UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 2

1. Să se arate că:

a) i) $\sup(x+A) = x+\sup(A)$; ii) $\inf(x+A) = x+\inf(A)$

Soluție: i) În primul rând trebuie să știm că $x+A = \{x+a \mid a\in A\}$

Fie $u=\sup(A)$. Dacă $a\in A$, atunci $a\leq u$. $(\forall) a\in A \Leftrightarrow a+x\leq u+x$. $(\forall) a\in A$. Deci $u+x$ este un majorant pentru $x+A$.

Vrem să arătăm că $u+x$ este cel mai mic majorant.

Fie w un alt majorant al lui $x+A$. Atunci $a+x\leq w$ sau $a\leq w-x$. $(\forall) a\in A$. Cum $u=\sup(A)$ avem că $u\leq w-x$ adică $u+x\leq w$

Prin urmare $u+x=\sup(x+A)$ sau $\sup(x+A) = x+\sup(A)$

ii) Fie $v=\inf(A)$. Din $a\in A$ avem $v\leq a$ $(\forall) a\in A$. De aici avem că $x+v\leq a+x$ $(\forall) a\in A$. Deci $x+v$ este un minorant pentru $x+A$.

Vrem $x+v$ - cel mai mare minorant.

Fie w - un alt minorant al mulțimii $x+A$. Atunci $w\leq x+a$ $(\forall) a\in A$ sau $w-x\leq a$ $(\forall) a\in A \Rightarrow w-x$ este un minorant al mulțimii A. Cum $v=\inf(A)$ avem că $w-x\leq v$ sau $w\leq x+v$. Deci $x+v=\inf(x+A)$

Drept urmare avem $\inf(x+A) = x+\inf(A)$.

b) $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Soluție: $-A = \{-a \mid a\in A\}$. Fie $m = -\sup(-A)$. Vrem $m=\inf(A)$

Fie $m_1 > m \Rightarrow -m_1 < -m = \sup(-A)$. Deci $(\exists)\, a'\in -A$ a.î. $-m_1 < a'$

Cum $a'\in -A \Rightarrow a' = -a_1$ cu $a_1\in A \Rightarrow a_1 = -a'\in A$

Deci $a' > -m_1 \Leftrightarrow -a_1 > -m_1 \Leftrightarrow a_1 < m_1$. Prin urmare $m=\inf(A)$.

și deci $\sup(-A) = -\inf(A)$

c). $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Soluție: $A+B = \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$.

i). $\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Fie $a+b \in A+B$ arbitrar; $a\in A$ și $b\in B$.

Dar $a \leq \sup(A)$ și $b \leq \sup(B)$. Prin urmare $a+b \leq \sup(A) + \sup(B)$

Deci $\sup(A)+\sup(B)$ este un majorant al mulțimii $A+B$ și ca atare

$\sup(A+B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

ii). $\sup(A)+\sup(B) \leq \sup(A+B)$

Fie $a\in A$ arbitrar. Atunci $(\forall) b\in B$, $a+b \leq \sup(A+B) \Rightarrow a \leq \sup(A+B) - b$

Cum a este arbitrar $\Rightarrow \sup(A+B)-b$ este un majorant pentru A și deci

$\sup(A) \leq \sup(A+B) - b$. De aici avem $b \leq \sup(A+B) - \sup(A)$ adică

$\sup(A+B) - \sup(A)$ este majorant pentru mulțimea B și deci:

$\sup(B) \leq \sup(A+B) - \sup(A)$ sau încă $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A+B)$.

Din i) și ii) rezultă concluzia.

d) $\inf(A) + \inf(B) = \inf(A+B)$.

