Problema Tutoriat

1 a) Știind că $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \overset{not}{=\!=} c \in (0;1)$,

calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

Rezolvare:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\ln 2n+\ln 2n\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n+\ln n\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)+\ln 2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)-\ln n\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)}_{\downarrow\; c}-\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}_{\downarrow\; c}+\ln\frac{2n}{n}\right]=c-c+\ln 2=$$

$$=\ln 2$$

b) Fie $x_n=\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Verificați dacă șirul x_n este converg.

Rezolvare:

Observăm că $0\le x_n<1$ $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_n=$ mărginit

Dacă încercăm să aflăm monotonia șirului vom ajunge la:

$$x_{n+1}-x_n=\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right\}-\left\{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right\}=\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\tfrac{1}{n}}+\frac{1}{n+1}-\left[1+\ldots+\frac{1}{n+1}\right]-$$

$$-\left[\left(\cancel{1}+\cancel{\tfrac{1}{2}}+\ldots+\cancel{\tfrac{1}{n}}\right)-\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right]\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right]$$

Nu știm dacă ce am obținut este pozitiv sau negativ.

Vom încerca o altă abordare:

Presupunem că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n=l\in[0;1]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=l$ ($(x_{2n})_n$ este un subșir al lui $(x_n)_n$ și cum am presupus că șirul nostru este convergent, subșirul va avea aceeași limită).

Încercăm să ne folosim de primul subpunct (la examen va fi un subpunct ajutător la exerciții de acest gen).

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{2n}-x_n) = l - l = 0$ (Putem să spargem limita deoarece am presupus că l este limită finită)

$$x_{2n}-x_n = \{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}\} - \{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\} =$$
$$= 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n} - [1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}] - (1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n} - [1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}]) =$$
$$= \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} - ([1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}] - [1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}])$$

Din a) știm că $\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} \longrightarrow \ln 2$

Așa că notăm cu $y_n = [1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}] - [1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}]$

$$\left.\begin{array}{l} x_{2n}-x_n = \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n} - y_n \Rightarrow y_n = (\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}) + (x_n - x_{2n}) \\ \text{Cum } y_n = \underbrace{[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2n}]}_{\in\mathbb{Z}} - \underbrace{[1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}]}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow y_n\in\mathbb{Z}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n})}_{\downarrow \ln 2} + \underbrace{(x_n - x_{2n})}_{\downarrow 0} \\ y_n\in\mathbb{Z}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ln 2 \\ y_n\in\mathbb{Z}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, p\in\mathbb{N}\ \ y_n = y_p = \ln 2\ \forall n\geq p \\ y_n\in\mathbb{Z}\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ln 2\in\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} 1<2<e \Rightarrow \ln 1 < \ln 2 < \ln e \Rightarrow 0<\ln 2<1 \\ \ln 2\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{contradicție}$$

Deci, presupunerea noastră este falsă.

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit

$\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Observație!
Conform a)
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n + \ln n) =$$
$$= c + \lim_{n\to\infty}(\ln n) = +\infty$$