Algebră

SEMINAR 1

Mulțimi

A, B mulțimi, $a \in A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

1. Notăm cu A mulțimea matricelor $2 \times 2$ cu intrări în mulțimea nr. reale.

$B = \left\{ X \in A : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

a) Verificați dacă elem $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (F) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~B∉~~ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin B$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in B$

b) Arătați că:

$B = \left\{ X \in A : (\exists)\, x, y \in \mathbb{R} \text{ a.î. } X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \right\} = C$

$A = M_2(\mathbb{R}),\ B = \left\{ X \in A \mid X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X \right\}$

$B = C \Leftrightarrow B \subseteq C$ și $C \subseteq B$

Fie 1) $C \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in C, x \in B$

Fie $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in C,\ x, y \in \mathbb{R}$

$M \in B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ (A) $\Rightarrow M \in B \Rightarrow C \subseteq B$

2) $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x \in B, x \in C$

Fie $M \in B \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a.î.

$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a+c \\ a+b = b+d \\ c+d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=d \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow M \in C \Rightarrow B \subseteq C$

Din 1) și 2) $\Rightarrow C \subseteq B$ și $B \subseteq C \Leftrightarrow B = C$

c) Dacă $\mathcal{Y} = \{X \in A \mid \det(X) \neq 0\}$, atunci verificați dacă $B \subset \mathcal{Y}$

$B \subset \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall X \in B, X \in \mathcal{Y}$

$X \in B \xRightarrow{b} X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \; x, y \in \mathbb{R}$

$\det(X) = \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & x \end{vmatrix} = x^2$

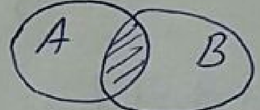
Pt $x = 0 \Rightarrow \det X = 0$ cu $X = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \Rightarrow B \not\subset \mathcal{Y}$

## Operații cu mulțimi

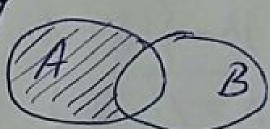
Fie $A, B, C$ - 3 mulțimi

1) Reuniunea $A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$


2) Intersecția $A \cap B = \{x \mid x \in A$ și $x \in B\}$




3) Diferența $A \setminus B = \{x \mid x \in A$ și $x \notin B\}$




4) Diferența simetrică $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$


5) Produsul cartezian $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ și $b \in B\}$

## Proprietăți

1) Asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2) Comutativitate: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$
$\emptyset \cup A = A \cup \emptyset = A$

3) Distributivitate: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ și $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

I $(A\cup B)\cup C \subseteq A\cup(B\cup C)$

Fie $x\in(A\cup B)\cup C \Rightarrow (x\in A$ sau $x\in B)$ sau $x\in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A$ sau $x\in B$ sau $x\in C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A$ sau $(x\in B$ sau $x\in C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in A\cup(B\cup C) \Rightarrow (A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$

II $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$

Fie $x\in A\cup(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ sau $x\in(B\cup C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A$ sau $(x\in B$ sau $x\in C) \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in A$ sau $x\in B$ sau $x\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow (x\in A$ sau $x\in B)$ sau $x\in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(A\cup B)\cup C \Rightarrow A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$

Din I și II $\Rightarrow (A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

$\begin{cases} 0, a\notin M \\ 1, a\in M \end{cases}$

| A | B | C | $A\cap B$ | $(A\cap B)\cap C$ | $B\cap C$ | $A\cap(B\cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Conform tabelului $\Rightarrow (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

| A | B | C | $A\cap B$ | $A\cap C$ | $B\cup C$ | $A\cap(B\cup C)$ | $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Conform tabelului $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

---

E - o mulțime, $A\subseteq E$

Complementara lui A în E: $C_E A = E\setminus A$

Regulile lui De Morgan:

$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

$C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

| $A$ | $B$ | $C_E A$ | $C_E B$ | $A \cup B$ | $C_E(A \cup B)$ | $C_E A \cap C_E B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Conform tabelului $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$

2. Determinați mulțimile $A, B$ dacă $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap B = \{4,5\}$, $A \setminus B = \{1,2,3\}$

$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

$B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$

3. Să se calculeze $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$ dc. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-7| + |x+7| = 14\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| + |x-9| = 14\}$

$A$: $x \in (-\infty, -7]$ $\quad 7 - x - 7 - x = 14$
$\qquad -2x = 14 \Rightarrow x = -7$ (A) (1)

$x \in (-7, 7)$ $\quad 7 - x + x + 7 = 14$ (A), $\forall x \in (-7, 7)$ (2)

$x \in [7, \infty)$ $\quad x - 7 + x + 7 = 14 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ (A) (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow A = [-7, 7]$

$B$: $x \in (-\infty, -5]$ $\quad -x - 5 - x + 9 = 14 \Leftrightarrow -2x = 10$
$\qquad x = -5$ (A) (4)

$x \in [9, \infty)$ $\quad x + 5 + 9 - x = 14 \Leftrightarrow 0 = 0$ (A) $\Rightarrow x \in (-5, 9)$ (5)