Soluție: Din b) avem $\inf(A+B) = -\sup(-(A+B)) = -\sup((-A)+(-B)) =$

$= -\sup(-A) - \sup(-B) = \inf(A) + \inf(B)$

e). $\sup(\alpha A) = \begin{cases} \alpha \cdot \sup(A); & \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf(A); & \alpha \leq 0 \end{cases}$

Soluție: $\alpha \geq 0$. $\alpha A = \{\alpha \cdot a \mid a\in A\}$. Fie $t = \sup(\alpha A) \Rightarrow \alpha a \leq t$ $(\forall) a\in A$

$\Rightarrow a \leq \frac{t}{\alpha}$ $(\forall) a\in A$. Deci $\sup(A) \leq \frac{t}{\alpha}$ sau $\alpha \sup(A) \leq t = \sup(\alpha A)$. (1)

Fie $s = \sup(A) \Rightarrow a \leq s$ $(\forall) a\in A$ sau $\alpha a \leq \alpha s$ $(\forall) a\in A$. Deci avem:

$\sup(\alpha A) \leq \alpha \cdot s = \alpha \cdot \sup(A)$ (2). Din (1) și (2) avem $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$; $\alpha \geq 0$

Analog $\inf(\alpha A) = \alpha \inf(A)$; $\alpha \geq 0$ (*).

Dacă $\alpha \leq 0$. Avem: $\alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$; $\beta \geq 0$. Deci găsim că:

$$\sup(\alpha A) = \sup(-\beta A) \overset{(b)}{=} -\inf(\beta A) \overset{(*)}{=} -\beta \inf(A) = \alpha \inf(A)$$

2. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

<u>Soluţie</u>: Vom arăta că $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n}$ (similar se arată că $\underline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n}$).

Fără pierderea generalităţii, putem presupune că $\overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$ deci $(\forall) \varepsilon > 0$ $(\exists)\, n_\varepsilon^1 > 0$ cu proprietatea că $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon$ $(\forall) n \geq n_\varepsilon^1$

De aici deducem că: $\frac{x_n}{x_{n_\varepsilon}} < (L+\varepsilon)^{n-n_\varepsilon}$ şi deci $\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_\varepsilon}}\, (L+\varepsilon)^{-\frac{n_\varepsilon}{n}} \cdot (L+\varepsilon)$

Deoarece $\lim\limits_n \sqrt[n]{x_{n_\varepsilon}}\, (L+\varepsilon)^{-\frac{n_\varepsilon}{n}} = 1$, $(\exists)\, n_\varepsilon^2 > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon^2$

$\sqrt[n]{x_{n_\varepsilon}}\, (L+\varepsilon)^{-\frac{n_\varepsilon}{n}} < 1 + \varepsilon$

Atunci $\sqrt[n]{x_n} < (1+\varepsilon)(L+\varepsilon)$ $(\forall) n \geq n_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, deci $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq (1+\varepsilon)(L+\varepsilon)$ $(\forall) \varepsilon > 0$, de unde $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq L$, i.e. $\overline{\lim}\, \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}\, \frac{x_{n+1}}{x_n}$

<u>Observaţie</u>: • Dacă şirul $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)_n$ este convergent, atunci şi şirul $(\sqrt[n]{x_n})_n$ este convergent şi $\lim\limits_n \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$

• Dacă însă există $\lim\limits_n \sqrt[n]{x_n}$, nu rezultă că există obligatoriu $\lim\limits_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$

Exemplu:

Fie $a, b > 0$ și considerăm șirul $(x_n)_n$, $x_n = \begin{cases} a^p \cdot b^p & ; n = 2p \\ a^{p+1} \cdot b^p & ; n = 2p+1 \end{cases}$

Atunci $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{2p+1}}{x_{2p}} = \frac{a^{p+1} \cdot \cancel{b^p}}{\cancel{a^p} \cdot \cancel{b^p}} = a \xrightarrow{n} a$; $n = 2p$ și

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_{2p+2}}{x_{2p+1}} = \frac{x_{2(p+1)}}{x_{2p+1}} = \frac{\cancel{a^{p+1}} \cdot b^{p+1}}{\cancel{a^{p+1}} \cdot \cancel{b^p}} = b \longrightarrow b$; $n = 2p+1$.

Drept urmare nu există $\lim\limits_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$, dar $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$ dacă $n = 2p$ și $\sqrt[n]{x_n} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} \cdot b^{\frac{p}{2p+1}}$, deci $\lim\limits_n \sqrt[n]{x_n}$ există și are valoarea $\sqrt{ab}$.

3. Arătați că:

ⓐ $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$.

