CURS 5

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LOGICĂ PROPOZIŢIONALĂ

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIONALE

Propoziţia 5.1 **(Principiul inducţiei pe formule)**

Fie P o proprietate. Presupunem că:

(0) Orice variabilă are proprietatea P.

(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea P, atunci şi $(\neg\varphi)$ are proprietatea P.

(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ şi ψ au proprietatea P, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P.

Atunci orice formulă φ are proprietatea P.

Demonstraţie. Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P.

Demonstrăm prin inducţie că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pasul iniţial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ şi, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducţie. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ şi χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Aşadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. $\square$

Propoziţia 5.2 (Principiul inducţiei pe formule - variantă alternativă)
Fie Γ o mulţime de formule care are următoarele proprietăţi:

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Form$.

Demonstraţie. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$:

pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiţiei lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducţiei pe formule (Propoziţia 5.1), deci îl putem aplica pentru a obţine că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Aşadar, $\Gamma = Form$. $\square$

Propoziţia 5.3 (Principiul recursiei pe formule)
Fie A o mulţime şi funcţiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcţie

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăţi:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.
(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ.
(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ.

Demonstraţie. Exerciţiu suplimentar.

Principiul recursiei pe formule se foloseşte pentru a da definiţii recursive ale diverselor funcţii asociate formulelor.

Exemplu.

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$$c(\varphi) \text{ este numărul conectorilor logici care apar în } \varphi.$$

O definiţie recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} G_0 : V \to \mathbb{N}, &\quad G_0(v) = 0, \\ G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, &\quad G_\neg(n) = n + 1, \\ G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, &\quad G_\to(m, n) = m + n + 1. \end{aligned}$$

Notaţie.

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulţimea variabilelor care apar în φ.

Observaţie.

Mulţimea $Var(\varphi)$ poate fi definită şi recursiv.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 5.4 **(Principiul recursiei pe formule - varianta 2)**
Fie A o mulţime şi funcţiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \times Form \to A, \quad G_\to : A \times A \times Form \times Form \to A.$$

Atunci există o unică funcţie

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăţi:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi), \varphi)$ pentru orice formulă φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$ pentru orice formule φ, ψ.

Demonstraţie. Exerciţiu suplimentar.

Definiţia 5.5

Fie φ o formulă a lui *LP*. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.

Notaţie.

Mulţimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu.

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, v_1 \to v_2, \neg v_1, \varphi\}.$$

Definiţie alternativă.

Mulţimea $SubForm(\varphi)$ poate fi definită şi recursiv:

$$\begin{aligned} SubForm(v) &= \{v\} \\ SubForm(\neg\varphi) &= SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\} \\ SubForm(\varphi \to \psi) &= SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \to \psi\}. \end{aligned}$$

În acest caz,

$$SubForm : Form \to 2^{Form}, \text{ deci } A = 2^{Form},$$

şi

$$\begin{aligned} G_0 : V \to A, &\quad G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \times Form \to A, &\quad G_\neg(\Gamma, \varphi) = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \\ G_\to : A \times A \times Form \times Form \to A, &\quad G_\to(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi) = \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi \to \psi\}. \end{aligned}$$

SEMANTICA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Valori de adevăr.

Folosim următoarele notaţii pentru cele două valori de adevăr posibile:

- 1 pentru adevărat şi
- 0 pentru fals.

Prin urmare, mulţimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Tabele de adevăr.

Definim următoarele operaţii pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \to: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că

$$\neg p = 1 \iff p = 0.$$

$$p \to q = 1 \iff p \leq q.$$

Operaţiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ şi $\leftrightarrow: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observaţie.
Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $\; p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ şi $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 5.6

O evaluare (sau interpretare) este o funcţie $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 5.7

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ există o unică funcţie

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăţi:

- $e^+(v) = e(v)$ pentru orice orice $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

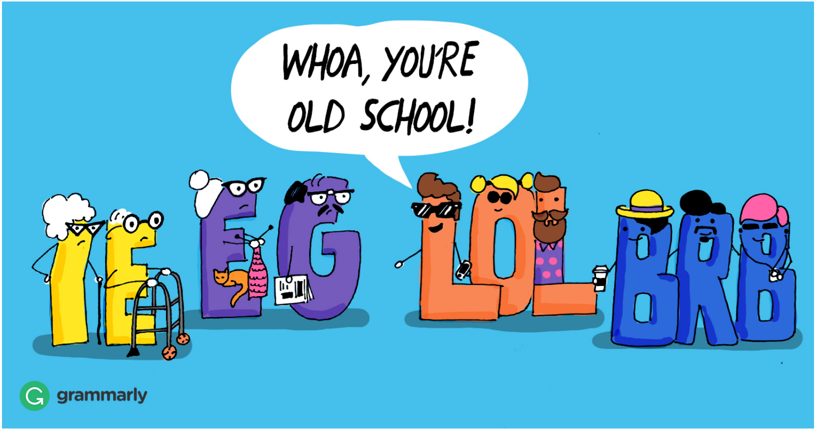
Demonstraţie. Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziţia 5.3) cu $A = \{0,1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ şi $G_\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\to(p,q) = p \to q$. $\square$

Propoziţia 5.8

Dacă $e : V \to \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \vee \psi) &= e^+(\varphi) \vee e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi), \\ e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi). \end{aligned}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.



Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.