CURSUL 4: RELAŢII DE ORDINE. LEGI DE COMPOZIŢIE

SAI

1. RELAŢII DE ORDINE

Este imediat faptul că relaţia uzuală de ordine pe $\mathbb{R}$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Aceasta ne sugerează

Definiţia 1. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de ordine** dacă ea este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Definiţia 2. Numim **mulţime ordonată** orice pereche alcătuită dintr-o mulţime nevidă şi o relaţie de ordine pe aceasta.

Vom folosi în cele ce urmează, în acord cu uzanţele, semnul $\leq$ (sau semne asemănătoare, ca de pildă $\preceq$) pentru relaţiile de ordine (chiar dacă este vorba de alte relaţii decât cea de ordine naturală de pe $\mathbb{R}$).

Observaţia 3. Relaţia de ordine uzuală pe $\mathbb{R}$ este, desigur, o relaţie de ordine conform definiţiei 1. Pe de altă parte, vom constata în cele ce urmează că în categoria relaţiilor de ordine se vor încadra şi alte relaţii frecvent întâlnite (iar statutul de relaţie de ordine al unora dintre acestea va fi la o primă vedere chiar surprinzător).

Exemplul 4. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de ordine.

Exemplul 5. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de incluziune pe $\mathcal{P}(A)$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 6. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 7. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ nu este o relaţie de ordine.

Exemplul 8. Relaţia definită pe $\mathbb{Z}$ prin $x < y$ nu este o relaţie de ordine.

Temă: Argumentaţi afirmaţiile de la exemplele 4, 5, 6, 7 şi 8!

Definiţia 9. Date fiind două mulţimi ordonate $(A, \leq)$ şi $(B, \preceq)$, o funcţie $f : A \to B$ se numeşte **morfism de mulţimi ordonate** dacă $\forall x, y \in A \;\; x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$. f se numeşte **antimorfism de mulţimi ordonate** dacă $\forall x, y \in A \;\; x \leq y \Rightarrow f(x) \succeq f(y)$.

Definiţia 10. Un (anti)morfism de mulţimi ordonate se numeşte **(anti)izomorfism de mulţimi ordonate** dacă este inversabil şi dacă inversul său este (anti)morfism de mulţimi ordonate.

Definiţia 11. Două mulţimi ordonate se numesc **(anti)izomorfe** dacă există un (anti)izomorfism între ele.

2. Relaţii înrudite cu relaţiile de ordine

Relaţiile de la exemplele 7 şi 8 sugerează următoarele definiţii:

Definiţia 12. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de preordine** (sau **de cuasiordine**) dacă ea este reflexivă şi tranzitivă.

Observaţia 13. Orice relaţie de ordine este şi relaţie de preordine.

Observaţia 14. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o relaţie de preordine.

Definiţia 15. Numim **mulţime preordonată** orice pereche alcătuită dintr-o mulţime nevidă şi o relaţie de preordine pe aceasta.

Definiţia 16. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de ordine strictă** dacă ea este ireflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Dată fiind o relaţie de preordine ρ pe mulţimea A, ei i se poate asocia o relaţie de ordine (definită pe o mulţime factor a lui A) în următorul mod:
Considerăm pe A relaţia $a\sigma b \overset{def}{\Leftrightarrow} a\rho b \wedge b\rho a$.
Este imediat faptul că σ este o relaţie de echivalenţă pe A.
Pe mulţimea A/σ definim relaţia $\hat{a}\tau\hat{b} \overset{def}{\Leftrightarrow} a\rho b$.
Se verifică (temă!) că τ este (corect definită şi) relaţie de ordine şi că proiecţia canonică $p : A \to A/\sigma$ are proprietatea $\forall a, b \in A$ $a\rho b \Rightarrow p(a)\tau p(b)$.

În ceea ce priveşte relaţiile de ordine strictă, avem:

Propoziţia 17. Dată fiind o mulţime nevidă A, există o bijecţie canonică între mulţimea relaţiilor de ordine pe A şi mulţimea relaţiilor de ordine strictă pe A.

Demonstraţie: Considerăm funcţia Φ ce asociază fiecărei relaţii de ordine ρ pe A relaţia $\rho \setminus \Delta_A$ şi funcţia Ψ ce asociază fiecărei relaţii de ordine strictă σ pe A relaţia $\sigma \cup \Delta_A$. Este imediat că Φ şi Ψ acţionează între mulţimile precizate în enunţ şi că sunt inverse una celeilalte. $\square$

3. Tipuri interesante de mulţimi ordonate

Fie $\leq$ o relaţie de ordine pe mulţimea A.

