Exerciţii Date la Examenul la Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Subiectele date la examenul din 28 ianuarie 2020

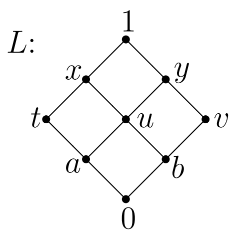
Exerciţiul 1.1. Fie A o mulţime cu exact 2 elemente (i. e. având $|A| = 2$). Desenaţi diagramele (date de reprezentările prin grafuri orientate ale) tuturor relaţiilor binare pe A şi indicaţi care dintre ele sunt:

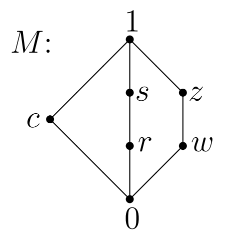
- reflexive,
- simetrice,
- antisimetrice,
- tranzitive.

Pentru cele care sunt:

- relaţii de ordine, desenaţi–le şi diagramele Hasse,
- relaţii de echivalenţă, indicaţi şi partiţiile care le corespund.

Exerciţiul 1.2. Indicaţi sublaticile izomorfe cu diamantul ale laticilor date de următoarele diagrame Hasse:





Exerciţiul 1.3. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\varphi, \psi, \chi \in E$ şi $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$. Demonstraţi că au loc, în calculul propoziţional clasic:

(i) dacă $\varphi \vee \neg\,\varphi \notin \Delta$, atunci Δ nu e sistem deductiv;

(ii) dacă $\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \neg\,\chi,\ \neg\,\varphi \rightarrow \chi,\ \varphi \leftrightarrow \chi \in \Sigma$, atunci Σ e inconsistentă;

(iii) $\dfrac{\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi,\ \Delta \vdash \chi \rightarrow \neg\,\varphi,\ \Sigma \cap \Delta \vdash \psi}{\Sigma \cup \Delta \vdash \neg\,\varphi}$.

2 Subiectele date la examenul din 29 ianuarie 2020

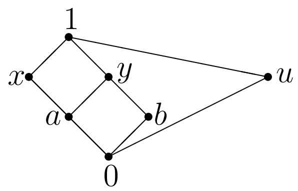
Exercițiul 2.1. Fie L o latice mărginită. Pentru orice sublatice S a lui L, notăm:

$$\rho_S = \mathcal{E}(< \cap S^2) \in \mathrm{Eq}(L) :$$

relația de echivalență pe L generată de restricția la S a relației de ordine strictă $<$ de pe L.

(i) Demonstrați că, dacă S e o sublatice a lui L astfel încât $\rho_S = L^2$ și $\begin{cases} S \neq \emptyset \text{ sau} \\ |L| > 1 \end{cases}$ (i. e. fie S e nevidă, fie L e netrivială), atunci S e sublatice mărginită a lui L.

(ii) În cazul particular în care L e dată de următoarea diagramă Hasse, determinați sublaticile S ale lui L cu proprietatea că $\rho_S = L^2$:



Observație: $\rho_S = \mathcal{R}(\mathcal{T}(\mathcal{S}(< \cap S^2))) = \Delta_L \cup \mathcal{T}((< \cup >) \cap S^2) \subseteq \Delta_L \cup S^2$, așadar orice element $t \in L \setminus S$ are $t/\rho_S = \{t\}$, prin urmare, la primul punct de la exercițiul precedent, are loc această proprietate mai tare, care dă și răspunsul de la al doilea punct:

- dacă S e o sublatice a lui L astfel încât fie S e nevidă, fie L e netrivială, atunci:

$$\rho_S = L^2 \text{ dacă și numai dacă } S = L.$$

Exercițiul 2.2. Determinați toate morfismele injective de latici mărginite (i. e. scufundările de latici mărginite) de la romb (i. e. $\mathcal{L}_2^2$: pătratul lanțului cu două elemente) la laticea L de la Exercițiul 2.1, punctul (ii).

Exercițiul 2.3. Fie V mulțimea variabilelor propoziționale, iar E mulțimea enunțurilor logicii propoziționale clasice, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$, $\Sigma, \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$ și $M = \{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma, \gamma \to \neg\,\alpha\} \in \mathcal{P}(E)$.

Demonstrați că au loc, în calculul propozițional clasic:

(i) dacă $\alpha, \beta, \gamma \in V$, atunci M e consistentă;

(ii) dacă $\alpha = \delta \vee \neg\,\delta$, atunci M e inconsistentă;

(iii) $\dfrac{\Gamma \vdash \gamma \to \alpha,\ \Delta \vdash \delta \to \beta,\ \Sigma \vdash \neg\,\alpha \wedge \neg\,\beta}{\Sigma \cup \Gamma \cup \Delta \vdash \neg\,\gamma \wedge \neg\,\delta}$.