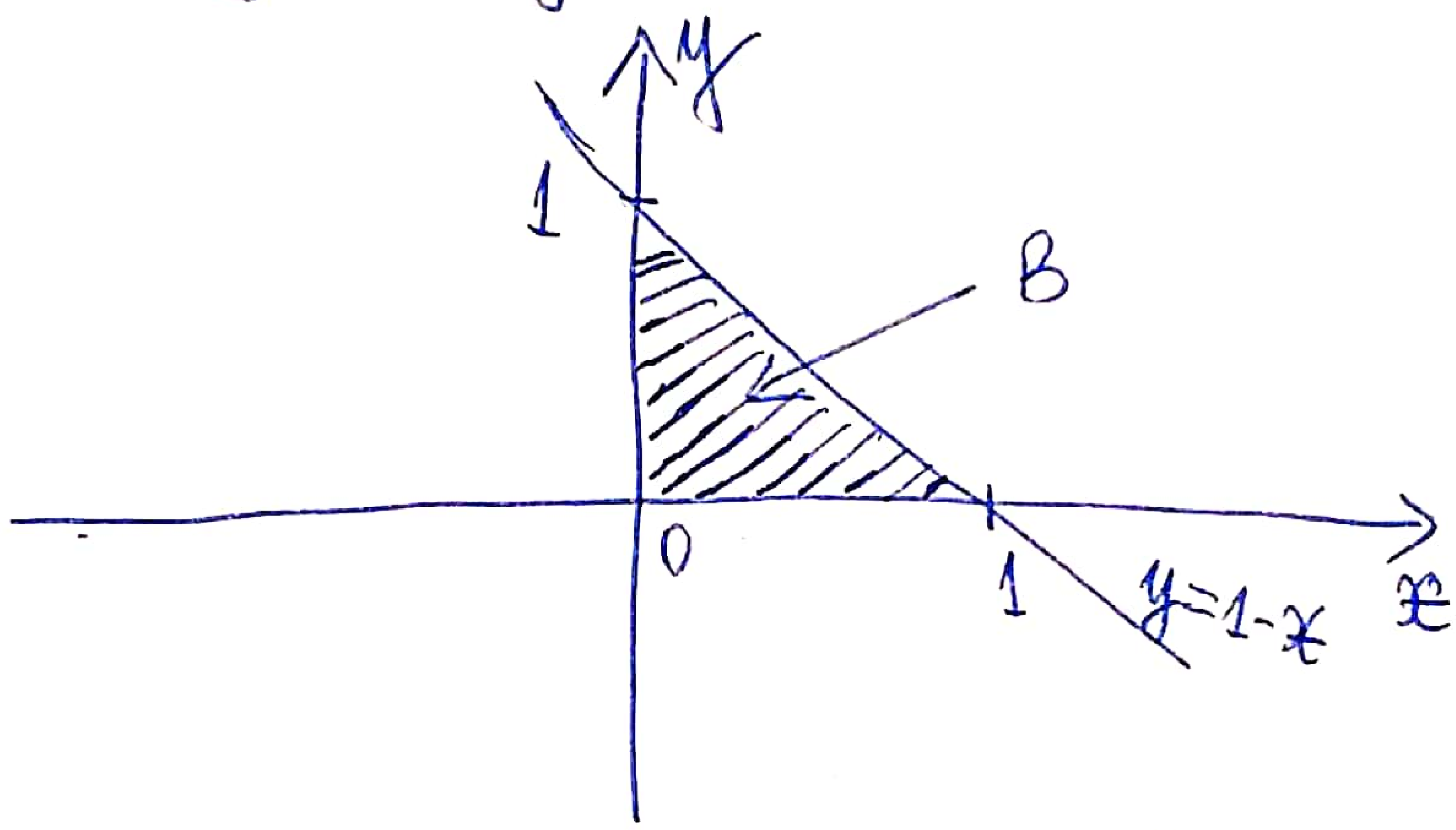
Seminar 15

1. Determinați $\iint_B e^{(x+y)^2}\,dx\,dy$, unde $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$.

Soluție. $x+y\le 1 \Leftrightarrow y\le 1-x$.



$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ 0\le y\le 1-x\}$.

Fie $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=1-x$.

α,β continue.

B este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f:B\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{(x+y)^2}$.

f continuă.

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint_B e^{(x+y)^2}\,dx\,dy=\int_0^1\Big(\underbrace{\int_0^{1-x} e^{(x+y)^2}\,dy}_{=\,?}\Big)\,dx=?$$

Fie $G \stackrel{\text{not.}}{=} \mathring{B}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y<1,\ x>0,\ y>0\}$.

Notăm $x+y=u$.

$$x=(x+y)\cdot \underbrace{\frac{x}{x+y}}_{\overset{\text{not.}}{=} v} = uv$$

$y = x+y-x = u-uv = u(1-v)$.