Definiţia 18. Numim **majorant** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in A$ cu proprietatea $\forall b \in B\ b \leq a$.

Definiţia 19. Submulţimea nevidă B a lui A se numeşte **majorată** dacă există în A cel puţin un majorant pentru B.

Definiţia 20. Numim **minorant** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in A$ cu proprietatea $\forall b \in B\ a \leq b$.

Definiţia 21. Submulţimea nevidă B a lui A se numeşte **minorată** dacă există în A cel puţin un minorant pentru B.

Definiţia 22. Numim **prim element** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in B$ cu proprietatea $\forall b \in B\ a \leq b$.

Observaţia 23. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită prim element. Dacă însă o submulţime a lui A admite prim element, antisimetria relaţiei $\leq$ arată că acesta este unic.

Definiţia 24. Numim **ultim element** al submulţimii nevide B a lui A orice element $a \in B$ cu proprietatea $\forall b \in B\ b \leq a$.

Observaţia 25. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită ultim element. Dacă însă o submulţime a lui A admite ultim element, antisimetria relaţiei $\leq$ arată că acesta este unic.

Definiţia 26. Numim **element minimal** al mulţimii ordonate A orice element a al lui A cu proprieatea $\forall b \in A\ \ b \leq a \Rightarrow b = a$.

Definiţia 27. Numim **element maximal** al mulţimii ordonate A orice element a al lui A cu proprieatea $\forall b \in A\ \ b \geq a \Rightarrow b = a$.

Definiţia 28. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **total ordonată** dacă $\forall a, b \in A$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$.

Definiţia 29. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **inductiv ordonată** dacă orice parte total ordonată a sa este majorată.

Definiţia 30. Spunem că mulţimea ordonată $(A, \leq)$ este **bine ordonată** dacă este total ordonată şi orice submulţime nevidă a lui A admite prim element.

Lema 31. (Lema lui Zorn) Orice mulţime nevidă inductiv ordonată admite cel puţin un element maximal.

Observaţia 32. L*ema lui Zorn este echivalentă atât cu Axioma alegerii cât şi cu Lema lui Zermelo:*

Axioma alegerii*: produsul cartezian al unei familii de mulţimi nevide este mulţime nevidă;*

Lema lui Zermelo*: Orice mulţime nevidă admite o relaţie de ordine în raport cu care aceasta devine bine ordonată.*

Definiţia 33. Numim **supremum** al submulţimii nevide şi majorate B a lui A cel mai mic majorant (din A) al lui B.

Observaţia 34. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită supremum. Dacă însă o submulţime a lui A admite supremum, acesta este unic conform observaţiei 23.

Vom nota cu $\sup B$ supremumul submulţimii B a lui A.

Definiţia 35. Numim **infimum** al submulţimii nevide şi minorate B a lui A cel mai mare minorant (din A) al lui B.

Observaţia 36. Este posibil ca anumite submulţimi ale lui A să nu admită infimum. Dacă însă o submulţime a lui A admite infimum, acesta este unic conform observaţiei 25.

Vom nota cu $\inf B$ infimumul submulţimii B a lui A.

Definiţia 37. Mulţimea ordonată $(A, \leq)$ se numeşte **latice** dacă pentru orice $a, b \in A$ există $\inf\{a, b\}$ şi $\sup\{a, b\}$.

Definiţia 38. Mulţimea ordonată $(A, \leq)$ se numeşte **latice completă** dacă pentru orice submulţime nevidă B a lui A există $\inf B$ şi $\sup B$.

4. Legi de compoziţie

Definiţia 39. Fie M o mulţime nevidă. Numim **lege de compoziţie binară** (sau **operaţie binară**) pe mulţimea M orice funcţie

$$\varphi : M \times M \to M.$$

Observaţia 40. Întrucât noi vom face referire aproape exclusiv la legi de compoziţie binare, le vom numi pe acestea, succint, legi de compoziţie (sau operaţii), subînţelegând epitetul „binare". În situaţia în care în cursurile viitoare vom dori să aducem în discuţie şi altfel de legi de compoziţie, vom menţiona acest lucru în mod explicit la momentul respectiv.

