Funcții.
Injectivitate. Surjectivitate.
Imagine directă. Preimagine

$f: X \to Y$ funcție

1) f este injectivă dacă:

$$\forall x, y \in X \text{ cu } x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

„inputuri diferite dau outputuri diferite"

1') (caracterizare echivalentă) f este injectivă dacă

$$\forall x, y \in X \text{ cu } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

uneori mai utilă în pb.

Obs.: Echivalența definițiilor e dată de

$$(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$$

2) f e surjectivă dacă:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ a.î. } f(x) = y$$

~~2') (caracterizare~~

3) Imaginea directă: Fie $A \subseteq X$ numim imaginea directă a lui A prin f mulțimea:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$ ← „unde se duc elementele lui A prin funcție"

Imaginea funcției: $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$

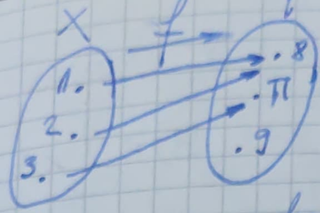
„unde se duce tot domeniul prin funcție!"

Evident $\operatorname{Im} f = f(X)$ și $\operatorname{Im}\{f\} \subseteq Y$. (reciproca nu e mereu adevărată, adică în Y pot fi elemente la care nu ajunge nimic prin funcție!).

Ex.:

$X = \{1,2,3\}$

$Y = \{8, \pi, 9\}$



nimeni nu se duce prin f la 9

$f(\{1,2\}) = 8$

$f(\{2,3\}) = \{8, \pi\}$

$\operatorname{Im} f = \{8, \pi\} = f(\{1,2,3\})$

$f(\{2\}) = \{8\}$.

c) (caracterizare echivalentă) $f: X \to Y$ e surjectivă dacă și numai dacă $\operatorname{Im} f = Y$. ← „orice element din codomeniu ajunge la un element din domeniu prin funcție"

- funcția de mai sus (Ex.) nu e surjecție deoarece $9 \in Y$ și $\nexists\, x \in X$ a.î. $f(x) = 9$

$\iff$

$9 \in Y$ și $\forall x \in X,\ f(x) \neq 9$

- f nu e nici injectivă deoarece $1, 2 \in X$, $1 \neq 2$ și $f(1) = f(2) = 8$.

De Morgan

$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\neg$ non

$\wedge$ și

$\vee$ sau

Negare:

$\neg[\forall x\, P(x)] = \exists x\, [\neg P(x)]$

$\neg(\exists x\, P(x)) = \forall x\, (\neg P(x))$

Ex.: $\neg(A = B)$

$A = B \iff A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

$\neg(A = B) = \neg(A \subseteq B$ și $B \subseteq A) \iff$

$\iff (\neg A \subseteq B)$ sau $(\neg B \subseteq A) \iff A \not\subseteq B$ sau $B \not\subseteq A$.

$A \subseteq B \iff \forall x \in A,\ x \in B$ deci $\neg(A \subseteq B) \iff A \not\subseteq B \iff$

$\iff \neg(\forall x \in A,\ x \in B) \iff \exists x \in A,\ x \notin B$

Analog $B \not\subseteq A \iff \exists\, x \in B,\ x \notin A$.

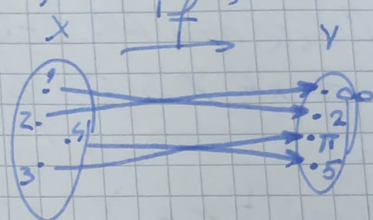
4) Preimaginea: Fie $B \subseteq Y$. Numim preimaginea lui B ~~prin~~ mulțimea:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

elementele din domeniu care trecute prin funcție ajung în mulțimea B.

Evident, din def., $f^{-1}(B) \subseteq X$.

5) (funcție bijectivă) o funcție care e simultan injectivă și surjectivă.



e bijecție.

6) Proprietăți ale ~~imag~~ imaginii directe și ale preimaginii.

$f: X \to Y$ funcție

- $A \subseteq A' \subseteq X \Rightarrow f(A) \subseteq f(A')$

(De ce? Păi $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ și

$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\}$.

