Seminar 8

1. Arătați că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ converge uniform.

Soluție. Avem: $\frac{x^2+n^4}{2} \geq \sqrt{x^2n^4} = n^2|x| \iff$

$\iff x^2+n^4 \geq 2n^2|x| \iff \frac{2|x|}{x^2+n^4} \leq \frac{1}{n^2} \iff$

$\iff -\frac{1}{n^2} \leq \frac{2x}{x^2+n^4} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Deci $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{n^2}\right) \leq \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4} \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (deoarece funcția arctg este (strict) crescătoare), i.e. $\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}\right| \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R},$ $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

Fie $\alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Observăm că $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Fie $\beta_n = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \in (0, \infty).$

Conform Criteriului de comparație cu limită $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 2$).

Conform **Teoremei** lui Weierstrass rezultă că seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ converge uniform. □

2. Determinați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$.

Soluție. $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}.$$

Deci $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$.

Avem $(-2,2)\subset A\subset[-2,2]$.

Dacă $x=2$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\cancel{2^n}}\cdot\cancel{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha=1$).

Deci $2\notin A$.

Dacă $x=-2$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}\cdot(-2)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\cancel{2^n}}\cdot(-1)^n\cdot\cancel{2^n}=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ convergentă (Criteriul lui Leibniz).

Deci $-2\in A$.

Așadar $A=[-2,2)$. □

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$, $a>1$.

<u>Soluție.</u> $a_n=\frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{\cancel{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}(a+n+1)}\cdot\frac{\cancel{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}}{\cancel{n!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n+1}=1.$$

Deci $R=\frac{1}{1}=1$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}.$$

Avem $(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$.

Dacă $x=1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$.

Fie $x_n = \dfrac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot \frac{a+\cancel{n}+\cancel{1}-\cancel{n}-\cancel{1}}{n+1} = a > 1.$$

Conform Criteriului Raabe-Duhamel rezultă că seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, deci $1 \in A$.

Dacă $x=-1$, seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}(-1)^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}(-1)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}$$ convergentă.

Deci $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}(-1)^n$ este absolut convergentă, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n)}(-1)^n$ este convergentă, i.e.

$-1 \in A$.

Așadar $A = [-1, 1]$. $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot (x+3)^n$.

<u>Soluție.</u> Notăm $y = x+3$. Seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot y^n$.

Determinăm mulțimea de convergență pentru seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot y^n$.

$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^{n+1}}^{3}}{\sqrt[3]{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{n}}{\cancel{3^n}} = 3.$$

Deci $R = \frac{1}{3}$.

Fie B mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} y^n$.

Avem $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \subset B \subset \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Dacă $y = \frac{1}{3}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{1}{\cancel{3^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha=\frac{1}{3}$).

Deci $\frac{1}{3}\notin B$.

Dacă $y=-\frac{1}{3}$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{3^n}}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{(-1)^n}{\cancel{3^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$ -convergentă (Criteriul lui Leibniz).

Deci $-\frac{1}{3}\in B$.

Așadar $B=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[3]{n}}(x+3)^n$.

$$y\in B\Leftrightarrow-\frac{1}{3}\le y<\frac{1}{3}\underset{y=x+3}{\Leftrightarrow}-\frac{1}{3}\le x+3<\frac{1}{3}\Leftrightarrow-\frac{1}{3}-3\le$$

$$\le x<\frac{1}{3}-3\Leftrightarrow-\frac{10}{3}\le x<-\frac{8}{3}.$$

Așadar $A=\left[-\frac{10}{3},-\frac{8}{3}\right)$. □

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}(x-2)^n$.

<u>Soluție.</u> Rezolvați-l voi!

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$.

<u>Soluție.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, unde

$$a_0 = 0, \quad a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{2n} & ; k = 2n \\ 0 & ; k = 2n-1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Deci $a_0 = 0$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_{2n-1} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{2n}} = 1$ și $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{|a_{2n-1}|} = 0$.

Așadar $\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$.

Fie R raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \left(= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)$.

Avem $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{1} = 1$.

Fie A mulțimea de convergență a seriei de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n} \left(= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)$.

Avem $(-1,1) \subset A \subset [-1,1]$.

Dacă $x = 1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ convergentă (Criteriul lui Leibniz). Deci $1 \in A$.

Dacă $x = -1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} (-1)^{2n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}$ convergentă (Criteriul lui Leibniz).

Deci $-1 \in A$.

Așadar $A = [-1, 1]$. $\square$

3. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcțiile de mai jos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

<u>Soluție</u>. $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

$0 \in I$.

$f \in C^{\infty}(I)$.

$f(x)=\sin x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(0)=0$

$f'(x)=\cos x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f''(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{(4)}(0)=0$

....

Conform Formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange, $\forall x\in\mathbb{R}^*$ (i.e. $x\neq 0$), $\exists$ c între 0 și x (i.e. $c\in(0,x)$ sau $c\in(x,0)$) astfel încât

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{=R_n(x)}.$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Fie $x_n = \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{|x|}{\cancel{|x|^{n+2}}}}{\underset{n+2}{\cancel{(n+2)!}}} \cdot \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{|x|^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+2} =$$

$= 0 < 1$.

Conform Criteriului raportului pentru şiruri cu termeni strict pozitivi rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Avem $0 \le |R_n(x)| \le x_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Prin urmare $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n =$

$$= 0 + \frac{1}{1!}x + 0 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}^*$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \sin 0 = 0 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot 0^{2n+1} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, 0^{2n+1}.$$

Deci $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\square$

b) $f:[-1,1)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(1-x)$.

Soluție. $f'(x)=-\dfrac{1}{1-x}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)\,x^n\ \forall x\in(-1,1)$.

Integrăm „termen cu termen" și obținem că $\exists\, C\in\mathbb{R}$

a.î. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)x^{n+1}+C$
$\forall x\in(-1,1)$.

$f(0)=\ln(1-0)=0$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot 0^{n+1}+C=C$

Deci $C=0$.

Prin urmare $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)\cdot x^{n+1}\ \forall x\in(-1,1)$.

Are loc egalitatea precedentă și pentru $x=-1$?

Dacă $x=-1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)x^{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)(-1)^{n+1}=$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+2}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n+1}$ convergentă (Criteriul lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ x>-1}} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)\cdot(-1)^{n+1}.$$

Dar, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continuă}}}{=} f(-1)$.

Deci $f(-1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right)(-1)^{n+1}$.

Așadar $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} \quad \forall\, x \in [-1, 1)$. $\square$