Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de anul acesta de la Mincu
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Determinați toate morfismele de monoizi de la $(\mathbb{N}, +)$ la $(\mathbb{N}, \max)$.

Demonstrație. Fie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un morfism. Atunci f are proprietatea că $f(0) = 0$ și $f(a + b) = \max(f(a), f(b))$.

Putem scrie $f(2)$ ca

$$f(2) = f(1 + 1) = \max(f(1), f(1)) = \max(f(1)) = f(1)$$

Notând $f(1) = a \in \mathbb{N}$, ajungem la concluzia că

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(n) &= \max(\underbrace{f(1), \ldots, f(1)}_{n \text{ ori}}) = f(1) = a \end{aligned}$$

Deci toate morfismele sunt de forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ a, & \text{altfel} \end{cases}$$

pentru un $a \in \mathbb{N}$. □

Exercițiul 2. Determinați $Hom(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Q})$, adică mulțimea morfismelor de la $(\mathbb{Z}_8, +)$ la $(\mathbb{Q}, +)$.

Demonstrație. Fie $f : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Q}$ un morfism de grupuri. Din proprietățile morfismelor, știm că

$$\begin{aligned} f(\hat{0}) &= 0 \\ f(\hat{a} + \hat{b}) &= f(\hat{a}) + f(\hat{b}) \end{aligned}$$

Să luăm de exemplu $f(\hat{3})$. Acesta poate fi scris ca

$$f(\hat{3}) = f(\hat{1} + \hat{1} + \hat{1}) = f(\hat{1}) + f(\hat{1}) + f(\hat{1}) = 3f(\hat{1})$$

Pe același principiu, pentru orice $\hat{k} \in \mathbb{Z}_8$ avem că

$$f(\hat{k}) = kf(\hat{1})$$

Să luăm acum două clase din $\mathbb{Z}_8$ care adunate dau $\hat{0}$, cum ar fi $\hat{3}$ și $\hat{5}$:

$$\begin{aligned} f(\hat{3} + \hat{5}) &= f(\hat{0}) = 0 \\ f(\hat{3} + \hat{5}) &= 3f(\hat{1}) + 5f(\hat{1}) = 8f(\hat{1}) \end{aligned}$$

Deci $8f(\hat{1}) = 0$. De aici obținem că $f(\hat{1}) = 0$, și de fapt că $f(\hat{k}) = 0$, $\forall \hat{k} \in \mathbb{Z}_8$.

Singurul morfism de la $\mathbb{Z}_8$ la $\mathbb{Q}$ este morfismul nul. □

Model de examen rezolvat

Subiectul 1

Considerăm grupul diedral $D_5 = \{ 1, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma \}$. Se știe că în el au loc relațiile $\rho^5 = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^4\sigma$.

Grupul diedral de ordin n se referă la simetriile unui poligon regulat cu n laturi. În acest caz, D_5 se referă la simetriile unui pentagon regulat. ρ reprezintă o rotație, iar σ este pentagonul "oglindit".

(a) **Teorie**: Construcția grupului factor

(b) Arătați că $\{ 1, \rho^3\sigma \} \leq D_5$.

Demonstrație. Notăm mulțimea cu $A = \{ 1, \rho^3\sigma \}$.

Oricum am compune între ele elementele, rămânem în mulțime:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 \in A \\
1 \cdot \rho^3\sigma &= \rho^3\sigma \in A \\
\rho^3\sigma \cdot 1 &= \rho^3\sigma \in A \\
(\rho^3\sigma) \cdot (\rho^3\sigma) &= \rho^3(\sigma\rho)\rho^2\sigma = \rho^3\rho^4\sigma\rho^2\sigma \\
&= \rho^7(\sigma\rho)\rho\sigma \\
&= \rho^{11}(\sigma\rho)\sigma \\
&= \rho^{15}\sigma^2 = (\rho^5)^3 \cdot 1 \\
&= 1 \in A
\end{aligned}$$

Pentru fiecare element, inversul elementului este conținut în mulțime:

$$\begin{aligned}
1 \cdot 1 = 1 &\iff 1^{-1} = 1 \in A \\
(\rho^3\sigma) \cdot (\rho^3\sigma) = 1 &\iff (\rho^3\sigma)^{-1} = \rho^3\sigma \in A
\end{aligned}$$

□

(c) Arătați că $\langle \rho \rangle \trianglelefteq D_5$.