Soluție: Fie $l = \overline{\lim}(-x_n)$ atunci $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists)n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ $-x_n < l + \varepsilon$
$\Rightarrow -l - \varepsilon < x_n$ ceia ce înseamnă că $\underline{\lim}\, x_n = -l$.

Prin urmare: $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$

ⓑ $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

Soluție: Fie $a = \overline{\lim}\, x_n$; $b = \overline{\lim}\, y_n$.

Cum $a = \overline{\lim}\, x_n$ înseamnă că $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists) n_\varepsilon^1 > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon^1 \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$

$b = \overline{\lim}\, y_n$ rezultă $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists) n_\varepsilon^2 > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon^2 \Rightarrow y_n < b + \varepsilon$

De aici avem: $x_n + y_n < a + b + 2\varepsilon$ $(\forall) n \geq n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$.

Deci $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq a + b + 2\varepsilon$ $(\forall)\varepsilon > 0$, de unde $\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq a + b$ sau
$\overline{\lim}(x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$.

Altfel: $x_k \leq \sup\limits_{l \geq n} x_l$ $(\forall) k \geq n$; $y_k \leq \sup\limits_{l \geq n} x_l$ $(\forall) k \geq n$ $\Rightarrow$

$x_k + y_k \leq \sup\limits_{l \geq n} x_l + \sup\limits_{l \geq n} x_l$ $(\forall) k \geq n$

De aici avem:

$$\sup_{k\ge n}(x_k+y_k) \le \sup_{k\ge n} x_k + \sup_{k\ge n} x_k$$ și deci

$$\lim_{n} \sup_{k\ge n}(x_k+y_k) \le \lim_{n} \sup_{k\ge n} x_k + \lim_{n} \sup_{k\ge n} x_k$$ i.e.

$$\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

a) Altă rezolvare:

$$\overline{\lim}\,(-x_n) = \inf_n\Big(\sup_{k\ge n}(-x_k)\Big) = \inf_n\big(-\inf(x_n)\big) = -\sup_n\Big(\inf_{k\ge n} x_k\Big)$$
$$= -\underline{\lim}\, x_n.$$

c) $\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \ge \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.

Soluție: Avem $x_l+y_l \ge x_l + \inf_{k\ge n} y_k$ $(\forall)$ $l\ge n$. Deci

$$\sup_{l\ge n}(x_l+y_l) \ge \sup_{l\ge n}\Big(x_l + \big(\inf_{k\ge n} y_k\big)\Big) = \sup_{l\ge n} x_l + \inf_{k\ge n} y_k$$

deci $\lim_{n} \sup_{l\ge n}(x_l+y_l) \ge \lim_{n} \sup_{l\ge n} x_l + \lim_{n} \inf_{k\ge n} y_k$ i.e.

$$\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \ge \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n.$$

d) $\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \ge \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$.

e) $\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \le \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$. (Temă)

Arătați că inegalitățile pot fi stricte (luăm $x_n=y_n=(-1)^n$).

(4.) Calculați $\underline{\lim}\, x_n$ și $\overline{\lim}\, x_n$ pentru: șirul $(x_n)_n$.

$$x_n = 1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (\forall) n\in\mathbb{N}.$$

<u>Soluție:</u>

Dacă $n=2k$ avem $x_{2k} = 1+2(-1)^{2k+1}+3(-1)^{\frac{2k(2k+1)}{2}} = 1-2+3(-1)^{k(2k+1)}$
$= -1+3(-1)^{k(2k+1)}$; $k\in\mathbb{N}$

Dacă $k=2p$ avem $x_{4p} = -1+3(-1)^{2p(4p+1)} = 2.$

$k=2p+1$ avem $x_{4p+2} = -1+3(-1)^{(2p+1)(4p+3)} = -4.$

Dacă $n=2k+1$ avem $x_{2k+1} = 1+2(-1)^{2k+2}+3(-1)^{\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}} =$
$= 1+2+3(-1)^{(k+1)(2k+1)}$

$k=2p \quad x_{4p+1} = 3+3(-1)^{(2p+1)(4p+1)} = 0$

$k=2p+1 \quad x_{4p+3} = 3+3(-1)^{(2p+2)(4p+3)} = 6.$

Concluzie: $x_{4n}=2$; $x_{4n+1}=0$; $x_{4n+2}=-4$; $x_{4n+3}=6$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$

