CURS 13

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LOGICA DE ORDINUL I

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- o mulţime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectorii $\neg$ şi $\rightarrow$;
- paranteze: (,);
- simbolul de egalitate $=$;
- cuantificatorul universal $\forall$;
- o mulţime $\mathcal{R}$ de simboluri de relaţii;
- o mulţime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcţii;
- o mulţime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
- o funcţie aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile lui $\mathcal{L}$ definite astfel:

(T0) Orice variabilă este termen.

(T1) Orice simbol de constantă este termen.

(T2) Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile lui $\mathcal{L}$ definite astfel:

(F0) Orice formulă atomică este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.

(F3) Dacă φ este formulă şi x este variabilă, atunci $(\forall x\varphi)$ este formulă.

Conectori derivaţi

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ şi cuantificatorul existenţial $\exists$ sunt introduşi prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \to \psi) \\
\varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\
\exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)).
\end{aligned}
$$

Definiţie 13.1

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- A este o mulţime nevidă;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulţime de operaţii pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulţime de relaţii pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.

- A se numeşte universul structurii $\mathcal{A}$. Notaţie: $A = |\mathcal{A}|$
- $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numeşte interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăţi ale egalităţii
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulţimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puţin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relaţie binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operaţii binare şi $\dot{S}$ este simbol de operaţie unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

- Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$, unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcţia succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulţimile nevide împreună cu o relaţie binară

- Dacă suntem interesaţi de mulţimi parţial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R şi notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesaţi de mulţimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R şi notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesaţi de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R şi notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesaţi de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R şi notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{}^{-1}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{}^{-1}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{}^{-1}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{}^{-1}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$. Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{}^{-1\,\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradiţional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiţia 13.2

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcţie $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiţia 13.3

Prin inducţie pe termeni se defineşte interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a *termenului t sub evaluarea e*:

- dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

Prin inducţie pe formule se defineşte interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0,1\}$$

a *formulei* φ *sub evaluarea* e.

$$
\begin{aligned}
(s = t)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases} \\
(Rt_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Negaţia şi implicaţia

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$$\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ sau $\psi^{\mathcal{A}}(e) = 1 \big)$.

Notaţie

Pentru orice variabilă $x \in V$ şi orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiţia 13.4

Fie φ o formulă. Spunem că:

- e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notaţie: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.
- e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notaţie: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

Corolarul 13.5

Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Demonstraţie. Exerciţiu uşor.

Fie φ, ψ formule şi x o variabilă.

Propoziţia 13.6

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Demonstraţie. Exerciţiu uşor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x\leftarrow a}) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Corolarul 13.7

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 13.8

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem şi că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenţie! Este posibil ca atât φ cât şi $\neg\varphi$ să fie satisfiabile. Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 13.9

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem şi că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notaţie: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiţia 13.10

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 13.11

φ şi ψ sunt logic echivalente (notaţie $\varphi \vDash\!\!\!\Dashv \psi$) dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Definiţia 13.12

ψ este consecinţă semantică a lui φ (notaţie $\varphi \vDash \psi$) dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Observaţie

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \vDash\!\!\!\Dashv \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ şi $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Propoziţia 13.13

Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y,

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\neg\varphi & (1)\\
\neg\forall x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\neg\varphi & (2)\\
\forall x(\varphi \land \psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\varphi \land \forall x\psi & (3)\\
\forall x\varphi \lor \forall x\psi &\vDash \forall x(\varphi \lor \psi) & (4)\\
\exists x(\varphi \land \psi) &\vDash \exists x\varphi \land \exists x\psi & (5)\\
\exists x(\varphi \lor \psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi \lor \exists x\psi & (6)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \forall x\varphi \to \forall x\psi & (7)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi & (8)\\
\forall x\varphi &\vDash \exists x\varphi & (9)
\end{aligned}$$

$$\varphi \vDash \exists x\varphi \tag{10}$$
$$\forall x\varphi \vDash \varphi \tag{11}$$
$$\forall x\forall y\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\forall x\varphi \tag{12}$$
$$\exists x\exists y\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y\exists x\varphi \tag{13}$$
$$\exists y\forall x\varphi \vDash \forall x\exists y\varphi. \tag{14}$$

Dem.: Exerciţiu.

Propoziţia 13.14

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \rightarrow t = s$;

(iii) $\vDash s = t \land t = u \rightarrow s = u$.

Dem.: Exerciţiu uşor.

Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.