Seminar 7 - 143

Teorema lui Lagrange: Fie G un grup finit și H un subgrup al său. Atunci $|G| = |H| \cdot \underbrace{|G:H|}_{\text{indicele lui } H \text{ în } G}$.

$|G:H| = |G/H|$.

Ordinul unui element într-un grup

Fie G grup, $x \in G$, e elem. neutru în G.
$ord(x) = n \Leftrightarrow x^n = e$ și n este cel mai mic nr. nat. nenul cu această proprietate.

Ex 1: Fie G un grup, $a, b \in G$ de ordin finit, $ord(a) = m$, $ord(b) = n$. Arătați că dacă $(m,n) = 1$ și $ab = ba$, atunci $ord(ab) = m \cdot n$.

Rez:

$(ab)^{mn} = a^{mn} \cdot b^{mn} = (a^m)^n \cdot (b^n)^m = e$.

Arătăm că mn este min cu propr.

Pp. că $\exists\ 0 < k < mn$ cu $(ab)^k = e$.

$k \mid mn$

$(ab)^k = a^k b^k = e \Rightarrow a^k = b^{-k} \mid^m$

$(a^m)^k = b^{-mk} \Rightarrow b^{-mk} = e$

$ord(b) = n \Rightarrow ord(b^{-1}) = n$

$\left.\begin{array}{l} b^{mk} = e \\ ord(b) = n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} n \mid mk \\ (m,n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid k$

$b^n = e$

$ord(b^{-1}) = l \Rightarrow b^{-l} = e \mid \cdot b^l$

$e = b^l$

Analog, $a^{nk} = e \Rightarrow m \mid k$.

$\left.\begin{array}{l} n \mid k \\ m \mid k \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} [m,n] \mid k \\ (m,n) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} mn \mid k. \\ k \mid mn \end{array}\right\} \Rightarrow k = mn.$

Obs: Dacă eliminăm condiția $(m,n) = 1$, atunci $ord(ab) = [m,n]$.

T: Fie G grup, $x \in G$ de ordin finit, $ord(x) = n$. Atunci $\forall k \in \mathbb{N}$, $ord(x^k) = \frac{n}{(n,k)}$, unde $(n,k) = cmmdc(n,k)$.

Indicație: $d = (n,k)$, $n = d \cdot n'$, $k = d \cdot k'$.

Obs: În particular, dacă $(n,k) = 1$, atunci $ord(x^k) = n$.

Obs: Fie G un grup finit, $|G| = n$ și $x \in G$. Atunci $ord(x) = k < \infty$ și, mai mult, $k | n$.

Ex. 2: Scrieți subgrupurile lui $(\mathbb{Z}_{12}, +)$

Rez: $\mathbb{Z}_{12}$, $\{\hat{0}\}$

$U(\mathbb{Z}_{12}, \cdot) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$

$\langle \hat{1} \rangle = \mathbb{Z}_{12} = \langle \hat{5} \rangle = \langle \hat{7} \rangle = \langle \hat{11} \rangle$.

$\langle \hat{a} \rangle = \{\widehat{m \cdot a} \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

$\hat{5} \in U(\mathbb{Z}_{12}) \Rightarrow \exists\, \hat{b} \in \mathbb{Z}_{12}$ a.î. $\hat{5}\hat{b} = \hat{1}$

$\langle \hat{2} \rangle = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8}, \hat{10}\} = \langle \hat{10} \rangle$.

$\langle \hat{3} \rangle = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{9}\} = \langle \hat{9} \rangle$

$\langle \hat{4} \rangle = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{8}\} = \langle \hat{8} \rangle$

$\langle \hat{6} \rangle = \{\hat{0}, \hat{6}\}$

Obs: Dacă G este grup ciclic, $G = \langle x \rangle$, $G = \{1, x, x^2, \dots\}$. Subgr. sunt $\langle x^k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$.
Dacă G finit, $G = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$. Subgrupurile sale sunt de forma $\langle x^k \rangle$ cu $k | n$.

