FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 12

(S12.1) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \wedge \forall x\psi && (1)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \vee \exists x\psi && (2)\\
\varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\varphi && (3)\\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \varphi \rightarrow \forall x\psi && (4)\\
\exists x(\psi \rightarrow \varphi) &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\psi \rightarrow \varphi. && (5)
\end{aligned}$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

Demonstrăm (1):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \wedge \psi))[e] &\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 2.24)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ şi } \mathcal{A} \vDash \forall x\psi[e] \iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \forall x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (2):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi \vee \psi))[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 2.24)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \exists x\psi[e]\\
&\iff \mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \exists x\psi)[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]\\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \text{ (aplicând P. 2.24)}\\
&\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e].
\end{aligned}$$

Demonstrăm (4):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e] \quad & \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \nvDash \varphi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \nvDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ (aplicând P. 2.24)} \\
& \iff \quad \mathcal{A} \nvDash \varphi[e] \text{ sau pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \nvDash \varphi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \forall x \psi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \vDash (\varphi \to \forall x \psi)[e].
\end{aligned}
$$

Demonstrăm (5):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] \quad & \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x \leftarrow a}] \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]\big) \\
& \iff \quad \text{există } a \in A \text{ a.î. } \big(\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow a}] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e]\big) \text{ (aplicând P. 2.24)} \\
& \iff \quad \big(\text{ există } a \in A \text{ a.î. } \mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \leftarrow a}]\big) \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \nvDash \forall x \psi[e] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \varphi[e] \\
& \iff \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x \psi \to \varphi)[e].
\end{aligned}
$$

□

(S12.2) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y,z) = d) \\
\varphi_2 &= \forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \\
\varphi_3 &= \exists x \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y(S(y) \to \forall z R(z)) \\
\varphi_4 &= \exists z(\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z,x))
\end{aligned}
$$

Demonstraţie:

$$
\begin{aligned}
\forall x(f(x) = c) \wedge \neg \forall z(g(y,z) = d) \quad & \boxminus \quad \forall x(f(x) = c \wedge \exists z \neg(g(y,z) = d) \\
& \boxminus \quad \forall x \exists z(f(x) = c \wedge \neg(g(y,z) = d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall y(\forall x P(x,y) \to \exists z Q(x,z)) \quad & \boxminus \quad \forall y \exists z(\forall x P(x,y) \to Q(x,z)) \\
& \boxminus \quad \forall y \exists z(\forall u P(u,y) \to Q(x,z)) \\
& \boxminus \quad \forall y \exists z \exists u(P(u,y) \to Q(x,z)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists x \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y (S(y) \to \forall z R(z)) & \;\text{⫤}\; \exists x (\forall y P(x,y) \vee \neg \exists y \forall z (S(y) \to R(z)) \\
& \;\text{⫤}\; \exists x (\forall y P(x,y) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \to R(z)) \\
& \;\text{⫤}\; \exists x (\forall u P(x,u) \vee \forall y \exists z \neg (S(y) \to R(z)) \\
& \;\text{⫤}\; \exists x \forall u \forall y \exists z (P(x,u) \vee \neg (S(y) \to R(z))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists z (\exists x Q(x,z) \vee \exists x R(x)) \to \neg(\neg \exists x R(x) \wedge \forall x \exists z Q(z,x)) & \;\text{⫤} \\
\exists z \exists x (Q(x,z) \vee R(x)) \to (\neg\neg \exists x R(x) \vee \neg \forall x \exists z Q(z,x)) & \;\text{⫤} \\
\exists z \exists x (Q(x,z) \vee R(x)) \to (\exists x R(x) \vee \exists x \forall z \neg Q(z,x)) & \;\text{⫤} \\
\exists z \exists x (Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x (R(x) \vee \forall z \neg Q(z,x)) & \;\text{⫤} \\
\exists z \exists x (Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists x \forall z (R(x) \vee \neg Q(z,x)) & \;\text{⫤} \\
\exists z \exists x (Q(x,z) \vee R(x)) \to \exists u \forall v (R(u) \vee \neg Q(v,u)) & \;\text{⫤} \\
\forall z \forall x \exists u \forall v ((Q(x,z) \vee R(x)) \to (R(u) \vee \neg Q(v,u))) &
\end{aligned}
$$

$\square$

(S12.3) Fie φ, ψ formule şi x o variabilă. Să se demonstreze:

(i) $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x \varphi$;

(ii) $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem $\vDash \varphi$ şi vrem $\vDash \forall x \varphi$, i.e. pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$, avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e]$.
Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Avem $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e]$ dacă şi numai dacă pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$. Dar aceasta este adevărat, având în vedere că $\vDash \varphi$, deci $\mathcal{A} \vDash \varphi[e']$, cu $e' := e_{x \leftarrow a}$.

(ii) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Trebuie să demonstrăm că

$$\mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi))[e].$$

Presupunem că

$$(*) \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$$

şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi \to \forall x \psi))[e]$. Presupunem că

$$(**) \quad \mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e]$$

şi vrem $\mathcal{A} \vDash (\forall x \psi))[e]$. Fie $a \in A$. Vrem $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \leftarrow a}]$. Din (*) avem $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \leftarrow a}]$, iar din (**) obţinem $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$. Astfel deducem concluzia dorită.

$\square$