

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulțime și $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.

Demonstrație: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$.
Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. \square

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relație binară pe A . Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R ? Care dintre relațiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relația subiacentă unei funcții de la A la A ?

Demonstrație: Obținem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relațiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu poate descrie o funcție de la A la A , deoarece

- (i) $(a, b) \in R$ și $(a, c) \in R$;
- (ii) $(a, a) \in R^{-1}$ și $(a, b) \in R^{-1}$;
- (iii) nu există y astfel încât $(d, y) \in R \circ R$.

De asemenea, se observă că o relație “validă” ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relațiile de mai sus. \square

(S1.3) Fie X o mulțime. Să se arate că nu există o funcție surjectivă cu domeniul X și codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstrație: Presupunem că ar exista, și fie $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulțimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicție. \square

(S1.4)

- (i) Demonstrați că orice intervale deschise (a, b) , (c, d) ale lui \mathbb{R} sunt echipotente.
- (ii) Demonstrați că $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Demonstrație:

- (i) Fie funcția

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ și $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d-c$. Adăugând c , rezultă că funcția noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în (c, d) . Definim funcția

$$g : (c, d) \rightarrow (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \quad \text{pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă ușor că f și g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, (a, b) și (c, d) sunt echipotente.

- (ii) Știm că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluție directă este: se ia funcția $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Se ia apoi funcția $h : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in (0, 1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1]$ și $(0, 1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcția $j : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in [0, 1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și $[0, 1]$ sunt echipotente.

În sfârșit, se observă ușor că funcția $F : (0, 1] \rightarrow [0, 1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0, 1]$ și $[0, 1)$ sunt echipotente.

□

Seminar 2

(S2.1) Dați exemplu de familie de submulțimi ale lui \mathbb{R} , indexată, pe rând, după:

- (i) \mathbb{N}^* ;
- (ii) \mathbb{Z} ;
- (iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinați reuniunea și intersecția fiecărei familii date ca exemplu.

Demonstrație:

- (i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.
- (b) $B_1 = \{0\}$, $B_2 = \mathbb{N}^*$, $B_3 = \mathbb{Q}$ și $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.
- (c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.
- (d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.
- (e) $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.
- (ii) $C_1 = (-\infty, 0)$, $C_2 = \{0\}$, $C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.
- (iii) $D_2 = \{0\}$, $D_3 = \{2\}$, $D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x \in \{2, 3, 4\}} D_x = \{0, 2, 3\}$, $\bigcap_{x \in \{2, 3, 4\}} D_x = \emptyset$.

□

(S2.2) Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de submulțimi ale unei mulțimi X , arătați următoarele (legile lui De Morgan):

- (i) $C_X \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} C_X A_i$;
- (ii) $C_X \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} C_X A_i$.

Demonstrație:

- (i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) \iff pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i \in I} C_X A_i$.
- (ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i \in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) \iff există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} C_X A_i$.

□

(S2.3) Arătați, pe rând, următoarele:

- (i) \mathbb{N}^* este numărabilă.
(ii) \mathbb{Z} este numărabilă.
(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstrație:

- (i) Definim

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$

Se demonstrează imediat că f este bijecție, inversa sa fiind

$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

- (ii) Enumerăm elementele lui \mathbb{Z} astfel:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$$

Funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$

E clar că f e bijectivă și că $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s - 1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$

este inversa lui f .

- (iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor și în cadrul elementelor cu aceeași sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

linia 0	$(0, 0),$
linia 1	$(0, 1), (1, 0),$
linia 2	$(0, 2), (1, 1), (2, 0),$
linia 3	$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0),$
\vdots	
linia k	$(0, k), (1, k-1), \dots, (k-1, 1), (k, 0),$
\vdots	

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \dots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ astfel: $f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 2, \dots$. În general, $f(i, j)$ se definește ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i, j) . Deoarece (i, j) este al $(i+1)$ -lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1 + 2 + 3 + \dots + (i+j) + i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Așadar, bijecția va fi funcția

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcție se numește și *funcția numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

□

(S2.4) Arătați, pe rând, următoarele:

- (i) Produsul cartezian a două mulțimi numărabile este numărabil.
- (ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulțimi numărabile este numărabil.

Demonstrație:

- (i) Fie A_1 și A_2 două mulțimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, \dots\}, \quad A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots\}.$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A_1 \times A_2, \quad f(m, n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$

Se demonstrează ușor că f este bijecție.

- (ii) Demonstrăm prin inducție după n că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și pentru orice mulțimi numărabile A_1, \dots, A_n , $A_1 \times A_2 \dots A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n + 1$. Fie A_1, \dots, A_{n+1} mulțimi numărabile și $B = \prod_{i=1}^n A_i$. Atunci B este numărabilă, conform ipotezei de inducție, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcția

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \rightarrow B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \dots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecție. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

□

Definiția 1. O familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ se numește **disjunctă** dacă pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.

(S2.5) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Pentru orice $i \in I$ notăm $A'_i := \{i\} \times A_i$. Să se arate că $A'_i \sim A_i$ pentru orice $i \in I$ și că $(A'_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulțimi.

Demonstrație: Este evident că, pentru orice $i \in I$, funcția

$$f_i : A_i \rightarrow A'_i, \quad f_i(a) = (i, a)$$

este bijecție.

Presupunem prin reducere la absurd că $(A'_i)_{i \in I}$ nu este o familie disjunctă de mulțimi. Atunci există $j, k \in I$ cu $j \neq k$ a.î. $A'_j \cap A'_k \neq \emptyset$, deci există $x \in A'_j \cap A'_k$. Deoarece $x \in A'_j$, există $a \in A_j$ cu $x = (j, a)$. Similar, deoarece $x \in A'_k$, există $b \in A_k$ cu $x = (k, b)$. Rezultă că $(j, a) = (k, b)$, deci $k = j$, ceea ce contrazice presupunerea. □

Seminar 3

(S3.1) Dați exemple, pe rând, de relații care:

- (i) sunt reflexive și tranzitive, dar nu sunt simetrice;
- (ii) sunt reflexive și simetrice, dar nu sunt tranzitive;
- (iii) sunt simetrice și tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Demonstrație: Notăm, pentru orice mulțime C , $\Delta_C := \{(x, y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relația diagonală**).

- (i) \leq pe \mathbb{Z} ; \leq pe \mathbb{R} ; relația de divizibilitate pe \mathbb{Z} .
- (ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7, 8), (8, 7), (8, 9), (9, 8)\}$ pe \mathbb{Z} . Nu este tranzitivă, deoarece $(7, 8) \in R$ și $(8, 9) \in R$, dar $(7, 9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x - y| \leq 1\}$ (R' nu este tranzitivă, pentru că $(1, 2)$ și $(2, 3)$ sunt în R' , dar $(1, 3)$ nu este).

În general, o intuiție potrivită pentru acest gen de relații este relația de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu “minimal” – luăm mulțimea $A := \{1, 2, 3\}$ și relația R pe ea egală cu $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

- (iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7, 7)\}$ pe \mathbb{Z} . Alt exemplu (tot pe \mathbb{Z}) este $R' = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ și } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulțime nevidă relația vidă satisface condiția (de ce, totuși, relația vidă pe mulțimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu “minimal”, dar nevid, este următorul: $A := \{1, 2\}$, $R := \{(2, 2)\}$.

□

(S3.2) Fie $R \subseteq A \times A$ o relație descrisă în fiecare situație de mai jos. Verificați, pe rând, dacă R este relație de ordine parțială, strictă sau totală sau relație de echivalență.

- (i) $A = \mathbb{N}$ și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă $a \mid b$.
- (ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ și $(a, b)R(c, d)$ dacă și numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.
- (iii) $A = \mathbb{N}$ și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.
- (iv) A este mulțimea tuturor cuvintelor în limba engleză și $(a, b) \in R$ dacă și numai dacă a nu este mai lung ca b .