Fie $y \in f(A)$, adică $\exists x_0 \in A$ a.î. $f(x_0) = y$. Dar $x_0 \in A \subseteq A'$, $x_0 \in A'$ și deci $f(x_0) = y \in f(A')$.)

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

$f(A \cup B) = \{f(x) \mid x \in A \cup B\} = \{f(x) \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} =$

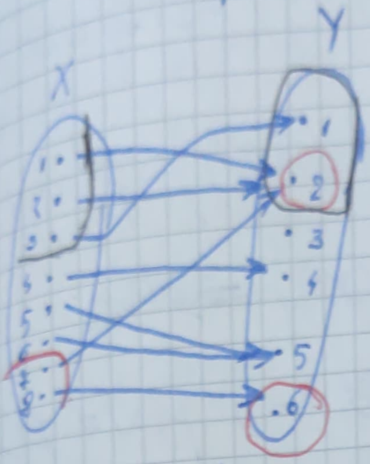
$= \cancel{\{f(x) \mid x \in A\} \text{ sau } \{f(x)} \ \{f(x) \mid x \in A\} \cup \{f(x) \mid x \in B\} =$

$= f(A) \cup f(B)$.

• $f(A\cap B) \subseteq f(A)\cap f(B)$ (cu „=" doar dacă f injectivă)

$A\cap B \subseteq A, B \Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A), f(B) \Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

Ex. de funcție pentru care reciproca nu e adevărată



$f(\{1,2,3\}) = \{1,2\}$

$f(\{7,8\}) = \{2,6\}$

$f(\{1,2,3\}\cap\{7,8\}) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(\{1,2,3\})\cap f(\{7,8\}) = \{1,2\}\cap\{2,6\} = \{2\}$

Evident $\emptyset \subseteq \{2\}$

dar $\{2\} \not\subseteq \emptyset$. (Lista 1 Problema 9)

Dem. că $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \Leftrightarrow f$ inj.

„$\Leftarrow$" Știm că f e injectivă. Vreau $f(A)\cap f(B) = f(A\cap B)$.

Știm deja că $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

Mai trebuie să dem. că $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$.

Fie $y_0 \in f(A)\cap f(B)$. $\overset{def. \cap}{\Leftrightarrow} y_0\in f(A)$ și $y_0 \in f(B)$

$y_0\in f(A) \overset{def.}{\Rightarrow} \exists x_0\in A$ a.î. $f(x_0)=y_0$

$y_0\in f(B) \overset{def.}{\Rightarrow} \exists x_0'\in B$ a.î. $f(x_0')=y_0$

$\Rightarrow f(x_0)=f(x_0')\ (=y_0) \overset{f\ inj.}{\Rightarrow} x_0 = x_0' \overset{notăm}{=:} x'$

$\Rightarrow x'\in A$ și $x'\in B$ deci $x'\in A\cap B$ ~~și f~~ $\overset{def.}{\Rightarrow} y_0\in f(A\cap B)$

$f(x') = y_0$

„$\Rightarrow$" Fie $x, x'\in X$ cu $x\neq x'$. Vreau $f(x)\neq f(x')$.

(Știu că $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$) (*)

$x \neq x' \Rightarrow \cancel{\{x\} \neq \{x'\}}$ $\quad \{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$

n-au nimic în comun

$\Rightarrow \cancel{f(\{x\}}$ $\quad f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\emptyset) = \emptyset$. ← $f(\emptyset) = \emptyset$ întotdeauna

Conform $(*)$ $\emptyset = f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) \overset{\text{def.}}{=}$

$\overset{\text{def.}}{=} \{f(x)\} \cap \{f(x')\} \Rightarrow$ deci

$\{f(x)\} \cap \{f(x')\} = \emptyset \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

- $B \subseteq B' \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$

De ce? $\quad f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

$f^{-1}(B') = \{x \in X \mid f(x) \in B'\}$

Fie $x_0 \in f^{-1}(B)$. atunci $f(x_0) \in B$. $B \subseteq B'$ deci $f(x_0) \in B'$

şi acelaşi $x_0 \in f^{-1}(B')$.

