Curs 11

Extreme cu legături

Fie $f: E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $A \subset E$ și $a \in A$.

Def.: Spunem că a este:

1) punct de minim (respectiv maxim) local al funcției f condiționat de mulțimea A dacă $\exists\, V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \le f(x)$ (respectiv $f(a) \ge f(x)$) $\forall x \in V \cap A$.

2) punct de extrem local al funcției f condiționat de mulțimea A dacă a este punct de minim sau de maxim local al lui f condiționat de A.

Obs.: Dacă $A = E$ se omite sintagma „condiționat de A".

Denumire alternativă. Punctele de extrem local ale lui f condiționate de A se numesc și puncte de extrem local ale lui f relative la A.

Fie $1 \leq k < n$, $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$ şi sistemul

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Fie $A = \{x \in E \mid g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.

<u>Def.</u>: Punctele de extrem local ale lui f condiţionate de mulţimea A se numesc, în acest caz, puncte de extrem local ale lui f cu legăturile $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$.

Teorema următoare dă condiţii necesare de existenţă pentru punctele de extrem local cu legături.

<u>Teoremă (Teorema multiplicatorilor lui Lagrange).</u>

Fie $a \in A$ (i.e. a verifică sistemul (1)). Presupunem că funcţia f şi funcţiile $g_1, \dots, g_k$ au derivate parţiale pe o vecinătate a lui A şi acestea sunt continue în a. Presupunem, de asemenea, că matricea $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le m}}$ are rangul k (egal cu numărul ecuațiilor sistemului (1)).

Dacă a este punct de extrem local al funcției f condiționat de A, atunci există $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$ a.î.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a)=0\\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(a)=0 \\ \text{- - - - - - - - -}\\ \frac{\partial L}{\partial x_m}(a)=0\end{cases} \quad (2),$$

unde $L: E\to\mathbb{R}$, $L(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i(x)$.

<u>Def.</u>: 1) Orice punct $a=(a_1,\dots,a_m)\in E$ care verifică sistemul (1) (i.e. $a\in A$), cu proprietatea că $\text{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le m}}=k$ și care verifică și sistemul

(2) pentru anumite valori $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ se numește punct staționar al funcției f condiționat de mulțimea A (sau punct staționar al lui f cu legăturile $g_1(x)=0, g_2(x)=0, \dots, g_k(x)=0$).

2) Coeficienții $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de mai sus se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

3) Funcția L s.n. lagrangeianul problemei de extrem.

Obs.: Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă o dată cu punctul staționar a.

Obs.: Teorema anterioară se poate enunța astfel: „Orice punct de extrem local condiționat este punct staționar condiționat".

Algoritm pentru determinarea punctelor staționare condiționate.

Presupunem că E este mulțime deschisă și că funcțiile $f, g_1, \dots, g_k$ admit derivate parțiale continue pe E.

1) Se consideră funcția $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nedeterminați).

2) Se formează sistemul cu $m+k$ ecuații, $m+k$ necunoscute $(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$,

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_m}(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ g_k(x) = 0 \end{cases}$$

și se caută soluțiile acestuia.

3) Dacă $(a_1, \dots, a_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ este o sol. a sistemului de la 2) și $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le m}} = k$,

atunci $\overbrace{(a_1, \dots, a_m)}^{= a}$ este punct staționar al lui

f condiționat de A.

Obs.: Printre aceste puncte staționare condiționate se pot afla și punctele de extrem local condiționate.

Vom căuta acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staționare condiționate, pe acelea care sunt puncte de extrem local condiționate.

Fie $a = (a_1, \dots, a_m)$ un punct staționar al lui f condiționat de A. Aceasta înseamnă că $g_1(a) = 0, \dots, g_k(a) = 0$, $\exists$ k numere reale $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a.î. să fie satisfăcut sistemul (2) și $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le m}} = k$.

Presupunem că lagrangeianul L admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 pe o vecinătate a lui A și acestea sunt continue în a.

Diferențiem relațiile sistemului (1) în a și obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}(a)\,dx_m = 0. \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial g_2}{\partial x_m}(a)\,dx_m = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m}(a)\,dx_m = 0. \end{cases}$$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le m}}$, care are rangul k, se pot ex- prima k diferențiale în funcție de celelalte $m-k$.

Presupunem că $\dfrac{D(g_1, \dots, g_k)}{D(x_{m-k+1}, \dots, x_m)}(a) =$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{m-k+1}}(a) & \dots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_{m-k+1}}(a) & \dots & \dfrac{\partial g_k}{\partial x_m}(a) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ deci}$$

putem exprima $dx_{m-k+1}, \dots, dx_m$ în funcție de $dx_1, \dots, dx_{m-k}$.