Demonstrație:

(i) R este

- (a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ și $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ și $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.
- (b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.
- (c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ și $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ și $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

R nu este

- (a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.
- (b) totală: $2 \nmid 3$ și $3 \nmid 2$. Așadar, $(2, 3) \notin R$ și $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, R este relație de ordine parțială, dar R nu este relație de ordine strictă sau totală și nici relație de echivalență.

(ii) R este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Așadar, R nu este relație de ordine strictă. Observăm că R nu este

- (a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.
- (b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) și $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.
- (c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ și $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că R este reflexivă, deci R nu este o relație de ordine strictă. Se observă că R nu este tranzitivă: $(5, 6) \in R$ și $(6, 7) \in R$, dar $(5, 7) \notin R$. Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

(iv) R este reflexivă, deci R nu este o relație de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) antisimetrică: dacă (a, b) și (b, a) sunt în R , atunci a și b au aceeași lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a = \text{“do”}$ și $b = \text{“go”}$.

(b) simetrică: $(\text{“it”}, \text{“and”}) \in R$, dar $(\text{“and”}, \text{“it”}) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relație de ordine totală sau parțială și nici relație de echivalență.

□

Definiția 1. Fie A o mulțime și $n \in \mathbb{N}$. Spunem că A are n elemente dacă este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq n\}$ (mulțime notată și $\{1, \dots, n\}$).

Definiția 2. O mulțime A se numește **finită** dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente.

Definiția 3. O mulțime se numește **infinită** dacă nu e finită.

(S3.3) Fie $n \in \mathbb{N}$ și A o mulțime infinită. Să se arate că există $B \subseteq A$ astfel încât B are n elemente.

Demonstrație: Demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $n = 0$, iau $B := \emptyset$. Ea are 0 elemente, pentru că este echipotentă cu $\{j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq j \leq 0\}$, care este tot \emptyset (echipotența se realizează via “funcția vidă”, $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$).

Presupunem acum că am arătat existența unei mulțimi C cu n elemente și dorim să construim o mulțime B cu $n + 1$ elemente. Fie $g : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow C$ o bijecție. Dacă am avea $C = A$, atunci existența lui g ar indica faptul că A este finită, contrazicând ipoteza noastră. Rămâne că există $x \in A \setminus C$. Luăm $B := C \cup \{x\}$. Definim $h : \{1, 2, \dots, n + 1\} \rightarrow B$, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, prin:

$$h(j) := \begin{cases} g(j), & \text{dacă } j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ x, & \text{dacă } j = n + 1. \end{cases}$$

Avem că h este bijecția căutată.

□

Seminar 4

(S4.1) Arătați că \mathbb{R} nu este numărabilă.

Demonstrație: Cum știm din exercițiul S1.4 că intervalul $(0, 1)$ și \mathbb{R} sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0, 1)$ nu este numărabil. Cu scopul reducerii la absurd, să presupunem că există o bijecție $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$. Vom reprezenta funcția f folosind tabelul de mai jos:

0	$0, a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3} \dots$
1	$0, a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3} \dots$
2	$0, a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3} \dots$
3	$0, a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3} \dots$
\vdots	\vdots

Așa cum se observă, $a_{i,j}$ este a $j + 1$ -a zecimală a lui $f(i)$, $i \in \mathbb{N}$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0, 1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0, 1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0, 1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0d_1d_2d_3\dots d_j\dots$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obținută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcția numărului x , prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n -a zecimală a lui x va fi diferită de a n -a zecimală a lui $f(n-1)$, și așa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecție. Contradicție.

□

(S4.2) Arătați, pe rând, următoarele:

- (i) Dacă A este finită și B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.
- (ii) Dacă I este o mulțime numărabilă și $(A_i)_{i \in I}$ este o familie disjunctă de mulțimi numărabile, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i$ este numărabilă.

Demonstrație:

- (i) Dacă A este finită, atunci are un număr natural de elemente n . Demonstrăm prin inducție după acel n .

Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ și $A \cup B = B$, numărabilă.

Presupunem acum adevărată pentru un n și demonstrăm pentru $n + 1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ și $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducție – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Scriem $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$, numărabilă. Dacă $a \notin B$, atunci $\{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

- (ii) Oferim mai întâi demonstrația pentru $I = \mathbb{N}$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, A_n este numărabilă, deci $A_n = \{a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,k}, \dots\}$. Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad f(n, m) = a_{n,m}.$$

Se observă ușor, în felul următor, că f este bijecție. Pentru orice $a \in A$ există un unic $n_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a \in A_{n_a}$ (deoarece $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este familie disjunctă), deci există un unic $m_a \in \mathbb{N}$ a.î. $a = a_{n_a, m_a}$. Inversa lui f se definește, așadar, astfel:

$$f^{-1} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad f^{-1}(a) = (n_a, m_a).$$

Deoarece $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă, rezultă că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este mulțime numărabilă arbitrară și fie $F : \mathbb{N} \rightarrow I$ o bijecție. Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $B_n := A_{F(n)}$. Atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{F(n)} = \bigcup_{i \in I} A_i$. Însă, din cazul particular de mai sus, rezultă că $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ e numărabilă. Demonstrația este încheiată.

□

(S4.3) Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

- (i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.
- (ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstrație:

- (i) Vom presupune că există două valori minime și vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S , deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S , deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezultă că $x' \leq x$. Atunci obținem că $x' = x$, deci minimul este unic.

Se procedează asemănător pentru maxim.

- (ii) Fie x minimul mulțimii S . Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puțin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ și vom arăta că $t = x$. Cum x este minim și $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S .

Se procedează asemănător pentru maxim.

□

(S4.4) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} \mid d|n\}$ și $P(n) = \{d \in \mathbf{N} \mid d|n, d \neq 1, d \neq n\}$.

Demonstrați că $(P(n), |)$ și $(D(n), |)$ sunt mulțimi parțial ordonate. Enumerați elementele minime, elementele maxime, minimul și maximul (dacă există) pentru următoarele mulțimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.

Demonstrație:

Definim relația de divizibilitate pe mulțimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a, b) \in P(n) \times P(n) \mid a|b\}$.

Reflexivitate

Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie

Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a, b) \in R$ și $(b, a) \in R$, atunci:

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbf{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbf{N} \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array} \right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t, r, t \in \mathbf{N} \Rightarrow r \cdot t = 1, r, t \in \mathbf{N} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbf{N}. \text{ Deci } r \text{ este divizor al lui } 1. \text{ Rezultă } r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b.$$

Tranzitivitate

Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a, b) \in P(n)$ și $(b, c) \in P(n)$, atunci:

$$\left. \begin{array}{l} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbf{N} \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbf{N} \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array} \right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t, r, t \in \mathbf{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n) \\ \Rightarrow (a, c) \in R.$$

În concluzie, R este o relație de ordine parțială, deci $(P(n), |)$ este mulțime parțial ordonată. Asemător se demonstrează și că $(D(n), |)$ este mulțime parțial ordonată.

Definiția 1. Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:

- (i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulțimii A .
- (ii) există muchie $x \rightarrow y$ dacă $x < y$ și nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferența dintre elementele minimale(maximale) și minimul(maximul) unei mulțimi parțial ordonate.

$$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}.$$

Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relație de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 și 3 sunt elemente minimale.

Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relație de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 și 6 sunt elemente maximale.

Nu avem element minim, deoarece 2 și 3 nu sunt într-o relație.

Nu avem element maxim, deoarece 4 și 6 nu sunt într-o relație.

Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).

$$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}.$$

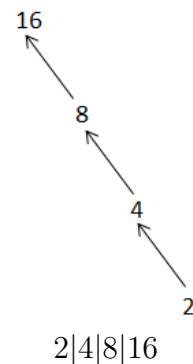
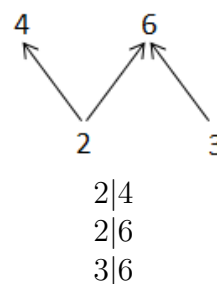
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relație de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.

Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.

2 este și minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.

16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relație de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.

Dar 16 este și maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

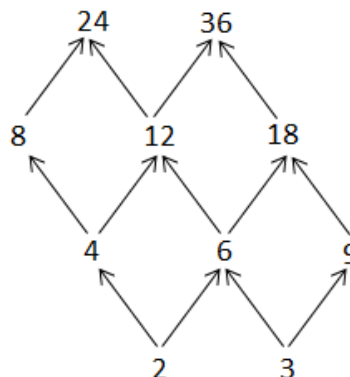


$$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}.$$

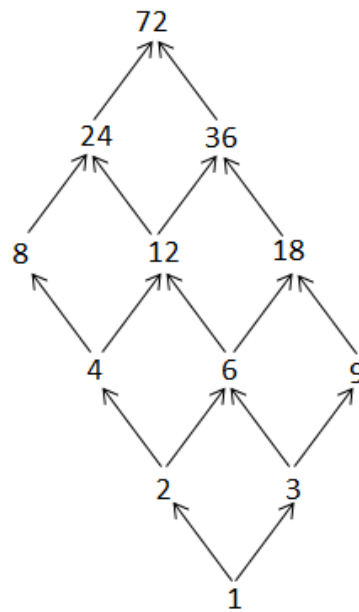
2 și 3 sunt elemente minimale.

24 și 36 sunt elemente maximale.

Nu avem minim, deoarece 2 și 3 nu sunt într-o relație de divizibilitate și nici maxim, deoarece 24 și 36 nu sunt într-o relație de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
 1 este element minimal, dar și minim.
 72 este element maximal, dar și maxim.



□

Seminar 5

(S5.1) Fie următoarele propoziții exprimate în limbaj natural:

- (i) Merg în parc dacă îmi termin treaba și nu apare altceva.
- (ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.
- (iii) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.
- (iv) Treci examenul la logică numai dacă înțelegi subiectul.

Transpuneți-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziționale.

Demonstrație:

- (i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba și nu apare altceva. Considerăm propozițiile atomice:

$$p = \text{Merg în parc.} \quad q = \text{Îmi termin treaba.} \quad r = \text{Apare altceva.}$$

$$\text{Atunci } \varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p.$$

- (ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propozițiile atomice:

$$s = \text{Plouă.} \quad t = \text{Putem observa stelele.}$$

$$\text{Atunci } \psi = t \rightarrow \neg s.$$

- (iii) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propozițiile atomice:

$$u = \text{Treci examenul la logică.} \quad v = \text{Faci o prezentare de calitate.}$$

$$\text{Atunci } \chi = v \rightarrow u.$$

- (iv) Fie $\theta = \text{Treci examenul la logică numai dacă înțelegi subiectul}$. Considerăm propozițiile atomice:

$$w = \text{Treci examenul la logică}. \quad z = \text{Înțelegi subiectul}.$$

Atunci $\theta = w \rightarrow z$.

□

(S5.2) Să se arate că mulțimea $Form$, a formulelor logicii propoziționale, este numărabilă.

Demonstrație: Avem că $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ și V este numărabilă, obținem, din (S4.2).(i), că Sim este numărabilă. Conform (S2.4).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Aplicând (S4.2), rezultă că $Expr$ este numărabilă. Deoarece $V \subseteq Form$, rezultă că $Form$ este infinită (vezi Exerciții suplimentare, S.1). Însă $Form \subseteq Expr$, deci $Form$ este o submulțime infinită a unei mulțimi numărabile. Conchidem că $Form$ este numărabilă (vezi Exerciții suplimentare, S.1). □

(S5.3) Să se arate că pentru orice formulă φ , numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ .

Demonstrație: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise și cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ . Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \mathbf{P} \text{ dacă și numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V , deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface **P**. Obținem

$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$

- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac **P**. Obținem

$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

□

(S5.4) Să se dea o definiție recursivă a mulțimii variabilelor unei formule.

Demonstrație: Se observă că $Var : Form \rightarrow 2^V$ satisface următoarele condiții:

$$\begin{aligned} (R0) \quad Var(v) &= \{v\} \\ (R1) \quad Var(\neg\varphi) &= Var(\varphi) \\ (R2) \quad Var(\varphi \rightarrow \psi) &= Var(\varphi) \cup Var(\psi). \end{aligned}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ și pentru

$$\begin{aligned} G_0 : V &\rightarrow A, & G_0(v) &= \{v\}, \\ G_{\neg} : A &\rightarrow A, & G_{\neg}(\Gamma) &= \Gamma, \\ G_{\rightarrow} : A \times A &\rightarrow A, & G_{\rightarrow}(\Gamma, \Delta) &= \Gamma \cup \Delta. \end{aligned}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcție care satisface (R0), (R1) și (R2). \square

(S5.5) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

- (i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;
- (ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

Demonstrație:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \rightarrow x_1$	$(x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0$	$((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \rightarrow x_4$	$x_4 \rightarrow x_1$	$x_3 \rightarrow x_1$	$(x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

□

(S5.6) Să se arate că pentru orice $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și pentru orice formule φ, ψ avem:

- (i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;
- (ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$;
- (iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi)$.

Demonstrație:

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\neg\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) \stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \vee e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg x \rightarrow y = x \vee y$:

x	y	$\neg x$	$\neg x \rightarrow y$	$x \vee y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned}
 e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)) \\
 &= \neg e^+(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\
 &= \neg(e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\neg\psi)) \\
 &= \neg(e^+(\varphi) \rightarrow \neg e^+(\psi)) \\
 &\stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi).
 \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $\neg(x \rightarrow \neg y) = x \wedge y$:

x	y	$\neg y$	$x \rightarrow \neg y$	$\neg(x \rightarrow \neg y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ &\stackrel{(ii)}{=} e^+(\varphi \rightarrow \psi) \wedge e^+(\psi \rightarrow \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi)) \\ &\stackrel{(*)}{=} e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0, 1\}$, avem $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = x \leftrightarrow y$:

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

Seminar 6

(S6.1) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

- (i) $v_0 \rightarrow v_2$;
- (ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstrație:

(i) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \rightarrow v_2) = e^+(v_0) \rightarrow e^+(v_2) = e(v_0) \rightarrow e(v_2) = 0 \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie funcția $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

(S6.2) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ ,

- (i) φ este tautologie dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ nu avem că } e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \rightarrow \{0, 1\} \text{ cu } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ nu avem că } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \neg e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

□

(S6.3) Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) $\psi \models \varphi$ dacă și numai dacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ dacă și numai dacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}\psi \models \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este și model pentru } \varphi \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, \text{ dacă } e^+(\psi) = 1, \text{ atunci } e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\ &\iff \models \psi \rightarrow \varphi.\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\ &\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ și } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\ &\iff \psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi \\ &\stackrel{(i)}{\iff} \models \psi \rightarrow \varphi \text{ și } \models \varphi \rightarrow \psi \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \text{ și } e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \rightarrow \psi) \wedge e^+(\psi \rightarrow \varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\ &\iff \models \psi \leftrightarrow \varphi.\end{aligned}$$

□

(S6.4) Confirmați sau infirmați:

- (i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ și $\models \psi$;
- (ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Demonstrație:

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi &\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și } e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ și} \\
&\quad \text{pentru orice } e : V \rightarrow \{0, 1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \models \varphi \text{ și } \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, și $e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\models \neg v_0$ și $e_2 \not\models v_0$, deci v_0 și $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

□

(S6.5) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$;
- (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$;
- (iii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$;
- (iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;
- (v) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$;
- (vi) $\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$.

