Seminar 5 - 3.11.2021

Ex. 1: Scrieți toate partițiile unei mulțimi cu 4 elemente.

Rez: $A=\{1,2,3,4\}$.

O partiție a lui A are minim o mulțime și maxim 4.

I: $(\{1,2,3,4\})$

II: $(4=1+3=2+2)$ $(\{1\},\{2,3,4\})$, $(\{2\},\{1,3,4\})$, $(\{3\},\{1,2,4\})$

$(\{4\},\{1,2,3\})$, $(\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1,3\},\{2,4\})$, $(\{1,4\},\{2,3\})$

$C_4^2=6$

III: $(4=1+1+2)$ $(\{1,2\},\{3\},\{4\})$, $(\{1,3\},\{2\},\{4\})$, $(\{1,4\},\{2\},\{3\})$

$(\{2,3\},\{1\},\{4\})$, $(\{2,4\},\{1\},\{3\})$, $(\{3,4\},\{1\},\{2\})$

IV: $(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\})$

Ex. 2: Pe $\mathbb{R}$ se def. rel. „$\sim$" prin $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Det. clasele de echiv., mulțimea factor și un sistem complet de reprezentanți (SCR).

Rez.:

$[x] = \hat{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \sim x \}$.

$[3] = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \sim 3 \} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y - 3 \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} = [0]$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow [m] = \mathbb{Z}$.

Obs.: $x \sim y \Rightarrow [x] = [y]$.

clasa, parte fracționară

$[x] = \{ y \in \mathbb{R} \mid y - x \in \mathbb{Z} \} = x + \mathbb{Z} = [\{x\}]$

$x \sim y \iff \{x\} = \{y\}$ (dem.)

$\in \mathbb{Z}$ (diferența părților întregi)

$x - y = m + \{x\} - \{y\}$

$\{x\} \in [0, 1)$ $\quad \{x\} - \{y\} \in (-1, 1)$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \le \{x\} < 1 \\ 0 \le \{y\} < 1 \end{pmatrix}$

Un sistem complet de reprezentanți: $x_1, \dots, x_t$ SCR

$\iff \bigcup_{i=1}^{t} [x_i] = \mathbb{R}$ și $[x_i] \cap [x_j] = \emptyset, \forall i \neq j$

Exemplu: $\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\}$.

$0, 1, \dots, m-1$ este un SCR pt. rel. de echiv. „$\sim$"

$x \sim y \iff (x-y) \vdots m$, $x, y \in \mathbb{Z}$

Mulțimea factor: $\mathbb{Z}/_\sim = \mathbb{Z}_m$ = mulțimea claselor de echivalență.

Ex. 3: Pe $\mathbb{C}$ se def. $z \sim w \iff z - w \in \mathbb{R}$.

$[z] = ?$, SCR $= ?$

Obs.: $\mathbb{C}/_\sim = \{[z] \mid z \in \mathbb{C}\} = \{[z] \mid z \in SCR\}$

$i \sim 2+i$

$[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid z \sim i\} = \{z \in \mathbb{C} \mid z - i \in \mathbb{R}\} = \{a + i \mid a \in \mathbb{R}\}$.

$z = a + bi$, $[a + bi] = \{c + bi \mid c \in \mathbb{R}\} = [bi]$

$a, b \in \mathbb{R}$

(Obs.: $z \sim w$ $(z - w \in \mathbb{R}) \iff \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$)

Un SCR: $\{bi \mid b \in \mathbb{R}\}$. $\{b + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$

$\sqrt{2}i$, $-i$

Ex. 4: Pe $\mathbb{C}$ se def. rel. „$\sim$" prin $z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$.

a. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv. (ex.)

b. Det. clasele de echiv. și un SCR.

Rez.:

b. $z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$, $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\hat{0} \overset{?}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |0|\} = \{0\}$.

$\hat{1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |1|\} = \{a+bi \mid a^2+b^2=1\} = \{\cos\alpha + i\sin\alpha \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$.

Rem.: Forma trigonometrică a unui nr. complex:

$z = r(\underbrace{\cos\alpha + i\sin\alpha}_{|\;| = 1})$, $r = |z|$.

