Exerciţiu. Găsiți elementele inversabile, divizorii lui 0, elementele nilpotente și elementele idempotente din $\mathbb{Z}_{63}$.

Demonstraţie.

- Elementele au invers la înmulțire în $\mathbb{Z}_n$ dacă și numai dacă sunt prime față de n. În acest caz, $U(\mathbb{Z}_{63}) = \{\, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \dots \,\}$.

- Divizorii lui 0 dintr-un inel R sunt elementele $a \in R$ pentru care $\exists b \neq 0$ astfel încât $ab = 0$. Din acest motiv, elementele care sunt inversabile sigur nu pot fi divizori ai lui 0.

  În $\mathbb{Z}_n$, toate numerele care au un factor în comun cu n sunt divizori ai lui 0. Răspunsul este $\{\, \hat{3}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{9}, \widehat{12}, \dots \,\}$.

- Elementele nilpotente sunt cele pentru care $\exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n = 0$. 0 este întotdeauna nilpotent, dar este posibil să mai existe și alte elemente de acest fel.

  În $\mathbb{Z}_n$, elementele nilpotente sunt cele care conțin cel puțin toți factorii primi distincți ai lui n. Pentru $n = 63$, avem $63 = 3^2 \cdot 7$, deci trebuie să găsim numere care să fie multiplii de $3 \cdot 7$. Răspunsul este $\mathcal{N}(\mathbb{Z}_{63}) = \{\, \hat{0}(= 3 \cdot 7 \cdot 0), \widehat{21}(= 3 \cdot 7 \cdot 1), \widehat{42}(= 3 \cdot 7 \cdot 2) \,\}$.

- Elementele idempotente sunt cele pentru care $a^2 = a$. Atât 0 cât și 1 sunt întotdeauna idempotente. De asemenea, dacă a este idempotent, atunci și $1 - a$ este idempotent, deci odată ce am găsit jumătate dintre idempotente putem obține mai ușor și cealaltă jumătate.

  Ideea este să descompunem n în produs de r numere prime sau puteri de numere prime, $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ și să descompunem $\mathbb{Z}_n$ în $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}$. Singurele elemente idempotente din fiecare $\mathbb{Z}_{p^k}$ sunt $\bar{0}$ și $\bar{1}$.

  În acest caz $\mathbb{Z}_{63} = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_9$. Trebuie să scriem toate cele 2^r șiruri posibile de 0 și 1 de lungime r (fiecare corespunde unui idempotent):

  - $(\bar{0}, \bar{\bar{0}}) \implies$ numere care dau rest 0 la împărțirea cu 7 și rest 0 la împărțirea cu 9 $\implies \hat{0}$
  - $(\bar{1}, \bar{\bar{1}}) \implies$ numere care dau rest 1 la împărțirea cu 7 și rest 1 la împărțirea cu 9 $\implies \hat{1}$
  - $(\bar{0}, \bar{\bar{1}}) \implies$ numere care dau rest 0 la împărțirea cu 7 și rest 1 la împărțirea cu 9 $\implies \widehat{28}$

- Din moment ce deja știm că $\hat{28}$ este idempotent, știm că și $1-28 \equiv -27 \equiv 36 \mod 63$ este idempotent. Dacă nu observăm acest lucru, putem să calculăm ca mai înainte:
  $(\bar{1}, \bar{\bar{0}}) \implies$ numere care dau rest 1 la împărțirea cu 7 și rest 0 la împărțirea cu 9 $\implies \hat{36}$

Deci $\text{Idemp}(\mathbb{Z}_{63}) = \{ \hat{0}, \hat{1}, \hat{28}, \hat{36} \}$.

□

Exercițiu. Găsiți idealele lui $\mathbb{C} \times M_4(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{R})$.

Demonstrație. Ne folosim de una sau mai multe dintre următoare proprietăți (în rezolvare, trebuie enunțate înainte de folosirea lor):

- Idealele lui $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ sunt $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, unde $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sunt ideale ale lui $R_1, R_2, \ldots,$ respectiv R_n.
- Idealele lui $\mathbb{Z}$ sunt $n\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt $\hat{d}\mathbb{Z}_n$ unde $d \mid n$.
- Dacă R este corp, atunci singurele lui ideale sunt $\{ 0 \}$ și R.
- Idealele lui $M_n(R)$ sunt $M_n(I)$ unde I este un ideal al lui R.

