Curs 6

Observație. Pe $\overline{\mathbb{R}} \overset{def.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se introduce distanța $\overline{d} : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $\overline{d}(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$, unde $\overline{\varphi}$ este aplicația bijectivă $\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1] \subset \mathbb{R}$,

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & ; \text{ dacă } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & ; \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & ; \text{ dacă } x = +\infty. \end{cases}$$

Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{d})$ este spațiu metric și perechea $(\overline{\mathbb{R}}, \tau_{\overline{d}})$ este spațiu topologic.

Definiție. Fie (X, τ) un spațiu topologic. Spunem că (X,τ) este spațiu topologic Hausdorff (sau separat) dacă $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, V \in \mathcal{V}_x$, $\exists\, W \in \mathcal{V}_y$ a.î. $V \cap W = \emptyset$.

Propoziție. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci (X, τ_d) este spațiu topologic Hausdorff.

Limite de funcții

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A'$, $f : A \to Y$ și $l \in Y$. Spunem că f are limita l în x_0 dacă $\forall W \in \mathcal{V}_l$, $\exists V \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $\forall x \in V \cap A$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \in W$.

Observație. În contextul definiției de mai sus, dacă (Y, τ_2) este spațiu topologic Hausdorff, atunci $l \in Y$ cu proprietatea din definiție este unic determinat și vom scrie $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Propoziție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $A \subset X$, $a \in A'$, $f : A \to Y$ și $l \in Y$. Sunt echivalente:

a) $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

b) $\forall (x_n)_n \subset A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim_{n \to \infty} x_n \overset{d_1}{=} a$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} l$.

<u>Propoziție</u>. Fie $f: A\subset\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$, $x_0\in A'$ (x_0 poate fi și $\pm\infty$) și $l\in\overline{\mathbb{R}}$.

1) Presupunem că $x_0\in\mathbb{R}$ și $l\in\mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ dacă și numai dacă $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu proprietatea că $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$, avem $|f(x)-l|<\varepsilon$.

2) Presupunem că $x_0\in\mathbb{R}$ și $l=\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ dacă și numai dacă $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu proprietatea că $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$, avem $f(x)>\varepsilon$.

3) Presupunem că $x_0\in\mathbb{R}$ și $l=-\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ dacă și numai dacă $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\exists\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in A$ cu proprietatea că $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$, avem $f(x)<\varepsilon$.

4) Presupunem că $x_0=\infty$ și $l=\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ dacă și numai dacă $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\exists\,\delta_\varepsilon\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall x\in A$ cu proprietatea că $x>\delta_\varepsilon$, avem $f(x)>\varepsilon$.

5) Presupunem că $x_0=\infty$ și $l=-\infty$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) < \varepsilon$.

6) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $x < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

7) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $x < \delta_\varepsilon$, avem $f(x) < \varepsilon$.

8) Presupunem că $x_0 = +\infty$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $x > \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

9) Presupunem că $x_0 = -\infty$ și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in A$ cu proprietatea că $x < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

<u>Limite remarcabile.</u> 1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1$;

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1$;

5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$; 6) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$;

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; 8) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, unde $a\in(0;+\infty)$; 9) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r$, unde $r\in\mathbb{R}$.

<u>Propoziție</u>. Fie (X,τ) un spațiu topologic, $A\subset X$, $x_0\in A'$, $f:A\to\overline{\mathbb{R}}$, $g:A\to\overline{\mathbb{R}}$, $l_1\in\overline{\mathbb{R}}$ și $l_2\in\overline{\mathbb{R}}$ a.î. $\lim_{x\to x_0}f(x)=l_1$ și $\lim_{x\to x_0}g(x)=l_2$. Atunci:

1) $l_1,l_2\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=l_1+l_2$.

2) $l_1,l_2\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=l_1\cdot l_2$.

3) $f(x)\neq 0\ \forall x\in A$ și $l_1\neq 0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{l_1}$.

4) $l_1=+\infty$ și $l_2>-\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=+\infty$.

5) $l_1=-\infty$ și $l_2<+\infty\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=-\infty$.

6) $l_1=+\infty$ și $l_2>0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=+\infty$.

7) $l_1=+\infty$ și $l_2<0\Rightarrow\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=-\infty$.

8) $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=-\lim_{x\to x_0}f(x)=-l_1$.

