=TEORIE ALGEBRĂ=

① TEOREMA DE CORESPONDENȚĂ PT. SUBGRUPURI:

DACĂ $f: G \to G'$ ESTE UN MORFISM SURJECTIV DE GRUPURI, ATUNCI $(\exists)$ O CORESPONDENȚĂ BIJECTIVĂ ÎNTRE MULȚIMEA SUBGRUPURILOR LUI "G" CE CONȚIN "$\operatorname{Ker} f$" ȘI MULȚIMEA SUBGRUPURILOR LUI G'.

DEM: $\{H \leq G \mid \operatorname{Ker} f \subseteq H\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{H' \subseteq G' \mid H' \leq G'\}$

- $\alpha(H) := f(H) \leq G'$, ADICĂ:

  $(\forall)\ H \leq G$, AVEM $f(H) := \{f(h) \mid h \in H\} \leq G'$

- $\beta(H') := f^{-1}(H') \leq G$, ADICĂ

  $(\forall)\ H' \leq G'$, AVEM $f^{-1}(H') := \{g \in G \mid f(g) \in H'\} \leq G$

- ȘI $\operatorname{Ker} f \subseteq f^{-1}(H')$, PT. CĂ $f(\operatorname{Ker} f) = \{f(g) \mid g \in \operatorname{Ker} f\} = \{e'\} \subseteq H'$

  A RĂMAS DE DEMONSTRAT:

  (1) $\alpha\beta(H') = H'$, $(\forall)\ H' \leq G'$

  (2) $\beta\alpha(H) = H$, $(\forall)\ \operatorname{Ker} f \subseteq H \leq G$

- $(1) \Leftrightarrow f(f^{-1}(H')) = H'$, $(\forall)\ H' \leq G'$

  "$\subseteq$": $x \in f(f^{-1}(H')) \Leftrightarrow x = f(h)$ cu $h \in f^{-1}(H') \Rightarrow x = f(h) \in H'$

  "$\supseteq$": $h' \in H' \overset{f\ \text{SURJ}}{\Rightarrow} (\exists)\ x \in G$ a.î. $f(x) = h' \in H' \Rightarrow x \in f^{-1}(H') \Rightarrow$

  $\Rightarrow h' = f(x) \in f(\underbrace{f^{-1}(H')}_{x})$

- $(2) \Leftrightarrow f^{-1}(f(H)) = H$

  "$\subseteq$": $x \in f^{-1}(f(H)) \Leftrightarrow f(x) \in f(H) \Leftrightarrow (\exists)\ h \in H$ a.î. $f(x) = f(h) \Rightarrow$

  $\Rightarrow f(x) f(h)^{-1} = e' \Rightarrow f(x \cdot h^{-1}) = e' \Rightarrow x h^{-1} \in \operatorname{Ker} f \subseteq H \Rightarrow$

  $\Rightarrow (\exists)\ h' \in H$ a.î. $x h^{-1} = h' \Rightarrow x = h'h$

  $\left.\begin{array}{l} x = h'h \\ h', h \in H \leq G \end{array}\right\} \Rightarrow x \in H$

  "$\supseteq$": $h \in H \Rightarrow f(h) \in f(H) \Rightarrow h \in f^{-1}(f(H))$

② ÎNDICELE UNUI SUBGRUP ÎNTR-UN GRUP:

$(G/H)_s = \{[x]_s = xH / x \in G\}$
$(G/H)_d = \{[x]_d = Hx / x \in G\}$

· PRELIMINARII:

DACĂ $H \leq G$, PE "G" SE DEFINESC RELAȚIILE

$$\begin{cases} x \overset{s}{\equiv} y \ (\mathrm{MOD}\ H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \\ x \overset{d}{\equiv} y \ (\mathrm{MOD}\ H) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \end{cases}$$

MULȚIMILE FACTOR $G/\overset{s}{\equiv}(H)$ ȘI $G/\overset{d}{\equiv}(H)$ SE NOTEAZĂ $(G/H)_s$ ȘI $(G/H)_d$.