Notaţia pe care o folosim în mod uzual în acest context nu este $\varphi(a, b)$, ci $a\varphi b$. De asemenea, vom utiliza o gamă largă de simboluri pentru a desemna legile de compoziţie: $\star, \circ, \perp, \triangle$, etc. Foarte frecvent vom folosi simbolurile $+$ şi $\cdot$, chiar şi în situaţia în care legea de compoziţie desemnată nu este adunarea sau înmulţirea standard a vreuneia din mulţimile familiare.

Exemplul 41. Adunarea, scăderea şi înmulţirea pe $\mathbb{C}$ sunt legi de compoziţie.

Exemplul 42. Nu putem considera o lege de compoziţie pe $\mathbb{N}$ care să asocieze oricăror două elemente diferenţa lor.

Exemplul 43. Adunarea matricelor este lege de compoziţie pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Înmulţirea matricelor este lege de compoziţie pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exemplul 44. Dată fiind o lege de compoziţie $\star$ pe o mulţime M şi o mulţime nevidă A, pe mulţimea M^A putem defini o lege de compoziţie astfel: $(f \star g)(a) = f(a) \star g(a)$.

Exemplul 45. Dată fiind o mulţime nevidă A, compunerea uzuală a funcţiilor este o operaţie binară pe A^A.

Exemplul 46. Dată fiind o mulţime nevidă A, reuniunea şi intersecţia sunt legi de compoziţie pe $\mathcal{P}(A)$.

Exemplul 47. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_n$ a claselor de resturi modulo n sunt corect definite următoarele legi de compoziţie: $\widehat{a} + \widehat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a+b}$ şi $\widehat{a} \cdot \widehat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \cdot b}$. Pentru a vedea acest lucru, să remarcăm de pildă că dacă $\widehat{a} = \widehat{a'}$ şi $\widehat{b} = \widehat{b'}$ atunci $n|a' - a$ şi $n|b' - b$, deci $n|(a' - a)b' + a(b' - b) = a'b' - ab$, de unde $\widehat{a'b'} = \widehat{ab}$. Am justificat astfel corectitudinea definirii operaţiei „$\cdot$”. Lăsăm verificarea corectitudinii definirii operaţiei „$+$” în grija cititorului.

Definiţia 48. Operaţiile „$+$” şi „$\cdot$” introduse la exemplul 47 se numesc **adunarea modulo** n, respectiv **înmulţirea modulo** n.

5. Parte stabilă. Operaţie indusă

Definiţia 49. Fie $\star$ o lege de compoziţie pe o mulţime M, iar N o submulţime a lui M. Spunem că N este **parte stabilă a lui** M **în raport cu** $\star$ dacă $\quad \forall x, y \in N \quad x \star y \in N$.

Observaţia 50. Dacă $N \neq \emptyset$ este parte stabilă a lui M în raport cu $\star$, atunci $N \times N \to N$, $(x, y) \mapsto x \star y$ este o lege de compoziţie pe N.

Definiţia 51. Legea de compoziţie din observaţia 50 se numeşte **legea de compoziţie indusă de** $\star$ **pe** N.

Observaţia 52. Legea de compoziţie $\star$ pe mulţimea M induce o lege de compoziţie pe submulţimea nevidă N a lui M dacă şi numai dacă N este parte stabilă a lui M în raport cu $\star$.

Exemplul 53. Mulţimile $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$ sunt părţi stabile ale lui $\mathbb{C}$ în raport cu adunarea, scăderea şi înmulţirea. Prin urmare, adunarea, scăderea şi înmulţirea sunt legi de compoziţie pe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}$. Cu un argument similar, adunarea şi înmulţirea sunt legi de compoziţie pe $\mathbb{N}$.

6. ASOCIATIVITATE

Definiţia 54. Fie $\star$ o lege de compoziţie pe mulţimea M. Spunem că $\star$ este **asociativă** dacă

$$\forall x, y, z \in M \quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

Observaţia 55. Legile de compoziţie de la exemplele 41, 43, 45, 46, 47, 53 sunt asociative. Scăderea numerelor întregi (raţionale, reale, complexe) nu este asociativă. Dacă operaţia $\star$ este asociativă pe M, atunci operaţia din exemplul 44 este asociativă.

Temă: Justificaţi afirmaţiile de la observaţia 55!

Definiţia 56. Fie $\star$ o operaţie pe mulţimea M şi $x_1, x_2, \ldots \in M$. Dacă $\star$ este asociativă, iar $n \geq 3$, definim inductiv $x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_n$ astfel:

$$x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_n \overset{\text{def}}{=} (x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_{n-1}) \star x_n$$

Propoziţia 57. Fie $\star$ o lege de compoziţie asociativă pe mulţimea M, $x_1, x_2, \ldots \in M$ şi $m, n \in \mathbb{N}^*$. Atunci
$x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_{m+n} = (x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_m) \star (x_{m+1} \star x_{m+2} \star \ldots x_{m+n})$.