Demonstrație. Trebuie să scriem subgrupul generat de ρ:

$$\langle \rho \rangle = \{ \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5 = 1 \}$$

Deoarece $\rho^5 = 1$, orice putere mai mare a lui ρ este conținută în această listă.

Pentru a arăta că este subgrup normal, cel mai simplu este să observăm că $\langle \rho \rangle$ are exact 5 elemente, iar D_5 are 10. Deci $\langle \rho \rangle$ are indice $2 = \frac{10}{5}$. Ne folosim de o proprietate din curs care zice că orice subgrup de indice 2 al unui grup este normal.

Dacă nu ținem minte această observație, trebuie să calculăm toate clasele de resturi la stânga $1H, \rho H, \dots, \sigma H$ și toate clasele de resturi la dreapta $H1, H\rho, \dots, H\sigma$, și să arătăm că au același număr și corespund unu-la-unu. □

(d) Descrieți grupul factor $D_5 / \langle \rho \rangle$.

Demonstrație. Notăm $H = \langle \rho \rangle$. Clasele de resturi obținute ar fi $1H$, ρH, $\rho^2 H, \ldots, \sigma H, \ldots, \rho^4 \sigma H$. Unele dintre acestea sunt echivalente:

$$H = \rho H = \cdots = \rho^4 H$$
$$\sigma H = \cdots = \rho^4 \sigma H$$

Legea de compoziție pe subgrup:

$$H \cdot H = H$$
$$H \cdot \sigma H = \sigma H$$
$$\sigma H \cdot H = \sigma H$$
$$\sigma H \cdot \sigma H = H$$

Acest grup factor este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2, +)$: H este elementul neutru $\hat{0}$, iar σH este $\hat{1}$. □

Subiectul 2

(a) **Teorie**: Definiția morfismului și izomorfismul de grupuri

(b) Elementele de ordin 8 din $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$

Demonstrație. Ordinul grupului este $10 \cdot 36 = 360$.

Fie $(\hat{a}, \tilde{b})$ un element arbitrar din grup, cu $\hat{a} \in \mathbb{Z}_{10}$ și $\tilde{b} \in \mathbb{Z}_{36}$. Din teorema lui Lagrange trebuie ca ordinul lui $(\hat{a}, \tilde{b})$ să dividă 360, și $\operatorname{ord} \hat{a} \mid 10$, $\operatorname{ord} \tilde{b} \mid 36$.

Știm că

$$\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}} (\hat{a}, \tilde{b}) = [\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10}} \hat{a}, \operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{36}} \tilde{b}]$$

unde $[\cdot, \cdot]$ reprezintă c.m.m.m.c.-ul celor două ordine.

Din ipoteză, $\operatorname{ord}_{\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}} (\hat{a}, \hat{b})$ trebuie să fie 8. Pentru a obține acest c.m.m.m.c. ar trebui ca unul dintre $\hat{a}, \tilde{b}$ să aibă ordin 8.

Deoarece $8 \nmid 10$ și $8 \nmid 36$, nu există soluții. □

(c) Elementele de ordin 20 din $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{36}$

Demonstrație. Asemănător exercițiului precedent, ajungem la concluzia că pentru a avea c.m.m.m.c.-ul 20, trebuie ca ordinele elementelor să fie 5 și 4 sau 10 și 4.

Ne folosim de faptul că în $\mathbb{Z}_n$:

$$\operatorname{ord} \hat{x} = \frac{n}{(x, n)}$$

unde $(\cdot, \cdot)$ reprezintă c.m.m.d.c.-ul celor două numere.

