Seminar 13

5.1.2021

Teorema împărțirii cu rest. Aplicații

① Aflați restul împărțirii lui: • $X^{100}-2X^{51}+1$ la X^2-1

•• $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$ la $(X+1)^2$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$

② Determinați $n\in\mathbb{N}$ a.î. $X^2+X+1 \mid X^{2n}+X^n+1$.

③ Dacă $p(X), q(X), r(X), s(X)\in\mathbb{C}[X]$ a.î.

(temă!)

$$p(X^5)+Xq(X^5)+X^2r(X^5)=(X^4+X^3+X^2+X+1)s(X),$$

atunci $p(1)=0$.

④ Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ a.î. $(X-1)^2 \mid aX^4+bX^3+1$. (Temă!)

---

① $f(X)=X^{100}-2X^{51}+1$ $\quad g(X)=X^2-1$ $\quad f(X), g(X)\in\mathbb{Q}[X]$

T. împ. rest $\quad f(X)=g(X)\cdot q(X)+r(X)$ $\quad \text{grad}(r(X))<\text{grad}(g(X))=2$

$\Downarrow$

$r(X)=aX+b$, $a,b\in\mathbb{Q}$

$f(X)=g(X)\cdot q(X)+aX+b$

$\underline{X=1}$ $\quad f(1)=g(1)\cdot q(1)+a+b \Rightarrow a+b=0 \quad (1)$

$\quad \underset{0}{\overset{\shortparallel}{f(1)}} \quad \underset{0}{\overset{\shortparallel}{g(1)}}$

$x=-1$ $\quad f(-1) = g(-1)\cdot q(-1) - a + b \Rightarrow -a+b=4 \quad (2)$

$f(-1) = 4$, $g(-1) = 0$

Din (1) și (2) $\Rightarrow 2b=4 \Rightarrow \underline{b=2} \Rightarrow \underline{a=-2}$; restul $r(x) = -2x+2$

$f_1(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$, $g_1(x) = (x-1)^2$ $\quad f_1(x), g_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$

T. imp rest $\Rightarrow$ --- $\Rightarrow f_1(x) = g_1(x)\cdot q_1(x) + aX+b$, $a,b\in\mathbb{Q}$

$f_1(1) = g_1(1)\cdot q_1(1) + a+b \Rightarrow \underline{a+b=0}$ (*)

$f_1(1) = 0$, $g_1(1) = 0$

$f_1', g_1', q_1' \rightarrow$ sunt derivatele lui f_1, g_1, q_1

$f_1'(x) = g_1(x)\cdot q_1'(x) + g_1'(x)\cdot q_1(x) + a$, Pt $x=1$ obținem:

1 e răd. multiplă de ordin 2 pt $g_1 \Rightarrow$

$f_1'(1) = a$

$f_1'(x) = (n+1)n x^n - n(n+1)x^{n-1} \Rightarrow f_1'(1) = 0$

$\Rightarrow a=0 \overset{(*)}{\Rightarrow} b=0$

Deci restul imp. este $\underline{zero}$.

SAU $f_1(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 =$

$= nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1 =$

$= nx^n(x-1) - (x^n - 1) =$

$= (x-1)\left[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)\right]$

$= (x-1)\left[(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + \dots + (x^n - 1)\right] =$

$= (x-1)\left[x^{n-1}(x-1) + x^{n-2}(x-1)(x+1) + \dots + (x-1)(x^{n-1} + \dots + x + 1)\right]$

$= (x-1)^2 \cdot g(x)$ $\Rightarrow$ restul imp. este 0.

pt $f_1(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ și $g_1(x) = (x+1)^2$ facem ca în prima sol.

observând că $f_1(-1) = n(-1)^{n+1} - (n+1)(-1)^n + 1 = (-1)^n(-n-n-1) + 1 =$

$= (-1)^{n+1}(2n+1) + 1 = -a + b$

Temă! $f_1'(-1) = (-1)^n 2n(n+1) = a$ $\Rightarrow \dots$

Obs Rădăcinile polinomului $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$, $n \geq 1$, sunt distincte 2 câte 2 și sunt $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}$, unde

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

(Moivre $\rightsquigarrow$ $\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $1 = \varepsilon^0$)

Viète

$$1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{n-1} = 0$$

(răd primitivă de ordin n a unității)

$n=3$ $\rightsquigarrow$ răd lui $X^3 - 1$ sunt $1, -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$n=4$ $\rightsquigarrow$ răd lui $X^4 - 1$ sunt $1, i, i^2, i^3$, adică $1, i, -1, -i$

$\left(\cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i\right)$

$n=5$ $\rightsquigarrow$ Puteți calcula explicit rădăcinile lui $X^5 - 1$?