Exemplu: Subgrupurile lui $\mathbb{Z}$ sunt $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. ($n \in \mathbb{Z}$).

Revenim la Ex: Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{12}$ sunt:
$\{\hat{0}\}$, $\langle \hat{2} \rangle$, $\langle \hat{3} \rangle$, $\langle \hat{4} \rangle$, $\langle \hat{6} \rangle$, $\mathbb{Z}_{12}$.

$\langle\hat{2},\hat{3}\rangle \ni \hat{1}=\hat{3}-\hat{2}. \Rightarrow \langle\hat{2},\hat{3}\rangle=\mathbb{Z}_{12}.$

$\langle\hat{a},\hat{b}\rangle \ni \hat{d}$, unde $d=(a,b)$.

Justificare: $(a,b)=d \Rightarrow \exists\ m,n\in\mathbb{Z}$ a.î. $d=a\cdot m+b\cdot n$.

Exemplu: $\langle a,b\rangle$ în $\mathbb{Z}$. $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=d\mathbb{Z}$.

$a\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}=m\mathbb{Z}$, $m=[a,b]$.

$\mathbb{Z}_{12}/\{\hat{0}\}\cong\mathbb{Z}_{12}$ $\quad(G/\{e\}\cong G)$.

$\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_{12}=\{\hat{0}\}$ $\quad(G/G\cong\{e\})$.

$\mathbb{Z}_{12}/\langle\hat{3}\rangle=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}\cong\mathbb{Z}_3$.

Lagrange: $|\mathbb{Z}_{12}|=|\langle\hat{3}\rangle|\cdot|\mathbb{Z}_{12}:\langle\hat{3}\rangle|$

$12=4\cdot|\mathbb{Z}_{12}:\langle\hat{3}\rangle| \Rightarrow |\mathbb{Z}_{12}/\langle\hat{3}\rangle|=3.$

$\mathbb{Z}_{12}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7},\hat{8},\hat{9},\hat{10},\hat{11}\}$

$\mathbb{Z}_{12}/\langle\hat{3}\rangle$: $\hat{0}\to 0$, $\hat{3}\to 0$, $\hat{4}=\hat{3}+\hat{1}\to 0$, $\hat{5}\to 2$, $\hat{6}\to 0$, $\hat{7}\to 1$, $\hat{8}\to 2$, $\hat{9}\to 0$, $\hat{10}\to 1$, $\hat{11}\to 2$.

Ex. 3: În S_4 se consideră subgrupul

$H=\{e,(1\,2)(3\,4),(1\,3)(2\,4),(1\,4)(2\,3)\}$

$(1\,2)=\sigma_{12}$.

Calculați S_4/H și arătați că $S_4/H\cong S_3$.

Rez: Lagrange: $|S_4|=|H|\cdot|S_4/H|$

$24=4\cdot|S_4/H| \Rightarrow |S_4/H|=6$.

În S_4/H: $\widehat{(1\,2)(3\,4)}=\hat{e} \Rightarrow \widehat{(1\,2)}=\widehat{(3\,4)}$

La fel: $\widehat{(1\,3)}=\widehat{(2\,4)}$ și $\widehat{(1\,4)}=\widehat{(2\,3)}$.

În S_4/H: $\hat{e}=\{x\in H\}$

Obs: S_4/H poate fi văzut ca $S_4/\sim$, unde $x\sim y \Leftrightarrow x\circ y^{-1}\in H$

Exemplu: $(\mathbb{Z},+)$, $n\mathbb{Z}$ subgrup în $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

$$\underset{\tau_{12}}{(1\ 2)}\underset{\cdot\ \tau_{34}}{(3\ 4)} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$(4)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$

$$(1\ 3\ 2) = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}$$

$$(1\ 3\ 2\ 4) = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$S_4 = \{e\} \cup \{6 \text{ transp.}\} \cup \{\text{cicli de lung. } 3\} \cup \{\text{cicli de lungime } 4\}$

$S_4/H = \{\hat{e}, \widehat{(1\ 2)}, \widehat{(1\ 3)}, \widehat{(2\ 3)}, \widehat{(1\ 2\ 3)}, \widehat{(1\ 3\ 2)}\}$.

