

Seminar 4

(S4.1) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstrație: Notând mulțimea de clauze de mai sus cu \mathcal{S} , obținem următoarea rulare:

```

        i := 1
        S1 := S
P1.1.    x1 := v0
        T11 := {{v0}}
        T10 := {{¬v0, ¬v1, v2}, {¬v0, ¬v4, v5}, {¬v0, v3}}
P1.2.    U1 := {{¬v1, v2}, {¬v4, v5}, {v3}}
P1.3.    S2 := {{¬v3, v1, v4}, {¬v2, v6}, {¬v5, v6}, {¬v6}, {¬v1, v2}, {¬v4, v5}, {v3}}
P1.4.    i := 2; goto P2.1
P2.1.    x2 := v1
        T21 := {{¬v3, v1, v4}}
        T20 := {{¬v1, v2}}
P2.2.    U2 := {{¬v3, v4, v2}}
P2.3.    S3 := {{¬v2, v6}, {¬v5, v6}, {¬v6}, {¬v4, v5}, {v3}, {¬v3, v4, v2}}
P2.4.    i := 3; goto P3.1
    
```

$P3.1.$ $x_3 := v_2$
 $T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$
 $T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$
 $P3.2.$ $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
 $P3.3.$ $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
 $P3.4.$ $i := 4; \text{ goto } P4.1$
 $P4.1.$ $x_4 := v_3$
 $T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
 $T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
 $P4.2.$ $U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
 $P4.3.$ $\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
 $P4.4.$ $i := 5; \text{ goto } P5.1$
 $P5.1.$ $x_5 := v_4$
 $T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
 $T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
 $P5.2.$ $U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
 $P5.3.$ $\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
 $P5.4.$ $i := 6; \text{ goto } P6.1$
 $P6.1.$ $x_6 := v_5$
 $T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
 $T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
 $P6.2.$ $U_6 := \{\{v_6\}\}$
 $P6.3.$ $\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
 $P6.4.$ $i := 7; \text{ goto } P7.1$
 $P7.1.$ $x_7 := v_6$
 $T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
 $T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
 $P7.2.$ $U_7 := \{\square\}$
 $P7.3.$ $\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
 $P7.4.$ $\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă.}$

□

(S4.2) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstrație: Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$	Teorema deducției
(3)	$\Gamma \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$	(A3) și Propoziția 2.65.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$	Propozițiile 2.72 și 2.67.(ii)
(6)	$\Gamma \vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S4.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ și orice $\Gamma \subseteq Form$,

- (i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (iii) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iv) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$;
- (v) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

Demonstrație: Demonstrăm (i):

(1)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	Teorema deducției
(3)	$\{\neg\psi\} \vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(A3) și Propoziția 2.65.(i)
(4)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	Teorema deducției.

Punctul (ii) se obține din (i) aplicând de două ori Teorema deducției:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$	se aplică (i)
(2)	$\{\neg\psi\} \vdash \psi \rightarrow \varphi$	Teorema deducției
(3)	$\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	Teorema deducției.

Punctul (iii) se obține în felul următor:

- (1) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \perp)$ se aplică (ii) și Prop. 2.67.(ii)
- (2) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\psi$ Ipoteză
- (3) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi \rightarrow \perp$ (MP): (1), (2)
- (4) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$ Ipoteză
- (5) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \perp$ (MP): (3), (4)
- (6) $\Gamma \vdash \varphi$ (S4.2) pentru (5).

Demonstrăm în continuare (iv).

- (1) $\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$ se aplică (i)
- (2) $\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$ (S4.2) pentru (1)
- (3) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$. Teorema deducției.

Demonstrăm (v):

- (1) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$ se aplică (iv) cu $\varphi \mapsto \neg\varphi$
- (2) $\vdash (\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$ (A3)
- (3) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$ (MP): (1), (2).

□

(S4.4) Să se arate că pentru orice formulă φ ,

$$\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi.$$

Demonstrație: Avem

- (1) $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ Propoziția 2.65.(ii)
- (2) $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \varphi$ Propoziția 2.65.(ii)
- (3) $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi, \neg\varphi\} \vdash \varphi$ (MP): (1), (2)
- (4) $\{\neg\varphi \rightarrow \varphi\} \vdash \varphi$ (S4.3).(iii) pentru (2) și (3)
- (5) $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ Teorema deducției.

□

(S4.5) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi).$$

Demonstrație: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziția 2.65.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziția 2.65.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)$	Propoziția 2.65.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$	(S4.3).(iv) și Prop. 2.66.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \psi \rightarrow \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \rightarrow \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi)$	(S4.3).(iii) pentru (2) și (6).

□

(S4.6) (“Reciproca” axiomei 3)

Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

Demonstrație:

(1)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	Propoziția 2.65.(ii)
(2)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziția 2.65.(ii)
(3)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziția 2.65.(ii)
(4)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(S4.3).(iv) și Propoziția 2.66.(ii)
(5)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(S4.3).(iii) pentru (2) și (6)
(8)	$\{\varphi \rightarrow \psi\}$	$\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Teorema deducției
(9)		$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	Teorema deducției.

□