Curs 13

Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale de ordin superior

Definiție. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \overset{\circ}{D}$ și $V \in \mathcal{V}_a$ a.î. f admite derivată parțială în raport cu variabila x_j pe V, i.e. $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)$ $\forall c \in V$ (j fixat). Dacă $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a, aceasta se numește derivata parțială de ordinul 2 în raport cu variabilele x_i și x_j în punctul a și se notează cu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \overset{\text{not.}}{=\!=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a) \text{ dacă } i \neq j \text{ și}$$

cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \overset{\text{not.}}{=\!=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$ dacă $i = j$.

Similar se definesc derivatele parțiale de ordinul $k \geq 3$.

Notații corecte: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2 \partial x_j}(a)$ etc.

Notații greșite: $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^2}(a)$ etc.

<u>Lemă (Lema lui Schwarz)</u>. Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathring{D}$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$ a.î. $\exists V \in \mathcal{V}_a$ cu proprietatea că f admite derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pe V (i.e. în toate punctele din V).

Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : V \to \mathbb{R}^n$ este continuă în a, atunci f admite derivata parțială $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

<u>Definiție</u>. Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathring{D}$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$ a.î. $\exists V \in \mathcal{V}_a$ cu proprietatea că f admite toate deri-

vatele parțiale de ordinul 2 pe V și acestea sunt continue în a.

Definim diferențiala de ordinul 2 a lui f în a astfel: $d^2f(a): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$d^2f(a)(\underset{\underset{(u_1,\dots,u_m)}{\parallel}}{u}, \underset{\underset{(v_1,\dots,v_m)}{\parallel}}{v}) = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) u_i v_j.$$

<u>Definiție.</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathring{D}$ și $f: D \to \mathbb{R}^n$ a.î. $\exists V \in \mathcal{V}_a$ cu proprietatea că f admite toate derivatele parțiale de ordinul 3 pe V și acestea sunt continue în a. Definim diferențiala de ordinul 3 a lui f în a astfel:

$d^3f(a): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$d^3f(a)(\underset{\underset{(u_1,\dots,u_m)}{\parallel}}{u}, \underset{\underset{(v_1,\dots,v_m)}{\parallel}}{v}, \underset{\underset{(w_1,\dots,w_m)}{\parallel}}{w}) = \sum_{i,j,k=1}^{m} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) u_i v_j w_k$$

Similar se definește $d^kf(a)$, $k \geq 3$.

<u>Notații.</u> 1) $d^2f(a)(u,u) = d^2f(a)(u)^2 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$.

2) $d^3f(a)(u,u,u) = d^3f(a)(u)^3 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m$.

....

<u>Observație.</u> Dacă $m=2$, $n=1$ și $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$, atunci:

$$d^2f(a)(u)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)u_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)u_1u_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)u_2^2.$$

$$d^3f(a)(u)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a)u_1^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(a)u_1^2u_2 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(a)u_1u_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a)u_2^3.$$

....

$$d^kf(a)(u)^k = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(a)u_1^k + \ldots + C_k^i \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-i}\partial y^i}(a)u_1^{k-i}u_2^i + \ldots + \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(a)u_2^k.$$

<u>Teoremă (Formula lui Taylor cu rest Lagrange pentru funcții de mai multe variabile reale).</u> Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o

o mulțime deschisă și convexă (i.e. $\forall x, y \in D$, $\forall t \in [0,1]$, avem $(1-t)x + ty \in D$), $n \in \mathbb{N}$, $f: D \to \mathbb{R}^2$ o funcție care admite toate derivatele parțiale de ordinul $n+1$ pe D și acestea sunt continue pe D și fie $a \in D$.

Atunci $\forall x \in D, x \neq a$, $\exists \gamma \in (a, x) \overset{def.}{=\!=}$

$\overset{def.}{=\!=} \{(1-t)a + tx \mid t \in (0,1)\}$ a.î.

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a)^n}_{\overset{\text{not.}}{\|} \; T_n(x)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\gamma)(x-a)^{n+1}}_{\overset{\text{not.}}{\|} \; R_n(x)}.$$

<u>Exercițiu.</u> Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^3 + 2xy - 2x^2 + 3x + y - 2$.

a) Determinați derivatele parțiale de ordinul 2 ale lui f.

Soluție. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 + 2y - 4x + 3 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2 + 2x + 1 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = -4 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 6xy \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 3y^2 + 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \ \square$$

b) Determinați $df(1,2)$ și $d^2 f(1,2)$.

Soluție. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ deschisă $\Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ diferențiabilă în $(1,2)$.

$df(1,2): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $df(1,2)(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)u +$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v = 11\cdot u + 15v.$$

Toate derivatele parțiale de ordinul 2 sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.

$$d^2f(1,2): \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ d^2f(1,2)((u_1,u_2),(v_1,v_2)) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)u_1v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)u_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,2)u_2v_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)u_2v_2 = -4u_1v_1 + 14u_1v_2 + 14u_2v_1 + 12u_2v_2.$$

$\square$

c) Determinați polinomul Taylor de ordinul 2 asociat funcției f în punctul $(1,2)$ (i.e. $T_2(x,y)$).

<u>Soluție.</u> $T_2(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!}df(1,2)((x,y)-(1,2)) +$

$$+\frac{1}{2!}d^2f(1,2)((x,y)-(1,2))^2 = f(1,2) + \frac{1}{1!}df(1,2)(x-1,y-2) +$$

$$+\frac{1}{2!}d^2f(1,2)(x-1,y-2)^2 = f(1,2) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)(x-1) +\right.$$

$$\left.+\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)(y-2)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)(x-1)^2 +\right.$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,2)(x-1)(y-2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)(y-2)^2\Big) =$$

$$= 13 + 11(x-1) + 15(y-2) + \frac{1}{2}\Big(-4(x-1)^2 + 28(x-1)(y-2) +$$

$$+ 12(y-2)^2\Big). \quad \square$$