Curs 12

Teoremă (Criteriul de diferențiabilitate). Fie $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ($f = (f_1, \dots, f_n)$) și $a \in \overset{\circ}{D}$. Dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în toate punctele din V $\forall i = \overline{1,m}$ (i.e. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$ $\forall c \in V$, $\forall i = \overline{1,m}$) și funcțiile

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : V \to \mathbb{R}^n \text{ sunt continue în } a \ (i = \overline{1,m}),$$

atunci f este diferențiabilă în a.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$. Studiați diferențiabilitatea funcției f în punctul $(1,2,3)$ și, în caz afirmativ, determinați $df(1,2,3)$.

Soluție. $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - y + 1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - x \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=2z-2\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ continue pe $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3$ deschisă (deci vecinătate pentru toate punctele sale)

$\xrightarrow[\text{de diferențiabilitate}]{\text{Criteriul}}$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ diferențiabilă în $(1,2,3)$.

$df(1,2,3):\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$, $df(1,2,3)(u,v,w)=$

$$=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 1-2+1=1}}\cdot u+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 2-1=3}}\cdot v+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,3)}_{\substack{\parallel \\ 2\cdot 3-2=4}}\cdot w=$$

$=u+3v+4w$, i. e. $df(1,2,3)=dx+3dy+4dz$. $\square$

<u>Exercițiu</u>. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0).\end{cases}$

a) Studiați continuitatea funcției f.

b) Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c) Studiați diferențiabilitatea funcției f.

<u>Soluție.</u> a) Vezi Seminar 5.

b) Fie $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(xy)'_x \sqrt{x^2+y^2} - (xy)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy)'_y \sqrt{x^2+y^2} - xy\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - xy\,\frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}.$$

! Nu e nevoie să faceți toate calculele dacă nu le folosiți mai departe.

„Au legătură"

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t e_1)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

„Au legătură"

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t e_2)-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1))-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(0,t))-f(0,0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}}-0}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

Am obținut:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ deschisă

$\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Studiem diferențiabilitatea lui f în $(0,0)$.

Dacă f ar fi diferențiabilă în $(0,0)$, atunci

$\underbrace{df(0,0)}_{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(0,0)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v =$

$= 0 \cdot u + 0 \cdot v = 0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$= 0 \Rightarrow f$ diferențiabilă în $(0,0)$

$\neq 0 \Rightarrow f$ nu e diferențiabilă în $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Fie $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0$, i.e.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|} \neq 0, \text{ i.e.}$$

f nu e diferențiabilă în $(0,0)$. □

<u>Diferențiabilitatea funcțiilor compuse</u>

<u>Teoremă</u>. Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $D_1 \subset \mathbb{R}^n$, $g : D \to D_1$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, $\varphi : D_1 \to \mathbb{R}^p$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ și $a \in \overset{\circ}{D}$ a.î. $g(a) \in \overset{\circ}{D_1}$.

Dacă g este diferențiabilă în a și φ este diferențiabilă în $g(a)$ atunci:

1) $\varphi\circ g: D\to\mathbb{R}^p$ este diferențiabilă în a și

$$\underbrace{d(\varphi\circ g)(a)}_{\substack{\text{diferențiala lui}\\ \varphi\circ g \text{ în } a}} = \underbrace{d\varphi(g(a))}_{\substack{\text{diferențiala}\\ \text{lui } \varphi \text{ în } g(a)}}\circ \underbrace{dg(a)}_{\substack{\text{diferențiala lui}\\ g \text{ în } a}}.$$

2) $$\frac{\partial(\varphi\circ g)_i}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_l}(g(a))\cdot\frac{\partial g_l}{\partial x_k}(a) \quad \forall k=\overline{1,m},\ \forall i=\overline{1,p}$$

<u>Explicații teoremă.</u> 1) $\mathbb{R}^m \xrightarrow{dg(a)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{d\varphi(g(a))} \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^m \xrightarrow{d\varphi(g(a))\circ dg(a)} \mathbb{R}^p$

2) $D\subset\mathbb{R}^m \xrightarrow{g} D_1\subset\mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^p$, $D \xrightarrow{\varphi\circ g} \mathbb{R}^p$

$(x_1,\dots,x_m)$ variabile $\quad (y_1,\dots,y_n)$ variabile

Au sens: $\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)\ \forall k=\overline{1,m}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(g(a))\ \forall i=\overline{1,n}$,

$\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x_k}(a)\ \forall k=\overline{1,m}$.

Nu au sens: $\frac{\partial g}{\partial y_i}(a)\ \forall i=\overline{1,n}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(g(a))\ \forall k=\overline{1,m}$,

$\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial y_i}(a)\ \forall i=\overline{1,m}$.

Exercițiu. Fie $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\varphi(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$. Determinați $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Soluție. Fie $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $g(x,y,z)=(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)$.

Avem $g=(g_1,g_2,g_3)$, unde $g_1,g_2,g_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$g_1(x,y,z)=xyz$, $g_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g_3(x,y,z)=x+yz$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z)\right)=$$

$$=(yz, 2x, 1)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z)\right)=$$

$$=(xz, 2y, z)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z), \frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z)\right)=$$

$$=(xy, 2z, y)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z} \text{ continue pe } \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3.$

$\left.\begin{array}{l} g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \\ \varphi \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3 \end{array}\right| \Rightarrow f=\varphi\circ g \text{ diferențiabilă pe } \mathbb{R}^3.$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g=(g_1,g_2,g_3)"] \arrow[rr, bend right, "f=\varphi\circ g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

(x,y,z) variabile $\quad$ (u,v,w) variabile

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z)+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z)=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)\cdot yz+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)\cdot 2x+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz)\cdot 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z)+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y,z)=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot xz\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot 2y\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z)+$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(g(x,y,z))\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(g(x,y,z))\cdot\frac{\partial g_3}{\partial z}(x,y,z)=$$

$$=\frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot xy\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot 2z\ +$$

$$+\frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz,\ x^2+y^2+z^2,\ x+yz)\cdot y.\ \square$$

<u>Observație.</u> În exercițiul precedent putem nota $g=(u,v,w)$, $u,v,w:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, i.e. $u=g_1$, $v=g_2$,

$w = g_3$.

$$\underset{\substack{(x,y,z)\\ \text{variabile}}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{g=(u,v,w)} \underset{\substack{(u,v,w)\\ \text{variabile}}}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

Aplicăm formulele precedente și obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial(\varphi\circ g)}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial \varphi}{\partial \underset{\text{variabilă}}{u}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overset{\text{funcție}}{u}}{\partial x}(x,y,z) +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \underset{\text{variabilă}}{v}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overset{\text{funcție}}{v}}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \varphi}{\partial \underset{\text{variabilă}}{w}}(g(x,y,z)) \cdot \frac{\partial \overset{\text{funcție}}{w}}{\partial x}(x,y,z) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot yz +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 2x +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w}(xyz, x^2+y^2+z^2, x+yz) \cdot 1.$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dots$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dots$ (Scrieți voi formulele!)