- $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$f^{-1}(A \cup B) = \{x \in X \mid x \in A \cup B\} = \{x \in X \mid x \in A$ sau $x \in B\} =$

$= \{x \in X \mid x \in A\} \cup \{x \in X \mid x \in B\} = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

- $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Fie $x_0 \in f^{-1}(A \cap B) = \{x \in X \mid f(x) \in A \cap B\} = \{x \in X \mid f(x) \in A$ şi $f(x) \in B\}$

$\Rightarrow f(x_0) \in A$ şi $f(x_0) \in B \Rightarrow \cancel{f(x_0)}$ $x_0 \in f^{-1}(A)$ şi $x_0 \in f^{-1}(B)$

la

$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

$\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Invers dacă luăm $x_0 \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, avem că $x_0 \in f^{-1}(A)$ și $x_0 \in f^{-1}(B)$ și deci $f(x_0) \in A$ și $f(x_0) \in B$. Atunci $f(x_0) \in A \cap B$ aşadar $x_0 \in f^{-1}(A \cap B)$.

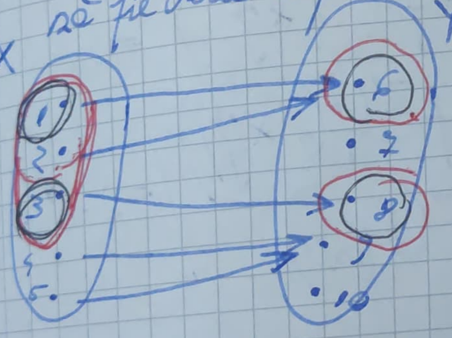
• $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$ (cu egalitate dacă și numai dacă f e injectivă).

$f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$

$f^{-1}(f(A)) = \{ x \in X \mid f(x) \in f(A) \}$, atunci din ale două definiții e evidentă incluziunea

~~Dem. că egalitatea~~

Ex. de funcție pentru care reciproca nu e adevărată (evident, o astfel de funcție nu e injectivă, deci ar trebui să fie două inputuri diferite care să dea același output).



~~$f(\{1,2\}) =$~~

~~$f(\{1,2,3\}) = \{6,8\}$~~

$f(\{1,3\}) = \{6,8\}$

$f^{-1}(f\{1,3\}) = f^{-1}(\{6,8\}) = \{1,2,3\}$

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$ într-adevăr dar $\{1,2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$.

Dem. că egalitatea e echivalentă cu injectivitatea funcției.

(Lista 1 prb. 1 (i) $\Leftrightarrow$ (ii)).

"$\Rightarrow$" Știm că f e injectivă. Vrem $f^{-1}(f(A)) = A$. Știm deja că $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$. Mai trebuie să demonstrăm că $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

Fie $x_0 \in f^{-1}(f(A))$. Atunci din def. preimaginii $f(x_0) \in f(A)$

~~Presupunem că $x_0 \notin A$~~

$f(x_0) \overset{notație}{=:} y_0 \in f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. Așadar $\exists x' \in A$ a.î.

$f(x') = y_0$. Deci $y_0 = f(x_0) = f(x')$, iar deoarece știm

că f e injectivă, avem că $\left.\begin{array}{l} x_0 = x' \\ x' \in A \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 \in A$.

„$\Rightarrow$" (*) Știm că $f^{-1}(f(A)) = A$. Vreau f inj.

