CURSUL 6: SUBGRUP NORMAL. GRUP FACTOR

SAI

1. Morfisme şi subgrupuri

Propoziţia 1. *Fie* $f : G \to \Gamma$ *un morfism de grupuri,* $H \leq G$ *şi* $K \leq \Gamma$. *Atunci:*
a) $f(H) \leq \Gamma$.
b) $f^{-1}(K) \leq G$.

Demonstraţie: a) Fie $y_1, y_2 \in f(H)$. Atunci, există $x_1, x_2 \in H$ astfel încât $y_1 = f(x_1)$ şi $y_2 = f(x_2)$. Deducem că $y_1y_2 = f(x_1)f(x_2) = f(x_1x_2) \in f(H)$.
b) Fie $x_1, x_2 \in f^{-1}(K)$. Atunci $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) \in K$, deci $x_1x_2 \in f^{-1}(K)$. $\square$

1.1. **Nucleul şi imaginea unui morfism.** Consideraţiile din acest subparagraf se referă la un morfism de grupuri $f : G \to \Gamma$.

Definiţia 2. *Mulţimea* $\{x \in G \mid f(x) = e_\Gamma\}$ *se numeşte nucleul lui* f *şi se notează* $\ker f$.

Observaţia 3. *Deoarece* $\ker f = f^{-1}(\{e_\Gamma\})$, *ducem* $\ker f \leq G$.

Propoziţia 4. *Morfismul* f *este injectiv dacă şi numai dacă* $\ker f = \{e_G\}$.

Demonstraţie: ,,$\Rightarrow$": Dacă $x \in \ker f$, $f(x) = e_\Gamma = f(e_G)$; din f injectivă deducem că $x = e_G$.
,,$\Leftarrow$": Fie $x_1, x_2 \in G$ astfel ca $f(x_1) = f(x_2)$. Atunci $f(x_1x_2^{-1}) = f(x_1)f(x_2^{-1}) = f(x_2)f(x_2)^{-1} = e_\Gamma$, de unde $x_1x_2^{-1} \in \ker f$. Rezultă că $x_1x_2^{-1} = e_G$, deci $x_1 = x_2$. $\square$

Observaţia 5. $\mathrm{Im} f = f(G) \leq \Gamma$.

Propoziţia 6. *Morfismul* f *este surjectiv dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im} f = \Gamma$.

Teorema 7. *(*Teorema de corespondenţă pentru subgrupuri.*) Fie* $f : G \to \Gamma$ *un morfism surjectiv de grupuri. Notăm* $\mathcal{H} = \{H \leq G \mid \ker f \subseteq H\}$ *şi* $\mathcal{K} = \{K \mid K \leq \Gamma\}$. *Atunci funcţiile*
$\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $\Phi(H) = f(H)$ *şi* $\Psi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, $\Psi(K) = f^{-1}(K)$ *sunt bine definite, inverse una celeilalte (şi, deci, bijective) şi păstrează incluziunile.*

Propoziţia 8. *Fie H o submulţime nevidă a lui $\mathbb{Z}_n$. Atunci $H \leq \mathbb{Z}_n$ dacă şi numai dacă există $d \mid n$ astfel încât $H = \hat{d}\mathbb{Z}_n$.*

2. Relaţii de echivalenţă modulo un subgrup

Fie G un grup şi $H \leq G$. Considerăm următoarele relaţii pe G:
a) $x \equiv_s y \pmod H$ dacă şi numai dacă $x^{-1}y \in H$
b) $x \equiv_d y \pmod H$ dacă şi numai dacă $xy^{-1} \in H$.

Propoziţia 9. Relaţiile $\equiv_s$ şi $\equiv_d$ sunt de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 9!

Definiţia 10. $\equiv_s$ se numeşte **relaţia de echivalenţă la stânga modulo subgrupul H**, iar $\equiv_d$ se numeşte **relaţia de echivalenţă la dreapta modulo subgrupul H**.

Notaţia folosită pentru mulţimea factor a lui G în raport cu $\equiv_s$ este $(G/H)_s$, iar cea pentru mulţimea factor a lui G în raport cu $\equiv_d$ este $(G/H)_d$.

Propoziţia 11. Fie G un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$. Atunci:
a) Clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\equiv_s \pmod H$ este xH.
b) Clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\equiv_d \pmod H$ este Hx.

