FMI, Info, 2018/2019, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 14

(S14.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \wedge \forall x\psi \tag{1}$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \vee \exists x\psi \tag{2}$$
$$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \rightarrow \forall x\psi \tag{3}$$
$$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \vDash\!\!\!\Dashv \forall x\psi \rightarrow \varphi \tag{4}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

$\forall x(\varphi \wedge \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \wedge \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 14.2) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ şi $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\varphi \vee \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \vee \exists x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 14.2) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e]$.

$\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \vDash\!\!\!\Dashv \varphi \rightarrow \forall x\psi$:
$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \rightarrow \psi))[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \rightarrow \psi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 14.2) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \not\vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \rightarrow \forall x\psi)[e]$.

$\exists x(\psi \rightarrow \varphi) \vDash\!\!\!\Dashv \forall x\psi \rightarrow \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \exists x(\psi \rightarrow \varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\psi \rightarrow \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 14.2) există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \not\vDash \forall x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\forall x\psi \rightarrow \varphi)[e]$.

$\square$

(S14.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I. Să se arate că:

(i) pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă x,

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

este validă;

(ii) pentru orice formulă φ şi orice variabilă x cu $x \notin Var(\varphi)$,

$$\varphi \to \forall x\varphi$$

este validă.

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare.

(i) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, vom avea că are loc $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow a}]$ (*). Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[e]$. Presupunem prin absurd că nu e aşa – atunci avem că $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$ şi $\mathcal{A} \not\vDash (\forall x\psi)[e]$. Deci pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ (**) şi există un $b \in A$ cu $\mathcal{A} \not\vDash \psi[e_{x\leftarrow b}]$ (***). Luând în (*) şi (**) $a := b$, obţinem că $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x\leftarrow b}]$ şi $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow b}]$, ceea ce contrazice (***).

(ii) Presupunem că $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$. Vrem să arătăm $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e]$, i.e. că pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$. Fie $a \in A$. Clar $FV(\varphi) \subseteq Var(\varphi)$. Cum $x \notin Var(\varphi)$, $x \notin FV(\varphi)$. Avem că e şi $e_{x\leftarrow a}$ diferă cel mult pe "poziţia" x, deci restricţionate la $FV(\varphi)$ ele devin egale. Aplicând Propoziţia 14.3, rezultă că avem într-adevăr $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$.

$\square$

(S14.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg\forall z(g(y, z) = d)\\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x, y) \to \exists z Q(x, z))\\
\varphi_3 &= \exists x\forall y P(x, y) \vee \neg\exists y(S(y) \to \forall z R(z))\\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x, z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg\exists x R(x) \wedge \forall x\exists z Q(z, x))
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\forall x(f(x)=c)\wedge\neg\forall z(g(y,z)=d) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall x(f(x)=c\wedge\exists z\neg(g(y,z)=d)\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall x\exists z(f(x)=c\wedge\neg(g(y,z)=d))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall y(\forall xP(x,y)\rightarrow\exists zQ(x,z)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall y(\forall xP(x,y)\rightarrow\exists zQ(u,z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall y(\neg\forall xP(x,y)\vee\exists zQ(u,z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall y(\exists x\neg P(x,y)\vee\exists zQ(u,z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \forall y\exists x\exists z(\neg P(x,y)\vee Q(u,z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists x\forall yP(x,y)\vee\neg\exists y(S(y)\rightarrow\forall zR(z)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall yP(x,y)\vee\neg\exists u(S(u)\rightarrow\forall zR(z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall yP(x,y)\vee\forall u\neg(\neg S(u)\vee\forall zR(z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall yP(x,y)\vee\forall u(S(u)\wedge\neg\forall zR(z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall yP(x,y)\vee\forall u(S(u)\wedge\exists z\neg R(z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall yP(x,y)\vee\forall u\exists z(S(u)\wedge\neg R(z))\\
&\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv} \exists x\forall y\forall u\exists z(P(x,y)\vee(S(u)\wedge\neg R(z)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exists z(\exists xQ(x,z)\vee\exists xR(x))\rightarrow\neg(\neg\exists xR(x)\wedge\forall x\exists zQ(z,x)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\exists z_1(\exists x_1Q(x_1,z_1)\vee\exists x_2R(x_2))\rightarrow\neg(\neg\exists x_3R(x_3)\wedge\forall x_4\exists z_2Q(z_2,x_4)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\neg\exists z_1(\exists x_1Q(x_1,z_1)\vee\exists x_2R(x_2))\vee\neg(\neg\exists x_3R(x_3)\wedge\forall x_4\exists z_2Q(z_2,x_4)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\forall z_1\neg(\exists x_1Q(x_1,z_1)\vee\exists x_2R(x_2))\vee(\exists x_3R(x_3)\vee\neg\forall x_4\exists z_2Q(z_2,x_4)) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\forall z_1(\neg\exists x_1Q(x_1,z_1)\wedge\neg\exists x_2R(x_2))\vee\exists x_3R(x_3)\vee\exists x_4\forall z_2\neg Q(z_2,x_4) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\forall z_1(\forall x_1\neg Q(x_1,z_1)\wedge\forall x_2\neg R(x_2))\vee\exists x_3R(x_3)\vee\exists x_4\forall z_2\neg Q(z_2,x_4) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\forall z_1\forall x_1\forall x_2(\neg Q(x_1,z_1)\wedge\neg R(x_2))\vee\exists x_3R(x_3)\vee\exists x_4\forall z_2\neg Q(z_2,x_4) &\mathrel{\vDash\!\!\!\Dashv}\\
\forall z_1\forall x_1\forall x_2\exists x_3\exists x_4\forall z_2((\neg Q(x_1,z_1)\wedge\neg R(x_2))\vee R(x_3)\vee\neg Q(z_2,x_4)) &
\end{aligned}$$

$\square$