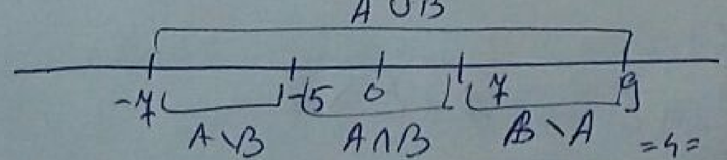
$x \in [9, \infty)$ $\quad x + 5 + x - 9 = 14 \Leftrightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$ (A) (6)

Din (4), (5), (6) $\Rightarrow B = [-5, 9]$

$A \cup B = [-7, 7] \cup [-5, 9] = [-7, 9]$ $\quad A \setminus B = [-7, 7] \setminus [-5, 9] = [-7, -5)$

$A \cap B = [-7, 7] \cap [-5, 9] = [-5, 7]$

$B \setminus A = [-5, 9] \setminus [-7, 7] = (7, 9]$



Seminar 2.

Cardinalul unei mulțimi

Fie A o mulțime.

$|A|$ - nr. de elem. al mulț A $\quad |A| < \infty \Rightarrow A$ este mulțime finită

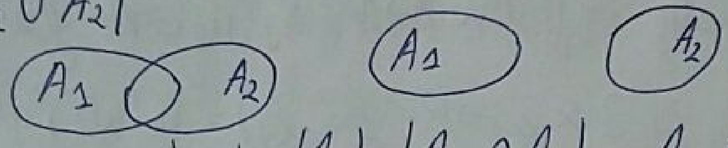
În caz contrar, A s.n. mulțime infinită.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ n mulțimi finite cu $n \geq 2$

Ex 1: $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = ?$ (principiul includerii-excluderii)

$P(2)$: $A_1$ și $A_2$ mulțimi finite

$|A_1 \cup A_2|$




$$|A_1 \cup A_2| = \begin{cases} |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|, & A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \\ |A_1| + |A_2|, & A_1 \cap A_2 = \emptyset \quad |A_1 \cap A_2| = 0 \end{cases}$$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$P(3)$: $A_1, A_2, A_3$ mulțimi finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \overset{\text{asoc.}}{=} |(A_1 \cup A_2) \cup A_3| =$$

$$\overset{P(2)}{=} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3| =$$

$$\overset{\text{distrib}}{=} |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)| =$$

$$\overset{P(2)}{=} |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_3| -$$

$$- |A_2 \cap A_3| + |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)| =$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$P(n)$: $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi finite

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) +$$

$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) -$$

$$- (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_{n-3} \cap A_n|) + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

## $\boxed{\text{Funcții}}$

$f: A \to B$

Def: Numim funcție un triplet de 3 mulțimi $(A, B, G)$ cu prop că pt $\forall\, a \in A\ (\exists!)\ b \in B$ a.î. $(a, b) \in G$.

$G \subset A \times B$ — domeniul funcției $f$

Notație: $f: A \to B$ este funcție $\Leftrightarrow \forall\, a \in A, (\exists!)\, b \in B, f(a) = b$

$B$ — codomeniul funcției $f$

Definiție: $f$ s.n. funcție injectivă dacă $(\forall)\, a_1, a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Prop: $f$ este funcție injectivă $\Leftrightarrow (\forall)\, a_1, a_2 \in A\ \ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Ex 2: Arătați că $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ f((a, b)) = (a - \sqrt{2})^2 + (b - \frac{1}{3})^2$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

$f$ inj $\Leftrightarrow \forall\, (a, b)$ și $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a.î. $f((a, b)) = f((c, d)) \Rightarrow (a, b) = (c, d) \Rightarrow$

$\Rightarrow f((a, b)) - f((c, d)) = 0$

$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \frac{1}{3})^2 - (c - \sqrt{2})^2 - (d - \frac{1}{3})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a\sqrt{2} + \cancel{2} + b^2 - \frac{2}{3}b + \cancel{\frac{1}{9}} - c^2 + 2c\sqrt{2} - \cancel{2} - d^2 + \frac{2}{3}d - \cancel{\frac{1}{9}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a^2 - c^2) + (b^2 - d^2) - 2\sqrt{2}(a - c) - \frac{2}{3}(b - d) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a + c)(a - c) + (b - d)(b + d) - 2\sqrt{2}(a - c) - \frac{2}{3}(b - d) = 0$

$\underbrace{(a - c)}_{\in \mathbb{Z}}\underbrace{(\overbrace{a + c}^{\in \mathbb{Z}} - 2\sqrt{2})}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} + \underbrace{(b - d)}_{\in \mathbb{Z}}\underbrace{(\overbrace{b + d}^{\in \mathbb{Z}} - \frac{2}{3})}_{\in \mathbb{Q}} = 0$

$\begin{cases} (a - c)(a + c - 2\sqrt{2}) = 0 \\ (b - d)(b + d - \frac{2}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \text{ sau } (\overbrace{a + c}^{\in \mathbb{Z}} - 2\sqrt{2}) = 0 \\ b - d = 0 \text{ sau } (\overbrace{b + d}^{\in \mathbb{Z}} - \frac{2}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (c, d)$

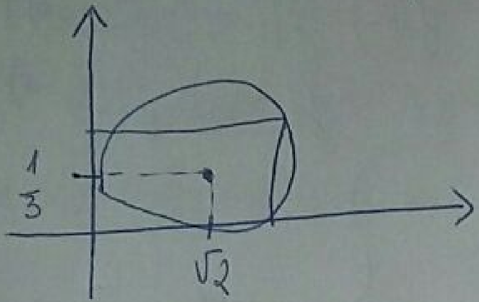
Definiție: $f: A \to B$ s.n. funcție surjectivă dacă $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A$ a.î. $f(a) = b$.

