Variabile legate şi libere

Definiția 2.22

Fie $\varphi = \varphi_0\varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ o formulă a lui $\mathcal{L}$ şi x o variabilă.

- *spunem că variabila x apare legată pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$ şi există $0 \le i \le k \le j \le n-1$ a.î. (i, j)-subexpresia lui φ este o subexpresie a lui φ de forma $\forall x \psi$;*
- *spunem că x apare liberă pe poziția k în φ dacă $x = \varphi_k$, dar x nu apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă legată (bounded variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare legată pe poziția k în φ;*
- *x este variabilă liberă (free variable) a lui φ dacă există un k a.î. x apare liberă pe poziția k în φ.*

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate şi libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită şi prin inducție pe formule:

$$\begin{aligned}
FV(\varphi) &= Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;}\\
FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi);\\
FV(\varphi \to \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi);\\
FV(\forall x \varphi) &= FV(\varphi) \setminus \{x\}.
\end{aligned}$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Interpretarea termenilor şi formulelor

Propoziția 2.23

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.

Propoziția 2.24

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$.

Echivalențe şi consecințe logice

Propoziția 2.25

Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\varphi &\;\text{⫤⊨}\; \exists x \varphi && (15)\\
\varphi &\;\text{⫤⊨}\; \forall x \varphi && (16)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \wedge \forall x \psi && (17)\\
\forall x(\varphi \vee \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \vee \forall x \psi && (18)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \wedge \exists x \psi && (19)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \vee \exists x \psi && (20)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \to \forall x \psi && (21)\\
\exists x(\varphi \to \psi) &\;\text{⫤⊨}\; \varphi \to \exists x \psi && (22)\\
\forall x(\psi \to \varphi) &\;\text{⫤⊨}\; \exists x \psi \to \varphi && (23)\\
\exists x(\psi \to \varphi) &\;\text{⫤⊨}\; \forall x \psi \to \varphi && (24)
\end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Enunțuri

Definiția 2.26

O formulă φ se numește enunț (sentence) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 2.27

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.24 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 2.28

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al lui φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.29

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim
$t_x(u)$:= *expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.*

Propoziția 2.30

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$.
Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 2.31

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 2.32

$\varphi_x(u)$:= *expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.*

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 2.33

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 2.34

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) *pentru orice termen t,*

$$\vDash u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) *pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,*

$$\vDash u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 2.35

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) *Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,*

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\vDash \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \vDash \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) *Pentru orice simbol de constantă c,*

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \vDash \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x \dot{-} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\vDash (x \dot{-} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 2.36

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 2.36 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Substituția

Definiția 2.37

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- *dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;*
- *dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;*
- *dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;*
- *dacă $\varphi = \forall z \psi$, atunci*

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w \psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z \psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Substituția

Definiția 2.38

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 2.39

(i) *Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \vDash\!\dashv \varphi'$;*

(ii) *Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.*

Forma normală prenex

Definiția 2.40

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 2.41

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:

- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \psi$, unde ψ este liberă de cuantificatori

Forma normală prenex

Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm cu $\varphi_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$ respectiv.

Notații: $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$.

Teorema 2.42 (Teorema de formă normală prenex)
Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \vDash\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \vDash\!\dashv \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \vDash\!\dashv \neg\psi^* \vDash\!\dashv \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Forma normală prenex

- $\varphi = \psi \to \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1x_1\dots Q_nx_n\psi_0, \quad \chi^* = S_1z_1\dots S_mz_m\chi_0$$

a.î. $\psi \mathrel{\Dashv\vDash} \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \mathrel{\Dashv\vDash} \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^*.
Fie $\tilde{\psi^*}$ (resp. $\tilde{\chi^*}$) varianta V_0-liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi^*} = Q_1y_1\dots Q_ny_n\tilde{\psi_0}, \quad \tilde{\chi^*} = S_1w_1\dots S_mw_m\tilde{\chi_0},$$

unde $y_1,\dots,y_n, w_1,\dots,w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0, $\tilde{\psi_0} = \psi_{0\,x_1,\dots,x_n}(y_1,\dots,y_n)$ și $\tilde{\chi_0} = \chi_{0\,z_1,\dots,z_m}(w_1,\dots,w_m)$.
Conform Propoziției 2.39.(i), $\tilde{\psi^*} \mathrel{\Dashv\vDash} \psi^*$ și $\tilde{\chi^*} \mathrel{\Dashv\vDash} \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi^*}) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi^*}) = FV(\chi^*)$.

Forma normală prenex

Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1\dots Q_n^c y_n S_1w_1\dots S_mw_m\,(\tilde{\psi_0} \to \tilde{\chi_0}).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned}\varphi^* &\mathrel{\Dashv\vDash} \tilde{\psi^*} \to \tilde{\chi^*}\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \psi^* \to \chi^*\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \psi \to \chi = \varphi.\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \mathrel{\Dashv\vDash} \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.
Definim $\varphi^* := \forall x\psi^*$. □

Forma normală prenex

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y,z) = c) \wedge \neg\exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned}\varphi &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \neg\exists x(f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \forall x\neg(f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)\end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y\forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Forma normală prenex

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg\forall y(S(y) \to \exists zR(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x,y) \to f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}\varphi &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\neg(S(y) \to \exists zR(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x,y) \to f(x) = d)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x(\forall yP(x,y) \to f(x) = d)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\neg\exists z(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall z\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall z\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \forall x\exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall z\forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists y(P(x,y) \to f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall z\forall x\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge \exists v(P(x,v) \to f(x) = d)\big)\\ &\mathrel{\Dashv\vDash} \exists y\forall z\forall x\exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big)\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y\forall z\forall x\exists v\big(\neg(S(y) \to R(z)) \wedge (P(x,v) \to f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.