13.11.2021

Tutoriat 4

Grupuri. (Poate) Subgrupuri

Reamintire tutoriat 3: 1) $(M, \cdot)$ este monoid dacă:

i) „$\cdot$" asociativă

ii) $\exists$ e element neutru (notat deseori cu 1)

2) $x \in M$ este inversabil dacă $\exists x' \in M$ a.î. $xx' = x'x = 1$

$x \in U(M)$

Avem semigrup < monoid < GRUP

monoid: are 1; GRUP: toate elementele sunt inversabile

Def: Spunem că $(G, \cdot)$ este GRUP dacă $(G, \cdot)$ este un monoid cu toate elementele inversabile.

$(G, \cdot)$ / $(G, \cdot, 1)$ este grup dacă:

i) „$\cdot$" asociativă

ii) 1 element neutru

iii) $U(G) = G$

Extra: G grup abelian/comutativ dacă legea de compoziție e comutativă

Exemple: 1) $(\mathbb{N}, +, 0)$ NU E Grup; $(\{0\}, +, 0)$ GRUP

2) $(\mathbb{Q}, \cdot, 1)$ NU E Grup; $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$ GRUP

De ce? $0 \notin U(\mathbb{Q})$

3) $(\mathbb{Z}, +, 0)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$ GRUPURI

4) M monoid $\Longrightarrow$ $U(M)$ GRUP

$U(M) \neq \emptyset$: $e \in U(M)$

Def: 1) Fie G_1, G_2 grupuri. O funcție $f: G_1 \to G_2$ este MORFISM DE GRUPURI dacă $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in G_1$

2) Dacă f e morfism bijectiv $\Rightarrow$ f IZOMORFISM

Ex: 1) $f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$, $f(m) = 5m$ e morfism injectiv

$f(m+n) = 5(m+n) = 5m + 5n = f(m) + f(n)$

2) $g: (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} ((0,\infty), \cdot)$, $f(x) = 13^x$ izomorfism

bijecție izomorfe

$f(x+y) = 13^{x+y} = f(x) \cdot f(y)$

$h: ((0,\infty), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$, $h(x) = \log_{13} x$

NU SUNT IZOMORFE

3) $(\mathbb{R}, +) \not\cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$

Dem: Pp. că $(\exists) f : \mathbb{R}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ izo. Atunci

$\underline{0} = f(1) = f((-1)\cdot(-1)) = f(-1) + f(-1) = \underline{2f(-1)} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} f(-1) = 0 \\ f(1) = 0 \\ 1 \neq -1 \end{matrix}\right| \Rightarrow$ CONTRADICȚIE

Def: Dacă avem $f : G \xrightarrow{\sim} G$ izomorfism, f s.n. AUTOMORFISM și

$Aut(G) = \{ f : G \longrightarrow G \mid f \text{ izo} \}$ s.n. GRUPUL AUTOMORFISMELOR LUI G

$(Aut(G), \circ)$

Propoziție: Fie $f : G_1 \longrightarrow G_2$ morfism de grupuri. Atunci:

i) $f(1) = 1$

ii) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, $\forall a \in G$,

iii) $f(a^m) = f(a)^m$, $\forall a \in G$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

Ex. izo 4) Fie G grup, $a \in G$. Atunci $\varphi_a : (G, \cdot) \to (G, \cdot)$

$\varphi_a(x) = axa^{-1}$ e automorfism

$\varphi_a(xy) = axya^{-1} = ax\underbrace{a^{-1}a}ya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = \varphi_a(x) \cdot \varphi_a(y)$

De asemenea, $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a = 1_G$ $(f(x) = x)$

φ_a s.n. automorfism interior, iar $Int(G) = \{ \varphi_a \mid a \in G \}$

grupul automorfismelor interioare ale lui G

Ex. grup necomutativ

X mulțime nevidă și avem $\Sigma_X := \{f : X \to X \mid f \text{ bijecție}\}$.

$(\Sigma_X, \circ)$ grup și s.m. GRUPUL SIMETRIC / GRUPUL DE PERMUTĂRI.

Dacă $|X|$ (cardinalul lui X) $\geq 3 \Rightarrow \Sigma_X$ NECOMUTATIV

Notație: $\Sigma_X = S_X$

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ $\Big| \Rightarrow \Sigma_X = S_n$

$\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Subgrupuri

Def: Fie $(G, \cdot)$ grup, $H \subseteq G$. H s.m. SUBGRUP ÎN G (notația: $H \leq G$) dacă:

1) H parte stabilă a lui G: $\forall x, y \in H,\ xy \in H$
2) $1 \in H$
3) Dacă $x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

G grup $\Rightarrow G, \{e\}$ subgrupuri triviale

Ex: $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$

Propoziție fermă: $H \leq G \Leftrightarrow \forall x, y \in H,\ xy^{-1} \in H$ (caz multiplicativ)

$\Leftrightarrow \forall x, y \in H,\ x - y \in H$ (caz aditiv)

Propoziție: Fie $f : G_1 \to G_2$ morfism de grupuri. Atunci:

a) $\mathrm{Im}(f) = f(G_1) \leq G_2$

b) $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in G_1 \mid f(x) = 1\} \overset{not}{=} \mathrm{Ker}(f) \leq G_1$ s.m. NUCLEUL LUI f

Propoziție: Fie $f : G_1 \to G_2$ morfism de grupuri.

a) f surjectivă $\Leftrightarrow f(G_1) = G_2 = \mathrm{Im} f$

b) f injectivă $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{1\}$

1)

12) Pe mulțimea $\underset{G}{(-1,1)}$ definim legea de compoziție
$$x * y := \frac{x+y}{1+xy}, \quad (\forall)\, x, y \in (-1,1).$$
Arătați că $((-1,1), *)$ este un grup izomorf cu $((0,+\infty), \cdot) = (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$.