· PROPOZIȚIE:

$(\forall) H \leq G$, $\left.\begin{array}{l} f:(G/H)_s \to (G/H)_d \\ f(xH) = Hx^{-1} \end{array}\right\}$ E BINE DEFINITĂ ȘI BIJECTIVĂ.

ÎN PARTICULAR, $|(G/H)_s| = |(G/H)_d| \overset{not}{=} |G:H|$ ȘI S.N. "INDICELE LUI H ÎN G.

DEM: "f" BINE DEFINITĂ: $[x]_s = [y]_s \Rightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$

$\Updownarrow$

$x \overset{s}{\equiv} y\ (H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Rightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{-1} \overset{d}{\equiv} y^{-1}\ (H) \Leftrightarrow Hx^{-1} = Hy^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} \text{"}\Rightarrow\text{": BUNA DEFINIRE A LUI "f"} \\ \text{"}\Leftarrow\text{": INJ. LUI "f"} \end{array}\right\} \Rightarrow$ CLAR f SURJ. $\Rightarrow$ BIJ.

TEOREMA LUI LAGRANGE:

DACĂ $H \leq G \Rightarrow |G| = |H| \cdot |G:H|$.

ÎN PARTICULAR, DACĂ "G" E FINITĂ $\Rightarrow |H| \,\big|\, |G|$.

DEM: $\underbrace{(G/H)_s}$ $= \{x_i H / i \in I\}$, ADICĂ $(x_i)_{i \in I}$ ESTE UN SISTEM COMPLET DE REPREZENTANȚI PT. $\overset{s}{\equiv}(H)$.

$\Rightarrow$ ELEMENTELE SALE DEFINESC O PARTIȚIE A LUI G.

ÎN PARTICULAR, $|(G/H)_s| = |I|$ ȘI $G = \biguplus_{i \in I} x_i H \Rightarrow |G| = \sum_{i \in I} |x_i H|$.

$\left.\begin{array}{l} x_i H \xleftarrow{\sim} H \\ x_i h \leftarrow h \end{array}\right\} \Rightarrow$ ESTE BIJECTIVĂ, $(\forall) i \in I \Leftrightarrow |x_i H| = |H|, (\forall) i \in I$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |G| = \sum_{i \in I} |H| = |H| \cdot |I| = |H| \cdot |G:H|$

CONSECINȚĂ: DACĂ "G" ESTE GRUP CU "p" ELEMENTE (p = NR. PRIM), ATUNCI $\{e\}$ ȘI "G" SUNT SINGURELE SUBGRUPURI ALE SALE.

③ GRUPUL FACTOR:

• PRELIMINARII:

DACĂ $H \leq G$, PE "G" SE DEFINESC RELAȚIILE DE ECHIVALENȚĂ:

$$\begin{cases} x \overset{\Delta}{\equiv} y \,(\mathrm{MOD}\ H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \\ x \overset{d}{\equiv} y \,(\mathrm{MOD}\ H) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H \end{cases}$$

MULȚIMILE FACTOR $G/\overset{\Delta}{\equiv}(H)$ ȘI $G/\overset{d}{\equiv}(H)$ SE NOTEAZĂ $(G/H)_\Delta$ ȘI $(G/H)_d$.

$$\begin{cases} (G/H)_\Delta = \{[x]_\Delta = xH \mid x \in G\} \\ (G/H)_d = \{[x]_d = Hx \mid x \in G\} \end{cases}$$

PT. $H \leq G$, URMĂTOARELE AFIRMAȚII SUNT ECHIVALENTE:

1) $(G/H)_\Delta = (G/H)_d$
2) $xH = Hx, (\forall) x \in G$
3) $xHx^{-1} = H, (\forall) x \in G$
4) $xHx^{-1} \subseteq H, (\forall) x \in G$

DACĂ "H" ($H \leq G$) VERIFICĂ UNA DIN CELE 4 CONDIȚII ENUNȚATE MAI SUS, "H" S.N. SUBGRUP NORMAL, NOTAT $H \trianglelefteq G$. ÎN ACEST CAZ, AVEM $(G/H)_\Delta = (G/H)_d \overset{\text{not.}}{=} G/H$.

