Seminar 11

1. Fie $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției f condiționate de relațiile $-x+y+z=1$ și $x-z=0$.

<u>Soluție.</u> $\mathbb{R}^3$ mulțime deschisă.

Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = -x+y+z-1$, $g_2(x,y,z) = x-z$ și $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y+z \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y+x \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = -1 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z)=1 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z)=0 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)=-1 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} =$$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \supset A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+$
$+\mu g_2(x,y,z) = xy+yz+zx+\lambda(-x+y+z-1)+$
$+\mu(x-z)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-\lambda+\mu=0 \\ x+z+\lambda=0 \\ y+x+\lambda-\mu=0 \\ -x+y+z=1 \\ x-z=0. \end{cases}$$

$x-z=0 \Leftrightarrow x=z.$

$x+z+\lambda=0 \underset{x=z}{\Leftrightarrow} 2x+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-2x.$

$-x+y+z=1 \underset{x=z}{\Leftrightarrow} \cancel{-x}+y+\cancel{x}=1 \Leftrightarrow y=1.$

$$\left.\begin{array}{l} y+z-\lambda+\mu=0 \underset{y=1,\ z=x,\ \lambda=-2x}{\Leftrightarrow} 1+x+2x+\mu=0 \Leftrightarrow 3x+\mu=-1 \\ y+x+\lambda-\mu=0 \underset{y=1,\ \lambda=-2x}{\Leftrightarrow} 1+x-2x-\mu=0 \Leftrightarrow -x-\mu=-1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \mu=2.$

$x=-1 \underset{\lambda=-2x}{\Leftrightarrow} \lambda=2.$

$x=-1 \underset{z=x}{\overset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} z=-1.$

Singurul punct critic (sau staționar) al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$ este $(-1,1,-1)$.

Avem $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=xy+yz+zx+$
$+2(-x+y+z-1)+2(x-z)$.

$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z)=0\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z)=0\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z)=0\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y,z)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}(x,y,z)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x,y,z)=1=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}(x,y,z)\ \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

Toate derivatele parțiale de ordinul doi de mai sus sunt continue.

$$d^2L(-1,1,-1) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-1,1,-1)\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(-1,1,-1)\,dy^2 +$$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(-1,1,-1)\,dz^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(-1,1,-1)\,dx\,dy + 2\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(-1,1,-1)\cdot$$

$$\cdot dy\,dz + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(-1,1,-1)\,dx\,dz = 2(dx\,dy + dy\,dz +$$

$$+ dx\,dz).$$

Diferențiem legăturile $-x+y+z=1$, $x-z=0$ și obținem: $\begin{cases} -dx+dy+dz=0 \\ dx-dz=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy=0 \\ dx=dz. \end{cases}$

Avem $d^2L(-1,1,-1)_{leg} = 2(dx\cdot 0 + 0\cdot dz + dx\cdot dx) =$

$= 2\,dx^2.$

Deci $d^2L(-1,1,-1)_{leg}$ este pozitiv definită, i.e. $(-1,1,-1)$ este punct de minim local al lui f cu legăturile $g_1(x,y,z)=0$ și $g_2(x,y,z)=0$. $\square$

2. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^3+y$ și $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=y$. Arătați că $(0,0)$ este punct staționar (critic)

al lui f cu legătura $g(x,y)=0$ și nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

<u>Soluție.</u> $\mathbb{R}^2$ deschisă.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

$$\text{rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\text{rang}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\supset A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=$

