterioară).
Desigur, am folosit **licența de scriere (convenția)**: $\{1, 2, \ldots, n\} = \emptyset$ pentru $n = 0$ (respectiv $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = \emptyset$ pentru $n = 1$).
Definiția anterioară spune că, în cazul mulțimilor finite, **cardinalul** semnifică **numărul de elemente**.

Remarcă

Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Mulțimi numărabile sau cel mult numărabile

Remarcă

Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite. În particular, $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, și orice mulțime numărabilă este o mulțime infinită. Folosind și remarca anterioară, obținem că: orice cardinal finit (i. e. cardinal al unei mulțimi finite, adică număr natural) este strict mai mic decât orice cardinal transfinit.

Definiție

O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

$\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, deci, conform definiției mulțimilor infinite în sens Dedekind, poate fi pusă în bijecție cu o submulțime proprie (i. e. strictă, i. e. diferită de întreaga mulțime $\mathbb{N}$, i. e. strict inclusă în $\mathbb{N}$) a sa.

Notație

Amintim următoarele notații consacrate pentru un segment al mulțimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \ldots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$$

Mulțimi numărabile

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum poate fi cazat un nou turist în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1, pe cel al camerei 1 în camera 2, pe cel al camerei 2 în camera 3 ș. a. m. d.. Iar noul turist este cazat în camera 0.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$? Definim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f(n) := n + 1$. f este o bijecție.

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum pot fi cazați un milion de noi turiști în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1.000.000, pe cel al camerei 1 în camera 1.000.001, pe cel al camerei 2 în camera 1.000.002 ș. a. m. d.. Iar noii turiști sunt cazați în camerele $0, 1, 2, \ldots, 999.999$.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1.000.000\}$? Definim $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1.000.000$. g este o bijecție.

$\mathbb{Z}$ este numărabilă

Exemplu

Pot fi date multe exemple de bijecții între $\mathbb{N}$ și submulțimi proprii ale sale, exemple care, desigur, ilustrează faptul că $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită (a se revedea definiția mulțimilor infinite în sens Dedekind), dar și implică faptul că acele submulțimi proprii ale lui $\mathbb{N}$ sunt numărabile. De exemplu, cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu mulțimea $2\mathbb{N}$ a numerelor naturale pare, cu mulțimea $2\mathbb{N}+1$ a numerelor naturale impare, sau cu mulțimea $7\mathbb{N}+3$ a numerelor naturale de forma $7k+3$, cu $k \in \mathbb{N}$? Răspuns: următoarele funcții sunt bijecții:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ f(n) := 2n; \\ g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ g(n) := 2n+1; \\ h : \mathbb{N} \to 7\mathbb{N}+3, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ h(n) := 7n+3. \end{array}$$

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă. Într–adevăr, funcția $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definită prin: pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -2x-1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$ este o bijecție.

$\mathbb{Q}$ este numărabilă

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă, fapt care poate fi demonstrat printr–o mare varietate de procedee, cum ar fi: punând mai întâi pe $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ în bijecție cu cu $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ prin $x \rightsquigarrow \dfrac{x}{x+1}$, apoi pe $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în bijecție cu $\mathbb{N}$ prin așezarea elementelor lui $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în șirul $\dfrac{0}{1}, \dfrac{0}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{0}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{0}{n}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \dfrac{0}{n+1}, \ldots$ și eliminarea duplicatelor din acest șir, iar pașii de până acum conduc, prin compunere de bijecții, la existența unei bijecții $\pi : \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \to \mathbb{N}$ cu $\pi(0) = 0$ (deci $\pi \mid_{\mathbb{Q}\cap(0,\infty)} : \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \to \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este, la rândul ei, o bijecție), ceea ce permite obținerea unei bijecții $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, definite prin: pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \begin{cases} 2\pi(x), & \text{dacă } x \geq 0, \\ 2\pi(-x) - 1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ A se vedea alte metode de a construi o bijecție între $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{N}$ în primul capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

Notă

Demonstrarea faptului că $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție

O *mulțime nenumărabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă (sigur că este infinită, în baza definiției lui Cantor pentru mulțimile infinite, deoarece include pe $\mathbb{N}$). Acest fapt poate fi arătat, de exemplu, prin **procedeul diagonal al lui Cantor**: să considerăm o funcție arbitrară $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, să scriem pe $f(n)$ ca fracție zecimală: $f(n) = [f(n)] + 0, a_{n,0}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\ldots a_{n,n}a_{n,n+1}\ldots a_{n,k}\ldots$, unde $[f(n)]$ este partea întreagă a lui $f(n)$ și $a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots$ sunt cifrele zecimale de după virgulă ale lui $f(n)$. Să considerăm un număr real b, cu scrierea ca fracție zecimală: $b = 0, b_0b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$, cu cifrele zecimale $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ și cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b_n \notin \{0, a_{n,n}, 9\}$ (eliminăm pe 0 și 9 pentru a evita cazul dat de egalitățile $1 = 1,(0) = 1,0000\ldots = 0,(9) = 0,9999\ldots$, ușor verificabile prin exprimarea cu fracții a acestor numere (raționale)). Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b \neq f(n)$, pentru că b și $f(n)$ au a $(n+1)$–a zecimală diferită, ceea ce arată că f nu este surjectivă. Deci nu există nicio surjecție de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{R}$, așadar nu există nicio bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{R}$. În concluzie, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$)

Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ și se numește *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Remarcă

Nenumărabilitatea lui $\mathbb{R}$ poate fi demonstrată și prin remarca următoare și teorema lui Cantor privind inegalitatea strictă dintre cardinalul unei mulțimi arbitrare X și cardinalul mulțimii părților lui X.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulțime M.

Remarcă ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$)

Se poate arăta că $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, în numeroase moduri, de exemplu ca mai jos.

Dacă notăm cu $Bin := \{x \in [0,1) \mid x$ are numai cifre de 0 și 1$\}$, atunci următoarea funcție este o bijecție: $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Bin$, pentru orice $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$\varphi(X) := 0, s_0 s_1 \dots s_n \dots \in Bin, \text{ unde, pentru orice } n \in \mathbb{N},\ s_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \notin X; \\ 1, & \text{dacă } n \in X. \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

De la $[0,1)$ la *Bin* există o injecție, de exemplu o funcție care înlocuiește cifrele zecimale cu o reprezentare a lor în binar, fie pe același număr de cifre binare pentru fiecare cifră zecimală, fie doar având *proprietatea prefixului:* nu există două cifre zecimale distincte c și d a. î. reprezentarea binară a lui c să fie prefix pentru cea a lui d, adică a. î. reprezentarea binară a lui d să fie concatenarea celei a lui c cu un alt șir de cifre binare. Deci $|[0,1)| \leq |Bin|$. Dar $Bin \subset [0,1)$, deci incluziunea este o injecție de la *Bin* la $[0,1)$, așadar $|Bin| \leq |[0,1)|$. Prin urmare $|[0,1)| = |Bin|$, adică există o bijecție $\psi : [0,1) \to Bin$. Funcțiile $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $(\forall\, x \in \mathbb{R})\, f(x) := e^x$, $g : (0,\infty) \to (0,1)$, $(\forall\, x \in (0,\infty))\, g(x) := x/(x+1)$ și $j : [0,1) \to (0,1)$, $(\forall\, x \in [0,1))\, j(x) := \begin{cases} 10^{-1}, & \text{dacă } x = 0, \\ 10^{-n-1}, & \text{dacă } x = 10^{-n}, \text{ pentru un } n \in \mathbb{N}^*, \\ x, & \text{altfel,} \end{cases}$ sunt bijecții.