Demonstrație: Vom folosi în demonstrații următoarele: pentru orice $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned}
a \rightarrow b = 1 &\iff a \leq b, \\
1 \rightarrow a &= a, & a \rightarrow 1 &= 1 \\
0 \rightarrow a &= 1, & a \rightarrow 0 &= \neg a \\
1 \wedge a &= a, & 0 \wedge a &= 0, \\
1 \vee a &= 1, & 0 \vee a &= a.
\end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\varphi) \rightarrow 1 = 1.$$

- (ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \rightarrow \chi) = 1$.
Avem că

$$1 = e^+((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ și $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obținem atunci, din tranzitivitatea lui \leq , că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Așadar,

$$e^+(\varphi \rightarrow \chi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi) = 1.$$

- (iii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = 1 \text{ dacă și numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \rightarrow \chi)$	$e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raționăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) &= e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

- (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 0 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= 1 \rightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) = e^+((\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= 1 \rightarrow e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (1 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (1 \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \rightarrow e^+(\chi) \\ &= 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) &= (0 \rightarrow e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) &= 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\varphi))) &= \neg 0 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= 1 \rightarrow (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \rightarrow 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Seminar 7

(S7.1) Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulțimile de formule:

- (i) $\Gamma = \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
- (ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \rightarrow v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

Demonstrație:

- (i) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ și $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \models v_n \rightarrow v_{n+1}$ dacă și numai dacă $e^+(v_n \rightarrow v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e^+(v_n) \rightarrow e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \rightarrow e(v_{n+1}) = 1$ dacă și numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}
 e \models \Gamma \quad & \text{dacă și numai dacă} \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \dots \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad (e(v) = 0 \text{ pentru orice } v \in V) \\
 & \text{sau } (e(v) = 1 \text{ pentru orice } v \in V) \\
 & \text{sau (există } k \geq 1 \text{ a.î. } e(v_i) = 0 \text{ pentru orice } i < k \text{ și} \\
 & e(v_i) = 1 \text{ pentru orice } i \geq k).
 \end{aligned}$$

Definim $e^0 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^1(v) = 1$ și, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

- (ii) Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$. Atunci

$$\begin{aligned}
 e \models \Gamma \quad & \text{dacă și numai dacă} \quad e \models v_0 \text{ și } e \models v_n \rightarrow v_{n+1} \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 7 \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_0) = 1 \text{ și } e(v_0) \leq e(v_1) \leq \dots \leq e(v_7) \leq e(v_8) \\
 & \text{dacă și numai dacă} \quad e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } n \in \{0, 1, \dots, 8\}.
 \end{aligned}$$

Așadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \rightarrow \{0, 1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

□

(S7.2) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \models (v_3 \rightarrow v_2) \vee (\neg v_1 \rightarrow v_2)$$

Demonstrație:

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ cu $e \models \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) și $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Așadar,

$$1 = \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiției lui \vee , avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \rightarrow v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \rightarrow v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \rightarrow v_2) \vee (\neg v_1 \rightarrow v_2)) = e^+(v_3 \rightarrow v_2) \vee e^+(\neg v_1 \rightarrow v_2) = e^+(v_3 \rightarrow v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \models (v_3 \rightarrow v_2) \vee (\neg v_1 \rightarrow v_2)$. □

(S7.3) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Demonstrație:

- (i) Fie e un model al lui Γ . Vrem să arătăm că e este model al lui ψ . Cum $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, avem $e \models \varphi$ și $e \models \varphi \rightarrow \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ și $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1 \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.
- (ii) “ \Rightarrow ” Fie e un model al lui Γ . Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \rightarrow \psi$. Avem două cazuri:

- (a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \rightarrow e^+(\psi) = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \models \varphi$. Atunci $e \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, și prin urmare, $e \models \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$.
Rezultă că $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \rightarrow 1 = 1$, deci $e \models \varphi \rightarrow \psi$.

“ \Leftarrow ” Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ și $e \models \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Obținem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \models \psi$.

(iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ , avem $e \models \varphi$ și $e \models \psi \iff \Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

□

Notăție. Pentru orice mulțime Γ de formule și orice formulă φ , notăm cu $\Gamma \models_{fin} \varphi$ faptul că există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

(S7.4) Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ avem că $\Gamma \models_{fin} \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

Demonstrație:

Avem întâi că $\Gamma \models_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \models \varphi \iff$ (din Propoziția 1.33.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).

Apoi, cum o mulțime finit satisfiabilă înseamnă o mulțime pentru care orice submulțime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă \iff există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât Δ' e nesatisfiabilă (**).

Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).

Pentru “(*) implică (**)”, luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulțime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Pentru “(**) implică (*)”, luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, Δ este o submulțime finită a lui Γ . Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum Δ' e nesatisfiabilă, rezultă că și $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă.

□

Seminar 8

(S8.1) Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.
- (V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.
- (V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \models \varphi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models_{fin} \varphi$.

Demonstrație:

Echivalența între (V1) și (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) \Rightarrow (V3):

$$\begin{aligned}\Gamma \models \varphi &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 1.33.(i))} \\ &\iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \varphi \text{ (conform (S7.4)).}\end{aligned}$$

Demonstrăm că (V3) \Rightarrow (V2):

$$\begin{aligned}\Gamma \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \Gamma \models \perp \text{ (conform Propoziției 1.32)} \\ &\iff \Gamma \models_{fin} \perp \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ și } \perp) \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \models \perp \\ &\iff \text{există o submulțime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\ &\quad \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziției 1.32)} \\ &\iff \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.}\end{aligned}$$

□

(S8.2) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstrație:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$	(A3) și Propoziția 1.40.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	Propozițiile 1.48 și 1.42.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S8.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (iii) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$;
- (iv) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Demonstrație: Demonstrăm (i):

(1)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	Teorema deducției
(3)	$\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(A3) și Propoziția 1.40.(i)
(4)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	Teorema deducției.

Punctul (ii) se obține din (i) aplicând de două ori Teorema deducției:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	(S8.3).(i)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	Teorema deducției.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	(1) și (S8.2)
(3)	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S8.4) (“Reciproca” axiomei 3)

Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

Demonstrație:

(1)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	Propoziția 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziția 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(4)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S8.3).(iii) și Propoziția 1.42.(ii)
(5)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$	(S8.3).(ii) și Propoziția 1.42.(ii)
(8)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(9) și (S8.2)
(11)	$\{\varphi \rightarrow \psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Teorema deducției
(12)		$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	Teorema deducției.

□

Seminar 9

(S9.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi).$$

Demonstrație: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziția 1.40.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$	Propoziția 1.40.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(S8.3).(iii) și Prop. 1.42.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi))$	(S8.3).(ii) și Prop. 1.42.(ii)
(8)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$	(9) și (S8.2).

□

(S9.2) Să se arate, folosind substituția, că formula

$$\chi := (((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6) \wedge (\neg(v_4 \rightarrow v_{10}) \rightarrow v_2)) \rightarrow ((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6)$$

este tautologie.

Demonstrație: Știm că $v_0 \wedge v_1 \rightarrow v_0$ este tautologie. Aplicăm Propoziția 1.24.(ii) pentru

$\varphi := (v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_0$, $v := v_0$ și $\theta := (v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6$ pentru a obține că:

$$\psi := \varphi_v(\theta) = (((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6) \wedge v_1 \rightarrow ((v_0 \rightarrow \neg(v_3 \rightarrow v_5)) \rightarrow v_6))$$

este tautologie. Aplicăm încă o dată Propoziția 1.24.(ii) pentru $\varphi := \psi$, $v := v_1$ și $\theta := \neg(v_4 \rightarrow v_{10}) \rightarrow v_2$ pentru a obține că χ este tautologie.

