

## SEMINAR 4

### Elemente de topologie generală. Topologia unui spațiu metric

#### • Construcția topologiei asociată unei distanțe

$(X, d)$  spațiu metric

Distanței  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  i se asociază topologia  
 $\tau_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, \forall x \in G \exists r > 0 \text{ a.i. } B(x, r) \subseteq G\}$

Proprietăți a)  $B(x, r) \in \tau_d \forall x \in X, \forall r > 0$ .

b) Orice bilă închisă din  $X$  este mulțime închisă relativ la topologia  $\tau_d$ .

c)  $A \subseteq X$

$x_0 \in \hat{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ a.i. } B(x_0, r) \subseteq A$

d)  $A \subseteq X$

$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall r > 0$  avem că  $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

e)  $A \subseteq X$

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0$  avem că  $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

f)  $A \subseteq X$

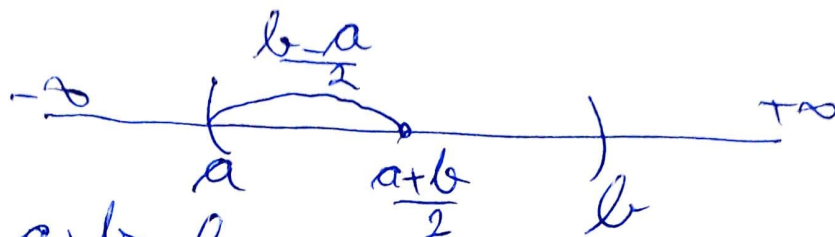
$x_0 \in \partial A \Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ a.i. } B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

#### • Topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

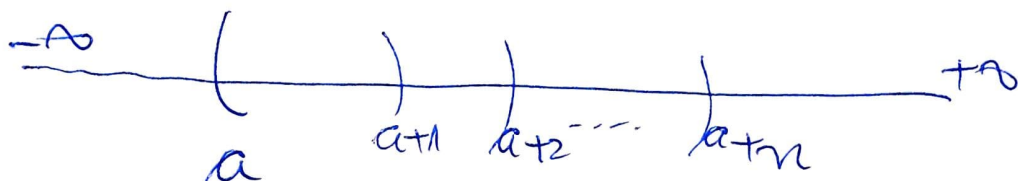
$(\mathbb{R}, d)$  spațiu metric

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$  distanța uzuală  
 $\tau_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_d$  topologia uzuală a lui  $\mathbb{R}$ .

Exercitiul 1 Se arată că  $(a, b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall a < b$ ,  
 $(a, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall a \in \mathbb{R}$  și  $(-\infty, b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall b \in \mathbb{R}$   
REZOLVARE



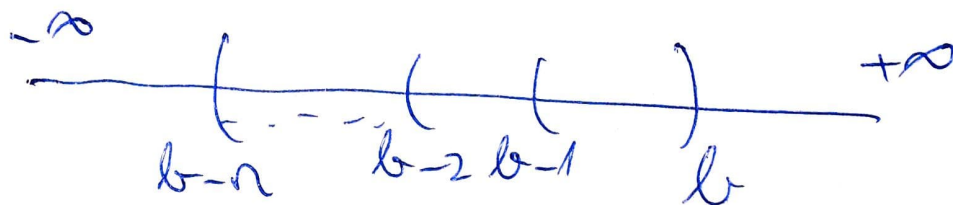
$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall a < b$$



$$(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (a, a+n)$$

$$(a, a+n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (a, a+n) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$



$$(-\infty, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (b-n, b)$$

$$(b-n, b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (b-n, b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-\infty, b) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}.$$

Exercițiul 2 Să se arate că  $[a, b]$  cu  $a < b$ ,  $[a, +\infty)$  și  $(-\infty, b]$  sunt mulțimi închise în  $\mathbb{R}$ .

