Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Scrieți elementele mulțimii $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\varnothing) &= \{\, \varnothing \,\} \\ \mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)) &= \{\, \varnothing, \{\, \varnothing \,\} \,\} \\ \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))) &= \{\, \varnothing, \{\, \varnothing \,\}, \{\, \{\, \varnothing \,\} \,\}, \{\, \varnothing, \{\, \varnothing \,\} \,\} \,\}\end{aligned}$$

□

Exercițiul 2. Arătați că relația de congruență modulo n este relație de echivalență, folosind definiția.

Demonstrație. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Atunci spunem că $a \equiv b \mod n$ dacă $n \mid (a - b)$.

Pentru a demonstra că este relație de echivalență, trebuie să demonstrăm că este *reflexivă*, *simetrică* și *tranzitivă*.

1. Fie $a \in \mathbb{N}$. Atunci $n \mid (a - a) = 0$. Deci $a \equiv a \mod n$. Deci $\equiv$ este reflexivă.
2. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \equiv b \mod n$. Din definiție, $n \mid (a-b)$. Atunci $n \mid -(a-b)$. De unde rezultă că $n \mid (b - a)$. Deci $b \equiv a \mod n$. Deci $\equiv$ este simetrică.
3. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \equiv b \mod n$ și $b \equiv c \mod n$. Din definiție avem că $n \mid (a - b)$ și $n \mid (b-c)$. Atunci facem suma și avem că $n \mid ((a-b)+(b-c)) \implies n \mid (a-c)$. Deci $a \equiv c \mod n$. Deci $\equiv$ este tranzitivă.

Din acestea rezultă că $\equiv$ este relație de echivalență. □

Exercițiul 3. Demonstrați că relația $x \rho y \iff x^2 + 7x = y^2 + 7y$ este de echivalență.

Demonstrație. Demonstrația este similară cu cea de la exercițiul precedent, iar proprietățile decurg din faptul că egalitatea este reflexivă, simetrică și tranzitivă. □

Exercițiul 4. Fie A și A' submulțimi ale lui T. Arătați că:

1. $\chi_{A \cap A'} = \chi_A \cdot \chi_{A'}$
2. $\chi_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'} - \chi_A \cdot \chi_{A'}$
   În particular, dacă A și A' sunt disjuncte avem că $X_{A \cup A'} = \chi_A + \chi_{A'}$.
3. $\chi_{A \setminus A'} = \chi_A \cdot (1 - \chi_{A'})$

Demonstrație. Putem demonstra aceste egalități construind tabelul de valori pentru funcțiile χ.

1.

χ_A	$\chi_{A'}$	$\chi_{A\cap A'}$	$\chi_A \cdot \chi_{A'}$
0	0	0	$0 \cdot 0 = 0$
0	1	0	$0 \cdot 1 = 0$
1	0	0	$1 \cdot 0 = 0$
1	1	1	$1 \cdot 1 = 1$

2.

χ_A	$\chi_{A'}$	$\chi_{A\cup A'}$	$\chi_A + \chi_{A'} - \chi_A \cdot \chi_{A'}$
0	0	0	$0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0$
0	1	1	$0 + 1 - 0 \cdot 1 = 1$
1	0	1	$1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1$
1	1	1	$1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1$

3.

χ_A	$\chi_{A'}$	$\chi_{A\setminus A'}$	$\chi_A \cdot (1 - \chi_{A'})$
0	0	0	$0 \cdot (1 - 0) = 0$
0	1	0	$0 \cdot (1 - 1) = 0$
1	0	1	$1 \cdot (1 - 0) = 1$
1	1	0	$1 \cdot (1 - 1) = 0$

□

Exercițiul 5. Dați exemplu de funcții $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cu proprietatea că $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$, dar g nu este injectivă, iar f nu este surjectivă.

Demonstrație. O pereche de funcții care îndeplinesc aceste condiții sunt

$$g(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 0 \\ n - 1, & \text{dacă } n \geq 1 \end{cases}$$

$$f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

□