23.10.2021

Tutoriat 1 – Algebră

Mulțimi. Operații cu mulțimi

Fie A și B 2 mulțimi

- **Reuniunea**: Numim mulțimea $A \cup B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ reuniunea lui A, B
- **Intersecția**: Numim mulțimea $A \cap B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ intersecția lui A, B
- **Diferența**: Numim mulțimea $A \setminus B \stackrel{def}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ diferența mulțimilor A și B

Observație: $A \setminus B \neq B \setminus A$

ex: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{2, 5\}$

$A \setminus B = \{1, 3, 4\}$ $\quad B \setminus A = \{5\}$

Complementara unei mulțimi:

Fie A, B mulțimi, $A \subseteq B$

Atunci $C_B(A) = B \setminus A = \bar{A}$

Proprietăți: Fie A, B, C mulțimi. Atunci

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3) (De Morgan) Dacă $A, B \subseteq C$, atunci:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Funcții

Def: Fie A, B două mulțimi. Numim funcție/aplicație $f: A \to B$ submulțimea $f \subseteq A \times B$ definită astfel:

$$\forall a \in A \quad \exists! \, b_a \in B \quad a.î. \quad (a, b_a) \in f$$

A : domeniu de definiție

B : codomeniu

Def: Numim imaginea funcției f mulțimea $f(A) \overset{def}{=} \{ b \mid \exists a \in A \text{ a.î. } f(a) = b \}$

Numim preimaginea lui B prin f mulțimea $f^{-1}(B) = \{ a \mid f(a) \in B \}$

Extra: $f: A \to B$
$f(A) = \operatorname{Im} f$

ex: 1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$

$$f(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}^*$$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$

$$f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \underset{\geq 0}{x^2} + 1 \geq 1$

$f^{-1}(4) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 4 \}$

$f(x) = 4 \Rightarrow x^2 = 3$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$f^{-1}(4) = \{ \pm\sqrt{3} \}$

$f^{-1}(2) = \{1, -1\}$, $f^{-1}([26, 37]) = [5, 6] \cup [-6, -5]$

Produsul cartezian: Fie A, B mulțimi. Numim produsul cartezian al lui A și B mulțimea $A \times B = \{ \underbrace{(a, b)}_{\text{pereche ordonată}} \mid a \in A, b \in B \}$

Funcții injective, surjective, bijective

Fct. injective: $f: A \to B$ funcție injectivă dacă $\forall a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) \neq f(a_2)$

(sau $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$)

Fct. surjective:

$f: A \to B$ surjectivă dacă $\operatorname{Im} f = f(A) = B$

„Traducere matematică": $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ a.î. $f(a) = b$

Fct. bijective: $f: A \to B$ bijectivă dacă injectivă și surjectivă

„Traducere": $\forall b \in B$, $\exists!\, a \in A$ a.î. $f(a) = b$

$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$
$= (x-1)(x-2)$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$ ⟨ 2, 1

$(x-1)(x-2)$

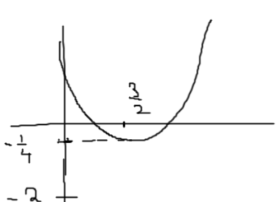
$f(1) = f(2) = 0$, $1 \neq 2$ $\Rightarrow$ NU E INJECTIVĂ

$ax^2 + bx + c = 0$

Vf. unei parabole: $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$

Deci, de exemplu, $f^{-1}(-2) = \emptyset$

Adică $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = -2$



DECI NU E SURJECTIVĂ

Compunerea funcțiilor

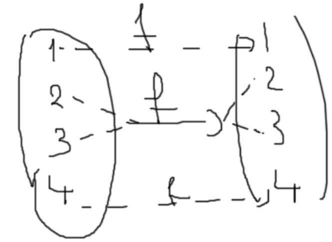
Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$. Definim funcția $g \circ f: A \to C$,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ a & & f(a) & & g(f(a)) \end{array}$$

ex. scurt $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1) = 2$



$*$ $1_A: A \to A$, $1_A(a) = a$ bijectivă

$1_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $1_{\mathbb{R}}(x) = x$

Funcții inversabile

Spunem că $f: A \to B$ inversabilă $\iff \exists$ $(\exists!)$ $g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$

$(f \circ g)(x) = x$

$$\boxed{f: A \to B \text{ inversabilă} \iff f \text{ bijectivă}}$$

1) $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ injectivă

Bijectivitate: $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists!\, x \in (0, \infty)$ a.î. $f(x) = y$

$f(x) = y \iff \ln x = y \mid e^{(\,)} \iff e^{\ln x} = e^y \iff x = e^y$

Avem $g: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $g(x) = e^x$

$(e^{\ln t} = t, \ \forall t > 0)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = e^{\ln x} = x$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \ln e^x = x$

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5}\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\}$, $f(x) = \frac{2x-1}{5x-1}$ bij?