Așadar, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ j \circ \psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ este o bijecție.

Notă

Demonstrația cardinal echivalenței lui $\mathbb{R}$ cu mulțimea părților lui $\mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

Ipoteza continuumului

- Este $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ primul cardinal infinit nenumărabil?
- **Ipoteza continuumului** (propusă de Georg Cantor, 1878; **prima problemă a lui Hilbert**): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < \kappa < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (Adică $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ este primul cardinal infinit nenumărabil.)
- S-a demonstrat (Paul Cohen, 1963) că: **ipoteza continuumului** este o proprietate independentă de sistemele consacrate de axiome pentru teoria mulțimilor (Zermelo–Fraenkel, von Neumann–Bernays–Gödel etc.), i. e. nu poate fi nici demonstrată, nici infirmată pornind de la axiomele din aceste sisteme.
- **Ipoteza generalizată a continuumului** (generalizare a **ipotezei continuumului**, așa cum anunță și denumirea ei): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $|\mathbb{N}| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ sau $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ sau $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|$ ș. a. m. d..
- **Ipoteza generalizată a continuumului** implică **axioma alegerii**.

- Faptul că $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ arată că **nu există un cel mai mare cardinal** (după cum a demonstrat G. Cantor), întrucât, presupunând prin absurd că $\mu = |A|$ este cel mai mare cardinal, cu A mulțime, rezultă că $\mu = |A| < |\mathcal{P}(A)|$, deci $|\mathcal{P}(A)|$ este un cardinal strict mai mare decât μ, și avem o contradicție.
- Când vom vorbi despre funcții caracteristice, vom arăta că, oricare ar fi o mulțime X, $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$, deci $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = |\{0,1\}|^{|X|} = 2^{|X|}$. Așadar, $\mathcal{C} = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =$ $= 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{2^{\aleph_0}}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ ș. a. m. d..
- S–a demonstrat că numerele cardinale sunt total ordonate, i. e. oricare două cardinale κ și μ satisfac $\kappa \leq \mu$ sau $\mu \leq \kappa$.
- Mai mult, s–a demonstrat (Zermelo, 1904) că numerele cardinale sunt **bine ordonate**, ceea ce înseamnă, în esență, că numerele cardinale pot fi puse într–un șir $0 < 1 < 2 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$, unde $\aleph_1$ este primul cardinal (infinit) nenumărabil, $\aleph_2$ este primul cardinal (infinit) strict mai mare decât $\aleph_1$ ș. a. m. d..
- Așadar, **ipoteza continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, iar **ipoteza generalizată a continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$ ș. a. m. d..
- A nu se înțelege că șirul de mai sus al cardinalelor ar fi numărabil!

Nu există numărul cardinal al tuturor numerelor cardinale

- Într–adevăr, nu numai că există o infinitate nenumărabilă de cardinale transfinite ("infinități distincte"), ci chiar totalitatea cardinalelor transfinite nu poate fi cuprinsă într–un număr cardinal transfinit ("numărul infinităților distincte este mai mare decât orice infinitate"), pentru că **nu există nicio mulțime de mulțimi care să conțină mulțimi de orice cardinal, adică reprezentanți pentru toate clasele de cardinal echivalență**; altfel spus: o clasă care conține mulțimi de orice cardinal nu este mulțime, ci este o **clasă proprie**. Într–adevăr, pentru orice mulțime de mulțimi S, rezultă că $T = \bigcup\limits_{A \in S} A$ (reuniunea tuturor mulțimilor care sunt elemente ale lui S) este tot o mulțime, iar T are proprietatea că orice $A \in S$ satisface $A \subseteq T$, prin urmare $|A| \leq |T|$ (cu definiția cu funcții injective: funcția incluziune $i : A \to T$, $i(a) = a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă; cu definiția cu sumă de cardinale: $|T| = |A| + |T \setminus A|$), iar, cum $|T| < |\mathcal{P}(T)|$, rezultă că orice $A \in S$ are $|A| < |\mathcal{P}(T)|$, deci nu există în S mulțimi de cardinal mai mare sau egal cu $|\mathcal{P}(T)|$. Așadar, mai mult: cardinalele elementelor oricărei mulțimi de mulțimi sunt mărginite superior (bineînțeles că și inferior, întrucât $0 = |\emptyset|$ este primul număr cardinal).

Inegalități între numere cardinale finite și transfinite

- Sigur că nu există o mulțime a tuturor cardinalelor, pentru că numerele cardinale nenule sunt clase proprii (i. e. clase care nu sunt mulțimi), și, prin convenție, nu se permite unei clase proprii să aparțină unui alt obiect (a se revedea primul curs). Dar, chiar dacă eliminăm această restricție, înlocuind cardinalele nenule cu etichete, de exemplu reprezentanți ai acestor cardinale, considerând câte o mulțime de fiecare cardinal și luând clasa acestor mulțimi, cele de mai sus arată că nu am putea cuprinde toate numerele cardinale într–o mulțime, pentru că o astfel de clasă nu este o mulțime.

Remarcă

Oricare ar fi mulțimile A și B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$; acest fapt rezultă din cel anterior și definiția lui Dedekind a mulțimilor infinite, care arată că, dacă $A \subsetneq B$, atunci nu există o bijecție între A și B ($A \ncong B$).

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Proprietăți ale numerelor cardinale

- Faptul că există o unică mulțime vidă $\emptyset$ arată că numărul cardinal $0 = |\emptyset| = \{\emptyset\}$ este mulțimea cu unicul element $\emptyset$. Celelalte numere cardinale sunt clase proprii, după cum am menționat și mai sus.
- Dintre proprietățile operațiilor cu cardinale, menționăm: adunarea este asociativă, comutativă și cu elementul neutru 0, iar înmulțirea este asociativă, comutativă, cu elementul neutru 1 și distributivă față de adunare; adunarea, înmulțirea și ridicarea la putere sunt monoton crescătoare în ambele argumente.
- În cele ce urmează, κ, μ și ν vor fi numere cardinale arbitrare, și vom specifica faptul că un număr cardinal λ este finit prin $\lambda < \aleph_0$, iar faptul că un cardinal λ este transfinit prin $\lambda \geq \aleph_0$.

Observație

Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, în cursurile și seminariile următoare, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

Reguli de calcul cu numere cardinale finite și transfinite – nu fac parte din materia pentru examen

- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa \cdot \mu = 0$ ddacă $[\kappa = 0$ sau $\mu = 0]$.
- Dacă $\kappa \neq 0$, $\mu \neq 0$ și $[\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0]$, atunci $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa^0 = 1$. În particular, $0^0 = 1$. Dacă $\kappa \neq 0$, atunci $0^\kappa = 0$.
- $1^\kappa = 1$. $\kappa^1 = \kappa$.
- $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$. $\kappa^{\mu \cdot \nu} = (\kappa^\mu)^\nu$. $(\kappa \cdot \mu)^\nu = \kappa^\nu \cdot \mu^\nu$.
- Dacă $1 < \kappa < \aleph_0$, $1 < \mu < \aleph_0$ și $\nu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\nu = \mu^\nu$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ și $0 < \mu < \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = \kappa$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
- Dacă $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$, atunci $\kappa^\mu = 2^\kappa$.
- Dacă $2 \leq \kappa < \mu$ și $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = 2^\mu$.

