UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 7

① Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ este dată de $f_n(x)=\frac{x}{x+n}$ $(\forall)\, x\in[0,1]$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

Soluție:

Să remarcăm că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu către funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=0$

Deoarece $|f_n(x)-f(x)|=\frac{x}{x+n}\leq\frac{1}{n}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $x\in[0,1]$, deducem că $0\leq\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}$; $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$. Prin urmare avem că $\lim\limits_{n}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$, deci șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)\equiv 0$

② Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este dată de $f_n(x)=\frac{x}{x^2+n}$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$ și $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Soluție: Deoarece $\lim\limits_{n} f_n(x)=\lim\limits_{n}\frac{x}{x^2+n}=0$, deducem că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu către funcția $f\equiv 0$

Deoarece $|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+n}\right|\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}$; $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$; $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, obținem că

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}\Rightarrow f_n\xrightarrow{u} f.$$

③ Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [-1,1]$.

Soluție.

Clar $f_n \xrightarrow{s} f \equiv 0$; $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

Deoarece $|f_n(x) - f(x)| = \dfrac{|x|}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{1}{2n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ $(\forall) x \in [-1,1]$.

deducem că $0 \leq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{1}{2n}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall) x \in [-1,1]$.

și cum $\lim\limits_{n} \dfrac{1}{2n} = 0$, obținem că $\lim\limits_{n} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$, și deci șirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform către funcția $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ constant egală cu 0

④ Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru șirul de funcții $(f_n)_n$, unde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$.

Soluție

Clar $f_n \xrightarrow{s} f \equiv 0$ $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

Deoarece $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \geq \left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$(\forall) n \in \mathbb{N}^*$ și $\lim\limits_{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{e}\left(1-\frac{1}{e}\right)$. deducem că

egalitatea $\lim\limits_{n} \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ este falsă

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{u} f$.

⑤ Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ și $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții care converge uniform către $f: A \to \mathbb{R}$. Să se arate că șirul de funcții $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $g_n = \frac{f_n}{1+f_n^2}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, converge uniform.

Soluție:

Clar $g_n \xrightarrow{\ \ s\ \ } \frac{f}{1+f^2}$

Să remarcăm că:

$$|g_n(x)-g(x)| = \left|\frac{f_n(x)}{1+f_n^2(x)} - \frac{f(x)}{1+f^2(x)}\right| = \left|\frac{f_n(x)(1+f^2(x)) - f(x)(1+f_n^2(x))}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))}\right|$$

$$= \frac{|f_n(x)-f(x)|\,|1-f_n(x)f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} \le |f_n(x)-f(x)|\,\frac{1+|f_n(x)||f(x)|}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} =$$

$$= |f_n(x)-f(x)|\left(\frac{1}{(1+f_n^2(x))(1+f^2(x))} + \frac{f_n(x)}{1+f_n^2(x)}\cdot\frac{f(x)}{1+f^2(x)}\right) \le$$

$$\le |f_n(x)-f(x)|\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}|f_n(x)-f(x)|,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N},\ (\forall)\, x\in A.$$

Prin urmare avem

$$0 \le \sup_{x\in A}|g_n(x)-g(x)| \le \frac{5}{4}\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}. \quad (1)$$

Cum șirul $f_n \xrightarrow{\ u\ } f$, avem că $\lim\limits_{n}\sup\limits_{x\in A}|f_n(x)-f(x)|=0$, deci având în vedere (1), obținem că:

$$\lim_{n}\sup_{x\in A}|g_n(x)-g(x)|=0.$$ Așadar $g_n \xrightarrow{\ \ u\ \ } \frac{f}{1+f^2}$

⑥ Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ pentru care există un șir de funcții polinomiale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $P_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ a.î. $P_n \xrightarrow{u} f$.

Soluție:

Fie f o astfel de funcție. Atunci $(\exists)\, n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\, n\geq n_0$ să avem $|P_n(x)-f(x)|<1$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$. Atunci

$|P_n(x)-P_{n_0}(x)|\leq|P_n(x)-f(x)|+|P_{n_0}(x)-f(x)|<2$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $x\in\mathbb{R}$, $n\geq n_0$.

Deci de aici deducem că $P_n-P_{n_0}$ este un polinom mărginit, deci constant $(\forall)\, n\geq n_0$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Prin urmare $(\exists)\, c_n\in\mathbb{R}$ a.î. $P_n-P_{n_0}=c_n$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq n_0$.