DEF: FIE "G" UN GRUP, $H \trianglelefteq G$ ȘI $G/H = \{xH = Hx \overset{\text{not}}{=} \hat{x} \mid x \in G\}$. PE G/H SE DEFINEȘTE $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}, (\forall) x, y \in G$. $(G/H, \cdot)$ = GRUPUL FACTOR A LUI "G" PRIN "H".

DEM: • $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$

BUNA DEFINIRE: $\left.\begin{matrix} \hat{x}_1 = \hat{x}_2 \\ \hat{y}_1 = \hat{y}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{x_1y_1} = \widehat{x_2y_2}$ (VREM SĂ DEMONSTRĂM)

$\hat{x}_1 = \hat{x}_2 \Leftrightarrow x_1 \overset{\Delta}{\equiv} x_2 (H) \Leftrightarrow x_1^{-1}x_2 \in H \Leftrightarrow (\exists)\, h \in H$ a.î. $x_1^{-1}x_2 = h$, i.e. $x_2 = x_1h$.

ANALOG $\hat{y}_1 = \hat{y}_2 \Leftrightarrow (\exists)\, h' \in H$ a.î. $y_2 = y_1h'$

VREM $\widehat{x_1y_1} = \widehat{x_2y_2} \Leftrightarrow x_1y_1 \overset{\Delta}{\equiv} x_2y_2 \,(\mathrm{MOD}\ H) \Leftrightarrow (x_1y_1)^{-1}x_2y_2 \in H$

$$(x_1y_1)^{-1}x_2y_2 = y_1^{-1}x_1^{-1}x_1hy_1h' = (\underset{\underset{G}{\cap}}{y_1^{-1}}\,\underset{\underset{H \trianglelefteq G}{\cap}}{hy_1})h' \in HH = H$$

• $(G/H, \cdot)$ = GRUP

1) ASOCIATIVITATE (CLAR) $\Leftrightarrow (\hat{x}\hat{y})\hat{z} = \widehat{xy}\hat{z} = \widehat{xyz} = \hat{x}\widehat{yz} = \hat{x}(\hat{y}\hat{z})$
2) ELEMENT NEUTRU: $\hat{1} = 1 \Leftrightarrow \hat{x}\hat{1} = \widehat{x1} = \hat{x} = \widehat{1x} = \hat{1}\hat{x}$
3) $\hat{x}^{-1} = \widehat{x^{-1}}, (\forall)\, x \in G \Leftrightarrow \hat{x}\widehat{x^{-1}} = \widehat{xx^{-1}} = \hat{1} = \widehat{x^{-1}x}$

PROPRIETATEA DE UNIVERSALITATE A GRUPULUI FACTOR:

• PRELIMINARII: "G" GRUP ȘI $H \trianglelefteq G$. $p: G \to G/H$; $p(x) = \hat{x} = xH = Hx$, $(\forall)\, x \in G$ ESTE MORFISM SURJECTIV DE GRUPURI, NUMIT "SURJECȚIA/PROIECȚIA" CANONICĂ.

DEF: FIE "G" UN GRUP, $H \trianglelefteq G$, $p: G \to G/H$ SURJECȚIA CANONICĂ ȘI $f: G \to G'$ UN MORFISM DE GRUPURI. ATUNCI:

1) DACĂ $H \subseteq Ker\, f$, ATUNCI $(\exists!)\ \bar{f}: G/H \to G'$ UN MORFISM DE GRUPURI a.î. $\bar{f} \circ p = f$.