Deci $\forall\, x,y\in G$, $\exists!\, u,v\in(0,1)$ a.î. $\begin{cases} x=uv \\ y=u(1-v). \end{cases}$

Reciproc, $\forall\, u,v\in(0,1)$, avem $(uv, u(1-v))\in G$.

Fie $D=(0,1)\times(0,1)$ și $A=D$.

Fie $\varphi : D\to G$, $\varphi(u,v) = (\underbrace{uv}_{=\varphi_1(u,v)}, \underbrace{u(1-v)}_{=\varphi_2(u,v)})$, $\varphi_1,\varphi_2 : D\to\mathbb{R}$.

$D\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)\Rightarrow \mathrm{Fr}\,D\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(\mathrm{Fr}\,D)=0\Rightarrow \mathrm{Fr}(D)$ neglijabilă Lebesgue.

φ bijectivă (așa am construit-o).

$\varphi(u,v)=(uv, u(1-v))\Rightarrow \varphi$ de clasă C^1.

$\varphi^{-1}(x,y)=\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right)\Rightarrow\varphi^{-1}$ de clasă C^1.

Deci φ este difeomorfism de clasă C^1.

Fie $(u,v)\in A=(0,1)\times(0,1)$ și $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$d\varphi(u,v)(z_1,z_2) = {}^t\!\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2\end{pmatrix}\right] =$$

$$= {}^t\left[\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right] = \left(v z_1 + u z_2, (1-v) z_1 - u z_2\right).$$

$$\|d\varphi(u,v)(z_1,z_2)\| = \sqrt{(v z_1 + u z_2)^2 + [(1-v) z_1 - u z_2]^2} =$$

$$= \sqrt{v^2 z_1^2 + u^2 z_2^2 + 2uv z_1 z_2 + (1-v)^2 z_1^2 + u^2 z_2^2 - 2u(1-v) z_1 z_2} =$$

$$= \sqrt{[v^2 + (1-v)^2] z_1^2 + 2u^2 z_2^2 + [uv - u(1-v)] 2 z_1 z_2}.$$

$$[v^2 + (1-v)^2] z_1^2 + 2u^2 z_2^2 + [uv - u(1-v)] 2 z_1 z_2 \leq$$

$$\leq \left| [v^2 + (1-v)^2] z_1^2 + 2u^2 z_2^2 + [uv - u(1-v)] 2 z_1 z_2 \right| \leq$$

$$\leq |v^2 + (1-v)^2| z_1^2 + 2u^2 z_2^2 + |uv - u(1-v)| 2 |z_1 z_2| \leq$$

$$\underset{|z_1 z_2| \leq \frac{z_1^2 + z_2^2}{2}}{\leq} |v^2 + (1-v)^2| z_1^2 + 2u^2 z_2^2 + |uv - u(1-v)| (z_1^2 + z_2^2) =$$

$$= \alpha(u,v) z_1^2 + \beta(u,v) z_2^2 \quad (\alpha(u,v) \geq 0, \ \beta(u,v) \geq 0 \ \forall (u,v) \in A).$$

Observăm că $\exists\, M > 0$ a.î. $\alpha(u,v) \leq M^2 \ \forall (u,v) \in A$ și $\beta(u,v) \leq M^2 \ \forall (u,v) \in A$.

Deci $\|d\varphi(u,v)(z_1,z_2)\| \leq M \|(z_1,z_2)\| \ \forall (u,v) \in A, \ \forall (z_1,z_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\det J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u + uv = -u.$$

Conform Teoremei de schimbare de variabilă (Varianta 2), $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy \underset{G=\varphi(A)}{=} \iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \iint_A f(\varphi(u,v))\,|\det J_\varphi(u,v)|\,du\,dv =$$

$$= \iint_A e^{u^2}\cdot u\,du\,dv = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{u^2}\cdot u\,dv \right) du =$$

$$= \int_0^1 e^{u^2} u v \Big|_{v=0}^{v=1} du = \int_0^1 e^{u^2} u\,du = \frac{1}{2} e^{u^2} \Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{e-1}{2}.$$

B închisă $\Rightarrow B = \overline{B}$.

$B \in J(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \operatorname{Fr} B = \overline{B} \setminus \mathring{B} = B \setminus G$ este măsurabilă Jordan

și $\mu(\operatorname{Fr} B) = 0$.

Deci $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \frac{e-1}{2}$. $\square$

Integrale triple

Observații. 1) În calculul integralelor triple nu vom arăta că mulțimile pe care ~~se~~ calculează integralele sunt măsurabile Jordan (și nici compacte). De asemenea nu vom arăta că funcțiile sunt integrabile Riemann.

