

## Link-uri utile

- [Grup tutoriat](#)
- [Cursurile de la Băețica](#)
- [Cursurile de anul acesta de la Mincu](#)
- [Cursurile de an trecut de la Mincu](#)

## Exerciții

**Exercițiul 1.** Demonstrați că grupurile  $\mathbb{Z}$  și  $\mathbb{Z}_6$  sunt ciclice.

*Demonstrație.* Un grup este ciclic dacă poate fi generat de un singur element.

- Pentru  $\mathbb{Z}$ , 1 generează toată mulțimea. Putem obține orice număr pozitiv  $k$  ca  $k = 1 + \dots + 1$ , orice număr negativ este opusul unui număr pozitiv, iar  $0 = 1 + (-1)$ .
- Pentru  $\mathbb{Z}_6$ ,  $\hat{1}$  este un generator:

$$\hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$$

$$\hat{2} + \hat{1} = \hat{3}$$

$$\hat{3} + \hat{1} = \hat{4}$$

$$\hat{4} + \hat{1} = \hat{5}$$

$$\hat{5} + \hat{1} = \hat{6} = \hat{0}$$

□

**Exercițiul 2.** Demonstrați că grupul  $\mathbb{Q}$  nu este ciclic.

*Demonstrație.* Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că  $\mathbb{Q}$  ar fi ciclic. Fie  $a \in \mathbb{Q}$  un generator al său. Scriem  $a$  sub formă de fracție rațională ireductibilă:  $a = \frac{p}{q}$ , cu  $p, q \in \mathbb{Z}^*$ .

Observăm că fracția  $\frac{p}{q+1}$  nu poate fi obținută din  $\frac{p}{q}$ . Oricum am aduna sau scădea fracțiile care sunt multiplu de  $\frac{p}{q}$ , nu putem ajunge la o fracție cu numitor mai mare. □

**Exercițiul 3.** Determinați dacă grupurile  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{29}$ ,  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{30}$ , respectiv  $\mathbb{R}$  sunt sau nu ciclice.

*Demonstrație.* Pentru a simplifica demonstrațiile în problemele în care apar  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ , ne folosim de o teoremă care ne spune că  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  este izomorf cu  $\mathbb{Z}_{n \times m}$  dacă și numai dacă  $n$  este prim față de  $m$ . În acest fel, se poate arăta că  $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$  este ciclic dacă și numai dacă  $(n, m) = 1$ .

- Pentru  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{29}$ , avem că 28 este prim față de 29.
- Pentru  $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{30}$ , numerele nu sunt prime între ele, deci grupul nu este izomorf cu  $\mathbb{Z}_{28 \times 29}$ .

- Să presupunem că  $\mathbb{R}$  ar fi ciclic, și  $a \in \mathbb{R}$  ar fi un generator. Elementul  $a$  poate genera doar multiplii de  $a$ . Asta înseamnă că toate numerele din  $\mathbb{R}$  sunt de forma  $na$ , pentru un  $n \in \mathbb{Z}$ . Dar  $\mathbb{R}$  este o mulțime infinită nenumărabilă, deci trebuie să mai existe elemente care nu sunt generate de  $a$ .

În fine, teorema de structură a grupurilor ciclice ne spune că orice grup ciclic este izomorf cu  $\mathbb{Z}_n$  (dacă este finit), respectiv  $\mathbb{Z}$  dacă este infinit. Deci în general la un astfel de exercițiu putem arăta că un grup este/nu este izomorf cu unul dintre grupurile  $\mathbb{Z}_n$  sau  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

**Exercițiul 4.** Pe mulțimea  $[-3, 1)$  definim relația de echivalență  $a \rho b \iff a^4 = b^4$ .

Determinați clasa de echivalență a elementului  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  și scrieți un sistem complet și independent de reprezentanți ai elementelor lui  $[-3, 1)$  în raport cu  $\rho$ .

*Demonstrație.* Pentru a determina clasa de echivalență a lui  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , trebuie să găsim toate elementele din  $[-3, 1)$  care sunt în relație cu el:

$$\begin{aligned} x \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \iff x^4 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \\ \iff x^4 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Singurele soluții ale acestei ecuații în  $[-3, 1)$  sunt  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Deci

$$\widehat{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Pe cazul mai general, observăm că pentru  $x \in (-1, 1)$ :

$$\hat{x} = \{ x, -x \}, \forall x \in (-1, 1)$$

Dacă  $x \in [-3, -1]$ , atunci  $x$  este singur în clasa sa de echivalență (pentru că  $-x$  ar fi în afara mulțimii):

$$\hat{x} = \{ x \}, \forall x \in [-3, -1]$$

Când vine vorba de ales un sistem de reprezentanți, nu putem alege toată mulțimea, deoarece de exemplu  $\widehat{-0.5} = \widehat{0.5}$ , deci sistemul nu ar fi independent. Așa că alegem ca sistem de reprezentanți pe  $S = [-3, 0]$ .

