Tutoriat 2

30.10.2021

Rezolvarea temei

1) $f(x)=x^2-4x+3$ nu e surjectivă; $f^{-1}((1,3))$; $f((1,3))$

SOL f fct. de gradul II (avem parabolă)

Putem calcula coordonatele vârfului: $V_f\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V_f=(2,-1)$

$ax^2+bx+c=0$

Deci $f(x)\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$

Luăm $y=-10$. Arătăm că $\nexists x\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=-10$

$x^2-4x+13=0$, $\Delta<0$ $\Rightarrow$ Ec. nu are sol. reale

Deci f nu e surjectivă

$f^{-1}((1,3)) = \{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in(1,3)\}$ $\quad 1<f(x)<3 \iff \begin{cases}1<x^2-4x+3\\ x^2-4x+3<3\end{cases} \iff \begin{cases} x^2-4x+2>0 \\ x^2-4x<0\end{cases}$

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{2}$

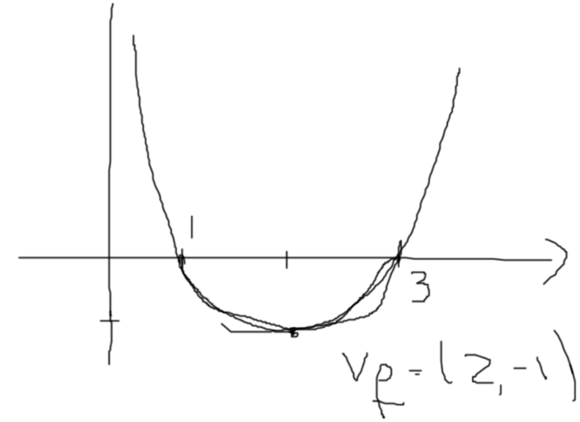
$x_{3,4}=0,4$

x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		4	
$0<x^2-4x+2$	+	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$0>x^2-4x$	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+

$(0, 2-\sqrt{2})$ $\quad$ $(2+\sqrt{2}, 4)$

Deci $f^{-1}((1,3)) = (0, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, 4)$

$f((1,3)) = ?$ $\quad f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$



Avem că $\left.\begin{array}{l} f(1) = f(3) = 0 \\ f(2) = -1 \ (\text{vârful}) \\ f \text{ cont} \end{array}\right| \Rightarrow f((1,3)) = [-1, 0)$

$\square$

---

2) $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^* \text{ a.î. } ab = u^2 cd$ $\quad \underline{\approx \text{ rel. de ech}}$

<u>Sol</u>: <u>Reflexivitate</u>: $\quad u = 1$ (sau -1) ✓

<u>Simetrie</u>: $(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{R}^* \text{ a.î. } ab = u^2 cd \ \big|\, : u^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow cd = \frac{1}{u^2} ab \quad \left(\frac{1}{u^2} \overset{not}{=} u'^2 \right)$

$\Leftrightarrow cd = u'^2 ab \Leftrightarrow (c,d) \approx (a,b)$ ✓

<u>Tranzitivitate</u>: ✓

$\left.\begin{array}{l} (a,b) \approx (c,d) \Rightarrow ab = u^2 cd \\ (c,d) \approx (m,n) \Rightarrow cd = v^2 mn \end{array}\right| \Rightarrow ab = \underbrace{u^2 v^2}_{(uv)^2} mn \Leftrightarrow (a,b) \approx (m,n)$

3) a) $\mathbb{N}$, $m \mid n \iff \exists k \in \mathbb{N}$ a.î. $n = km$

Reflexivă : DA $(k=1)$ ✓

Simetrie : $\underset{n}{10} = 2 \cdot \underset{m}{5} \iff 5 \mid 10$

✗

$5 = 10 \cdot p,\ p \in \mathbb{N}$ FALS $\Rightarrow 10 \nmid 5$

Antisimetrie : $m \mid n \Rightarrow n = km$

✓

$n \mid m \Rightarrow m = k'n$

$\Rightarrow m = kk'm \ (m \in \mathbb{N}^*)$

$1 = kk',\ k, k' \in \mathbb{N} \Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow m = n$