2) Având în vedere punctul 1) și discuția din seminarul precedent, atunci când calculăm integrale duble sau triple, singurele cazuri în care trebuie să arătam că mulțimile pe care se calculează integralele sunt măsurabile Jordan (și compacte) și că funcțiile sunt integrabile Riemann sunt acelea în care calculăm integrale duble fără schimbare de variabilă.

3) Cazurile în care calculăm integrale duble sau triple cu schimbări de variabilă non-standard (Teorema de schimbare de variabilă, variantele 1 și 2 în general) nu sunt incluse în discuțiile anterioare. În aceste cazuri, trebuie verificate ipotezele

teoremei.

2. Determinați:

a) $\iiint_A (xyz + y^2)\,dx\,dy\,dz$, unde $A = [-1, 1] \times [2,3] \times [0, 1]$.

Soluție. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xyz + y^2$.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A (xyz + y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_2^3 \left(\int_0^1 (xyz + y^2)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_2^3 \left(xy \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=1} + y^2 z \Big|_{z=0}^{z=1} \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_2^3 \left(xy \cdot \frac{1}{2} + y^2 \cdot 1 \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=3} + \frac{y^3}{3} \Big|_{y=2}^{y=3} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x}{4}(9-4) + \frac{27-8}{3} \right) dx = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=1} +$$

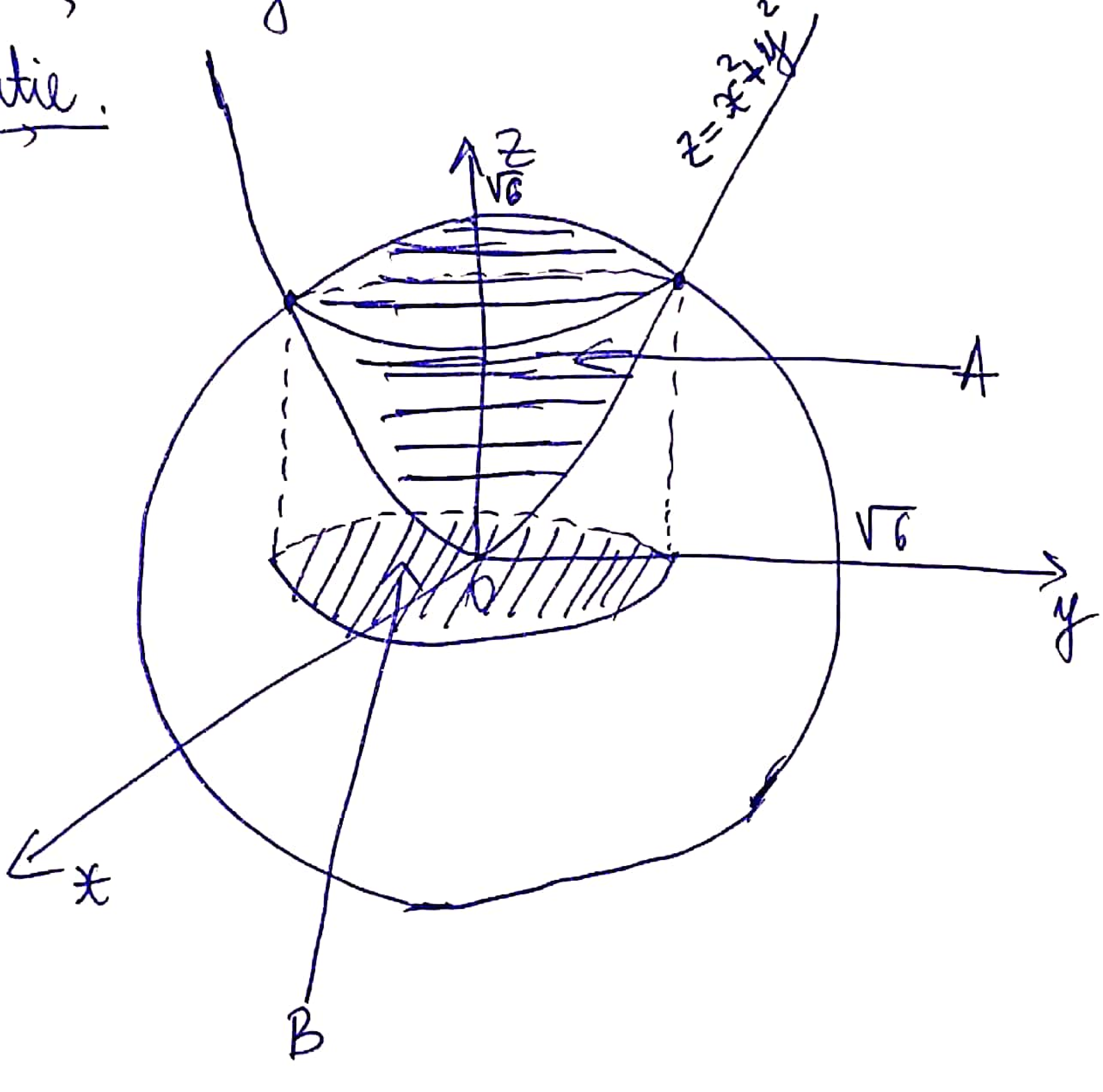
$$+ \frac{19}{3} x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0 + \frac{38}{3} = \frac{38}{3}. \ \square$$

b) $\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$, unde $A=[1,2]\times[0,1]\times[2,3]$.