În acest caz:

- Fiind corpuri, idealele lui $\mathbb{C}$ și $\mathbb{R}$ sunt $\{ 0 \}$ și ele însăși.
- Idealele lui $\mathbb{Z}_6$ sunt $\hat{d}\mathbb{Z}_6$ unde $d \mid 6$, deci $\hat{1}\mathbb{Z}_6, \hat{2}\mathbb{Z}_6, \hat{3}\mathbb{Z}_6, \hat{6}\mathbb{Z}_6$.
- Ne folosim de prima proprietate pentru idealele produsului de inele.
- Ne folosim de ultima proprietate pentru idealele inelelor de matrici.

În concluzie, idealele căutate sunt:

- $\{ 0 \} \times M_4(\hat{1}\mathbb{Z}_6 \times \{ 0 \})$
- $\{ 0 \} \times M_4(\hat{1}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{R})$
- $\{ 0 \} \times M_4(\hat{2}\mathbb{Z}_6 \times \{ 0 \})$
- $\{ 0 \} \times M_4(\hat{2}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{R})$
- ...

- $\mathbb{C} \times M_4(\hat{6}\mathbb{Z}_6 \times \{ 0 \})$
- $\mathbb{C} \times M_4(\hat{6}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{R})$

$\square$

Exerciţiu. Găsiți idealele inelului $R = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}$ și, până la izomorfism, inelele factor obținute prin împărțirea la aceste ideale.

Demonstraţie. Asemănător exercițiului anterior, găsim idealele acestui inel: $\hat{1}\mathbb{Z}_8 \times \{ 0 \}, \hat{1}\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}, \ldots, \hat{8}\mathbb{Z}_8 \times (\{ 0 \}), \hat{8}\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}$.

Pentru a doua parte ne vom folosi și de următoarele proprietăți:

- Dacă $I_1 \trianglelefteq R_1$ și $I_2 \trianglelefteq R_2$, $(R_1 \times R_2)/(I_1 \times I_2) \cong (R_1/I_1) \times (R_2/I_2)$
- Dacă $I, J \trianglelefteq R$ și $J \subset I$, atunci $(R/J)/(I/J) \cong (R/I)$.
- $(R/R) \cong \{ 0 \}, (R/\{ 0 \}) \cong R$
- $\{ 0 \} \times R \cong R \times \{ 0 \} \cong R$
- $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Acum trebuie să scriem toate inelele factor de forma $\frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}}{I \times J}$, unde $I \in \{ \hat{1}\mathbb{Z}_8, \ldots, \hat{8}\mathbb{Z}_8 \}$ și $J \in \{ \{ 0 \}, \mathbb{Q} \}$. Trebuie de asemenea să "simplificăm" aceste inele până la forma în care se vede care sunt izomorfe între ele.

- $$\frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}}{\hat{1}\mathbb{Z}_8 \times \{ 0 \}} \cong \frac{\mathbb{Z}_8}{\mathbb{Z}_8} \times \frac{\mathbb{Q}}{\{ 0 \}} \cong \{ \hat{0} \} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$$
- $$\frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}}{\hat{1}\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}} \cong \frac{\mathbb{Z}_8}{\mathbb{Z}_8} \times \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}} \cong \{ \hat{0} \} \times \{ 0 \} \cong \{ 0 \}$$
- $$\ldots$$
- $$\frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}}{\hat{4}\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}} \cong \frac{\mathbb{Z}_8}{\hat{4}\mathbb{Z}_8} \times \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}} \cong \frac{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}} \times \{ 0 \} \cong \frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}} \times \{ 0 \} \cong \mathbb{Z}_4 \times \{ 0 \} \cong \mathbb{Z}_4$$
- $$\ldots$$
- $$\frac{\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}}{\hat{8}\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Q}} \cong \frac{\mathbb{Z}_8}{\hat{8}\mathbb{Z}_8} \times \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Q}} \cong \frac{\mathbb{Z}_8}{\{ 0 \}} \times \{ 0 \} \cong \mathbb{Z}_8 \times \{ 0 \} \cong \mathbb{Z}_8$$

$\square$