Deci $\sup\limits_{n\geq m} x_n = \sup\{-4,0,2,6\} = 6$ și $\inf\limits_{n\geq m} x_n = \inf\{-4,0,2,6\} = -4.$

de unde $\overline{\lim}\, x_n = \inf\limits_{m}\sup\limits_{n\geq m} x_n = 6$; $\underline{\lim}\, x_n = \sup\limits_{m}\inf\limits_{n\geq m} x_n = -4.$

(5) Să se determine

$$\inf\left\{\frac{m}{1+m+n} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\} \text{ și } \sup\left\{\frac{m}{1+m+n} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$$

<u>Soluție:</u> Deoarece $0\leq \frac{m}{1+m+n}$ $(\forall) m,n\in\mathbb{N}$, concluzionăm că 0 este un minorant pentru mulțimea $\left\{\frac{m}{1+m+n} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$.
Dacă prin absurd, $(\exists)\ x>0$ minorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{1+m+n} \,\middle|\, m,n\in\mathbb{N}\right\}$ deducem că $x<\frac{1}{n+2}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$ i.e $n<\frac{1}{x}-2$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$. Prin urmare mulțimea $\mathbb{N}$ este mărginită

Așadar $\inf\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}=0$

Deoarece $\frac{m}{1+m+n}\le 1$ $(\forall)m,n\in\mathbb{N}$ tragem concluzia că 1 este majorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$. Prin absurd, dacă $(\exists)$ $x<1$ majorant al mulțimii $\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}$ deducem că $\frac{n}{n+2}<x$ $(\forall)n\in\mathbb{N}$ i.e. $n<\frac{2x}{1-x}$ $(\forall)n\in\mathbb{N}$. Prin urmare mulțimea $\mathbb{N}$ este mărginită. Absurd

Așadar $\sup\left\{\frac{m}{1+m+n} \mid m,n\in\mathbb{N}\right\}=1$.

(6) Să se arate că inegalitatea $\inf(A)\le\inf(B)\le\sup(B)\le\sup(A)$ este valabilă $(\forall)$ $\emptyset\ne B\subseteq A\subseteq\mathbb{R}$, A - mărginită

<u>Soluție:</u>

Deoarece $x\le\sup(A)$ $(\forall)x\in A$ și $B\subseteq A$. Deducem că $\sup(A)$ este majorant al mulțimii B.

Cum $\sup(B)$ este cel mai mic majorant $\Rightarrow \sup(B)\le\sup(A)$

Similar se arată că $\inf(A)\le\inf(B)$

(7) Să se arate că dacă A și B sunt submulțimi mărginite ale lui $\mathbb{R}$ atunci:

$$\min\{\inf(A);\inf(B)\}=\inf(A\cup B)\le\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A);\sup(B)\}$$

<u>Soluție:</u> $A\subseteq A\cup B \Rightarrow \sup(A)\le\sup(A\cup B)$

$B\subseteq A\cup B \Rightarrow \sup(B)\le\sup(A\cup B)$

Deci $\max\{\sup(A);\sup(B)\}\le\sup(A\cup B)$

Pp prin absurd. $\max\{sup(A); sup(B)\} \leq sup(A \cup B)$.
Atunci cum $sup(A\cup B)$ este cel mai mic majorant al mulțimii $A\cup B$ deducem că $\max\{sup(A), sup(B)\}$ nu este majorant al mulțimii $A\cup B$. Deci $(\exists!)\, x_0 \in A\cup B$ a.î. $\max\{sup(A); sup(B)\} < x_0$
Fără pierderea generalității pp. că $x_0 \in A$. Acest lucru ne conduce la contradicția:

$$x_0 \leq sup(A) \leq \max\{sup(A), sup(B)\} < x_0$$

Așadar. $sup(A\cup B) = \max\{sup(A), sup(B)\}$.
Analog. $\min\{\inf(A); \inf(B)\} = \inf(A\cup B)$

(8) Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale a.î. $x_{m+n} \le x_m + x_n$ $(\forall)\ m, n \ge 1$.