2) ÎN CONDIȚIILE DE LA 1, AVEM: $\begin{cases} i)\ \bar{f} = \text{INJECTIVĂ} \Leftrightarrow H = Ker\, f \\ ii)\ \bar{f} = \text{SURJECTIVĂ} \Leftrightarrow f = \text{SURJ.} \end{cases}$

DEM: REZULTĂ DIN P.U. A MULȚIMII FACTOR:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"', "\text{(FUNCȚIE)}"'] & A/\sim \arrow[d, dashed, "(\exists!)\ \bar{f}\ (\Leftrightarrow \sim \subseteq \rho_f)"] \\ & B \end{tikzcd}$$

ρ_f = RELAȚIE DE ECHIVALENȚĂ PE A: $a \rho_f a' \Leftrightarrow f(a) = f(a')$

$\bar{f}(\hat{a}) := f(a)$, $(\forall)\, \hat{a} \in A/\sim$

CONTEXTUL NOSTRU: $\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & G/H = G/\overset{\wedge}{\equiv}(H) \\ G' \end{tikzcd}$ $(\sim\, = \overset{\wedge}{\equiv}(H))$

$(\forall)\, x, x' \in G$, AVEM $x \rho_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \Leftrightarrow f(x)^{-1} f(x') = e' \overset{f = \text{MORF.}}{\Longleftrightarrow}$
$\Leftrightarrow f(x^{-1}x') = e' \Leftrightarrow x^{-1}x' \in Ker\, f \Leftrightarrow x \overset{\wedge}{\equiv} x' (Ker\, f)$

DECI, $\rho_f = \overset{\wedge}{\equiv}(Ker\, f) \Rightarrow \sim\, \subseteq \rho_f \Leftrightarrow \overset{\wedge}{\equiv}(H) \subseteq \overset{\wedge}{\equiv}(Ker\, f) \Leftrightarrow ((\forall)\, x, x' \in G$ a.î. $x^{-1}x' \in H \Rightarrow x^{-1}x \in Ker\, f) \Leftrightarrow H \subseteq Ker\, f$

DIN P.U. A MULȚIMII FACTOR, $(\exists!)\ \bar{f}: G/H \to G'$ FUNCȚIE a.î. $\bar{f} \circ p = f$. MAI MULT $\bar{f}(\hat{g}) = f(g)$, $(\forall)\, g \in G$.

RESTUL REZULTĂ DIN P.U. A MULȚIMII FACTOR, CU OBSERVAȚIA CĂ
$$\bar{f}(\hat{g}_1)\bar{f}(\hat{g}_2) = f(g_1)f(g_2) = f(g_1 g_2) = \bar{f}(\widehat{g_1 g_2}),\ (\forall)\, \hat{g}_1, \hat{g}_2 \in G/H$$

• CONSECINȚĂ: TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM PT. GRUPURI

DACĂ $f: G \to G'$ MORF. DE GR., ATUNCI:

i) $Ker\, f \trianglelefteq G$ și $Im\, f \leq G'$

ii) $\bar{f}: G/Ker\, f \xrightarrow{\sim} Im\, f$ E BINE DEFINITĂ ȘI IZOMORFISM DE GR..

④ TEOREMA DE STRUCTURĂ A GRUPURILOR CICLICE:

• PRELIMINARII:

1) TEOREMA FUNDAMENTALĂ DE IZOMORFISM PT. GRUPURI:

$f: G \to G'$ UN MORFISM DE GRUPURI. ATUNCI:

i) $\ker f \trianglelefteq G$ ȘI $\operatorname{Im} f \leq G'$

ii) $\bar{f}: G/\ker f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$ E BINE DEFINITĂ ȘI IZOMORFISM DE GR..

