Curs 3

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

Definiție. Fie $\sum_n x_n$ o serie de numere reale. Spunem că această serie este absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziție. Orice serie de numere reale absolut convergentă este convergentă.

Observație. Reciproca propoziției anterioare nu este, în general, adevărată.

1. Criteriile Abel-Dirichlet

I. Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Există $M>0$ astfel încât, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, avem

$$|y_0 + y_1 + \ldots + y_n| \leq M.$$

ii) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Scanned with CamScanner

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

II. Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ și $(y_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton și mărginit.

ii) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă.

Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot y_n$ este convergentă.

2. <u>Criteriul lui Leibniz.</u> Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ un șir descrescător astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

<u>Exercițiu.</u> Fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Arătați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este divergentă.

<u>Soluție.</u> a) Fie $x_n = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Observăm că $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Scanned with CamScanner

Conform Criteriului lui Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$). $\square$

Topologie

Definiție. Fie $X \neq \phi$. O mulțime $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se numește topologie pe X dacă:

1) $\phi, X \in \mathcal{T}$.
2) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{T}$, avem $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$.
3) $\forall (D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, avem $\bigcup_{i \in I} D_i \in \mathcal{T}$.

Definiție. Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ o topologie pe X. Perechea $(X, \mathcal{T})$ se numește spațiu topologic.

Exemple. 1) Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} = \{\phi, X\}$. Perechea

Scanned with CamScanner

$(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

2) Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

3) Fie $X = \mathbb{R}$ și $\mathcal{T} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \cup \{\phi, \mathbb{R}\}$. Perechea $(X, \mathcal{T})$ este spațiu topologic.

Justificare pentru 3). a) $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (evident).

b) Fie $D_1, D_2 \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = \phi$ sau $D_2 = \phi$, atunci $D_1 \cap D_2 = \phi \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = \mathbb{R}$ sau $D_2 = \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = D_2 \in \mathcal{T}$ sau $D_1 \cap D_2 = D_1 \in \mathcal{T}$. Dacă $D_1 = (-\infty, a_1)$ și $D_2 = (-\infty, a_2)$ cu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, atunci $D_1 \cap D_2 = \left(-\infty, \min\{a_1, a_2\}\right) \in \mathcal{T}$.

Deci $D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$.

c) Fie $(D_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$. Dacă $\exists\, i_0 \in I$ a.î. $D_{i_0} = \mathbb{R}$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Dacă $D_i = \phi$ $\forall i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i = \phi \in \mathcal{T}$.

Fără a restrânge generalitatea presupunem că $D_i = (-\infty, a_i)$ $\forall i \in I$.

Avem $\bigcup_{i\in I} D_i = (-\infty, \sup_{i\in I} a_i) \in \tau$.

Așadar $\bigcup_{i\in I} D_i \in \tau$.

Fie (X, τ) un spațiu topologic.

<u>Definiție.</u> 1) O mulțime $G \subset X$ se numește mulțime deschisă dacă $G \in \tau$.

2) O mulțime $F \subset X$ se numește mulțime închisă dacă $X \setminus F \overset{\text{def.}}{=} CF \in \tau$ (complementara lui F este mulțime deschisă).

3) Fie $x \in X$. O mulțime $V \subset X$ se numește vecinătate a lui x dacă $\exists D \in \tau$ astfel încât $x \in D \subset V$.

<u>Notație.</u> Pentru orice $x \in X$, $\mathcal{V}_x \overset{\text{not.}}{=} \{V \subset X \mid V \text{ vecinătate a lui } x\}$.

<u>Definiție.</u> Fie $(x_n)_n \subset X$ și $x \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita x în raport cu topologia τ sau că șirul $(x_n)_n$ converge către x în raport cu topologia τ și scriem $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{\tau}{=}$

Scanned with CamScanner

$\stackrel{\tau}{=} x$ sau $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\tau} x$ dacă $\forall V \in \mathcal{V}_x$, $\exists n_V \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_V$, avem $x_n \in V$.

Observație. Sintagma „în raport cu topologia τ" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul topologic (X, τ)".

Definiție. O mulțime $K \subset X$ se numește mulțime compactă dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a sa se poate extrage o subacoperire finită (i.e. $\forall (D_i)_{i\in I} \subset \tau$ a.î. $K \subset \bigcup_{i\in I} D_i$, $\exists J \subset I$, J finită cu proprietatea că avem incluziunea $K \subset \bigcup_{j\in J} D_j$).

Analiza topologică a unei mulțimi

Fie (X, τ) un spațiu topologic, $A \subset X$ și $x_0 \in X$.

Definiție. Spunem că x_0 este:

1) punct interior al lui A dacă $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ (i.e. $\exists D \in \tau$ astfel încât $x_0 \in D \subset A$).

Scanned with CamScanner

2) punct aderent (sau de aderență) al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap A \neq \emptyset$.

3) punct de acumulare al lui A dacă $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0}$, avem $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.

4) punct frontieră al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct interior al lui A.

5) punct izolat al lui A dacă x_0 este punct aderent al lui A și nu este punct de acumulare al lui A.

<u>Notații.</u> 1) $\mathring{A} \overset{\text{not.}}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct interior al lui $A\}$.

2) $\overline{A} \overset{\text{not.}}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct aderent al lui $A\}$.

3) $A' \overset{\text{not.}}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de acumulare al lui $A\}$.

4) $\mathrm{Fr}(A) = \partial A \overset{\text{not.}}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct frontieră al lui $A\}$.

5) $\mathrm{Izo}(A) = {}'A \overset{\text{not.}}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct izolat al lui $A\}$.