UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

SEMINAR 10-11.

1. Pentru funcția $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$, $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$, să se arate că originea nu este un punct de extrem local dar că f are ca punct de minim local pe $(0,0)$ de-a lungul oricărei drepte $x=\alpha t$, $y=\beta t$; $t\in\mathbb{R}$; $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, care trece prin $(0,0)$.

Soluție.

Fie $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dată de $g(t)=f(\alpha t,\beta t)=2\alpha^4 t^4-3\alpha^2\beta t^3+\beta^2 t^3$ $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$.

Avem $g'(t)=t(8\alpha^4 t^2-9\alpha^2\beta t+2\beta^2)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$ deci $g'(0)=0$

Se poate constata ușor că există o vecinătate $V\in\mathcal{V}(0)$ cu proprietatea că $g'(t)<0$ $(\forall)\ t\in V\cap(-\infty,0)$ și $g'(t)>0$ $(\forall)\ t\in V\cap(0,\infty)$.

Prin urmare 0 este punct de minim local al lui g, ceea ce ne asigură că $(0,0)$ este punct de minim local pentru restricția lui f la dreapta $\{(\alpha t,\beta t)\mid t\in\mathbb{R}\}$.

Deoarece $f(x,\frac{3}{2}x^2)=-\frac{1}{4}x^4\leq 0=f(0,0)\leq x^2=f(0,x)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ deducem că $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f.

Observație.

Din exercițiul de mai sus tragem concluzia că nu putem spera să rezolvăm problema determinării punctelor de extrem ale unei funcții de două variabile prin reducerea la cazul 1-dimensional.

② Să se determine punctele de extrem ale funcției $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xy+x-2z$, $(\forall)\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Soluție:

Avem: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x-y+1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y-x$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z-2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 0$

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$ i.e $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 2y-x=0 \\ 2z-2=0 \end{cases}$ are soluția $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

În continuare vom prezenta patru modalități de a stabili dacă punctul critic $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}; 1\right)$ este punct de extrem.

a) (Metoda lui Sylvester)

Scriem matricea Hessiană a lui f în $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

• La noi $H_f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Deoarece $\Delta_1=2$; $\Delta_2=3$; $\Delta_3=6$, deducem că $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ este punct de minim local.

$\left(\Delta_1=|2|;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}\right)$

b). (Metoda valorilor proprii).

Valorile proprii ale matricei $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ sunt $1, 2, 3$ care sunt strict pozitive.

Prin urmare $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ este un punct de minim local.

c) (Metoda $D^2f\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$)

Avem că: $D^2f\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)(u_1,u_2,u_3)^2=2u_1^2+2u_2^2+2u_3^2-2u_1u_2=$

$=2\left(u_1-\frac{u_2}{2}\right)^2+\frac{3}{2}u_2^2+2u_3^2$

Deoarece $D^2f\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)(u_1,u_2,u_3)^2>0$ $(\forall)$ $(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (este o formă pătratică pozitiv definită), deducem că $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ e un minim local.

d) (Verificarea directă a faptului că $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ este punct de minim global)

Avem: $f(x,y,z)-f\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)=(z-1)^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\geq 0$

$(\forall)\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Deci $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ este punct de minim global.

3 Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=3xy-x^3-y^3$; $(\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Soluție:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3y-3x^2$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x-3y^2$

Din $\begin{cases}3y-3x^2=0\\3x-3y^2=0\end{cases}\iff\begin{cases}y-x^2=0\\x-y^2=0\end{cases}$ găsim $(0,0)$ și $(1,1)$.

Deoarece $Hf(x,y)=\begin{pmatrix}-6x & 3\\3 & -6y\end{pmatrix}$ avem

$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{pmatrix}$. Avem $\Delta_1=0$; $\Delta_2=-9<0$

Așadar $(0,0)$ este punct șa.

$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}-6 & 3\\3 & -6\end{pmatrix}$; $\Delta_1=-6<0$; $\Delta_2=27>0$ prin urmare $(1,1)$ e punct de maxim local.

Extreme condiționate

Modul de abordare:

Rescriem problema.

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x_1, ..., x_n) \longrightarrow f(x_1, ..., x_n)$ și un număr de legături $m \in \mathbb{N}$ $(m < n)$, $g_k(x_1, ..., x_n) = c_k$; $k = \overline{1,m}$

Considerăm funcția:

$$F(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (c_k - g_k(x_1, ..., x_n))$$

(numită și Lagrangeanul).