Demonstraţie: a) $y \in \widehat{x} \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow y \in xH$.
b) Analog. $\square$

Corolarul 12. $(G/H)_s = \{xH : x \in G\}$, iar $(G/H)_d = \{Hx : x \in G\}$.

Propoziţia 13. Fie G un grup şi $H \leq G$. Atunci $|(G/H)_s| = |(G/H)_d|$.

Demonstraţie: Definim $f : (G/H)_s \to (G/H)_d$, $f(xH) = Hx^{-1}$ şi $g : (G/H)_d \to (G/H)_s$, $g(Hx) = x^{-1}H$.
Dacă $xH = yH$, atunci $x^{-1}y \in H$, deci $x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H$, de unde $Hx^{-1} = Hy^{-1}$. Prin urmare, f este corect definită. Faptul că g este corect definită se probează analog.
Este imediat că f şi g sunt inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. $\square$

Definiţia 14. Cardinalul comun al mulţimilor $|(G/H)_s|$ şi $|(G/H)_d|$ se numeşte **indicele lui H în G**.

Vom nota indicele lui H în G cu $[G : H]$.

Definiţia 15. Prin **ordinul** grupului G înţelegem cardinalul lui G. Notaţia folosită în mod uzual pentru ordinul lui G este $|G|$.

Lemma 16. Fie G un grup, $H \leq G$ şi $x \in G$. Atunci $|xH| = |H|$.

Demonstraţie: Definim $f : xH \to H$, $f(t) = x^{-1}t$ şi $g : H \to xH$, $g(h) = xh$.
Este imediat că f şi g sunt corect definite şi inverse una celeilalte, deci ele sunt bijective, de unde concluzia. $\square$

Teorema lui Lagrange Fie G un grup şi $H \leq G$. Atunci $|G| = |H| \cdot [G : H]$.

Demonstraţie: Avem $G = \coprod\limits_{xH \in (G/H)_s} xH$, deci $|G| = \sum\limits_{xH \in (G/H)_s} |xH|$.
Conform lemei 16, din această relaţie obţinem $|G| = |H| \cdot |(G/H)_s|$. $\square$

Corolarul 17. Ordinul oricărui subgrup al unui grup finit divide ordinul respectivului grup.

3. Subgrupuri normale

Propoziţia 18. Fie G un grup şi $H \leq G$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) $(G/H)_s = (G/H)_d$.
ii) Pentru orice $x \in G$ avem $xH = Hx$.
iii) Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} = H$.
iv) Pentru orice $x \in G$ avem $xHx^{-1} \subset H$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 18!

Definiţia 19. Fie G un grup şi $H \leq G$. Spunem că H este **subgrup normal** al lui G dacă îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente din propoziţia 18.

Vom nota faptul că H este subgrup normal al lui G cu $H \trianglelefteq G$.

Exemplul 20. $\{e\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$.

Exemplul 21. Pentru orice familie $(H_i)_{i \in I}$ de subgrupuri normale ale lui G avem $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.

Exemplul 22. Orice subgrup al unui grup abelian este normal.

Exemplul 23. Orice subgrup de indice doi al unui grup este normal.

Exemplul 24. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri, atunci $\ker f \trianglelefteq G$.

Exemplul 24 este un caz particular al următoarei propoziţii, care ne oferă şi o altă clasă de exemple de subgrupuri normale:

Propoziţia 25. Dacă $f : G \to G'$ este un morfism de grupuri, atunci:
a) Pentru orice $K \trianglelefteq G'$ avem $f^{-1}(K) \trianglelefteq G$.
b) Dacă f este surjectiv, atunci pentru orice $H \trianglelefteq G'$ avem $f(H) \trianglelefteq G'$.

Teorema de corespondenţă pentru subgrupuri se completează astfel:

Teorema 26. Fie $f : G \to G'$ un morfism surjectiv de grupuri. Notăm $\mathcal{H} = \{H \trianglelefteq G : H \supseteq \ker f\}$ şi $\mathcal{K} = \{K : K \trianglelefteq G'\}$. Atunci funcţiile $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, $\Phi(H) = f(H)$ şi $\Psi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, $\Psi(K) = f^{-1}(K)$ sunt (bijective şi) inverse una celeilalte şi păstrează incluziunile. Deci, subgrupurile normale ale lui G care conţin $\ker f$ corespund (via aceste funcţii) subgrupurilor normale ale lui G'.

