

**Examen la algebră <sup>1</sup>**  
**an I, sem. I**  
**3.02.2022**

Numele și prenumele .....

Grupa .....

$\Gamma$  = numărul de litere al primului nume = .....

$\Omega$  = numărul de litere al primului prenume = .....

**Subiectul I.**

1. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  definim relația binară

$$x \sim y \iff x = y \text{ sau } x + y = \Omega.$$

- (i) Să se arate că " $\sim$ " este o relație de echivalență.
  - (ii) Să se determine clasa de echivalență a numărului real 2022 în raport cu relația  $\sim$ .
  - (iii) Să se arate că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = x(\Omega - x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , nu este nici injectivă, nici surjectivă.
  - (iv) Să se arate că mulțimea factor  $\mathbb{R}/\sim$  este echipotentă cu imaginea funcției  $f$  de la punctul (iii). **(6 pct.)**
2. Definim funcția  $g : \mathbb{Z} \rightarrow [0, 1)$ ,  $g(n) = \{2^n \sqrt[13]{\Gamma}\}$ , unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului  $x$ . Să se arate că  $g$  este injectivă. **(3 pct.)**

**Subiectul II.**

- 1. Determinați elementele de ordin 2 și elementele de ordin 3 din grupul  $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5}, +)$ .
- 2. Determinați elementele de ordin 6 din grupul  $(\mathbb{Z}_{\Gamma+5} \times \mathbb{Z}_{\Omega+12}, +)$ . **(3 pct.)**
- 3. Conține grupul  $(\mathbb{Z}_{\Gamma} \times \mathbb{Z}_{\Omega}, +)$  un element de ordin  $\Gamma \cdot \Omega$ ? **(3 pct.)**

---

<sup>1</sup>Toate subiectele sunt obligatorii.

**La fiecare subiect, înlocuiți  $\Gamma$  și  $\Omega$  cu valorile specificate mai sus! La fiecare subiect, înlocuiți  $\Gamma$  și  $\Omega$  cu valorile specificate mai sus! (Spre exemplu: dacă numele este Vasilescu Ștefan Alexandru considerați peste tot  $\Gamma = 9$  și  $\Omega = 6$ .)**

**Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.**

**Timp de lucru  $2\frac{1}{2}$  ore. Succes!**

**Subiectul III.** Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 11 & 6 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \in S_{11}.$$

1. Descompuneți  $\sigma$  în produs de cicluri disjuncte și în produs de transpoziții. **(3 pct.)**
2. Aflați ordinul și signatura permutării  $\sigma$ . Calculați  $\sigma^{2022+\Gamma}$ . **(3 pct.)**
3. Determinați permutările  $\tau \in S_{10}$  cu proprietatea că  $\tau^2 = \sigma^\Omega$ . **(3 pct.)**

**Subiectul IV.**

1. Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului  $X^4 + X^2 + \Gamma$  la  $X^3 + X + \Omega$  în  $\mathbb{Q}[X]$ .
2. Să se determine cmmdc al polinoamelor  $X^5 + X^2 + \hat{\Gamma}$  și  $X^3 + \hat{\Omega}X + \hat{1}$  în  $\mathbb{Z}_2[X]$ .
3. Să se determine numărul elementelor inversabile, al elementelor nilpotente și al elementelor idempotente din inelul  $\mathbb{Z}_{6\Gamma}$ .
4. Fie  $I = (X - \Gamma, \Omega)$  idealul din  $\mathbb{Z}[X]$  generat de  $X - \Gamma$  și  $\Omega$ . Să se arate că  $I \neq \mathbb{Z}[X]$ .