# Seminar 6

1. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$. Studiați uniform continuitatea funcției $f$.

<u>Soluție.</u> $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\forall\, x\in(0,\infty)$.

Avem $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$ $\forall\, x\in[1,\infty)$.

Deci $f$ este uniform continuă pe $[1,\infty)$ (i.e. $f|_{[1,\infty)}$ este uniform continuă).

Fie $f|_{[0,1]}:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f|_{[0,1]}(x)=\sqrt{x}$.

$\left.\begin{array}{l} f|_{[0,1]} \text{ continuă} \\ [0,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f|_{[0,1]}$ uniform continuă $\Rightarrow f$ uniform continuă pe $[0,1]$.

Așadar $f$ este uniform continuă (pe $[0,\infty)$). $\square$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0. \end{cases}$

Studiați continuitatea și uniform continuitatea funcției f.

<u>Soluție.</u> f continuă pe $\mathbb{R}^*$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea funcției f în 0.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \underset{\uparrow}{=} 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ continuă}$$

„0 · mărginit = 0"

în 0.

Deci f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ avem $f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x\left(\cos \frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$.

$$|f'(x)| = \left|\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}\right| \leq \left|\sin \frac{1}{x}\right| + \frac{\left|\cos \frac{1}{x}\right|}{|x|} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad \forall\, x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

Deci f este uniform continuă pe $(-\infty, -1]$ și f este uniform continuă pe $[1, \infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [-1,1] \\ [-1,1] \text{ mulțime compactă} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ uniform-continuă pe } [-1,1].$$

Deci $f$ este uniform continuă (pe $\mathbb{R}$). □

3. Studiați uniform continuitatea funcțiilor:

a) $f:[1,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Soluție.</u> $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ \forall\, x\in[1,2)$.

$$|f'(x)|=\left|-\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}\leq 1\ \forall\, x\in[1,2)$$

Deci $f$ este uniform continuă. □

b) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n=\frac{1}{2n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=0$ și

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2n}}-\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}(2n-n)=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty\neq 0$, deci $f$ nu este uniform continuă. □

4. Fie $a \geq 0$ și $f:(a,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$. Arătați că $f$ este uniform continuă dacă și numai dacă $a>0$.

Soluție. „$\Rightarrow$"

Presupunem prin absurd că $a=0$.

Fie $x_n=\frac{1}{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Avem

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(x_n)-f(y_n)\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2n}-\ln\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln 1-\ln 2n-\ln 1+\ln n\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n}{2n}=\ln\frac{1}{2}\neq 0$, deci $f$ nu este uniform continuă, contradicție.

Așadar $a>0$.

„$\Leftarrow$"

$f'(x)=\frac{1}{x}$ $\forall x\in(a,\infty)$.

$|f'(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|<\frac{1}{a}$ $\forall x\in(a,\infty)$.

Deci $f$ este uniform continuă $\square$

5. Fie $f:(0,\frac{2}{\pi}]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. Arătați că $f$ nu este uniform continuă.

<u>Soluție.</u> Conform unei propoziții de la curs, următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $f$ este uniform continuă.

2) $\exists\, \tilde{f}:[0,\frac{2}{\pi}]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ continuă a.î. $\tilde{f}\big|_{(0,\frac{2}{\pi}]}=f$.

Presupunem prin absurd că $f$ este uniform continuă.

$\tilde{f}$ continuă $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\tilde{f}(x)=\tilde{f}(0)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=$

$=\tilde{f}(0)$.

Deci $\exists \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

Fie $x_n=\frac{1}{2n\pi}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n\pi=0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$=1$, deci $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, contradicție.

Prin urmare $f$ nu este uniform continuă. $\square$

6. Fie $a \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în $a$ și $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in \mathbb{Q} \\ g(x); & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că $h$ este derivabilă în $a$ dacă și numai dacă $f(a) = g(a)$ și $f'(a) = g'(a)$.

<u>Soluție.</u> „$\Rightarrow$"

$h$ derivabilă în $a \Rightarrow h$ continuă în $a \Rightarrow$

vezi Seminar 5

$\Rightarrow f(a) = g(a)$.

$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n)_n \subset \mathbb{Q} \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})' = \mathbb{R} \Rightarrow \exists (y_n)_n \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

$h$ derivabilă în $a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h(x_n) - h(a)}{x_n - a} = h'(a)$

$$\| $$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$$

$f$ derivabilă în $a$.

Deci $f'(a) = h'(a)$.

$h$ derivabilă în $a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h(y_n)-h(a)}{y_n-a} = h'(a)$

$$\| $$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n)-g(a)}{y_n-a} = g'(a).$$

Deci $g'(a) = h'(a)$.

Prin urmare $f'(a) = g'(a)$.

"$\Leftarrow$"

Fie $L = f'(a) = g'(a)$ și $(x_n)_n \subset \mathbb{R}\setminus\{a\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\left|\frac{h(x_n)-h(a)}{x_n-a} - L\right| = \begin{cases} \left|\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} - f'(a)\right| ; & x_n \in \mathbb{Q} \\ \left|\dfrac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a} - g'(a)\right| ; & x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Deci $\left|\dfrac{h(x_n)-h(a)}{x_n-a} - L\right| \le \underbrace{\left|\dfrac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} - f'(a)\right|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (} f \text{ derivabilă în } a\text{)}} +$

$$+ \underbrace{\left|\frac{g(x_n)-g(a)}{x_n-a} - g'(a)\right|}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ (} g \text{ derivabilă în } a\text{)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Așadar $\lim_{n\to\infty} \frac{h(x_n)-h(a)}{x_n-a} = L$, i.e.

$\lim_{x\to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = L$ (vezi Curs 6), i.e. $h$ este

derivabilă în $a$ și $h'(a) = L \; (= f'(a) = g'(a))$. $\square$