Examen[1] la algebră, an I, sem. I, informatică
31.01.2020

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Problema 1. Fie $\sigma = (1\ 3\ 2\ 4) \in S_4$.

(1) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$. **(5 pct.)**

(2) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^3 = \sigma$, $x \in S_4$. **(5 pct.)**

(3) Aflaţi numărul de elemente din $H = \langle \sigma \rangle$ (subgrupul generat de σ în S_4). **(5 pct.)**

(4) Aflaţi indicele lui H în S_4. **(5 pct.)**

(5) Arătaţi că H nu este subgrup normal în S_4. **(5 pct.)**

(6) Determinaţi cel mai mic subgrup normal al lui S_4 care-l conţine pe H. **(5 pct.)**

Problema 2. Fie I submulţimea lui $\mathbb{Z}[X]$ formată din toate polinoamele care au termenul liber divizibil cu 6.

(1) Demonstraţi că I este un ideal al lui $\mathbb{Z}[X]$. **(5 pct.)**

(2) Daţi un exemplu de polinom de grad 4 din I. **(5 pct.)**

(3) Arătaţi că $I = (6, X)$. Este I ideal principal? Justificaţi. **(10 pct.)**

(4) Determinaţi toţi divizorii lui zero din inelul factor $\mathbb{Z}[X]/I$. **(5 pct.)**

(5) Arătaţi că $\mathbb{Z}[X]/I$ este un inel finit şi găsiţi-i numărul de elemente. **(5 pct.)**

(6) Are loc izomorfismul de inele unitare $\mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$? Justificaţi. **(5 pct.)**

Problema 3.

(1) Fie $x, y, z \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 6 \end{cases}$$

Calculaţi $x^5 + y^5 + z^5$. **(10 pct.)**

(2) Aflaţi polinomul monic $P \in \mathbb{Z}[T]$ care are ca rădăcini pe x, y, z. **(5 pct.)**

(3) Studiaţi ireductibilitatea lui P peste $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ şi $\mathbb{Z}_5$. **(15 pct.)**

---

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 5 puncte din oficiu. Timp de lucru 3 ore. Succes!**