Să se arate că: $\lim\limits_{n} \frac{x_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$

Soluţie:

Notăm $x = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$. Dacă $x > -\infty$, atunci $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)\ m\in\mathbb{N}^*$ a.î.

$\frac{x_m}{m} < x + \varepsilon$

Pentru $n > m$, avem evident $n = m\cdot q + r$, unde $0 \le r \le m-1$, $r\in\mathbb{N}$

Atunci $x_n \le q\cdot x_m + x_r$ sau $\frac{x_n}{n} \le \frac{x_m}{m} \cdot \frac{q\,m}{mq + r} + \frac{x_r}{n}$

Drept urmare: $x \le \frac{x_n}{n} \le (x+\varepsilon)\cdot \frac{q\cdot m}{m\cdot q + r} + \frac{M}{n}$ $(\forall)\ n > m$, unde

$M = \max\{x_0, \dots, x_{m-1}\}$

Deoarece $\lim\limits_{n} \frac{M}{n} = 0$ şi $\lim\limits_{n} (x+\varepsilon) \frac{q\cdot m}{q\cdot m + r} = x + \varepsilon \Rightarrow (\exists)\ n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ a.î.

$(\forall)\ n \ge n_0$ $\frac{M}{n} < \varepsilon$ şi $(\forall)\ n \ge n_1$, $(x+\varepsilon)\frac{q\cdot m}{q\cdot m + r} < x + 2\varepsilon$

Atunci pentru orice $n > \max\{n_0, n_1, m\}$, $n\in\mathbb{N}$ avem

$x \le \frac{x_n}{n} \le x + 3\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n} \frac{x_n}{n} = x = \inf\limits_{n} \frac{x_n}{n}$

Pentru $x = -\infty$ rezultatul se stabileşte asemănător.

Spații metrice

1.) $(\mathbb{R}, d)$, unde $d(x,y) = |x-y|$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{R}$ este spațiu metric ($\mathbb{R}$, împreună cu distanța uzuală este spațiu metric). Exercițiu.

2.) Fie A o mulțime oarecare nevidă și $\mathcal{B}(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f - \text{mărginită}\ A\}$.
Atunci $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in A} |f(x) - g(x)|$, $(\forall)\ f,g \in \mathcal{B}(A)$ este o metrică pe $\mathcal{B}(A)$

Soluție:

$d_\infty : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \longrightarrow [0,\infty)$; $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in A} |f(x) - g(x)|$ $(\forall)\ f,g \in \mathcal{B}(A)$.

$d_1)$ $(\forall)\ f,g \in \mathcal{B}(A)$; $d_\infty(f,g) \geq 0$ și $d_\infty(f,g) = 0 \iff f = g$ (pe A).

$d_2)$ Evident $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$ $(\forall)\ f,g \in \mathcal{B}(A)$

$d_3)$ $(\forall)\ f,g,h \in \mathcal{B}(A)$, $(\forall)\ x \in A$:

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in A} |g(x) - h(x)|$$
$$= d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$

Trecând la supremum în membrul stâng, avem:

$$\sup_{x\in A} |f(x) - h(x)| = d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h).$$

3.) Fie $a,b \in \mathbb{R}$ cu $a<b$ și fie $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$.
$d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$. Atunci $(C([a,b]), d_\infty)$ spațiu metric.
(Exercițiu - Temă).

4.) Mai general, dacă X este un spațiu metric compact, atunci mulțimea funcțiilor continue $C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}$ este spațiu metric cu distanța $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. (Exercițiu - temă)

Indicație: La exercițiile ③ și ④ folosim faptul că orice funcție $f: K \to \mathbb{R}$ continuă, unde K este mulțime compactă, este mărginită și își atinge marginile (f este chiar uniform continuă).

⑤ Fie X - o mulțime oarecare; $X \neq \emptyset$. Funcția $d: X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ este metrică pe X, numită metrica discretă.