Dacă $m = 0$, nu ne interesează cazul

Obs : Divizibilitatea

$n = km \Rightarrow m \mid n$

$m = k'n \Rightarrow n \mid m$

$m, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow m = n$

Tranzitivitate : ca mai sus ✓

c) $x \rho y \iff |x| \le |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

Refl: Evidentă ✓

Simetrie: $2 \rho 5 \Rightarrow |2| \le |5| \not\Rightarrow |5| \le |2|$

✗

Deci $5 \not\rho 2$

Antisimetrie: $\left.\begin{array}{l} |x| \le |y| \\ |y| \le |x| \end{array}\right| \Rightarrow |x| = |y| \not\Rightarrow x = y$, $\Leftarrow$

✗

$\left.\begin{array}{l} -3 \rho 3 \\ 3 \rho -3 \end{array}\right| \Rightarrow |3| = |-3|$

$3 \neq -3$

Tranzitivitate: $\left.\begin{array}{l} |x| \le |y| \\ |y| \le |z| \end{array}\right| \Rightarrow |x| \le |z|$ ✓

✓

d) $m \rho n \iff m^2 + n^2 = 2$

Reflexivă: P.p. $3 \rho 3 \iff 2 \cdot 3^2 = 2$ ✗ (Fals) (Doar pt ↓)

Deci ρ nu e refl.

Simetrică: $m^2 + n^2 = n^2 + m^2 = 2$ ✓

$$\boxed{\rho = \{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}}$$

Tranzitivă: $m^2 + n^2 = 2$

$m, n \in \mathbb{Z}$

pe mulțimea asta Î, este tranzitivă

---

4) a) Evident f nu e injectivă: $f(0) = f(1) = f(2) = 0$

$\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $f(n) = y$ $\xrightarrow{y=0}$ $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$\xrightarrow{y \neq 0}$ $y = n - 5 \Rightarrow n = y + 5$

f surjectivă

b) Evident f nu e injectivă: $f(0) = \left[\frac{0}{2}\right] = 0$

$f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$\forall y \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $f(n) = y \Leftrightarrow \left[\frac{n}{2}\right] = y$ $\Big|_{n=2k} \Rightarrow y = k$ Deci f surj.

c) $f(n) = 3n + 2$ $\quad$ f inj: $f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow 3n_1 + 2 = 3n_2 + 2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$

f <u>nu</u> e surj: $f(n) \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$3n + 1 \neq 0$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \text{ par} \\ -\frac{x-1}{2}, & x \text{ impar} \end{cases}$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Inj: $f(0) = \frac{0}{2} = -\frac{1-1}{2} = f(1) \Rightarrow$ NU E :(

<u>Surj</u>: $\forall y$ . . . .

GATA TEMĂ

Efectiv teoremă

• Relația de echivalență indusă de o funcție

Fie $f: A \to B$ și definim pe A relația $\rho_f \overset{not}{=} \sim_f$ astfel:

$$a \sim_f b \iff f(a) = f(b)$$

$a, b \in A$

Ex: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$x \sim_f y \iff 3 + x^2 - 4x = y^2 - 4y + 3 \iff f(x) = f(y)$$

• Clase de echivalență

Ex: $m \sim n \iff n \mid m \quad m, n \in \mathbb{N}$

$m = 18 \quad n \in \{18, 9, 6, 3, 2, 1\}$ (exemplu intuitiv)

Fie $\sim$ rel. de ech pe A, $a \in A$. Atunci mulțimea:

$\hat{a} = \{b \in A \mid b \sim a\}$ s.n. CLASA DE ECHIVALENȚĂ A ELEMENTULUI a

• **Mulțimea factor** $\overset{\text{not}}{=}$ $A/_\sim$ = mulțimea tuturor claselor de echivalență

Fie $\sim$ rel. de ech. pe A

$$A/_\sim = \{\hat{a} \mid a \in A\}$$

• **Proiecția canonică**: $\pi : A \to A/_\sim$, $\pi(a) = \hat{a}$

π surjectivă

Proprietățile claselor de echivalență: $\sim$ rel. de ech. pe A, $a \in A$

1) $a \in \hat{a}$ (adică $\hat{a} \neq \emptyset$), $\forall a \in A$

2) $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \sim b$

3) Dacă $a, b \in A$, atunci $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$

4) $$A = \bigcup_{\hat{a} \in A/_\sim} \hat{a}$$

· Sistem de reprezentanți

Fie A mulțime, $\sim$ rel. de ech. pe A.