9) $f(x)\neq 0\ \forall x\in A$ și $l_1\in\{\pm\infty\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)=0$.

Funcții continue

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $x_0 \in X$ și $f: X \to Y$. Spunem că f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice $W \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$, avem $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}_{x_0}$.

Definiție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice și $f: X \to Y$. Dacă f este continuă în fiecare punct din X, vom spune simplu, că f este continuă.

Propoziție. Fie (X, τ) un spațiu topologic, $\emptyset \neq A \subset X$ și $\tau_A = \{D \cap A \mid D \in \tau\}$. Atunci (A, τ_A) este spațiu topologic.

Propoziție. Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A$ și $f: A \to Y$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $W \in \mathcal{V}_{f(x_0)}$, există $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ astfel încât

$f(V \cap A) \subset W$.

<u>Observație.</u> Din definiție rezultă că dacă (X, τ) este spațiu topologic, atunci aplicația identică a lui X (i.e. $id_X : X \to X$, $id_X(x) = x \ \forall x \in X$) este continuă. De asemenea dacă (X, τ_1) și (Y, τ_2) sunt spații topologice, atunci pentru orice $y_0 \in Y$, funcția constantă de la X la Y, egală în orice $x \in X$ cu y_0 este continuă.

<u>Propoziție.</u> Fie (X, τ_1), (Y, τ_2) și (Z, τ_3) trei spații topologice și $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ două funcții continue în $x_0 \in X$ și, respectiv, în $y_0 = f(x_0) \in Y$. Atunci funcția $g \circ f : X \to Z$ este continuă în x_0.

<u>Propoziție.</u> Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A$ și $f : X \to Y$.

1) Dacă f este continuă în x_0 atunci restricția

$f|_A : A \to Y$ este continuă în x_0.

2) Dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ și $f|_A : A \to Y$ este continuă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Observații. 1) Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $x_0 \in X$ și $f : X \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $V_\varepsilon \in \mathcal{V}_{x_0}$ cu proprietatea că $\forall x \in V_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $x_0 \in X$ și $f : X \to Y$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in X$ astfel încât $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (i.e. $\forall x \in B(x_0, \delta_\varepsilon)$, avem $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$).

3) Fie $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$ astfel încât $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) -$

$- f(x_0)| < \varepsilon$.

4) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$, $x > \delta_\varepsilon$, avem $|f(x) - f(\infty)| < \varepsilon$.

5) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a.î. $+\infty \in A$ și $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că $\forall x \in A$, $x > \delta_\varepsilon$, avem $f(x) > \varepsilon$.

<u>Propoziție.</u> Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice și $f : X \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă.

2) $\forall G \in \tau_2$, avem $f^{-1}(G) \in \tau_1$.

3) $\forall F \subset Y$, F închisă (i.e. $CF \in \tau_2$), avem $f^{-1}(F)$ închisă (i.e. $Cf^{-1}(F) \in \tau_1$).

4) $\forall B \subset Y$, avem $f^{-1}(\overline{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$.

5) $\forall A \subset X$, avem $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

__Propoziție.__ Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, A compactă și $f : A \to Y$, f continuă. Atunci $f(A)$ compactă.

__Propoziție.__ Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice, $x \in X$ și $f : X \to Y$. Atunci f este continuă în x dacă și numai dacă pentru orice șir $(x_n)_n \subset X$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{d_1}{=} x$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \overset{d_2}{=} f(x)$.

__Propoziție.__ Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$, $x_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ și $g : A \to \mathbb{R}$.

Dacă f și g sunt continue în x_0, atunci funcțiile $f+g$, $f \cdot g$ și $|f|$ sunt continue în x_0.

Dacă f este continuă în x_0 și $f(x) \neq 0$ $\forall x \in A$

atunci funcția $\frac{1}{f}$ este continuă în x_0.

<u>Teoremă.</u> Fie (X, τ_1) și (Y, τ_2) două spații topologice, $A \subset X$, $x_0 \in A \cap A'$ și $f: A \to Y$. Sunt echivalente:

1) f continuă în x_0.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>Teoremă (Teorema privind mărginirea funcțiilor continue).</u> Fie (X, τ) un spațiu topologic, $K \subset X$ o mulțime compactă și $f: K \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci există $x^*, x_* \in K$ astfel încât $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in K\}$ și $f(x_*) = \min\{f(x) \mid x \in K\}$.