Putem scrie
$$(*) \begin{cases} dx_{m-k+1} = \sum_{i=1}^{m-k} \theta_i^1 \, dx_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ dx_m = \sum_{i=1}^{m-k} \theta_i^k \, dx_i . \end{cases}$$

Reamintim că $d^2L(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,
$$d^2L(a)(u,v) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) \, u_i \, v_j .$$

Definim $F(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $F(a)(u) = d^2L(a)(u,u) =$
$$= d^2L(a)(u)^2 .$$

Putem scrie $F(a)(u) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) \, u_i \, u_j$,

i.e. $F(a) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a) \, dx_i \, dx_j$.

Înlocuim, în expresia lui $F(a)$, $dx_{m-k+1}, \dots,$ dx_m cu relațiile $(*)$ și considerăm

$F(a)_{leg} = \sum_{i,j=1}^{m-k} A_{ij}\, dx_i\, dx_j$, unde A_{ij} rezultă din calcul $\left(F(a)_{leg} : \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R} \quad F(a)_{leg}(u) = \right.$

$\left. = \sum_{i,j=1}^{m-k} A_{ij}\, u_i u_j \right)$.

1) Dacă $F(a)_{leg}(u) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^{m-k}$ și $F(a)_{leg}(u) = 0$ dacă și numai dacă $u = 0_{\mathbb{R}^{m-k}}$, atunci a este punct de minim local al lui f condiționat de A.

2) Dacă $F(a)_{leg}(u) \leq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^{m-k}$ și $F(a)_{leg}(u) = 0$ dacă și numai dacă $u = 0_{\mathbb{R}^{m-k}}$, atunci a este punct de maxim local al lui f condiționat de A.

Obs.: În aplicațiile noastre avem $dx_i\, dx_j = dx_j\, dx_i \ \forall i, j \in \{1, \dots, m-k\}$.

Ex. Fie $f : (0, \infty)^3 = (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$f(x,y,z)=xy+xz+yz$. Să se det. punctele de extrem local ale lui f cu legătura $xyz=1$.

Sol.: $E=(0,\infty)^3$ deschisă.

Det. punctele staționare condiționate ale lui f.

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z)=xyz-1$ $(g=g_1)$ și

$A=\{(x,y,z)\in E \mid g(x,y,z)=0\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}=y+z$

$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z$

$\frac{\partial f}{\partial z}=x+y$

$\forall (x,y,z)\in E$.

$\frac{\partial g}{\partial x}=yz$

$\frac{\partial g}{\partial y}=xz$

$\frac{\partial g}{\partial z}=xy$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ continue pe E.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} yz & xz & xy\end{pmatrix} = 1 \quad \forall$$

$\forall (x,y,z) \in E.$

Fie $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$

$= xy + xz + yz + \lambda(xyz - 1).$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Scădem prima ecuație din a doua și obținem:

$x - y + \lambda z(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(1+\lambda z) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y$ sau $\lambda z = -1.$

<u>Cazul 1.</u> $x = y$

$x + y + \lambda xy = 0 \Leftrightarrow x + x + \lambda x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 + \lambda x) = 0 \Leftrightarrow$

$\underset{x\in(0,\infty)}{\Leftrightarrow} \lambda x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\lambda}.$

$y = x \Leftrightarrow y = -\frac{2}{\lambda}.$

$y + z + \lambda y z = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda} + z + \cancel{\lambda} \cdot \left(-\frac{2}{\cancel{\lambda}}\right) z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = -\frac{2}{\lambda}.$

$xyz = 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{\lambda^3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2.$

Deci $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Cazul 2. $\lambda z = -1 \left(\Leftrightarrow z = -\frac{1}{\lambda}\right).$

$y + z + \lambda y z = 0 \Leftrightarrow y - \frac{1}{\lambda} + \cancel{\lambda} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} = 0$, contradicție.

Singurul punct staționar al lui f cu legătura $xyz = 1$ este $(1, 1, 1)$ $(\lambda = -2)$.

Avem $L(x, y, z) = xy + xz + yz - 2(xyz - 1)\ \forall$

$\forall (x, y, z) \in E.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$; $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 - 2z = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$;

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1-2y = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1-2x = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \quad \forall$$

$$\forall (x,y,z) \in E.$$

Toate aceste derivate parțiale de ordinul 2 sunt continue pe E.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1) = 0.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x}(1,1,1) =$$

$$= \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(1,1,1) = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y}(1,1,1) = -1.$$

Fie $F(1,1,1): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(1,1,1) = -2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz)$.

Diferențiem legătura $xyz = 1$.

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

În punctul $(1,1,1)$ ultima egalitate devine:

$$dx + dy + dz = 0 \iff dz = -dx - dy.$$

Avem $F(1,1,1)_{leg} = -2\left(dx\,dy + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy)\right) = -2\left(\cancel{dx\,dy} - dx^2 - \cancel{dx\,dy} - dy\,dx - dy^2\right) = 2\left(dx^2 + dx\,dy + dy^2\right) =$

$$= 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}dx^2 \quad \left(F(1,1,1)_{leg} : \mathbb{R}^{3-1} \to \mathbb{R}\right).$$

$$F(1,1,1)_{leg}(\underset{(u_1,u_2)}{\underset{\parallel}{u}}) = 2\left(\frac{1}{2}u_1 + u_2\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}u_1^2.$$

$F(1,1,1)_{leg}(u) \geq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^2.$

$F(1,1,1)_{leg}(u) = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^2}.$

Deci $(1,1,1)$ este punct de minim local al lui f cu legătura $g(x,y,z)=0$. $\square$

<u>Denumire alternativă</u>. Punctele staționare condiționate se numesc și puncte critice condiționate.

