Examen scris (restanţă/mărire)
Structuri Algebrice în Informatică
01/09/2022

$a = ...,$ $b = ...,$

unde

(1) a este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun numele vostru de familie. (de exemplu, dacă numele de familie este Popescu-Simion atunci $a = 7$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Popescu) şi 6 (nr. de litere al cuvântului Simion); dacă numele de familie este Moisescu atunci $a = 8$)

(2) b este egal cu maximul dintre numerele de litere ale cuvintelor care compun prenumele vostru. (de exemplu, dacă prenumele este Andreea-Beatrice-Luminiţa atunci $b = 8$, maximul dintre 7 (nr. de litere al cuvântului Andreea) şi 8 (nr. de litere atât al cuvântului Beatrice cât şi al cuvântului Luminiţa).)

Problema	Punctaj	Total
1	1	
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	1	
9	1	
10	1	
Total	10	

Justificaţi toate răspunsurile!

1. Determinaţi a şi b.

2. Determinaţi numărul de permutări impare, dacă există, de ordin $a-1$ din grupul de permutări S_{b+1}.

3. Se consideră ciclul de lungime $b+1$, $\sigma = (a, \dots, a+b)$ din S_{a+b}. Determinaţi numărul permutărilor $\tau \in S_{a+b}$, dacă există, astfel încât $\tau^5 = \sigma$.

4. Calculaţi $b^{(a+b)^{a^a}} \pmod{37}$.

5. Se consideră mulţimea de numere naturale $A = \{x, \dots, a+b+2\}$, unde x este numărul natural egal cu minimul dintre a şi b. Determinaţi o relaţie de echivalenţă ρ pe mulţimea A astfel încât mulţimea factor A/ρ să aibă exact 5 clase de echivalenţă diferite iar clasa de echivalenţă a lui a să conţină doar numerele a şi b. (Precizare: dacă $a = b$ atunci clasa de echivalenţă a lui a va fi formată doar din elementul a, iar dacă $a \neq b$ atunci clasa de echivalenţă a lui a va fi $\{a, b\}$.)

6. Fie H subgrupul ciclic al lui $(G, +) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, generat de elementul $(3a, 3b)$. Este grupul factor G/H ciclic?

7. Notăm cu X_a mulţimea tuturor numerelor naturale mai mari sau egale decât a, i.e. $X_a = \{x \in \mathbb{N} | x \geq a\}$ şi similar construim mulţimile X_b şi X_{a+b}. Daţi câte un exemplu, dacă există, sau justificaţi de ce nu există în caz contrar, de:
   - Funcţie injectivă, care nu este surjectivă, $f_{a,b} : X_a \times X_b \mapsto X_{a+b}$.
   - Funcţie surjectivă, care nu este injectivă, $g_{a,b} : X_a \times X_b \mapsto X_{a+b}$.
   - Funcţie bijectivă $h_{a,b} : X_a \times X_b \mapsto X_{a+b} \times X_{a+b}$.

8. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definită astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 2, & \text{dacă } \ x \leq -2, \\ -4x - 3, & \text{dacă } \ x \in (-2, 1), \\ -x^2 + 4x - 9, & \text{dacă } \ x \geq 1. \end{cases}$$

   Decideţi dacă restricţia funcţiei f pe intervalul $(-b+6, a+6]$ este injectivă. Calculaţi $f^{-1}((-a, b])$.

9. Fie inelul $\mathbb{Z}[X]$ şi numerele întregi $c = a+b$, $d = ab + b^2 + 1$. Considerăm I, idealul lui $\mathbb{Z}[X]$, generat de c şi dX. Este adevărat că polinomul $X^3 - 4X + 6 \in I$? Este inelul factor $\mathbb{Z}[X]/I$ finit? Dacă da, calculaţi-i numărul de elemente.

10. Determinaţi toate numerele întregi x, dacă există, care au proprietatea că $(b-1)x \equiv a \pmod{b}$, $bx \equiv a - 1 \pmod{b+1}$ şi $bx \equiv a + 3 \pmod{2b+1}$.