Obs: În S_n orice permutare se poate scrie ca produs de transpoziții. $S_n = \langle\{\text{transpoziții}\}\rangle$

$S_4/H = \langle\{\text{clasele transpozițiilor}\}\rangle = \langle\{\widehat{(1\ 2)}, \widehat{(1\ 3)}, \widehat{(2\ 3)}\}\rangle \simeq S_3$.

$$\widehat{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}} = \widehat{(2\ 4\ 3)} = \widehat{(2\ 4)(4\ 3)} =$$

$$= \widehat{(2\ 4)}\widehat{(4\ 3)} = \widehat{(1\ 3)}\widehat{(1\ 2)} = \widehat{(1\ 2\ 3)}.$$

Obs: Un grup cu 6 elem. este izomorf cu $\mathbb{Z}_6$ sau cu S_3.

$\mathbb{Z}_6$ ↓ com., are elem. de ord(6) S_3 ↓ necom.

S_4/H = grup, $|S_4/H| = 6$.

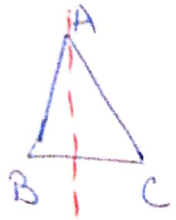
Grup diedral (grupul simetriilor)

Se not: D_{2n} $(= D_n)$ = grupul „simetriilor" unui poligon regulat cu n laturi.

$|D_{2n}| = 2n$.

Ex. 4: Să se descrie grupul diedral D_6. Este izomorf cu $\mathbb{Z}_6$ sau cu S_3?

Rez:

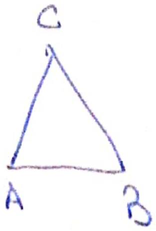


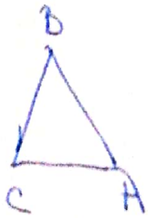
Not. r = rotația de unghi $\frac{2\pi}{3}$ în sens trig.

s = simetria față de axa fixată.

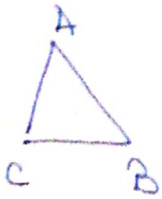
$D_6 = \langle s, r \rangle$.

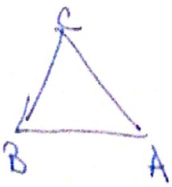
$e =$ 

$r =$ 

$r^2 =$ 

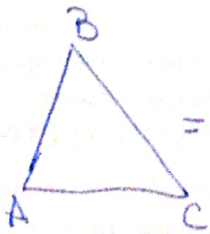
$r^3 = e$.

$s =$ 

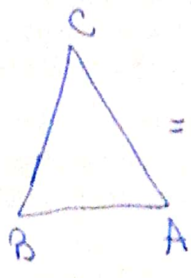
$sr =$ 

$sr^2 =$ 

$s^2 = e$

$rs =$ 

$= sr^2$

$r^2 s =$ 

$= sr$.

$D_6 = \{e, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

Obs: În general, $D_{2n} = \{e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$, unde r = rotație de unghi $\frac{2\pi}{n}$ $(r^n = e)$ și s = simetrie față de o axă fixată $(s^2 = e)$.

$D_6 \simeq S_3$.

T: Arătați că S_3 este generat de $(1\ 2)$ și $(1\ 2\ 3)$.

$f : D_6 \to S_3$, $f(s) = (1\ 2)$

izomorfism $\quad f(r) = (1\ 2\ 3)$

$f(s^k r^l) = (f(s))^k (f(r))^l$

Obs: $f: G \to H$ morfism, $x \in G$, cu $\operatorname{ord}(x) = m$, $y = f(x)$.

$\Rightarrow y^m = e_H$.

Mai mult, dacă f este izomorfism, $\operatorname{ord}(y) = m$.