FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1
\end{array}$$

$P3.1.$	$x_3 := v_2$
	$T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
	$T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$
$P3.2.$	$U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P3.3.$	$\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P3.4.$	$i := 4;$ goto $P4.1$
$P4.1.$	$x_4 := v_3$
	$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
	$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P4.2.$	$U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
$P4.3.$	$\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
$P4.4.$	$i := 5;$ goto $P5.1$
$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6;$ goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S4.2) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 2.65.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 2.72 şi 2.67.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S4.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice $\Gamma \subseteq Form$,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;

(iv) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(v) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 2.65.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$	Teorema deducţiei.

Punctul (iii) se obţine în felul următor:

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	se aplică (ii) şi Prop. 2.67.(ii)
(2)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Ipoteză
(3)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	Ipoteză
(5)	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash \varphi$	(S4.2) pentru (5).

Demonstrăm în continuare (iv).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(S4.2) pentru (1)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (v):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	se aplică (iv) cu $\varphi \mapsto \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

$\square$

(S4.4) Să se arate că pentru orice formulă φ,

$$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi.$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(2)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \varphi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(3)	$\{\neg\varphi \to \varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg\varphi \to \varphi\}$	$\vdash \varphi$	(S4.3).(iii) pentru (1) şi (3)
(5)		$\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$	Teorema deducţiei.

$\square$

(S4.5) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	Propoziţia 2.65.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	(S4.3).(iv) şi Prop. 2.66.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	(S4.3).(iii) pentru (2) şi (6).

$\square$

(S4.6) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziţia 2.65.(ii)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S4.3).(iv) şi Propoziţia 2.66.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(S4.3).(iii) pentru (2) şi (6)
(8)	$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

$\square$