

Seminar 5

(S5.1) Considerăm limbajul de ordinul I $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Fie formula $\varphi = \forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)$. Să se caracterizeze acele $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ ce au proprietatea că $\varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1$.

Demonstrație: Fie $e : V \rightarrow \mathbb{N}$. Avem:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{\mathcal{N}}(e) = 1 &\iff (\forall v_4 (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4))^{\mathcal{N}}(e) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4 \vee v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) \vee (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, (v_3 \dot{<} v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \text{ sau } (v_3 = v_4)^{\mathcal{N}}(e_{v_4 \mapsto a}) = 1 \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \mapsto a}(v_3) < e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \text{ sau } e_{v_4 \mapsto a}(v_3) = e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e_{v_4 \mapsto a}(v_3) \leq e_{v_4 \mapsto a}(v_4) \\
 &\iff \text{pentru orice } a \in \mathbb{N}, e(v_3) \leq a \\
 &\iff e(v_3) = 0.
 \end{aligned}$$

□

Notăția 1. Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Pentru orice variabile x, y cu $x \neq y$, orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} cu universul notat cu A , orice $e : V \rightarrow A$ și orice $a, b \in A$, avem că:

$$(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a} = (e_{x \mapsto a})_{y \mapsto b}.$$

În acest caz, notăm valoarea lor comună cu $e_{x \mapsto a, y \mapsto b}$. Așadar,

$$e_{x \mapsto a, y \mapsto b} : V \rightarrow A, \quad e_{x \mapsto a, y \mapsto b}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \text{ și } v \neq y \\ a & \text{dacă } v = x \\ b & \text{dacă } v = y. \end{cases}$$

(S5.2) Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I. Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} și orice variabile x, y cu $x \neq y$ avem,

- (i) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \models \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$;
- (ii) $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$;
- (iii) $\forall x\varphi \models \exists x\varphi$;
- (iv) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \models \exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi$.

Demonstrație: Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură cu universul notat cu A și $e : V \rightarrow A$.

- (i) Avem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, avem $\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e_{x \mapsto a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, ($\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$) (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)[e] \iff \mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$ și $\mathcal{A} \models (\forall x\psi)[e] \iff$ (pentru orice $b \in A$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$) (**) și (pentru orice $c \in A$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto c}]$) (***) .

Mai întâi, presupunem (*) și arătăm (**) și (***) . Pentru (**), fie $b \in A$, și avem, luând în (*) $a := b$, că $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto b}]$, deci $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$. Pentru (***) , fie $c \in A$, și avem, luând în (*) $a := c$, că $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto c}]$, deci $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto c}]$.

Presupunem acum (**) și (***) și demonstrăm (*). Fie $a \in A$. Luând în (**) $b := a$, avem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$. Luând în (***) $c := a$, avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$. Deci, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ și $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$, ceea ce trebuia demonstrat.

- (ii) Avem că $\mathcal{A} \models (\exists y\forall x\varphi)[e] \iff$ există $b \in A$ a.î. pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{y \mapsto b})_{x \mapsto a}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a, y \mapsto b}]$ (*).

Pe de altă parte, $\mathcal{A} \models (\forall x\exists y\varphi)[e] \iff$ pentru orice $c \in A$ există $d \in A$ a.î. $\mathcal{A} \models \varphi[(e_{x \mapsto c})_{y \mapsto d}]$, i.e., folosind ipoteza că $x \neq y$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c, y \mapsto d}]$ (**).

Știm (*) și vrem să arătăm (**).

Fie $c \in A$. Vrem $d \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c, y \mapsto d}]$.

Arătăm că $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c, y \mapsto b}]$, unde b -ul este cel din (*), fiindcă atunci putem lua $d := b$.

Luând în (*) $a := c$, obținem $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c, y \mapsto b}]$, ceea ce ne trebuia.

- (iii) Presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că, pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi)[e]$, i.e. că există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$. Cum $A \neq \emptyset$, fie $c \in A$ arbitrar. Atunci, conform (*) (pentru $a := c$), $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto c}]$, deci putem lua $b := c$.