□

(S9.3)

- (i) Să se arate că mulțimea modelelor unei mulțimi satisfiabile și finite de formule este infinită.
- (ii) Găsiți o mulțime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulțime finită de formule.

Demonstrație:

- (i) Fie Γ o mulțime de formule ca în enunț. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model și fie acesta e . Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcție $e_k : V \rightarrow \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \dots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \dots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulțime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziția 1.14 pentru φ , e și e_k , avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \models \varphi$.

Am obținut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$. Așadar, $\text{Mod}(\Gamma)$ este infinită. (Cu ce mulțime este $\text{Mod}(\Gamma)$ echipotentă?)

- (ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulțime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulțime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă și numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă e este funcția constantă 1. Prin urmare, $\text{Mod}(\Gamma)$ are un singur element, pe e .

Fie acum Δ o mulțime finită de formule. Avem două cazuri:

- (a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $\text{Mod}(\Delta) = \emptyset$.
- (b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $\text{Mod}(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obținem că $\text{Mod}(\Delta) \neq \{e\} = \text{Mod}(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ .

□

Definiția 1. Un graf (neorientat) este o pereche (X, E) unde X e o mulțime și E este o relație ireflexivă și simetrică pe X . Spunem că un graf (X, E) este **finit** (respectiv **numărabil**) dacă X este finită (respectiv numărabilă).

Definiția 2. Fie (X, E) un graf și $k \in \mathbb{N}$. O **k -colorare a lui (X, E)** este o funcție $c : X \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ cu $(x, y) \in E$ avem $c(x) \neq c(y)$. Spunem că (X, E) este **k -colorabil** dacă există o k -colorare a lui (X, E) .

Definiția 3. Fie $(X, E), (X', E')$ grafuri. Spunem că (X', E') este **subgraf al lui (X, E)** dacă $X' \subseteq X$ și $E' \subseteq E$.

(S9.4) Fie (X, E) un graf numărabil și $k \in \mathbb{N}$. Arătați că dacă orice subgraf finit al lui (X, E) este k -colorabil, avem că și (X, E) este k -colorabil.

Demonstrație: Considerăm $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Notăm, pentru orice $i \in \mathbb{N}$ și $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $a_{i,j} := v_{i,k+j}$ (unde v_0, v_1, v_2 etc. sunt variabilele logicii propoziționale). De remarcat că asocierea este bijectivă, adică pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există o unică pereche $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ cu $v_n = a_{i,j}$. (Intuitiv, $a_{i,j}$ va fi “adevărat” când vârful x_i va fi colorat în culoarea j .)

Considerăm următoarele mulțimi de formule:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &:= \{a_{i,0} \vee \dots \vee a_{i,k-1} \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel puțin o culoare}) \\ \Gamma_2 &:= \{a_{i,j_1} \rightarrow \neg a_{i,j_2} \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq j_1 < j_2 < k\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că fiecare vârf al grafului e colorat în cel mult o culoare}) \\ \Gamma_3 &:= \{a_{i,j} \rightarrow \neg a_{p,j} \mid i, p \in \mathbb{N}, (x_i, x_p) \in E, 0 \leq j < k\} \\ &\quad (\text{intuitiv, spune că două vârfuri adiacente sunt colorate prin culori diferite}) \\ \Gamma &:= \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3.\end{aligned}$$

Afirmație: Dacă Γ este satisfiabilă, atunci (X, E) este k -colorabil.

Demonstrație: Fie $e \models \Gamma$. Deoarece $e \models \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, rezultă că pentru orice $i \in \mathbb{N}$ există un unic $J_i \in \{0, \dots, k-1\}$ a.î. $e(a_{i,J_i}) = 1$. Definim atunci

$$c : X \rightarrow \{0, \dots, k-1\}, \quad c(x_i) = J_i.$$

Demonstrăm că c este o k -colorare a lui (X, E) . Fie $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$. Trebuie să arătăm că $c(x_i) \neq c(x_p)$, adică, $J_i \neq J_p$. Presupunem prin reducere la absurd că $J_i = J_p$ și notăm cu J valoarea comună. Atunci $e(a_{i,J}) = e(a_{p,J}) = 1$.

Deoarece $e \models \Gamma_3$, avem că

$$1 = e^+(a_{i,J} \rightarrow \neg a_{p,J}) = e(a_{i,J}) \rightarrow \neg e(a_{p,J}) = 1 \rightarrow \neg 1 = 1 \rightarrow 0 = 0,$$

o contradicție. ■

Rămâne să arătăm că Γ este satisfiabilă. Din Teorema de compacitate, e suficient să demonstrăm că orice submulțime finită Δ a lui Γ este satisfiabilă.

Fie o asemenea mulțime Δ . Definim

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{\varphi \in \Delta} \{i \in \mathbb{N} \mid \text{există } j \in \{0, \dots, k-1\} \text{ a.î. } a_{i,j} \in \text{Var}(\varphi)\}, \\ Y &:= \{x_i \mid i \in A\}. \end{aligned}$$

Deoarece Δ este finită, se arată ușor că A este finită. Prin urmare, Y este o mulțime finită de vârfuri ale grafului (X, E) . Ca urmare, subgraful indus $(Y, E \cap (Y \times Y))$ este un subgraf finit al lui (X, E) , ce admite, din ipoteza problemei, o k -colorare - să o notăm cu h_Y .

Definim $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $i \in \mathbb{N}$ și $j \in \{0, \dots, k-1\}$,

$$e(a_{i,j}) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } i \in A \text{ și } h_Y(x_i) = j; \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Rezultă că pentru orice $i \in A$ există un unic $J_i \in \{0, \dots, k-1\}$ a.î. $h_Y(x_i) = J_i$, deci $e(a_{i,J_i}) = 1$.

Demonstrăm că e este model al lui Δ . Fie $\varphi \in \Delta$. Avem cazurile:

- (i) $\varphi \in \Gamma_1$, adică $\varphi = a_{i,0} \vee \dots \vee a_{i,k-1}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$. Atunci $i \in A$ și $e(a_{i,J_i}) = 1$, adică $e \models a_{i,J_i}$. Rezultă că $e \models \varphi$.
- (ii) $\varphi \in \Gamma_2$, adică $\varphi = a_{i,j_1} \rightarrow \neg a_{i,j_2}$ pentru un $i \in \mathbb{N}$ și $0 \leq j_1 < j_2 < k$. Atunci $i \in A$. Avem cazurile:
 - (a) $j_1 \neq J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = e(a_{i,j_1}) \rightarrow \neg e(a_{i,j_2}) = 1$, deci $e \models \varphi$.
 - (b) $j_1 = J_i$, deci $e(a_{i,j_1}) = 1$. Atunci $e(a_{i,j_2}) = 0$. Obținem că $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow \neg 0 = 1$.
- (iii) $\varphi \in \Gamma_3$, adică $\varphi = a_{i,j} \rightarrow \neg a_{p,j}$, cu $i, p \in \mathbb{N}$ a.î. $(x_i, x_p) \in E$, $0 \leq j < k$. Atunci $i, p \in A$, așa că $x_i, x_p \in Y$ și, prin urmare, (x_i, x_p) este o muchie a grafului $(Y, E \cap (Y \times Y))$. Deoarece h_Y este o k -colorare, avem că $h_Y(x_i) \neq h_Y(x_p)$, adică $J_i \neq J_p$. Avem cazurile:
 - (a) $j \neq J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 0$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \models \varphi$.
 - (b) $j = J_i$, deci $e(a_{i,j}) = 1$. Atunci $j \neq J_p$, deci $e(a_{p,j}) = 0$. Obținem că $e^+(\varphi) = 1$.