REZOLVARE

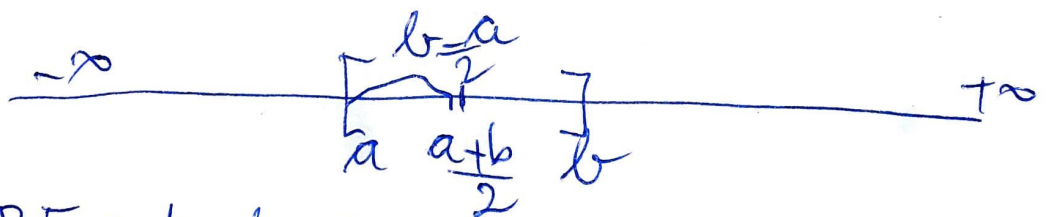
$$C_{\mathbb{R}}[a, b] = \mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

Conform exercitiului 1, avem că  $(-\infty, a) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$  și  $(b, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ .

$$\begin{aligned} (-\infty, a) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \\ (b, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \end{aligned} \not\Rightarrow (-\infty, a) \cup (b, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}}[a, b] \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$$

$\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} [a, b]$  mulțime închisă din  $\mathbb{R}$

Altă variantă de argumentare a faptului că  $[a, b]$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$  este descrierea acestui interval ca o bilă închisă în  $\mathbb{R}$ .



$$[a, b] = B\left[\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right]$$

$$C_{\mathbb{R}}[a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \text{ (conform exercitiului 1)}$$

$$C_{\mathbb{R}}[a, +\infty) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} [a, +\infty) \text{ mulțime închisă în } \mathbb{R}$$



$$C_{\mathbb{R}}[\cancel{b}, \cancel{+\infty}] = \mathbb{R}$$

$$C_{\mathbb{R}}(-\infty, b] = \mathbb{R} \setminus (-\infty, b] = (b, +\infty) \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \text{ (conform exercitiului 1)}$$

$$C_{\mathbb{R}}(-\infty, b] \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{\implies} (-\infty, b] \text{ mulțime închisă din } \mathbb{R}.$$

Exercițiul 3 Fie  $a < b \in \mathbb{R}$ . Să se arate că  $[a, b)$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$  și că nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

REZOLVARE



Alegem elementul  $a \in [a, b)$

Se observă că  $(a-r, a+r) \not\subset [a, b) \forall r > 0 \implies$

$\implies \exists (a-r) \notin [a, b) \forall r > 0.$

Din definiția topologiei  $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$  deducem că

$[a, b) \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \implies [a, b)$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

$$C_{\mathbb{R}}[a, b) = \mathbb{R} \setminus [a, b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$$



Fie  $b \in C_{\mathbb{R}}[a, b)$

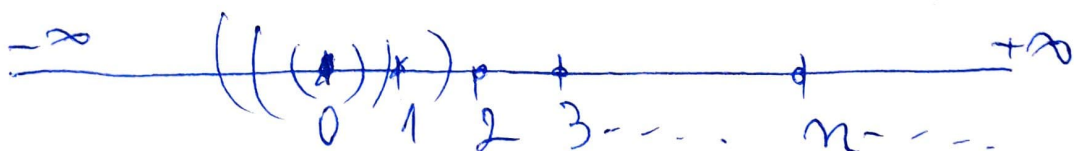
Se observă că  $(b-r, b+r) \not\subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[a, b) \forall r > 0$   
 $\Rightarrow B(b, r) \not\subset \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[a, b) \forall r > 0 \Rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}[a, b) \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$   
 $\Rightarrow [a, b)$  nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Exercițiul 4 Fie  $a < b \in \mathbb{R}$ . Să se arate că  
 $(a, b]$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$  și că  
 $[a, b]$  nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Exercițiul 5 a) Să se arate că  $\mathbb{H}$  este mulțime  
 închisă în  $\mathbb{R}$ , dar nu este mulțime deschisă  
 în  $\mathbb{R}$ .

b) Să se arate că orice mulțime finită  
 $A \subset \mathbb{R}$  este închisă în  $\mathbb{R}$ , dar nu este mulțime  
 deschisă în  $\mathbb{R}$ .

REZOLVARE



Alegem elementul  $0 \in \mathbb{H}$

Se observă că  $(0-r, 0+r) \not\subset \mathbb{H} \forall r > 0 \Rightarrow B(0, r) \not\subset \mathbb{H} \forall r > 0$   
 $\Rightarrow \mathbb{H} \notin \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{H}$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \mathbb{H} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{H} = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \dots \cup (n, n+1) \cup \dots$   
 $= (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1)$ .

