10.01.2022

Tutoriat 10

Ideale. Izomorfisme

Reamintire: $(R,+,\cdot)$ inel $(R \neq \emptyset)$ dacă:

1) $(R,+)$ grup abelian
2) $(R,\cdot)$ monoid
3) $\begin{cases} a(b+c) = ab+ac, & \forall a,b,c \in R \\ (b+c)a = ba+ca \end{cases}$

Obs: $(R,\cdot)$ monoid comutativ, atunci R inel comutativ

Subinel: $(S,+,\cdot)$ subinel $(S \subseteq R)$ dacă

1) $1 \in S$
2) $x-y \in S$ $\quad \forall x,y \in S$
3) $xy \in S$

$x+y=0 \Rightarrow y=-x$

IDEALE Fie $(R,+,\cdot)$ inel comutativ, $I \subseteq R$.

Spunem că I este ideal (notație: $I \trianglelefteq R$) dacă:

1) $I \leq (R,+)$ $\;(\Leftrightarrow x-y \in I, \forall x,y \in I)$
2) $\forall r \in R, \forall x \in I$, atunci $rx \in I$ (sau $xr \in I$)

$I = r \cdot R$
$\quad \{rx \mid x \in R\}$

Precizare: La inele necomutative, avem ideale la stânga / dreapta (definițiile sunt similare)

Ex:
1) $R, \{0\}$ ideale
2) $R = (\mathbb{Z},+,\cdot)$, $I \trianglelefteq R$. $I = m\mathbb{Z}$ ideal $(m \neq 0, \pm 1)$

$\{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$

$x \in \mathbb{Z}$, $mk \in I$

Atunci $m\underbrace{k \cdot x}_{\mathbb{Z}} \in I$

Propoziție 1) Fie R inel, $I \trianglelefteq R$.
Atunci $I = R \Leftrightarrow I$ conține un element inversabil

2) R inel. Atunci R este corp $\Leftrightarrow$ singurele ideale sunt $R, \{0\}$

<u>Def</u> 1) R inel, $I \leq R$. Spunem că I este <u>ideal principal</u> dacă

$$I = Ra \quad , \quad a \in R$$
$$I = aR \quad ; \quad I = RaR$$

2) R inel principal dacă orice ideal al său e principal

<u>Ex</u>: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ inel principal

$$I = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$
$$\langle m \rangle$$

<u>Notație</u>: R inel, $E \subseteq R$.

$$\langle E \rangle = \{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i b_i \mid a_i, b_i \in R, x_i \in E\}$$

s.n. idealul generat de E

<u>Elemente idempotente. Elemente nilpotente</u>

Fixăm R = inel

<u>Def</u> 1) $x \in R$ este <u>idempotent dacă $x^2 = x$</u>, iar mulțimea acestora se notează cu $Idem(R) := \{x \mid x^2 = x\}$

2) $x \in R$ este <u>nilpotent dacă $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x^n = 0$</u>, iar mulțimea acestora se notează cu $N(R) := \{x \in R \mid x \text{ nilpotent}\}$

<u>Ex</u>: $\mathbb{Z}_8$ inel

$\hat{2} \overset{?}{\in} N(\mathbb{Z}_8)$: $2^3 = 8$

$N(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$

$4^2 = 16 = 0 \pmod 8$

$6 = 2 \cdot 3$

$6^2 = 2^2 \cdot 3^2$

$6^3 = \underbrace{2^3}_{8} \cdot 3^3 \equiv 0 \pmod 8$

$Idem(\mathbb{Z}_8) = \{\hat{0}, \hat{1}\}$

<u>Obs</u>: $\forall R$ inel, $0 \in N(R)$, $0, 1 \in Idem(R)$

(Izo) Morfisme

Def 1) Fie R, S inele, $f: R \to S$. Spunem că f e morfism dacă:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (morfism de grupuri)
- $f(xy) = f(x) f(y)$ (morfism de monoizi)
- $f(1_R) = 1_S$

2) f morfism, f bijectivă $\Rightarrow$ f izomorfism

3) $f: R \to R$ izomorfism, f s.n. automorfism

Caracteristica unui inel

R = inel

$o(x)$ = ordinul lui x ($n = ?$ a.î. $nx = 0$)

Ne interesează $o(1)$

$$\text{car}(R) = \begin{cases} o(1), & \text{dacă } o(1) \text{ este finit} \quad (\text{ex: } \mathbb{Z}_n,\ \text{car}(\mathbb{Z}_n) = n) \\ 0, & \text{dacă } o(1) \text{ este infinit} \quad (\text{ex: } \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Exerciții

1) ~~**Exercițiul 4:**~~ Fie R multimea tuturor matricilor de forma

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

(a) Arataţi că R este un subinel in inelul matricilor $M_2(\mathbb{C})$ si calculaţi elementele nilpotente si elementele idempotente din inelul R. (1 punct)

