Seminar 4 - 113

Exemplu : $\mathbb{Z}_m$

$\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\}$ Mulțimea CLASELOR de resturi.

$\hat{0} = [0]$

„$\sim$" pe $\mathbb{Z}$: $a \sim b \iff m \mid a-b$.

$\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/_\sim$

Ex. 1 : Pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ considerăm rel. de echiv.

$(a,b)\sim(c,d) \iff a+d = b+c$.

Det. clasele de echiv., sist. complet de reprezentanți și mulțimea factor.

Rez :

$(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=b+c \iff a-b=c-d$

Obs. că $[(a,b)]$ este det. de $a-b$.

$[(a,b)] = \{(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid c-d=a-b\}$

Sistem de reprezentanți : câte un repr. din fiecare clasă.

Clasa este det. de $m=a-b\in\mathbb{Z}$

$m\geq 0$: $(a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $a-b=m$

$(m,0)$

$m<0$: $(0,m)$

$\{(m,0)\mid m\in\mathbb{N}\}\cup\{(0,m)\mid m\in\mathbb{N}\}$.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim \cong \mathbb{Z}$ (există o bijecție $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim \to \mathbb{Z}$)

$f([(a,b)]) = a-b$.

8 Obs: Când lucrăm cu funcții definite pe (sau cu valori în) mulțimi factor TREBUIE să verificăm BUNA-DEFINIRE a funcției (adică funcția NU depinde de sistemul de reprezentanți ales).

Exemplu: $f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z},\ f(\hat{k}) = (-1)^k$.

$\mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$

$\hat{0} = \hat{3} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$1 = (-1)^0 \neq (-1)^3 = -1 \Leftrightarrow f(\hat{0}) \neq f(\hat{3})$

$\Rightarrow f$ NU este bine definită.

$g: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z},\quad g(\hat{k}) = (-1)^k$

Este g bine-definită? DA

$4\mathbb{Z},\ 4\mathbb{Z}+1,\ 4\mathbb{Z}+2,\ 4\mathbb{Z}+3$

Revenim:

$f: \mathbb{N}\times\mathbb{N}/_{\sim} \to \mathbb{Z},\quad f([(a,b)]) = a-b.$

Este f bine definită?

R: Da, deoarece $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow a-b = c-d$

Ex. 2: Pentru ce nr. nat. $n \geq 2$ funcția $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C},\ f(\hat{k}) = i^k$ este bine definită?

Rez:

$$f(\hat{k}) = \begin{cases} i, & k = 4t+1 \\ -1, & k = 4t+2 \\ -i, & k = 4t+3 \\ 1, & k = 4t \end{cases}$$

$\hat{k} = \hat{l}$

$f(\hat{k}) = f(\hat{l}) \Leftrightarrow i^k = i^l \Leftrightarrow i^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l = 4t$

$\Leftrightarrow 4 \mid k-l,\ n \mid k-l\ \forall k,l \Rightarrow 4 \mid n$

Ex. 3: Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ se dă rel. de echiv:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Clase de echiv., sist. de repr., mulțimea factor.

Rez:

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* /_{\sim} = \mathbb{Q}.$$

Ex. 4: Pe $\mathbb{C}$ se dă rel. de echiv.

$$z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R}.$$

Cerințe ca la ex. 1

Rez:

$$z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$$

$z = a+bi$, $w = c+di$, $a,b,c,d \in \mathbb{R} \Rightarrow b = d.$

$$[z] = \{w \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)\}$$
$$= \{a+bi \in \mathbb{C} \mid a \in \mathbb{R},\ b = \mathrm{Im}(z)\}.$$

Sist. de repr.:

$$\{bi \mid b \in \mathbb{R}\} = i\mathbb{R}$$

$$\mathbb{C}/_{\sim} \equiv \mathbb{R}$$

Obs: Clasa de echiv. este det. de $\mathrm{Im}(z)$

$[i] = \{x+i \mid x \in \mathbb{R}\} = \{i, 1+i, 2+i, \sqrt{2}+i, \dots\}$

$[a+bi] = [bi] \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$

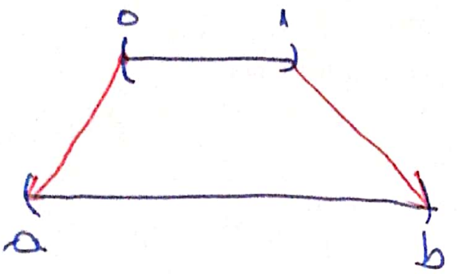
Mulțimi echipotente

Oricare 2 din următ. mulțimi sunt echipotente:

$(-\infty, a], (b, +\infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b], (0,1), \mathbb{R}$ etc.

Ex. 5: Bijecție între $(0,1)$ și (a,b), $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$.

$f : (0,1) \to (a,b)$



$g(x) = a + x$

$g : (0,1) \to (a, a+1)$

$f(0) = a$

$f(1) = b$

$$f(x) = mx + n$$

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(1) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = a \\ m + n = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = a \\ m = b - a \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = (b-a)\cdot x + a.$

Ex. 6: Bijecție între $(0,1)$ și $\mathbb{R}$.

$tg : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

$$(0,1) \xrightarrow{\text{Ex.5}} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{tg} \mathbb{R}$$

$g : (0,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ca la Ex. 5.

$$g(x) = (b-a)x + a = \pi \cdot x - \frac{\pi}{2} = \pi\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$f = tg \circ g$

$$f(x) = (tg \circ g)(x) = tg\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Ex. 7 : Bijecție între $(0,\infty)$ și $\mathbb{R}$.

$\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Ex. 8 : Bijecție între $(0,1) \to (0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \\ x, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Ex. 9 : Bijecție între $[0,\infty)$ și $(0,1)$.

$f : [0,\infty) \to (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x \notin \mathbb{N} \\ \frac{x+1}{x+2}, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \operatorname{Im} g = [0,1)$.

$h(x) = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow \operatorname{Im} h = [\frac{1}{2}, 1)$.