

Problema discretă a rucsacului

Se consideră un rucsac de capacitate (greutate) maximă G (număr **natural**) și n obiecte caracterizate prin:

- greutatea lor (numere naturale) g_1, \dots, g_n ;
- câștigurile c_1, \dots, c_n obținute la încărcarea lor în totalitate în rucsac.

Un obiect **nu poate fi fracționat**.

Se cere o modalitate de încărcare de obiecte în rucsac, astfel încât câștigul total să fie maxim.

Problema discretă a rucsacului

Caz particular

Date n obiecte cu ponderile w_1, w_2, \dots, w_n și o limită W , să se selecteze o submulțime de obiecte cu suma ponderilor maximă, fără a depăși însă ponderea W

Problema discretă a rucsacului

Caz particular

Date n obiecte cu ponderile w_1, w_2, \dots, w_n și o limită W , să se selecteze o submulțime de obiecte cu suma ponderilor maximă, fără a depăși însă ponderea W

Interpretări

- Submulțime de sumă maximă mai mică sau egală cu o valoare M dată (v. Greedy)
- n activități cu duratele w_1, w_2, \dots, w_n necesită o resursă. Știind că timpul maxim de funcționare a resursei este W , să se selecteze o submulțime de activități care țin resursa ocupată un timp cât mai lung (maxim)

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

$G = 8$

$n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

$$G = 8$$

$n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

Greedy – în ordinea descrescătoare a raportului c/g

- Alege întâi obiectul 4 de greutate 6
- Nu se mai poate pune nici un alt obiect întreg în rucsac
- Câștigul Greedy: 18

Problema discretă a rucsacului

Exemplu:

$$G = 8$$

$n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

Greedy – în ordinea descrescătoare a raportului c/g

- Alege întâi obiectul 4 de greutate 6
- Nu se mai poate pune nici un alt obiect întreg în rucsac
- Câștigul Greedy: 18

Soluția optimă:

- Alegem obiectele 2 și 3
- Câștigul total $10 + 9 = 19$

Problema discretă a rucsacului

► Principiu de optimalitate

Dacă S este soluție optimă pentru greutatea g și obiectele $\{1, 2, \dots, n\}$ care

- conține n ,
- nu conține n

Problema discretă a rucsacului

► Principiu de optimalitate

Dacă S este soluție optimă pentru greutatea g și obiectele $\{1, 2, \dots, n\}$ care

- **conține n** atunci $S - \{n\}$ este soluție optimă pentru greutatea $g - g_n$ și obiectele $\{1, 2, \dots, n-1\}$
- **nu conține n** atunci S este soluție optimă pentru greutatea g și obiectele $\{1, 2, \dots, n-1\}$

Problema discretă a rucsacului

- ▶ **Subproblemă:**

$s[i][g]$ = câștigul maxim pentru greutatea g și obiectele $\{1, \dots, i\}$

- ▶ **Soluție** $s[n][G]$

Problema discretă a rucsacului

► Știm direct

$$s[i][0] = 0, \quad \forall i=0, \dots, n$$

$$s[0][g] = 0, \quad \forall g=0, \dots, G$$

► Relație de recurență

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

► Ordinea de parcurgere

$$i = 1, \dots, n, \quad g = 1, \dots, G$$

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0									
0									
0									
0									

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3					
0								
0								
0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	3	3	3	3
0								
0								
0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9				
3	0								
4	0								

$s[2][4]$ = soluția optimă pentru obiectele $\{1,2\}$ și $g=4$

$$s[2][4] = \max\{c_2 + s[1][0], s[1][4]\} = \max\{9 + 0, 3\} = 9$$

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g - g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	
3	0								
4	0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	3	3	3	3
0	0	0	3	9	9	9	12	12
0	0	0	3	10				
0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	3	3	3	3
0	0	0	3	9	9	9	12	12
0	0	0	3	10	10	10	?	
0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	3	3	3	3	3
0	0	0	3	9	9	9	12	12
0	0	0	3	10	10	10	13	
0								

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6
 $c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

$s:$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	3	3	3	3	3	3
2	0	0	0	3	9	9	9	12	12
3	0	0	0	3	10	10	10	13	19
4	0	0	0	3	10	10	18	18	19

câștig optim $s[4][8]$

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Soluție:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	3	3	3	3	3	3
$s:$	0	0	0	3	9	9	9	12	12
	0	0	0	3	10	10	10	13	19
	0	0	0	3	10	10	18	18	19

Problema discretă a rucsacului

► **Exemplu** $G = 8$, $n = 4$ obiecte

$g:$ 3 4 4 6

$c:$ 3 9 10 18

$$s[i][g] = \begin{cases} s[i-1][g], & \text{daca } g_i > g \\ \max\{c_i + s[i-1][g-g_i], s[i-1][g]\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Soluție:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	3	3	3	3	3	3
S:	0	0	0	3	9	9	9	12	12
	0	0	0	3	10	10	10	13	19
	0	0	0	3	10	10	18	18	19

La pasul i obiectul i a fost luat $\Leftrightarrow s[i][g] > s[i-1][g]$

Problema discretă a rucsacului

- ▶ $O(nG)$