FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 1

1 Breviar

1.1 Numărabilitate

Corolarul 1.10. Fie A o mulţime numărabilă şi B o mulţime nevidă cel mult numărabilă. Atunci $A \times B$ şi $A \cup B$ sunt numărabile.

Propoziţia 1.13.

(i) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi cel mult numărabile este mulţime cel mult numărabilă.

(ii) Reuniunea unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabilă.

(iii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

1.2 Logica propoziţională

Fie φ, $\psi \in Form$.
Pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$, notăm cu $e \vDash \varphi$ (şi spunem că e **satisface** φ sau e este **model** pentru φ) dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notăm cu $\vDash \varphi$ (şi spunem că φ este **tautologie**) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \vDash \varphi$. Spunem că φ este **satisfiabilă** dacă există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ şi **nesatisfiabilă** în caz contrar, când nu există $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că $e \nvDash \varphi$. Notăm $\varphi \vDash \psi$ (şi spunem că **din** φ **se deduce semantic** ψ sau că ψ **este consecinţă semantică a lui** φ) dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \varphi$ avem $e \vDash \psi$. Notăm cu $\varphi \sim \psi$ dacă pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $e \vDash \psi$, i.e. pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi)$.

2 Exerciţii

(S1.1)

(i) Demonstraţi că mulţimea $Expr$ a expresiilor logicii propoziţionale este numărabilă.

(ii) Demonstraţi că mulţimea $Form$ a formulelor logicii propoziţionale este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup Sim \cup \bigcup_{n\geq 2} Sim^n = A \cup B$, unde $A = \{\lambda\} \cup Sim$ şi $B = \bigcup_{n\geq 2} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din Corolarul 1.10, că Sim este numărabilă. Aplicând încă o dată Corolarul 1.10, rezultă că A este numărabilă.

Conform Propoziţiei 1.13.(iii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Este evident că $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ este numărabilă (se poate verifica imediat că $h : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{N},\ h(n) = n - 2$ este bijecţie). Putem aplica Propoziţia 1.13.(i) pentru a concluziona că B este cel mult numărabilă. Evident, B este nevidă.

Aplicând din nou Corolarul 1.10, obţinem că $Expr$ este numărabilă.

(ii) Cum $Form \subseteq Expr$, iar $Expr$ este numărabilă, rezultă că $Form$ este o mulţime cel mult numărabilă.

Cum $V \subseteq Form$, iar V este infinită, rezultă că $Form$ este numărabilă.

$\square$

(S1.2) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash (\varphi \rightarrow \psi)$;

(ii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a \in \{0, 1\}$,

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow a &= a, & a \rightarrow 1 &= 1, \\ 0 \rightarrow a &= 1, & a \rightarrow 0 &= \neg a, \\ 1 \wedge a &= a, & 0 \wedge a &= 0. \end{aligned}$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \mathbf{\to} e^+(\psi) = e^+(\varphi) \mathbf{\to} 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \land \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \land \psi \to \chi)$.
Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \land \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \mathbf{\land} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi), \end{aligned}$$

deci trebuie arătat că

$$e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) = (e^+(\varphi) \mathbf{\land} e^+(\psi)) \mathbf{\to} e^+(\chi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) &= 0 \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \mathbf{\land} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) &= 0 \mathbf{\land} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) = 0 \mathbf{\to} e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) &= 1 \mathbf{\to} (e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi)) = e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \mathbf{\land} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) &= 1 \mathbf{\land} e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi) = e^+(\psi) \mathbf{\to} e^+(\chi). \end{aligned}$$

$\square$

(S1.3) Să se găsească câte un model pentru fiecare dintre formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \land v_3 \land \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_2, \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \boldsymbol{\to} e^+(v_2) = e(v_0) \boldsymbol{\to} e(v_2) = 0 \boldsymbol{\to} 1 = 1,$$

deci $e \vDash v_0 \to v_2$.

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_4, \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \boldsymbol{\wedge} e^+(v_3) \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \boldsymbol{\wedge} e(v_3) \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} e(v_4) \\ &= 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \boldsymbol{\wedge} \boldsymbol{\neg} 0 \\ &= 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \boldsymbol{\wedge} 1 \\ &= 1, \end{aligned}$$

deci $e \vDash v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

$\square$

(S1.4) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ, $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă φ este tautologie.

Demonstraţie:

Avem:

$$\begin{aligned} \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă} &\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\ &\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu } e^+(\neg\varphi) = 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) \neq 1 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 0 \\ &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\ &\iff \varphi \text{ este tautologie.} \end{aligned}$$

$\square$

(S1.5) Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\models \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ şi $\models \psi$;

(ii) pentru orice φ, $\psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\models \varphi$ sau $\models \psi$.

Demonstraţie:

(i) Este adevărat. Fie φ, $\psi \in Form$. Avem:

$$\begin{aligned}
\models \varphi \wedge \psi \quad &\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\
&\qquad\quad\;\, \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\iff \quad \models \varphi \text{ şi} \models \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Vom lua $\varphi := v_0$ şi $\psi := \neg v_0$.

Luăm $e_0 : V \to \{0,1\}$ ca fiind funcţia constantă 0. Atunci $e_0^+(\varphi) = e_0^+(v_0) = e_0(v_0) = 0$. Deci $e_0 \not\models \varphi$. Prin urmare, $\not\models \varphi$.

Luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$ ca fiind funcţia constantă 1. Atunci $e_1^+(\psi) = e_1^+(\neg v_0) = \mathbf{\neg} e_1^+(v_0) = \mathbf{\neg} e_1(v_0) = \mathbf{\neg} 1 = 0$. Deci $e_1 \not\models \psi$. Prin urmare, $\not\models \psi$.

Fie acum $e : V \to \{0,1\}$ arbitrară. Atunci

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(v_0 \vee \neg v_0) = e^+(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} e^+(\neg v_0) = e^+(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} \mathbf{\neg} e^+(v_0) = e(v_0) \mathbin{\pmb{\vee}} \mathbf{\neg} e(v_0) = 1,$$

deci $e \models \varphi \vee \psi$. Prin urmare, avem că $\models \varphi \vee \psi$.

$\square$