Soluție. Rezolvați-l voi!

c) $\iiint_A (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, unde A este mulțimea limitată de paraboloidul de ecuație $z=x^2+y^2$ și de sfera de ecuație $x^2+y^2+z^2=6$ atunci când $z\geq 0$.

Soluție.



Determinăm intersecția dintre sferă și paraboloid.

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+(x^2+y^2)^2=6. \end{cases}$$

Notăm $t = x^2+y^2$.

$t+t^2=6 \Leftrightarrow t^2+t-6=0$.

$\Delta = 1+24=25$

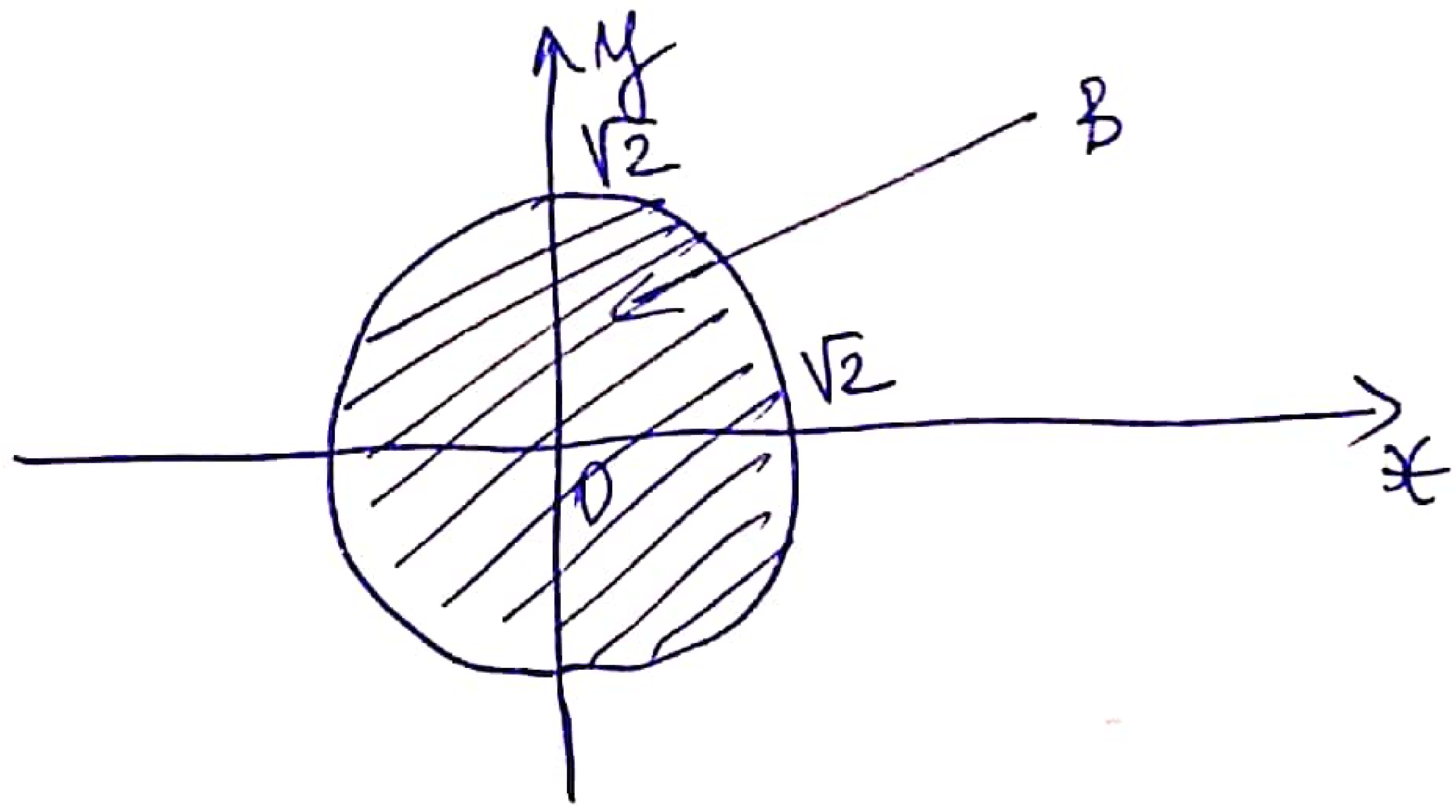
$\sqrt{\Delta}=5$.