□

Seminar 10

(S10.1) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstrație: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine (slabă) cu TC, iar Teorema de compacitate cu TK. Avem că:

$$\begin{aligned}
 \Gamma \vdash \varphi &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi && \text{(din Propoziția 1.47)} \\
 &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \vdash (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi && \text{(din Propoziția 1.62.(i))} \\
 &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi && \text{(din TC)} \\
 &\Leftrightarrow \text{există } \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma \text{ cu } \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi && \text{(din Propoziția 1.34.(ii))} \\
 &\Leftrightarrow \Gamma \models \varphi. && \text{(din TK - versiunea 3)}
 \end{aligned}$$

□

(S10.2) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică imediat Teorema de completitudine tare - versiunea 1.

Demonstrație: Vrem să arătăm că o mulțime de formule este consistentă dacă și numai dacă este satisfiabilă. Fie $\Gamma \subseteq Form$. Abreviem Teorema de completitudine tare cu TCT. Avem că:

$$\begin{aligned}
 \Gamma \text{ este consistentă} &\Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp && \text{(din Propoziția 1.60)} \\
 &\Leftrightarrow \Gamma \not\models \perp && \text{(din TCT - versiunea 2)} \\
 &\Leftrightarrow \Gamma \text{ este satisfiabilă.} && \text{(din Propoziția 1.32)}
 \end{aligned}$$

□

(S10.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

- (i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

- (iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;
- (iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstrație: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziția 1.42.(ii).

Demonstrăm (i):

- | | | |
|-----|---|----------------------|
| (1) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (2) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (S8.3).(ii) |
| (3) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)) \rightarrow (\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi)$ | (S8.4) |
| (4) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$ | (MP): (2), (3) |
| (5) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\neg\varphi$ | (MP): (1), (4) |
| (6) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ | (S8.3).(iii) |
| (7) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \varphi$ | (MP): (5), (6). |

Demonstrăm (ii):

- | | | |
|-----|---|-----------------------------|
| (1) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (A1) și Propoziția 1.40.(i) |
| (2) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \neg\psi$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (3) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (5) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \perp)$ | (S8.3).(iii) |
| (6) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \perp$ | (MP): (4), (5) |
| (7) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi), \neg\psi\} \vdash \perp$ | (MP): (3), (6) |
| (8) | $\{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \psi$ | (7) și (S8.2). |

Demonstrăm (iii):

- | | | |
|------|--|----------------------|
| (1) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \varphi$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (2) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \psi$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (3) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | Propoziția 1.40.(ii) |
| (4) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (S8.3).(iii) |
| (5) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$ | (MP): (3), (4) |
| (6) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\psi$ | (MP): (1), (5) |
| (7) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$ | (S8.3).(ii) |
| (8) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \psi \rightarrow \perp$ | (MP): (6), (7) |
| (9) | $\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)\} \vdash \perp$ | (MP): (2), (8) |
| (10) | $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$ | (9) și (S8.2). |

Demonstrăm (iv), implicația “ \Rightarrow ”:

- | | | | |
|-----|---------------------------|--|-------------------|
| (1) | $\{\varphi, \psi\}$ | $\vdash \chi$ | Ipoteză |
| (2) | $\{\varphi\}$ | $\vdash \psi \rightarrow \chi$ | Teorema deducției |
| (3) | | $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | Teorema deducției |
| (4) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ | (3) |
| (5) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \varphi$ | (i) |
| (6) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \psi \rightarrow \chi$ | (MP): (4), (5) |
| (7) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \psi$ | (ii) |
| (8) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \chi$ | (MP): (6), (7). |

Demonstrăm (iv), implicația “ \Leftarrow ”:

- | | | | |
|-----|---------------------------|---|-------------------|
| (1) | $\{\varphi \wedge \psi\}$ | $\vdash \chi$ | Ipoteză |
| (2) | | $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ | Teorema deducției |
| (3) | $\{\varphi, \psi\}$ | $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ | (2) |
| (4) | $\{\varphi, \psi\}$ | $\vdash \varphi \wedge \psi$ | (iii) |
| (5) | $\{\varphi, \psi\}$ | $\vdash \chi$ | (MP): (3), (4). |

□

Seminar 11

(S11.1) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

- (i) $((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0;$
- (ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3).$

Demonstrație:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
 ((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicației)} \\
 &\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
 &\sim (\neg \neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
 &\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negații)}
 \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obținem:

$$\begin{aligned}
 (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)} \\
 &\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)} \\
 &\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotență)}
 \end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă și cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este și în FND, și în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg \neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicațiilor)} \\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negații)} \\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)} \\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negații)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obținem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)} \\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S11.2) Să se aducă formula $\varphi = (v_0 \rightarrow v_1) \rightarrow v_2$ la cele două forme normale trecându-se prin funcția booleană asociată (i.e. metoda tabelului).

Demonstrație: Alcătuim tabelul de valori al funcției asociate $F_\varphi : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$, precum și a funcției $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \rightarrow x_1$	$F_\varphi(x_0, x_1, x_2) := (x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2$	$\neg F_\varphi(x_0, x_1, x_2)$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Obținem, așadar, uitându-ne pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui F_φ și aplicând raționamentul din demonstrațiile Teoremelor 1.75 și 1.77, că o formă normală disjunctivă a lui φ este:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge v_2),$$

iar uitându-ne pe liniile cu 0 de pe coloana valorilor lui F_φ și aplicând raționamentul din demonstrațiile Teoremelor 1.76 și 1.77, obținem că o formă normală conjunctivă a lui φ este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$ pentru a obține (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\varphi$:

$$(v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_0 \wedge \neg v_1 \wedge \neg v_2),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziția 1.71.(ii), obținem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\varphi$, și deci a lui φ , este:

$$(\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_0 \vee v_1 \vee v_2).$$

□

(S11.3) Să se testeze dacă următoarele mulțimi de clauze sunt satisfiabile:

- (i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\};$
- (ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}.$

Demonstrație:

- (i) Presupunem că am avea un model e al mulțimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \models \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \not\models \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obținut o contradicție. Rămâne că mulțimea de clauze din enunț este nesatisfiabilă.
- (ii) Fie evaluarea $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, și $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulțime, deci este model pentru mulțimea de clauze. Așadar, mulțimea de clauze din enunț este satisfiabilă.

□

(S11.4) Să se determine mulțimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

- (i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}; C_2 := \{v_4, v_5, v_6\};$
- (ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}; C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\};$
- (iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}; C_2 := \{v_1, \neg v_2\}.$

Demonstrație:

- (i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ și $L := \neg v_4$, obținând așadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ și $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

□

(S11.5) Derivați prin rezoluție clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulțimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstrație: Notăm:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{v_0, v_4\} \\ C_2 &:= \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} \\ C_3 &:= \{\neg v_4, v_0, v_1\} \\ C_4 &:= \{\neg v_0, v_3\} \\ C_5 &:= \{v_0, v_1\} && \text{(rezolvent al } C_1, C_3) \\ C_6 &:= \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} && \text{(rezolvent al } C_2, C_4) \\ C_7 &:= \{v_0, \neg v_2, v_3\} && \text{(rezolvent al } C_5, C_6) \end{aligned}$$

Avem, așadar, că secvența $(C_1, C_2, \dots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluție a lui C din \mathcal{S} . □

(S11.6) Să se deriveze prin rezoluție clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \rightarrow v_2) \wedge (v_0 \rightarrow v_1)$$

Demonstrație: Înlocuind implicațiile și aplicând legile de Morgan, obținem că:

$$\begin{aligned} \varphi &\sim (\neg(v_0 \wedge v_1) \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \\ &\sim (\neg v_0 \vee \neg v_1 \vee v_2) \wedge (\neg v_0 \vee v_1), \end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ' , a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ și $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 și C_2 . Cum C_1 și C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem așadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ' , formulă în FNC echivalentă semantic cu φ . \square

(S11.7) Să se arate, folosind rezoluția, că formula:

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \rightarrow v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \rightarrow v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \rightarrow v_3)$$

este nesatisfiabilă.