(b) Arataţi că $I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$ este un ideal bilateral in R si exista un izomorfism de inele $R/I \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. (1 punct)

(c) Descrieţi grupul elementelor inversabile din inelul R. (0,5 puncte)

1) • R subinel în $M_2(\mathbb{C})$

1) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$

2) $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & y_3 \end{pmatrix} \in R$

$X - Y = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & x_2 - y_2 \\ 0 & x_3 - y_3 \end{pmatrix} \in R$

3) $XY \in R$ (PENTRU VOI)

$\Rightarrow R$ subinel în $M_2(\mathbb{C})$

. $Idem(\mathcal{R}) = ?$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in Idem(\mathcal{R}) \iff X^2 = X \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} a^2 = a \\ ab+bc = b \\ c^2 = c \end{cases} \iff \begin{cases} a(a-1) = 0 \implies a = 0 \text{ sau } a = 1 \\ b(a+c-1) = 0 \quad (2) \\ c(c-1) = 0 \implies c = 0 \text{ sau } c = 1 \end{cases}$

I $a = c = 0 \implies X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

În (2) $\implies b = 0$

Deci $X = O_2 \in Idem(\mathcal{R})$

II $a = c = 1 \implies X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

În (2) $\implies b = 0$

Deci $X = I_2 \in Idem(\mathcal{R})$

III $a = 1,\ c = 0 \implies X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

În (2) $\implies b \cdot 0 = 0 \implies b \in \mathbb{C}$

Deci $X = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Idem(\mathcal{R})$

$\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

IV Similar ca III, $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in Idem(\mathcal{R})$

. $N(\mathcal{R}) = ?$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in N(\mathcal{R}) \iff \exists\, n$ a.î. $X^n = O_2$

$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$

$X^3 = \begin{pmatrix} a^2 & ab+bc \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & a^2b + c(ab+bc) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$

X^n va avea forma $X^n = \begin{pmatrix} a^n & \text{ceva} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$ ceva $\in \mathbb{C}$, ceva depinde de a și c

Punând $a = c = 0$, $b \in \mathbb{C}$, $X^n = O_2$ (verificați)

Deci $N(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\}$

b) $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$ ideal bilateral

- Evident, $\forall x, y \in I$, $x - y \in I$
- $\forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R$, $\forall x \in \mathbb{C}$, $\forall \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & p \end{pmatrix} \in R$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Gata}}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & axp \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

c) $U(R)$ $\quad R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in U(R) \iff \det X \neq 0 \iff \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \neq 0 \iff ac \neq 0 \iff$

$\iff a, c \neq 0$

(căci $\mathbb{C}$ este corp şi nu are divizori ai lui zero)

Deci $U(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C} \right\}$

Polinoame (pregătire pt. un test)

1. (1 pt) Calculaţi tablele adunării şi ale înmulţirii pentru următoarele inele factor:

   (a) $\frac{\mathbf{Z}[X]}{(2, X^2+3X+1)\mathbf{Z}[X]}$

   (b) $\frac{\mathbf{Z}_2[X]}{(X^2)\mathbf{Z}[X]}$

$(2, X^2+3X+1) = 2f + (X^2+3X+1)g$, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$

2. (1 pt) Arătaţi:

   (a) $\frac{\mathbf{Z}[X]}{(X^2-3X+2)\mathbf{Z}[X]} \simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

   (b) $\frac{\mathbf{Q}[X]}{(X^2-8X+15)\mathbf{Q}[X]} \simeq \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$

   (c) $\frac{\mathbf{R}[X]}{(X^2+X+1)\mathbf{R}[X]} \simeq \mathbf{C}$

   (d) $\frac{\mathbf{Z}[X]}{(X^2-4)\mathbf{Z}[X]} \not\simeq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$

$\frac{\mathbb{Z}[X]}{(X^2-4)} = \{ \hat{a}X + \hat{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

$\widehat{3X^2+7X-15} = \widehat{3(\underbrace{X^2-4}_{0})+7X-1} = \widehat{7X-1}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr] & R[X] \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad X \xrightarrow{\varphi} s$$

3. (2 pt) Fie α_1, α_2, α_3 şi $\alpha_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$. Calculaţi $\alpha_1^6 + \alpha_2^6 + \alpha_3^6 + \alpha_4^6$.