Prop: $f$ surjectivă $\Leftrightarrow \text{Im} f = B \,/\, \underbrace{f(A)}_{\text{Im} f} = \{b \in B \mid \exists\, a \in A \text{ a.î. } f(a) = b\} =$
$= \{f(a) \mid a \in A\}$

2. $\text{Im} f \subseteq \mathbb{R}_+$, $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f((2\sqrt{2}, \frac{2}{3})) = f((0, 0)) \Rightarrow f$ nu este injectivă

$b=1$

$f(a,b)=1 \Leftrightarrow (a-\sqrt{2})^2+\left(b-\frac{1}{3}\right)^2=1$ (ec. cercului)




$|A|$ - o mulțime

$|A|=\{B \mid A\sim B\}$ - cardinalul mulțimii $A$

$A\sim B \Leftrightarrow (\exists)\ f: A\to B$ funcție bijectivă

Def: $f: A\to B$ s.n. fct. <u>bijectivă</u> dacă $f$ este injectivă și surjectivă

$A$ - o mulțime finită $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$|A|=\{B \mid A\sim B\}=n$

$f:\{1,2,3,\dots,n\}\to A \quad f(1)=a_1,\ f(2)=a_2 \ \dots\ f(n)=a_n$

$\forall\ B\in|A|,\ B\sim\{1,\dots n\}=[n]$

$f$ este bijectivă $\Leftrightarrow \forall\ b\in B, (\exists!)\ a\in A$ a.î. $f(a)=b$

Ex: fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 2 \\ 3x-2, & x<2\end{cases}$ Arătați că $f$ este bijecție

I injectivă

(i) $x\in[2,\infty)$ $f(x)=x^2$

Fie $a,b\in[2,\infty)$, $\left.\begin{matrix} f(a)=f(b) \Leftrightarrow a^2=b^2 \\ a,b\in[2,\infty) \\ a,b>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=b$

(ii) $a,b\in(-\infty,2)$, $f(a)=f(b) \Leftrightarrow 3a-2=3b-2 \ \big|+2 \Leftrightarrow 3a=3b \ \big|\cdot\frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=b$

(iii) $a\in[2,\infty)$, $b\in(-\infty,2)$

$f(a)=f(b) \Leftrightarrow a^2=3b-2$

$\left.\begin{matrix} a^2\geq 4 \\ b<2 \Leftrightarrow 3b-2<4\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^2=3b-2$ fals

Din i, ii, iii, $\Rightarrow f$ injectivă pe $\mathbb{R}$

II $f$ - surjectivă

1) $x \in [2, \infty)$

$Im f = f([2,\infty))$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 2^2 = 4 \\ f \text{ cont pe } [2,\infty) \\ f \text{ s} \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow Im f([2,\infty)) = [4,\infty)$

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(\mathbb{R}) = f((-\infty,2) \cup [2,\infty)) =$
$= f((-\infty,2)) \cup f([2,\infty))$

$\Rightarrow Im f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ surjectivă

2) $x \in (-\infty, 2)$

$\left.\begin{array}{l} Im f((-\infty,2)) = f((-\infty,2)) \\ f(2) = 4 \\ f \text{ cont pe } (-\infty,2) \\ f \text{ s} \nearrow \end{array}\right\} \Rightarrow Im f((-\infty,2)) = (-\infty,4)$

$f(\mathbb{R}) = f(-\infty,2) \cup f([2,\infty))$

Din I, II $\Rightarrow f$ bijectivă

Seminar 3

Compunerea funcțiilor

$f: A \to B$, $g: B \to C$ 2 funcții

Compunerea lui $g$ cu $f$ este funcția $g \circ f: A \to C$, $g \circ f(a) = g(f(a))$

$f: A \to B$ funcție

$f$ s.n. funcție inversabilă dacă $(\exists!)\ f^{-1}: B \to A$ a.î. $f^{-1} \circ f = 1_A$ și $f \circ f^{-1} = 1_B$

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$

Teoremă: $f$ este funcție inversabilă $\Leftrightarrow f$ este bijectivă

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x < -3 \\ -2x - 5, & x \geq -3 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 4, & x > 1 \end{cases}$

Determinați funcția $f \circ g$.

b-t-a (A)

b)

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

caz 1: $x \in (-\infty, 1]$, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 25x^2 + 10x - 8, & x < -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{5}) \cap (-\infty, 1] = (-\infty, -\frac{1}{5}) \\ -10x - 1, & x \geq -\frac{1}{5} \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{5}; \infty) \cap (-\infty, 1] = [-\frac{1}{5}; 1] \end{cases}$

caz 2: $x \in (1, \infty)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2x + 4) = -2(x^2 - 2x + 4) - 5 =$
$= -2x^2 + 4x - 8 - 5 =$
$= -2x^2 + 4x - 13$

