

Continuitate \rightarrow Funcții cu mai multe variabile

Algoritm

1) Identif. unde e sigur continuă

2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = ?$

3) Identificăm 2/3 funcții care să convină (pe \mathbb{R}^2) ($y = -x, y = x, y = x^2, \dots$)

4) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, -x)$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, x) \dots$

Caz I Nu sunt egale $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \Rightarrow f$ nu este continuă în (x_0, y_0)

Caz II Sunt egale $= L$

Demonstrăm că $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Se evaluează $|f(x,y) - L|$ pentru a aplica criteriul clesului:

$$0 \leq |f(x,y) - L| \leq g(x,y)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \\ f(x_0,y_0) = L \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ este continuă în } (x_0, y_0)$$

Ex 1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

• $y = x$

• $y = x^2$

• $y = x^3$

Observație:

$(x,y) \leq (0,0) \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ și } y \leq 0$

$(x,y) \geq (0,0) \Leftrightarrow x \geq 0 \text{ și } y \geq 0$

$(-1,1) \not\geq (0,0)$
 $(-1,1) \not\leq (0,0)$

$$(x,y) \rightarrow (0,0) \quad (x,y) \rightarrow (0,0) \quad \cup$$

$$\bullet y=x \quad L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$(-1,1) \neq (0,0)$$

$$(-1,1) \neq (0,0)$$

$$\bullet y=-x \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x,-x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (-x)}{x^2+(-x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Observăm că $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ nu e continuă în $(0,0)$

$\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\text{Ex 2. } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\bullet y=x \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2} = 0$$

$$\bullet y=-x \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,-x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{2} = 0$$

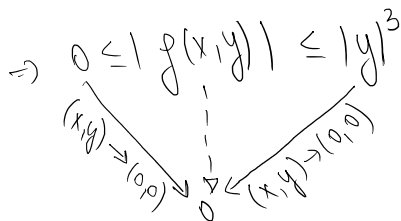
$$\bullet y=x^2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x,x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x^6}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{1 + x^2} = \frac{0}{1+0} = 0$$

Demonstrăm că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

$$\text{Evaluăm } |f(x,y) - 0| = |f(x,y)|$$

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2 \cdot |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 \cdot |y|^3}{x^2} = |y|^3$$

$$y^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{1} \geq \frac{x^2}{1} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y)| \leq |y|^3$$


$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f \text{ continuă în } (0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^2$$

$$\text{Ex 3. } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} x^3 y^2 \cdot \sin \frac{1}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

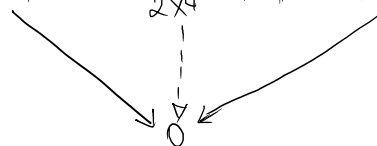
Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

• $y = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 \cdot x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^4 + x^4}) = \lim_{x \rightarrow 0} x^5 \cdot \sin \frac{1}{2x^4} = 0$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \frac{1}{2x^4} \leq 1 \quad | \cdot |x^5| \\ -|x^5| &\leq \sin \frac{1}{2x^4} \cdot |x^5| \leq |x^5| \end{aligned}$$



• $y = -x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^4 + x^4} = 0$$

• $y = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot x^4 \cdot \sin \frac{1}{x^4 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^4 + x^6} \cdot x^7 = 0$$

Demonstrăm că $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Evaluăm $|f(x,y) - 0| = |f(x,y)|$

$$0 \leq |f(x,y)| = |x^3 y^2 \sin(\frac{1}{x^4 + y^4})| = |x|^3 \cdot y^2 \cdot \left| \sin \frac{1}{x^4 + y^4} \right| \leq$$

$$\leq |x|^3 \cdot y^2 \cdot \left| \frac{1}{x^4 + y^4} \right| = |x| \cdot x^2 y^2 \cdot \frac{1}{x^4 + y^4} \stackrel{(*)}{\leq} |x| \cdot \cancel{(x^4 + y^4)} \cdot \frac{1}{x^4 + y^4} = |x|$$

$$0 \leq |f(x,y)| \leq |x|$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= 0 \\ f(0,0) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &f \text{ continuă în } (0,0) \\ &f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$(*) \quad x^2 y^2 \leq 2x^2 y^2 \leq x^4 + y^4 \quad (x^4 + y^4 - 2x^2 y^2 = (x^2 - y^2)^2 \geq 0)$$

Ex 4. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z}{x^4 + y^4 + z^4}, & x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = z = 0 \end{cases}$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

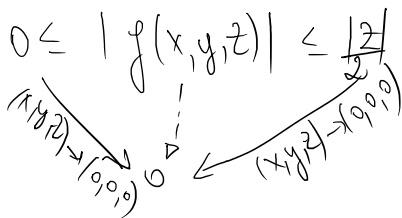
• $y=x$ și $z=x$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x,x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} = 0$

• $y=x$ și $z=-x$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x,-x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^5}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{3} = 0$

• $y=x$ și $z=x^2$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,x,x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{2x^4+x^8} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2+x^4} = \frac{0}{2+0} = 0$

Demonstrăm $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

Evaluăm $|f(x,y,z)|$
 $0 \leq |f(x,y,z)| = \left| \frac{x^2 y^2 z}{x^4 + y^4 + z^4} \right| = \frac{x^2 \cdot y^2 \cdot |z|}{x^4 + y^4 + z^4} \leq \frac{x^2 \cdot y^2 \cdot |z|}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2 y^2 \cdot |z|}{2x^2 y^2} = \frac{|z|}{2}$
 $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^4 + y^4 \geq 2x^2 y^2$ [$x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$]

$0 \leq |f(x,y,z)| \leq \frac{|z|}{2}$


$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x,y,z) = 0$
 $f(0,0,0) = 0$ $\Rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R}^3

Definiție!

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ $m \geq 2$ și $x_0 \in D \cap D'$

Spunem că f admite derivata parțială în raport cu variabila x_i ($1 \leq i \leq m$) în punctul x_0 dacă f este derivabilă după direcția vectorului e_i în punctul x_0 .

$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$

Ex. 5. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ puncte de extrem

Rezolvare:

* f continuă pe \mathbb{R}^+

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$
 $x < 0$ $x < 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{-x} = 0 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow f$ continuă în $x=0$ $\Rightarrow f$ continuă pe \mathbb{R}

$$\left. \begin{array}{l} x < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{-x} = 0 \cdot 1 = 0 \\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \quad \sim \quad \vee$$

* f derivabilă pe \mathbb{R}^*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1 = f'_d(0)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \cdot e^{-x} = 0 = f'_d(0)$$

$\rightarrow f$ nu e derivabilă în 0

$\rightarrow f$ derivabilă pe \mathbb{R}^*

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x \cdot e^{-x} (2-x), & x > 0 \end{cases}$$

$$(x^2 \cdot e^{-x})' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) = x \cdot e^{-x} (2-x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 & \text{Fals} \\ x \cdot e^{-x} (2-x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ sau } x=2 \end{cases}$$

\downarrow
Fals

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	---	+++ 0	---	---
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow \frac{4}{e^2}$	$\searrow 0$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

$x_1 = 0$ punct de minim local

$x_2 = 2$ punct de maxim local.

$$f'(1) = 1 \cdot e^{-1} \cdot (2-1) = e^{-1} > 0$$

$$f'(-1) = -1$$

$$f'(3) = 3 \cdot e^{-3} \cdot (2-3) = -3 \cdot e^{-3} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} =$$

$$\stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{LH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$