Tutoriat 7 - Rezolvări
Inele. Generalități.

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 15 decembrie 2020 -

Exercițiul 1

Găsiți elementele inversabile, divizorii lui zero, elementele nilpotente și elementele idempotente din $\mathbf{Z}_{63}$.

Rezolvare:

Un element $\widehat{x}$ este inversabil în $\mathbf{Z}_{63} \iff (x, 63) = 1$. $63 = 3^2 \cdot 7$. Astfel, $U(\mathbf{Z}_{63}) = \{\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4}, \widehat{5}, ...\}$.

Divizorii lui zero într-un inel R sunt elementele $a \in R$ pentru care $\exists\, b \in R\ b \neq 0$. Din acest motiv elementele care sunt inversabile nu pot fi divizori ai lui zero.
În $\mathbf{Z}_n$ toate elementele $\widehat{x}$ pentru care $(x, n) \neq 1$ sunt divizori ai lui zero. Răspunsul este $\{\widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{7}, \widehat{9}, \widehat{12}, ...\}$.

Elementele nilpotente a sunt cele pentru care $\exists\, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $a^n = 0$. 0 este întotdeauna element nipotent. În $\mathbf{Z}_n$, elementele nilpotente sunt elementele care conțin în descompunere cel puțin toți factorii primi distinți ai lui n. Pentru $n = 63$, căutam elementele multiplii de $3 \cdot 7 = 21$. Astfel, $N(\mathbf{Z}_{63}) = \{\widehat{0}, \widehat{21}, \widehat{42}\}$.

a este element idempotent dacă $a^2 = a$. Atât 0 și 1 sunt întotdeauna idempotente. De asemenea, dacă a este idempotent, atunci și $1 - a$ este. $a = a^2 \iff a - a^2 = 0 \iff a(1 - a) = 0$. Putem folosi această proprietate pentrun a găsi mai ușor cealaltă jumătate de elemente idempotente,
Fie $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_r^{k_r}$. Atunci $\mathbf{Z}_n \cong \mathbf{Z}_{p_1^{k_1}} \times ... \times \mathbf{Z}_{p_r^{k_r}}$. Singurele elemente indempotente din fiecare $\mathbf{Z}_{p_i^{k_i}}$, $i \in \overline{(1, r)}$ sunt $\overline{0}, \overline{1}$.
Astfel, $\mathbf{Z}_{63} \cong \mathbf{Z}_9 \times \mathbf{Z}_7$. Elementele indempotente ar fi următoarele:

1. $(\overline{0}, \overline{\overline{0}})$, numerele care dau 0 la împărțirea cu 9 și cu 7, $\widehat{0}$.
2. $(\overline{1}, \overline{\overline{1}})$ numerele care dau 1 la împărțirea cu 9 și cu 7, $\widehat{1}$.
3. $(\overline{0}, \overline{\overline{1}})$ numerele care dau 0 la împărțirea cu 9 și 1 la împărțirea cu 7, $\widehat{36}$.

4. $(\overline{1},\overline{\overline{0}})$ numerele care dau 1 la împărțirea cu 9 și 0 la împărțirea cu 7, $\widehat{36}$. $1-36=-35\equiv 28(\text{mod } 63)$, $\widehat{28}$.

Exercițiul 2

Se consideră numărul natural $n \geq 2$ care are r factori primi distincți în descompunerea sa. Să se arate că numărul idempotenților lui $\mathbf{Z_n}$ este 2^r. Să se determine idempotenții inelului Z_{36}.

Rezolvare:

Descompunem pe n în factori primi, $n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r}$. Atunci $\mathbf{Z_n}$ este izomorf cu $Z_{p_1^{q_1}} \times \cdots \times Z_{p_r^{q_r}}$ Singurele elmente idempotente în $Z_{p_i^{q_i}}$ sunt $\widehat{0}$ și $\widehat{1}$. Deci idempotentele lui $\mathbf{Z_n}$ corespund prin izomorfism elementelor de forma $(0,...,0,0), (0,....,0,1)$, $..., (1,...,1,1)$. Există 2^r astfel de r-tupluri. Pentru a găsi idempotenții în inelul inițial, construim un sistem de congruențe liniare. De exemplu, pentru $(1,0,....,0,1)$ sistemul ar fi:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad \text{mod } p_1^{q_1} \\ x \equiv 0 \quad \text{mod } p_2^{q_2} \\ ... \\ x \equiv 0 \quad \text{mod } p_{r-1}^{q_{r-1}} \\ x \equiv 0 \quad \text{mod } p_r^{q_r} \end{cases}$$

Din lema chineză a resturilor și din faptul că toți factorii primi sunt numere prime între ele, acest sistem sigur are soluții.
Pe baza descompunerii în factori primi avem că $Z_{36} \cong Z_{2^2} \times Z_{3^2}$. În inelul produs, avem idempotenții $(\widehat{0},\overline{0}), (\widehat{0},\overline{1}), (\widehat{1},\overline{0}), (\widehat{1},\overline{1})$. Primii doi idempotenți corespund lui $\widehat{0}$ și $\widehat{1}$. Pentru a afla corespondenții ultimilor doi idempotenți trebuie să rezolvăm două sisteme de congruențe:

$$\begin{cases} x \equiv 0 \quad \text{mod } 4 \\ x \equiv 1 \quad \text{mod } 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 1 \quad \text{mod } 4 \\ x \equiv 0 \quad \text{mod } 9 \end{cases}$$

Soluția primei ecuații este $\widehat{28}$. Putem rezolva și a doua ecuație, sau ne putem folosi de faptul că $\widehat{1} - \widehat{28}$ este tot idempotent, de unde obținem că $\widehat{1-28} = \widehat{-27} = \widehat{9}$ este cealaltă soluție.