$x^2 - 2x + 4 \geq -3$

$(x-1)^2 + 3 \geq 3 \geq -3$

Din cazul 1 + 2, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 25x^2 + 10x - 8, & x \in (-\infty, -\frac{1}{5}) \\ -10x - 1, & x \in [-\frac{1}{5}, 1] \\ -2x^2 + 4x - 13, & x \in (1, \infty) \end{cases}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 2 \\ 3x - 2, & x < 2 \end{cases}$ Inversa

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & y \geq 4 \\ \frac{y+2}{3}, & y < 4 \end{cases}$

## Relații de echivalență

Fie A o mulțime. Se numește relație binară pe mulțimea A, "~" o submulțime a produsului cartezian $A \times A$

"~" s.n. relație de echivalență dacă:

1) este reflexivă: $(\forall)\ x \in A$, $x \sim x$
2) este simetrică: $(\forall)\ x, y \in A$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3) este tranzitivă: $(\forall)\ x, y, z \in A$, $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Ex 1) $A = \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$, $(a \sim b) \Leftrightarrow (b - a) \vdots n$
2) $A = \mathbb{C}$, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}$

3) $A=\mathbb{R}$, $a\sim b \Leftrightarrow |a-b|<2$

1) "$\sim$" reflexivă $\Leftrightarrow \forall\, x\in\mathbb{Z},\ x\sim x \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{Z}\ (x-x)\ \vdots\ n \Rightarrow 0\ \vdots\ n\ (A)$

"$\sim$" simetrică $\Leftrightarrow (\forall\, x,y\in\mathbb{Z},\ x\sim y \Rightarrow y\sim x) \Leftrightarrow (x-y)\ \vdots\ n \Rightarrow (y-x)\ \vdots\ n\ (A)$

$x\sim y \Rightarrow (y-x)\ \vdots\ n \Rightarrow -(x-y)\ \vdots\ n \Rightarrow (x-y)\ \vdots\ n\ (A) \Rightarrow y\sim x$

"$\sim$" tranzitivă $\Leftrightarrow \forall\, x,y,z\in\mathbb{Z},\ x\sim y$ şi $y\sim z \Rightarrow x\sim z$

$x\sim y \Rightarrow (y-x)\ \vdots\ n$

$y\sim x \Rightarrow (z-y)\ \vdots\ n$ (+)

$(z-y+y-x)\ \vdots\ n \Rightarrow (z-x)\ \vdots\ n \Rightarrow x\sim z$

Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $x=a+bi$

$x\sim x \Leftrightarrow a+bi-a-bi=0\in\mathbb{R}$

2) "$\sim$" reflexivă $\Leftrightarrow \forall\, x\in\mathbb{C},\ x\sim x \Leftrightarrow x-x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 0\in\mathbb{R}\ (A)$

"$\sim$" simetrică $\Leftrightarrow (\forall\, x,y\in\mathbb{C},\ x\sim y \Rightarrow y\sim x) \Leftrightarrow \forall x,y\in\mathbb{C},\ x-y\in\mathbb{R}$
$\Leftrightarrow -(x-y)\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y-x\in\mathbb{R} \Rightarrow y\sim x$

"$\sim$" tranzitivă $\Leftrightarrow \forall\, x,y,z\in\mathbb{C},\ x\sim y$ şi $y\sim z \Rightarrow x\sim z$

$x-y\in\mathbb{R}$

$y-z\in\mathbb{R}$ (+)

$x-z\in\mathbb{R} \Rightarrow x\sim z$

3) "$\sim$" reflexivă $\Leftrightarrow \forall\, x\in\mathbb{R},\ x\sim x \Leftrightarrow |x-x|<2 \Leftrightarrow |0|<2 \Leftrightarrow 0<2$ adv.

"$\sim$" simetrică $\Leftrightarrow \forall x,y\in\mathbb{R},\ x\sim y \Rightarrow y\sim x$

$\left.\begin{array}{l} x\sim y \Leftrightarrow |x-y|<2 \\ |x-y|=|y-x| \end{array}\right\} \Leftrightarrow |y-x|<2 \Rightarrow y\sim x$

"$\sim$" tranzitivă $\Leftrightarrow$ Fie $a=1$, $b=0$, $c=-1$

$\left.\begin{array}{l} a\sim b \Rightarrow |1-0|=1<2 \\ b\sim c \Rightarrow |0+1|=1<2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\sim c \Rightarrow |1+1|<2$ fals

1 - reflexivitate
2 - simetrie
3 - tranzitivitate

Ex: $R$ mulțimea relațiilor binare pe mulțimea $\{1,2,3\} = A$

$g : R \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\rho \in R$, $g(\rho) = a_1 + 2a_2 + 4a_3$, unde $A = \emptyset$

$\rho = \emptyset$ (este rel de echiv)

$a_i = \begin{cases} 1, & \rho \text{ are proprietatea } i \\ 0, & \rho \text{ nu are prop } i \end{cases}$, $i = \overline{1,3}$

Arătați că $g$ este surjectivă

$0: 0+0+0 \Rightarrow \rho$ nu are nicio proprietate

$\rho = \emptyset$ sau $\{(1,2), (1,3)\}$

$1: 1+0+0 \Rightarrow \rho$ reflexivă

$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$

$2: 0+2+0 \Rightarrow \rho$ simetrică

$\rho = \{(1,2), (2,1)\}$

$3: 1+2\cdot1+0 \Rightarrow \rho$ reflexivă și simetrică.

