

Seminar 6

(S6.1) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice \mathcal{L} -formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

- (i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi$;
- (ii) $\varphi \models \exists x\varphi$;
- (iii) $\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$.

- (i) Avem, pe de-o parte, $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$ (**).

Vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**). Pentru aceasta, este suficient să arătăm că, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ dacă și numai dacă $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Fie $a \in A$. Din Propoziția 3.29, este suficient să arătăm că pentru orice $v \in FV(\varphi)$, $e_{x \mapsto a}(v) = e(v)$. Fie $v \in FV(\varphi)$. Cum $x \notin FV(\varphi)$, avem $v \neq x$. Dar, atunci, din definiția lui $e_{x \mapsto a}$, rezultă că $e_{x \mapsto a}(v) = e(v)$, ceea ce trebuia arătat.

Scriem raționamentul de mai sus în felul următor, pe scurt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \text{ (Prop. 3.29)} \\
 &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}] \\
 &\iff \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ și } \mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].
 \end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (\exists x \varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models \varphi[e] \text{ (Prop. 3.29)} \\
&\iff \mathcal{A} \models \varphi[e].
\end{aligned}$$

(iii) Avem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models (\exists x (\psi \rightarrow \varphi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \models (\psi \rightarrow \varphi)[e_{x \mapsto a}] \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \mapsto a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]) \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \mapsto a}] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e]) \text{ (Prop. 3.29)} \\
&\iff (\text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \mapsto a}]) \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\
&\iff \mathcal{A} \not\models \forall x \psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \models \varphi[e] \\
&\iff \mathcal{A} \models (\forall x \psi \rightarrow \varphi)[e].
\end{aligned}$$

□

(S6.2) Considerăm limbajul \mathcal{L} ce conține un singur simbol, anume un simbol de relație de aritate 2, notat cu \sim . Să se scrie un \mathcal{L} -enunț φ ce spune că relația asociată simbolului este o relație de echivalență cu proprietatea că fiecare clasă a sa are exact două elemente. Să se determine mulțimea acelor $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că există o \mathcal{L} -structură cu n elemente care satisface φ .

Demonstrație:

Enunțul φ va fi conjuncția celor trei proprietăți ale relațiilor de echivalență, anume:

- $\forall v_0 (v_0 \sim v_0)$,
- $\forall v_0 \forall v_1 (v_0 \sim v_1 \rightarrow v_1 \sim v_0)$,
- $\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 (((v_0 \sim v_1) \wedge (v_1 \sim v_2)) \rightarrow (v_0 \sim v_2))$,

împreună cu:

$$\forall v_0 \exists v_1 (v_0 \sim v_1 \wedge \neg(v_0 = v_1) \wedge \forall v_2 (v_2 \sim v_0 \rightarrow (v_2 = v_0 \vee v_2 = v_1))).$$

Este imediat faptul că o mulțime finită poate fi înzestrată cu o asemenea relație dacă și numai dacă are un număr par de elemente. Așadar, mulțimea cerută este mulțimea numerelor naturale nenule pare. □

(S6.3) Considerăm limbajul \mathcal{L}_r ce conține doar două simboluri, anume două simboluri de operație de aritate 2, notate cu $+$ și \times , și \mathcal{L}_r -structura $\mathcal{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot)$. Să se dea exemplu de \mathcal{L}_r -formulă ψ astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{R} \models \psi[e] \Leftrightarrow e(v_0) \leq e(v_1).$$

Demonstrație: Luăm

$$\psi := \exists v_2(v_1 = v_0 + (v_2 \times v_2)).$$

□

(S6.4) (Exercițiu suplimentar) Considerăm limbajul \mathcal{L} ce conține un singur simbol, anume un simbol de funcție de aritate 2. Să se găsească un enunț φ astfel încât $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi$, dar $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +) \not\models \varphi$ (în ultima sa apariție, simbolul $+$ denotă operația de adunare pe componente pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Demonstrație:

Prima soluție: se ia φ ca fiind

$$\forall v_0 \forall v_1 ((\neg \exists v_2(v_0 = v_2 + v_2) \wedge \neg \exists v_2(v_1 = v_2 + v_2)) \rightarrow \exists v_2(v_0 + v_1 = v_2 + v_2)),$$

ce exprimă faptul că suma a două elemente “nepare” este pară – în \mathbb{Z} , avem într-adevăr regula “impar + impar = par”, dar în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avem contraexemplul $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$.

A doua soluție: se ia φ ca fiind

$$\exists v_2 \forall v_0 (\exists v_1(v_0 = v_1 + v_1) \vee \exists v_1(v_0 = v_1 + v_1 + v_2)),$$

ce este adevărată în \mathbb{Z} , unde orice element este ori de forma $2z$, ori de forma $2z + 1$, dar nu este adevărat în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, unde relația de congruență indusă de elementele pare are patru clase, și nu două. □