Seminar 1

1. Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați, folosind definiția, că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

<u>Soluție.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

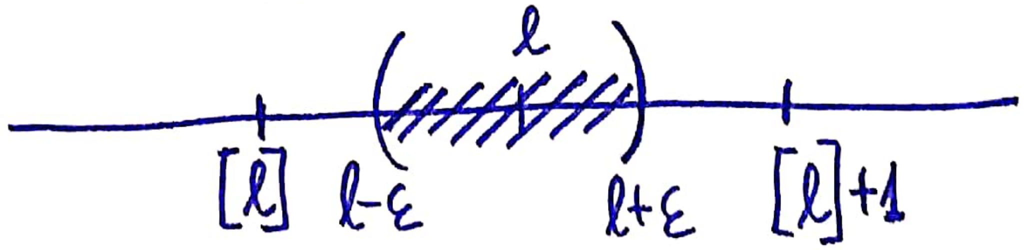
$$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ și obținem concluzia. $\square$

2. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{Z}$ și $l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Arătați că $l \in \mathbb{Z}$.

<u>Soluție.</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

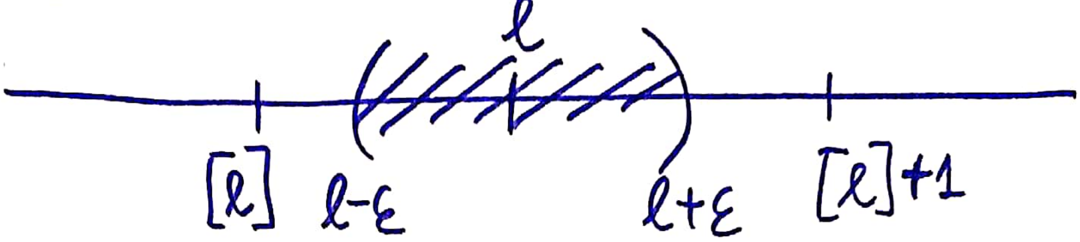
$$|x_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon).$$



Scanned with CamScanner

Presupunem prin absurd că $l \notin \mathbb{Z}$.

Alegem $\varepsilon > 0$ a.î. $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.



Într-adevăr, putem alege un astfel de ε, deoarece $l-[l] > 0$ ($l \notin \mathbb{Z}$) și $[l]+1-l > 0$ (alegem $\varepsilon \in (0, \min\{l-[l], [l]+1-l\})$).

Cu acest ε avem:

1) $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.

2) $x_n \in \mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

3) $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, contradicție.

Așadar $l \in \mathbb{Z}$. $\square$

<u>Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi.</u> Fie $(x_n)_n \subset (0, \infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0, \infty] = [0, \infty) \cup \{\infty\}$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l = 1$, atunci criteriul acesta nu decide.

3. Fie $a \in (0,\infty)$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot a^n$.

Soluție. Fie $x_n = n a^n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{a^{n+1}}}{n\,\cancel{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} a = a.$$

Dacă $a < 1$ (i.e. $a \in (0,1)$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Dacă $a > 1$ (i.e. $a \in (1,\infty)$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Dacă $a = 1$, criteriul raportului nu decide, dar, în acest caz, avem $x_n = n\cdot 1^n = n \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Am obținut $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0; & a \in (0,1) \\ \infty; & a \in [1,\infty). \end{cases}$ $\square$

Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni pozitivi. Fie $(x_n)_n \in [0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not.}{=} l \in [0,\infty]$.

1) Dacă $l < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $l > 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $l = 1$, atunci criteriul acesta nu decide.

4. Fie $a, b \in (0, \infty)$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{an^2+3n+5}{bn^2+2n+3}\right)^n$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n = \left(\dfrac{an^2+3n+5}{bn^2+2n+3}\right)^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+5}{bn^2+2n+3} = \frac{a}{b}.$$

1) Dacă $\frac{a}{b} < 1$ (i.e. $a < b$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) Dacă $\frac{a}{b} > 1$ (i.e. $a > b$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

3) Dacă $\frac{a}{b} = 1$ (i.e. $a = b$), criteriul radicalului nu decide, dar, în acest caz, avem $x_n =$

$$= \left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{an^2+3n+5}{an^2+2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{an^2+2n+3}{an^2+2n+3} + \frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{n+2}{an^2+2n+3}\right)^{\frac{an^2+2n+3}{n+2}}\right]}_{\xrightarrow{n\to\infty} e}^{\frac{n+2}{an^2+2n+3}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{an^2+2n+3}\cdot n} = e^{\frac{1}{a}}.$$

Am obținut $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0 & ; a<b \\ \infty & ; a>b \\ e^{\frac{1}{a}} & ; a=b. \end{cases}$ $\square$

<u>Propoziție</u>. Fie $(x_n)_n \subset (0,\infty)$ a.î. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=\!=} l \in [0,\infty]$. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

5. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

<u>Soluție</u>. Fie $x_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$. $\square$

6. Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

Soluție. Arătăm că $(x_n)_n$ este monoton și mărginit.