2) c) $X^2 + X + 1 = 0$ $\quad \Delta = -3 \Rightarrow X_{1,2}$

rădăcini: $\underbrace{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}_{\varepsilon}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i(a)=a"] \arrow[dr, "i(a)=a"'] & R[X] \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$\varphi(a) = a$, $a \in \mathbb{R}$

$\varphi = i \circ i$ $\quad \varphi(X) = \varepsilon$

Prop. de Univ. a Inelului de Polinoame $\Longrightarrow$ φ morfism

13)

Vrem φ bijectivă $\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi \text{ surjectivă} \\ \operatorname{Ker} \varphi = (X^2+X+1) \end{cases}$

CIORNĂ

$\underline{a+bX} \xrightarrow{\varphi} \varphi(a+bX) = \varphi(a) + \varphi(b)\cdot\varphi(X) = a + b\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = a - \frac{b}{2} + \frac{ib\sqrt{3}}{2};$

$a+\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}}X \xrightarrow{\varphi}$

$a+\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$a+\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{b(-1+i\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$

$a+\cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} + \frac{bi\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} = a+bi$

· $\underline{\varphi \text{ surjectivă}}$ (1)

$\forall \underset{\mathbb{C}}{z} = a+bi,\ a,b\in\mathbb{R},$

$z = \varphi(y)$

$\boxed{\varphi\left(a+\frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}}X\right) = a+bi}$

· $\underline{\operatorname{Ker}\varphi = (X^2+X+1)}$

$\{(X^2+X+1)g \mid g\in\mathbb{R}[X]\}$

„$\supseteq$" fie $f\in(X^2+X+1) \Leftrightarrow f = (X^2+X+1)\cdot g \overset{\varphi}{\Rightarrow} \varphi(f) = \underbrace{\varphi(X^2+X+1)}_{0}\cdot\varphi(g) = 0$

$\Downarrow$

$f\in\operatorname{Ker}\varphi$

„$\subseteq$" $f\in\operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = 0$

Împart f la X^2+X+1 cu T.Î.R.

$f = (X^2+X+1)g + aX+b,\quad g\in\mathbb{R}[X],\ a,b\in\mathbb{R}$

$\varphi(f)=0$

(Notă explicativă: Restul împărțirii va fi un polinom de grad mai mic decât 2, deci va avea forma ax+b, cu a și b numere reale)

$\underset{0}{\varphi(f)} = \underbrace{\underset{0}{\varphi(X^2+X+1)}\cdot\varphi(g)}_{0} + \varphi(aX+b)$

$\Rightarrow a\varepsilon + b = 0 \Rightarrow a\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} + b = 0 \mid \cdot 2$

$-a + ai\sqrt{3} + 2b = 0 + 0i \Rightarrow \begin{cases} ai\sqrt{3} = 0i \overset{a\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} a = 0 \\ 2b - a = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

Deci $\underline{f = (X^2+X+1)\cdot g}$, $g\in\mathbb{R}[X]$

$f\in(X^2+X+1)$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = (X^2+X+1)$ (2)

Din (1), (2), (3) $\overset{TFI}{\Longrightarrow} \bar{\varphi}: \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)} \simeq \mathbb{C},\ \bar{\varphi}(\hat{f}) = \varphi(f)$

3. (2 pt) Fie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ şi $\alpha_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ $X + 1$. Calculaţi $\alpha_1^6 + \alpha_2^6 + \alpha_3^6 + \alpha_4^6 = P_6$

Sol: Relaţiile Viette / Viète

$$P_i = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j^i$$

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -1 \qquad P_1 = S_1$$

$$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4$$

$$P_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = S_1^2 - 2S_2$$

α_i răd pt f $\Rightarrow$ (*) $\alpha_i^4 + \alpha_i^3 + 2\alpha_i^2 + \alpha_i + 1 = 0$, $i = \overline{1,4}$ Voi aduna toate relaţiile

$$P_4 + P_3 + 2P_2 + P_1 + 4 = 0$$

$$P_4 = \text{------}$$

Obs: $\alpha_i \neq 0$, $\forall i = \overline{1,4}$

Înmulţim (*) cu α_i şi vom avea

$\alpha_i^5 + \alpha_i^4 + 2\alpha_i^3 + \alpha_i^2 + \alpha_i = 0$, $i = \overline{1,4}$ + Voi aduna toate relaţiile

$$P_5 + P_4 + 2P_3 + P_2 + P_1 = 0$$

$$P_5 = \text{-- -- -}$$

Înmulţim (*) cu α_i şi vom avea

$\alpha_i^6 + \alpha_i^5 + 2\alpha_i^4 + \alpha_i^3 + \alpha_i^2 = 0$, $i = \overline{1,4}$ $\oplus$ Voi aduna toate relaţiile

$$P_6 + P_5 + 2P_4 + P_3 + P_2 = 0$$

$$P_6 = \text{-- -- -}$$

$$P_{-1} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} = \frac{\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$$

$$\overset{\text{Viète}}{=} \frac{S_3}{S_4} = \frac{-1}{1} = -1$$

Cum aflăm P_3? Împărţim (*) la α_i

$\alpha_i^3 + \alpha_i^2 + 2\alpha_i + 1 + \frac{1}{\alpha_i} = 0$, $i = \overline{1,4}$ $\oplus$ Voi aduna toate relaţiile

$$P_3 + P_2 + 2P_1 + 4 + P_{-1} = 0$$

$$P_3 = \text{------}$$