Construim matricea bordată (H_B^F) așa: λ_k - se numesc multiplicatori

$$H_B^F(a) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Avem (condiții de suficiență)

- a = punct de maxim local cu legături dacă $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, ..., \Delta_n$ au semne alternate a.î. Δ_{m+1} are semnul lui $(-1)^{m+1}$.
- a = punct de minim local cu legături dacă $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, ..., \Delta_n$ au același semn și anume semnul lui $(-1)^m$.

Obs: Δ_{m+k} este determinantul obținut prin bordarea blocului de zerouri cu primele $m+k$ linii și coloane.
(A se vedea exercițiile rezolvate)

Exerciții:

(4) Să se determine punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. $f(x,y) = xy$ cu legătura $x+y-1=0$

Soluție

Metoda 1. („distrugerea" legăturii)

$x+y-1=0 \Rightarrow y=1-x$. Luăm $g(x) = x(1-x) = x-x^2$. Problemă pe care o vom rezolva ca în liceu: $g'(x) = 1-2x$. $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
Cum $f''(x)=-2 \Rightarrow f''(\frac{1}{2})<0 \Rightarrow f$ strict concavă $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ punct de maxim local. $\Rightarrow y=\frac{1}{2}$.
Așadar $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ - punct de maxim local cu legături

Metoda 2 (Metoda multiplicatorilor lui Lagrange)

Notăm $g(x,y) = x+y-1$.
Fie $F(x,y;\lambda) = xy + \lambda(x+y-1)$ (Lagrangeanul)
Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-\lambda=0 \\ x-\lambda=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}$

Deci $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ - un posibil

Punct de extrem local cu legături

Scriem matricea „Hessiană bordată":

$$H_B^F(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aici $m=1$ (numărul de legături) → blocul de zerouri

$$\Delta_{m+1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$ Cum Δ_{m+1} are semnul lui

$(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1 \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ punct de maxim local cu legături

Metoda 3. (cu $D^2F(x,y)$ - studiem semnul acestei forme pătratice).

Se găsește ușor $D^2F(x,y) = 2\,dx\,dy$. Atunci $D^2F(x,y)(u_1,u_2)^2 = 2u_1u_2$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = x+y-1$; $Dg(x,y) = dx+dy$. Deci

$Dg(x,y)(u_1,u_2) = u_1+u_2$. Cum $x+y-1=0$ găsim $u_1+u_2=0$

$\Leftrightarrow u_1 = -u_2$.

Atunci $D^2F(x,y)(u_1,u_2)^2 = 2u_1u_2 = -2u_1^2 \leq 0$. Cum $D^2F(x,y)$ este negativ definită $\Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ - punct de maxim local cu legături

5. Să se determine extremele funcției f cu legăturile indicate:

$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y,z)=xyz$; $x+y+z-5=0$; $xy+yz+zx-8=0$

Soluție:

Notăm $g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ $g(x,y,z)=x+y+z-5$; $h(x,y,z)=xy+yz+zx-8$

Fie $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda_1\cdot(x+y+z-5)+\lambda_2(xy+yz+zx-8)$.

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=yz+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 z=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xz+\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_2 z=0 \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xy+\lambda_1+\lambda_2 y+\lambda_2 x=0 \\ x+y+z-5=0 \\ xy+yz+zx-8=0 \end{cases}$$

Să observăm că sistemul este simetric. Scăzând primele două ecuații găsim $(z+\lambda_2)(y-x)=0$

Dacă $x=y$ din ultimele două ecuații găsim $3x^2-10x+8=0$

$\Rightarrow x_1=2$; $x_2=\frac{4}{3}$.

Dc $x_1=2 \Rightarrow y_1=2 \Rightarrow z=1$. Prin urmare avem soluțiile

$(2,2,1)$; $(2,1,2)$, $(1,2,2)$. cu $\lambda_1=4$; $\lambda_2=-2$

Dc $x_2=\frac{4}{3} \Rightarrow y_2=\frac{4}{3} \Rightarrow z_2=\frac{7}{3}$. Deci $(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3})$; $(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3})$, $(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3})$

$\lambda_1=\frac{16}{9}$; $\lambda_2=-\frac{4}{3}$.

Avem:

$$H^F_{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y+z & x+z & x+y \\ 1 & y+z & 0 & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 \\ 1 & x+z & z+\lambda_2 & 0 & x+\lambda_2 \\ 1 & x+y & y+\lambda_2 & x+\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pentru $(2,2,1)$.

$$H^F_B(2,2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aici $m=2$ (numărul de legături).

$$D_{m+1} = D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Cum D_3 - are semnul lui $(-1)^m$ (i.e $(-1)^2 = 1$) $\Rightarrow (2,2,1)$ Punct de minim local cu legături. Analog în $(2,1,2)$; $(1,2,2)$ Puncte de minim local cu legături

Scanned with CamScanner

Punctele $\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$; $\left(\ \frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$. - sunt puncte de maxim local cu legături.