$t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$.

Deci intersecția dintre sferă și paraboloid este cercul de ecuație $x^2+y^2=2$ situat în planul $z=2$.

Fie $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2\}$.



Deci $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ x^2+y^2 \le z \le \sqrt{6-x^2-y^2}\}$.

$$\iiint_A (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz = \iint_B \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz\right)dx\,dy =$$

$$= \iint_B (x^2+y^2)\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=x^2+y^2}^{z=\sqrt{6-x^2-y^2}} dx\,dy = \iint_B \frac{x^2+y^2}{2}\left(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right)dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_B (x^2+y^2)\left(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy.$$

Pentru a calcula această integrală dublă, trecem la coordonate polare.

S.V. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r \in [0,\infty)$, $\theta \in [0,2\pi]$.

$(x,y) \in B \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 2 \Leftrightarrow r^2 \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0,\sqrt{2}] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$.

Deci $C = [0,\sqrt{2}] \times [0,2\pi]$.

$$\frac{1}{2} \iint_B (x^2+y^2)\left(6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right) dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_C r \cdot r^2\left(6-r^2-(r^2)^2\right) dr\,d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} r^3 (6-r^2-r^4)\, d\theta \right) dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^3(6-r^2-r^4)\,\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \int_0^{\sqrt{2}} (6r^3 - r^5 - r^7)\, dr =$$

$$= \pi \left(\overset{3}{\cancel{6}} \frac{r^4}{\underset{2}{\cancel{4}}} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} - \frac{r^6}{6} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} - \frac{r^8}{8} \Big|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \right) =$$

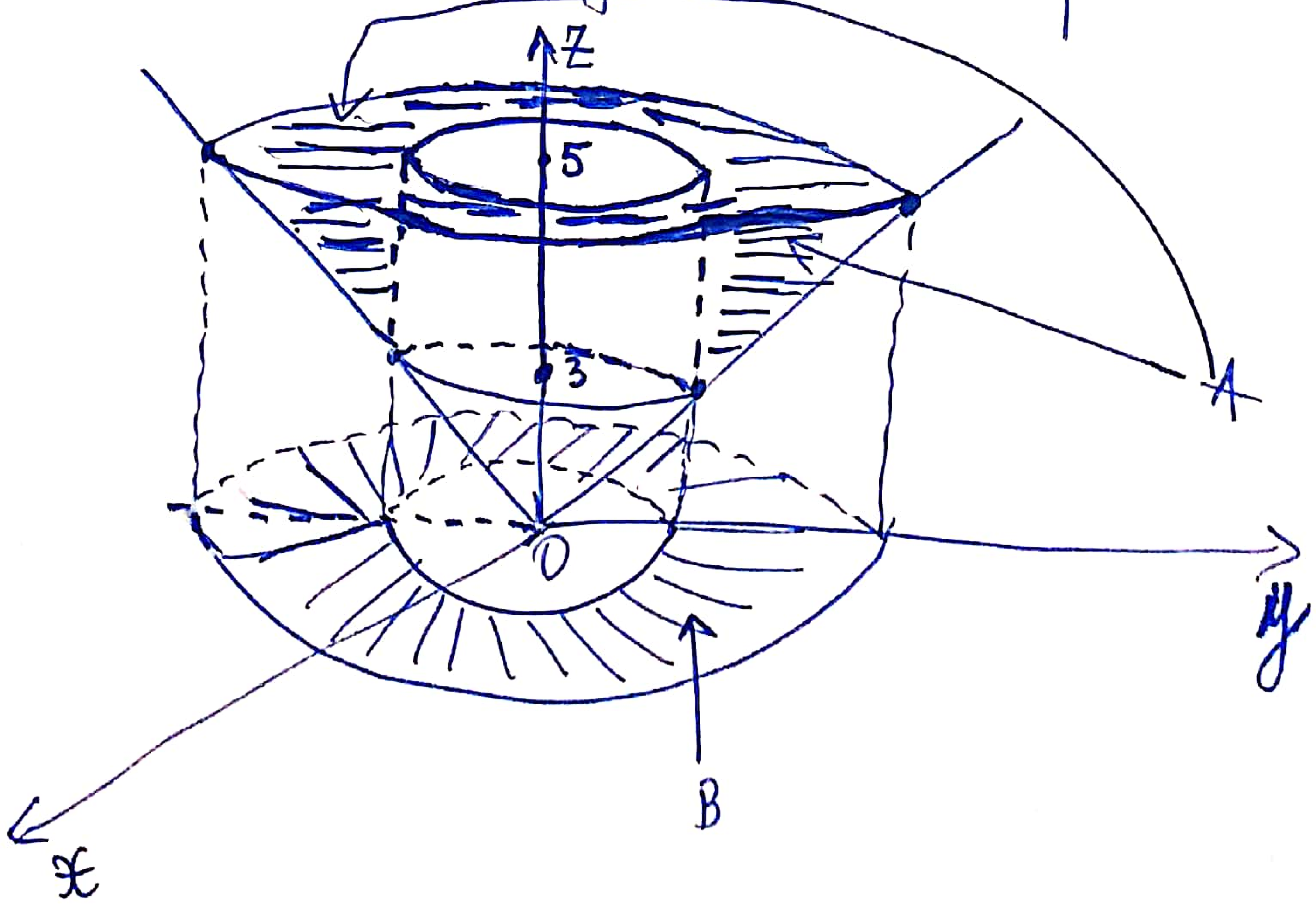
$$= \pi \left(\frac{3}{2} \cdot (4-0) - \frac{1}{6}(8-0) - \frac{1}{8}(16-0) \right) =$$