Familii arbitrare de elemente, familii arbitrare de mulțimi

- Ce este un șir de numere reale indexat de $\mathbb{N}$? Un *șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se notează $x_n := f(n) \in \mathbb{R}$.
- Ce este o familie arbitrară de numere reale? Fie I o mulțime arbitrară. Ce este o familie de numere reale indexată de I? O *familie* $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ este o funcție $f : I \to \mathbb{R}$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Dată o mulțime arbitrară A:

- ce este un șir de elemente ale lui A indexat de $\mathbb{N}$?
- ce este o familie arbitrară de elemente ale lui A?

Înlocuind mai sus pe $\mathbb{R}$ cu A, se obțin definițiile acestor noțiuni. Să reținem:

Definiție (familie de elemente ale lui A indexată de I: $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$)

Fie I și A mulțimi arbitrare.
O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcție $f : I \to A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$.
Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

- Ce este un șir de mulțimi indexat de $\mathbb{N}$?
- Ce este o familie arbitrară de mulțimi?

Egalitatea între familii de elemente

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A, pentru că există o singură funcție de la $\emptyset$ la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i\in I}$ și $(b_i)_{i\in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Conform celor menționate anterior, familiile de elemente din A indexate de I sunt, prin definiție, funcții de la I la A, iar notația lor ca mai sus se adoptă pentru comoditate:

- $(a_i)_{i\in I} = f : I \rightarrow A$, unde, pentru orice $i \in I$, $f(i) = a_i$
- $(b_i)_{i\in I} = g : I \rightarrow A$, unde, pentru orice $i \in I$, $g(i) = b_i$

Egalitatea între familii de elemente

Egalitatea de funcții semnifică egalitatea domeniilor și a codomeniilor (valabilă pentru f și g, pentru că au ambele domeniul I și codomeniul A) și *egalitatea punctuală*, adică egalitatea în fiecare punct: două funcții cu același domeniu și același codomeniu sunt egale ddacă sunt egale în fiecare punct al domeniului lor comun:

$$f = g \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I, \ f(i) = g(i).$$

Deci ce semnifică egalitatea a două familii de elemente din aceeași mulțime indexate de aceeași mulțime? *Egalitatea pe componente:* cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I, \ a_i = b_i.$$

- **Caz particular:** cazul finit nevid: $I = \overline{1, n}$, cu n natural nenul:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{ddacă} \quad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \quad \vdots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

Familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de $\mathbb{N}$* o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiție

Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i \in I}$. Scriem $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i \in I}$.

Putem generaliza definițiile anterioare la șiruri de mulțimi oarecare și familii de mulțimi oarecare, nu neapărat părți ale unei mulțimi precizate, dar vom avea nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție, care permite unei funcții f definite pe $\mathbb{N}$, respectiv pe I, să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.
Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție (continuare)

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i \in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i \in I}$) este mulțimea notată $\prod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$

$$= \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Notație

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1,n}} A \stackrel{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^{n} A \stackrel{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarcă (puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct)

În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \rightarrow A, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \rightarrow A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \rightarrow A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarcă

Pentru orice mulțimi A, I și J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Exercițiu (temă – distributivitatea produsului cartezian față de reuniuni și intersecții arbitrare)

Fie A o mulțime, I o mulțime nevidă (de fapt poate fi și vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcup_{i\in I} B_i) \times A = \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$ și $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$

Exercițiu (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian față de intersecție)

Fie I și J o mulțimi nevide (de fapt pot fi și vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ o familie de mulțimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă și sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} A_{i,j}$$

Amintesc că am demonstrat la seminar (imediat, din definițiile acestora) asociativitatea reuniunii (pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3,

$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \overset{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$)

și a intersecției (pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$) ca operații binare, adică operații definite între câte două mulțimi, cum au fost definite în primul curs, nu în cazul general al acestor operații pe familii arbitrare de mulțimi, caz tratat în acest curs.

Propoziție (asociativitatea produsului direct ca operație binară)

Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare. Atunci:

$A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, *întrucât următoarele funcții sunt bijecții:* $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ *și* $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Demonstrație: Din definiția egalității de perechi rezultă că φ și ψ sunt bijecții, întrucât orice element din codomeniul fiecăreia dintre ele este imaginea unuia și numai unuia dintre elementele din domeniul său.

La fel ca pentru orice operator binar, asociativitatea produsului direct semnifică faptul că, într-un șir de produse directe (ca operații binare notate *infixat*, i. e. cu operatorul binar produs direct **între** *argumentele* (*operanzii*, variabilele) sale; a se vedea mai jos), nu contează cum punem parantezele, i. e., indiferent care dintre produsele directe din acel șir sunt efectuate mai devreme și care mai târziu, rezultatul obținut este același (modulo un izomorfism care se identifică, cu egalitatea).

De aceea, asociativitatea produsului direct face legitimă (i. e. corectă) notația următoare pentru un șir de produse directe notate **infixat** (i. e. cu operatorul binar produs direct între argumentele sale, ca mai jos) fără paranteze: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, putem scrie $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ în loc de $(\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n$, iar acest din urmă produs direct, conform asociativității produsului direct, este egal cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n \overset{\text{notație}}{=} A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n.$$

În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A, $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{de } n \text{ ori } A}$.

Produsul direct al unei familii nevide de mulțimi: convenții

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcție $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \rightarrow B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.

Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Exemplu

La fel ca în exemplul de mai sus pentru reuniunea disjunctă, fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$, aici privită ca reuniunea disjunctă a familiei cu două elemente $\{A, B\}$?

Putem considera că familia de mulțimi $\{A, B\}$ este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Și reuniunea disjunctă, ca operație binară, este asociativă

Notație

La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate:

$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie:

$$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i.$$

Operații de diferite arități

Am vorbit mai sus despre produsul direct și reuniunea disjunctă ca operații **binare**. *Aritatea* unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură *mulțime suport*, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A, iar f este o operație n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \rightarrow A$ (f este o funcție cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Exemplu

Într–un grup $(G, \circ, ^{-1}, e)$, avem trei operații:

- operația *binară* $\circ$ (**compunerea elementelor grupului, două câte două**) (operație de aritate 2, operație cu două argumente): $\circ : G \times G \rightarrow G$
- operația *unară* $^{-1}$ (**inversarea fiecărui element din grup**) (operație de aritate 1, operație cu un singur argument): $^{-1} : G \rightarrow G$
- operația *zeroară* (sau *nulară*) e (**elementul neutru al grupului**) (operație de aritate 0, operație fără argumente, i. e. **constantă** din G): $e \in G$

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

De ce operațiile zeroare sunt același lucru cu **elemente distinse, constante** din mulțimea suport a structurii algebrice?