$f\left(\frac{2}{13}\right) = \frac{\frac{4}{13}-1}{\frac{10}{13}-1} = \frac{-9}{-3} = 3$

SOL: $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\},\ \exists!\, x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5}\} \text{ a.î. } f(x)=y}$

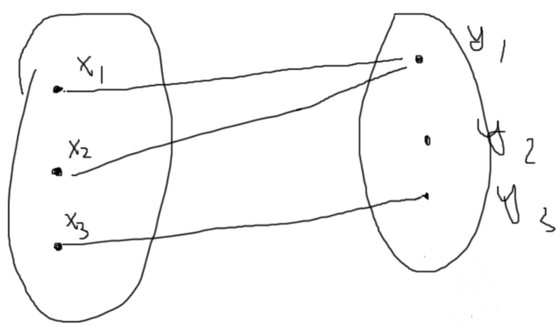
$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{2x-1}{5x-1} = y \Leftrightarrow 2x-1 = 5xy - y \Leftrightarrow 2x - 5xy = 1-y$

$\Leftrightarrow x(2-5y) = 1-y$

$\Leftrightarrow \underset{\in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5}\}}{x} = \frac{1-y}{2-5y} = \frac{(-1)(y-1)}{(-1)(5y-2)} = \frac{y-1}{5y-2}$, $y \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\}$

$\boxed{x = \frac{y-1}{5y-2}}$

bun $g: \mathbb{R}\setminus\{\frac{2}{5}\} \to \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{5}\}$, $g(x) = \frac{x-1}{5x-2}$



Relații binare

Luăm A o mulțime. Considerăm $\rho \subseteq A \times A$ submulțime denumită **relație binară pe A**. Dacă $(a,b) \in \rho$, notăm $a \rho b$ (a în relație b)

Definiții a) ρ reflexivă dacă $(a,a) \in \rho$ (sau $a \rho a$)

b) ρ simetrică dacă $a \rho b \Rightarrow b \rho a$

c) ρ antisimetrică dacă $\left.\begin{array}{l} a \rho b \\ b \rho a \end{array}\right| \Rightarrow a = b$

ρ nu le poate avea pe amândouă

d) ρ tranzitivă dacă $\left.\begin{array}{l} a \rho b \\ b \rho c \end{array}\right| \Rightarrow a \rho c$

Cantor – Bernstein

A, B mulțimi

$\left.\begin{array}{l} |A| \leq |B| \\ |B| \leq |A| \end{array}\right| \Rightarrow |A| = |B|$

Ex de relații: **Relația de ordine** $a \leq b$

- reflexivă: $a \leq a$
- antisimetrică: $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right| \Rightarrow a = b$
- tranzitivă: $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right| \Rightarrow a \leq c$

Relații de echivalență

Proprietăți: reflexivă, simetrică, tranzitivă   x echivalent cu y

Notație pt. relația de echivalență: $\sim$ $(x \sim y)$

Ex: ① Pe $\mathbb{R}$ definim $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$

„$\sim$" rel. de ech.

1) reflexivă: $x \sim x \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

2) simetria: $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \sim x$

3) tranzitivă: $x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$

$y \sim z \overset{def}{\Longleftrightarrow} y - z \in \mathbb{Z}$ +

$x - z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \sim z$

② Pe $\mathbb{Z}$, fie $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Spunem că $a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a - b \,\vdots\, m$, $m \mid a - b$

1) reflexivă: $a \sim a \Leftrightarrow m \mid 0$ ✓

2) simetria: $a \sim b \Leftrightarrow m \mid a - b \xrightarrow{(a-b)(-1)} m \mid b - a \Leftrightarrow b \sim a$

$m \mid a \Rightarrow m \mid ac$, $c \in \mathbb{Z}^*$

3) tranzitivitate: vezi ① 3)

3) Pe $\mathbb{Z}$: $n \sim m \overset{def}{\iff} n^2+n = m^2+m$

1) reflexivă : $n \sim n \overset{def}{\iff} \cancel{n^2+n} = \cancel{n^2+n}$ ✓

2) simetrie : $n \sim m \overset{def}{\iff} n^2+n = m^2+m \iff m^2+m = n^2+n$

$\iff m \sim n$

3) tranzitivitate : $\begin{matrix} n \sim m \\ m \sim p \end{matrix} \iff \begin{matrix} n^2+n = m^2+m \\ m^2+m = p^2+p \end{matrix} \iff n^2+n = p^2+p$

$\iff n \sim p$