$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$\Updownarrow$

Puteți calcula $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$?

$\boxed{\text{DA}}$!! (prima parte Viète)

ε_5 e rădăcina polinomului $\underline{X^4 + X^3 + X^2 + X + 1}$

$$X^5 - 1 = (X-1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$$

$$X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 = (X - \varepsilon_5)(X - \varepsilon_5^2)(X - \varepsilon_5^3)(X - \varepsilon_5^4)$$

$a := \cos\frac{2\pi}{5} = (\varepsilon_5 + \overline{\varepsilon_5})/2$

Deoarece ε_5 e răd. lui $x^4+x^3+x^2+x+1 \Rightarrow \varepsilon_5^4+\varepsilon_5^3+\varepsilon_5^2+\varepsilon_5+1=0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\varepsilon_5^2}$

$$\varepsilon_5^2+\varepsilon_5+1+\frac{1}{\varepsilon_5}+\frac{1}{\varepsilon_5^2}=0 \quad (*)$$

$\varepsilon_5 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$

$\overline{\varepsilon_5} = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\varepsilon_5}$

$|\varepsilon_5|=1$

$$\varepsilon_5+\frac{1}{\varepsilon_5} = \varepsilon_5+\overline{\varepsilon_5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = 2a$$

$$\varepsilon_5^2+\frac{1}{\varepsilon_5^2} = \left(\varepsilon_5+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)^2-2 = (2a)^2-2 = 4a^2-2 \quad \left(z\in\mathbb{C} \Rightarrow |z|^2 = z\cdot\overline{z}\right)$$

$(*)$ devine $\quad 4a^2-2+2a+1=0$

$4a^2+2a-1=0 \rightsquigarrow a_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

$\Rightarrow$

$a=\cos\frac{2\pi}{5}\in(0,1)$

$\Rightarrow a = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$; $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \rightsquigarrow \sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{2\pi}{5}} = \dots\dots$

Exc 5   Arătați că $x^4+x^3+x^2+x+1 \mid x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$.

Răd lui $\boxed{x^4+x^3+x^2+x+1}$ sunt $\boxed{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4}$ unde $\varepsilon=\varepsilon_5=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$

(distincte 2 câte 2)

$\boxed{\varepsilon^5=1}$

$f(x)=x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$

$f(\varepsilon)=\varepsilon^{44}+\varepsilon^{33}+\varepsilon^{22}+\varepsilon^{11}+1=(\varepsilon^5)^8\cdot\varepsilon^4+(\varepsilon^5)^6\cdot\varepsilon^3+(\varepsilon^5)^4\cdot\varepsilon^2+(\varepsilon^5)^2\cdot\varepsilon+1=$

$\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$

$f(\varepsilon)=\varepsilon^4+\varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$

analog $f(\varepsilon^2)=f(\varepsilon^3)=f(\varepsilon^4)=0$ (Temă!) $\xrightarrow[C12]{\text{vezi}}$ $x^4+x^3+x^2+x+1 \mid x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$

Exc 2   Det n $x^2+x+1 \mid x^{2n}+x^n+1$!

Răd. lui x^2+x+1 sunt $-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$ sau echivalent sunt ω, ω^2 unde $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

$f(\omega)=f(\omega^2)=0$, unde $f(x)=x^{2n}+x^n+1$. Tb să "rezolv" sist.

$$\begin{cases}\omega^{2n}+\omega^n+1=0\\ \omega^{4n}+\omega^{2n}+1=0\end{cases} \overset{(1)}{\iff} \omega^3=1$$

$\boxed{\omega^{2n}+\omega^n+1=0}$

(Exc!)

Analiza după rest. împ lui n la 3!

