Tutoriat 1

~ topologie & metrică. şiruri ~

1. Spaţii metrice:

Def: Se numeşte distanţa pe mulţimea X o funcţie $d: X\times X \to \mathbb{R}$ care are urm propr:

i) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall\, x,y \in X$

ii) $d(x,y) \geq 0$, $\forall\, x,y \in X$

iii) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall\, x,y,z \in X$

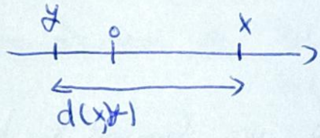
Def. Se numeşte spaţiu metric o mulţime nevidă X pe care se defineşte cel puţin o distanţa $d: X\times X \to \mathbb{R}$

Exemple:

1° $(\mathbb{R}, d)$ spaţiu metric

$d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $d(x,y) = |x-y|$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ ← distanţa uzuală a lui $\mathbb{R}$

ex: $x = 5$, $y = -2$



$d(x,y) = |5-(-2)| = 7$

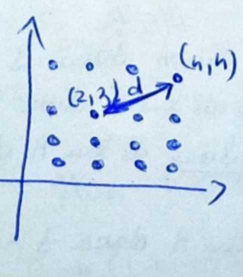
2° $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$

$(\mathbb{R}^k, d_2)$ spaţiu metric

$d_2: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$; $d((x_1, \dots x_k), (y_1, \dots, y_k)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_k-y_k)^2}$

↳ distanţa uzuală a lui $\mathbb{R}^k$

ex: $x = (2,3)$, $y = (4,4)$.



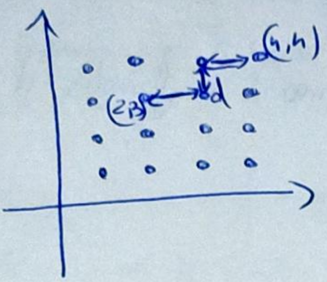
$d(x,y) = \sqrt{(2-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

3° $\mathbb{R}^K, d_1, K \geq 2$

$d_1 : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$

$d_1((x_1, \dots x_K), (y_1, \dots y_K)) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_K - y_K|$ ← distanța "Taxi"

ex: $x = (2,3)$, $y = (4,4)$.



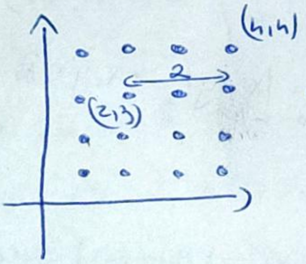
$d(x,y) = |2-4| + |3-4| = 2+1 = 3.$

4° $(\mathbb{R}^K, d_\infty)$, $K \geq 2$

$d_\infty : \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}$, $d_\infty((x_1 \dots x_K), (y_1, \dots y_K)) = \max |x_i - y_i|, 1 \leq i \leq K$

ex: $x = (2,3)$, $y = (4,4)$.

2	2	2	2	2
2	1	1	1	2
2	1	0	1	2
2	1	1	1	2
2	2	2	2	2



$d(x,y) = \max(|2-4|, |3-4|) = \max(2,1) = 2.$

<u>Definiție</u> Fie (X, d) un spațiu metric, un element x_0 din spațiul metric și un număr real $r > 0$.

a) Se numește <u>bilă deschisă</u> de centru x_0 și rază r mulțimea

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

b) Se numește <u>bilă închisă</u> de centru x_0 și rază r mulțimea

$$B[x_0, r] = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

<u>Definiție</u>: $\mathring{A} \subseteq A$.

$\mathring{A}$ a) $x_0 \in A$ este <u>punct interior</u> al lui A dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \subset A$

$\overline{A}$ b) $x_0 \in A$ este <u>punct de aderență</u> al lui A dacă $\forall\, r > 0$ $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

A' c) $x_0 \in A$ este <u>punct de acumulare</u> al lui A dacă $\forall\, r > 0$, $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

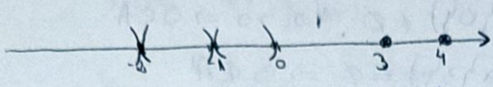
Izo A d) $x_0 \in A$ este <u>punct izolat</u> al lui A dacă $\exists\, r > 0$ a.î. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

Fr A e) $x_0 \in A$ este <u>punct de frontieră</u> al lui A dacă x_0 e pct aderent din A și nu e punct interior al lui A.

Probleme

① Se consideră mulțimea $A = ((-\infty, 0) \setminus \{-1, -2\}) \cup \{3, 4\}$. Să se determine $\mathring{A}$ (pct. interioare), $\bar{A}$ (pct. de aderență), Fr A, A' (pct. de acumulare), Izo A.