Monotonia.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{n+1} - x_n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \cancel{\frac{1}{3^2}} + \ldots + \cancel{\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} -$$

$$-\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2^2}} - \cancel{\frac{1}{3^2}} - \ldots - \cancel{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

Deci $(x_n)_n$ este strict crescător (1)

Mărginirea.

Deoarece $(x_n)_n$ este strict crescător, avem $x_1 \leq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, i.e. $(x_n)_n$ este mărginit inferior.

$$2^2 > 1 \cdot 2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}.$$

$$3^2 > 2 \cdot 3 \Rightarrow \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

....

$$n^2 > (n-1)n \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

+

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \Rightarrow x_n<2-\frac{1}{n}<2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Deci $1=x_1\le x_n<2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$, i.e. $(x_n)_n$ este mărginit (2)

Din (1) și (2) rezultă, conform criteriului lui Weierstrass, că $(x_n)_n$ e convergent. □

7. Determinați $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$ și precizați dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

a) $x_n=1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

<u>Soluție.</u> $x_{4n}=1+2(-1)^{4n+1}+3(-1)^{\frac{\overset{2}{\cancel{4}}n(4n+1)}{\cancel{2}}}=$

$$=1-2+3=2\xrightarrow[n\to\infty]{}2.$$

$$x_{4n+1}=1+2(-1)^{4n+2}+3(-1)^{\frac{(4n+1)(\overset{2}{\cancel{4}}n+\overset{1}{\cancel{2}})}{\cancel{2}}}=$$

$$=1+2-3=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

$$x_{4n+2}=1+2(-1)^{4n+3}+3(-1)^{\frac{(\overset{2}{\cancel{4}}n+\overset{1}{\cancel{2}})(4n+3)}{\cancel{2}}}=$$

$$= 1-2-3=-4 \xrightarrow[n\to\infty]{} -4.$$

$$x_{4n+3} = 1+2(-1)^{4n+4}+3(-1)^{\frac{(4n+3)(\cancel{4}^{2}n+\cancel{4}^{2})}{\cancel{2}}} =$$

$$= 1+2+3=6 \xrightarrow[n\to\infty]{} 6.$$

Cum $\mathbb{N} = 4\mathbb{N} \cup (4\mathbb{N}+1) \cup (4\mathbb{N}+2) \cup (4\mathbb{N}+3)$ rezultă că $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{-4, 0, 2, 6\}$.

Deci $\underline{\lim}\, x_n = -4$ și $\overline{\lim}\, x_n = 6$.

Deoarece $\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n$ rezultă că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$

b) $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

__Soluție.__ $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$\sin(n\pi) = 0$

$\cos(n\pi) = (-1)^n$

$$x_{6n} = \sin \frac{\cancel{6}^{2} n\pi}{\cancel{3}} = \sin 2n\pi = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$x_{6n+1} = \sin \frac{6n\pi + \pi}{3} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_{6n+2} = \sin\frac{6n\pi + 2\pi}{3} = \sin\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3} = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_{6n+3} = \sin\frac{6n\pi + 3\pi}{3} = \sin(2n\pi + \pi) = \sin\pi =$$

$$= 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$$x_{6n+4} = \sin\frac{6n\pi + 4\pi}{3} = \sin\left(2n\pi + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{4\pi}{3} = 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3} = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cos\frac{2\pi}{3} =$$

$$= \sqrt{3}\left(\cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_{6n+5} = \sin\frac{6n\pi + 5\pi}{3} = \sin\left(2n\pi + \frac{5\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\pi\cos\frac{2\pi}{3} +$$

$$+ \sin\frac{2\pi}{3}\cos\pi = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Cum $\mathbb{N} = 6\mathbb{N} \cup (6\mathbb{N}+1) \cup (6\mathbb{N}+2) \cup (6\mathbb{N}+3) \cup$

$\cup(6\mathbb{N}+4)\cup(6\mathbb{N}+5)$ rezultă că $\mathcal{L}((x_n)_n) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Deci $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\overline{\lim}\, x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Deoarece $\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n$ rezultă că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. □

c) $x_n = \dfrac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Soluţie. $-1 \le \cos\frac{n\pi}{2} \le 1$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n^2+1} \le \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1} \quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{n^2+1} \le \frac{n\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$0$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$).

Prin urmare $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = 0$. □