$$= \pi \left(6 - \frac{4}{3} - 2 \right) = \pi\left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}. \square$$

[<u>Observație</u>. Pentru examenul acesta, un exercițiu similar cu precedentul va fi formulat astfel: „Determinați $\iiint_A (x^2+y^2)z\,dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ x^2+y^2\le z\le \sqrt{6-x^2-y^2}\}$ și $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 2\}$", nefiind obligați să schițați mulțimea A în $\mathbb{R}^3$.]

d) $\iiint_A xyz\,dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 9\le x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 5\}$.

<u>Soluție</u>. Intersecția dintre conul $x^2+y^2=z^2$ și cilindrul $x^2+y^2=9$ este cercul $x^2+y^2=9$ situat în planul $z=3$.



Fie $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9\le x^2+y^2\le 25\}$.

$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B,\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 5\}$.

$$\iiint_A xyz\,dx\,dy\,dz=\iint_B\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{5} xyz\,dz\right)dx\,dy=$$

$$=\iint_B xy\,\frac{z^2}{2}\Big|_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=5}dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_B xy(25-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Pentru a calcula această integrală dublă, trecem la coordonate polare.

S.V. $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$.

$(x,y)\in B \Leftrightarrow 9\le x^2+y^2\le 25 \Leftrightarrow 9\le r^2\le 25 \Leftrightarrow \begin{cases} r\in[3,5] \\ \theta\in[0,2\pi]. \end{cases}$

Deci $C=[3,5]\times[0,2\pi]$.

$$\frac{1}{2}\iint_B xy(25-x^2-y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_C r\cdot r\cos\theta\, r\sin\theta\,(25-r^2)\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\iint_C r^3(25-r^2)\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta=$$