$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2), (1,2), (2,1)\}$

$4: 0+0+4\cdot1 \Rightarrow \rho$ tranzitivă

$\rho = \{(1,3), (1,2), (2,3)\}$

$5: 1+0+4 \Rightarrow 1$ și $3$

$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$

$6: 0+2\cdot1+4\cdot1 \Rightarrow 2$ și $3$

$\rho = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2)\}$

$7: 1+2\cdot1+4\cdot1 \Rightarrow 1, 2, 3$

$\rho = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

$\Rightarrow g$ surjectivă.

exercitiu dat la examen:

$A = \mathbb{N}^*$

pt $a, b \in A$, $a \sim b \Leftrightarrow \frac{a}{(a,b)}$ și $\frac{b}{(a,b)}$ au aceeași paritate.

$(a,b) = \text{cmmdc}(a,b)$

Arătați că $\sim$ este rel. de echiv.

$a, b \in \mathbb{N}^*$

$a = 2^{s_a} \cdot t_a$, $s_a \in \mathbb{N}$, $t_a$ nr. impar

$b = 2^{s_b} \cdot t_b$, $s_b \in \mathbb{N}$, $t_b$ nr. impar

$\frac{a}{(a,b)}$ și $\frac{b}{(a,b)}$ au ac. par $\Rightarrow s_a = s_b$.

Seminar 4.

Relatii de echivalentă

Fie $A$ o multime și $\rho$ o relatie binară pe $A$

$\rho$ s.n. rel. de echiv: 1) reflexivă: $\forall x \in A$, $x \rho x$

2) simetrică: $\forall x, y \in A$, $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

3) tranzitivă: $\forall x, y, z \in A$, $\left.\begin{matrix} x \rho y \text{ și} \\ y \rho z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \rho z$

Ex 1: $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{A : A \subseteq \mathbb{R}\}$

$A \rho B \Rightarrow A$ și $B$ sunt echipotente

$A \rho B \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ bijectivă.

Arătați că $\rho$ este relatie de echivalentă:

1) reflexivă: $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \rho A \Leftrightarrow \exists f : A \to A$ bijectivă

$f = 1_A$

2) simetrică: $\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \rho B \Rightarrow B \rho A$

$A \rho B \Leftrightarrow \exists f : A \to B$ bijectivă $\Rightarrow \exists f^{-1} : B \to A$ bijectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow B \rho A$

3) tranzitivă: $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \rho B$ și $B \rho C \Rightarrow A \rho C$

$\left.\begin{matrix} A \rho B \Rightarrow \exists f : A \to B \text{ bij} \\ B \rho C \Rightarrow \exists g : B \to C \text{ bij} \end{matrix}\right\} \Rightarrow g \circ f : A \to C \text{ bij} \Rightarrow A \rho C$

Din 1), 2), 3) $\Rightarrow \rho$ rel. de echiv.

Prop: $f: A \to B$, $g: B \to C$, $f, g$ bij $\Rightarrow g \circ f$ bij.

Reciproca nu este adevărată.

$g \circ f$ bij $\Rightarrow f, g$ bij (fals)

$g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj.

$g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj

ex: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x+1$, $g(x) = \max\{x-1, 0\}$

$g \circ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \max\{x, 0\}$

$g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$ bij, dar $f$ nu e surj

$g$ nu e inj.

ex 2: Ar. că $(-\infty, 0] \sim [2, 3]$

$(-\infty, 0] \sim (2, 3] \Leftrightarrow \exists f: (-\infty, 0] \to (2, 3]$ bij.

Fie $f: (-\infty, 0] \to (2, 3]$ ~~bij~~ $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$.

$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ inj.

$f(0) = 2 - \frac{1}{-1} = 2 + 1 = 3$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{1}{x-1}\right) = 2 - \frac{1}{-\infty} = 2$

$f$ compunere de funcții continue $\Rightarrow$ este continuă

$\Rightarrow f$ surj

$\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ bij $\Rightarrow (-\infty, 0] \sim (2, 3]$

ex3: Arătați că $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ bij.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x-1, & x < 0 \end{cases}$$

Fie $x, y \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(y)$

I $x \geq 0, y > 0$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y$.

