Algebra ~ Model examen ~

Problema: Fie idealul $I = (X^3, X^5)$ al inelului de polinoame $\mathbb{Q}[X]$

(1) Un ex de polinom care $\in I$ și are 4 termeni nenuli

$$I = (X^3, X^5) = \{ \underbrace{X^3 f(x) + X^5 g(x)}_{X^3 [f(x) + X^2 g(x)]} \mid f, g \in \mathbb{Q}[X] \} = (X^3)$$

deci idealul este generat de fapt doar de X^3

Rez: Ex: $X^3(1 + X + X^2 + X^3) \in I$

$X^5 \in (X^3)$, $X^5 = X^3 \cdot X^2$

$\underline{X^3}(1+X) + \underline{X^5}(1+X^2) \in I$ (dacă nu am obs asta)

etc

(2) Dați un ex de polinom care $\notin I$ și are 3 termeni nenuli.

Rez: $X^2 + X + 1$

! Pt punctaj, treb să justificăm aici

Pp. $X^2 + X + 1 = X^3 f(x) + X^5 g(x) \Rightarrow \ldots \; 1 = 0$ Fals
(prin absurd)

(4) Este adev că $I = (X^3)$ și $I = (X^5)$?

Rez: $I = (X^3)$ Da, pt că $X^5 \in (X^3)$

$I = (X^5)$ Nu, deoarece $X^3 \notin (X^5)$

(4) Det. elementele nilpotente din inelul factor $\mathbb{Q}[X]/I$.

Rez: $N\left(\mathbb{Q}[X]/_{(X^3)}\right) = ?$

$\mathbb{Q}[X]/_{(X^3)}$ = clase ~~cu ideal~~ de grad cel mult 2 = $\{\underbrace{\overline{aX^2+bX+c}}_{\text{polinom}} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ polinom.

$\overline{f(X)} = \cancel{\overline{X^3 g(X)}} + \overline{r(X)}$, $\overline{X^3}=\bar{0}$

$\deg r \leq 2$.

V1:

$\left(\overline{aX^2+bX+c}\right)^n = \bar{0}$

$\overline{X^3} = \bar{0}$

$\Rightarrow \left(\overline{aX^2+bX+c}\right)^n = \overline{\alpha X^2 + \beta X + c^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow c^n = 0$

$\Rightarrow N\left(\mathbb{Q}[X]/_{(X^3)}\right) = \{\overline{aX^2+bX} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

V2: $\Leftrightarrow (aX^2+bX+c)^n \in (X^3$

$(aX^2+bX+c)^n = X^3 u(X)$

$X \to 0 \Rightarrow c = 0$.

(5) Det. elementele idempotente din inelul factor $\mathbb{Q}[X]/I$.

$\overline{aX^2+bX+c}^{\,2} = \overline{aX^2+bX+c}$

$\Leftrightarrow \overline{a^2X^4 + b^2X^2 + c^2 + 2abX^3 + 2acX^2 + 2bcX} = \overline{aX^2+bX+c}$

$$(2ac+b^2-a)x^2+(2bc-b)x+c^2-c=\bar{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2ac+b^2=a \\ 2bc=b \\ c^2=c \Rightarrow c\in\{0,1\} \end{cases}$$

Caz I: $\underline{c=0} \Rightarrow \underline{b=0} \Rightarrow \underline{a=0}$

Caz II: $\underline{c=1} \Rightarrow 2b=b \Rightarrow \underline{b=0} \Rightarrow 2a=a \Rightarrow \underline{a=0}$.

$\Rightarrow Idemp(\mathbb{Q}[x]/(x^3))=\{0,1\}$.

(6) Sunt izomorfe inelele $\mathbb{Q}[x]/I$ și $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$? Justificați.

$\mathbb{Q}[x]/(x^3)\simeq\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$?

Rez: Folosim (4) și (5) ?.
(sau)

$\underline{V_1}$: Dim (4): pt $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: $(q_1,q_2)^n=(0,0)\Leftrightarrow(q_1^n,q_2^n)=(0,0)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q_1=q_2=0 \Rightarrow N(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})=\{(0,0)\}$.

$\underline{V_2}$: Dim (5): $Idem(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})$.

$(q_1,q_2)^2=(q_1,q_2)$ ← ? Def

$\Rightarrow q_1,q_2\in\{0,1\} \Rightarrow Idem(\mathbb{Q}\times\mathbb{Q})=\{(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)\}$

Problema 2: Fie $P(X) = X^4 - X^2 + 1$. cu răd complexe $\alpha_1 \dots \alpha_4$.

(1) Descompuneți $P(X)$ în factori ireductibili peste fiecare din corpurile ~~$\alpha_1 \dots \alpha_4$~~. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

① $\mathbb{R}$: $X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2+1)^2 - \underbrace{3X^2}_{(\sqrt{3}X)^2} =$

$= \underbrace{(X^2 - \sqrt{3}X + 1)}_{\Delta < 0} \underbrace{(X^2 + \sqrt{3}X + 1)}_{\Delta < 0}$

② peste $\mathbb{Q}$: (Caut răd raționale):

pas 1:

$P(1) = 1$
$P(-1) = 2$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ nu are răd raționale. ~~și peste~~

pas 2:

Dacă P este reductibil peste $\mathbb{Q}$ atunci

$P(X) = (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d)$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$

$P(X) = (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ Fals.

