Probleme de antrenament pentru examenul Structuri Algebrice în Informatică

1. Există permutări de ordin 50 în grupul de permutări S_{14}?

2. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, 7)(8, \ldots, 14)$, un produs de 2 cicli disjuncţi de lungime 7 din S_{14}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{14}$ astfel încât $\tau^2 = \sigma$.

3. Calculaţi $7^{7^{17^{17}}} \pmod{29}$.

4. Determinaţi numărul elementelor de ordin 24 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{2^7}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^7}, +)$.

5. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relaţia binară ρ dată astfel: $x\rho y$ dacă $x = y$ sau $x + y = 14$. Să se arate că ρ este relaţie de echivalenţă, să se calculeze clasele de echivalenţă ale lui 7 şi 2022 şi să se determine un sistem complet de reprezentanţi pentru această relaţie de echivalenţă. Este $f : \mathbb{R}/\rho \mapsto \mathbb{R}$, $f(\widehat{x}) = 4x^2 - 56x + 200$ o funcţie bine definită?

6. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 7x - 7, & \text{dacă } \ x < -2, \\ 3x^2 + 6x - 18, & \text{dacă } \ x \geq -2. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-8, 8])$ şi $f([-3, 0])$.

7. Determinaţi toate morfismele de grupuri de la $(\mathbb{Z}_8, +)$ la $(\mathbb{Z}_8, +)$. Precizaţi care dintre aceste morfisme sunt injective.

8. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n care împărţit la 5 dă restul 3, împărţit la 7 dă restul 2, şi împărţit la 9 dă restul 8.