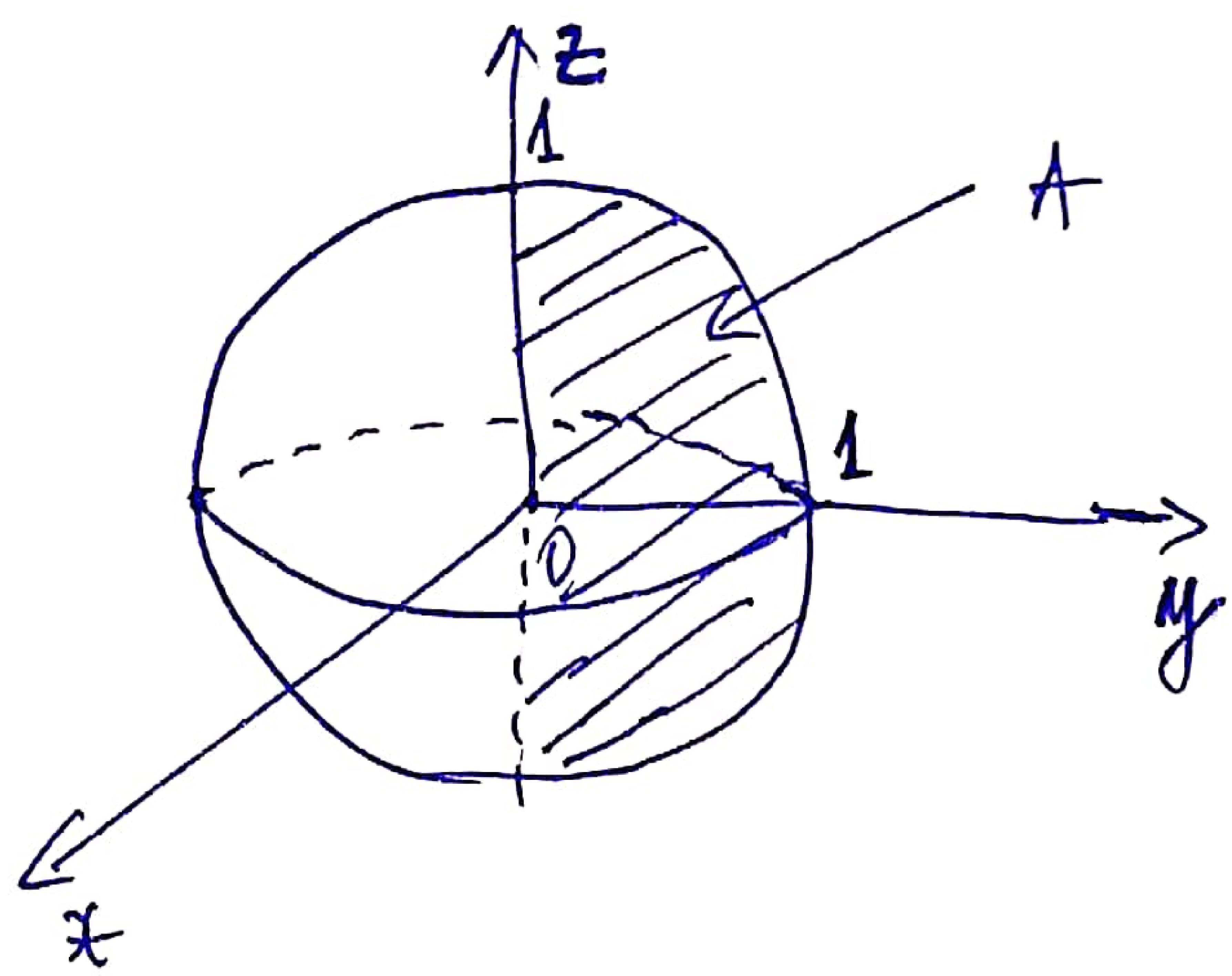
$$=\frac{1}{2}\int_3^5\left(\int_0^{2\pi} r^3(25-r^2)(\sin\theta)'\sin\theta\,d\theta\right)dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int_3^5 r^3(25-r^2)\,\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}dr=\frac{1}{2}\int_3^5 0\,dr=0.\ \square$$

<u>Observație.</u> Pentru examenul acesta, un exercițiu similar cu precedentul va fi formulat astfel: „Determinați $\iiint_A xyz\,dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in B, \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 5\}$ și $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9\le x^2+y^2\le 25\}$", nefiind obligați să schițați mulțimea A în $\mathbb{R}^3$.

e) $\iiint_A x\,dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 1, y\ge 0\}$.

<u>Soluție.</u>



Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x$.

S.V. $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$.

$$(x,y,z)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 1 \\ r\sin\theta\sin\varphi\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 1 \\ \sin\theta\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\in[0,1]. \\ \theta\in[0,\pi]. \\ \varphi\in[0,\pi]. \end{cases}$$

Deci $C=[0,1]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint_C r^2\sin\varphi\, f(r\cos\theta\sin\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\iiint_C r^2\sin\varphi\, r\cos\theta\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^\pi\left(\int_0^\pi r^3\cos\theta\sin^2\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^\pi r^3\cos\theta\left(\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr.$$

$$\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi=\int_0^\pi \sin\varphi\sin\varphi\,d\varphi=\int_0^\pi \sin\varphi(-\cos\varphi)'\,d\varphi=$$

$$=-\sin\varphi\cos\varphi\Big|_0^\pi+\int_0^\pi(\cos\varphi)(\cos\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi}(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=\pi-\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

