Examen scris
Structuri Algebrice în Informatică
04/02/2022

$a = \dots,$ $b = \dots,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Determinaţi a şi b.

2. Determinaţi numărul de permutări de ordin a din grupul de permutări S_{a+b}.

3. Se consideră permutarea $\sigma = (1, \ldots, a)(a+1, \ldots, a+b)(a+b+1, \ldots, 2a+2b)$, un produs de 3 cicli disjuncţi de lungime a, b, respectiv $a+b$, din S_{2a+2b}. Determinaţi toate permutările $\tau \in S_{2a+2b}$ astfel încât $\tau^3 = \sigma$.

4. Calculaţi $a^{a+b^{b^{a+b}}} \pmod{41}$.

5. Se consideră mulţimea de numere naturale $A = \{x, \ldots, a+b\}$, unde x este numărul natural egal cu minimul dintre a şi b. Determinaţi o relaţie de echivalenţă ρ pe mulţimea A astfel încât mulţimea factor A/ρ să aibă exact 4 clase de echivalenţă diferite iar clasa de echivalenţă a lui a să conţină doar numerele a şi b. (Precizare: dacă $a = b$ atunci clasa de echivalenţă a lui a va fi formată doar din elementul a, iar dacă $a \neq b$ atunci clasa de echivalenţă a lui a va fi $\{a, b\}$.)

6. Determinaţi numărul elementelor de ordin 9 din grupul produs direct $(\mathbb{Z}_{3^a}, +) \times (\mathbb{Z}_{3^b}, +)$.

7. Daţi câte un exemplu, dacă există, sau justificaţi de ce nu există în caz contrar, de:
   - Funcţie injectivă, care nu este surjectivă, $f_{a,b} : (-\infty, \frac{a}{b}] \mapsto [\frac{b}{a}, +\infty)$.
   - Funcţie surjectivă, care nu este injectivă, $g_{a,b} : [\frac{a}{b}, +\infty) \mapsto (-\infty, \frac{b}{a}]$.
   - Funcţie bijectivă $h_{a,b} : (a, a+b] \mapsto \mathbb{N}$.

8. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b(1+a), & \text{dacă } \ x < -b, \\[2ex] ax^2 + 2a(a-1)x + a^3 - 2a^2 + a + b, & \text{dacă } \ x \geq -b. \end{cases}$$

   Decideţi dacă funcţia f este injectivă, surjectivă, respectiv bijectivă. Calculaţi $f^{-1}([-b-a, b+a])$.

9. Considerăm inelele produs direct $R = \mathbb{Z}[X] \times \mathbb{Z}[X]$ şi $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Definim funcţia $\phi : R \mapsto S$ astfel $\phi(P(X), Q(X)) = (P(a), Q(b))$. Să se arate că ϕ este un morfism de inele. Determinaţi $\ker(\phi)$, nucleul morfismului ϕ.

10. Determinaţi toate numerele întregi x care au proprietatea că $x \equiv a \pmod{2b+1}$, $x \equiv a+1 \pmod{2b+2}$ şi $x \equiv a+2 \pmod{2b+3}$.