③ peste $\mathbb{Z}_2$: $P(X) = X^4 + X^2 + \hat{1}$. // - îl schimbăm cu +.

$f(X) = X^2 + X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_2[X]$ ireductibil.

$f(\hat{0}) = \hat{1}$

$f(\hat{1}) = \hat{1}$

④ peste $\mathbb{Z}_3$: $P(X) = X^4 - X^2 + \hat{1} \in \mathbb{Z}_3[X]$.

$P(X) = X^4 + \hat{2}X^2 + \hat{1} = \underbrace{(X^2 + \hat{1})^2}_{\text{ireductibil}}$.

$= \left(\frac{x+1}{2}\right)^4 - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1.$

Problema 3: Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\in S_7$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_7.$$

(1) Desc în produs de cicli disjuncți:

$$\sigma = \underbrace{(1\,2\,5\,6)}_{4}\underbrace{(3\,7\,4)}_{3}$$

(2) Aflați $\underbrace{ord(\sigma)}_{}$ și calc σ^{2020}

cmmmc (lungimile ciclilor) $\to ord(\sigma) = 12$.

$$\begin{array}{r|l} 2020 & 12 \\ 12 & 168 \\ \hline 82 & \\ 72 & \\ \hline 100 & \\ 96 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow \sigma^{2020} = \sigma^4 = \underbrace{(1\,2\,5\,6)^4}_{e} \cdot (3\,7\,4)^4 =$

$= \boxed{(3\,7\,4)}$

$\underbrace{(3\,7\,4)^3}_{e} \cdot (3\,7\,4)$

(3) ~~$x^2=\ldots$ Este adev. e~~ $\exists\, x \in S_7$ cu proprietatea

~~$x=?$~~ cu $x^3 = \sigma$? Justificați.

Rez: $x^3 = (1\,2\,5\,6)(3\,7\,4)$ Nu există.

$x^3 = \tau_1^3 \ldots \tau_4^3$

$f(X) = X^2 + \hat{1} \hat{3}$

$f(\hat{0}) = \hat{1} \quad f(\hat{2}) = \hat{2}$.

(2) Calculați $\alpha_1^5 + \ldots + \alpha_4^5$

~~R~~

$\cancel{\alpha_1^5 = \alpha_1}$ Rez: Relațiile lui Viette.

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_4 = 0.$

$\alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_3\alpha_4 = -1.$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots = 0.$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 1.$

$\alpha_i^5 - \alpha_i^3 + \alpha_i = 0.$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^5 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^3 - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}_{0} \Rightarrow$$

(3) Determ. coeficienții unui polinom menit care să aibă rădăcini pe $2\alpha_1 - 1, \ldots 2\alpha_4 - 1$.

varianta

$Q(X) = X^4 - S_1(2\alpha_i - 1)X^3 + S_2(2\alpha_i - 1)X^2 - S_3(2\alpha_i - 1)X + S_4(2\alpha_i - 1)$

Rez: $2\alpha_i - 1 = \beta_i$

$\alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{2}$

$P(\alpha_i) = 0.$

$Q(2\alpha_i - 1) = 0.$
$\quad \overset{\shortparallel}{\beta_i}$

$Q(X) = P\left(\frac{X+1}{2}\right)$.
$\downarrow$
$2\alpha_i - 1$

Problema 4: $G = U(\mathbb{Z}_{48}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}, \dots\}$.

(1) $|G| = \varphi(48) = \varphi(2^4 \cdot 3) = 2^3 \cdot 2 = 16$.

(2) $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

$ord(\hat{5}) = 4$.

$ord(\hat{7}) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{\varphi : G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4} \\ \cancel{\varphi(\hat{k}) = (\bar{k}, \bar{k}, \bar{\bar{k}})} \end{array}\right\}$$ Aşa nu!

(3) În G considerăm subgrupul $H = \langle \hat{5} \rangle$. Determ ordinul lui H.

(4) Cu ce grup este izomorf G/H?

Rez: $ord(H) = ord\langle \hat{5} \rangle = 4$.

Rez: $|G/H| = \frac{16}{4} = 4$ (are 4 elemente)

~~Este în~~ $\mathbb{Z}_4$ sau ~~$\mathbb{Z}_2$?~~

$G/H \simeq \mathbb{Z}_4$ sau $\underline{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$??

asta!

$\Rightarrow [G:H] = 4 \Rightarrow G = H \cup \hat{7}H \cup \hat{17}H \cup ?H$.

$\cancel{31}$ 23

~~$7 \cdot 31 = 217 \equiv 17 \pmod{48}$~~

$7 \cdot 23 = 161 = 17 \pmod{48}$

Ex: $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{12}$.

a) $H = \langle (\bar{2}, \bar{3}) \rangle$

b) ord $H = 12$

c) $(G/H) = 6$

d) $G/H \simeq$? $\Rightarrow G/H \simeq \mathbb{Z}_6$.

! Grupurile comutative cu $\underline{6}$ elemente sunt izomorfe cu $\mathbb{Z}_6$.

valabil pt orice n.