Soluție:



$A = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup \{3, 4\}$

τ topologie pe $X \Leftrightarrow$ $\emptyset, X \in \tau$; $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$; $G_i \in \tau, \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

$\boxed{\mathring{A} = ?}$

avem propr:
$\mathring{A} \subseteq A$
$G \in \tau, G \subseteq A \to G \subseteq \mathring{A}$
$A \in \tau \Leftrightarrow A = \mathring{A}$

$(-\infty, -2) \subseteq A$, $(-\infty, -2) \subset \tau_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow (-\infty, -2) \subseteq \mathring{A}$

$(-1, 0) \subseteq A$, $(-1, 0) \subseteq \tau_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow (-1, 0) \subseteq \mathring{A}$

$(-2, -1) \subseteq A$, $(-2, -1) \subseteq \tau_{\mathbb{R}}$ $\Rightarrow (-2, -1) \subseteq \mathring{A}$

$\Rightarrow (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \subseteq \mathring{A}$

$\mathring{A} \subseteq A \Rightarrow \mathring{A} \subseteq ((-\infty, 0) \setminus \{-2, -1\}) \cup \{3, 4\}$

Avem că: $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \subseteq \mathring{A} \subseteq ((-\infty, 0) \setminus \{-2, -1\}) \cup \{3, 4\}$

Se observă că $B(-2, r) \not\subseteq A, \forall r > 0 \Rightarrow -2 \notin \mathring{A}$
$B(-1, r) \not\subseteq A, \forall r > 0 \Rightarrow -1 \notin \mathring{A}$
$B(3, r) \not\subseteq A, \forall r > 0 \Rightarrow 3 \notin \mathring{A}$
$B(4, r) \not\subseteq A, \forall r > 0 \Rightarrow 4 \notin \mathring{A}$

$\Rightarrow \boxed{\mathring{A} = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0)}$

$A \neq \mathring{A} \Rightarrow A \notin \tau_{\mathbb{R}}$

$\boxed{\bar{A} = ?}$

Luăm $F = (-\infty, 0] \cup \{3, 4\}$ mulțime închisă, $A \subseteq F$ $\Rightarrow \bar{A} \subseteq F \Rightarrow$

$A \subseteq \bar{A}$
$A \subseteq F$, F mulț. închisă $\Rightarrow \bar{A} \subseteq F$
A mulț. închisă $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3, 4\}$. $\Rightarrow$

Știm $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow ((-\infty, 0) \setminus \{-2, -1\}) \cup \{3, 4\} \subseteq \bar{A}$

$\Rightarrow A \subseteq \bar{A} \subseteq F \Rightarrow ((-\infty, 0) \setminus \{-2, -1\}) \cup \{3, 4\} \subseteq \bar{A} \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3, 4\}$.

Se observă că: $B(-2, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0 \Rightarrow -2 \in \bar{A}$; $B(0, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0 \Rightarrow 0 \in \bar{A}$
$B(-1, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0 \Rightarrow -1 \in \bar{A}$; $\Rightarrow \boxed{\bar{A} = (-\infty, 0] \cup \{3, 4\}}$ $\boxed{A \neq \bar{A} \Rightarrow A \text{ mult. închisă}}$

$\boxed{Fr\, A = ?}$ $\qquad Fr\, A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (-\infty, 0] \cup \{3, 4\} \setminus ((-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0)) =$

$Fr\, A = \bar{A} \cap \overline{C_X A}$ $\qquad \Rightarrow \boxed{Fr\, A = \{-2, -1, 0, 3, 4\}}$

$Fr\, A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

$\boxed{A' = ?}$ $\qquad A' \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (-\infty, 0] \cup \{3, 4\}$

$A' \subseteq \bar{A}$

$\bar{A} = A \cup A'$

A mulțime înch

Căutăm punctele de acumulare ale mulțimii A printre punctele de aderență ale mulțimii A

Obs că $B(0, r) \cap (A \setminus \{0\}) \neq \emptyset,\ \forall r > 0 \Rightarrow 0 \in A'$

$B(3, r) \cap (A \setminus \{3\}) = \emptyset \Rightarrow 3 \notin A'$ (putem să luăm $r = 1/2$)

$B(4, r) \cap (A \setminus \{4\}) = \emptyset \Rightarrow 4 \notin A'$

Fie $\alpha \in (-\infty, 0)$; $\alpha \in A'$? Obs că $B(\alpha, r) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset,\ \forall r > 0$

$\Rightarrow \alpha \in A'$

$\boxed{A' = (-\infty, 0]}$

$\boxed{Izo\, A = ?}$ $\qquad Izo\, A \subseteq A \setminus A' \Rightarrow Izo\, A \subseteq ((-\infty, 0) \setminus \{-2, -1\}) \cup \{3, 4\} \setminus (-\infty, 0]$