II $x \geq 0, y < 0$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow 2x = -2y - 1$ F ab

$x = -\frac{2y-1}{2}$

III $x \leq 0, y < 0$, $f(x) = f(y) \Leftrightarrow -2x - 1 = -2y - 1 \Leftrightarrow x = y$

I, II, III $\Rightarrow f$ injectivă (1)

Fie $n \in \mathbb{N}$

I $n$ - nr. par $\Rightarrow 2 | n \\ f(x) = n \Big\} \Rightarrow x = \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$

II $n$ - nr impar

$f(x) = n \Leftrightarrow -2x - 1 = n \Rightarrow -2 | n+1 \Rightarrow x = \frac{n+1}{-2} < 0 \in \mathbb{Z}$

$f(x) = -2x - 1 = -2 \frac{n+1}{-2} - 1 = n + 1 - 1 = n$

Din I și II $\Rightarrow f$ surjectivă (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f$ bijectivă $\Leftrightarrow \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

Def: O mulțime $A \sim \mathbb{N}$ s.n. mulțime numărabilă

ex: mulțimi ~~num~~ numărabile: $\mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$

ex 4: Ar. că $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Teorema Cantor-Bernstein

$A, B$ 2 mulțimi

$A \sim B \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ și $g: B \to A$ 2 fct injective

Întrebare: $f: A \to B$ surjectivă $\Rightarrow \exists g: B \to A$ inj? DA (axioma alegerii)

ex 1) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $\quad g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ surj $\quad g(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ ka

$\Rightarrow f: A \to B$ fct surjectivă

Construim $g: B \to A$ inj

Fie $b_0 \in B \xRightarrow[f \text{ surj.}]{} \exists a_0 \in A$ a.î. $f(a_0) = b_0$

$g(b_0) = a_0$

$b_0 \neq b_1 \in B \xRightarrow[f \text{ surj}]{} \exists a_1 \in A$ a.î. $f(a_1) = b_1, g(b_1) = a_1$

$a_1 \neq a_0$

---

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bij, $f(a, b) = 2^a(2b+1) - 1$

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ inj și $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ inj

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$g(n) = n$ este fct inj (1)

$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}^* \sim \mathbb{Z}$

$h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^*$, $h(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x+1, & x \geq 0 \end{cases}$ bij

Din tranzitivitate $\Rightarrow \mathbb{Z}^*$ numărabilă, $\mathbb{Z}^* \sim \mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{tranz}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \sim \mathbb{N}$

Ar că $\exists f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ injectivă

$\underbrace{\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \xrightarrow{\alpha = \text{bij}} \mathbb{N}}_{\text{fct inj}}$

$\bar{f}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ $\quad \bar{f}(a,b) = \frac{a}{b}$ surj $\xrightarrow{\text{Intrebare}} \exists f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ inj (2)

Din (1) și (2) $\xrightarrow{\text{T C.-B}} \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

## $\boxed{\text{Mulțimi factor}}$

Fie $A$ o mulțime, $\sim$ rel de echiv pe $A$.

$\frac{A}{\sim} = \{\hat{a} : a \in A\}$

mulțimea factor a lui $A$ în raport cu $\sim$

$\hat{a} = \{b \in A : a \sim b\}$

Obs: $a, b \in A$ a.î. $a \sim b \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$

$a \nsim b \Rightarrow \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

$n \geq 2$ $\quad \equiv_n = N$ este rel de echiv

Pe $\mathbb{Z}$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \sim b \Leftrightarrow n | (a-b)$

$k \in \mathbb{Z}$, $\hat{k} = \{a \in \mathbb{Z} : a \equiv_n k\} = \{a \in \mathbb{Z} : a - b \,\vdots\, n\} =$

$= \{a \in \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } a - k = nc\} =$

$= \{a \in \mathbb{Z} : \exists c \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } a = nc + k\}$

$\{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{n-1}\} = \mathbb{Z}_n$

ex5: Pe $\mathbb{N}^*$, $\sim$

$a \sim b \iff \frac{a}{(a,b)}$ și $\frac{b}{(a,b)}$ au aceeași paritate.

$a, b \in \mathbb{N}$, $a = 2^s(2k+1)$, $s, k \in \mathbb{N}$

$b = 2^t(2h+1)$, $t, h \in \mathbb{N}$

$a \sim b \iff s = t$

$\frac{\mathbb{N}^*}{\sim} = ?$ $\quad \frac{\mathbb{N}^*}{\sim} \,\rho\, \mathbb{N}?$

Pt. a determina $\frac{\mathbb{N}^*}{\sim}$ → sistem de reprezentanți ($\mathcal{S}$ s.n. sistem de reprezentanți pt $\sim$, $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}^*$ a.î. $\mathcal{S}$ conține câte un elem. din fiecare clasă de echivalență).

$\mathcal{S} = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$

$\frac{\mathbb{N}^*}{\sim} = \{\widehat{2^0}, \widehat{2^1}, \widehat{2^2}, \dots\}$

$f: \mathbb{N} \to \frac{\mathbb{N}^*}{\mathbb{N}}$, $f(x) = \widehat{2^x}$

$C, B, A$ mulțimi

$\sim$ - rel de echiv.

$f: \frac{A}{\sim} \to B$ funcție.

$\hat{a}, \hat{b}$ a.î. $a \sim b \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$, $f(\hat{a}) = f(\hat{b})$

Proprietatea de universalitate a mulț factor.

Fie $\pi: A \to \frac{A}{\sim}$ (proiecția canonică)

$\pi(a) = \hat{a}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \frac{A}{\sim} \arrow[d, "g"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$f: A \to B$ o fct cu urm prop: $\forall a, b \in A$, $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$

Atunci $\exists!\, g: \frac{A}{\sim} \to B$ a.î. $g \circ \pi = f$

$g(\hat{a}) = f(a)$

ex 6: $f: \underbrace{\frac{\mathbb{Z}}{\equiv_5}}^{\mathbb{Z}_5} \to \mathbb{C},\ f(\hat{k}) = i^k$

Este $f$ o funcție?