$|z| \in \mathbb{R}$, $|z| \geq 0$. $(|z| \in \mathbb{R}_+)$.

$z \sim r$, $\hat{z} = \hat{r}$

SCR: $\mathbb{R}_+$ ($[0, \infty)$ sau $(-\infty, 0]$)

Fie $z \in \mathbb{C}$, $\hat{z} = \hat{r}$, $r = |z| \in [0, \infty)$

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $r_1 \neq r_2 \Rightarrow \hat{r}_1 \neq \hat{r}_2$.

Ex. 4: Pe $\mathbb{R}$ se def. rel „$\sim$" dată prin:

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 - 3x = y^2 - 3y.$$

a. Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv. (ex.)

b. Det. clasele de echiv. și un SCR.

c. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{R}$, $f(\hat{t}) = -t^2 + 3t + 7$, $g(\hat{t}) = t^2 + t + 1$. Sunt funcțiile f și g bine definite?

Rez.:

b. $x \sim y \Leftrightarrow x^2 - 3x = y^2 - 3y.$

$\hat{0} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 3y = 0 \} = \{0, 3\}.$

$\hat{1} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 3y = -2 \} = \{1, 2\}$

$\hat{x} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y^2 - 3y = x^2 - 3x \} = \{x, \overset{?}{\ldots} \}$

$y^2 - 3y - x^2 + 3x = 0.$ Știm că x este răd.

Obs.: $ax^2 + bx + c = 0$, x_1, x_2 răd. $\Rightarrow ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Var. 1 : $y^2 - 3y - x^2 + 3x = 0$

$y^2 - x^2 - 3y + 3x = 0$

$(y-x)(y+x) - 3(y-x) = 0$

$(y-x)(x+y-3) = 0 \Rightarrow y = x$ sau $y = 3 - x$.

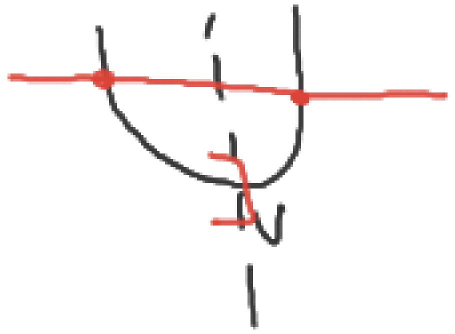
Var. 2 : Folosim rel. lui Viète : $y^2 - Sy + P = 0$

$\hat{x} = \{x, 3-x\}$

SCR = ?

I. Obs : $x \sim y \iff x^2 - 3x = y^2 - 3y$

$x \sim y \iff f(x) = f(y)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2 - 3t$.



SCR : $(-\infty, x_V]$ sau $[x_V, \infty)$

$(-\infty, \frac{3}{2}]$ sau $[\frac{3}{2}, +\infty)$

II. $X = 3 - X \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$f, g : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}$, $f(\hat{t}) = -t^2 + 3t + 7$, $g(\hat{t}) = t^2 + t + 1$.

f bine def $\Leftrightarrow$ $f(\hat{t_1}) = f(\hat{t_2})$, $\hat{t_1} = \hat{t_2}$, $t_1 \neq t_2$.

$\hat{t} = \{t, 3-t\}$

f bine def $\Leftrightarrow$ $-t^2 + 3t + 7 = -(3-t)^2 + 3(3-t) + 7, \forall t$

$$-t^2 + 3t + 7 = \cancel{-9} + 6t - t^2 + \cancel{9} - 3t + 7$$

$$-t^2 + 3t + 7 = -t^2 + 3t + 7 \quad (\text{OK}) \checkmark$$

g bine def $\Leftrightarrow$ $t^2 + t + 1 = (3-t)^2 + (3-t) + 1 \quad \forall t$

$$t^2 + t + 1 = 9 - 6t + t^2 + 3 - t + 1$$

$$t^2 + t + 1 = t^2 - 7t + 13 \quad (F) \Rightarrow g \text{ nu este bine def.}$$

$\hat{0} = \hat{3}$.

$g(\hat{0}) = 1$, $g(\hat{3}) = 3^2 + 3 + 1 = 13$.