Pentru punctul $(2,2,1)$ aplicăm și metoda $D^2F(2,2,1)(u_1,u_2,u_3)^2$

Avem:

$$D^2F(x,y,z) = 2(z+\lambda_2)\,dx\,dy + 2(x+\lambda_2)\,dy\,dz + 2(y+\lambda_2)\,dx\,dy.$$ deci

$$D^2F(2,2,1)(u_1,u_2,u_3)^2 = -2u_1u_2$$

Avem $Dg(x,y,z) = dx+dy+dz \Rightarrow Dg(x,y,z)(u_1,u_2,u_3) = u_1+u_2+u_3$.

$$Dh(x,y,z) = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$$

$$Dh(2,2,1)(u_1,u_2,u_3) = 3u_1 + 3u_2 + 4u_3.$$

Deci $u_1+u_2+u_3=0$ și $3u_1+3u_2+4u_3=0$ (2)

(2) $\Rightarrow 3(u_1+u_2+u_3)+u_3=0 \iff u_3=0$ și $u_1=-u_2$

Așadar $D^2F(x,y,z) = 2u_1^2>0 \Rightarrow D^2F(2,2,1)$ este o formă pătratică pozitiv definită și ca atare $(2,2,1)$ e punct de minim local cu legături

Exercițiu: Verificați toate punctele prin cele două metode indicate.

⑥ Să se determine punctele de extrem ale funcției $f : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = x^2+2xy$.

Soluție:

Avem $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$ i.e $\begin{cases} 2x+2y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$ cu soluția $(0,0)$

Hessiana a lui f în $(0,0)$ este $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Deoarece $\Delta_1 = 2$; $\Delta_2 = -4 < 0$ deducem că $(0,0)$ nu este punct de extrem.

Cum funcția f este continuă pe mulțimea compactă $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$, ea este mărginită și își atinge marginile.

Prin urmare punctele de extrem global se ating pe frontiera mulțimii $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ adică pe $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Așadar suntem conduși la a studia extremele funcției f atunci când variabilele sale sunt supuse la restricția dată de $x^2+y^2=1$.

Fie $F(x,y,\lambda) = x^2+2xy+\lambda(x^2+y^2-1)$. $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = (\lambda+1)x+y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = x+y\lambda = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

ne conduce la $x(\lambda^2+\lambda-1) = 0$. Cum $x\neq 0$ (că dacă $x=0 \Rightarrow y=0$ $\cancel{\not}$ cu $x^2+y^2=1$) deci $\lambda \in \left\{ \dfrac{-1-\sqrt5}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt5}{2} \right\}$.

Deoarece $x = -\lambda y$, obținem (din a 3-a ecuație) $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2-\lambda}}$ și

$x = \mp \dfrac{\lambda}{\sqrt{2-\lambda}}$

Atunci

$$f(x,y)=\frac{\lambda^2}{2-\lambda}-2\frac{\lambda}{2-\lambda}=-\lambda\in\left\{\frac{1-\sqrt5}{2};\frac{1+\sqrt5}{2}\right\}$$, de unde tragem concluzia că maximul global al lui f este $\frac{1+\sqrt5}{2}$, iar minimul global al lui f este $\frac{1-\sqrt5}{2}$

Exercițiu: Rezolvați problema folosind Hessiana bordată

(7) Să se determine punctele de extrem ale funcției $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y,z)=-2x+2y+z$ $(\forall)(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, atunci când variabilele sale sunt supuse la restricția $x^2+y^2+z^2=1$.

Soluție:

Fie $F(x,y,z)=-2x+2y+z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z;\lambda)=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}\iff\begin{cases}-2+2\lambda x=0\\ 2+2\lambda y=0\\ 1+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

găsim $\lambda=\frac{3}{2}$

$x=-\frac{2}{3};\ y=\frac{2}{3};\ z=\frac{1}{3}$.

$\lambda=-\frac{3}{2};\ x=\frac{2}{3};\ y=-\frac{2}{3};\ z=-\frac{1}{3}$.

Cum f este continuă și $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ este compactă concluzionăm că f are un maxim global având valoarea 3 și un minim global având valoarea $-\frac{7}{3}$. qed.

Exercițiu: Rezolvați Problema cu H_B^F și D^2F