Integrala Riemann pentru funcții de o variabilă reală

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Def.: 1) S.n. diviziune a intervalului $[a,b]$, un sistem de puncte $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Notăm $\mathcal{D}([a,b]) \overset{not.}{=} \{\Delta \mid \Delta$ diviziune a intervalului $[a,b]\}$.

2) Numărul $\|\Delta\| \overset{not.}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i=\overline{1,n}\}$ s.n. norma diviziunii Δ.

3) S.n. sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, un sistem de puncte $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ cu proprietatea că $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $\forall i=\overline{1,n}$.

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ s.n. suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$

și se notează $\sigma_\Delta(f, \xi)$.

<u>Def.</u>: Spunem că f este integrabilă Riemann dacă $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ și $\forall \xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ,

$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$

avem $|I - \sigma_\Delta(f, \xi)| < \varepsilon$.

<u>Obs.</u>: $I \in \mathbb{R}$, dacă există, este unic și se notează $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Teoremă.</u> Dacă f e integr. R., atunci f e mărg.

<u>Teoremă.</u> Dacă f e cont., atunci f e integr. R.

<u>Teoremă.</u> Dacă f e monotonă, atunci f e integr. R.

Teoremă (<u>Teorema de permutare a limitei cu integrala</u>)

Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a. î. :

1) f_n integr. R. $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Atunci f e integr. R. și $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Ex. Det. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx$.

Sol.: Fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ (Vezi Seminar 7).

f_n cont. $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integr. R. $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. $\square$

Def.: O mulțime $A\subset\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon>0$, $\exists (I_n)_n$ șir de intervale deschise și mărginite cu proprietățile:

i) $A\subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$, unde $\ell(I_n)$ reprezintă lungimea intervalului I_n $(\ell((c,d)) = d-c)$.

Obs.: 1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă (i.e. finită sau numărabilă) este neglijabilă Lebesgue.

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mulțimi neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue.

Notație. $D_f = \{x \in [a,b] \mid f \text{ nu e cont. în } x\}$ (mulțimea discontinuităților lui f).

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). Sunt echivalente:

1) f e integr. R.

2) f e mărg. și D_f e neglijabilă Lebesgue.

Ex. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} ; & x \in (0,1] \\ 0 ; & x = 0. \end{cases}$

Arătați că f e integr. R.

<u>Sol</u>.: $|f(x)| \leq 1 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ mărg.

$D_f \subset \underbrace{\{0\}}$ finită $\Rightarrow$ neglijabilă Lebesgue $\Bigg| \Rightarrow D_f$ e neglijabilă Lebesgue.

Deci f e integr. R. $\square$

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită (i.e. $\exists M > 0$ a.î. $|f(x)| \leq M \ \forall x \in [a,b]$) și $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Considerăm $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ \forall i = \overline{1,n}$ și $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \ \forall i = \overline{1,n}$.

<u>Def</u>.: 1) $S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ.

2) $s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Darboux inferioară asociată funcției f și divizi-

urii Δ.

3) $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ s.n. integrala Darboux superioară asociată funcției f.

4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ s.n. integrala Darboux inferioară asociată funcției f.

Obs.: 1) $s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Teoremă (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann). Sunt echiv.:

1) f integr. R.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$ (caz în care avem

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx).$$

3) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

4) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall\, \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Exc. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1; & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1; & x\in \underbrace{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}_{\overset{\shortparallel}{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}}\end{cases}$.

Det. $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$, $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$ și precizați dacă f e integr. R.

Sol.: $|f(x)|\le 1\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow f$ mărg.

Fie $\Delta: 0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$.

Fie $i\in\{1,\ldots,n\}$.

$m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1$, deoarece între orice două nr. reale există o infinitate de nr. raționale și o infinitate de nr. iraționale.

$M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=1$, deoarece între orice două nr. reale există o infinitate de nr. raționale și o infinitate de nr. iraționale.

Atunci:

$$s_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(-1)(x_i-x_{i-1})=$$

$$=(-1)(\cancel{x_1}-x_0+\cancel{x_2}-\cancel{x_1}+\cancel{\ldots}+x_n-\cancel{x_{n-1}})=(-1)(x_n-x_0)=$$

$$= (-1)\left(1-0\right) = -1.$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup\left\{ s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([0,1]) \right\} = -1.$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \left(x_i - x_{i-1} \right) =$$

$$= \cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{\dots} + x_n - \cancel{x_{n-1}} = x_n - x_0 = 1-0 = 1.$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = \inf\left\{ S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b]) \right\} = 1.$$

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx \Rightarrow f \text{ nu e integr. R.} \quad \square$$