Rearanjând obținem

$$\operatorname{ord} \hat{x} \cdot (x, n) = n$$

Înlocuim în expresie valorile noastre:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (x, 10) = 10 &\iff (x, 10) = 2 \\ 10 \cdot (x, 10) = 10 &\iff (x, 10) = 1 \\ 4 \cdot (x, 36) = 36 &\iff (x, 36) = 9 \end{aligned}$$

Elementele de ordin 5 în $\mathbb{Z}_{10}$ sunt $\left\{ \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{8} \right\}$, iar de ordin 10 sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}$. Elementele de ordin 4 în $\mathbb{Z}_{36}$ sunt $\left\{ \tilde{9}, \widetilde{27} \right\}$.

Deci elementele de ordin 20 sunt toate combinațiile posibile:

$$\left\{ (\hat{2}, \tilde{9}), \dots, (\hat{8}, \widetilde{27}), (\hat{1}, \tilde{9}), \dots, (\hat{9}, \widetilde{27}) \right\}$$

□

Subiectul 3

(a) **Teorie**: Definiți ce este o transpoziție. Demonstrați că orice transpoziție este permutare impară.

(b) Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 12 & 3 & 13 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} \in S_{13}$
Trebuie descompusă în produs de ciclii disjuncți, găsit inversul permutării, calculat σ^2, calculat ordinul permutării, calculat σ^{2019}.

Demonstrație. Descompunem permutarea în produs de ciclii disjuncți:

$$\sigma = (1, 4, 7, 11)(2, 5, 8, 12)(3, 6, 9)(10, 13)$$

Putem calcula σ^2 mai ușor folosindu-ne de această reprezentare:

$$\sigma^2 = (1, 7)(4, 11)(2, 8)(5, 12)(3, 9, 6)$$

Orice ciclu de lungime 4 s-a spart în doi ciclii de lungime 2. Ciclul de lungime 2 a dispărut complet.

Pentru σ^{-1}, putem inversa ordinea fiecărui ciclu:

$$\sigma^{-1} = (11, 7, 4, 1)(12, 8, 5, 2)(9, 6, 3)(13, 10)$$

Ordinul permutării este c.m.m.m.c.-ul lungimilor ciclului. Deci este $[4, 4, 3, 2]$, adică 12.

Pentru a calcula σ^{2019}, ne folosim de faptul că de fiecare dată când compunem permutarea cu ea însăși de 12 ori (ordinul ei), obținem permutarea identică. Deci

