Diferențiabilitate. Derivate parțiale.

1 Criteriul de diferențiabilitate

Dacă derivatele parțiale ale func. f sunt continue pe A și A deschisă, atunci f este diferențiabilă pe A.

2. Aflarea deriv parțiale în punctul $a \in \mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

ex: $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$

$e_2 = (0,1)$

$$te_1 = t(1,0) = (t,0)$$

$f(x) = 3x+1$

f cont. pe $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3$

$f(x,y)$

$= 0$

$\dots \frac{\partial f(a)}{\partial x_m}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$+ \dots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$

3. Diferențiabilitate ($a \in \mathbb{R}^n$)

$$\lim_{x \to a} \frac{\| f(x) - f(a) - T(x-a) \|}{\| x-a \|} = 0$$

$\| x-a \| \to$ norma

$\| (2,3) \| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

4. Diferențiala

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \; \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$u = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$

$$T = df(a) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \ldots + u_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Diferențiabilitate. Derivate

1. Criteriul de diferențiabilitate

Dacă derivatele parțiale ale func. f sunt continue pe A și A deschisă, atunci f este diferențiabilă pe A

2. Aflarea deriv. parțiale în punctul $a \in \mathbb{R}^n$ $(x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$$

$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$

ex: $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$

$e_2 = (0, 1)$

$t e_1 = t(1,0) = (t, 0)$

① Să se studieze diferențiabilitatea funcției
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Soluție:

→ $\boxed{1}$ Studiem continuitatea funcției

f e continuă pe $\mathbb{R}^2$ (operații cu fct cont)

→ $\boxed{2}$ Verificăm prin calcul $\exists$ derivatelor parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(x\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=(x)'_x\sqrt{x^2+y^2}+x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}+x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(x\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

(*) Dacă avem puncte pt care derivatele nu sunt definite, calculăm cu definiția

$e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$

$$\lim_{t_1\to 0}\frac{f(t_1,0)-f(0,0)}{t_1}=\lim_{t_1\to 0}\frac{t_1\sqrt{t_1^2}-0}{t_1}=\lim_{t_1\to 0}|t_1|=0 \Rightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\lim_{t_2\to 0}\frac{f(0,t_2)-f(0,0)}{t_2}=\lim_{t_2\to 0}\frac{0\cdot\sqrt{0^2+t_2^2}-0}{t_2}=0 \Rightarrow \exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$\Rightarrow$ f admite derivate parțiale pe $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow$ $\boxed{3}$ Studiem diferențiabilitatea pe mulțimea unde $\exists$ toate derivatele parțiale

$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, (op. cu fct cont)

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ e cont pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e mult. deschisă

$\Rightarrow$ f e diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

(*) Dacă avem puncte pt care am calculat separat derivatele parțiale, acum studiem cu definiția diferențiabilitatea

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(u,v) = u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x\sqrt{x^2+y^2} - 0 - \overset{0}{\boxed{T(x,y)}}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}} = 0$$

$\Rightarrow$ f e diferențiabilă în $(0,0)$ (2)

$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ f e diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$(0,0)\}$

→ calculam $df(2,1)$ (ob: o funcț)

$$df(2,1)(u,v) = u \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + v \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$df(2,1)(u,v) = u \cdot \left(\sqrt{5} + \frac{4}{\sqrt{5}}\right) + v \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \boxed{u \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} + v \, \frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{5}}\, du + \frac{2}{\sqrt{5}}\, dv$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

a) Stud. cont.
b) Aflați deriv. parțiale
c) Stud. diferențiabilitatea

a) Din Teorema 5 $\Rightarrow$ continuă pe $\mathbb{R}^2$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{x^5 y^2}{x^8 + y^4}\right)'_x = \dfrac{5x^4y^2 \cdot (x^8 + y^4) - x^5y^2(8x^7 + 0)}{(x^8 + y^4)^2} = \dfrac{5x^4y^6 - 3x^{12}y^2}{(x^8 + y^4)^2}\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((0,0) + te_1) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t,0) - 0}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\frac{t^5\, 0^2}{t^8 + 0^4}}{t} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^4y^6 - 3x^{12}y^2}{(x^8 + y^4)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2yx^{8}-2y^{5}x^{5}}{(x^{8}+y^{4})^{2}} \quad (\text{calcule}) \ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+te_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^5\, t^2}{0^8+t^4}}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2yx^{8}-2y^{5}x^{5}}{(x^{8}+y^{4})^{2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ cont pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ deschisă
$\Rightarrow f$ diferențiabilă în $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Studiem dif. lui f în $(0,0)$

fie $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $T(u,v)=u\cdot\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0}+v\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}=0$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^2}{x^8+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Stud. cont.
b) Aflați deriv. parțiale
c) Stud. diferențiabilitatea

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{x^5y^2}{x^8+y^4} - 0 - 0\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^5y^2|}{(x^8+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n^5 y_n^2|}{(x_n^8+y_n^4)\sqrt{x_n^2+y_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^5}\cdot\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^8}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{2}$$

Așadar $L \neq 0 \Rightarrow f$ nu e dif. în $(0,0)$

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$ a.î. f e de 2 ori dif. în x_0

Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se num. Hessiana funct. f în x_0.

$n=2$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix}$

<u>Criteriul lui Sylvester</u>

$$\Delta_k = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \le i,j \le k}$$

a) Dacă $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ e minim local

b) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ e maxim local

c) $\Delta_1, \dots, \Delta_n \ge 0$ sau $\Delta_1 \le 0, \Delta_2 \ge 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \ge 0$, $\exists i$ a.î. $\Delta_i = 0 \Rightarrow$ criteriul nu se pronunță

d) Altfel, x_0 nu e pct. de extrem local

$D_3 = \{$ pctele în care criteriul se pronunță $\}$

" ——— \|/4 ——— ; ——— $\}$

$D_4 = \{$ ———

Dacă $D_4 \neq \emptyset$, studiem cu definiția, $f(x,y) - f(x_0, y_0)$

⑥ $E \subseteq D_f \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

Algoritm de det al pct de extrem local

① Se studiem continuitatea și descriem $D_f = \{x \mid f \text{ e discont în } x\}$.

(f cont pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_f = \emptyset$)

② Se studiază diferențiabilitatea funcției și descriem $D_1 = \{x \mid f \text{ nu e diferențiabilă}\}$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ cont pe } \mathbb{R}^2 \right) \Rightarrow f \text{ dif pe } \mathbb{R}^2 \Rightarrow D_1 = \emptyset$)

$\mathbb{R}^2$ mult. desc

③ Se det pctele critice rezolvând sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$ $C = \{x \mid x \text{ pct crit}\}$

④ Se studiază dif de ordin 2 și descriem $D_2 = \{x \mid f \text{ nu e dif de 2 ori}\}$

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \right)$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$

⑤ Aplicăm criteriul lui Sylvester;

$\Delta_1 = a_{11}$; $\Delta_2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$