Seminar 3

Observație. Fie $\sum_n x_n$ și $\sum_n y_n$ două serii de numere reale.

1) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este convergentă, atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este convergentă.

2) Dacă $\sum_n x_n$ este convergentă și $\sum_n y_n$ este divergentă (sau $\sum_n x_n$ este divergentă și $\sum_n y_n$ este convergentă), atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ este divergentă.

3) Dacă $\sum_n x_n$ este divergentă și $\sum_n y_n$ este divergentă, atunci $\sum_n (x_n + y_n)$ poate fi convergentă sau divergentă.

1. Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + n}{3^n + n^3}$, $a > 0$.

Soluție. $x_n = \frac{a^n + n}{3^n + n^3} = \frac{a^n}{3^n + n^3} + \frac{n}{3^n + n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{n}{3^n+n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$).

Conform Criteriului de comparație cu inegalități rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n+n^3}$ este convergentă.

Prin urmare $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^n+n^3}$.

Fie $a_n = \frac{a^n}{3^n+n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $b_n = \frac{a^n}{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{a^n}}{3^n+n^3} \cdot \frac{3^n}{\cancel{a^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n+n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}\left(1+\frac{n^3}{3^n}\right)} = 1,$$ deoarece $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$.

Pentru a demonstra că $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ putem folosi Criteriul raportului pentru șiruri.

Într-adevăr, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{\cancel{3^{n+1}}_{3}} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{n^3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{3} < 1.$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in (0,\infty)$ rezultă, conform criteriului de comparație cu limită, că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{3^n+n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n \begin{cases} \text{convergentă, dacă } \frac{a}{3} \in (-1,1) \\ \quad (\text{i.e. } a \in (-3,3)) \\ \text{divergentă, dacă } \frac{a}{3} \in \mathbb{R} \setminus (-1,1) \\ \quad (\text{i.e. } a \in \mathbb{R} \setminus (-3,3)). \end{cases}$$

(serie geometrică cu $q = \frac{a}{3}$)

Dar $a > 0$. Deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n \begin{cases} \text{convergentă, dacă } a \in (0,3) \\ \text{divergentă, dacă } a \in [3,\infty). \end{cases} \qquad \square$$

2. a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

b) Studiați natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)x^n,\ x>0.$

<u>Soluție</u>. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{2x}=\frac{1}{2}$,

b) Fie $a_n=\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)x^n\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ și $b_n=\frac{x^n}{n^2}\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cancel{x^n}}{\frac{1}{n^2}\cdot\cancel{x^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\underset{a)}{\overset{\uparrow}{=}}\frac{1}{2}\in(0,\infty).$$

Conform Criteriului de comparație cu limită rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{x}{\cancel{x^{n+1}}}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\cancel{x^n}}=\lim_{n\to\infty}x\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}=x.$$

Conform Criteriului raportului avem:

1) Dacă $x<1$ (i.e. $x\in(0,1)$), atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este convergentă.

2) Dacă $x>1$ (i.e. $x\in(1,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă.

3) Dacă $x=1$, atunci criteriul raportului nu decide.

Dacă $x=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha=2$). $\square$

3. Studiați convergența seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$.

Soluție. $x_n=\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n(n+1)}\in(0,1]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\frac{1}{n(n+1)}>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\cos\frac{1}{n}>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$\cos\frac{1}{n+1}>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$ are termenii strict pozitivi.

Vom folosi limita remarcabilă: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Fie $y_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)}} \cdot \frac{1}{\underset{\downarrow\atop 1}{\cos\frac{1}{n}}\,\underset{\downarrow\atop 1}{\cos\frac{1}{n+1}}} =$$

$= 1 \in (0,\infty)$.

Conform criteriului de comparație cu limită, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ convergentă (vezi curs 2). □

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^{\lambda}}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

<u>Soluție</u>. Vom folosi criteriul Abel-Dirichlet (I).

Fie $x_n = \dfrac{1}{n^{\lambda}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \cos nx$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Șirul $(x_n)_n$ este descrescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (1)

? $\exists M > 0$ a.î. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $|y_1 + \ldots + y_n| \le M$.

$|y_1 + \ldots + y_n| = |\cos x + \ldots + \cos nx|$.

Notăm $z = \cos x + i \sin x$.

Avem: $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$

- - - - - - - - - - - - - - - - . . . - - -

$z^n = \cos nx + i\sin nx.$

$z + z^2 + \ldots + z^n = ?$

Presupunem că $z \neq 1$, i.e. $\cos x + i\sin x \neq 1$, i.e.
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$z + z^2 + \ldots + z^n = z \cdot \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)x + i\sin(n+1)x - \cos x - i\sin x}{\cos x + i\sin x - 1} =$$

$$= \frac{\cos(n+1)x - \cos x + i\left(\sin(n+1)x - \sin x\right)}{(\cos x - 1) + i\sin x} =$$

$$= \frac{-\cancel{2}\sin\frac{n+2}{2}x\,\sin\frac{n}{2}x + i\cdot\cancel{2}\cdot\cos\frac{n+2}{2}x\,\sin\frac{n}{2}x}{-\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2} + i\cdot\cancel{2}\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\overset{-i}{\smile}\!-\sin\frac{n+2}{2}x + i\cos\frac{n+2}{2}x}{-\sin\frac{x}{2} + i\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{n+2}{2}x + i\sin\frac{n+2}{2}x}{\cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right)^{\cancel{n+2}\; n+1}}{\cancel{\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{n+1}{2}x + i \sin \frac{n+1}{2}x\right).$$

$$|y_1 + \ldots + y_n| = |\operatorname{Re}(z + z^2 + \ldots + z^n)| =$$

$$= \frac{\left|\sin \frac{n}{2}x\right|}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \cdot \left|\cos \frac{n+1}{2}x\right| \le \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Luăm $M = \dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$ și avem $|y_1 + \ldots + y_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (2)

Din (1) și (2) rezultă, conform Criteriului Abel-Dirichlet (I), că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^\lambda}$ este convergentă.

Nu uităm că am tratat doar cazul
$x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Fie $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Seria din enunț devine: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ $\begin{cases} \text{convergentă, dacă } \lambda \in (1, \infty) \\ \text{divergentă, dacă } \lambda \in (0, 1]. \end{cases}$ $\square$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n = \cos\frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{\cos n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$-1 \leq x_n \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_n$ mărginit.

$x \longrightarrow \cos x$ descrescătoare
$\cap$
$(0, \frac{\pi}{2})$

$\frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\left(\frac{1}{n}\right)_n$ descrescător

$\Longrightarrow \left(\cos\frac{1}{n}\right)_n$ crescător.

Deci $(x_n)_n$ este monoton și mărginit (1)

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ convergentă (vezi b): $x = 1$, $\lambda = 1$). (2)

Din (1) și (2) rezultă, conform Criteriului Abel-Dirichlet (II), că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\cos n \cos\frac{1}{n}}{n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1}{n}$.

<u>Soluție</u>. Fie $x_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}+1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $b_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$x_n = a_n + b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{\sqrt{n}}}{\underset{\sqrt{n}}{\cancel{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ convergentă (Criteriul lui Leibniz).

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergentă. $\square$