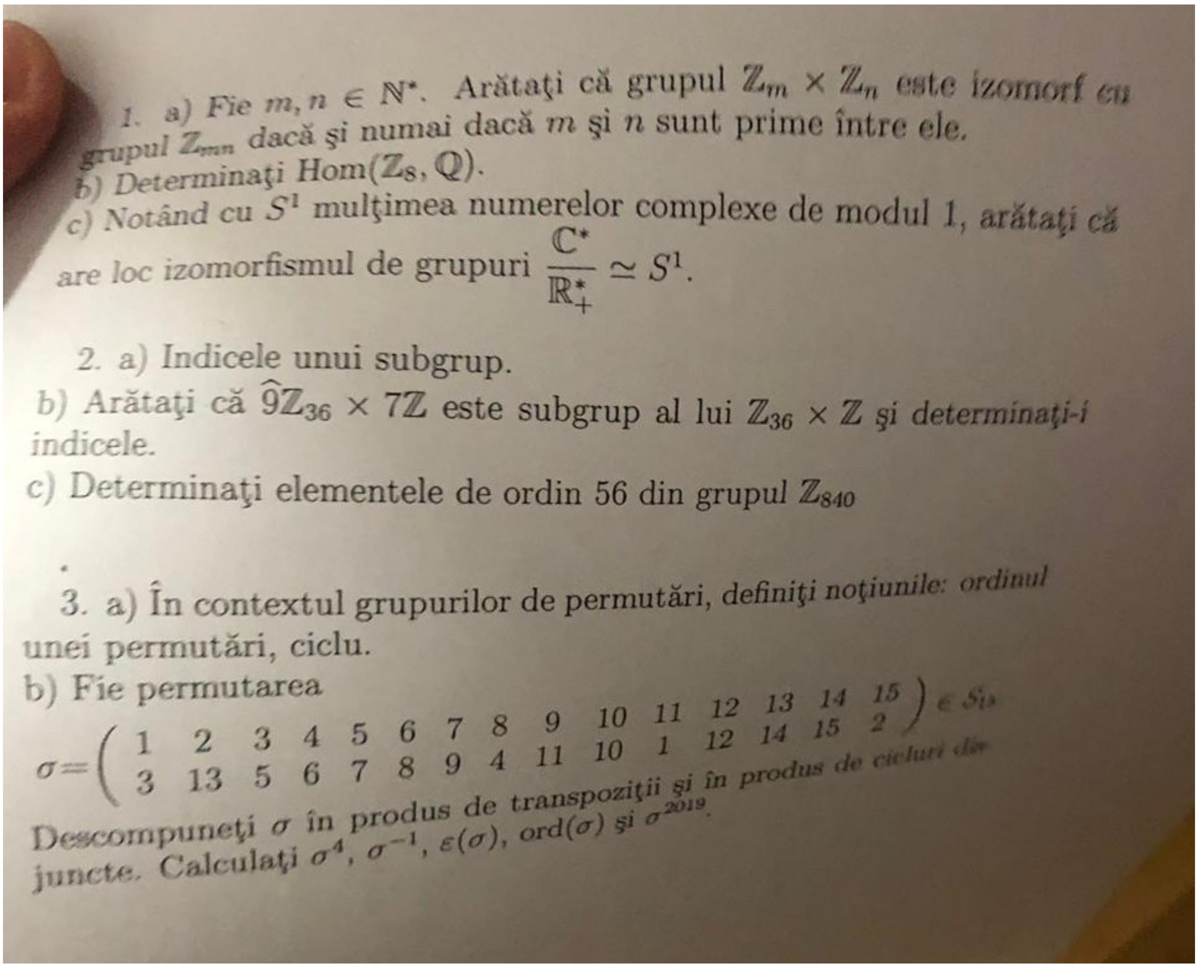
$$\sigma^{2019} = \sigma^{168 \cdot 12 + 3} = (\sigma^{12})^{168} \sigma^3 = \sigma^3$$

Răspunsul este

$$\sigma^{2019} = \sigma^3 = (1, 11, 7, 4)(2, 12, 8, 5)(10, 13)$$

□

Subiectul de la restanță la Mincu, pentru cei care vor să-și testeze cunoștințele:



1. a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că grupul $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ este izomorf cu grupul $\mathbb{Z}_{mn}$ dacă şi numai dacă m şi n sunt prime între ele.
b) Determinaţi $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_8, \mathbb{Q})$.
c) Notând cu S^1 mulţimea numerelor complexe de modul 1, arătaţi că are loc izomorfismul de grupuri $\dfrac{\mathbb{C}^*}{\mathbb{R}^*_+} \simeq S^1$.

2. a) Indicele unui subgrup.
b) Arătaţi că $\widehat{9}\mathbb{Z}_{36} \times 7\mathbb{Z}$ este subgrup al lui $\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}$ şi determinaţi-i indicele.
c) Determinaţi elementele de ordin 56 din grupul $\mathbb{Z}_{840}$

.

3. a) În contextul grupurilor de permutări, definiţi noţiunile: ordinul unei permutări, ciclu.
b) Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 13 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 4 & 11 & 10 & 1 & 12 & 14 & 15 & 2 \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Descompuneţi σ în produs de transpoziţii şi în produs de cicluri disjuncte. Calculaţi σ^4, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $\mathrm{ord}(\sigma)$ şi σ^{2019}.