Curs 17

Integrale improprii

I. Integrale improprii pe intervale nemărginite

Definiție. 1) Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$. Dacă există $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}} \overset{\text{not.}}{=} \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$), valoarea ei se notează $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $[a,\infty)$.

a) Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

b) Dacă $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă.

2) Fie $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$ cu

$a<b$. Dacă există $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $(-\infty, b]$.

c) Dacă $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ este convergentă.

d) Dacă $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ este divergentă.

3) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$. Dacă există $\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe $\mathbb{R}$.

e) Dacă $\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

f) Dacă $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă.

<u>Propoziție.</u> Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b]$. Dacă există $c\in\mathbb{R}$ a.î. $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ și $\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx$ sunt convergente, atunci $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă și $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

II. Integrale improprii pe intervale mărginite

<u>Definiție.</u> 1) Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a,d]$, $a<d<b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{d\to b \\ d<b}} \int_a^d f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei

se notează $\int_a^b f(x)dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $[a, b)$.

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d < b}} \int_a^d f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d < b}} \int_a^d f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{d \to b \\ d < b}} \int_a^d f(x)dx$, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este divergentă.

2) Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c, b]$, $a < c < b$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_a^b f(x)dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul $(a, b]$.

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{c \to a \\ c > a}} \int_c^b f(x)dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a}} \int_c^b f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

3) Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ a.î. f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c,d]$. Dacă există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx$ (în $\overline{\mathbb{R}}$), valoarea ei se notează $\int_a^b f(x)\,dx$ și se numește integrala improprie a funcției f pe intervalul (a,b).

i) Dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx$ este finită, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx$ este infinită sau nu există $\lim\limits_{\substack{c\to a\\ c>a\\ d\to b\\ d<b}} \int_c^d f(x)\,dx$, spunem că $\int_a^b f(x)\,dx$

este divergentă.

<u>Propoziție.</u> Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe orice interval $[c,d]$. Dacă există $\alpha\in(a,b)$ a.î. $\int_a^\alpha f(x)\,dx$ și $\int_\alpha^b f(x)\,dx$ sunt convergente, atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^b f(x)\,dx.$$

<u>Definiție.</u> Fie $p\in(a,b)$ și $f:[a,b]\setminus\{p\}\to\mathbb{R}$ o funcție a.î. integralele improprii $\int_a^p f(x)\,dx$ și $\int_p^b f(x)\,dx$ sunt convergente. Definim $\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def.}}{=\!=}$ (integrală improprie)

$$\stackrel{\text{def.}}{=\!=} \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^b f(x)\,dx.$$

<u>Criterii de convergență pentru integrale improprii</u>

Vom enunța criteriile de mai jos doar pentru funcții definite pe $[a,\infty)$.

1. <u>Criteriul de comparație cu inegalități</u>

Fie $f,g:[a,\infty)\to[0,\infty)$ două funcții integrabile Riemann pe orice interval $[a,b]$, $b>a$ și cu proprietatea că $0 \le f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in [a, \infty)$.

i) Dacă $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este convergentă, atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

ii) Dacă $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este divergentă, atunci $\int_a^\infty g(x)\,dx$ este divergentă.

2. <u>Criteriul de comparație cu limită</u>

Fie $f, g : [a, \infty) \to [0, \infty)$ două funcții integrabile Riemann pe orice interval $[a, b]$, $b > a$ și a.î.:

α) $g(x) > 0\ \forall\ x \in [a, \infty)$.

β) $\exists \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$.

Atunci $\int_a^\infty f(x)\,dx$ și $\int_a^\infty g(x)\,dx$ au aceeași natură (i.e. sau sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente).

3. <u>Criteriul integral al lui Cauchy</u>

Fie $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ descrescătoare (rezultă că f este integrabilă Riemann pe orice interval $[a, b]$, $b > a$, fiind monotonă). Atunci integrala improprie

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=p}^{\infty} f(n)$ $\forall p \in [a,\infty)\cap\mathbb{N}$.

Funcțiile Gama (Γ) și Beta (B) (integralele euleriene)

Definiție. 1) Fie $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt \quad (\text{funcția Gama}).$$

2) Fie $B : (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty)$,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (\text{funcția Beta}).$$

Proprietăți. 1) $\Gamma(1) = 1$.

2) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

3) $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ $\forall x \in (0,\infty)$ (În particular, $\Gamma(1+n) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$).

4) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ $\forall x \in (0,1)$.

5) $B(x,y) = B(y,x)$ $\forall x,y \in (0,\infty)$.

6) $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $\forall x,y \in (0,\infty)$.

7) $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}\,dt$

$\forall x,y\in(0,\infty)$.

Integrarea funcțiilor de mai multe variabile reale

Observație. Vom lucra cu spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d)$, $d = d_2$.

Definiție. 1) O mulțime de forma $D=[a_1,b_1)\times\ldots\times[a_n,b_n)=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ se numește dreptunghi. Notăm

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\overset{not}{=}\{D\subset\mathbb{R}^n \mid D \text{ dreptunghi}\}$.

2) Fie $D=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Numărul

$vol(D)=(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$ se numește volumul lui D.

3) O mulțime de forma $E=\bigcup_{i=1}^{m}D_i$, unde

$D_i\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\ \forall i=\overline{1,m}$ se numește mulțime elementară.

Notăm $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)\overset{not}{=}\{E\subset\mathbb{R}^n \mid E \text{ mulțime elementară}\}$.

4) Fie $E=\bigcup_{i=1}^{m}D_i\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $D_i\cap D_j=\emptyset$ $\forall i\neq j$. Numărul $vol(E)=\sum_{i=1}^{m}vol(D_i)$ se numește volumul lui E.

Propoziție. Orice mulțime elementară poate fi scrisă ca reuniune finită de dreptunghiuri disjuncte (deci putem defini $vol(E)$ pentru orice $E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$).

<u>Definiție.</u> Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită. Definim: 1) $\mu^*(A) = \inf\{vol(E) \mid E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), A \subset E\}$ (măsura Jordan exterioară a lui A).

2) $\mu_*(A) = \sup\{vol(F) \mid F \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), F \subset A\}$ (măsura Jordan interioară a lui A).

<u>Definiție.</u> Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Spunem că A este măsurabilă Jordan dacă $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

<u>Notație.</u> $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \overset{not.}{=} \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A$ măsurabilă Jordan$\}$.

<u>Definiție.</u> Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Valoarea comună $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ se numește măsura Jordan a lui A și se notează $\mu(A)$.