CURS 3
ELEMENTE DE TOPOLOGIE
TOPOLOGIA UNUI SPATIU METRIC

1) NOTIUNI ELEMENTARE DE TEORIA MULTIMILOR

Definitia 1. Fie $X \neq \varnothing$. Multimea $\wp(X) = .\{A|\, A \subseteq X\}$ se numeste multimea partilor lui X.

Observatie. $A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \wp(X)$

Definitia 2. a) Fie A, B doua multimi. Multimea $A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$ se numeste diferenta multimilor A si B.

b) Fie A, B doua multimi cu $A \subseteq B$.Multimea $B \backslash A = C_B A$ se numeste complementara multimii A in raport cu multimea B.

c) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Multimea $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X | \exists i \in I \; astfel\ incat\ x \in A_i\}$ se numeste reuniunea familiei de multimi $(A_i)_{i \in I}$..

d) Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Multimea $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X |\; x \in A_i \forall i \in I\}$ se numeste intersectia familiei de multimi $(A_i)_{i \in I}$.

Teorema 1. Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de multimi din $\wp(X)$. Sunt adevarate afirmatiile

$$C_X \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} C_X A_i$$

$$C_X \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} C_X A_i .$$

2) NOTIUNI GENERALE DESPRE SPATII TOPOLOGICE

Definitia 3. a) O familie de multimi $\tau \subseteq \wp(X)$ se numeste topologie pe X daca indeplineste urmatoarele conditii:

(i) $\varnothing, X \in \tau$

(ii) $G_1, G_2 \in \tau \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$

(iii) $G_i \in \tau \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$.

b) Se numeste spatiu topologic o multime nevida X pe care se defineste o topologie $\tau \subseteq \wp(X)$.

Notatie. (X, τ)

Exemple de spatii topologice.

1) $X \neq \varnothing$

$\tau = \wp(X)$ topologie pe X.

2) $X \neq \varnothing$

$\tau = \{\varnothing, X\}$ topologie pe X.

Definitia 4. Fie (X, τ) un spatiu topologic.

a) O multime $G \subseteq X$ se numeste multime deschisa relativ la topologia τ daca $G \in \tau$.

b) O multime $F \subseteq X$ se numeste multime inchisa relativ la topologia τ daca $C_X F \in \tau$.

c) O multime $V \subseteq X$ se numeste vecinatate a punctului $x_0 \in X$ daca $\exists G \in \tau$ astfel incat $x_0 \in G \subseteq V$.

Notatie. $V_\tau(x_0) = \{V \subseteq X | V \textit{ vecinatate a punctului } x_0\}$

Definitia 5. Fie (X, τ) un spatiu topologic.

a) O multime $K \subseteq X$ se numeste multime compacta relativ la topologia τ daca din orice acoperire cu multimi deschise a lui K se poate exrtrage o subacoperire finita.

$$K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i, G_i \in \tau \forall i \in I \Rightarrow \exists J \subseteq I \text{ submultime finita astfel incat } K \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$$

b) O multime $A \subseteq X$ se numeste multime neconexa relativ la topologia τ daca $\exists G_1, G_2 \in \tau$ astfel incat $G_1 \cap A \neq \varnothing, G_1 \cap A \neq \varnothing, (G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \varnothing$ si $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$.

c) O multime $A \subseteq X$ se numeste multime conexa relativ la topologia τ daca aceasta nu este multime neconexa.

Definitia 6. Fie (X, τ) un spatiu topologic, $A \subseteq X$ si $x_0 \in X$.

a) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct interior al multimii A daca $A \in V_\tau(x_0)$. Multimea $\overset{0}{A} = \{x_0 \in X | \, x_0 \textit{ punct interior al multimii } A\}$ se numeste interiorul multimii A.

b) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de aderenta al multimii A daca $V \cap A \neq \varnothing \forall V \in V_\tau(x_0)$. Multimea $\overline{A} = \{x_0 \in X | \, x_0 \textit{ punct de aderenta al multimii } A\}$ se numeste aderenta (inchiderea) multimii A.

c) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de acumulare al multimii A daca $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing \forall V \in V_\tau(x_0)$. Multimea $A' = \{x_0 \in X | \, x_0 \textit{ punct de acumulare al multimii } A\}$ se numeste multimea punctelor de acumulare ale multimii A.

d) Elementul $x_0 \in X$ se numeste punct de acumulare al multimii A daca $\exists V_0 \in V_\tau(x_0)$ astfel incat $V_0 \cap A = \{x_0\}$. Multimea $IzoA = \{x_0 \in X | \, x_0 \textit{ punct izolat al multimii } A\}$ se numeste multimea punctelor izolate ale multimii A.

e) Multimea $\overline{A} \cap \overline{C_X A}$ se numeste frontiera topologica a multimii A.

Notatie. $FrA = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$

Teorema 1. (Proprietatile multimilor inchise) In orice spatiu topologic (X, τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $\varnothing, X$ sunt multimi inchise relativ la topologia τ;

b) Daca $F_1 \subseteq X$ si $F_2 \subseteq X$ sunt multimi inchise, atunci $F_1 \cup F_2$ este multime inchisa;

c) Daca $(F_i)_{i \in I}$ este o familie de multimi inchise, atunci $\bigcap_{i \in I} F_i$ este multime inchisa.