Justificăm că  $S$  este

- *complet*: Fie  $x \in [-3, 1)$ . Dacă  $x \leq 0$ , atunci  $x$  este reprezentat de  $\hat{x}$ . Dacă  $x > 0$ ,  $x$  este reprezentat de  $\widehat{-x}$ .
- *independent*: Dacă alegem un element  $x \leq -1$ , atunci acesta se află singur în clasa lui, deci aceste clase de echivalență sunt independente. Dacă luăm  $x \neq y \in (-1, 0]$ , este imposibil ca  $\hat{x} = \hat{y}$ , deoarece în clasa lui  $\hat{x}$  se află doar el și  $-x$  care este în  $(0, 1)$  (deci diferit sigur de  $y$ ).

O altă soluție ar fi fost să alegem ca sistem de reprezentanți  $[-3, -1] \cup [0, 1)$ . □

**Exercițiul 5.** Fie permutarea

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 12 & 13 & 2 & 7 & 9 & 5 & 6 & 8 & 4 & 11 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

- Descompuneți  $\tau$  în produs de cicluri disjuncti și în produs de transpoziții.
- Determinați  $\tau^2$ ,  $\tau^{-1}$ ,  $\epsilon(\tau)$ ,  $\text{ord}(\tau)$  și  $\tau^{2010}$ .

*Demonstrație.*

- Luăm fiecare element de la 1 la 13 și încercăm să scriem ciclul în care se află (de exemplu, 1 merge în 3, care merge în 13, care se întoarce în 1, ș.a.m.d.):

$$\tau = (1, 3, 13)(2, 12, 10, 4)(5, 7)(6, 9, 8)$$

Observați că nu am mai scris ciclul de lungime 1 format de 11, pentru că nu afectează rezultatul.

Pentru transpoziții, rupem fiecare ciclu în perechi de elemente consecutive:

$$\tau = (1, 3)(3, 13)(2, 12)(12, 10)(10, 4)(5, 7)(6, 9)(9, 8)$$

- Când ridicăm la puterea  $k$ , luăm fiecare ciclu și numărăm din  $k$  în  $k$ . Ciclurile ale căror lungimi au factori în comun cu  $k$  se rup în mai multe bucăți. Ciclurile ale căror lungimi sunt egale cu sau divid puterea dispar.

În cazul nostru, ciclul de lungime 4 s-a rupt în doi cicluri de lungime 2.

$$\tau^2 = (1, 13, 3)(2, 10)(12, 4)(6, 8, 9)$$

Pentru a calcula inversa, putem să ne uităm pe permutare și să luăm elementele de jos în sus și să le reordonăm. Însă mult mai simplu este să ne folosim de descompunerea în cicluri și să scriem fiecare ciclu invers.

$$\tau^{-1} = (13, 3, 1)(4, 10, 12, 2)(7, 5)(8, 9, 6)$$

Semnul permutării este fie  $+1$  (pentru permutări pare) fie  $-1$  (pentru permutări impare). Îl putem determina în funcție de numărul de transpoziții (paritatea permutării este aceeași cu paritatea numărului de transpoziții în care se descompune).

$$\epsilon(\tau) = (-1)^8 = 1$$

Ordinul unei permutări  $\tau$  este cel mai mic număr  $k \in \mathbb{N}^*$  pentru care  $\tau^k = e$ . Ordinul unui ciclu (care este tot o permutare) este egal cu lungimea ciclului. Ordinul unei permutări este egal cu c.m.m.m.c.-ul lungimilor ciclurilor.

În cazul nostru,

$$\text{ord}(\tau) = [3, 4, 2, 3] = 12$$

Pentru a determina  $\tau^{2010}$  ne folosim de faptul că

$$\tau^{2010} = (\tau^{12})^{167} \cdot \tau^6 = \tau^6$$

Putem calcula  $\tau^6$  pe cicluri:

$$\tau^6 = (2, 10)(12, 4)$$

□

**Exercițiul 6.** Fie permutarea

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 3 & 10 & 12 & 2 & 13 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

- Descompuneți  $\tau$  în produs de cicluri disjuncți, în produs de transpoziții.
- Determinați  $\tau^{-2}$ ,  $\epsilon(\tau)$ , și  $\text{ord}(\tau)$ .
- Rezolvați în  $S_{13}$  ecuația

$$x^{20} = \tau$$

*Demonstrație.*

- Produs de cicluri disjuncți:

$$\tau = (1, 7, 3, 5)(2, 4, 6, 8, 10)(9, 12)(11, 13)$$

Produs de transpoziții:

$$\tau = (1, 7)(7, 3)(3, 5)(2, 4)(4, 6)(6, 8)(8, 10)(9, 12)(11, 13)$$

- Calculăm utilizând aceleași metode ca la exercițiul precedent:

$$\begin{aligned} \tau^{-2} &= (\tau^2)^{-1} \\ &= ((1, 3)(7, 5)(2, 6, 10, 4, 8))^{-1} \\ &= (3, 1)(5, 7)(8, 4, 10, 6, 2) \end{aligned}$$

$$\epsilon(\tau) = (-1)^9 = -1$$

$$\text{ord}(\tau) = [4, 5, 2, 2] = 20$$

- Dacă ne uităm la semne, observăm că  $\epsilon(\tau)$  este  $-1$  ( $\tau$  este impară), dar în stânga, semnul lui  $x^{20}$  este  $+1$ , fiind o putere pară. Deci ecuația nu are soluții.

În cazul în care ecuația ar avea soluții, trebuie să luăm o permutare oarecare din  $S_{13}$  și să potrivim indicii pentru a rezolva ecuația.

□