$Izo\, A \subseteq A \setminus A'$ $\qquad \Rightarrow Izo\, A \subseteq \{3, 4\}$

Se obs că $B(3, \frac{1}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}) \cap A = \{3\} \Rightarrow 3 \in Izo\, A$

$B(4, \frac{1}{2}) = (\frac{7}{2}, \frac{9}{2}) \cap A = \{4\} \Rightarrow 4 \in Izo\, A$

$\Rightarrow \boxed{Izo\, A = \{3, 4\}}$

Șiruri de numere reale

Noțiuni: mărginit, cresc / desc / monoton, limită $+\infty$ / $-\infty$, convergent / divergent

Lema lui Cesaro: Orice șir mărginit de nr reale are cel puțin un subșir convergent.

Teorema lui Weierstrass (pt șiruri de nr reale): Un șir de nr reale monoton și mărginit este convergent

Criterii de convergență:

$\mathbb{R}$ ①. **Criteriul clештelui** ($\mathbb{R}$): $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care îndeplinesc:

i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le y_n \le z_n, \forall n \ge n_0$

ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente

iii) $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$

$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent cu $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n$

$\mathbb{R}_+$ ②. **Criteriul raportului**: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

a) dacă $l < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

b) dacă $l > 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

$\mathbb{R}_+$ ③. **Criteriul radicalului**: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

$\mathbb{R}$ ④. **Lema lui Stolz-Cesaro** $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care îndeplinesc

i) $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e str cresc SAU $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ str desc

ii) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

⑤. **Lema lui Stolz-Cesaro** $\left(\frac{0}{0}\right)$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care îndeplinesc:

i) $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e str. monoton

ii) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n\cdot\sin(n!)}{n^2+3}$

Știm că $\sin x \in [-1,1], \forall x \in \mathbb{R}$.

Avem deci $-1 \le \sin(n!) \le 1 \,\Big|\cdot \frac{2n}{n^2+3}$

$$\Leftrightarrow -\frac{2n}{n^2+3} \le \frac{2n\cdot\sin(n!)}{n^2+3} \le \frac{2n}{n^2+3}$$

$$0$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2n}{n^2+3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+3} = 0$, din criteriul cleștelui deducem

că și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n\cdot\sin(n!)}{n^2+3} = 0$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{2^n\cdot n^n}$; notăm $a_n = \frac{5^n\cdot n!}{2^n\cdot n^n}$.

Aplicăm criteriul raportului și calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{2^n\cdot n^n}{5^n\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\cdot\frac{(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{5}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\left[1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-(n+1)}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot e^{-1} = \frac{5}{2e} < 1$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ și din criteriul raportului avem că

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot n!}{2^n\cdot n^n} = 0$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\dots+\frac{\ln n}{n}}{\ln^2 n}$; notăm cu $a_n = \frac{\ln 2}{2}+\dots+\frac{\ln n}{n}$,

$b_n = \ln^2 n$.

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e crescător și nemărginit, studiem $\exists$ limitei

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, pentru a aplica Cesaro-Stolz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{\ln^2(n+1)-\ln^2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}{(\ln(n+1)-\ln n)(\ln(n+1)+\ln n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\cdot \ln\frac{n+1}{n}(\ln(n+1)+\ln n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)+\ln n} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdot \ln\frac{n+1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln n}{\ln n+1}} \cdot \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln n}{\ln n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{\ln e} = \frac{1}{2}, \text{ pt că:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n+1} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{n}}\right) = \ln\left(e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}}\right) =$$

$$= \ln e^1 = \ln e = 1$$

Deci $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{1}{2} \xRightarrow{\text{Cesaro-Stolz}} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$.

4. Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu proprietatea că $\exists \lim_{n\to\infty}((n+1)^2 x_{n+1} - n^2 x_n) = l \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$.

<u>Soluție</u>:

~~lim~~ Folosim o „reciprocă” a criteriului Cesaro-Stolz și pornim de la faptul că $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$, unde $a_n = n^2 x_n$ și $b_n = n$.

Deci știm că $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 x_{n+1} - n^2 x_n}{n+1-n} = l \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} n x_n = l$.

Dar $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, iar $l \in \mathbb{R}$ (nr real <u>finit</u>)

Dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n x_n = \pm\infty \notin \mathbb{R}$;

$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n x_n = \pm\infty \notin \mathbb{R}$

Deci singurul caz convenabil e $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = 0}$, de unde $\lim_{n\to\infty} n x_n$ produce caz de nedeterminare, deci o posibilă lim finită