Deoarece $|c_n-c_m|=|P_n(0)-P_m(0)|<|P_n(0)-f(0)|+|P_m(0)-f(0)|$ $(\forall)\, m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq n_0$, $\lim\limits_n P_n(0)=f(0)$, $\lim\limits_m P_m(0)=f(0)$, deducem că șirul $(c_n)_n$ este șir Cauchy, deci convergent.

Fie $\lim\limits_n c_n=c$.

Avem $|f(x)-P_{n_0}(x)-c|\leq|f(x)-P_{n_0}-c_n|+|c_n-c|=$

$=|f(x)-P_n(x)|+|c_n-c|$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, $n\geq n_0$

Cum $\lim\limits_n (f(x)-P_n(x))=\lim\limits_n (c_n-c)=0$, deducem că $f=P_{n_0}+c$ i.e. f este funcție polinomială

- Teorema de transport a continuității prin convergența uniformă

(7) Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{xe^{nx}+n}{(x+1)e^{nx}+n+1}$ $(\forall)\, x\in[-1,\infty)$ și $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

Soluție: clar $f \xrightarrow{\ s\ } f$; $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+1}; & x\in(0,\infty)\\ 1; & x\in[-1,0]\end{cases}$$

Deoarece funcțiile f_n sunt continue, însă f nu are aceeași proprietate $\Rightarrow f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$.

(8) Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_n$, $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^{2n}(1-x^n)$ $(\forall)\, x\in[0,1]$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

Soluție: clar $f_n \xrightarrow{\ s\ } f\equiv 0$ (funcție continuă)

Deoarece $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\geq\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|$ $(\forall)\, n\geq 1$.

Cum $\lim\limits_{n}\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|=e^{-2}(1-e^{-1})>0$, deducem că egalitatea $\lim\limits_{n}\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=0$ este falsă și ca atare $f_n \overset{u}{\not\longrightarrow} f$.

Obs: Așadar este posibil ca un șir de funcții continue care converge simplu către o funcție continuă să nu converge și uniform.

⑨ Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ și $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $n \in \mathbb{N}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și

f_n este continuă $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Atunci f este continuă

Soluție:

Fie $\varepsilon > 0$ și $a \in D$, fixate. Având în vedere i) $\Rightarrow (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î.

$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și $(\forall) x \in D$

Din ii) $(\exists) \delta_{\varepsilon,a} > 0$ a.î. $\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\forall) x \in D$ cu $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$

Prin urmare avem

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (\forall) x \in D \text{ cu prop } \|x - a\| < \delta_{\varepsilon,a}$$

Deci f este continuă în a

TEOREMA LUI DINI

⑩ Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n \geq 1}$, unde $f_n : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1 + (\ln x)^n}$ $(\forall) x \in [1,2]$ și $n \in \mathbb{N}^*$

Soluție

Deoarece șirul descrescător de funcții continue $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplu către funcția continuă $f \equiv 0$ și cum $[1,2]$ este mulțime compactă utilizând teorema lui Dini concluzionăm că șirul de funcții $(f_n)_n$ converge și uniform.

(11) Fie $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : [a, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ este dată de $f_n(x) = \cos^{2n} x$ pentru orice $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$ și $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Soluție:

Clar că șirul descrescător de funcții continue $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu către funcția $f : [a, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in [a, \frac{\pi}{2}]$, dacă $a \neq 0$ și de $f(x) = \begin{cases} 1; & x = 0 \\ 0; & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$; dacă $a = 0$. Cum $[a, \frac{\pi}{2}]$ este mulțime compactă, utilizând teorema lui Dini, tragem concluzia că șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform în cazul în care $a \neq 0$.

Dacă $a = 0$, deoarece funcțiile f_n sunt continue, însă f nu are această proprietate, făcând apel la Teorema de transport a continuității prin convergența uniformă, avem că șirul de funcții $(f_n)_n$ nu converge uniform pe mulțimea compactă $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Concluzie: Așadar în cadrul Teoremei lui Dini, condiția de continuitate impusă funcției limită este esențială

(12) Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2 \frac{n}{n+1}$ $(\forall)$ $x \in (0, \infty)$; $n \in \mathbb{N}^*$

Soluție: Clar șirul descrescător de funcții continue $(f_n)_n$ converge simplu către funcția continuă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

Cum $\sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ și

$\lim_n \frac{n^2}{n+1} = \infty$ avem că $\lim_n \sup_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| \neq 0$

Prin urmare $f_n \xrightarrow{u} f$.

Concluzie. • Așadar condiția de compacitate impusă domeniului funcțiilor considerate este esențială

• De asemenea există exemple din care rezultă că, condiția de monotonie impusă șirului de funcții considerat este esențială.