Urmând regula de mai sus, elementul neutru e al grupului G trebuie să fie o funcție de la produsul direct al familiei vide la G.

Produsul direct al familiei vide nu este $\emptyset$, cum s–ar putea crede, ci este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element.

Într–adevăr, dacă recitim de mai sus definiția produsului direct al unei familii arbitrare de mulțimi, observăm că produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care satisfac o proprietate întotdeauna adevărată (anume $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow \ldots)$, iar $i \in \emptyset$ este fals pentru orice i, deci implicația anterioară este adevărată pentru orice i, deci această proprietate cu variabila i cuantificată universal este adevărată), adică produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care are un singur element, pentru că de la $\emptyset$ la orice mulțime există o unică funcție, așa cum am văzut mai sus.

Remarcă (reuniunea familiei vide este vidă)

Dacă recitim și definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

Remarcă (produsul direct al familiei vide este un singleton)

Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Prin urmare, elementul neutru al grupului G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarcă (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă)

Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este $\emptyset$.

Notă

Vom discuta despre intersecția familiei vide de mulțimi. În cazul intersecției, lucrurile sunt un pic mai complicate.

Exemplu de structură algebrică având mai multe mulțimi suport, i. e. mai multe mulțimi (tipuri) de elemente

Ca o paranteză, o **structură algebrică cu două mulțimi suport** este **spațiul vectorial,** care are ca mulțimi suport **mulțimea scalarilor** (formând un corp, K), și **mulțimea vectorilor** (formând un grup abelian, V). Nu este același lucru cu o structură algebrică având ca unică mulțime suport pe $K \times V$, pentru că nu avem operații pe $K \times V$ (i. e. operații de la $K \times V \times K \times V \times \ldots \times K \times V$ la $K \times V$), ci avem operații de grup pe V, operații de corp pe K și operația de compunere (înmulțire) a scalarilor cu vectorii, de la $K \times V$ la V.

Operații binare asociative și recursii

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(A_i)_{i \in \overline{1,n}} \stackrel{\text{notație}}{=} (A_i)_{i=1}^{n}$ o familie de mulțimi. Datorită asociativității reuniunii, intersecției, produsului direct și reuniunii disjuncte: pentru orice $m \in \overline{1,n}$:

- $$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m > 1. \end{cases}$$

Operații binare asociative și recursii

Prin recursiile de mai sus putem defini scrierile $\cup$, $\cap$, $\prod$, $\coprod$ ca operatori binari scriși fără paranteze: pentru orice $m \in \overline{3, n}$,
$A_1 \cup \ldots \cup A_m := (A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1}) \cup A_m$, și la fel pentru $\cap$, $\prod$, $\coprod$.

Însă recursiile de mai sus pot porni și de la familia vidă
$((A_i)_{i=1}^0 = (A_i)_{i \in \overline{1,0}} = (A_i)_{i \in \emptyset})$:

- întrucât reuniunea familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$
- vom vedea că intersecția familiei vide de mulțimi are sens numai în cazul în care familia vidă este considerată ca familie de părți ale unei mulțimi T, și, în acest caz, intersecția familiei vide este T; așadar, dacă T este o mulțime și $(A_i)_{i=1}^n \subseteq \mathcal{P}(T)$, atunci avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} T, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$

Operații binare asociative și recursii

- întrucât, după cum am văzut mai sus, produsul direct al familiei vide este singletonul $\{*\}$, cu $* = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$: $\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \{*\}, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$ nu este nimic diferit față de recursia anterioară pentru produsul direct, deoarece, oricare ar fi mulțimea A, $A \cong \{*\} \times A$, cu bijecția care duce fiecare $a \in A$ în perechea $(*, a)$, iar această bijecție se poate asimila cu identitatea (funcția identică, egalitatea); similar, vom întâlni izomorfisme (între unele structuri algebrice) care se asimilează cu identitatea (funcția identică, egalitatea);
- întrucât reuniunea disjunctă a familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$: $\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m \geq 1. \end{cases}$

Operații cu familii arbitrare de funcții

Exemplu

Dacă A și B sunt mulțimi, iar $f : A \to B$ și $g : A \to B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară $+$ și o **relație binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operația $+$, respectiv relația $\leq$, între funcțiile f și g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f+g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Totalitatea funcțiilor nu formează o mulțime, ci o clasă, așadar definirea unei familii de funcții indexate de o mulțime I ca o funcție h de la I la totalitatea funcțiilor, care, desigur, și ea ar aparține clasei funcțiilor, pune câteva probleme conceptuale. Dacă, însă, restrângem codomeniul lui h la o mulțime de funcții, atunci lucrurile se simplifică.

Operații cu familii arbitrare de funcții

Definiție (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B)

Fie I, A și B mulțimi arbitrare. O *familie de funcții de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I, i. e. o funcție $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \overset{\text{notație}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**:

Exemplu

Dacă I, A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulțime ordonată** (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \overset{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiție (familii de funcții – cazul general – material facultativ)

Fie I o mulțime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulțimi indexate de I. O *familie de funcții* $(f_i)_{i\in I}$ *indexată de* I cu $f_i : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulțimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparținând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcție $h : I \rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \rightarrow B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiție (operațiile cu familii arbitrare de funcții generalizează compunerea de funcții – material facultativ)

Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulțimi, C este o mulțime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcții și g este o funcție a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \rightarrow B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \rightarrow C$, atunci putem defini funcția
$g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \rightarrow C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$,
$g((f_i)_{i\in I}))((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operația* g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcții* $(f_i)_{i\in I}$*, definită* **punctual**.
Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1,\dots,f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \rightarrow C$, pentru orice $x_1 \in A_1,\dots,x_n \in A_n$, $g(f_1,\dots,f_n)(x_1,\dots,x_n) := g(f_1(x_1),\dots,f_n(x_n))$.

La fel ca în cazul operațiilor: relații de aritate arbitrară pentru familii arbitrare de funcții – a se vedea în cursul următor definiția unei relații n–are

La fel se pot generaliza relațiile binare între funcții la relații de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulțimi ale lui $\prod_{i\in I} B_i$:

relații de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$:

Definiție (material facultativ)

Dacă I este o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ și $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulțimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcții cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod_{i\in I} B_i$, atunci:

familia $(f_i)_{i\in I}$ de funcții se află în relația R, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1, n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relație n–ară: $(f_1, \ldots, f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$, $(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in R$.

Imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr–o funcție

Exercițiu

Fie A, B, I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
2. $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;
3. $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
4. $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;
5. f este injectivă ddacă, pentru orice mulțime nevidă K și orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.
6. Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (4).

Rezolvare: Amintim că **axioma alegerii** ne permite să alegem câte un element din orice clasă nevidă, în particular din orice mulțime nevidă. Vom face apel la această axiomă pentru mulțimile A, B, iar mai jos și I.
Vom folosi definițiile imaginii și preimaginii printr–o funcție.
Fie $a \in A$ și $b \in B$, arbitrare, fixate.
Cum membrii egalităților de la punctele (1) și (3) sunt submulțimi ale lui A, pentru a demonstra aceste egalități este suficient să arătăm că a aparține membrului stâng ddacă aparține membrului drept. La fel pentru b în loc de a în egalitățile de la (2) și (5) și incluziunea de la (4). A se vedea discuția detaliată despre această tehnică de demonstrație la începutul următoarei secțiuni a cursului.