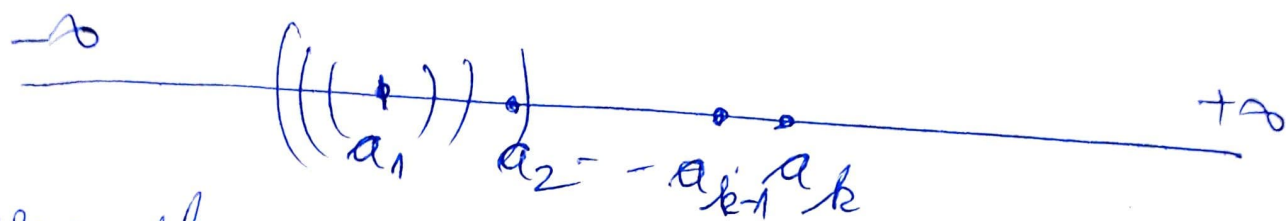


$$(-\infty, 0) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

$$(n, n+1) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \parallel \Rightarrow (0, \infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n, n+1) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \nexists$  mulțime ~~deschisă~~ închisă în  $\mathbb{R}$ .

$$b) A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}$$



Alegem elementul  $a_1 \in A$ .

Se observă că  $(a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon) \not\subseteq A \forall \epsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(a_1, \epsilon) \not\subseteq A \forall \epsilon > 0 \Rightarrow A \notin \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \Rightarrow A$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

$$C_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup \dots \cup (a_{k-1}, a_k) \cup (a_k, +\infty)$$

$$(-\infty, a_1) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

$$(a_k, +\infty) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

$$(a_i, a_{i+1}) \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \forall 1 \leq i \leq k-1 \parallel \Rightarrow \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} A \in \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$$

Exercițiul 5 Să se demonstreze că  $\mathbb{Z}$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ , dar nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

Exercițiul 6 Să se arate că  $\mathbb{Q}$  nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Rezolvare Demonstrăm prin reducere la absurd că  $\mathbb{Q}$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

Presupunem că  $\mathbb{Q}$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \forall x \in \mathbb{Q} \exists r > 0$  a.i.  $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{Q}$

Fiind  $x=0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r > 0$  a.i.  $(0-r, 0+r) \subseteq \mathbb{Q} \Rightarrow (-r, r) \subseteq \mathbb{Q}$   
 $-\frac{r}{2} \in (-r, r)$

$\frac{r}{2} \in (-r, r)$

Între numerele reale  $-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}$  există cel puțin un număr irațional  $\alpha$ .

$-\frac{r}{2} \leq \alpha \leq \frac{r}{2} \Rightarrow \alpha \in (-r, r) \stackrel{(-r, r) \subseteq \mathbb{Q}}{\Rightarrow} \alpha \in \mathbb{Q}$  contradicție

Presupunerea făcută este falsă  $\Rightarrow \mathbb{Q}$  nu este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ .

Demonstrăm prin reducere la absurd că  $\mathbb{Q}$  nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Presupunem că  ~~$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$~~   $\mathbb{Q}$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R} \Rightarrow C_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \exists r > 0$  a.i.  $(x-r, x+r) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Fiind  $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \exists r > 0$  a.i.  $(\sqrt{2}-r, \sqrt{2}+r) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Între numerele reale  $\sqrt{2}-\frac{r}{2}$  și  $\sqrt{2}+\frac{r}{2}$  există cel puțin un număr rațional  $\beta$ .

$$\sqrt{2} - \frac{\epsilon}{2} \leq \beta \leq \sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \beta \in (\sqrt{2} - \epsilon, \sqrt{2} + \epsilon) \quad \parallel \Rightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

contradicție

Presupunerea făcută este falsă  $\Rightarrow A$  nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Exercițiul 7 Să se arate că  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nu este mulțime deschisă și mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ .

Exercițiul 8 Fie  $A = [a, b) \cup \{c\}$  cu  $a < b < c$ .

1) Să se determine  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overline{A}$ ,  $\text{Fr} A$ ,  $A'$  și  $\gamma_{\mathbb{R}} A$ .

2) Este  $A$  mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ ?

3) Este  $A$  mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ ?