

LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Cursul IV

Claudia MUREȘAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

- 1 Relații de ordine
- 2 Funcții izotone
- 3 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

1 Relații de ordine

2 Funcții izotone

3 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Remarcă

Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într-adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A , Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarcă anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

Obținerea unei relații de ordine dintr-o relație de preordine

Remarcă (continuare)

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A , în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A , în sensul incluziunii.

Remarcă (temă; aplicație: ordinele de complexitate ale algoritmilor)

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A .

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy \text{ și } yRx]$).

Se demonstrează că \sim este o relație de echivalență pe A .

Considerăm mulțimea factor $A/\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde

$\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe A/\sim definim relația binară \leq , astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy .

Se demonstrează că \leq este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt . Și se demonstrează că \leq este o relație de ordine pe A/\sim .

Remarcă

Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă.

Într-adevăr, dacă ar exista $R \subseteq A^2$ a. î. R să fie și reflexivă, și ireflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$ și $\Delta_A \cap R = \emptyset$, deci $\emptyset = \Delta_A \cap R = \Delta_A$, prin urmare $\Delta_A = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu $A \neq \emptyset$.

Ordine versus ordine strictă

Exercițiu (temă)

Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A .

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \rightarrow S$ și $\psi : S \rightarrow O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
 - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonală lui A , se obține o relație de ordine strictă pe A ;
 - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonală lui A , se obține o relație de ordine pe A ;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$ (acest din urmă fapt poate fi verificat foarte ușor pornind de la observația că orice relație de ordine pe A include Δ_A și orice relație de ordine strictă pe A este disjunctă de Δ_A , și văzând cum se comportă și proprietățile de tranzitivitate, antisimetrie și asimetrie vizavi de operațiile de scădere a diagonalei mulțimii, respectiv reuniune cu diagonală mulțimii), ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S .

Ordine versus ordine strictă

Definiție

Fie A o mulțime, \leq o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A . Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui \leq* ;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui $<$* .

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarcă

Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este \emptyset).

Notăție

Pentru orice mulțime A , orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2$, $a_2 R a_3$, ... și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \dots$

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă**) că:

- \leq este o relație de ordine totală (i. e. liniară) pe fiecare dintre mulțimile: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , numită *relația de ordine naturală* pe aceste mulțimi (desigur, am notat cu \leq relația de ordine “uzuală” pe fiecare dintre aceste mulțimi, definită prin: $x \leq y$ dacă există un număr nenegativ a , a. î. $y = x + a$, unde numerele nenegative și adunarea pot fi definite în diverse moduri în fiecare dintre aceste mulțimi; de exemplu, se poate porni de la construcția cu numere cardinale pentru numerele naturale și operațiile cu ele, apoi, pe baza numerelor naturale, se pot construi \mathbb{Z} , apoi \mathbb{Q} , apoi \mathbb{R} , în modurile cunoscute)
- fie relația binară pe \mathbb{C} pe care o vom nota cu \sqsubseteq și pe care o definim prin: pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + bi \sqsubseteq c + di$ dacă $a \leq c$ și $b \leq d$, unde \leq este ordinea naturală pe \mathbb{R} ; atunci \sqsubseteq este o relație de ordine pe \mathbb{C} care nu este totală (pentru că, de exemplu, $(2 + 5i, 5 + 2i) \not\sqsubseteq$ și $(5 + 2i, 2 + 5i) \not\sqsubseteq$, sau $(1, i) \not\sqsubseteq$ și $(i, 1) \not\sqsubseteq$)
- $|$ (divizibilitatea) pe \mathbb{N} ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$) este o relație de ordine care nu este totală (pentru că, de exemplu, 3 nu divide 7 și 7 nu divide 3)
- $|$ (divizibilitatea) pe \mathbb{Z} ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$) este o preordine care

Exemple de relații de ordine

Exemplu (continuare)

nu este relație de ordine (pentru că, de exemplu, $5|(-5)$ și $(-5)|5$, dar $5 \neq -5$, prin urmare $|$ pe \mathbb{Z} nu este antisimetrică)

Exemplu

Pentru orice mulțime T , \subseteq este o relație de ordine pe $\mathcal{P}(T)$, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$; într-adevăr:

- dacă $T = \emptyset$, atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, iar relația de ordine \subseteq pe $\{\emptyset\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că $\emptyset \subseteq \emptyset$
- dacă $T = \{\star\}$ (*singleton*, i. e. mulțime cu un singur element, mulțime de cardinal 1), atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$, iar relația de ordine \subseteq pe $\{\emptyset, \{\star\}\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că: $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\star\}$ și $\{\star\} \subseteq \{\star\}$
- dacă $|T| \geq 2$, adică T are cel puțin două elemente distincte, atunci: alegând (la întâmplare, i. e. arbitrar) două elemente $a, b \in T$ cu $a \neq b$, rezultă că $\{a\} \in \mathcal{P}(T)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(T)$, și $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ și $\{b\} \not\subseteq \{a\}$

Notă

Vom folosi adesea notația \leq pentru relații de ordine, chiar dacă nu este vorba de relația de ordine uzuală pe o mulțime de numere.

Mulțimi ordonate

Definiție

- O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează (A, \leq) și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set”).
- Dacă, în plus, \leq este o relație de ordine totală, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Exemplu

- Posetul (\mathbb{N}, \leq) este lanț (unde \leq este relația de ordine naturală pe \mathbb{N}).
- Posetul $(\mathbb{N}, |)$ nu este lanț.

A se vedea și celelalte exemple de relații de ordine de mai sus.

Observație

Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară**.

Mulțimi ordonate

Observație (continuare)

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului (A, \leq) ; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

Definiție

Fie (A, \leq) un poset și $< := \leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ și } a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui \leq .

Relației de ordine \leq pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată \prec și definită astfel:

$\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b \text{ și nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui a* (se mai spune că b *acoperă pe a*)
- a se numește *predecesor al lui b* (sau se spune că a *este acoperit de b*)

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, \prec e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Mulțimi ordonate

Notăție (notații uzuale într-un poset)

Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Exemplu (temă)

- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe \mathbb{N} este relația “sunt numere consecutive”, i. e. relația $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe \mathbb{Q} sau \mathbb{R} este \emptyset , pentru că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$) cu $a < b$, există $x \in \mathbb{Q}$ (sau $x \in \mathbb{R}$), a. î. $a < x < b$.
- Proprietatea observată mai sus a mulțimilor ordonate (\mathbb{Q}, \leq) și (\mathbb{R}, \leq) se numește *densitate* și, de obicei, se enunță pentru mulțimi **total** ordonate, dar poate fi definită și în cazul general al poseturilor, astfel:

Definiție

Fie (A, \leq) un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui \leq . Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea \leq* , sau că \leq este o *ordine densă pe A* dacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$, i. e. dacă $\prec = \emptyset$ în posetul (A, \leq) .

- Așadar, \leq este o ordine densă pe \mathbb{Q} și pe \mathbb{R} .

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

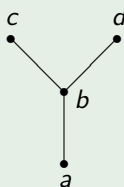
- Amintim că relațiile binare (pe mulțimi finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite și nevide.
- Dacă (A, \leq) este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului (A, \leq) este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune \prec asociată lui \leq și a cărei reprezentare grafică respectă regula:
 - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
 - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui \leq , i. e. nodurile “strict mai mari” decât el.**

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Exemplu

Posetul (A, \leq) dat de $A = \{a, b, c, d\}$ și

$\leq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație (diagrama Hasse: reprezentare minimală, fără redundanțe)

Într-o diagramă Hasse, bucelele sunt eliminate (orice ordine este reflexivă, deci nu e nevoie să se deseneze arce între un vârf și el însuși), și orice arc care rezultă prin tranzitivitate din altele este, de asemenea, eliminat. Mai mult, antisimetria unei ordini arată că nu există circuite în graful orientat asociat unei ordini (graf orientat asociat la fel ca în cazul relațiilor binare oarecare), iar acest fapt permite reprezentarea printr-un graf neorientat, cu acea convenție privind poziționarea nodurilor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Faptul că, într-un poset finit și nevid (A, \leq) , două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $< := \leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului (A, \leq) prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr-un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului (A, \leq) , adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observație

În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Diagrama Hasse a unei **mulțimi liniar ordonate** este “liniară”.

Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Notăție

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul cu k elemente** prin \mathcal{L}_k (articolul hotărât va fi explicat în remarcă următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului \mathcal{L}_k se notează cu L_k . Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarcă

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Remarcă (continuare)

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar \leq și \sqsubseteq sunt două ordini totale pe L_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (L_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k și M_k sunt mulțimi cu exact k elemente, iar \leq este o ordine totală pe L_k și \sqsubseteq este o ordine totală pe M_k , atunci poseturile (L_k, \leq) și (M_k, \sqsubseteq) sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulțumim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** dacă **au aceeași diagramă Hasse**.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente: $\mathcal{L}_4 = (L_4, \leq)$, cu $L_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ și $\leq = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$, are următoarea diagramă Hasse:



Elemente distinse într-un poset

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie (A, \leq) un poset și $X \subseteq A$.

Remarcă

Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X , și că, dacă ordinea \leq pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiție

Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de \leq pe X* și se notează tot cu \leq .

Posetul (X, \leq) se numește *subposet* sau *submulțime (parțial) ordonată a lui (A, \leq)* .

Dacă (X, \leq) este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci (X, \leq) se numește *submulțime total ordonată a lui (A, \leq)* .

Elemente distinse într-un poset

Definiție

Un element $a \in A$ se numește:

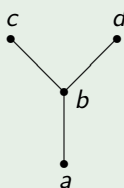
- *minorant pentru X* ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru X* ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarcă

X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minoranții a și b și nu are niciun majorant.

Elemente distinse într-un poset

Definiție

- Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui X* sau *prim element al lui X* sau *cel mai mic element al lui X* și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui X* sau *ultim element al lui X* sau *cel mai mare element al lui X* și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată primul exemplu de mai jos, minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui \leq implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și \leq)).

La fel pentru maxim.

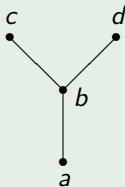
Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Elemente distinse într-un poset

Exemplu

În posetul având diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minimul b și nu are maxim, iar întreaga mulțime $\{a, b, c, d\}$ (întregul poset) are minimul a și nu are maxim.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente este un poset mărginit (la fel ca orice lanț finit și nevid; a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*).

Remarcă

O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Elemente distinse într-un poset

Definiție

Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui X* ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui X* ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x , sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarcă

Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Reprezentarea prin diagrame Hasse a poseturilor finite se bazează pe următoarele rezultate, care pot fi demonstrate simplu, prin reducere la absurd și inducție matematică, ajungându-se la contradicție cu finitudinea posetului (a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*); a treia remarcă de mai jos arată că orice diagramă Hasse corespunde unui unic poset:

Remarcă (temă)

Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid (A, \leq) , există un element minimal e și un element maximal E în posetul (A, \leq) , cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Elemente distinse într-un poset

Definiție

Infimumul lui X este cel mai mare minorant al lui X , adică maximul mulțimii minoranților lui X , și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X , adică minimul mulțimii majoranților lui X , și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarcă

După cum arată exemplele de mai jos, infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.

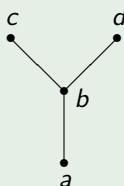
Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și \leq)).

La fel pentru supremum.

Elemente distinse într-un poset

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{c, d\}$ are infimumul b și nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților lui $\{c, d\}$ este vidă și, deci, nu are minim.

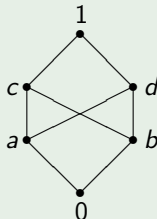
Observație

Într-o diagramă Hasse, nodurile sunt marcate prin ceruțele. Nu toate intersecțiile de muchii sunt noduri, după cum ilustrează următorul exemplu.

Elemente distinse într-un poset

Exemplu

Notăm relația de ordine a posetului dat de următoarea diagramă Hasse cu \leq , iar relația de ordine strictă asociată ei cu $<$.



În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c < 1$, $d < 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \not\leq d$ și $d \not\leq c$).

În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 < a$, $0 < b$ și a și b sunt *incomparabile*).

Elemente distinse într-un poset

Remarcă

Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii dacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ dacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$. Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii dacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ dacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m \in A$ dacă:
 - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M \in A$ dacă:
 - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
 - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lemă

Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- ① $x \leq y$
- ② există în L $\inf\{x, y\} = x$
- ③ există în L $\sup\{x, y\} = y$

Demonstrație: Vom folosi definițiile infimumului, supremumului, minimului și maximului unei submulțimi a unui poset, și le vom aplica acestui caz particular al submulțimilor cu 1 sau 2 elemente.

Fie $x, y \in L$.

(1) \Rightarrow (2): Dacă $x \leq y$, atunci $x = \min\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ în L .

(1) \Rightarrow (3): Dacă $x \leq y$, atunci $y = \max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ în L .

(2) \Rightarrow (1): Dacă există în L $\inf\{x, y\}$, atunci $\inf\{x, y\} \leq y$, prin urmare, dacă, în plus, $\inf\{x, y\} = x$, atunci $x \leq y$.

(3) \Rightarrow (1): Dacă există în L $\sup\{x, y\}$, atunci $x \leq \sup\{x, y\}$, prin urmare, dacă, în plus, $\sup\{x, y\} = y$, atunci $x \leq y$.

Principiul dualității pentru poseturi

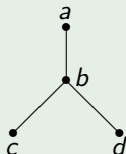
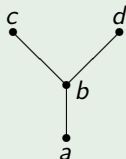
- **Principiul dualității pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset arbitrar (fapt esențial) (A, \leq) rămâne valabil dacă înlocuim \leq cu \leq^{-1} (notată \geq ; conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), \prec cu \prec^{-1} (notată \succ), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice-versa, toate elementele minimale cu elemente maximale și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice-versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine \leq , \geq este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ și relația de succesiune \succ , \leq este totală ddacă \geq este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui (X, \leq) sunt exact majoranții lui (X, \geq) și vice-versa, elementele minimale ale lui (X, \leq) sunt exact elementele maximale ale lui (X, \geq) și vice-versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice-versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice-versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice-versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.

Principiul dualității pentru poseturi

- Posetul (A, \geq) se numește *posetul dual* al posetului (A, \leq) .
- Este evident că dualul dualului unui poset (A, \leq) este chiar (A, \leq) .
- De acum încolo, ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi** în demonstrații, vom scrie, simplu, “prin dualitate”.

Exemplu

- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin “răsturnarea diagramei Hasse” a acelui poset “cu susul în jos”.



$$(P, \leq) \qquad (P, \geq) = \text{dualul lui } (P, \leq)$$

- Lanțurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarcă

Fie (A, \leq) un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \not\leq b$;
- dacă (A, \leq) este lanț, atunci: $b < a$ dacă și numai dacă $a \not\leq b$.

Exemplu

Se poate demonstra că orice submulțime finită și nevidă a unui lanț are un minim și un maxim, astfel: arătând prin inducție după cardinalul submulțimii existența minimului, iar existența maximului rezultă **prin dualitate**.

Observație

O consecință a remarcii din exemplul anterior este faptul că orice lanț finit și nevid este un poset mărginit (fapt menționat și mai sus).

Remarcă

Fie (L, \leq) un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Într-adevăr, cum $X \neq \emptyset$, rezultă că există $x \in X$. $\inf(X)$ este un minorant al lui X , iar $\sup(X)$ este un majorant al lui X , prin urmare $\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$, deci $\inf(X) \leq \sup(X)$ prin tranzitivitate.

Elemente distinse într-un poset

Caracterizarea supremului și a infimumului de mai sus fac demonstrațiile următoarelor remarci foarte simple.

Remarcă

Pentru orice mulțime T , în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$

Remarcă (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$)

Fie (L, \leq) un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare. Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în (L, \leq) $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în (L, \leq) $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Elemente distinse într-un poset

Remarcă

Într-un poset (L, \leq) , $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Într-adevăr, $\sup(\emptyset) \stackrel{\text{definiție}}{=} \min\{x \mid x \in L, \text{ a. î. } (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x)\} = \min\{x \mid x \in L\} = \min(L)$ ($\sup(\emptyset)$ și $\min(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale), pentru că, oricare ar fi un element y , afirmația $y \in \emptyset$ este falsă, și deci implicația $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ este adevărată pentru orice element x . Dual, $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale.

Propoziție

Fie (L, \leq) un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- ① *pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L ;*
- ② *pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L .*

Demonstrație: Condiția (1) aplicată lui $A := L$ spune că (L, \leq) are minim, iar condiția (2) aplicată lui $A := L$ spune că (L, \leq) are maxim. Deci, dacă (L, \leq) satisface una dintre condițiile (1) și (2), atunci L este nevidă.

Elemente distinse într-un poset

(1) \Rightarrow (2) : Ipoteza acestei implicații, anume existența în (L, \leq) a infimumurilor tuturor submulțimilor lui L , implică faptul că:

- L este nevidă;
- în (L, \leq) există $\inf(\emptyset) = \max(L)$, conform remarcii anterioare; deci (L, \leq) are maxim;
- în (L, \leq) există $\inf(L) = \min(L)$; deci (L, \leq) are minim.

Conform remarcii anterioare, rezultă că în (L, \leq) există $\sup(\emptyset) = \min(L)$.

Fie, acum, $\emptyset \neq A \subseteq L$ și $M := \{m \in L \mid (\forall x \in A) x \leq m\} \subseteq L$, i. e. M este mulțimea majoranților lui A . $M \neq \emptyset$, pentru că $\max(L) \in M$.

Faptul că (L, \leq) satisface condiția (1) arată că există $s := \inf(M) \in L$.

Pentru orice $x \in A$ și orice $y \in M$, are loc $x \leq y$, conform definiției mulțimii M .

Deci orice element x al mulțimii nevide A este minorant al lui M . Definiția infimumului arată acum că $x \leq \inf(M) = s$, oricare ar fi $x \in A$. Deci $s = \inf(M)$ este un majorant al lui A , adică $s = \inf(M) \in M$, conform definiției lui M . Dar $s = \inf(M) \in M$ înseamnă că $s = \min(M)$, adică s este cel mai mic majorant al lui A , adică $s = \sup(A)$, conform definiției supremumului.

(2) \Rightarrow (1) : Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.

1 Relații de ordine

2 Funcții izotone

3 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Funcții izotone

Definiție

Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinele naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul (A, \leq) și posetul dual lui (B, \sqsubseteq) , anume (B, \supseteq) , unde $\supseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarcă

Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă. Întradevăr, dacă (P, \leq) , (Q, \sqsubseteq) și (R, \trianglelefteq) sunt poseturi, iar $f : P \rightarrow Q$ și $g : Q \rightarrow R$ sunt funcții izotone, atunci, pentru orice $x, y \in P$: dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$, prin urmare $g(f(x)) \trianglelefteq g(f(y))$, adică $(g \circ f)(x) \trianglelefteq (g \circ f)(y)$, i. e. $g \circ f$ este izotonă.

Exercițiu (temă)

Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

I. e., dacă:

- (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) sunt două poseturi,
- $< := \leq \setminus \Delta_A$ și $\sqsubset := \sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinele stricte asociate lui \leq și, respectiv, \sqsubseteq ,
- iar $f : A \rightarrow B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

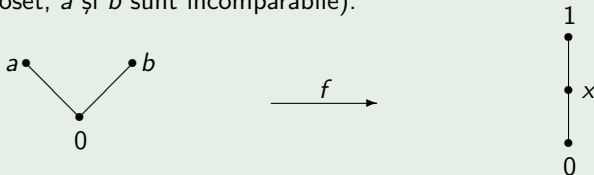
Funcții izotone

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Remarcă

Fie (L, \leq) un lanț (adică o mulțime total ordonată, adică o mulțime liniar ordonată). Atunci, pentru orice $a, b \in L$, $a \not\leq b$ implică $b < a$, unde $< := \leq \setminus \Delta_L$ este ordinea strictă asociată lui \leq . Într-adevăr, pentru orice $a, b \in L$, faptul că (L, \leq) este lanț implică $a \leq b$ sau $b \leq a$, așadar, dacă $a \not\leq b$, atunci $b \leq a$ și $a \neq b$, prin urmare $b < a$.

Temă: folosind antisimetria relației \leq , demonstrați că implicația reciprocă: $b < a$ implică $a \not\leq b$, are loc în orice poset, indiferent dacă este lanț sau nu.

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci inversa lui f , f^{-1} , este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Indicație: aplicați metoda reducerii la absurd, remarca anterioară și injectivitatea funcției din enunț.

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Arătați că, dacă (L, \leq) este lanț, atunci (M, \sqsubseteq) este lanț.

Exercițiu (Teorema Knaster–Tarski (temă))

Fie (L, \leq) un poset, iar $f : L \rightarrow L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul (L, \leq) $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

- 1 $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui f*) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
- 2 dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual**: dacă există în posetul (L, \leq) $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

- 1 $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui f*) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
- 2 dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulțimi parțial ordonate (poseturi)

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set”) o pereche (A, \leq) formată dintr-o mulțime A și o **relație de ordine** \leq pe A , i. e.:

- \leq este o **relație binară** pe A : $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- \leq este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- \leq este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- \leq este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine \leq este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Relația de ordine strictă asociată ordinii \leq este

$$\leq^{\text{not.}} = \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}.$$

Relația de succesiune asociată ordinii \leq este

$$\prec^{\text{not.}} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists a \in A) (x < a < y)\}.$$

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- \geq este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui \geq
- \succ este relația de succesiune asociată lui \geq
- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului (A, \leq) .

1 Relații de ordine

2 Funcții izotone

3 Operatori de închidere și sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Operatori și sisteme de închidere

Pe tot parcursul acestei secțiuni a cursului, (A, \leq) va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiție o generalizează pe cea din cursul anterior în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.

Toate demonstrațiile rezultatelor din această secțiune sunt analoge celor din cazul particular al posetului $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ incluse în cursul anterior. Transpunerea lor la cazul general de aici este un bun **exercițiu (temă)** pentru fiecare student.

Definiție

- Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit* (A, \leq) o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în (A, \leq) $\inf(S) \in M$.
- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit* (A, \leq) o funcție $C : A \rightarrow A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:
 - 1 $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
 - 2 $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
 - 3 dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Operatori și sisteme de închidere

Remarcă

Orice sistem de închidere pe (A, \leq) conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe (A, \leq) este nevid.

Exemplu

- id_A este un operator de închidere pe (A, \leq) .
- Funcția constantă $C : A \rightarrow A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe (A, \leq) .
- A este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe (A, \leq) .
- \emptyset nu este un sistem de închidere pe (A, \leq) .

Propoziție

Dacă M este un sistem de închidere pe (A, \leq) , atunci, pentru orice $x \in A$, există în (A, \leq) $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.

Iar, dacă definim $C_M : A \rightarrow A$ prin: oricare ar fi $x \in A$,

$C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe (A, \leq) .

Operatori și sisteme de închidere

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Fie $C : A \rightarrow A$ un operator de închidere pe (A, \leq) . Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe (A, \leq) , având ca elemente exact punctele fixe ale lui C : $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.

Demonstrație: temă facultativă.

Propoziție

Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

- ① *pentru orice operator de închidere $C : A \rightarrow A$ pe (A, \leq) , $C_{M_C} = C$;*
- ② *pentru orice sistem de închidere M pe (A, \leq) , $M_{C_M} = M$.*

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe (A, \leq) și mulțimea sistemelor de închidere pe (A, \leq) sunt în bijecție.

Demonstrație: temă facultativă.