(1) $a \in f^{-1}(\bigcup\limits_{j \in J} B_j)$ ddacă $f(a) \in \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ ddacă $(\exists\, j \in J)\,(f(a) \in B_j)$ ddacă $(\exists\, j \in J)\,(a \in f^{-1}(B_j))$ ddacă $a \in \bigcup\limits_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

(2) Pentru următorul șir de echivalențe, a se revedea exprimarea cuantificatorilor cu domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată și comutarea cuantificatorilor de același fel, și a se observa extinderea domeniului unui cuantificator peste un enunț care nu conține variabila cuantificată.
$b \in f(\bigcup\limits_{i \in I} A_i)$ ddacă $(\exists\, x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i)\,(b = f(x))$ ddacă $(\exists\, x)\,(x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ și $b = f(x))$

ddacă $(\exists\, x)\,[(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)$ și $b = f(x)]$ ddacă $(\exists\, x)\,(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i$ și $b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\exists\, x)\,(x \in A_i$ și $b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\exists\, x \in A_i)\,(b = f(x))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(b \in f(A_i))$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(b \in f(A_i))$ ddacă $b \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

(3) $a \in f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j)$ ddacă $f(a) \in \bigcap_{j \in J} B_j$ ddacă $(\forall\, j \in J)\,(f(a) \in B_j)$ ddacă $(\forall\, j \in J)\,(a \in f^{-1}(B_j))$ ddacă $a \in \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$.

(4) Pentru început, să observăm că, la fel ca în cazul intersecției a două mulțimi, întrucât familia $(A_i)_{i \in I}$ este nevidă (adică $I \neq \emptyset$), intersecția ei este inclusă în fiecare membru al său.
Fie $i_0 \in I$, arbitrar, fixat.
$a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ddacă $(\forall\, i \in I)\,(a \in A_i)$, ceea ce implică $a \in A_{i_0}$. Așadar $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$, prin urmare $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq f(A_{i_0})$, întrucât imaginea printr–o funcție păstrează incluziunile.
Cum i_0 este arbitrar în I, rezultă că: $(\forall\, k \in I)\,(f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq f(A_k))$, așadar

$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{k\in I} f(A_k)$, adică $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, întrucât acum putem "reboteza" indicele și parcurge familia de mulțimi $(f(A_k))_{k\in I}$ cu același indice i, cu care este parcursă familia de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$ în membrul stâng al incluziunii.

(5) "$\Rightarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că f e injectivă.
Pentru familia arbitrară $(A_i)_{i\in I}$ de părți ale lui A, avem $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ conform punctului (4). Rămâne de demonstrat incluziunea inversă.
Să presupunem că $b \in \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, adică, pentru fiecare $i \in I$, $b \in f(A_i)$, astfel că putem alege un $a_i \in A_i$ cu proprietatea că $b = f(a_i)$.
Fie $i_0 \in I$, arbitrar, fixat. Atunci $b = f(a_{i_0})$, unde $a_{i_0} \in A_{i_0}$ este ales ca mai sus.
Așadar, pentru fiecare $i \in I$, $f(a_{i_0}) = b = f(a_i)$, de unde, conform injectivității lui f, rezultă că $a_{i_0} = a_i \in A_i$. Deci $(\forall\, i \in I)\,(a_{i_0} \in A_i)$, adică $a_{i_0} \in \bigcap_{i\in I} A_i$, prin urmare

$b = f(a_{i_0}) \in f(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

Așadar $\bigcap_{i\in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcap_{i\in I} A_i)$, prin urmare $\bigcap_{i\in I} f(A_i) = f(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că imaginea directă a lui f comută cu orice intersecție de părți ale lui A. Să demonstrăm că f e injectivă folosind definiția injectivității.
Fie $x, y \in A$, a.î. $f(x) = f(y)$.
Considerăm familia de părți ale lui A formată din $\{x\}$ și $\{y\}$ (luăm $I = \{1, 2\}$, $A_1 = \{x\}$ și $A_2 = \{y\}$).
Conform ipotezei aceste implicații, avem: $f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\{x\}) \cap f(\{y\}) = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = \{f(x)\} \cap \{f(x)\} = \{f(x)\} \neq \emptyset$, prin urmare $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$, pentru că $f(\emptyset) = \emptyset$; așadar $\{x\}$ și $\{y\}$ au elemente comune, adică $x = y$.
Deci f e injectivă.

(6) Conform punctului (5), funcția f dintr–un astfel de exemplu trebuie să fie neinjectivă. Să luăm cel mai simplu exemplu de funcție neinjectivă: o funcție de la o mulțime cu exact două elemente la un singleton.
Fie $A = \{x, y\}$, cu $x \neq y$, și $B = \{u\}$, astfel că unica funcție $f : A \to B$ este definită prin: $f(x) = f(y) = u$.
Acum considerăm aceeași familie de părți ale lui A ca la punctul (5).
Cum $x \neq y$,
$f(\{x\} \cap \{y\}) = f(\emptyset) = \emptyset \subsetneq \{u\} = \{u\} \cap \{u\} = \{f(x)\} \cap \{f(y)\} = f(\{x\}) \cap f(\{y\})$.

Tehnica de demonstrație pentru incluziunea sau egalitatea de mulțimi, folosită până acum atât la curs cât și la seminar, poate fi adaptată la cazul particular al submulțimilor unei mulțimi date T, astfel:

- pentru stabilirea incluziunii între două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Rightarrow x \in B$, este suficient să se demonstreze că, pentru orice element $x \in T$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției incluziunii între mulțimi, înseamnă că $A \cap T \subseteq B \cap T$;
- pentru a stabili egalitatea a două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, este suficient să se arate că: pentru orice $x \in T$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției egalității de mulțimi, arată că: $A \cap T = B \cap T$;
- dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem că $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, și rezultă că $A \subseteq B$, respectiv $A = B$.

Desigur, avem "ddacă": în prezența egalităților $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$:

$$(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap T \subseteq B \cap T \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in T)\,[(x \in A \text{ și } x \in T) \Rightarrow (x \in B \text{ și } x \in T)] \Leftrightarrow$$

$$(\forall x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)] \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B);$$

$$(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow A \cap T = B \cap T \Leftrightarrow$$

$$(\forall x \in T)\,[(x \in A \text{ și } x \in T) \Leftrightarrow (x \in B \text{ și } x \in T)] \Leftrightarrow$$

$$(\forall x)\,[x \in T \Rightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)] \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcția caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$$

Observație

În definiția de mai sus pentru funcțiile caracteristice ale submulțimilor unei mulțimi T, am folosit notația (**consacrată**) χ_A pentru funcția caracteristică a unei submulțimi A a lui T, care sugerează faptul că această funcție ar depinde numai de A. Motivul pentru care nu se atașează la această notație și indicele T, pentru a arăta faptul evident că această funcție depinde și de T, este că, în mod uzual, se consideră mulțimea totală T ca fiind fixată atunci când lucrăm cu funcțiile caracteristice ale părților sale.
Și în notația consacrată pentru complementara unei părți a lui T față de T, mulțimea T este omisă.

