SEMINAR 6

Șiruri și serii de funcții

1. Să se studieze convergența simplă și uniformă a următoarelor șiruri de funcții:

a) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$

b) $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ $\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$
unde $0 < a < b$.

d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ $\forall x \in [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Rezolvare</u> a) <u>Convergența simplă</u>

Fie $x \in [0,1]$.

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n(1-x^n) =$

$$= \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1(1-1) = 0, & x = 1. \end{cases}$$

$A = \{x \in [0,1] \mid \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\} = [0,1]$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ $\forall x \in [0,1]$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

<u>Convergența uniformă</u>

Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculăm sau evaluăm $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n(1-x^n) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n)$$

$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1] \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n) \geq \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n \left[1-\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)^n\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} x^n(1-x^n) \geq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \geq$

$\geq \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)|\right) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)|\right) \neq 0 \Rightarrow f_n \underset{[0,1]}{\not\xrightarrow{u}} f.$

b) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$

Fie $x \in [0,\infty)$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = \begin{cases} x, & x \in (0,+\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$A = [0,+\infty)$

$f_n : A \to \mathbb{R}, f_n(x) = x \ \forall x \in A.$

$f_n \underset{[0,+\infty)}{\xrightarrow{s}} f.$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$

$\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{nx}{n+x} - \overset{n+x)}{x}\right| =$

$= \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \left|\frac{nx-nx-x^2}{n+x}\right| = \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \frac{x^2}{n+x}$

$x = n \in [0,+\infty) \Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \frac{x^2}{n+x} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)| \geq \frac{n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-$

$-f(x)|\right) \geq +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x)-f(x)|\right) \neq 0$

$\Rightarrow f_n \underset{[0,\infty)}{\not\xrightarrow{u}} f$

c) $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{nx}{n+x}$

Fie $x \in [a,b]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = x$

$A = [a,b]$

$f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = x\ \forall x \in [a,b]$

$f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

Fie $n \in \mathbb{N}$.

$\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{x^2}{n+x}$

$\frac{x^2}{n+x} \leq \frac{b^2}{n+x} \leq \frac{b^2}{n+a}\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} \frac{x^2}{n+x} \leq$

$\leq \frac{b^2}{n+a} \Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{b^2}{n+a}\ \forall n \in \mathbb{N}$

Avem că $0 \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{b^2}{n+a}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\underset{n\to\infty}{\searrow}\quad \downarrow \quad \underset{n\to\infty}{\swarrow}$

0

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$.

d) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}\ \forall x \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in [0,1]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$A = [0,1]$

$f : A \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

$f_n \xrightarrow[{[0,1]}]{s} f$

Observăm că f nu este continuă în $x_0=1$ și că f_n este continuă în $x_0=1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm corolarul teoremei lui Weierstrass pentru șiruri de funcții și obținem că $f_n \overset{u}{\underset{[0,1]}{\not\rightrightarrows}} f$

<u>Exercițiul 2</u> Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor de funcții:

a) $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}}$ $\forall x \in [0,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $\forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercițiul 3</u> Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

<u>Rezolvare</u> Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n(n+1)}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n(n+1)} \right| = \frac{|\sin nx|}{n(n+1)} \le \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{1}{n^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Notăm $a_n = \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă (1)

$|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Din (1) și (2), aplicând criteriul lui Weierstrass pentru șiruri de funcții, deducem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ este absolut și uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 4</u> Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=\cancel{1}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, dar nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

<u>Rezolvare</u> $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \mathbb{R}$.

Studiem absolut convergența seriei de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+x^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow$ seriile de numere reale

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ și $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură

Seria $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ este convergentă $\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ este divergentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} = \frac{1}{n+x^2} \cdot (-1)^n$$

Notăm $g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$h_n(x) = (-1)^n$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$f_n(x) = g_n(x) \cdot h_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se demonstrează ușor că $g_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$ (TEMĂ)

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+x^2} = \frac{-1}{(n+1+x^2)(n+x^2)} <$$

< 0 $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow g_{n+1} \leq g_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|h_1(x) + \dots + h_n(x)| = |(-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^n| =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Avem că $|h_1(x) + \dots + h_n(x)| \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Aplicăm criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții și deducem că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) h_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

<u>Exercițiul 5</u> Să se demonstreze că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$ și uniform convergentă pe orice mulțime compactă $K \subseteq \mathbb{R}$

<u>Rezolvare</u> Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Fie $x \in \mathbb{R}$.

Studiem absolut convergența seriei de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}$ este convergentă $\Rightarrow$ seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime compactă

Conform teoremei Heine-Borel, K este mulțime mărginită $\Rightarrow \exists R > 0$ a.î. $|x| \le R$ $\forall x \in K$.

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{R^n}{n!} \quad \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Notăm $a_n = \frac{R^n}{n!}$

Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^n}{n!}$ este convergentă (vezi explicația anterioară). ①

$|f_n(x)| \le a_n \ \forall x \in K, \forall n \in \mathbb{N}$ ②

Din ① și ②, aplicând criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcții, obținem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ este uniform convergentă pe K.

<u>Exercițiul 6</u> a) Să se arate că seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n^2}$ este uniform și absolut convergentă pe $\mathbb{R}$

b) Să se arate că seriile de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sunt absolut convergente pe $\mathbb{R}$ și uniform convergente pe orice mulțime compactă $K \subseteq \mathbb{R}$.