SOL: $(G,*)$ grup

- $*$ stabilă: $x,y \in G \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<1 \\ -1<y<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<x+y<2 \\ -1<xy<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x+y<2 \\ 0<1+xy<2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1 \Rightarrow x * y \in G$$

- el. neu.
  Pp $\exists\, e \in (-1,1)$ a.î. $x*e = e*x = x$, $\forall\, x \in (-1,1)$
  $x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \underset{\substack{1+xe \\ >0}}{\Leftrightarrow} \cancel{x}+e = \cancel{x}+x^2e \Leftrightarrow e(x^2-1)=0\ \forall x$
  $\Leftrightarrow \boxed{e=0}$

- $*$ comutativă - evident
- $*$ asociativă - calcule
- $U(G) = G$
  $\forall x \in G$, $\exists\, x' \in G$ c.î. $x*x' = x'*x = 0$
  $x * x' = 0 \Rightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \,\big|\cdot (1+xx')>0 \Leftrightarrow x+x'=0 \Rightarrow x'=-x,\ \forall x$ ✓

2) $(\mathbb{Z},+)$, $H \leq \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $H = n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$

SOL: „$\Leftarrow$" Pp. că $H = n\mathbb{Z}$. Vrem $H \leq \mathbb{Z}$

$x = nt$, $t \in \mathbb{Z}$
$\quad\in H$
$y = np$, $p \in \mathbb{Z}$

Din Propoziția (caracterizare), $x-y = nt-np = n\underbrace{(t-p)}_{\in\mathbb{Z}} \in H \Rightarrow H \leq \mathbb{Z}$

„$\Rightarrow$" Fie $H \leq \mathbb{Z}$

Dacă $H = \{0\} \Rightarrow H = \underset{n=0}{0\mathbb{Z}} = \{0\}$ OK

Pp $H \neq \{0\}$. Există, deci un $h > 0$. (H grup $\Rightarrow$ $-h \in H$)

Fie $m \in \mathbb{N}^*$, $m :=$ cel mai mic număr pozitiv din H

$$m \in H \xRightarrow[H \leq G]{} mx \in H,\ \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow m\mathbb{Z} \subseteq H \quad (1)$$

$$(\underbrace{m+m+m+\dots+m}_{\text{de } x \text{ ori}})$$

Fie $h \in H \xrightarrow{\text{T.Î.R.}} \exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$ a.î. $h = mq + r$, $0 \leq r < m$

Dacă $r \neq 0 \Rightarrow r = \underset{\in H}{h} - \underset{\in H}{mq} > 0$

$r < m$

m e cel mai mic număr pozitiv

$\Rightarrow$ CONTRADICȚIE (din minimalitatea lui m)

Rămâne că $r = 0 \Rightarrow h = mq \Rightarrow H \subseteq m\mathbb{Z}$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow H = m\mathbb{Z}$

Anticipare: $(\mathbb{Z}_8, +) \not\cong (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2, +)$

---

3) $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z},+)) = \{f : (\mathbb{Z},+) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z},+) \mid f \text{ izo}\} = ?$

SOL: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ morfism $\Rightarrow f(0) = 0$

$f(m+n) = f(m) + f(n),\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Notăm $f(1) = a$

Atunci $f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{\text{de } n \text{ ori}}) \overset{f \text{ morfism}}{=} \underbrace{f(1)+\dots+f(1)}_{\text{de } n \text{ ori}} = nf(1) = na$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Similar, $f(-n) = -na$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Putem spune că $f(m) = ma$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

doar morfism

($f : G \to G$ morfism s.n. ENDOMORFISM; $\mathrm{End}(G) = \{f : G \to G \mid f \text{ endom.}\}$)

$\mathrm{End}(\mathbb{Z}) = \{f(m) = ma,\ \forall m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{Z} \text{ fixat}\}$

Știu: ~~f bijectivă~~

Dacă $a = 0 \Rightarrow f$ neinj., deci nu e caz interesant

f este injectivă: $f(m_1) = f(m_2) \Leftrightarrow m_1 a = m_2 a \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Rightarrow$ inj.

f surj $\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ a.î. $na = m$ să aibă soluții întregi

$\Leftrightarrow a \mid m,\ \forall m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \in \{-1, 1\}$

$a \in \{-1, 1\} \Rightarrow f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ f_1(n) = n$

$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ f_2(n) = -n$

$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{f_1, f_2\}$

4) $(G, \cdot)$ grup în care $(ab)^2 = a^2 b^2, \ \forall a, b \in G$

Arătați că $(G, \cdot)$ e abelian.

<u>SOL</u>: G abelian $\Leftrightarrow ab = ba, \ \forall a, b \in G$

$(ab)^2 = a^2 b^2$

$abab = aabb \ / \cdot b^{-1} \ (bb^{-1} = 1)$

$a^{-1} / \ aba = aab$

$ba = ab$