Fie x' și $x'' \in X$ a.î. $f(x') = f(x'')$. Vreau $x' = x''$

$y_0 := f(x') = f(x'')$. ~~$= y_0$ deci $x'' \in f^{-1}(\{f(x')\})$ (din def. preimaginii)~~

~~Din (*) avem că~~

~~$f^{-1}(f(\{f(x')\})) = \{f(x')\}$ deci $f(x')$~~

$f(x') = y_0 \overset{def. img.}{\Rightarrow} \{y_0\} = f(\{x'\}) \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f^{-1}(\{y_0\}) = f^{-1}(f(\{x'\})) \\ f(x'') = y_0 \Rightarrow x'' \in f^{-1}(\{y_0\}) \end{array}\right| \Rightarrow x'' \in f^{-1}(f(\{x'\})) \overset{(*)}{=} \{x'\}$

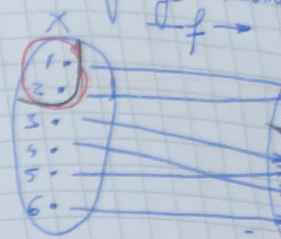
$\Rightarrow x'' \in \{x'\} \Rightarrow x'' = x'$.

• $B \subseteq Y$; $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (cu egalitate doar dacă funcția surjectivă)

$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \\ f(f^{-1}(B)) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(B)\} \end{array}\right| \Rightarrow$ din cele două definiții incluziunea e evidentă.

Exemplu de funcție pt. care reciproca nu e adevărată (evident, o astfel de funcție trebuie să

nu fie surj., i.e. să ... el să nu ajungă nim...



$\{z\} = f(f^{-1}(\{z$ ...

Dem. că egali... surjectivitatea f...

„$\Leftarrow$" știm că ...

Fie $y_0 \in B$. Cum ...

$x_0 \in f^{-1}(B$ ...

$f(f^{-1}(B$ ...

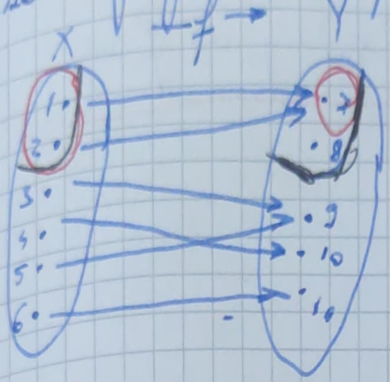
„$\Rightarrow$" (*) ...

Conform ...

$\{f($ ...

$f(f^{-1}(\{y_0\})) = \{f($ ...

nu fie surj., i.e. să existe cel puțin un element în codom. a.î. la el să nu ajungă nimeni prin funcție)



$f^{-1}(\{7,8\}) = \{1,2\}$

$f(\{1,2\}) = \{7\}$

Atunci clar

$\{7\} = f(f^{-1}(\{7,8\})) \subseteq \{7,8\}$ dar $\underbrace{f(f^{-1}(\{7,8\}))}_{\{7\}} \neq \{7,8\}$

Dem. că egalitatea e echivalentă cu surjectivitatea funcției (Lista 1, Pb. 2 (i) <=> (iii))

„<=" Știm că f e surjectivă. Vrem $f(f^{-1}(B)) = B$ (Mai exact, $\supseteq$)

Fie $y_0 \in B$. Vreau $y_0 \in f(f^{-1}(B))$.

Cum f e surj., $\exists x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0$, $y_0 \in B$ $\Rightarrow x_0 \in f^{-1}(B)$.

$\left.\begin{array}{l} x_0 \in f^{-1}(B) \\ f(f^{-1}(B)) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(B)\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{f(x_0)}_{y_0} \in f(f^{-1}(B))$

$\Rightarrow y_0 \in f(f^{-1}(B))$.

„=>" (*) Știu că $f(f^{-1}(B)) = B$. Vreau f surj.

Fie $y_0 \in Y$. Vreau să $\exists x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0$.

Conform (*) $f(f^{-1}(\{y_0\})) = \{y_0\}$, deci

$\{f(x) \mid x \in f^{-1}(\{y_0\})\} = \{y_0\}$, deci mulțimea

~~$f(f^{-1}(\{y_0\})) = \{f(x) \mid x \in f^{-1}(\{y_0\})\}$~~ e nevidă ~~(căci, altfel dacă ar fi fost vidă~~

$f^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset$ (e nevidă, altfel $f(f^{-1}(\{y_0\})) = f(\emptyset) = \emptyset \neq \{y_0\}$ fals).

deci $\exists\ x_0 \in X$ a.î. $f(x_0) = y_0 \Rightarrow f$ surj.