Seminar 10

15.12.2020

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$

1) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții.
2) Aflați $\operatorname{sgn}(\sigma)$ și calculați σ^{2020}.
3) Det.' toate permutările τ din S_9 a.î. $\tau^3 = \sigma$.
4) Fie $\rho \in S_9$ cu $\operatorname{ord}(\rho) = 9$. Poate fi ρ permutare pară?

---

1) $\sigma = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5) = (1\,4)(4\,2)(2\,9)(9\,6)(3\,7)(7\,8)(8\,5)$

2) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((1\,4\,2\,9\,6))\operatorname{sgn}((3\,7\,8\,5)) = (-1)^4 \cdot (-1)^3 = (-1)^7 = -1 \Rightarrow$

σ e permutare impară

$\operatorname{ord}(\sigma) = \text{cmmmc}(5,4) = 20 \Rightarrow \sigma^{20} = e \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma^{2020} = (\sigma^{20})^{101} = e.$

4) $\operatorname{ord}(\rho) = 9$

$\rho = c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ $\quad c_{i_j} \to$ ciclu de lungime i_j $\quad i_1 + \ldots + i_k = 9$

$\Rightarrow 3^2 = 9 = \text{cmmmc}(i_1, i_2, \ldots, i_k) \Rightarrow (\exists)\, j$ a.î. $i_j = 9$

$\Rightarrow k = 1$ și ρ este ciclu de lungime 9.

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\rho) = (-1)^{9-1} = 1 \Rightarrow \rho$ este permutare pară.

3) $\sigma = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5)$ Determinim $\tau \in S_9$ a.î. $\tau^3 = \sigma$!

Presupunem că există $\tau \in S_9$ a.î. $\tau^3 = \sigma$. Fie $\tau = c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncți ; $i_1 + \dots + i_k = 9$; c_{i_j} - ciclu de lungime i_j ($1 \le i_1, \dots, i_k \le 9$; $1 \le k < 9$).

$$\tau^3 = c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \dots \cdot c_{i_k}^3$$

c_ℓ ciclu de lungime ℓ

$c_\ell^3 \xrightarrow{3 \mid \ell} c_\ell^3 =$ produs de 3 cicli disjuncți de lungime $\ell/3$

$c_\ell^3 \xrightarrow{3 \nmid \ell} c_\ell^3 =$ ciclu de lungime ℓ.

Deoarece $\tau^3 = \sigma = (1\,4\,2\,9\,6)(3\,7\,8\,5) \xRightarrow[\text{desc. în produs de cicli disjuncți}]{\text{unicitatea}} 3 \nmid i_j\ (\forall)\ j$ și în plus $\boxed{k=2}$ și pot pp. că $i_1 = 5$ și $i_2 = 4$

$$\tau^3 = c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \dots \cdot c_{i_k}^3$$

Deci $\tau = c_5 \cdot c_4$, c_5, c_4 cicli disjuncți.

$\tau^3 = c_5^3 \cdot c_4^3$ și $c_5^3 = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)$

$c_4^3 = (3\ 7\ 8\ 5)$

Reamintesc că $\rho = (i_1\, i_2 \dots i_m)$ este un ciclu de lungime m atunci ρ^k este permutarea din S_n care:

$$\begin{aligned} i_1 &\longmapsto i_{k+1} \\ i_2 &\longmapsto i_{k+2} \\ &\vdots \\ i_m &\longmapsto i_{k+m} \\ j &\longmapsto j \quad (\forall)\, j \notin \{i_1, \dots, i_m\} \end{aligned}$$

(pt $k+j > m$ se ia $(k+j)\%m$)