Observaţia 58. Dacă pe o mulţime M este dată o operaţie asociativă notată multiplicativ, $x \in M$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota cu x^n elementul $\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factori}}$. Relaţia din propoziţia 57 devine în aceste condiţii

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n.$$

Observaţia 59. Dacă pe o mulţime M este dată o operaţie asociativă notată aditiv, $x \in M$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota cu nx elementul $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ termeni}}$. Relaţia din propoziţia 57 devine în aceste condiţii

$$(m+n)x = mx + nx.$$

7. COMUTATIVITATE

Definiţia 60. Fie $\star$ o operaţie pe mulţimea M şi $x_1, x_2 \in M$. Spunem că x_1 şi x_2 **comută (în raport cu $\star$)** dacă $x_1 \star x_2 = x_2 \star x_1$.

Definiţia 61. Fie $\star$ o operaţie pe mulţimea M. Spunem că $\star$ este **comutativă** dacă

$$\forall x_1, x_2 \in M \quad x_1 \star x_2 = x_2 \star x_1.$$

Observaţia 62. Legea de compoziţie $\star$ dată pe mulţimea M este comutativă dacă şi numai dacă orice două elemente ale lui M comută în raport cu $\star$.

Observaţia 63. Legile de compoziţie de la exemplele 41, 46, 47, 53 sunt comutative. Adunarea pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este comutativă. Scăderea numerelor întregi (raţionale, reale, complexe) nu este comutativă. Înmulţirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nu este comutativă decât dacă $n = 1$. Compunerea pe M^M nu este comutativă decât dacă M are cel mult un element. Dacă operaţia $\star$ este comutativă pe M, atunci operaţia din exemplul 44 este comutativă.

Temă: Justificaţi afirmaţiile de la observaţia 63!

Propoziţia 64. Fie $\star$ o lege de compoziţie asociativă şi comutativă pe mulţimea M, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ şi σ o permutare a mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Atunci,

$$x_1 \star x_2 \star \ldots \star x_n = x_{\sigma(1)} \star x_{\sigma(2)} \star \ldots \star x_{\sigma(n)}.$$

8. ELEMENT NEUTRU

Definiţia 65. Fie $\star$ o lege de compoziţie pe mulţimea M.
Spunem că $e \in M$ este **element neutru la stânga** pentru $\star$ dacă

$$\forall x \in M \quad e \star x = x.$$

Spunem că $e \in M$ este **element neutru la dreapta** pentru $\star$ dacă

$$\forall x \in M \quad x \star e = x.$$

Spunem că $e \in M$ este **element neutru** pentru $\star$ dacă

$$\forall x \in M \quad e \star x = x \;\wedge\; x \star e = x.$$

Observaţia 66. $e \in M$ este element neutru pentru $\star$ dacă şi numai dacă el este atât element neutru la stânga cât şi element neutru la dreapta.

Propoziţia 67. Fie $\star$ o lege de compoziţie pe mulţimea M. Dacă $\star$ admite un element neutru la stânga şi un element neutru la dreapta, atunci acestea coincid.

Demonstraţie: Fie e elementul neutru la stânga şi f elementul neutru la dreapta pentru $\star$. Atunci $e = e \star f = f$. $\square$

Corolarul 68. Dacă o lege de compoziţie $\star$ admite atât element neutru la stânga cât şi element neutru la dreapta, atunci $\star$ admite element neutru.

Corolarul 69. Dacă o lege de compoziţie admite element neutru, acesta este unic.

Exemplul 70. 0 este element neutru pentru adunarea pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$.

Observaţia 71. Datorită situaţiei amintite în exemplul 70, pentru elementul neutru al unei legi de compoziţie notate aditiv se foloseşte frecvent notaţia 0, chiar dacă nu este vorba de numărul complex 0.

Exemplul 72. 1 este element neutru pentru înmulţirea pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$.

Observaţia 73. Datorită situaţiei amintite în exemplul 72, pentru elementul neutru al unei legi de compoziţie notate multiplicativ se foloseşte frecvent notaţia 1, chiar dacă nu este vorba de numărul complex 1.

Exemplul 74. Scăderea numerelor întregi (raţionale, reale, complexe) nu admite element neutru, dar îl are ca element neutru la dreapta pe 0.