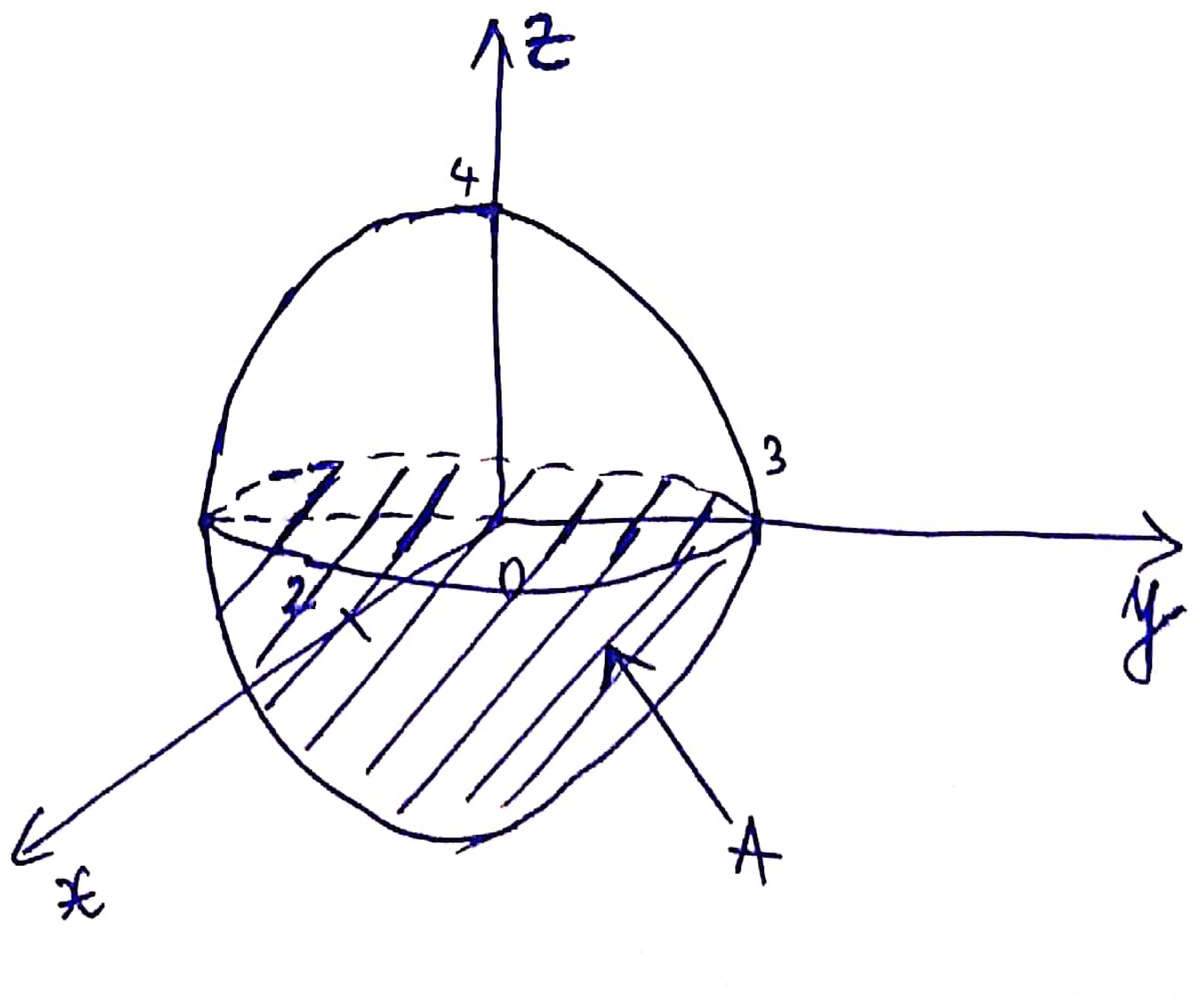
$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi} r^3\cos\theta\left(\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{\pi}(r^3\cos\theta)\,\frac{\pi}{2}\,d\theta\right)dr=\int_0^1\frac{\pi}{2}\,r^3\sin\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi}dr=$$

$$=\int_0^1 0\,dr=0.\ \square$$

f) $\iiint_A\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\right)dx\,dy\,dz$, unde $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\leq 1,\ z\leq 0\}$.

Soluție.



Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.

S. V. $\begin{cases} x = 2r\cos\theta\sin\varphi \\ y = 3r\sin\theta\sin\varphi \\ z = 4r\cos\varphi \end{cases}$, $r\in[0,\infty)$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\varphi\in[0,\pi]$.

$(x,y,z)\in A \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\le 1 \\ z\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2\le 1 \\ r\cos\varphi\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r\in[0,1] \\ \theta\in[0,2\pi] \\ \varphi\in[\frac{\pi}{2},\pi]. \end{cases}$

Deci $C = [0,1]\times[0,2\pi]\times[\frac{\pi}{2},\pi]$.

$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$= \iiint_C 2\cdot 3\cdot 4\, r^2 \sin\varphi\, f(2r\cos\theta\sin\varphi,\ 3r\sin\theta\sin\varphi,\ 4r\cos\varphi)\,dr\,d\theta\,d\varphi =$

$= \iiint_C 24r^2\sin\varphi\ r^2\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 24r^4\sin\varphi\,d\varphi\right)d\theta\right)dr =$

$= \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} 24r^4(-\cos\varphi)\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\pi}\,d\theta\right)dr = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} 24r^4(1-0)\,d\theta\right)dr =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 24 r^4 \, d\theta \right) dr = \int_0^1 24 r^4 \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr =$$

$$= 48\pi \int_0^1 r^4 \, dr = 48\pi \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=5} = \frac{48\pi}{5}. \ \square$$

<u>Observație</u>. Pentru examenul acesta, la exerciții similare cu cele din subpunctele e) și f), nu sunteți obligați să schițați mulțimea A în $\mathbb{R}^3$.