2) UN GRUP "G" S.N. "CICLIC" DACĂ $(\exists)\, x \in G$ a.î. $\langle x \rangle = G$ i.e. $G = \{x^k / k \in \mathbb{Z}\}$

DEF: DACĂ G = GR. CICLIC, ATUNCI $\begin{cases} G \simeq (\mathbb{Z}, +) \text{ DACĂ "G" ESTE INFINIT;} \\ G \simeq (\mathbb{Z}_n, +) \text{ DACĂ "G" E FINIT DE ORDIN "n"} \end{cases}$

DEM: $G = \langle x \rangle = \{x^k / k \in \mathbb{Z}\}$ PT. UN ANUMIT $x \in G$

FIE $f: (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$; $f(k) = x^k$, $(\forall)\, k \in \mathbb{Z}$

$f(k+l) = x^{k+l} = x^k \cdot x^l = f(k) \cdot f(l)$, $(\forall)\, k, l \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ "f" = MORF. GR.

$G = \langle x \rangle \Rightarrow$ "f" = MORF. SURJ. DE GRUPURI, i.e. $\operatorname{Im} f = G$

T.F.I. $\Rightarrow \mathbb{Z}/\ker f \simeq \operatorname{Im} f = G$, IZOMORFISM DE GRUPURI

$\ker f \leq (\mathbb{Z}, +) \Rightarrow (\exists)\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $\ker f = n\mathbb{Z} \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ IZOMORF. GR

• DACĂ "G" E INFINIT $\Rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ INFINIT $\Rightarrow n = 0 \Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ "f" E INJECTIVĂ, DECI BIJECTIVĂ $\Rightarrow (\mathbb{Z}, +) \xrightarrow{f} (G, \cdot)$ IZOMORF. GR.

• DACĂ "G" E FINIT $\Rightarrow n \neq 0 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_n$ IZOMORFISM DE GR.

CLAR, $|G| = |\mathbb{Z}_n| = n$

5 SEMNUL UNEI PERMUTĂRI:

$(\forall)\, \sigma \in S_n,\ INV(\sigma) = \{(i,j) \mid i<j \text{ și } \sigma(i)>\sigma(j)\}$

$n(\sigma) := |INV(\sigma)|$

DEF: $\varepsilon(\sigma) := (-1)^{\underbrace{|INV(\sigma)|}_{n(\sigma)}} \in \{\pm 1\}$

$\sigma = \begin{cases} \text{PARĂ} \iff \varepsilon(\sigma) = 1 \\ \text{IMPARĂ} \iff \varepsilon(\sigma) = -1 \end{cases}$

- $A_n := \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} \to$ MULȚIMI PERMUTĂRI PAR
  $\ni e$
- $\{\tau \in S_n \mid \varepsilon(\tau) = -1\} \to$ MULȚ. PERMUTĂRI IMPARE
  $\ni (i,j); (\forall)\, i<j$ PT. CĂ $n((i,j)) = 2(j-i)-1$

DECI $\varepsilon: S_n \to \{\pm 1\}$ FUNCȚIE SURJECTIVĂ

MORFISMUL SIGNATURĂ:

FIE $\sigma \in S_n$. ATUNCI $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i<j \le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

ÎN PARTICULAR, OBȚINEM ε = MORFISM SURJECTIV DE GR.,

DEM:

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(\sigma(j)-\sigma(i))}{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)} \\ &\prod_{1\le i<j\le n}(\sigma(j)-\sigma(i)) = (-1)^{n(\sigma)} \cdot \prod_{1\le i<j\le n} |\sigma(j)-\sigma(i)| = (-1)^{n(\sigma)} \cdot \prod_{1\le k<l\le n}(l-k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = (-1)^{n(\sigma)} \frac{\prod_{1\le k<l\le n}(l-k)}{\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)} = (-1)^{n(\sigma)} = \varepsilon(\sigma)$$

ÎN PARTICULAR, $(\forall)\ \sigma, \tau \in S_n$, AVEM:

$$\varepsilon(\sigma\cdot\tau) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{j-i} = \prod_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} \cdot \overbrace{\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}}^{\varepsilon(\tau)}\right) =$$

$$= \varepsilon(\tau) \cdot \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)} = \varepsilon(\tau) \cdot \prod_{1\le k<l\le n} \frac{\sigma(l)-\sigma(k)}{l-k} = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau)$$