FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 13

(S13.1) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească o formă normală Skolem pentru enunţul φ în formă normală prenex, unde φ este, pe rând:

(i) $\forall x \exists z (f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d))$;

(ii) $\forall y \exists z \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))$;

(iii) $\exists x \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$;

(iv) $\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x, z) \vee R(x)) \rightarrow (R(u) \vee \neg Q(v, u)))$.

Demonstraţie:

(i) Avem $\varphi^1 = \forall x (f(x) = c \wedge \neg(g(x, z) = d)_z(h(x)) = \forall x (f(x) = c \wedge \neg(g(x, h(x)) = d)$, unde h este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

(ii) Avem $\varphi^1 = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, z))_z(p(y)) = \forall y \exists u (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde p este un nou simbol de operaţie unară, şi $\varphi^2 = \forall y (P(u, y) \rightarrow Q(y, p(y)))_u(j(y)) = \forall y (P(j(y), y) \rightarrow Q(y, p(y)))$, unde j este un nou simbol de operaţie unară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iii) Avem $\varphi^1 = \forall u \forall y \exists z (P(x, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_x(m) = \forall u \forall y \exists z (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))$, unde m este un nou simbol de constantă, şi $\varphi^2 = \forall u \forall y (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(z)))_z(k(u, y)) = \forall u \forall y (P(m, u) \vee \neg(S(y) \rightarrow R(k(u, y))))$, unde k este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^2 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^2$.

(iv) Avem $\varphi^1 = \forall z\forall x\forall v((Q(x,z)\vee R(x)) \to (R(u)\vee\neg Q(v,u)))_u(n(z,x)) = \forall z\forall x\forall v((Q(x,z)\vee R(x)) \to (R(n(z,x)) \vee \neg Q(v,n(z,x))))$, unde n este un nou simbol de operaţie binară. Cum φ^1 este o formulă universală avem $\varphi^{Sk} = \varphi^1$.

$\square$

(S13.2) Demonstraţi că orice clasă finit axiomatizabilă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizată de un singur enunţ.

Demonstraţie: Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de enunţuri a.î. $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$. Fie

$$\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n.$$

Atunci $\mathcal{A} \vDash \Gamma \iff \mathcal{A} \vDash \varphi_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\} \iff \mathcal{A} \vDash \varphi$. Aşadar, $Mod(\varphi) = Mod(\Gamma) = \mathcal{K}$. $\square$

(S13.3) Să se axiomatizeze următoarele clase de grafuri:

(i) grafurile complete;

(ii) grafurile cu proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă;

(iii) grafurile infinite.

Demonstraţie: Se ia $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E})$. Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$. Teoria grafurilor este $Th(\Gamma)$, iar clasa grafurilor este axiomatizată de Γ.

(i) Fie $\mathcal{K}_1$ clasa grafurilor complete. Considerăm enunţul

$$\varphi_1 := \forall x\forall y(\neg(x = y) \to \dot{E}(x,y)).$$

Atunci $\mathcal{K}_1 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_1\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_1)$.

(ii) Fie $\mathcal{K}_2$ clasa grafurilor care au proprietatea că orice vârf are exact o muchie incidentă. Considerăm enunţul

$$\varphi_2 := \forall x\exists y\dot{E}(x,y) \wedge \forall x\forall y\forall z(\dot{E}(x,y) \wedge \dot{E}(x,z) \to y = z).$$

Atunci $\mathcal{K}_2 = Mod(\Gamma \cup \{\varphi_2\}) = Mod((IREFL), (SIM), \varphi_2)$.

(iii) Fie $\mathcal{K}_3$ clasa grafurilor infinite. Considerăm mulţimea de enunţuri

$$\Delta := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Aplicând Propoziţia 2.55, rezultă că $\mathcal{K}_3 = Mod(\Gamma \cup \Delta)$.

$\square$

(S13.4) Să se axiomatizeze următoarele clase de mulţimi:

(i) mulţimile care au între 3 şi 5 elemente;

(ii) mulţimile nevide care au mai puţin de 7 elemente;

(iii) mulţimile care au între 20 şi 300 elemente;

(iv) mulţimile care au cel puţin 10 elemente.

Demonstraţie: Se ia $\mathcal{L}_=$. Atunci $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulţimile nevide.

(i) Considerăm enunţul
$$\varphi := \exists^{=3} \vee \exists^{=4} \vee \exists^{=5}.$$
Atunci $\mathcal{K} = Mod(\varphi)$.

(ii) $\mathcal{K} = Mod(\exists^{\leq 6})$.

(iii) Considerăm enunţul
$$\psi := \exists^{\leq 300} \wedge \exists^{\geq 20}.$$
Atunci $\mathcal{K} = Mod(\psi)$.

(iv) Considerăm mulţimea de enunţuri
$$\Gamma := \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 10\}.$$
Atunci $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$.

$\square$

Definiţia 1. *O $\mathcal{L}$-teorie T se numeşte completă dacă pentru orice enunţ φ, avem că $\varphi \in T$ sau $\neg\varphi \in T$.*

(S13.5) Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, definim
$$Th(\mathcal{A}) := \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunţ şi } \mathcal{A} \vDash \varphi\}.$$
Demonstraţi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie completă.

Demonstraţie: Demonstrăm mai întâi că $Th(\mathcal{A})$ este o teorie. Fie φ un enunţ a.î. $Th(\mathcal{A}) \vDash \varphi$. Deoarece, evident, $\mathcal{A}$ este un model al $Th(\mathcal{A})$, rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Prin urmare, $\varphi \in Th(\mathcal{A})$. Aşadar, $Th(\mathcal{A})$ este o teorie.

Demonstrăm în continuare că $Th(\mathcal{A})$ este completă. Fie φ un enunţ arbitrar. Avem două cazuri:

- $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Rezultă că $\varphi \in Th(\mathcal{A})$.
- $\mathcal{A} \nvDash \varphi$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi$, prin urmare $\neg\varphi \in Th(\mathcal{A})$.

$\square$