Curs 2

Serii de numere reale

Definiție. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$ și $s_n = x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n \ \forall n \geq p$. Perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se numește serie de numere reale.

Notație. În contextul definiției precedente, perechea $((x_n)_{n\geq p}, (s_n)_{n\geq p})$ se notează $\sum\limits_{n=p}^{\infty} x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq p} x_n$ sau $\sum\limits_{n} x_n$.

Observație. În general $p=0$ sau $p=1$, cazuri pe care le vom considera de acum înainte în definiții, teoreme etc.

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale ($s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n \ \forall n \geq 0$).

Definiție. 1) Elementele șirului $(x_n)_n$ se numesc termenii seriei.

2. Elementele șirului $(s_n)_n$ se numesc sumele parțiale ale seriei.

3. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \overset{not.}{=} \alpha \in \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, acest α se numește suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și vom scrie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha$.

4. Spunem că seria $\sum\limits_{n} x_n$ este convergentă dacă $(s_n)_n$ este convergent.

5. Spunem că seria $\sum\limits_{n} x_n$ este divergentă dacă nu este convergentă (i.e. $(s_n)_n$ este divergent).

Propoziție. Dacă seria $\sum\limits_{n} x_n$ este convergentă atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolar (Criteriul suficient de divergență). Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ atunci seria $\sum\limits_{n} x_n$ este divergentă.

Observație. Folosind doar afirmația „$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$" nu putem decide dacă $\sum\limits_{n} x_n$ este convergentă sau divergentă.

Exercițiu. Determinați sumele seriilor de mai jos și precizați dacă sunt convergente sau divergente:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{R}$.

($0^0 = 1$ prin convenție)

Soluție.

a) $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) $x_n = q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$s_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$s_n = \begin{cases} n+1 & ; q = 1 \\ 1 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} & ; q \neq 1. \end{cases}$$

Dacă $q = 1$ atunci $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \infty$ și

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Presupunem că $q \neq 1$.

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} \infty \ ; & q > 1 \\ 0 \ ; & q \in (-1, 1) \\ \nexists \ ; & q \leq -1 . \end{cases}$$

Deci $$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \infty \ ; & q > 1 \\ \frac{1}{1-q} \ ; & q \in (-1, 1) \\ \nexists \ ; & q \leq -1 . \end{cases}$$

Dacă $q \leq -1$, seria din enunț nu are sumă, fiind divergentă.

Dacă $q > 1$, suma seriei din enunț este ∞, fiind divergentă.

Dacă $q \in (-1, 1)$, suma seriei din enunț este $\frac{1}{1-q}$, fiind convergentă. $\square$

<u>Observație</u>. În aplicații putem folosi (fără demonstrație) convergențele următoarelor serii de numere reale:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ $\xrightarrow{}$ convergentă ; $q \in (-1, 1)$
$\xrightarrow{}$ divergentă ; $q \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$.

(seria geometrică)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\xrightarrow{}$ convergentă ; $\alpha > 1$
$\xrightarrow{}$ divergentă ; $\alpha \leq 1$.

(seria armonică generalizată)

Observație. q și α din seriile de mai sus sunt numere reale care nu depind de n.

Propoziție. Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale convergente și $c \in \mathbb{R}$. Atunci seriile de numere reale $\sum_n (x_n + y_n)$, $\sum_n (x_n - y_n)$ și $\sum_n c \cdot x_n$ sunt convergente.

În plus,
$$\sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n,$$
$$\sum_n (x_n - y_n) = \sum_n x_n - \sum_n y_n,$$
$$\sum_n c \cdot x_n = c \cdot \sum_n x_n.$$

Teoremă (Criteriul lui Cauchy pentru serii de numere reale). Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie de numere reale.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2) $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}^*$, avem $|x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+m}|<\varepsilon$.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni pozitivi

1. Criteriul raportului. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n>0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l<1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $l>1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l=1$, atunci acest criteriu nu decide.

2. <u>Criteriul radicalului.</u> Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not.}{=\!=} l$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă

b) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

3. <u>Criteriul Raabe-Duhamel.</u> Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \overset{not.}{=\!=} l$.

a) Dacă $l < 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

b) Dacă $l > 1$, atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = 1$, atunci acest criteriu nu decide.

4. Criteriul condensării. Dacă $(x_n)_{n\geq 0} \subset [0, \infty)$ este un șir descrescător, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură (i.e. sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente).

5. Criteriul de comparație cu inegalități. Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că, $\forall n \geq n_0$, avem $x_n \leq y_n$

a) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

6. Criteriul de comparație cu limită. Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$, $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

b) Dacă $l = 0$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = \infty$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.