Curs 16

Integrala Riemann pentru funcții de o variabilă reală

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Definiție. 1) Se numește diviziune a intervalului $[a,b]$, un sistem de puncte $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$.

Notăm $\mathcal{D}([a,b]) \stackrel{not.}{=} \{\Delta \mid \Delta \text{ diviziune a intervalului } [a,b]\}$.

2) Numărul $\|\Delta\| \stackrel{not.}{=} \max\{x_i - x_{i-1} \mid i=\overline{1,n}\}$ se numește norma diviziunii Δ.

3) Se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, un sistem de puncte $\xi=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ cu proprietatea că $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $\forall\, i=\overline{1,n}$.

4) Suma $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de puncte intermediare

$\overline{\xi}=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ și se notează $\sigma_\Delta(f,\overline{\xi})$.

Definiție. Spunem că f este integrabilă Riemann dacă $\exists I\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_\varepsilon>0$ cu proprietatea că $\forall \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ și $\forall \overline{\xi}=(\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$
$\Delta = (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b)$
sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ, avem $|\sigma_\Delta(f,\overline{\xi})-I|<\varepsilon$.

Observație. $I\in\mathbb{R}$ din definiția precedentă, dacă există, este unic și se notează $I=\int_a^b f(x)\,dx$.

Teoremă. Dacă f este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.

Teoremă. Dacă f este continuă, atunci f este integrabilă Riemann.

Teoremă. Dacă f este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann.

Teoremă (Teorema de permutare a limitei cu integrala).

Fie $(f_n)_n$ un șir de funcții, $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ astfel încât:

i) f_n integrabilă Riemann $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Atunci f este integrabilă Riemann și

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exercițiu. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\,dx$.

Soluție. Fie $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$, unde $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ (vezi Seminar 7).

f_n continuă $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f_n$ integrabilă Riemann $\forall n\in\mathbb{N}$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx =$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

Definiție. O mulțime $A\subset\mathbb{R}$ se numește neglijabilă Lebesgue dacă $\forall \varepsilon>0$, $\exists (I_n)_n$ șir de intervale deschise și mărginite cu proprietățile:

i) $A\subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$, unde $\ell(I_n)$ reprezintă lungimea intervalului I_n $(\ell((c,d)) = d-c)$.

Observații. 1) Orice submulțime a unei mulțimi neglijabile Lebesgue este, la rândul ei, neglijabilă Lebesgue.

2) Orice mulțime cel mult numărabilă este neglijabilă Lebesgue (finită sau numărabilă)

3) Orice reuniune cel mult numărabilă de mulțimi neglijabile Lebesgue este neglijabilă Lebesgue.

Notație. $D_f \overset{def}{=} \{x \in [a,b] \mid f$ nu e continuă în $x\}$ (mulțimea discontinuităților lui f).

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f e integrabilă Riemann.

2) f e mărginită și D_f e neglijabilă Lebesgue.

Exercițiu. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}; & x\in(0,1]\\ 0; & x=0.\end{cases}$

Arătați că f este integrabilă Riemann.

Soluție. $|f(x)|\leq 1\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow f$ mărginită.

$D_f\subset\underbrace{\{0\}}_{\text{finită}\Rightarrow\text{neglijabilă Lebesgue}}\Rightarrow D_f$ neglijabilă Lebesgue.

Deci f este integrabilă Riemann. $\square$

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită (i.e. există $M>0$ a.î. $|f(x)|\leq M\ \forall x\in[a,b]$) și $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Considerăm $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ \forall i=\overline{1,n}$ și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\ \forall i=\overline{1,n}$.

Definiție. 1) $S_\Delta(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și diviziunii Δ.

2) $s_\Delta(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și

divizunii Δ.

3) $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ se numește integrala Darboux superioară asociată funcției f.

4) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s_\Delta(f) \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ se numește integrala Darboux inferioară asociată funcției f.

<u>Observații.</u> 1) $s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f)$.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

<u>Teoremă (Criteriul lui Darboux de integrabilitate Riemann).</u> Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) f e integrabilă <u>Riemann</u>.

2) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (caz în care avem $\int_a^b f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$).

3) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta_\varepsilon \in \mathcal{D}([a,b])$ a.î. $S_{\Delta_\varepsilon}(f) - s_{\Delta_\varepsilon}(f) < \varepsilon$.

4) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

<u>Exercițiu</u>. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1; & x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ -1; & x\in\underbrace{[0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{=[0,1]\setminus\mathbb{Q}.}\end{cases}$

Determinați $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx$, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx$ și precizați dacă f este integrabilă Riemann.

<u>Soluție</u>. $|f(x)|\le 1\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow f$ mărginită.

Fie $\Delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ o diviziune a intervalului $[0,1]$.

Avem $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=1\ \ \forall i=\overline{1,n}$ (deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale și $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}=-1$ $\forall i=\overline{1,n}$ (deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale).

Atunci $S_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=(\cancel{x_1}-x_0)+(\cancel{x_2}-\cancel{x_1})+\ldots+$

$+(x_n-\cancel{x_{n-1}})=x_n-x_0=1-0=1$ și $s_\Delta(f)=$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) = -\left[(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \ldots + (x_n - \cancel{x_{n-1}})\right] =$$

$$= -(x_n - x_0) = -(1-0) = -1.$$

Deoarece Δ a fost aleasă în mod arbitrar rezultă că $\overline{\int_0^1} f(x) = \inf\{1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = 1$ și

$$\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = \sup\{-1 \mid \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\} = -1.$$

$\overline{\int_0^1} f(x)\,dx \neq \underline{\int_0^1} f(x)\,dx \Rightarrow f$ nu este integrabilă Riemann. $\square$