Curs 14

Puncte de extrem local pentru funcții de mai multe variabile reale

Definiție. Fie $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in D$.

1. Spunem că a este punct de minim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(a) \leq f(x)$ $\forall x \in D \cap V$.

2. Spunem că a este punct de maxim local al lui f dacă $\exists V \in \mathcal{V}_a$ a.î. $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in D \cap V$.

3. Punctele de minim local și punctele de maxim local ale lui f se numesc puncte de extrem local ale lui f.

Definiție. Fie $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in \mathring{D}$. Spunem că a este punct critic al lui f dacă f este diferențiabilă în a și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $\forall i = \overline{1,n}$

<u>Teoremă (Teorema lui Fermat - cazul multidimensional).</u> Fie $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ și $a \in D$ cu următoarele proprietăți:

1) $a \in \overset{\circ}{D}$.
2) a este punct de extrem local al lui f.
3) f este diferențiabilă în a.

Atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$.

<u>Definiție.</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $k \in \mathbb{N}^*$. Spunem că f este de clasă C^k pe D dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul k pe D și acestea sunt continue pe D.

<u>Teoremă (Criteriul de stabilire a punctelor de extrem local pentru funcții de mai multe variabile reale).</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, D deschisă, $f: D \to \mathbb{R}$

o funcție de clasă C^2 pe D și $a \in D$ un punct critic al lui f.

Fie $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$.

(matricea hessiană a lui f în a)

Fie: $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{vmatrix}.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots\dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots\dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots\dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{vmatrix} = \det(H_f(a)).$$

1) Dacă $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \dots, \Delta_n>0$ (i.e. $\Delta_i>0$ $\forall i=\overline{1,n}$), atunci a este punct de minim local al lui f.

2) Dacă $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \dots, (-1)^n\Delta_n>0$ (i.e. $(-1)^i\Delta_i>0$ $\forall i=\overline{1,n}$), atunci a este punct de maxim local al lui f.

3) Dacă $\Delta_1\geq 0, \Delta_2\geq 0, \dots, \Delta_n\geq 0$ (i.e. $\Delta_i\geq 0$ $\forall i=\overline{1,n}$) sau $\Delta_1\leq 0, \Delta_2\geq 0, \dots, (-1)^n\Delta_n\geq 0$ (i.e. $(-1)^i\Delta_i\geq 0$ $\forall i=\overline{1,n}$) și există $i_0\in\{1,2,\dots,n\}$ a.î. $\Delta_{i_0}=0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie.

4) În toate celelalte cazuri, a nu este punct de extrem local al lui f.

<u>Exercițiu.</u> Determinați punctele de extrem local ale funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$ și precizați natura lor.

<u>Soluție.</u> $\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă.

Determinăm punctele critice ale lui f.

f continuă

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y^2-15 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy-12 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă}\end{array}\right| \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2+3y^2-15=0 \,|:3\\ 6xy-12=0\,|:6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\frac{4}{x^2}-5=0\\ y=\frac{2}{x}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^4+4-5x^2=0\\ y=\frac{2}{x}.\end{cases}$$

Considerăm ecuația $x^4-5x^2+4=0$.

Notăm $x^2 = a$. Avem ecuația $a^2 - 5a + 4 = 0$.

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$a_1 = \frac{5+3}{2} = 4$

$a_2 = \frac{5-3}{2} = 1$.

$x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}$.

$x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$.

$x = -2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{-2} = -1$

$x = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{2} = 1$

$x = -1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{-1} = -2$

$x = 1 \Leftrightarrow y = \frac{2}{1} = 2$.

Soluțiile sistemului de mai sus sunt: $(-2, -1)$, $(2, 1)$, $(-1, -2)$, $(1, 2)$.

Deoarece f este diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$, toate soluțiile menționate mai sus sunt puncte critice ale lui f.

Așadar punctele critice ale lui f sunt: $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(-1,-2)$, $(1,2)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 6x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 6x \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 6y \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lema lui Schwarz

Observăm că f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -12 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$

$\Rightarrow (-2,-1)$ punct de maxim local al lui f.