$c_5 = (i_1\, i_2\, i_3\, i_4\, i_5)$

$(c_5^3)^2 = (1\,4\,2\,9\,6)^2 = (1\,2\,6\,4\,9)$

$c_5^6 = c_5$

$c_5^3 = (1\,4\,2\,9\,6)$

$$\begin{aligned} i_1 &\longmapsto i_4 \\ i_2 &\longmapsto i_5 \\ i_3 &\longmapsto i_1 \\ i_4 &\longmapsto i_2 \\ i_5 &\longmapsto i_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ c_5 poate fi doar $(1\,2\,6\,4\,9)$

$c_4 = (j_1\, j_2\, j_3\, j_4)$

$c_4^3 = (3\,7\,8\,5)$

$\Rightarrow$ c_4 poate fi doar $(3\,5\,8\,7) = (5\,8\,7\,3) = (8\,7\,3\,5) = (7\,3\,5\,8)$

$\boxed{\text{Exc 2}}$ Fie $\sigma = (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8) \in S_8$. Rez. ec. $\tau^2 = \sigma$ în S_8.

$\tau_1 = (1\,3\,2\,4)(5\,7\,6\,8)$; $\tau_2 = (1\,5\,2\,6)(3\,7\,4\,8)$ $\quad \tau_1^2 = \tau_2^2 = \sigma$ şi $\tau_1 \neq \tau_2$

Deci, ecuația $\tau^3=\sigma=(1\,4\,2\,9\,6)(3\,7\,8\,5)$ are o singură soluție $\tau=(1\,2\,6\,4\,9)(3\,5\,8\,7)$ în S_9.

<u>Exc 2</u> (continuare) Observăm că ecuația $\tau^2=\sigma$ are cel puțin 2 soluții în S_8.

$\underline{i_1+i_2+\dots+i_k=8}$

Fie $\tau=c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}$ desc. în produs de cicli disjuncți

$\tau^2=c_{i_1}^2\,c_{i_2}^2\cdots c_{i_k}^2 \overset{(*)}{=} (1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8) \leftarrow$ 4 cicli disjuncți de lungime 2

c_ℓ^2 $\overset{2\mid\ell}{=}$ produs de 2 cicli disjuncți de lungime $\ell/2$

c_ℓ^2 $\overset{2\nmid\ell}{=}$ ciclu de lungime ℓ ($\neq 2$, impar)

c_ℓ ciclu de lungime ℓ

Dim (*) $\Rightarrow$ $i_j \,\vdots\, 2$ $(\forall)\, j$; și $i_j/2=2$ $(\forall)\, j$ ($i_j=4$ $(\forall)\, j$) $\Rightarrow$ $\underline{k=2}$, $\underline{i_1=i_2=4}$

Deci $\tau=c_{i_1}c_{i_2}$ cicli disjuncți de <u>lungime 4</u>

$c_{i_1}=(\ell_1\,\ell_2\,\ell_3\,\ell_4)$

$c_{i_1}^2=(\ell_1\,\ell_3)(\ell_2\,\ell_4)$

$c_{i_2}=(j_1\,j_2\,j_3\,j_4)$ $\quad c_{i_2}^2=(j_1\,j_3)(j_2\,j_4)$

Dim (*) $\Rightarrow \{(\ell_1\ell_3),(\ell_2\ell_4),(j_1j_3),(j_2j_4)\}=\{(1\,2),(3\,4),(5\,6),(7\,8)\}$.

$\tau_1=(1\,3\,2\,4)(5\,7\,6\,8)$ $\quad \tau_2=(1\,5\,2\,6)(3\,7\,4\,8)$ $\quad \tau_3=(1\,7\,2\,8)(3\,5\,4\,6)$

$\tau_4 = (1\,3\,2\,4)(6\,7\,5\,8)$ $\quad$ $\tau_4^2 = (1\,2)(3\,4)\underset{\underset{(5\,6)}{\parallel}}{(6\,5)}(7\,8)$ $\quad$ $(6\,7\,5\,8)$ $\begin{pmatrix}5&6&7&8\\8&7&5&6\end{pmatrix}$