Teorema 2. (proprietatile vecinatatilor unui punct) In orice spatiu topologic (X, τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Daca $V \in V_\tau(x_0)$ *si* $V \subseteq W$, atunci $W \in V_\tau(x_0)$;

b) Daca $V_1, V_2 \in V_\tau(x_0)$, atunci $V_1 \cap V_2 \in V_\tau(x_0)$ *si* $V_1 \cup V_2 \in V_\tau(x_0)$.

Teorema 3. In orice spatiu topologic (X, τ) sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) $\overline{C_X A} = C_X \overset{0}{A}\ \forall A \subseteq X$;

b) $\overset{0}{C_X A} = C_X \overline{A}\ \forall A \subseteq X$;

c) $FrA = \overline{A} \backslash \overset{0}{A}\ \forall A \subseteq X$.

Teorema 4. Fie (X, τ) un spatiu topologic si $A \subseteq X$.

a) Multimea $\overset{0}{A}$ are urmatoarele proprietati

$$\overset{0}{A} \subseteq A$$

$$G \in \tau, G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \overset{0}{A}$$

$$A \in \tau \Leftrightarrow A = \overset{0}{A}.$$

b) Multimea $\overline{A}$ are urmatoarele proprietati

$$A \subseteq \overline{A}$$

$$A \subseteq F, F \ multime\ inchisa \Rightarrow \overline{A} \subseteq F$$

$$A \text{ multime inchisa} \Leftrightarrow A = \overline{A}.$$

c) Multimea A' are urmatoarele proprietati

$$A' \subseteq \overline{A}$$

$$\overline{A} = A \cup A'$$

$$A \text{ multime inchisa} \Leftrightarrow A' \subseteq A.$$

d) Multimea $IzoA$ are urmatoarele proprietati

$$IzoA \subseteq A \backslash A'.$$

3) TOPOLOGIA UNUI SPATIU METRIC

Teorema 5. Orice spatiu metric (X, d) este spatiu toplogic.

Distantei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i se asociaza topologia $\tau_d \subseteq \wp(X)$ definita in felul urmator

$$\tau_d = \{\varnothing\} \cup \{G \subseteq X | G \neq \varnothing, \forall x \in G \exists r > 0 \ astfel\ incat\ B(x_0, r) \subseteq G\}.$$

Definitia 6. a) Topologia τ_d se numeste topologia asociata distantei d.
b) Multimea $G \subseteq (X,d)$ se numeste deschisa daca $G \in \tau_d$.
c) Multimea $F \subseteq (X,d)$ se numeste inchisa daca $C_X F \in \tau_d$.
Exemple.
1) (R,d)
$d(x,y) = |x-y| \forall x,y \in \mathbb{R}$
$\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}}$ topologia uzuala a lui $\mathbb{R}$.
2) $n \geq 2$
$(\mathbb{R}^n, d_2)$
$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_2\left((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,....,y_n)\right) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}$
$\tau_{d_2} \overset{not}{=} \tau_{\mathbb{R}^n}$ topologia uzuala a lui $\mathbb{R}^n$.
Teorema 6. Fie (X,d) un spatiu metric, $A \subseteq X, x_0 \in A$.
a) $V \in V_{\tau_d}(x_0) \Leftrightarrow \exists r > 0 \; astfel \; incat \; B(x_0,r) \subseteq V$.
b) $x_0 \in \overset{0}{A} \Leftrightarrow \exists r > 0 \; astfel \; incat \; B(x_0,r) \subseteq A$.
c) $x_0 \in \overline{A} \Leftrightarrow A \cap B(x_0,r) \neq \varnothing \forall r > 0$.
d) $x_0 \in A' \Leftrightarrow A \cap (B(x_0,r) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing \forall r > 0$.
e) $x_0 \in IzoA \Leftrightarrow \exists r > 0 \; astfel \; incat \; B(x_0,r) \cap A = \{x_0\}$.

Teorema 7. Fie (X,d) un spatiu metric. Multimea $K \subseteq (X,\tau_d)$ este compacta daca si numai daca $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sir din K exista $x_0 \in K$ si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsir ai sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.

Definitia 7. O multime $A \subseteq (X,d)$ se numeste multime marginita daca $\exists a \in X, r > 0$ astfel incat $A \subseteq B(a,r)$.

Teorema Heine-Borel. O multime $K \subseteq (\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}^n})$ este compacta daca si numai daca K este multime inchisa si marginita.

Definitia 8. Multimea nevida $A \subseteq \mathbb{R}$. se numeste interval daca $\forall x,y \in A$ cu $x \leq y$ si $\forall z \in \mathbb{R}$ cu $x \leq z \leq y$ avem ca $z \in A$.

Teorema 8. Multimea $A \subseteq \mathbb{R}$ este conexa daca si numai daca $A = \varnothing$ sau A este interval in $\mathbb{R}$.

..