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 12 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 108 > 0$

$\Rightarrow (2,1)$ punct de minim local al lui f.

$$H_f(-1,-2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = -6 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0$

$\Rightarrow (-1,-2)$ nu este punct de extrem local al lui f.

$$H_f(1,2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 144 = -108 < 0$

$\Rightarrow (1,2)$ nu este punct de extrem local al lui f. $\square$

<u>Teoremă (Teorema funcțiilor implicite (T.F.i.)).</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o mulțime deschisă, $F: D \to \mathbb{R}$ și $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) \in D$ astfel încât:

1) $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$.

2) F este de clasă C^1 pe D.

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$.

Atunci există U o vecinătate deschisă a lui $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, există V o vecinătate deschisă a lui y^0 și există o unică funcție $f: U \to V$ cu proprietățile:

a) $f(x_1^0, \dots, x_n^0) = y^0$.

b) $F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) = 0 \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in U$.

c) f este de clasă C^1 și $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) =$

$$= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))} \ \forall (x_1, \dots, x_n) \in U, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

Notație. În condițiile teoremei de mai sus, notăm $f \overset{\text{not.}}{=} y$.

Definiție. Funcția $f \left(\overset{\text{not.}}{=} y\right)$ din T.F.I. se numește funcția implicită a ecuației $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

Exercițiu. Arătați că ecuația $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 2$ definește într-o vecinătate a punctului $(1, 1)$ funcția implicită $y = y(x)$ și determinați $y'(1) \left(= \frac{\partial y}{\partial x}(1)\right)$.

Soluție. Fie $D = \mathbb{R}^2$, $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2$ și $(1, 1) \in D$.

$D = \mathbb{R}^2$ deschisă

1) $F(1, 1) = 1 - 2 + 1 + 1 + 1 - 2 = 0$.

2) $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y + 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y + 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \text{ continue pe } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ deschisă} \end{array}\right\} \Rightarrow F$ de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$.

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=1\neq 0.$

Conform T.F.i. $\exists\, U$ o vecinătate deschisă a lui 1, $\exists\, V$ o vecinătate deschisă a lui 1 și $\exists !\, y: U\to V$ (y funcția implicită) a.î.:

a) $y(1)=1.$

b) $F(x,y(x))=0\ \forall\, x\in U.$

c) y este de clasă C^1 și $y'(x)=\frac{\partial y}{\partial x}(x)=$

$$=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}\ \forall\, x\in U.$$

Pentru a calcula $y'(1)=\frac{\partial y}{\partial x}(1)$ avem două variante.

<u>Varianta 1 (Folosim formula de la c))</u>

$$y'(x)=\frac{\partial y}{\partial x}(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}=-\frac{2x-2y(x)+1}{-2x+2y(x)+1}$$

$\forall\, x\in U.$

$$y'(1) = -\frac{2\cdot 1 - 2y(1) + 1}{-2\cdot 1 + 2y(1) + 1} \underset{\substack{\uparrow \\ y(1)=1}}{=} -\frac{\cancel{2}\cancel{-2}+1}{\cancel{-2}\cancel{+2}+1} = -1.$$

Varianta 2 (Derivare directă în b))

$F(x, y(x)) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy(x) + y^2(x) + x + y(x) - 2 = 0.$

Derivăm această relație în raport cu x și obținem:

$2x - 2y(x) - 2xy'(x) + 2y(x)y'(x) + 1 + y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(x)\left(-2x + 2y(x) + 1\right) = -2x + 2y(x) - 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{-2x + 2y(x) - 1}{-2x + 2y(x) + 1} \quad \forall\, x \in U.$$

$$y'(1) = \frac{-2\cdot 1 + 2\cdot y(1) - 1}{-2\cdot 1 + 2\cdot y(1) + 1} \underset{\substack{\uparrow \\ y(1)=1}}{=} \frac{\cancel{-2}\cancel{+2}-1}{\cancel{-2}\cancel{+2}+1} = -1. \;\square$$