Funcții caracteristice

Remarcă

Probabil că funcțiile caracteristice au mai fost întâlnite până acum, cel puțin în cazul particular când mulțimea totală T este finită și nevidă: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. În acest caz, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A* și poate fi reprezentat printr-un număr scris în baza 2.

După cum se știe, vectorii caracteristici (generați, de exemplu, ca numere în binar, de la 0 la $11\ldots1$) pot fi folosiți la generarea submulțimilor mulțimii finite T: fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este egală cu mulțimea elementelor x_i cu proprietatea că, în vectorul caracteristic al lui A, pe poziția i apare 1.

Ca o anticipare a similarităților dintre calculul cardinalelor pentru mulțimi finite și expresiile funcțiilor caracteristice pe care le vom obține, este interesant de observat că, în cazul particular finit prezentat mai sus, fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este, de asemenea, finită, și are cardinalul: $|A| = \sum\limits_{x \in T} \chi_A(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_A(x_i)$. Acest fapt, împreună cu punctul (7) din a doua propoziție care urmează, arată că, pentru orice mulțimi finite A și B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, de unde, prin **inducție matematică** după numărul de mulțimi, se obține **principiul includerii și al excluderii**.

Principiul includerii și al excluderii

Propoziție (principiul includerii și al excluderii)

Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite $M_1, M_2, \ldots, M_n$, are loc egalitatea:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Și dual:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots i_s \leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Funcții caracteristice

Observație

Există, în literatura matematică, numeroase demonstrații pentru **principiul includerii și al excluderii**. Una dintre aceste demonstrații se găsește, de exemplu, în cartea *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, de Dumitru Bușneag și Dana Piciu, inclusă în bibliografia din primul curs. Această demonstrație se poate adapta, lucrând cu funcții caracteristice în locul operațiilor cu mulțimi.
Odată demonstrată prima egalitate din **principiul includerii și al excluderii**, care dă cardinalul unei reuniuni finite de mulțimi finite, a doua se demonstrează analog, dar interschimbând reuniunile cu intersecțiile.
Demonstrația principiului includerii și al excluderii nu face parte din materia pentru examen.

Remarcă

În cele ce urmează vom considera codomeniul funcțiilor caracteristice $\{0,1\} \subset \mathbb{N}$ (sau $\{0,1\} \subset \mathbb{Z}$, sau $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$), iar operațiile aritmetice care vor fi efectuate vor fi operațiile uzuale de pe $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{Z}$, sau $\mathbb{R}$). În schimb, rezultatele operațiilor efectuate se vor afla în mulțimea $\{0,1\}$, așa cum trebuie, pentru că aceste rezultate vor fi valori ale unor funcții caracteristice.

Funcții caracteristice

Propoziție (proprietățile funcțiilor caracteristice)

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ și $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$. Atunci au loc proprietățile:

1. $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *și* $\chi_T = \mathbf{1}$
2. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
3. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
4. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
5. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
6. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
7. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
8. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
9. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
10. $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Funcții caracteristice

Demonstrație: Pentru început, amintim că egalitatea a două funcții cu același domeniu și același codomeniu semnifică egalitatea punctuală, i. e. în fiecare punct, de exemplu, la punctul (4): $\chi_A = \chi_B$ ddacă (prin definiția egalității de funcții), pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (întocmai ca la punctul (3), unde am explicitat inegalitatea $\leq$ între două funcții cu același domeniu și același codomeniu).
De asemenea, funcțiile de la punctele (5)–(10), date prin operații aplicate funcțiilor χ_A și χ_B, sunt definite punctual, ca orice operații asupra unor funcții cu același domeniu și același codomeniu, operații care se pot defini între elementele codomeniului respectiv: de exemplu, la punctul (8), funcția $\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B : T \to \{0, 1\}$ se definește prin: pentru orice $x \in T$, $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) := \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

Funcții caracteristice

(1) Din faptul că orice $x \in T$ satisface: $x \notin \emptyset$ și $x \in T$.
(2) Fie $x \in T$. Avem: $x \in A$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \in \{1\}$ ddacă $x \in \chi_A^{-1}(\{1\})$. Așadar $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$.
(3) Are loc: $A \subseteq B$ ddacă $(\forall x \in T)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ddacă $(\forall x \in T)(\chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) = 1)$ ddacă $(\forall x \in T)(\chi_A(x) \leq \chi_B(x))$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este $\{0, 1\}$).
(4) Putem folosi punctul (3): $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$ ddacă $[\chi_A \leq \chi_B$ și $\chi_B \leq \chi_A]$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.
Sau putem folosi punctul (2): $A = B$ ddacă $\chi_A^{-1}(\{1\}) = \chi_B^{-1}(\{1\})$ ddacă $\chi_A = \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$).
(5) Fie $x \in T$, arbitrar, fixat. Distingem patru cazuri:

- $x \notin A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \notin A$ și $x \in B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \in B$ (deci $x \in A \cap B$)

În primul dintre aceste cazuri, $\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$. La fel se analizează celelalte trei cazuri, și rezultă că $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ pentru orice $x \in T$, i. e. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(6) Aplicând (5) cazului particular $A = B$, obținem: $\chi_A = \chi_{A\cap A} = \chi_A \cdot \chi_A = \chi_A^2$. Sau putem aplica faptul că fiecare dintre elementele 0 și 1 este egal cu pătratul său, iar codomeniul lui χ_A este $\{0, 1\}$.
(7) Analog demonstrației pentru punctul (5).
(8) Analog demonstrației pentru fiecare dintre punctele (5) și (7).
(9) Conform punctelor (8) și (1), $\chi_{T\setminus A} = \chi_T - \chi_T \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \mathbf{1} \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \chi_A$. (Este clar că $\mathbf{1} \cdot \chi_A = \chi_A$. Se putea folosi, ca alternativă, și punctul (5), pentru a deduce: $\chi_T \cdot \chi_A = \chi_{T\cap A} = \chi_A$.)
(10) Putem calcula, conform punctelor (7), (8), (5) și (1):
$\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{B\setminus A} =$
$\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \chi_\emptyset =$
$\chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \mathbf{0} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$. Am aplicat faptul că orice element al intersecției $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ simultan aparține lui A și nu aparține lui A (și simultan aparține lui B și nu aparține lui B); sigur că nu există un astfel de element, așadar acea intersecție este vidă.

Remarcă

Punctele (3) și (4) ale propoziției precedente ne oferă posibilitatea de a demonstra incluziunea și egalitatea de mulțimi folosind funcțiile caracteristice ale mulțimilor respective.

Remarcă

- Punctul **(5)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile $\chi_{A\cap B}$ și $\chi_A \cdot \chi_B$ au drept codomeniu mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \cap B$ ddacă $x \in A$ și $x \in B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$, prin urmare avem și: $\chi_{A\cap B}(x) = 0$ ddacă $\chi_{A\cap B}(x) \neq 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) \neq 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 0$.
- De asemenea, punctul **(8)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile care intervin în acea egalitate au codomeniul $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\setminus B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \setminus B$ ddacă $x \in A$ și $x \notin B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$, prin urmare, ca mai sus, rezultă că avem și: $\chi_{A\setminus B}(x) = 0$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 0$.