Demonstrație: Înlocuind implicațiile, obținem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ' . Notând:

$$\begin{aligned} C_1 &:= \{v_0, v_2\} \\ C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\} \\ C_3 &:= \{\neg v_1\} \\ C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\} \\ C_5 &:= \{\neg v_3\} \\ C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\} \end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{array}{ll} C_7 := \{\neg v_2\} & \text{(rezolvent al } C_2, C_3) \\ C_8 := \{v_0\} & \text{(rezolvent al } C_1, C_7) \\ C_9 := \{v_4\} & \text{(rezolvent al } C_4, C_8) \\ C_{10} := \{v_3\} & \text{(rezolvent al } C_6, C_9) \\ C_{11} := \square & \text{(rezolvent al } C_5, C_{10}) \end{array}$$

avem că secvența $(C_1, C_2, \dots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluție a lui \square din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.91, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziția 1.86, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci și φ , care este echivalentă semantic cu φ' , este nesatisfiabilă. \square

Seminar 12

(S12.1) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstrație: Notând mulțimea de clauze de mai sus cu \mathcal{S} , obținem următoarea rulare:

```

      i := 1
       $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ 
P1.1.    $x_1 := v_0$ 
       $T_1^1 := \{\{v_0\}\}$ 
       $T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$ 
P1.2.    $U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$ 
P1.3.    $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$ 
P1.4.   i := 2; goto P2.1
P2.1.    $x_2 := v_1$ 
       $T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$ 
       $T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$ 
P2.2.    $U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$ 
P2.3.    $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$ 
P2.4.   i := 3; goto P3.1
P3.1.    $x_3 := v_2$ 
       $T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$ 
       $T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$ 
P3.2.    $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$ 
P3.3.    $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$ 
P3.4.   i := 4; goto P4.1
```

P4.1.	$x_4 := v_3$ $T_4^1 := \{\{v_3\}\}$ $T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
P4.2.	$U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
P4.3.	$\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
P4.4.	$i := 5$; goto P5.1
P5.1.	$x_5 := v_4$ $T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$ $T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
P5.2.	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
P5.3.	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
P5.4.	$i := 6$; goto P6.1
P6.1.	$x_6 := v_5$ $T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$ $T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
P6.2.	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
P6.3.	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
P6.4.	$i := 7$; goto P7.1
P7.1.	$x_7 := v_6$ $T_7^1 := \{\{v_6\}\}$ $T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
P7.2.	$U_7 := \{\square\}$
P7.3.	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
P7.4.	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

□

(S12.2) Există o derivare prin rezoluție a lui \square din mulțimea de clauze $\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}$? Justificați.

Demonstrație: Fie mulțimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$.

Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ și că:

$$\begin{aligned}
Res(C_1, C_1) &= \emptyset \\
Res(C_1, C_2) &= \{C_3, C_4\} \\
Res(C_1, C_3) &= \{C_1\}
\end{aligned}$$

$$Res(C_1, C_4) = \{C_1\}$$

$$Res(C_2, C_2) = \emptyset$$

$$Res(C_2, C_3) = \{C_2\}$$

$$Res(C_2, C_4) = \{C_2\}$$

$$Res(C_3, C_3) = \{C_3\}$$

$$Res(C_3, C_4) = \emptyset$$

$$Res(C_4, C_4) = \{C_4\}$$

Am arătat, deci, că pentru orice $D_1, D_2 \in \mathcal{S}'$, $Res(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{S}'$ (*). Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluție a lui \square din \mathcal{S} și fie aceasta $(C'_1, \dots, C'_n = \square)$. Demonstrăm prin inducție completă că pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, $C'_i \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel de i . Din definiția derivării, avem că ori $C'_i \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C'_i \in Res(C'_j, C'_k)$. Din ipoteza de inducție completă, $C'_j, C'_k \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $Res(C'_j, C'_k) \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C'_i \in \mathcal{S}'$. Am obținut că $C'_n = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicție. Rămâne că nu există o derivare prin rezoluție a lui \square din \mathcal{S} . \square

(S12.3) Demonstrați, folosindu-vă de proprietățile satisfacerii semantice și de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluției:

$$\{v_2, v_2 \rightarrow \neg v_3, v_3 \rightarrow v_4\} \models (\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow \neg v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstrație: Aplicând Propoziția 1.33.(i), condiția din enunț este echivalentă cu faptul că mulțimea de formule:

$$\{v_2, v_2 \rightarrow \neg v_3, v_3 \rightarrow v_4, \neg((\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow \neg v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă și, mai departe, din Propoziția 1.34.(i), cu faptul că formula:

$$v_2 \wedge (v_2 \rightarrow \neg v_3) \wedge (v_3 \rightarrow v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \rightarrow \neg(v_1 \rightarrow \neg v_2)) \vee (v_1 \rightarrow (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obținem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg \neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4),$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg \neg \neg v_3 \wedge \neg \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge \neg \neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4,$$

$$v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4,$$

ultima formulă fiind în FNC și corespunzându-i forma clauzală:

$$\mathcal{S} := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă, încheind astfel demonstrația (prin aplicarea Propoziției 1.91). Folosim mulțimea \mathcal{S} ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

$$\begin{aligned} & i := 1 \\ & \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\ P1.1. \quad & x_1 := v_1 \\ & T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\ & T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\ P1.2. \quad & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\ P1.3. \quad & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\ P1.4. \quad & i := 2; \text{ goto } P2.1 \\ P2.1. \quad & x_2 := v_2 \\ & T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\ & T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\ P2.2. \quad & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\} \\ P2.3. \quad & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\} \\ P2.4. \quad & \square \in \mathcal{S}_3 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.} \end{aligned}$$

Rămâne, deci, că \mathcal{S} este nesatisfiabilă. □

Seminar 13

(S13.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$.

- (i) Fie $x, y \in V$ cu $x \neq y$, și $t = \dot{S}x \dot{\times} \dot{S}\dot{S}y = \dot{\times}(\dot{S}x, \dot{S}\dot{S}y)$. Să se calculeze $t^{\mathcal{N}}(e)$, unde $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ este o evaluare ce verifică $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$.
- (ii) Fie $\varphi = x \dot{<} \dot{S}y \rightarrow (x \dot{<} y \vee x = y) = \dot{<}(x, \dot{S}y) \rightarrow (\dot{<}(x, y) \vee x = y)$. Să se arate că $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

Demonstrație:

- (i) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{N}}(e) &= \dot{\times}^{\mathcal{N}}((\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e), (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = (\dot{S}x)^{\mathcal{N}}(e) \cdot (\dot{S}\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e) \\ &= \dot{S}^{\mathcal{N}}(x^{\mathcal{N}}(e)) \cdot \dot{S}^{\mathcal{N}}((\dot{S}y)^{\mathcal{N}}(e)) = S(e(x)) \cdot S(\dot{S}^{\mathcal{N}}(y^{\mathcal{N}}(e))) \\ &= S(e(x)) \cdot S(S(e(y))). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $e(x) = 3$ și $e(y) = 7$, atunci

$$t^{\mathcal{N}}(e) = S(3) \cdot S(S(7)) = 4 \cdot 9 = 36.$$

- (ii) Pentru orice interpretare $e : V \rightarrow \mathbb{N}$, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff \dot{<}^{\mathcal{N}}(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } \\ &\quad \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (x = y)[e] \\ &\iff <(e(x), S(e(y))) \text{ nu e satisfăcută sau } <(e(x), e(y)) \\ &\quad \text{sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

Prin urmare, $\mathcal{N} \models \varphi[e]$ pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$.

