Breviar pentru o parte din cursul de
LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Acest breviar nu conţine toate noţiunile care apar în cursul de Logică Matematică şi Computaţională, dar vă aminteşte unele noţiuni de bază din acest curs!

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim abrevierea $\exists!$, cu semnificaţia "există şi este unic"; $\exists!$ **nu** este un cuantificator.

Amintim denumirile alternative:

- *algebră* $\equiv$ *structură algebrică;*
- *relaţie de ordine* $\equiv$ *relaţie de ordine parţială*;
- *relaţie de ordine totală* $\equiv$ *relaţie de ordine liniară*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* $\equiv$ *mulţime ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană;*
- *morfism boolean* $\equiv$ *morfism de algebre Boole;*

noţiunile generice:

- dacă o structură algebrică $\mathcal{A}$ are *mulţimea subiacentă* (i. e. *mulţimea suport*, adică mulţimea elementelor) A şi este înzestrată cu un set de operaţii şi relaţii, atunci o *structură algebrică subiacentă a lui* $\mathcal{A}$ este o structură algebrică având tot mulţimea suport A şi o parte dintre operaţiile şi relaţiile structurii algebrice $\mathcal{A}$;
- un *morfism de structuri algebrice* este o funcţie între mulţimile suport a două structuri algebrice de acelaşi tip care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice;
- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de acelaşi tip, i. e. un morfism care este o funcţie inversabilă (deci bijectivă) şi a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;
- o *subalgebră* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o submulţime S a mulţimii suport a lui $\mathcal{A}$ închisă la operaţiile algebrei $\mathcal{A}$; S devine astfel algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$ cu operaţiile induse pe S de operaţiile lui $\mathcal{A}$, i. e. restricţiile operaţiilor algebrei $\mathcal{A}$ la mulţimea S;
- o *congruenţă* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o relaţie de echivalenţă (a se vedea mai jos) pe mulţimea suport a lui $\mathcal{A}$ compatibilă cu operaţiile algebrei $\mathcal{A}$, ceea ce permite ca mulţimea factor (a se vedea mai jos) a mulţimii subiacente lui $\mathcal{A}$ prin acea relaţie de echivalenţă să fie organizată în mod canonic ca algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$;

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;

- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);

- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe A* este o submulţime a lui A^2;

- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a\,\rho\,b$ şi se citeşte *a este în relaţia ρ cu b;*

- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui A*; Δ_A este relaţia de **egalitate** pe A: pentru orice $a, b \in A$, avem: $a\Delta_A b$ ddacă $a = b$;

- pentru orice mulţime A, se notează cu id_A *funcţia identică a lui A,* i. e. funcţia $id_A : A \rightarrow A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relaţie binară pe A, id_A coincide cu Δ_A;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  i. *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x\,\rho\,x$;
  ii. *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x\,\rho\,x$;
  iii. *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $y\,\rho\,x$;
  iv. *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,x$, atunci $x = y$;
  v. *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  vi. *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,z$, atunci $x\,\rho\,z$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  i. *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  ii. *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  iii. *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  iv. *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x\,\rho\,y$ sau $y\,\rho\,x$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui ρ* ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:

  i. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  ii. $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  iii. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i\in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup_{i\in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup_{i\in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  iv. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i\in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap_{i\in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap_{i\in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\, ((a, b) \in \sigma \text{ şi } (b, c) \in \rho)\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  i. ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  ii. ρ este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;
  iii. ρ este simetrică ddacă $\rho \subseteq \rho^{-1}$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \rho$ ddacă $\rho = \rho^{-1}$;
  iv. ρ este antisimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$;
  v. ρ este asimetrică ddacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$;
  vi. ρ este tranzitivă ddacă $\rho^2 = \rho \circ \rho \subseteq \rho$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:

  i. ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  ii. ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  iii. ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:

  i. $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  ii. $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  iii. $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $\mathrm{Part}(A)$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A;

- pentru orice mulţime A, dacă $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se defineşte *clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$* ca fiind mulţimea elementelor lui A care sunt în relaţia $\sim$ cu x; pentru orice $x \in A$, se notează cu $x/_\sim$ sau cu $\widehat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$, i. e.: $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ (are loc a doua egalitate pentru că $\sim$, fiind relaţie de echivalenţă, în particular este simetrică);

- pentru orice mulţime A şi orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, se notează cu $A/_\sim$ *mulţimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin $\sim$*, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$: $A/_\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$ ($A/_\sim$ se obţine prin "împărţirea" lui A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$); $A/_\sim$ este o partiţie a lui A;

- pentru orice mulţime nevidă A, $\mathrm{Eq}(A) \cong \mathrm{Part}(A)$, întrucât funcţia $\varphi : \mathrm{Eq}(A) \to \mathrm{Part}(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/_\sim$ pentru orice $\sim\in \mathrm{Eq}(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) =\sim\subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x şi y se află într–o aceeaşi mulţime din familia $(A_i)_{i\in I}$;

- un *poset* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine; un *lanţ* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală;

- o *funcţie izotonă* între două poseturi este o funcţie între acele poseturi care păstrează ordinea; un *izomorfism de poseturi* este o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă între acele poseturi;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un *izomorfism de poseturi*, i. e. între oricare două lanţuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq \setminus \Delta_P = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ *relaţia de succesiune* asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a, b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\,(a < x < b)\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- *duala unei latici* $(L, \vee, \wedge)$ este laticea $(L, \wedge, \vee)$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ şi} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$

- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici, precum şi cu izomorfismele de poseturi între poseturile subiacente acelor latici;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, 0, 1)$ sunt două latici mărginite, atunci orice morfism surjectiv de latici de la $(L, \vee, \wedge)$ la $(M, \vee, \wedge)$ este morfism de latici mărginite de la $\mathcal{L}$ la $\mathcal{M}$;
- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;
- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;
- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;
- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  i. $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
  ii. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  i. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);
  ii. $\overline{\overline{x}} = x$;
  iii. **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \text{ şi} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \end{cases}$
  iv. $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;
  v. $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcţie $f : A \rightarrow B$ este un *morfism de algebre Boole* între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ şi } f(1) = 1; \end{cases}$
- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci:

  i. orice morfism de latici mărginite de la $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ la $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ este morfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;
  ii. orice izomorfism de latici de la $(A, \vee, \wedge)$ la $(B, \vee, \wedge)$ este izomorfism boolean de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*;
- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$; în particular, orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2;

- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- de exemplu, dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, astfel că $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$, atunci atomii lui $\mathcal{L}_2^n$ sunt $(0, 0, \ldots, 0, 0, 1), (0, 0, \ldots, 0, 1, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, 0, 0)$; mai general, pentru orice mulţime I, atomii algebrei Boole $\mathcal{L}_2^I$ sunt familiile de cifre binare $(x_i)_{i \in I} \in L_2^I$ cu proprietatea că $(\exists\, !\, k \in I)\, (x_k = 1)$;
- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  i. $\emptyset \neq F \subseteq B$;
  ii. pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;
  iii. pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Filt}(\mathcal{B})$;
- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathrm{PFilt}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numeşte *congruenţă a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietăţile:

  i. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$**);
  ii. dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$**);
  iii. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui $\sim$ cu $^-$**);

  notăm cu $\mathrm{Con}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;
- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;
- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci mulţimea factor a lui B prin $\sim$ se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu $\widehat{a}$ clasa lui a în raport cu $\sim$, atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:

  i. $\widehat{x} \vee \widehat{y} = \widehat{x \vee y}$,
  ii. $\widehat{x} \wedge \widehat{y} = \widehat{x \wedge y}$,
  iii. $\overline{\widehat{x}} = \widehat{\overline{x}}$,
  iv. $0 = \widehat{0}$ şi $1 = \widehat{1}$;

faptul că $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$ arată că operaţiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanţii claselor; $(B/_{\sim}, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui* $\mathcal{B}$ *prin* $\sim$;

- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- dată o *interpretare* în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ *satisface un enunţ* $\varphi \in E$, respectiv *o mulţime de enunţuri* $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este *universal adevărat (tautologie, adevăr semantic)* în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare satisface pe φ);
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este *deductibil semantic din ipotezele* $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică (adică orice interpretare care satisface pe Σ satisface şi pe φ);
- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- ca orice regulă de deducţie scrisă în acest mod, regula de deducţie **modus ponens** (abreviată **MP**) scrisă sub forma: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\dfrac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$, are semnificaţia: $\{\varphi,\ \varphi \to \psi\} \vdash \psi$;
- pentru orice mulţime $\Sigma \subseteq E$, notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \bar{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ algebra Lindenbaum–Tarski asociată mulţimii de ipoteze Σ pentru logica propoziţională clasică, despre care ştim că este o algebră Boole; amintim că $\sim_\Sigma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \Sigma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi}^{\Sigma} \in E/_{\sim_\Sigma}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim_\Sigma}$;
- cazul particular $\Sigma = \emptyset$ în cele de mai sus: notăm cu $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, care este o algebră Boole; amintim că $\sim = \sim_\emptyset = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in E, \vdash \alpha \leftrightarrow \beta\} \in \mathrm{Eq}(E)$; notăm cu $\widehat{\varphi} \in E/_{\sim}$ clasa unui enunţ φ în $E/_{\sim}$;
- pentru orice $\Sigma \subseteq E$ şi orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^{\Sigma} = 1_\Sigma$ în algebra booleană $E/_{\sim_\Sigma}$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- caz particular: pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic; abreviată **TD**);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic; abreviată **TCT**); cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic (**TC**);

- mulţimea T a teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice e satisfăcută de orice interpretare;
- o mulţime $\Sigma \subseteq E$ e *satisfiabilă* (adică există o interpretare care o satisface) ddacă Σ e *consistentă*, i. e. sistemul deductiv $\Delta(\Sigma)$ generat de Σ, anume $\Delta(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}$, nu conţine toate enunţurile, adică $\Delta(\Sigma) \subsetneq E$;
- pentru orice $\varphi \in E$, există o *formă normală conjunctivă (FNC)* (i. e. o conjuncţie de disjuncţii de *literali*, adică elemente din $V \cup \{\neg\, p \mid p \in V\}$) $\gamma \in E$ astfel încât $\varphi \sim \gamma$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\gamma)$ pentru orice interpretare h;
- un enunţ φ în FNC e *nesatisfiabil* (i. e. nu e satisfăcut de nicio interpretare, ceea ce e echivalent cu $\vDash \neg\, \varphi$, aşadar $\vdash \neg\, \varphi$ conform **TC**) ddacă există măcar o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ;
- un enunţ φ în FNC e satisfiabil ddacă nu există nicio derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din φ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).