SINTAXA

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Propoziția 1.37

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Propoziția 1.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \ \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Propoziția 1.45

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Teorema 1.46 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq Form$ *și* $\varphi, \psi \in Form$. *Atunci*

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Propoziția 1.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)).$$

Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

Propoziția 1.52

Pentru orice mulțime de formule Γ *și orice formule* φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi.$$

Propoziția 1.53

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \tag{46}$$

$$\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \tag{47}$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi \tag{48}$$

$$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \text{ ddacă } \{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi \tag{49}$$

$$\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi \tag{50}$$

(S7.1) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

(S7.2) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

(S7.3) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

(S7.4) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$