$\tau_1 = (1\,3\,2\,4)(5\,7\,6\,8)$ $\quad$ $(5\,7\,6\,8)$ $\begin{pmatrix}5&6&7&8\\7&8&6&5\end{pmatrix}$

$$(l_1\,l_2\,l_3\,l_4)^2 = (1\,2)(3\,4) \quad (*)$$

$$(l_1\,l_2\,l_3\,l_4)^2 = (l_1\,l_3)(l_2\,l_4)$$

$(1\,2)=(2\,1)$

$(3\,4)=(4\,3)$

$\Rightarrow$ Am următoarele situații

① $\begin{cases} l_1=1 \\ l_3=2 \end{cases}$ și $\begin{cases} l_2=3 \\ l_4=4 \end{cases}$ $\quad (1\,3\,2\,4)$

② $\begin{cases} l_1=2 \\ l_3=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} l_2=3 \\ l_4=4 \end{cases}$ $\quad (2\,3\,1\,4)$

③ $\begin{cases} l_1=1 \\ l_3=2 \end{cases}$ și $\begin{cases} l_2=4 \\ l_4=3 \end{cases}$ $\quad (1\,4\,2\,3)$

④ $\begin{cases} l_1=2 \\ l_3=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} l_2=4 \\ l_4=3 \end{cases}$ $\quad (2\,4\,1\,3)$

(*) Are 2 soluții distincte.

Numărul de soluții distincte al ecuației $\tau^2=\sigma$ este 12?

Exc (a) Dacă $\tau=(1\,2)(3\,4)(5\,6)(7\,8)(9\,10)\in S_n$ $(n\geq 10)$ determinați dacă există un n-ciclu σ a.î. $\tau=\sigma^k$ pt. un întreg k. Dacă da, calculați-le pe toate.

(b) Fie $\omega=(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14)\in S_{14}$. Pt ce întregi pozitivi i este ω^i tot un 14-ciclu?

c) Dacă $\tau = (12)(345) \in S_n$, determinați dacă există un n-ciclu σ ($n \geq 5$) cu $\tau = \sigma^k$ pt un întreg k.

d) Rezolvați ecuația $\tau^2 = \sigma$, unde $\sigma = (12)(34)(567)(8\,9\,10\,11)$, $\sigma \in S_{11}$.

---

a) Fie σ un n-ciclu. 1) Dacă $k | n$ $\rightsquigarrow$ σ^k este produs de k cicli disjuncți de lungime n/k

Deci, dacă $k=5$, $n/k = 2$, i.e. $\boxed{n=10, k=5}$ ✓.

2) Pt $k \nmid n$ fie $d = (k,n)$. $\Rightarrow \begin{cases} k = d k_1, & (k_1, n_1) = 1 \\ n = d n_1 \end{cases}$

Exemplu $\sigma = (1\,2\,3\,4 \dots 10)$

$k=6$ $\quad 6 \nmid 10$

$\sigma^6 = \left[(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10)^2\right]^3$

$= \left[(1\,3\,5\,7\,9)\cdot(2\,4\,6\,8\,10)\right]^3$

$= (1\,7\,3\,9\,5)\cdot(2\,8\,4\,10\,6)$

1) Dacă $\underline{d=1}$ ($(k,n)=1$) $\Rightarrow$ σ^k este un n-ciclu (vezi S9)

2) Dacă $\underline{d>1}$ $\Rightarrow$ $\sigma^k = (\sigma^d)^{k_1}$

σ^d e produs de d cicli de lungime $n/d = n_1$ $(d|n)$

Deci $\sigma^k = (\sigma^d)^{k_1}$ e produs de d cicli de lungime n_1. Avem soluție în acest caz?

$(k_1, n_1) = 1$

$(k_1, 4) = 1$ $\quad k = 5 \cdot k_1, n = 10$ $\quad (k,n) = 5 \Longleftarrow$ $\Downarrow$ $n_1 = 2$, $\underline{d=5}$ $\quad$ 2)