Soluție: $d_1)$ $(\forall) x, y \in X$; $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

$d_2)$ $d(x,y) = d(y,x)$; $(\forall) x, y \in X$

$d_3)$ $(\forall) x, y, z \in X$,

i) dacă $x \neq y \neq z \neq x$, atunci $d(x,z) = 1 < d(x,y) + d(y,z) = 2$

ii) dacă $x = z \neq y$ atunci $d(x,z) = 0 < d(x,y) + d(y,z) = 2$

iii) dacă $x \neq y = z$ atunci $d(x,z) = 1 = d(x,y) + d(y,z) = 1$.

iv) dacă $x = y \neq z$, atunci $d(x,z) = 1 = d(x,y) + d(y,z) = 1$.

v) dacă $x = y = z$, atunci $d(x,z) = 0 = d(x,y) + d(y,z)$.

⑥ Fie $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$.

a) Să se demonstreze că $d_2(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ este distanță pe mulțimea funcțiilor continue $C([a,b])$ (Temă).

(Folosim: Dacă $h: [a,b] \to \mathbb{R}$; h-continuă $h \geq 0$ și dacă $\int_a^b h(t) dt = 0 \Rightarrow h = 0$).

b) ~~Fie~~ Să se demonstreze că orice șir $(f_n)_n$; $f_n \in C([a,b])$ convergent în raport cu distanța d_∞ este convergent și în raport cu distanța d_2 dar reciproca este falsă.

Soluție: b). Fie $f_n, f \in C([a,b])$ a.î. $d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$ (sau altfel scris $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$).

Atunci

$$d_2(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \leq (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= (b-a) \cdot d_\infty(f_n, f) \longrightarrow 0$$

Pentru a arăta că reciproca este falsă, luăm șirul $(f_n)_n$

$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Atunci $f_n \xrightarrow{d_2} 0$ (i.e $d_2(f_n, 0) \longrightarrow 0$).

dar nu converge în raport cu d_∞

(7) Să se demonstreze că aplicația $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$.

a) $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ $(\forall) x,y \in \mathbb{R}$ este distanță pe $\mathbb{R}$.

Soluție. b) Spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$ nu este complet.

a). Funcția $x \longrightarrow \operatorname{arctg} x$ este injectivă, deci $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

celelalte proprietăți se verifică ușor.

b). Șirul $x_n = n$ este șir Cauchy în raport cu distanța d.

$$d(x_n, x_m) = |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} m| = \left|\operatorname{arctg}\left(\frac{n-m}{1+n\cdot m}\right)\right| \longrightarrow 0 \text{ dc } n,m \to \infty$$

Pe de altă parte. Presupunând prin absurd, că șirul $(x_n)_n$ este convergent la $a \in \mathbb{R}$, atunci $d(x_n, a) \longrightarrow 0$ (așa ar trebui), însă:

$$d(x_n, a) = |\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg} a| = \left|\operatorname{arctg} \frac{n-a}{1+na}\right| \longrightarrow \left|\operatorname{arctg}\frac{1}{a}\right| \neq 0$$

$(\forall) a \in \mathbb{R}$ $\not\!\!\infty$

(8) Să se caracterizeze șirurile convergente și șirurile Cauchy într-un spațiu metric discret.

Să se demonstreze că orice spațiu metric discret este complet.

Soluție:

Fie (X, d) un spațiu metric discret (vezi problema 5 spații metrice). și fie $(x_n)_n \subseteq X$. Fie $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \in (0, 1)$. Dacă $x_n \longrightarrow a$ atunci $(\exists) n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ $d(x_n, a) < \varepsilon < 1$. Deci $d(x_n, a) = 0$ $(\forall) n \geq n_\varepsilon$, rezultă că șirul $(x_n)_n$ constant (începând de la un rang încolo).

(Analog se tratează și cazul șirului Cauchy).

(9) Pe mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ considerăm distanța uzuală (indusă din $\mathbb{R}$). $d(x, y) = |x - y|$.

Să se arate că spațiul metric $(\mathbb{Q}, d)$ nu este complet.

Soluție:

Considerăm șirul de numere raționale $(x_n)_n$; $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Se știe că $x_n \longrightarrow e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Rezultă că $(x_n)_n$ este șir Cauchy în $\mathbb{R}$. deci și în $\mathbb{Q}$, dacă $(x_n)_n$ este convergent în $\mathbb{Q}$, atunci în $\mathbb{R}$ ar avea două limite ceia ce conduce evident la ∦o.