De obicei, scriem:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models \varphi[e] &\iff \mathcal{N} \not\models (\dot{<}(x, \dot{S}y))[e] \text{ sau } \mathcal{N} \models (\dot{<}(x, y) \vee x = y)[e] \\ &\iff e(x) \geq S(e(y)) \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y) \\ &\iff e(x) \geq e(y) + 1 \text{ sau } e(x) < e(y) \text{ sau } e(x) = e(y). \end{aligned}$$

□

Notăția 1. Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I . Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , orice $e : V \rightarrow A$ și orice $a, b \in A$, avem că:

$$(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a} = (e_{x \leftarrow a})_{y \leftarrow b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}$. Așadar,

$$e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S13.2) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

- (i) $\neg \exists x \varphi \models \forall x \neg \varphi$;
- (ii) $\forall x (\varphi \wedge \psi) \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$;
- (iii) $\exists y \forall x \varphi \models \forall x \exists y \varphi$;
- (iv) $\forall x (\varphi \rightarrow \psi) \models \forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi$.

Demonstrație: Fie \mathcal{A} și $e : V \rightarrow A$.

- (i) Știm că “ $\exists x$ ” este o prescurtare pentru “ $\neg \forall x \neg$ ”.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models (\neg \exists x \varphi)[e] &\iff \mathcal{A} \models (\neg \neg \forall x \neg \varphi)[e] \iff \text{nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\neg \forall x \neg \varphi)[e] \\ &\iff \text{nu este adevărat că nu este adevărat că } \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \neg \varphi)[e]. \end{aligned}$$

- (ii) $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$) și (pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}]$) $\iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi)[e]$ și $\mathcal{A} \models (\forall x \psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)[e]$.

(iii) Avem că $\mathcal{A} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \leftarrow b})_{x \leftarrow a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \models (\forall x \exists y \varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{x \leftarrow c})_{y \leftarrow d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$ (**).

Știm (*) și vrem să arătăm (**). Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$.

Luăm d să fie b -ul din (*). Atunci, pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a, y \leftarrow d}]$. În particular, luând $a := c$, obținem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow c, y \leftarrow d}]$, ceea ce ne trebuia.

(iv) Presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x (\varphi \rightarrow \psi))[e]$. Atunci, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}]$, lucru pe care îl putem scrie și $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \rightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1$ sau chiar $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a})$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)[e]$, ceea ce este echivalent, din aceleași considerente, cu $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \leq (\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e)$.

Dacă $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0$, suntem OK. Presupunem, așadar, că $(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. pentru orice $b \in A$, $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow b}) = 1$ (**).

Ne rămâne de arătat că $(\forall x \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1$, i.e. că pentru orice $c \in A$, $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Fie $c \in A$. Din (*), avem că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) \leq \psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c})$, iar din (**), că $\varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$. Deci $\psi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow c}) = 1$, ceea ce ne trebuia.

□

(S13.3) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, \mathcal{L} , și de formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} astfel încât:

- (i) $\forall x (\varphi \vee \psi) \not\models \forall x \varphi \vee \forall x \psi$;
- (ii) $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \not\models \exists x (\varphi \wedge \psi)$;
- (iii) $\forall x \exists y \varphi \not\models \exists y \forall x \varphi$.

Demonstrație: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem $e(v) := 7$ pentru orice $v \in V$).

- (i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ și $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \models \forall x (\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

- (a) $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi)[e]$.
- (b) $\mathcal{N} \models (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

(ii) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x < \dot{2}$ și $\psi := \neg(x < \dot{2})$. Avem:

- (a) $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\varphi)[e]$.
- (b) $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$, ceea ce este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \models (\exists x\psi)[e]$.
- Prin urmare,

$$\mathcal{N} \models (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi)[e].$$

Pe de altă parte, $\mathcal{N} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $\mathcal{N} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow n}] \iff$ există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n < 2$ și $n \geq 2$, ceea ce este fals. Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models \exists x(\varphi \wedge \psi)[e].$$

(iii) Fie $\varphi := x < y$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \models (\exists y\varphi)[e_{x \leftarrow n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x\exists y\varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y\forall x\varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e_{y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \leftarrow n, y \leftarrow m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y\forall x\varphi)[e].$$

□

(S13.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (1)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (2)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (3)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (4)$$

Demonstrație: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.23) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.23) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.23) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi$:

$\mathcal{A} \models (\exists x(\psi \rightarrow \varphi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow \varphi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.23) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\psi \rightarrow \varphi)[e]$.

□

Seminar 14

(S14.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi \quad (1)$$

$$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi \quad (2)$$

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi \quad (3)$$

$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi \quad (4)$$

Demonstrație: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \varphi \wedge \forall x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.24) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ și pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \models \varphi \vee \exists x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.24) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi \rightarrow \forall x\psi$:

$\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.24) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \models \forall x\psi \rightarrow \varphi$:

$\mathcal{A} \models \exists x(\psi \rightarrow \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow \varphi)[e_{x \leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziția 2.24) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\models \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \models \varphi[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\psi \rightarrow \varphi)[e]$.

□

(S14.2) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

- (i) pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x ,

$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$$

este validă;

- (ii) pentru orice formulă φ și orice variabilă x cu $x \notin \text{Var}(\varphi)$,

$$\varphi \rightarrow \forall x\varphi$$

este validă.

Demonstrație: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură și $e : V \rightarrow A$ o evaluare.

- (i) Presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e așa – atunci avem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$ și $\mathcal{A} \not\models (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$ (**) și există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \not\models \psi[e_{x \leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) și (**) $a := b$, obținem că $\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x \leftarrow b}]$ și $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).
- (ii) Presupunem că $\mathcal{A} \models \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$. Cum $x \notin \text{Var}(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e și $e_{x \leftarrow a}$ diferă cel mult pe “poziția” x , deci restricționate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziția 2.24, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

□

(S14.3) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q ;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g ;
- două simboluri de constante c, d .

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui \mathcal{L} :

$$\varphi_1 = \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d)$$

$$\varphi_2 = \forall y(\forall xP(x, y) \rightarrow \exists zQ(x, z))$$

$$\varphi_3 = \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y (S(y) \rightarrow \forall z R(z))$$

$$\varphi_4 = \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x))$$

Demonstrație:

$$\begin{aligned}\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y, z) = d) &\models \forall x(f(x) = c \wedge \exists z \neg(g(y, z) = d)) \\ &\models \forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(y, z) = d))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall y(\forall x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(x, z)) &\models \forall y \exists z(\forall x P(x, y) \rightarrow Q(x, z)) \models \forall y \exists z(\forall u P(u, y) \rightarrow Q(x, z)) \\ &\models \forall y \exists z \exists u(P(u, y) \rightarrow Q(x, z)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \exists y(S(y) \rightarrow \forall z R(z)) &\models \exists x(\forall y P(x, y) \vee \neg \exists y \forall z(S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\models \exists x(\forall y P(x, y) \vee \forall y \exists z \neg(S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\models \exists x(\forall u P(x, u) \vee \forall y \exists z \neg(S(y) \rightarrow R(z))) \\ &\models \exists x \forall u \forall y \exists z(P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \rightarrow \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z, x)) &\models \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x R(x) \vee \neg \forall x \exists z Q(z, x)) &\models \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z, x)) &\models \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x(R(x) \vee \forall z \neg Q(z, x)) &\models \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists x \forall z(R(x) \vee \neg Q(z, x)) &\models \\ \exists z \exists x(Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow \exists u \forall v(R(u) \vee \neg Q(v, u)) &\models \\ \forall z \forall x \exists u \forall v((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u))) &\end{aligned}$$

□