CURS 3

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

PRELIMINARII - CONTINUARE

Principiul diagonalizării.

Fie R o relaţie binară pe o mulţime A şi $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Demonstraţie. Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a, a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicţie.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a, a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicţie.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. $\square$

Teoremă Cantor.
Nu există o bijecţie între $\mathbb{N}$ şi mulţimea $2^{\mathbb{N}}$ a părţilor lui $\mathbb{N}$.
În concluzie, $2^{\mathbb{N}}$ nu este mulţime numărabilă.

Demonstraţie. Presupunem că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots,\}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relaţia binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

şi aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ şi f este bijecţie, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) = S_k = R_k$.
Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obţinut o contradicţie. $\square$

- O mulţime are *n elemente* dacă este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$ (mulţime notată şi $\{1, \ldots, n\}$).
- O mulţime A se numeşte *finită* dacă există $n \in \mathbb{N}$ a.î. A are n elemente.
- O mulţime care nu este finită se numeşte *infinită*.
- Pentru o mulţime A, definim *cardinalul* lui A ca fiind

$$|A| = \{B \mid A \simeq B\}$$

- Cardinalul unei mulţimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele mulţimilor infinite sunt cardinalele *transfinite*.
- *Numerele cardinale* sau *cardinalele* sunt o generalizare a numerelor naturale, fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulţimi.

- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citeşte *alef zero*).
- O mulţime A este numărabilă daca $|A| = \aleph_0$.
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ (se mai numeşte şi puterea continuumului).
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$
- $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$
- Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis):

  Nu există nicio mulţime S a.î. $\aleph_o < |S| < \mathfrak{c}$.

Pentru orice două mulţimi A, B definim următoarea relaţie:

$$|A| \leq |B| \iff \text{există } f : A \to B \text{ funcţie injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein.
Dacă există două funcţii injective $f : A \to B$ şi $g : B \to A$, atunci A şi B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $|A| \leq |B|$ şi $|B| \leq |A|$, atunci $|A| = |B|$.

Fie A o mulţime nevidă şi $R \subseteq A \times A$ o relaţie binară pe A.

Notaţie.

Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ şi $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiţie

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

  xRy şi yRx implică $x = y$.
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,

  xRy şi yRz implică xRz.
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Definiţie.

Fie A o mulţime nevidă. O relaţie binară $R \subseteq A \times A$ se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Exemplu.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relaţia $\equiv(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel:

$$\equiv(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

Relaţia $\equiv(\text{mod } n)$ se numeşte congruenţa modulo n. Folosim notaţia $x \equiv y(\text{mod } n)$ pentru $(x, y) \in \equiv(\text{mod } n)$.

Exemplu.

Fie $f : A \to B$ o funcţie. Definim relaţia $\ker f \subseteq A \times A$ astfel:

$$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

$\ker f$ se numeşte nucleul lui f.

Notaţii.

Vom nota relaţiile de echivalenţă cu $\sim$.
Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ şi $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

Definiţie.

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalenţă $[x]$ a lui x este definită astfel:

$$[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Definiţie.

Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă distincte ale elementelor lui A se numeşte mulţimea cât a lui A prin $\sim$ şi se notează $A/\sim$.

Aplicaţia $\pi : A \to A/\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numeşte funcţia cât.

Exemplu.
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv(\text{mod } 2)$:

- $[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[1] = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[2n] = [0]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$
- $[2n + 1] = [1]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Propoziţie.
Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă. Atunci

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

Definiţie.
Un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$ este o submulţime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Exemplu.
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv \pmod 2$.

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Sisteme de reprezentanţi: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Propoziţie.
Fie X un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.
Atunci $A = \bigcup_{x \in X} [x]$ şi $A/{\sim} = \{[x] \mid x \in X\}$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie A o mulţime nevidă.

Definiţie.

O partiţie a lui A este o familie $(A_i)_{i \in I}$ de submulţimi nevide ale lui A care verifică proprietăţile:

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ şi
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$.

Partiţia $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte finită dacă I este finită.

Fie A o mulţime nevidă.

Propoziţie.
Există o bijecţie între mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A şi mulţimea partiţiilor lui A:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiţie a lui $A \mapsto$ relaţia de echivalenţă pe A definită prin:
$$x \sim y \text{ ddacă } \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x, y \in A_i.$$
- $\sim$ relaţie de echivalenţă pe $A \mapsto$ partiţia $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţie.
Fie A o mulţime nevidă. O relaţie binară R pe A este relaţie de

- ordine parţială dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă şi tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă şi totală.

Notaţii.
Vom nota relaţiile de ordine parţială şi totală cu $\leq$, iar relaţiile de ordine strictă cu $<$.

Definiţie.
Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulţime parţial (total) ordonată.

Propoziţie.
Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

- Orice relaţie de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulţime total ordonată este mulţime parţial ordonată.
- Relaţia $<$ definită prin $x < y \iff (x \leq y$ şi $x \neq y)$ este relaţie de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulţime parţial ordonată.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.