$\hat{k}_1, \hat{k}_2 \in \mathbb{Z}_5,\ \hat{k}_1 = \hat{k}_2 \Rightarrow 5 \mid k_2 - k_1 \Rightarrow k_2 = 5p + k_1, p \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow f(\hat{k}_1) = f(\hat{k}_2)$

$\Leftrightarrow i^{k_1} = i^{k_2}$

$\Leftrightarrow i^{k_1} = i^{k_1 + 5p}$

$\Leftrightarrow i^{k_1} = i^{k_1} \cdot i^{5p}$

$\Leftrightarrow (i^5)^p = 1 \Leftrightarrow p \equiv 0 \pmod 4$, $k_1, k_2$ alese arbitrar $\Rightarrow$ $\cancel{\ }$

$f(\hat{1}) = f(\hat{5}) = f(\hat{0})$

$f: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{C}\quad f(\hat{k}) = i^k$ corect def.

$f: \underbrace{\frac{\mathbb{Z}}{\equiv_n}}^{\mathbb{Z}_n} \to \mathbb{C}\quad f(\hat{k}) = i^k$ corect def $\Leftrightarrow n \vdots 4$

Ex 7: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\sim$ pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + y = b + x$

1) Ar. că $\sim$ este rel de echiv.

2) $\frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} \simeq \mathbb{Z}$

1) $\sim$ reflexivă $\Leftrightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\ (a, b) \sim (a, b) \Leftrightarrow a + b = b + a$ (A)

$\sim$ simetrică $\Leftrightarrow \forall (a, b), (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a, b) \sim (x, y) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \sim (a, b)$

$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + y = b + x \Leftrightarrow x + b = y + a \Leftrightarrow (x, y) \sim (a, b)$

$\sim$ tranzitivă $\Leftrightarrow \forall\ (a, b), (x, y), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$(a, b) \sim (x, y)$ și $(x, y) \sim (c, d) \Rightarrow (a, b) \sim (c, d)$

$(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + y = b + x$

$(x, y) \sim (c, d) \Leftrightarrow x + d = c + y$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + y = b + x \\ c + y = d + x \end{cases} \ominus$

$a - c = b - d \Leftrightarrow a + d = b + c$

$\Rightarrow (a, b) \sim (c, d)$

Seminar 5

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

$M$ o mulțime

$\sim$ - o rel. de echiv pe $M$

$\frac{M}{\sim} = \{\hat{a} : a \in M\}$, $\hat{a} = \{b \in M : a \sim b\}$

Obs: $\hat{a}, \hat{b} \in \frac{M}{\sim} \Rightarrow \hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

PUMF: Fie $f: M \to N$ o funcție cu prop că $\forall a, b \in M, a \sim b \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a) = f(b)$. Atunci $\exists! \ \bar{f}: \frac{M}{\sim} \to N$ $\bar{f}(\hat{a}) = f(a)$

$f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$, $f(\hat{k}) = i^k$

$\mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{\equiv_n}$

Ex1: Pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, "$\sim$": $(a, b) \sim (x, y) \Leftrightarrow a + y = b + x$
$\sim$ este rel de echiv.

$\left|\frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim}\right| = |\mathbb{Z}| \Leftrightarrow \exists f: \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} \to \mathbb{Z}$ bijectivă

Obs: $f$ este surjectivă $\Leftrightarrow \bar{f}$ este surjectivă
$(\forall a, b \in M, a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)) \Leftrightarrow \bar{f}$ este inj

1) găsim o funcție $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ a.î. $\forall (a, b), (x, y), (a, b) \sim (x, y)$
$\Rightarrow f((a, b)) = f((x, y))$

$f((a, b)) = a - b$.

Luând $(a, b), (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu prop că $(a, b) \sim (x, y) \Rightarrow$
$\Rightarrow a + y = b + x \Leftrightarrow a - b = x - y \Leftrightarrow f((a, b)) = f((x, y))$ 1

PUMF $\Longrightarrow \exists \ \bar{f}: \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\sim} \to \mathbb{Z}$, $\bar{f}(\widehat{(a, b)}) = a - b$

$f$ surjectivă $\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{Z}, \exists (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a.î.
$f((a, b)) = z$

$$f((a,b)) = a-b = z \begin{cases} z \geq 0 \ (a,b)=(z,0);\ f(z,0)=z \\ z < 0 \ (a,b)=(0,-z);\ f(0,-z)=z \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow \bar{f}$ surjectivă (4)

Luăm $f((a,b)) = f((x,y))$, $(a,b),(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Leftrightarrow a-b = x-y$

$\Leftrightarrow a+y = x+b \Leftrightarrow a \sim b$ (2)

Din 1 și 2 $\Rightarrow \forall (a,b),(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \Leftrightarrow f(a)=f(b) \Rightarrow \bar{f}$ este inj (3)

Din 3 și 4 $\Rightarrow \bar{f}$ bijectivă

Deci $\left|\frac{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}{\sim}\right| = |\mathbb{Z}|$