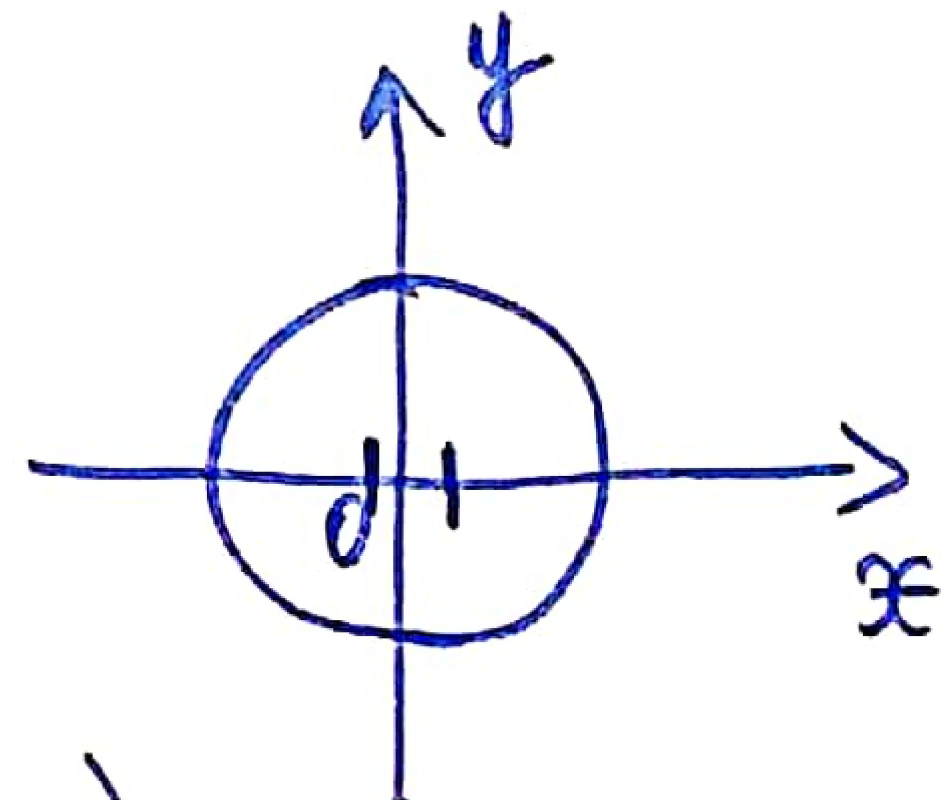
$=x^3+y+\lambda y.$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2=0 \\ 1+\lambda=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \lambda=-1 \\ y=0. \end{cases}$$

Deci $(0,0)$ este punct staționar (critic) al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

Arătăm că $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$.

$f(x,0)=x^3 \ \forall x\in\mathbb{R}$; $f(0,0)=0$.



$f(x,0)=x^3<0=f(0,0) \ \forall x\in(-\infty,0)$.

$f(x,0)=x^3>0=f(0,0) \ \forall x\in(0,\infty)$.

Deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local al lui f cu legătura $g(x,y)=0$. $\square$

3. Fie $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ 2x+2y+z=1\}$ și $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x+y+z$. Determinați punctele de

extrem global ale funcției $f|_A$.

<u>Soluție.</u> $\left.\begin{array}{l} A \text{ compactă (închisă și mărginită)} \\ \cap \\ \mathbb{R}^3 \\ f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^3 \supset A \end{array}\right\} \Longrightarrow$ f își atinge marginile pe A.

$\mathbb{R}^3$ deschisă

Fie $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$,

$g_2(x,y,z) = 2x+2y+z-1$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z)=2 \quad \forall\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)=1 \quad \forall\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}=$$

$$=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}=2 \quad \forall\ (x,y,z)\in A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+$
$+\mu g_2(x,y,z)=(x+y+z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(2x+2y+z-1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0 \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2\lambda x+2\mu=0 \\ 1+2\lambda y+2\mu=0 \\ 1+2\lambda z+\mu=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+z=1 \end{cases} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\lambda x = -2\mu - 1 \\ 2\lambda y = -2\mu - 1 \\ 2\lambda z = -\mu - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-2\mu - 1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{-2\mu - 1}{2\lambda} \\ z = \dfrac{-\mu - 1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + z = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(-2\mu - 1)^2 + (-2\mu - 1)^2 + (-\mu - 1)^2}{4\lambda^2} = 1 \\ \dfrac{-4\mu - 2 - 4\mu - 2 - \mu - 1}{2\lambda} = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9\mu^2 + 10\mu + 3}{4\lambda^2} = 1 \\ \dfrac{-9\mu - 5}{2\lambda} = 1 \Longleftrightarrow 2\lambda = -9\mu - 5. \end{cases}$$

$$9\mu^2 + 10\mu + 3 = \underbrace{4\lambda^2}_{(2\lambda)^2} \underset{2\lambda = -9\mu - 5}{\Longleftrightarrow} 9\mu^2 + 10\mu + 3 = (-9\mu - 5)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 9\mu^2 + 10\mu + 3 = 81\mu^2 + 90\mu + 25 \Longleftrightarrow 72\mu^2 + 80\mu + 22 = 0 \,\Big|\, :2$$

$$\Longleftrightarrow 36\mu^2 + 40\mu + 11 = 0.$$

$$\Delta = 1600 - 1584 = 16.$$

$$\sqrt{\Delta} = 4.$$

$$\mu_1 = \frac{-40+4}{72} = \frac{-36^{(36}}{72} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{9\cdot\frac{1}{2}-5}{2} = -\frac{1}{4}.$$

