FUNCTII CONTINUE PE SPATII METRICE
SIRURI SI SERII DE FUNCTII

A) FUNCTII CONTINUE PE SPATII METRICE

Definitia 1. Fie o functie $f : D \subseteq X \to Y$ o functie, $A \subseteq D$ si $B \subseteq Y$.

a) Multimea $f(A) = \{y \in Y | \, \exists x \in A \; astfel \; incat \; f(x) = y\} \subseteq Y$ se numeste imaginea directa a multimii A prin functia f.

b) Multimea $f^{-1}(B) = \{x \in D | \; f(x) \in B \;\} \subseteq D$ se numeste preimaginea multimii B prin functia f.

Observatii. 1) $f(\varnothing) = \varnothing, f(D) = \operatorname{Im} f$.

2) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing, f^{-1}(Y) = D$.

Definitia 2. (definitii alternative pentru functii continue)

Se considera $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o functie si $x_0 \in D$.

a) Functia f este continua in x_0 daca $\forall W \in V_{\tau_{d_2}}(f(x_0)) \, \exists V \in V_{\tau_{d_1}}(x_0)$ astfel incat $f(D \cap V) \subseteq W$.

b) Functia f este continua in x_0 daca $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea ca $\forall x, y \in D \; cu \; d_1(x, y) < \delta_\varepsilon$ avem ca $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

c) Functia f este continua in x_0 daca $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sir din D cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ avem ca $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Definitia 3. Spunem ca functia $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continua pe multimea $A \subseteq D$ daca f este continua in orice punct al multimii A.

Teorema 1. Fie $D \subseteq (X, d_1)$ o multime nevida pentru care $\exists x_0 \in IzoD$. Orice functie $f : D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continua in x_0.

Demonstratie. $x_0 \in IzoD \Rightarrow \exists V_0 \in V_{\tau_{d_1}}(x_0)$astfel incat $V_0 \cap D = \{x_0\}$.

Fie $W \in V_{\tau_{d_2}}(f(x_0))$ o vecinatate arbitrara a punctului $f(x_0)$. Rezulta ca $f(x_0) \in W$.

Este adevarat ca $f(V_0 \cap D) = \{f(x_0)\} \subseteq W$.

Conform definitiei 1, pct. a deducem ca functia este continua in punctul x_0.

Teorema 2.(proprietatile functiilor continue) Fie $f : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o functie continua pe X. Sunt adevarate urmatoarrele afirmatiiS

a) $\forall F \subseteq Y$ multime inchisa, multimea $f^{-1}(F) \subseteq X$ este multime inchisa;

b) $\forall G \subseteq Y$ multime deschisa, multimea $f^{-1}(G) \subseteq X$ este multime deschisa;

c) $\forall K \subseteq X$ multime compacta, multimea $f(K) \subseteq Y$ este multime compacta;

d) $\forall A \subseteq X$ multime conexa, multimea $f(A) \subseteq Y$ este multime conexa;

Teorema 3. Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o multime compacta. Orice functie continua $f : K \subseteq (X, d_1) \to \mathbb{R}$ este marginita si isi atinge mariginile.

Definitia 4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie. Spunem ca f are proprietatea lui Darboux daca $\forall x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$,$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ situat intre $f(x_1)$ si $f(x_2)$ exista $c \in I$ situat intre x_1 si x_2 astfel incat $f(c) = \lambda$.

Teorema 5. Fie $I \subseteq R$ un interval.

a) Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

b) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie injectiva care are proprietatea lui Darboux. Atunci f este o functie strict monotona.

Corolar. Fie $I \subseteq R$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua.

a) Daca $\exists a, b \in I$ cu $a \neq b$ astfel ca $f(a)f(b) < 0$, atunci $\exists c \in I$ situat intre a si b astfel incat $f(c) = 0$.

b) Daca f este functie injectiva, atunci f este strict monotona.

B) SIRURI DE FUNCTII

$D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Definitia 6. Spunem ca sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe multimea nevida $A \subseteq D$ daca $\forall x \in A \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$.