- (iv) Presupunem că $\mathcal{A} \models (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e]$, echivalent cu: pentru orice $a \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto a}]$ avem că $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto a}]$ (*).

Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \models (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi)[e]$, echivalent cu: dacă există $b \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$, atunci există $c \in A$ cu $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto c}]$.

Presupunem, deci, că avem un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \models \varphi[e_{x \mapsto b}]$ (**). Vrem să arătăm că există $c \in A$ cu $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto c}]$ (***)).

Conform (*) (pentru $a := b$) și (**), avem $\mathcal{A} \models \psi[e_{x \mapsto b}]$. Putem lua, deci, în (***), $c := b$ și am terminat.

□

(S5.3) Fie x, y variabile cu $x \neq y$. Să se dea exemple de limbaj de ordinul I, \mathcal{L} , și de formule φ, ψ ale lui \mathcal{L} astfel încât:

- (i) $\forall x(\varphi \vee \psi) \not\models \forall x\varphi \vee \forall x\psi$;
- (ii) $\forall x\exists y\varphi \not\models \exists y\forall x\varphi$.

Demonstrație: Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\prec, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, \mathcal{L}_{ar} -structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ și $e : V \rightarrow \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară (să zicem, punem, pentru orice $v \in V$, $e(v) := 7$).

- (i) Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \prec \dot{2}$ și $\psi := \neg(x \prec \dot{2})$. Atunci

$$\mathcal{N} \models \forall x(\varphi \vee \psi)[e].$$

Pe de altă parte,

- (a) $\mathcal{N} \models (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \varphi[e_{x \mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n < 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 3$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi)[e]$.
- (b) $\mathcal{N} \models (\forall x\psi)[e] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\mathcal{N} \models \psi[e_{x \mapsto n}] \iff$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $n \geq 2$, ceea ce nu este adevărat (luând $n := 1$, de exemplu). Deci, $\mathcal{N} \not\models (\forall x\psi)[e]$.

Prin urmare,

$$\mathcal{N} \not\models (\forall x\varphi \vee \forall x\psi)[e].$$

- (ii) Fie $\varphi := x \prec y$. Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x\exists y\varphi)[e] &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \text{ avem } \mathcal{N} \models (\exists y\varphi)[e_{x \mapsto n}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este adevărat – se ia, de pildă, $m := n + 1$. Așadar,

$$\mathcal{N} \models (\forall x \exists y \varphi)[e].$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\exists y \forall x \varphi)[e] &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \mathcal{N} \models (\forall x \varphi)[e_{y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \\ &\quad \text{avem } \mathcal{N} \models \varphi[e_{x \mapsto n, y \mapsto m}] \\ &\iff \text{există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. pentru orice } n \in \mathbb{N} \text{ avem } n < m, \end{aligned}$$

ceea ce este fals. Așadar,

$$\mathcal{N} \not\models (\exists y \forall x \varphi)[e].$$

□

(S5.4) Considerăm limbajul $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$ (limbajul aritmeticii) și \mathcal{L}_{ar} -structura canonică peste acest limbaj $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$. Să se dea exemplu de \mathcal{L}_{ar} -formule $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ astfel încât pentru orice $e : V \rightarrow \mathbb{N}$,

- (i) $\mathcal{N} \models \varphi_1[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este par;
- (ii) $\mathcal{N} \models \varphi_2[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este prim;
- (iii) $\mathcal{N} \models \varphi_3[e] \Leftrightarrow e(v_0)$ este putere a lui 2 cu exponent strict pozitiv.

Demonstrație:

(i) Luăm

$$\varphi_1 := \exists v_1 (v_1 \dot{+} v_1 = v_0).$$

(ii) Luăm

$$\varphi_2 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1 ((v_1 \dot{<} v_0 \wedge \exists v_2 (v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \rightarrow v_1 = \dot{S}\dot{0}).$$

(iii) Luăm

$$\varphi_3 := \dot{S}\dot{0} \dot{<} v_0 \wedge \forall v_1 ((\dot{S}\dot{0} \dot{<} v_1 \wedge \exists v_2 (v_1 \dot{\times} v_2 = v_0)) \rightarrow \exists v_2 (v_1 = v_2 \dot{+} v_2)).$$

□