Funcții caracteristice

Remarcă

A se observa că, în propoziția anterioară, conform punctelor (5), (7) și (8), au loc, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$

De asemenea, pentru orice $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (care este domeniul valorilor funcțiilor caracteristice), au loc:

- $\alpha \cdot \beta = \min\{\alpha, \beta\}$
- $\alpha + \beta - \alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \min\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha, \beta\}$

Aceste egalități pot fi demonstrate, de exemplu, prin înlocuirea fiecăruia dintre elementele α și β cu fiecare dintre valorile 0 și 1 în fiecare egalitate.
Din egalitățile de mai sus și punctele (5) și (7) ale propoziției precedente rezultă că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc:

- $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$

Putem demonstra egalitățile de mai sus și cu metoda folosită în remarca următoare pentru cazul general al familiilor arbitrare de părți ale lui T.

Funcții caracteristice

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (nu contează față de ce mulțime totală T; se poate lua orice mulțime nevidă T care include mulțimile care intră în discuție, de exemplu se poate lua T egală cu reuniunea acelor mulțimi, reunită cu o mulțime nevidă, de exemplu $\{0\}$, pentru a avea siguranța că T e nevidă), că, pentru orice mulțimi A, B, C:

- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (**indicație:** prin calcul, folosind propoziția precedentă, se obține $\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(A\Delta B)\Delta C}$, ceea ce este echivalent cu egalitatea $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ care trebuie demonstrată; la fel se poate proceda mai jos)
- **distributivitatea lui $\cup$ față de $\cap$:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea lui $\cap$ față de $\cup$:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ddacă $A \cup B = B$
- dacă $A \subseteq B$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup C$ și $A \cap C \subseteq B \cap C$
- dacă $A \subseteq B$ și $C \subseteq D$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup D$ și $A \cap C \subseteq B \cap D$ (rezultă și prin aplicarea de câte două ori a implicațiilor de la punctul precedent)
- alte rezultate privind calculul cu mulțimi demonstrate la seminar

Funcții caracteristice

Exercițiu (vedeți rezolvarea pe slide–urile următoare)

Fie T o mulțime nevidă. Pentru orice $X \subseteq T$, vom nota cu $\overline{X} := T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (raportat la T), că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- **operația de trecere la complementară este idempotentă (autoduală, autoinversă, propria ei inversă):** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui de Morgan pentru $\cup$ și $\cap$:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- **trecerea la complementară inversează sensul incluziunii:** $A \subseteq B$ ddacă $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; eventual folosind acest fapt obținem și: $A = B$ ddacă $\overline{A} = \overline{B}$; prin urmare avem și: $A \subsetneq B$ ddacă $\overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B}$; $A \setminus \emptyset = A$; $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup B = T$ ddacă $\overline{B} \subseteq A$ ddacă $\overline{A} \subseteq B$
- când A și B sunt **părți complementare ale lui T:** $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ddacă $\begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$
- alte rezultate demonstrate la seminar implicând complementare de mulțimi

Exemple de proprietăți pentru calculul cu mulțimi din exercițiile anterioare demonstrate folosind funcția caracteristică, din exercițiile anterioare

Fie T o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ și cu χ_X funcția caracteristică a lui X raportat la T. Să demonstrăm că:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_B \Leftrightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \Leftrightarrow \chi_{A \cap B} = \chi_A \Leftrightarrow A \cap B = A$.

- $\overline{\overline{A}} = A$

Să ne amintim că $\chi_{\overline{A}} = \chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$. Avem, așadar:
$\chi_{\overline{\overline{A}}} = \mathbf{1} - \chi_{\overline{A}} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \chi_A) = \chi_A$, prin urmare $\overline{\overline{A}} = A$.

- $A \cup \overline{A} = T$ și $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Întrucât $\chi_A(x) \in \{0, 1\}$ pentru orice $x \in T$, avem:
$\chi_{A \cup \overline{A}} = \max\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \max\{\chi_A, \mathbf{1} - \chi_A\} = \mathbf{1}$ și
$\chi_{A \cap \overline{A}} = \min\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \min\{\chi_A, \mathbf{1} - \chi_A\} = \mathbf{0}$.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ și $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\chi_{\overline{A \cup B}} = \mathbf{1} - \chi_{A \cup B} = \mathbf{1} - \max\{\chi_A, \chi_B\} = \mathbf{1} + \min\{-\chi_A, -\chi_B\} = \min\{\mathbf{1} - \chi_A, \mathbf{1} - \chi_B\} = \min\{\chi_{\overline{A}}, \chi_{\overline{B}}\} = \chi_{\overline{A} \cap \overline{B}}$, așadar $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, prin urmare, folosind idempotența complementării, demonstrată mai sus:
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}} = \overline{A \cap B}$.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ și $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow -\chi_B \leq -\chi_A \Leftrightarrow \mathbf{1} - \chi_B \leq \mathbf{1} - \chi_A \Leftrightarrow \chi_{\overline{B}} \leq \chi_{\overline{A}} \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, prin urmare:
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ și $\overline{A} \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$, așadar:
$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $A \neq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$ și $\overline{B} \neq \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$.

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; $A \setminus \emptyset = A$

$\chi_{A \cap \overline{B}} = \chi_A \cdot \chi_{\overline{B}} = \chi_A \cdot (\mathbf{1} - \chi_B) = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \setminus B}$, iar, întrucât $\chi_A = \chi_A \cdot \chi_A$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_{A \cap B} = \chi_{A \setminus (A \cap B)}$, prin urmare $A \cap \overline{B} = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
$\chi_T = \mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{0} = \mathbf{1} - \chi_\emptyset = \chi_{\overline{\emptyset}}$, așadar $\overline{\emptyset} = T$.
Prin urmare, $A \setminus \emptyset = A \cap \overline{\emptyset} = A \cap T = A$.

Alte exemple, din exercițiul precedent

- $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow \chi_{A \setminus B} = \chi_{\emptyset} \Leftrightarrow \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B = \mathbf{0} \Leftrightarrow \chi_A = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\} \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

Conform unor proprietăți de mai sus: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \emptyset = A \setminus \overline{B} = A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$. Așadar: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$.

- $A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$

Conform unor proprietăți de mai sus:
$A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{T} = \overline{\overline{\emptyset}} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}} = B$, așadar: $\overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = T \Leftrightarrow B \cup A = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$.

- $A = \overline{B} \Leftrightarrow B = \overline{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$

Din cele două proprietăți precedente, eventual aplicând, pentru rapiditatea calculului, și idempotența complementării și faptul că două părți ale lui T sunt egale ddacă au complementarele (față de T) egale, obținem:
$A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$ și $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{\overline{B}} = B$.

Funcții caracteristice

Remarcă (generalizare a ultimelor egalități din remarca anterioară)

Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I. Să demonstrăm următoarele egalități satisfăcute de funcțiile caracteristice raportat la T:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Să notăm cu $F := \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\} : T \to \{0,1\}$, definită, desigur, punctual: pentru orice $x \in T$, $F(x) = \max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\}$. Observăm că maximul unei familii de elemente din mulțimea $\{0,1\}$ este egal cu 1 ddacă există măcar un element egal cu 1 în acea familie. Pentru orice $x \in T$, avem: $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i}(x) = 1$ ddacă $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\chi_{A_i}(x) = 1)$ ddacă $\max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\} = 1$ ddacă $F(x) = 1$. Rezultă că $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = F$, întrucât codomeniul acestor două funcții este mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$.