Notatii.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x) \forall x \in A$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

$$f_n \overset{s}{\to} f$$

Definitia 7. Spunem ca sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe multimea nevida $A \subseteq D$ catre functia $f : A \to \mathbb{R}$ daca $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel incat $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$ si $\forall x \in A$.

Notatie.

$$f_n \overset{u}{\to} f$$

Observatie.

$$f_n \overset{u}{\to} f \Rightarrow$$

$$f_n \overset{s}{\to} f$$

Implicatia "" $\Leftarrow$ "" este falsa. Sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n\ \forall x \in [0,1], n \in \mathbb{N}^*$ converge simplu pe $[0,1]$, dar nu converge uniform pe $[0,1]$.

Criteriul practic de convergenta uniforma. Se considera sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, multimea nevida $A \subseteq X$ si functia $f : A \to \mathbb{R}$. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

(i) $f_n \overset{u}{\to} f$

(ii) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$.

Teorema lui Weierstrass pentru siruri de functii. Se considera sirul de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, multimea nevida $A \subseteq X$ si functia $f : A \to \mathbb{R}$ astfel ca $f_n \overset{u}{\to} f$. Daca $\exists x_0 \in A$ cu proprietatea ca f_n este functie continua in $x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este functie continua in x_0 .

Corolar. a) Daca $f_n \overset{u}{\to} f$ si f_n este functie continua pe multimea A $\forall n \in \mathbb{N}$, atunci f este functie continua pe multimea A.

b) Daca $f_n \overset{s}{\to} f$, $\exists x_0 \in A$ cu proprietatea ca f_n este functie continua in x_0 $\forall n \in \mathbb{N}$ si f nu este functie continua in x_0 , atunci $f_n \overset{u}{\nrightarrow} f$.

Teorema lui Dini. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii continue cu $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua cu urmatoarele proprietati:

a) $f_n \overset{s}{\to} f$

b) $f_n \leq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_n \geq f_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $f_n \overset{u}{\to} f$.

*Teorema lui Polya.*Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii monotone cu $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua astfel ca $f_n \overset{s}{\to} f$.

Atunci $f_n \overset{u}{\to} f$.

C) SERII DE FUNCTII

$D \subseteq \mathbb{R}$

$f_n : D \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Sirului de functii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu

$$s_n : D \to \mathbb{R}, s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x)\ \forall x \in D$$

Definitia 8. a) Perechea de siruri de functii $\left((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, notata $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, se numeste seria de functii asociata sirului $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) f_n se numeste termenul general de rang n al seriei de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

c) s_n se numeste suma partiala de rang n a seriei de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$.

Definitia 9. a) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe multimea A .

b) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergenta pe multimea $A \subseteq D$.

c) Spunem ca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta pe multimea $A \subseteq D$ daca sirul de functii $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe multimea A .

Observatii. a) Daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este absolut convergenta pe multimea A, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea A.

b) Daca seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform convergenta convergenta pe multimea A, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este simplu convergenta pe multimea A.

Criteriul lui Weierstrass pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de functii cu $f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir de numere reale pozitive astfel ca $|f_n(x)| \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$. Daca seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergenta, atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este uniform si absolut convergenta pe multimea D.

Criteriul lui Abel pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doua siruri de functii cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ care indeplinesc urmatoarele conditii:

a) $f_n \overset{u}{\to} 0$

b) $f_{n+1} \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$

c) $\exists M > 0$ astfel incat $|g_0(x) + ... + g_n(x)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$.

Atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergenta pe multimea D.

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de functii. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doua siruri de functii cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$ care indeplinesc urmatoarele conditii:

a) $f_{n+1} \leq f_n \forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_{n+1} \geq f_n \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\exists M > 0$ astfel incat $|f_n(x)| \leq M \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$.

c) seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ converge uniform pe multimea D.

Atunci seria de functii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n g_n$ este uniform convergenta pe multimea D.