Exemplul 75. Matricea cu toate elementele nule este element neutru pentru adunarea pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Vom nota această matrice cu $\mathbf{0}_{m,n}$.

Definiţia 76. Matricea $\mathbf{0}_{m,n}$ se numeşte **matricea nulă** de tip m, n.

Exemplul 77. Matricea cu 1 pe diagonala principală şi restul elementelor nule este element neutru pentru înmulţirea pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Vom nota această matrice cu I_n.

Definiţia 78. Matricea I_n se numeşte **matricea identică** (sau **matricea unitate**) de ordin n.

Exemplul 79. Dacă operaţia $\star$ are elementul neutru e, atunci funcţia $E : A \to M$, $E(a) = e$ este element neutru pentru operaţia de la exemplul 44.

Exemplul 80. Dată fiind o mulţime A, funcţia identică a lui A este element neutru pentru compunerea pe A^A.

Exemplul 81. Dată fiind o mulţime A, mulţimea vidă este element neutru pentru operaţia de reuniune de pe $\mathcal{P}(A)$.

Exemplul 82. Dată fiind o mulţime A, A este element neutru pentru operaţia de intersecţie de pe $\mathcal{P}(A)$.

Exemplul 83. $\widehat{0}$ este element neutru pentru adunarea modulo n.

Exemplul 84. $\widehat{1}$ este element neutru pentru înmulţirea modulo n.

Temă: Justificaţi afirmaţiile de la exemplele 74, 75, 77, 79-84!

9. SIMETRIZABILITATE

Definiţia 85. Fie $\star$ o lege de compoziţie cu element neutru (notat cu e) pe mulţimea M. Fie $x \in M$.
Spunem că $y \in M$ este **simetric la stânga** al lui x în raport cu $\star$ dacă $y \star x = e$.
Spunem că $y \in M$ este **simetric la dreapta** al lui x în raport cu $\star$ dacă $x \star y = e$.
Spunem că $y \in M$ este **simetric** al lui x în raport cu $\star$ dacă $y \star x = x \star y = e$.

Definiţia 86. În contextul din definiţia 85, x se numeşte **simetrizabil în raport cu** $\star$ dacă el admite simetric în raport cu $\star$.

Propoziţia 87. Fie $\star$ o lege de compoziţie asociativă şi cu element neutru e pe mulţimea M şi $x \in M$. Dacă x admite un simetric la stânga şi un simetric la dreapta, atunci acestea coincid.

Demonstraţie: Fie y un simetric la stânga pentru x şi z un simetric la dreapta pentru x. Atunci $y = y \star e = y \star (x \star z) = (y \star x) \star z = e \star z = z$. $\square$

Corolarul 88. Dacă elementul x admite atât simetric la stânga cât şi simetric la dreapta în raport cu legea asociativă $\star$ care are şi element neutru, atunci x este simetrizabil în raport cu $\star$.

Temă: Rămâne afirmaţia din corolarul 88 adevărată şi în situaţia în care legea $\star$ (admite element neutru, dar) nu este asociativă?

Corolarul 89. În condiţiile propoziţiei 87, dacă elementul x este simetrizabil în raport cu $\star$, atunci simetricul său este unic.

Definiţia 90. În condiţiile propoziţiei 87, unicul (conform corolarului 89) simetric al elementului simetrizabil x se numeşte **simetricul lui** x **în raport cu** $\star$.

Exemplul 91. Simetricul elementului $x \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) în raport cu adunarea este $-x$.

Observaţia 92. Datorită situaţiei semnalate în exemplul 91, pentru simetricul unui element x în raport cu o lege de compoziţie notată aditiv se foloseşte notaţia $-x$.

Exemplul 93. Simetricul elementului $x \in \mathbb{Q}^*$ ($\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$) în raport cu înmulţirea este x^{-1}.

Observaţia 94. Datorită situaţiei semnalate în exemplul 93, pentru simetricul unui element x în raport cu o lege de compoziţie notată multiplicativ se foloseşte notaţia x^{-1}.

Exemplul 95. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este simetrizabilă în raport cu înmulţirea dacă şi numai dacă ea este inversabilă. În caz că A este simetrizabilă, simetrica ei este chiar inversa ei.

Exemplul 96. O funcţie $f \in A^A$ este simetrizabilă în raport cu compunerea dacă şi numai dacă ea este inversabilă. În caz că f este simetrizabilă, simetrica ei este chiar inversa ei.

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.