$$\mu_2 = \frac{-40-4}{72} = \frac{-44^{(4}}{72} = -\frac{11}{18} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{9\cdot\frac{11}{18}-5}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$x_1 = \frac{-2\mu_1-1}{2\lambda_1} = \frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}-1}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = 0.$$

$$y_1 = \frac{-2\mu_1-1}{2\lambda_1} = 0.$$

$$z_1 = \frac{-\mu_1-1}{2\lambda_1} = \frac{\frac{1}{2}-1}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-2\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{-2\left(-\frac{11}{18}\right)-1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{11}{9}-1}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{9}.$$

$$y_2 = \frac{-2\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{4}{9}.$$

$$z_2 = \frac{-\mu_2-1}{2\lambda_2} = \frac{\frac{11}{18}-1}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{7}{18}}{\frac{1}{2}} = -\frac{7}{9}.$$

Punctele critice ale lui f condiționate de A sunt: $(0,0,1)$ și $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

Deoarece $f|_A$ are măcar un punct de minim global și măcar un punct de maxim global rezultă că unul dintre cele două puncte critice este punct de minim global și celălalt este punct de maxim global.

$f(0,0,1) = 0+0+1 = 1.$

$f\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{7}{9} = \frac{1}{9}.$

Deci $\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$ este punct de minim global al lui $f|_A$ și $(0,0,1)$ este punct de maxim global al lui $f|_A$. $\square$

4. Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$. Determinați valorile extreme ale funcției f pe mulțimea $\overline{B}(\underset{(0,0,0)}{\underset{\parallel}{0}}, 1)$ (i.e. valorile extreme ale funcției $f|_{\overline{B}(0,1)}$).

Soluție. Reamintim că $\overline{B}(\underset{(0,0,0)}{\underset{\parallel}{0}}, 1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$

$\left.\begin{array}{l}\overline{B}(0,1) \text{ compactă (închisă și mărginită)} \\ f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^3 \supset \overline{B}(0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow f$ își atinge marginile pe $\overline{B}(0,1)$.

Căutăm punctele de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ în $B(0,1)$ și în $\partial B(0,1) = \mathrm{Fr}\, B(0,1)$.

Notăm $h = f|_{B(0,1)}$.

$B(0,1)$ deschisă

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 4x \quad \forall (x,y,z) \in B(0,1)$.

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = 2y \quad \forall (x,y,z) \in B(0,1)$.

$\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = 6z \quad \forall (x,y,z) \in B(0,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \text{ continue pe } B(0,1) \\ B(0,1) \text{ deschisă} \end{array}\right| \Rightarrow h \text{ diferențiabilă pe } B(0,1).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Singurul posibil punct de extrem global al lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ situat în $B(0,1)$ este $(0,0,0)$.

Căutăm posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ situate în $\underset{\text{Fr}\,B(0,1)}{\underset{\parallel}{\partial B(0,1)}} = \overline{B}(0,1) \setminus B(0,1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid$

$x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

Fie $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ și $A = \overset{\text{Fr}\,B(0,1)}{\overset{\parallel}{\partial B(0,1)}}$.

$\mathbb{R}^3$ deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=4x \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2y \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=6z \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=2x \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=2y \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=2z \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$

Toate derivatele parțiale de mai sus sunt continue pe $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)=$$

$$=\operatorname{rang}(2x \quad 2y \quad 2z)=1 \quad \forall (x,y,z)\in A.$$

Fie $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=$

$=2x^2+y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z)=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases} \iff \begin{cases}4x+2\lambda x=0\\ 2y+2\lambda y=0\\ 6z+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases} \iff \begin{cases}2x(2+\lambda)=0\\ 2y(1+\lambda)=0\\ 2z(3+\lambda)=0\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

Avem soluțiile: $\lambda_1=-1 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,-1,0),(0,1,0)\}$.

$\lambda_2=-2 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(-1,0,0),(1,0,0)\}$.

$\lambda_3=-3 \Rightarrow (x,y,z)\in\{(0,0,-1),(0,0,1)\}$.

Posibilele puncte de extrem global ale lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ situate în $\partial B(0,1)=\mathrm{Fr}\,B(0,1)$ sunt: $(0,-1,0)$, $(0,1,0)$, $(-1,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,-1)$, $(0,0,1)$.

$f(0,0,0)=0$; $f(0,-1,0)=f(0,1,0)=1$;

$f(-1,0,0)=f(1,0,0)=2$; $f(0,0,-1)=f(0,0,1)=3$.

Valoarea maximă a lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ este 3, iar valoarea minimă a lui $f|_{\overline{B}(0,1)}$ este 0. $\square$