4. Grup factor

Observaţia 27. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Atunci pe mulţimea $(G/H)_s$ este corect definită legea de compoziţie $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Temă: Demonstraţi observaţia 27!

Definiţia 28. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Prin **grupul factor al lui G în raport cu H** înţelegem grupul care are mulţimea subiacentă $(G/H)_s$ şi legea de compoziţie $(xH) \cdot (yH) = (xy)H$.

Notaţia uzuală pentru grupul factor al lui G în raport cu H este $\dfrac{G}{H}$. Pentru elementul $xH \in \dfrac{G}{H}$ vom prefera uneori notaţia $\widehat{x}$. În notaţie aditivă, în loc de xH vom scrie, desigur, $x + H$.

Exemplul 29. $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$.

Observaţia 30. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Aplicaţia $\pi : G \to \dfrac{G}{H}$, $\pi(x) = \widehat{x}$ este morfism surjectiv de grupuri.

Definiţia 31. Fie G un grup şi $H \trianglelefteq G$. Morfismul π din observaţia 30 se numeşte **surjecţia canonică** (sau **proiecţia canonică**) a grupului factor $\dfrac{G}{H}$.

Proprietatea de universalitate a grupului factor. Fie G un grup, $H \trianglelefteq G$, $\pi : G \to \dfrac{G}{H}$ surjecţia canonică şi $f : G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci:

i) Dacă $H \subset \ker f$, atunci există un unic morfism $u : \dfrac{G}{H} \to G'$ astfel încât $u \circ \pi = f$. În plus:

ii) u este injectivă dacă şi numai dacă $H = \ker f$.
iii) u este surjectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

Temă: Demonstraţi proprietatea de universalitate a grupului factor!

Exemplul 32. Conform proprietăţii de universalitate a grupului factor, proiecţia canonică a lui $\mathbb{Z}$ pe $\mathbb{Z}_4$ induce morfismul de grupuri $u : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$, $u(\widehat{a}) = \overline{a}$. Pe de altă parte, deoarece $4\mathbb{Z} \not\subset 12\mathbb{Z}$, nu ne aşteptăm ca $v : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_{12}$, $v(\overline{a}) = \widehat{a}$ să fie morfism de grupuri; verificarea arată că, într-adevăr, v nu este o funcţie corect definită.

5. Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri

5.1. **Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.** Fie $f : G \to \Gamma$ un morfism de grupuri. Atunci

$$\frac{G}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$$

în mod canonic, via $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.

Demonstraţie[1]*:* Definim $\overline{f} : \dfrac{G}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$, $\overline{f}(\widehat{x}) = f(x)$.
Dacă $\widehat{x} = \widehat{y}$, atunci $x^{-1}y \in \ker f$, deci $f(x^{-1}y) = e_\Gamma$. f fiind morfism de grupuri, obţinem de aici $f(x)^{-1}f(y) = e_\Gamma$, deci $f(x) = f(y)$. Prin urmare, valorile lui $\overline{f}$ sunt independente de alegerea reprezentanţilor argumentelor. Cum valorile lui $\overline{f}$ sunt valori ale lui f, ele se află în $\operatorname{Im} f$. Prin urmare, $\overline{f}$ este corect definită.
Dacă $x, y \in G$, atunci $\overline{f}(\widehat{x}\widehat{y}) = \overline{f}(\widehat{xy}) = f(xy) = f(x)f(y) = \overline{f}(\widehat{x})\overline{f}(\widehat{y})$.
Aşadar, $\overline{f}$ este morfism de grupuri.
Este evident că $\overline{f}$ este surjectivă.
Dacă $\overline{f}(\widehat{x}) = e_\Gamma$, atunci $f(x) = e_\Gamma$, deci $x \in \ker f$, de unde $\widehat{x} = \widehat{e}$. În consecinţă, $\overline{f}$ este injectivă.
Din toate faptele arătate mai sus rezultă că $\overline{f}$ este morfism bijectiv de grupuri. Prin urmare, f este izomorfism. $\square$

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.

[1] O demonstraţie mai rapidă a acestei teoreme se obţine utilizând proprietatea de universalitate a grupului factor. Lăsăm ca exerciţiu cititorului această abordare.