CURS 6

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LOGICĂ PROPOZIŢIONALĂ

SEMANTICA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Propoziţia 6.1

Pentru orice formulă φ şi orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \qquad (*)$$

Demonstraţie. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$, φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Demonstraţie. (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ şi ψ satisface P. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Aşadar, aplicând P pentru ψ, obţinem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface P.

Demonstraţie. (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ şi ψ, χ satisfac P. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ şi $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi) \cup Var(\chi)$. Aşadar, aplicând P pentru ψ şi χ, obţinem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ şi $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface P. □

Definiţia 6.2

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.
  Notaţie: $e \vDash \varphi$.
- φ este satisfiabilă dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem şi că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.
- φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ.
  Notaţie: $\vDash \varphi$.

Mulţimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziţia 6.3

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 6.4

Există o mulţime numărabilă de formule φ a.î. atât φ cât şi $\neg\varphi$ sunt satisfiabile.

Demonstraţie. Demonstrăm că mulţimea $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Form$ satisface condiţia din enunţ. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerăm interpretările $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci $e_1 \vDash \varphi_n$. Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci $e_2 \vDash \neg\varphi_n$. $\square$

Fie φ o formulă arbitrară şi $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziţiei 6.1.

Aşadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricţia lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcţii posibile $e'_1, e'_2 \ldots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$ subformule ale lui φ $\ldots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\ldots$	$e'_1(x_k)$	$\ldots$	${e'_1}^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\ldots$	$e'_2(x_k)$	$\ldots$	${e'_2}^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\ldots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\ldots$	${e'_{2^k}}^+(\varphi)$

Pentru orice i, ${e'_i}^+(\varphi)$ se defineşte similar cu Teorema 5.7.

φ este tautologie ddacă ${e'_i}^+(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Exemplu.

Fie $\varphi = v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$. Vrem să demonstrăm că $\vDash \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \to (v_1 \wedge v_2)$	$v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiţia 6.5

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este consecinţă semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$.
  Notaţie: $\psi \vDash \varphi$.
- φ şi ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notaţie: $\varphi \sim \psi$.

Observaţie.

Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea *Form* a formulelor.

Propoziţia 6.6

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ şi $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 6.7

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terţul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicţia	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negaţie	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziţia	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicaţiei	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$	(11)
exportarea şi importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$	(12)
idempotenţa	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\vDash \varphi \wedge \psi \to \varphi \qquad \vDash \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbţia	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)

$$\varphi \to \psi \land \chi \sim (\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \chi) \tag{22}$$

$$\varphi \to \psi \lor \chi \sim (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \chi) \tag{23}$$

$$\varphi \land \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi) \tag{24}$$

$$\varphi \lor \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \land (\psi \to \chi) \tag{25}$$

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \tag{26}$$

$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \land (\varphi \to \neg\psi) \tag{27}$$

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \lor \psi \sim \neg(\varphi \land \neg\psi) \tag{28}$$

$$\varphi \lor \psi \sim \varphi \lor (\neg\varphi \land \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \tag{29}$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \tag{30}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \lor (\neg\varphi \to \psi) \tag{31}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \lor (\varphi \to \neg\psi) \tag{32}$$

$$\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \tag{33}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \tag{34}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Demonstrăm (1) $\vDash \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raţionând direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ şi, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$. $\square$

Definiţia 6.8

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$$\varphi_\chi(\chi') \quad := \quad \text{expresia obţinută din } \varphi \text{ prin înlocuirea tuturor apariţiilor lui } \chi \text{ cu } \chi'.$$

$\varphi_\chi(\chi')$ se numeşte substituţia lui χ cu χ' în φ. Spunem şi că $\varphi_\chi(\chi')$ este o instanţă de substituţie a lui φ.

Observaţie.

- $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
- Dacă χ nu este subformulă a lui φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$.

Exemplu.

Fie $\varphi = (v_1 \to v_2) \to \neg(v_1 \to v_2)$.

- pentru $\chi = v_1 \to v_2$ şi $\chi' = v_4$, obţinem

$$\varphi_\chi(\chi') = v_4 \to \neg v_4$$

- pentru $\chi = v_1$ şi $\chi' = \neg\neg v_2$, obţinem

$$\varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \to v_2) \to \neg(\neg\neg v_2 \to v_2)$$

- pentru $\chi = v_1 \to v_2$ şi $\chi' = v_4 \vee v_1$, obţinem

$$\varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \to \neg(v_4 \vee v_1)$$

Propoziţia 6.9

Pentru orice formule φ, χ, χ', $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie după formula φ. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci
$$v_\chi(\chi') = \begin{cases} \chi' & \text{dacă } \chi = v \\ v & \text{dacă } \chi \neq v. \end{cases}$$
Prin urmare, $v_\chi(\chi')$ este formulă.
- $\varphi = \neg\psi$ şi $\psi_\chi(\chi')$ este formulă. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$, deci este formulă. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  (i) $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$ este formulă.
  (ii) χ este subformulă a lui ψ. Atunci $\varphi_\chi(\chi') = \neg\psi_\chi(\chi')$ este formulă.

Demonstraţie. (continuare.)

- $\varphi = \psi \to \theta$ şi $\psi_\chi(\chi')$, $\theta_\chi(\chi')$ sunt formule. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  (i) $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
  (ii) χ este subformulă a lui ψ sau θ (e posibil sa apară atât în ψ cât şi în θ). Atunci
  $$\varphi_\chi(\chi') = \psi_\chi(\chi') \to \theta_\chi(\chi')$$
  este de asemenea formulă.

$\square$

Propoziţia 6.10

Pentru orice formule φ, χ, χ',

$$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 6.10 poate fi folosită pentru a arăta că o formulă este tautologie.

Exemplu.
Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ, formula $\theta = (\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie.

Demonstraţie. Conform (28), $\neg\varphi \vee \psi \sim \varphi \to \psi$. Aplicăm Propoziţia 6.10 cu $\chi = \neg\varphi \vee \psi$ şi $\chi' = \varphi \to \psi$ pentru a obţine că $\theta \sim (\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$. Pe de altă parte, $(\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie, din (1). Prin urmare, θ este tautologie. $\square$

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare şi $v \in V$ o variabilă.

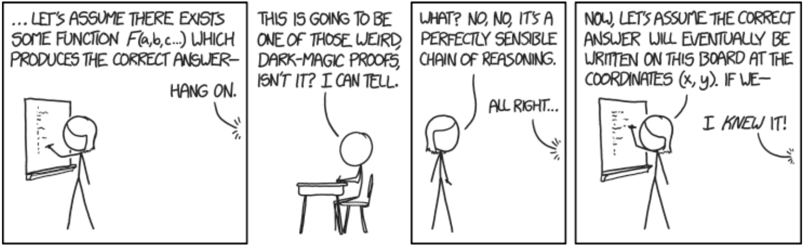
Notaţie.
Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \to \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziţia 6.11
Fie θ o formulă şi $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Demonstraţie. Exerciţiu suplimentar.



Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.