CURS 2

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

PRELIMINARII - CONTINUARE

Definiţie.

O funcţie este un triplet (A, B, R), unde A şi B sunt mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relaţie cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcţie (A, B, R) prin $f : A \to B$, simbolul f având semnificaţia: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \to B$ este definită pe A cu valori în B, A se numeşte domeniul de definiţie al funcţiei f şi B domeniul valorilor lui f.

Definiţie.
O funcţie parţială de la A la B este o funcţie $f : C \to B$, unde C este o submulţime a lui A.

Notaţie.

- B^A este mulţimea funcţiilor de la A la B.
- Fie $f : A \to B$ o funcţie, $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$.
  - $f(A)$ este imaginea lui f.
  - $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f
  - $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.

Definiţie.

Fie $f : A \to B$ o funcţie.

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă şi surjectivă.

Definiţie.

Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcţia identitate a lui A este funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

Definiţie.
O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

Exerciţiu.
O funcţie este bijectivă ddacă este inversabilă.

Definiţie.
Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecţie $f : A \to B$. Notăm acest fapt prin $A \sim B$.

Exerciţiu.
A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A.
De aceea, spunem de obicei că A şi B sunt echipotente.

Definiţie.

Fie A, T mulţimi a.î. $A \subseteq T$. Funcţia caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăţi.

Dacă A, $B \subseteq T$ şi $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Fie I o mulţime nevidă.

Definiţie.

Fie A o mulţime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcţie $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie şi $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Definiţie.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulţime A_i, obţinem o familie (indexată) de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulţimi ale unei mulţimi T. Reuniunea şi intersecţia familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Fie I o mulţime nevidă şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi.

Definiţie.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se defineşte astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} \\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, funcţia $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numeşte proiecţie canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exerciţiu.

Fie I, J mulţimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ şi } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

Fie $n \geq 1$ un număr natural, $I = \{1, \ldots, n\}$ şi $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un *n*-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ şi $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiţie.

O relaţie n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulţime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Dacă R este o relaţie n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

O relaţie n-ară pe A este o submulţime a lui A^n.

Principiul bunei ordonări.

Orice submulţime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Principiul inducţiei.

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ şi

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n+1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) şi (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Fie n_0 cel mai mic element din $\mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Deoarece $n_0 - 1 \in S$, din (ii) rezultă că $n_0 \in S$. Am obţinut o contradicţie. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Observaţie.

Principul bunei ordonări şi principiul inducţiei sunt echivalente.

Principiul inducţiei (forma tare).

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ şi

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Demonstraţie. Aplicăm Principiul inducţiei pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \ldots, n\} \subseteq S\}.$$

Obţinem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \ldots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Fie $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate).
$P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

Principiul inducţiei.

- Pasul iniţial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducţie. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducţie. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducţiei (forma tare).

- Pasul iniţial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducţie. Pres. că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducţie. Demonstrăm că $P(n+1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţie.
O mulţime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulţime finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

Propoziţie.

(i) Orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

(ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

(iii) $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.

(iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este mulţime numărabilă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Principiul diagonalizării.
Fie R o relaţie binară pe o mulţime A şi $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x, x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a, x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Demonstraţie. Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a, a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicţie.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a, a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicţie.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. $\square$

Teoremă Cantor.
Nu există o bijecţie între $\mathbb{N}$ şi mulţimea $2^{\mathbb{N}}$ a părţilor lui $\mathbb{N}$.
În concluzie, $2^{\mathbb{N}}$ nu este mulţime numărabilă.

Demonstraţie. Presupunem că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots, \}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relaţia binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i, j) \mid j \in f(i)\} = \{(i, j) \mid j \in S_i\}$$

şi aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n, n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i, j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \qquad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ şi f este bijecţie, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) = S_k = R_k$.
Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obţinut o contradicţie. $\square$

Fie A o mulţime nevidă şi $R \subseteq A \times A$ o relaţie binară pe A.

Notaţie.

Scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ şi $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

Definiţie

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

  xRy şi yRx implică $x = y$.
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,

  xRy şi yRz implică xRz.
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Definiţie.
Fie A o mulţime nevidă. O relaţie binară $R \subseteq A \times A$ se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Exemplu.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relaţia $\equiv(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel:

$$\equiv(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

Relaţia $\equiv(\text{mod } n)$ se numeşte congruenţa modulo n. Folosim notaţia $x \equiv y(\text{mod } n)$ pentru $(x, y) \in \equiv(\text{mod } n)$.

Exemplu.
Fie $f : A \to B$ o funcţie. Definim relaţia $\ker f \subseteq A \times A$ astfel:

$$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

$\ker f$ se numeşte nucleul lui f.

Notaţii.

Vom nota relaţiile de echivalenţă cu $\sim$.
Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ şi $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

Definiţie.

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalenţă $[x]$ a lui x este definită astfel:

$$[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Definiţie.

Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă distincte ale elementelor lui A se numeşte mulţimea cât a lui A prin $\sim$ şi se notează $A/\sim$.

Aplicaţia $\pi : A \to A/\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numeşte funcţia cât.

Exemplu.
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv(\text{mod } 2)$:

- $[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[1] = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[2n] = [0]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$
- $[2n + 1] = [1]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Propoziţie.
Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă. Atunci

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie A o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

Definiţie.
Un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$ este o submulţime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Exemplu.
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv (\text{mod } 2)$.

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Sisteme de reprezentanţi: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Propoziţie.
Fie X un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.
Atunci $A = \bigcup_{x \in X} [x]$ şi $A/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie A o mulţime nevidă.

Definiţie.

O partiţie a lui A este o familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi nevide ale lui A care verifică proprietăţile:

- $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ şi
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$.

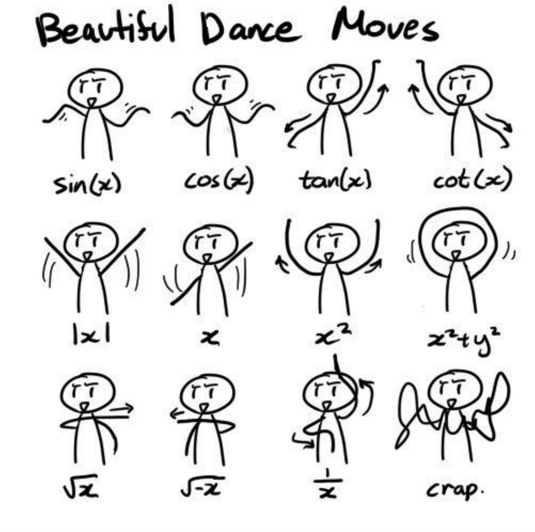
Partiţia $(A_i)_{i\in I}$ se numeşte finită dacă I este finită.

Fie A o mulţime nevidă.

Propoziţie.
Există o bijecţie între mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A şi mulţimea partiţiilor lui A:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiţie a lui $A \mapsto$ relaţia de echivalenţă pe A definită prin:
$$x \sim y \ \text{ ddacă } \ \text{există } i \in I \ \text{ a.î. } x, y \in A_i.$$
- $\sim$ relaţie de echivalenţă pe $A \mapsto$ partiţia $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.

Demonstraţie. Exerciţiu.



Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.