$f$ injectivă $\Rightarrow \bar{f}$ injectivă

$\Leftarrow$ x (reciproc fals)

## Grupuri

Fie $G$ o mulțime și "$\circ$" o lege de compoziție (operație algebrică)
(i.e. $\circ : G\times G \to G$ funcție)

1) asociativitatea: $\forall x,y,z \in G,\ (x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z)$
2) element neutru: $\exists e \in G,\ \forall x \in G,\ e\circ x = x\circ e = x$
3) elemente simetrizabile: $\forall x \in G, \exists x' \in G,\ x\circ x' = x'\circ x = e$
4) comutativitatea: $\forall x,y \in G,\ x\circ y = y\circ x$

Def: $(G,\circ)$ s.n. semigrup dacă "$\circ$" îndeplinește 1) + 4) $\Rightarrow (G,\circ)$ semigrup comutativ

$(G,\circ)$ s.n. monoid dacă "$\circ$" îndeplinește 1) și 2) + 4) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (G,\circ)$ monoid comutativ

$(G,\circ)$ s.n. grup dacă "$\circ$" îndeplinește 1), 2), 3) + 4) $\Rightarrow$
$\Rightarrow (G,\circ)$ grup comutativ

ex: $(\mathbb{N}^*,+)$ semigrup comutativ
$(\mathbb{N},+)$ monoid
$(\mathbb{Z},+)$ grup, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ grup

1) Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ~~$f_a$~~ $f_a(x) = \log_2[(1+2^x)^a - 1]$

$\mathcal{F} = \{f_a : a > 0\}$. Arătați că $(\mathcal{F}, \circ)$ este grup comutativ

$\circ : M \times M \to M$ este funcție

$\uparrow$ mulțimea tuturor funcțiilor

Obs $\circ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ este funcție $\Leftrightarrow \forall f, g \in \mathcal{F}, f \circ g \in \mathcal{F}$

Parte stabilă $\Leftrightarrow$ "$\circ$" bine definită

Fie $f_a, f_b \in \mathcal{F}$, $f_a \circ f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f_a \circ f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(\log_2[(1+2^x)^b - 1]) =$

$= \log_2[(1 + 2^{\log_2[(1+2^x)^b - 1]})^a - 1] =$

$= \log_2[(1 + (1+2^x)^b - 1)^a - 1] =$ $\qquad f_a \circ f_b = f_{ab}$

$= \log_2[(1+2^x)^{ab} - 1]$, $ab > 0$ $= f_{ab}(x)$

$ab > 0 \Rightarrow f_{ab} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f_a = f_b \in \mathcal{F}$

$f_a \circ f_b = f_{ab}$

$f_1$ elem neutru

$f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$, $a > 0$

2) $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se def op. algebrică $\circ$.

$(x, y) \circ (a, b) = (xa, ya + b)$

Verificați dacă $(M, \circ)$ este grup comutativ

$\rightarrow$ asociativitatea: $\forall (x, y), (a, b), (c, d) \in M$

$[(x, y) \circ (a, b)] \circ (c, d) = (x, y) \circ [(a, b) \circ (c, d)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xa, ya + b) \circ (c, d) = (x, y) \circ (ac, bc + d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xac, (ya + b)c + d) = (xac, y(ac + bc + d)) \Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow (xac, yac + bc + d) = (xac, yac + ybc + yd)$~~

$\Leftrightarrow (xac, yac + bc + d) = (xac, yac + bc, d)$ (A)

→ comutativitatea

$\forall (x,y), (a,b) \in M, \ (x,y) \circ (a,b) = (a,b) \circ (x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (xa, ya+b) = (ax, bx+y)$ (F) $\Rightarrow$ nu este grup comutativ.

→ element neutru

$\exists (e_1, e_2) \in M, \forall (x,y) \in M, (e_1, e_2) \circ (x, y) = (x,y) \circ (e_1, e_2) = (x,y)$

Fie $(x,y) \in M, (x,y) \circ (e_1, e_2) = (x,y) \Leftrightarrow (e_1, e_2) = (1,0)$

$(1,0) \circ (x,y) = (x,y)$

$(x,y) \circ (1,0) = xy$

→ elemente simetrizabile

$\forall (x,y) \in M, \exists (x', y') \in M$ a.î. $(x,y) \circ (x', y') = (x', y') \circ (x,y) = (1,0)$

$x x' = 1 \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \Rightarrow x \in \{\pm 1\}$

$y' x + y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y}{x}$

$\left.\begin{array}{l} (x', y') = \left(\frac{1}{x}; \frac{-y}{x}\right) \notin \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ x', y' \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu toate elementele sunt simetrizabile

$U(M) = \{(1, -b), (-1, b) \mid b \in \mathbb{Z}\}$

$(1, b)^{-1} = (1, -b)$

$(1, b)^{-1} = (-1, b)$

$U(M) \neq M$

$(M, \circ)$ este monoid

$x = 1 \Rightarrow y' = -y \in \mathbb{Z}$

$x = -1 \Rightarrow y' = y \in \mathbb{Z}$

$(1,1) \circ (0,1) = (0,1)$

$(0,1) \circ (1,1) = (0,2)$