Aveți demonstrarea celei de–a doua egalități ca **temă**. **Indicație:** observați că minimul unei familii de elemente din mulțimea $\{0,1\}$ este egal cu 1 ddacă toate elementele acelei familii sunt egale cu 1, și rescrieți demonstrația de mai sus înlocuind în ea maximul cu minimul, $\exists$ cu $\forall$ și reuniunea cu intersecția.

Funcții caracteristice

Remarcă (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ și $\cap$ – temă)

Remarca anterioară poate fi folosită pentru a demonstra că, pentru orice mulțime nevidă I, orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalitățile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ față de $\cap$:** $A \cup (\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I}(A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ față de $\cup$:** $A \cap (\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I}(A \cap A_i)$

Fiecare dintre acestea poate fi folosită pentru a "sparge" simultan (de fapt, pe rând) două paranteze (de fapt, orice număr natural nenul de paranteze, după cum arată un raționament imediat prin inducție matematică): pentru orice mulțimi nevide I și J și orice familii de mulțimi $(B_j)_{j\in J}$ și $(A_i)_{i\in I}$:

- $(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) \cup (\bigcap\limits_{i\in I} A_i) = \bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J}(B_j \cup A_i) = \bigcap\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I}(B_j \cup A_i) = \bigcap\limits_{(i,j)\in I\times J}(B_j \cup A_i)$
- $(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) \cap (\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J}(B_j \cap A_i) = \bigcup\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I}(B_j \cap A_i) = \bigcup\limits_{(i,j)\in I\times J}(B_j \cap A_i)$

Am dat câte trei scrieri echivalente pentru ultimii termeni din egalitățile precedente, dintre care prima corespunde "spargerii" mai întâi a celei de–a doua paranteze, a doua corespunde "spargerii" mai întâi a primei paranteze, iar ultima, cu un singur indice, sugerează ideea de "spargere" simultană a parantezelor.

Funcții caracteristice

Propoziție

Pentru orice mulțime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Demonstrație: Considerăm aplicația
$f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T = \{\varphi \mid \varphi : T \to \{0,1\}\}$, definită prin: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $f(A) = \chi_A$ (funcția caracteristică a lui A raportat la T).
Conform punctului (4) al propoziției conținând proprietățile funcției caracteristice, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem:

- dacă $A = B$, atunci $\chi_A = \chi_B$, adică $f(A) = f(B)$, deci f e **bine definită** (i. e. este funcție, adică asociază unui element din domeniul ei, $\mathcal{P}(T)$, un **unic** element din codomeniul ei, $\{0,1\}^T$)
- și reciproc: dacă $f(A) = f(B)$, adică $\chi_A = \chi_B$, atunci $A = B$, deci f este injectivă.

Fie $\varphi \in \{0,1\}^T$, i. e. $\varphi : T \to \{0,1\}$. Fie $A = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a \in T \mid \varphi(a) = 1\}$. Atunci $\chi_A \in \{0,1\}^T$ are proprietatea că, pentru orice $x \in T$: $\chi_A(x) = 1$ ddacă $x \in A = \varphi^{-1}(\{1\})$ ddacă $\varphi(x) = 1$. Cum χ_A și φ au ca domeniu al valorilor mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$, rezultă că $\varphi = \chi_A = f(A)$, deci f este și surjectivă.
Am demonstrat că $f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T$ este o bijecție, deci $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.

Corolar

Pentru orice mulțime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.

Demonstrație: Conform propoziției anterioare,
$|\mathcal{P}(T)| = |\{0,1\}^T| = |\{0,1\}|^{|T|} = 2^{|T|}$.

Notă

- La fel cum am procedat în unele exerciții enunțate mai sus, și în cursurile care urmează unele proprietăți vor fi doar enunțate, demonstrarea lor fiind lăsată ca **temă**. Aceste **teme** vor fi rezolvate **la seminar**, în limita timpului disponibil. Cele care nu vor fi rezolvate la seminar vor rămâne ca **teme pentru acasă**.
- Dintre **temele pentru acasă**, o parte vor fi selectate ca **teme obligatorii**.
- **Temele obligatorii** îmi vor fi aduse, de fiecare grupă în parte, *redactate, pe foi* **semnate cu numărul grupei**, înainte de vacanța de iarnă. **Fiecare grupă** îmi va aduce **un singur exemplar scris, pentru întreaga grupă**, din fiecare temă obligatorie.
- Și la orele de seminar pot fi date **teme obligatorii**.

Subiectele de examen, timpul de lucru și materialele ajutătoare permise

- **Subiectele de examen** vor consta numai din **exerciții** bazate pe teoria predată la curs și aplicațiile rezolvate la seminar. Toată teoria necesară pentru a înțelege lecțiile de curs și seminar (inclusiv baza de cunoștințe din învățământul preuniversitar la care se face apel) este considerată cunoscută în momentul predării acestor lecții.
- Nu vor exista la examen subiecte de teorie pură (de tipul enunțare și demonstrare a unor teoreme din curs, spre exemplu).
- **Timpul** pe care studenții îl vor avea la dispoziție pentru rezolvarea subiectelor de examen va fi de **2 ore** începând din momentul încheierii scrierii subiectelor pe tablă, afișării subiectelor pe ecranul videoproiectorului sau împărțirii foilor cu lista de subiecte. În prima dintre aceste 2 ore este interzisă părăsirea sălii de examen.
- Studenții vor avea voie să aducă și să consulte la examen orice **materiale ajutătoare**, scrise de mână sau tipărite, dar nu vor avea voie în examen cu dispozitive electronice pornite.
- Fiecare student va aduce la examen propriile sale materiale ajutătoare. Nu este permis schimbul de materiale între studenți în timpul examenului.

Legitimarea studenților, programarea examenelor și temele obligatorii

- Fiecare student va prezenta la examen **carnetul de student** și **cartea de identitate/pașaportul**.
- Fiecare student se va **semna** pe **fiecare foaie** din lucrarea de examen cu **numele** complet scris în clar și **numărul grupei** din care face parte.
- Fiecare student va scrie pe prima foaie a lucrării denumirea materiei (**logică matematică și computațională**) și data și ora examenului.
- Dacă vom fixa examene diferite în aceeași zi (de exemplu cu câte două grupe odată, nu cu toată seria), atunci vom stabili **cel puțin 4 ore diferență** între orele la care vor fi programate să înceapă aceste examene.
- Prefer ca orele la care vor fi programate să înceapă examenele să fie cuprinse între $10:00$ dimineața și $16:00$.
- Dacă vor exista studenți care să fie nevoiți să dea examen la o altă grupă decât cea din care fac parte, atunci este de dorit ca acei studenți să mă anunțe cât mai din timp despre acest lucru.
- Fiecare grupă va primi, pentru **temele obligatorii** pe care le va aduce rezolvate și **redactate corespunzător**, **puncte din oficiu** la examen.