$\boxed{\begin{matrix}\omega^3=1\\ \omega^2+\omega+1=0 \text{ Viète}\end{matrix}}$ (1)

Aplicatie la Viètè

7 Rezolvati ecuatia in $\mathbb{R}$: $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$. $x \in [0, 97]$

$\mathbb{R} \ni u = \sqrt[4]{x}$, $v = \sqrt[4]{97-x}$, $\mathbb{R} \ni$ $\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$ $(\lozenge)$

u^4+v^4 se poate scrie in functie de $u+v$ si $u \cdot v$

Strategia: (1) notezi $\begin{cases} u+v=a \\ u \cdot v = b \end{cases}$ (evident aici $a=5$) ; (2) determini a si b si (3) apoi u si v

$u^4+v^4 = (u^2+v^2)^2 - 2u^2v^2 = \left[(u+v)^2 - 2uv\right]^2 - 2(uv)^2 = a^4 - 4a^2b + 4b^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$

$= \left[a^2 - 2b\right]^2 - 2b^2 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$

$(\lozenge) \iff \begin{cases} a=5 \\ 5^4 - 4 \cdot 5^2 \cdot b + 2b^2 = 97 \end{cases} \iff \begin{cases} a=5 \\ 2b^2 - 100b = -528 \end{cases}$

$2b^2 - 100b + 528 = 0$ $\quad b^2 - 50b + 264 = 0$ $\quad b_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{2500-1056}}{2} = \frac{50 \pm \sqrt{1444}}{2} = \frac{50 \pm 38}{2}$ $\begin{matrix} \nearrow 44 \\ \searrow 6 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ (I) $\begin{cases} a=5 \\ b=44 \end{cases}$ sau (II) $\begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases}$

I) $\begin{cases} a=5 \\ b=44 \end{cases} \rightsquigarrow$ u și v sunt rădăcinile pol $X^2-5X+44$ $(\Delta<0)$ $\underset{\circ\circ}{X}$ $(u,v\in\mathbb{R})$

II) $\begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases} \rightsquigarrow$ u și v sunt răd. pol $X^2-5X+6 \rightsquigarrow \begin{cases} u=2 \\ v=3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} u=3 \\ v=2 \end{cases}$

$\Rightarrow X=16$ sau $x=81$. Ecuația are 2 sol: 16 și 81.

⑧ (Teorema lui Wilson) Fie $p\in\mathbb{N}, p\geq 2$. Să se arate că
p - prim $\Longleftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Dem "$\Longleftarrow$" $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Pp red abs că p nu e prim $\Rightarrow$
$p=a\cdot b$ cu $1<a,b<p \Rightarrow$ $a\mid(p-1)!$ $(a\mid p)$; $a\mid p \mid (p-1)!+1$, $a\mid(p-1)!$ $\Big/ \Rightarrow a\mid 1$ $\underset{\circ\circ}{X}$ $(a>1)$

$\Rightarrow$ Pp e falsă $\Rightarrow p$ e prim.

"$\Longrightarrow$" $\underline{p \text{ e prim}} \Rightarrow (\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$ e corp ; $(\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\},\cdot) \to$ grup ab.

$\xrightarrow[p-1=|\mathbb{Z}_p\setminus\{\hat{0}\}|]{\text{Lagrange}} \hat{k}^{p-1}=\hat{1}$ $(\forall)\ \hat{k}\in\{\hat{1},\dots,\widehat{p-1}\} \Longrightarrow (\forall)\ \hat{k}\in\{\hat{1},\dots,\widehat{p-1}\}$ e rădăcină a polinomului

$f(X) = X^{p-1} - \hat{1} \in \mathbb{Z}_p[X]$. $\left(f(\hat{k}) = \hat{k}^{p-1} - \hat{1} = \hat{0} \right)$

$\mathrm{grad}(f) = p-1$

f are rădăcinile (distincte) $\hat{1}, \hat{2}, \ldots, \widehat{p-1}$ | vezi C12: f are cel mult $p-1$ răd. $\Longrightarrow$ f are doar răd. $\hat{1}, \ldots, \widehat{p-1}$.

$\Rightarrow f(X) = (X - \hat{1}) \cdot \ldots \cdot (X - \widehat{p-1}) \overset{\text{Viète}}{\Longrightarrow} \hat{1} \cdot \ldots \cdot \widehat{p-1} = (-1)^{p-1} \cdot (-\hat{1}) = (-1)^p \cdot \hat{1}$

$\Longrightarrow \widehat{(p-1)!} = (-1)^p \cdot \hat{1}$

Dc. $p = 2 \rightsquigarrow 1! = 1$ $\qquad \hat{1} = \hat{1}$ și se verifică că $(p-1)! \equiv -1 \ (2)$

Dc p impar $\rightsquigarrow (-1)^p = -1 \Rightarrow \widehat{(p-1)!} = -\hat{1} \Longrightarrow$

$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ ∎