Numim familia $(a_i)_{i \in I} \in A$ sistem de reprezentanți dacă:
(I poate fi finită, numărabilă (≃ ℕ) sau nenumărabilă)

i) $\forall i, j,\ i \neq j,\ a_i \not\sim a_j$

ii) $\forall a \in A,\ \exists i \in I$ a.î. $a \sim a_i$

Obs: $f : \{a_i \mid i \in I\} \longrightarrow A/_\sim,\ f(a_i) = \hat{a}_i$

f bijectivă (surjectivă - avem
injectivă: $f(a_i) = f(a_j) \Leftrightarrow \hat{a}_i = \hat{a}_j \Leftrightarrow a_i \sim a_j$)

Exemple

1) Pe $\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, avem relația:

$$x \equiv y \pmod{m} \iff m \mid x-y$$

$$x \in \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{cu Rest}]{\text{Teorema Împărțirii}} \exists\, q_1 \in \mathbb{Z},\ r_1 \in \mathbb{N},\ 0 \leq r < m \text{ a.î.}$$

$$x = m \cdot q_1 + r_1 \quad , \quad r_1 \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

$$y \in \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{TÎR}} y = m q_2 + r_2 \quad , \quad r_2 \in \ldots$$

$$x - y = m(q_1 - q_2) + \boxed{r_1 - r_2} \Rightarrow m \mid x-y \iff m \mid r_1 - r_2 \quad \left.\begin{matrix} \\ m > r_1 - r_2 \end{matrix}\right| \Rightarrow r_1 = r_2$$

$$\boxed{\{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ sistem de reprezentanți}}$$

$$\{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{m-1}\}$$

$$\boxed{\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/_{\equiv} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{m-1}\}}$$

$r = 0 \Rightarrow \hat{0} = \{mq \mid q \in \mathbb{Z}\}$

$r = 1 \Rightarrow \hat{1} = \{mq + 1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$

$\ldots$

$r = m-1 \Rightarrow \widehat{m-1} = \{mq + m-1 \mid q \in \mathbb{Z}\}$

Alt sistem: $\boxed{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}}$

$m = 9$

$\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

2) $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

Vrem sistem de reprezentanți

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = [x] + \{x\}$

parte întreagă

parte fracționară

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z} \iff [x] + \{x\} - [y] - \{y\} \in \mathbb{Z}$

$\iff \underbrace{[x] - [y]}_{\in \mathbb{Z}} + \{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$

$\iff \{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z} \iff \underline{\{x\} = \{y\}}$

Deci sistem de reprezentanți : $[0,1)$ $\boxed{\{x\} \in [0,1)}$

(Foarte intuitiv scris)

$\widehat{0,13} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = 0,13 \}$

$\widehat{0,144(6)} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = 0,144(6) \}$

$m = 12$ sistem de reprez. : $\{0, 1, 2, \ldots, 10, 11\}$

$x \equiv y \pmod{12} \Leftrightarrow 12 \mid x - y$ (restul împărțirii lui ~~x, y~~ x, respectiv y la 12 este 0, 1, ...)

$15 \equiv 27 \pmod{12} \Rightarrow$

$$27 = 12 \cdot 2 + 3$$
$$15 = 12 \cdot 1 + 3$$

$$\underbrace{27 - 15}_{12} = \underbrace{12(2-1)}_{12} + \cancel{3 - 3} \Rightarrow 12 \mid 27 - 15$$

$15 \equiv 123$

$$123 = 12 \cdot 10 + 3$$
$$15 = 12 \cdot 1 + 3$$

$$\underbrace{123 - 15}_{108} = 12(10-1) + \cancel{3 - 3} \quad \vdots \, 12$$

(exemplificare pt $\mathbb{Z}_{12}$)

Ex: pe $\mathbb{R}$ $x \simeq y \iff x^2+4y = y^2+4x$ rel. de ech.

Sist. de reprez

$x^2+4y = y^2+4x \iff x^2-4x-(y^2-4y)=0$

$\Delta = 16+4(y^2-4y) = 4y^2-16y+16$

$= 4(y^2-4y+4) = (2y-4)^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm (2y-4)}{2} = 2 \pm (y-2) < \begin{matrix} y \\ 4-y \end{matrix}$

$\hat{x} = \{x, 4-x\}$ clasă de ech.

$\hat{0} = \{0, 4\}$ $\quad \hat{2} = \{2\}$

$\hat{7} = \{7, -3\}$

$x = 4-x$?

$x = 2$

Sistem de reprez: $[2, \infty)$

sau $(-\infty, 2]$

$\hat{x} = \{x, 4+x\}$ $\quad x = 4+x$ FALS

$\mathbb{R}$ = sist. de reprez.