Curs 20

Curbe parametrizate.

Definiție. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,\dots,f_n)$. Spunem că f este de clasă C^k pe $[a,b]$ dacă $f_1,\dots,f_n$ sunt derivabile de k ori pe $[a,b]$ și derivatele $f_1^{(k)},\dots,f_n^{(k)}$ sunt continue.

Definiție. O mulțime $C\subset\mathbb{R}^n$ se numește curbă simplă, netedă dacă există $c:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clasă C^1 pe $[a,b]$, bijectivă pe $[a,b)$ a.î. $C=\operatorname{Im} c$.

Definiție. 1) Funcția c se numește parametrizare a curbei C.

2) Punctele $c(a)$ și $c(b)$ se numesc extremitățile (sau capetele) curbei C.

3) Curba simplă, netedă C se numește închisă dacă $c(a)=c(b)$.

Definiție. O mulțime $C\subset\mathbb{R}^n$ se numește curbă simplă, netedă pe porțiuni dacă se obține prin alăturarea (juxtapunerea) unui număr finit de curbe simple, netede ($C=C_1\cup\dots\cup C_m$).

<u>Propoziție.</u> Orice curbă simplă, netedă are o infinitate de parametrizări.

<u>Observație.</u> Vom lucra cu $n=2$ și $n=3$.

<u>Notații.</u> 1) $C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t\in[a,b]$, dacă $C\subset\mathbb{R}^2$ și

$c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, $c(t)=(x(t),y(t))$.

2) $C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$, $t\in[a,b]$, dacă $C\subset\mathbb{R}^3$ și

$c:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$.

<u>Exemple de parametrizări.</u>

1) Cercul de centru $(0,0)$ și rază r: $x^2+y^2=r^2$.

$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

2) Cercul de centru (a,b) și rază r: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

3) Elipsa de ecuație: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi]$.

4) Segmentul de dreaptă din $\mathbb{R}^2$ de capete $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$: $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

5) Segmentul de dreaptă din $\mathbb{R}^3$ de capete $A(x_A, y_A, z_A)$ și $B(x_B, y_B, z_B)$: $\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$, $t \in [0,1]$.

Lungimea curbelor.

Fie $C \subset \mathbb{R}^2$ o curbă simplă, netedă având parametrizarea

$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$.

Fie Δ; $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Definiție. Norma diviziunii Δ este numărul $\|\Delta\| = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i = \overline{1,n}\}$.

Definiție. Lungimea liniei poligonale determinate de punctele $(x(t_i), y(t_i))$, $i = \overline{0,n}$ este:

$$l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

Propoziție. Există $\eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ și există $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$

a.î. $l_\Delta = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{(x'(\eta_i))^2 + (y'(\xi_i))^2}$.

Definiție. Lungimea curbei C este:

$$l = \lim_{\|\Delta\| \to 0} l_\Delta.$$

Propoziție. $l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$.

Observație. Similar se definește lungimea unei curbe din $\mathbb{R}^3$.

Integrala curbilinie de prima speță.

Fie $C \subset \mathbb{R}^2$ o curbă simplă, netedă având parametrizarea:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b].$$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ a.î. $C \subset D$ și $F: D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Definiție. $\int_C F\, ds \overset{def.}{=} \int_a^b F(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$ (integrala curbilinie de prima speță a funcției F de-a lungul curbei C)

Observație. Similar se definește integrala curbilinie de prima speță de-a lungul unei curbe simple, netede $C \subset \mathbb{R}^3$ ($\int_C F\, ds = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$).

Observație. Dacă C este o curbă simplă, netedă pe porțiuni, $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, avem $\int_C F\,ds = \int_{C_1} F\,ds + \ldots + \int_{C_n} F\,ds$.

Integrala curbilinie de a doua speță.

Fie $C \subset \mathbb{R}^2$ o curbă simplă, netedă având parametrizarea

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b].$$

Fie $A(x(a), y(a))$ și $B(x(b), y(b))$ extremitățile curbei C.

Definiție. 1) Dacă intervalul $[a,b]$ este parcurs de la a la b spunem că sensul de parcurgere al curbei C este de la A la B.

2) Dacă intervalul $[a,b]$ este parcurs de la b la a spunem că sensul de parcurgere al curbei C este de la B la A.

3) Curba C, împreună cu unul dintre cele două sensuri de parcurgere de mai sus, se numește curbă simplă, netedă și orientată.

Notații. 1) $(A,B) \overset{def}{=} C$ împreună cu sensul de parcurgere de la A la B.

2) $(B,A) \overset{def}{=} C$ împreună cu sensul de parcurgere de la B la A.

În cele ce urmează vom considera curba $(A,B) \overset{not.}{=} C$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ a.î. $D \supset C$ și $F=(P,Q): D \to \mathbb{R}^2$ o funcție continuă.

<u>Definiție.</u> $$\underbrace{\int_C F\,dr = \int_C P\,dx + Q\,dy}_{\substack{\text{integrala curbilinie}\\ \text{de speța a doua a}\\ \text{funcției } F \text{ de-a lungul}\\ \text{curbei } C}} \overset{def.}{=} \int_a^b P(x(t),y(t))x'(t)\,dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))y'(t)\,dt.$$

<u>Notație.</u> $C^- \overset{not.}{=} (B,A)$.

<u>Observație.</u> $\int_{C^-} F\,dr = -\int_C F\,dr$, i.e. $\int_{(B,A)} F\,dr = -\int_{(A,B)} F\,dr$.

<u>Observație.</u> Similar se definește $\int_C F\,dr$ dacă $D \subset \mathbb{R}^3$, $C \subset \mathbb{R}^3$ este o curbă simplă, netedă, $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [a,b]$

și $F=(P,Q,R): D \to \mathbb{R}^3$ este o funcție continuă (i.e.

$$\underset{\substack{\parallel \\ (A,B)}}{\int_C} F\,dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\,dt$$

$$+ \int_a^b Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\,dt + \int_a^b R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\,dt)$$

Observație. Dacă $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F=(P,Q,R)$ este un câmp de forțe și $C \subset \mathbb{R}^3$ este o curbă simplă, netedă a.î. $C \subset D$ atunci $\int_C F\,dr$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de forța F de-a lungul curbei C.

Observație. Dacă $C \subset \mathbb{R}^n$ ($n=2$ sau 3) e o curbă simplă, netedă pe porțiuni ($C = C_1 \cup \ldots \cup C_m$) atunci

$$\int_C F\,dr = \int_{C_1} F\,dr + \ldots + \int_{C_m} F\,dr.$$

Exercițiu. Determinați: a) $\int_C xy\,ds$, unde $C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, t \in [-1,1]$.

Soluție. a) Fie $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = xy$.

F continuă

C curbă simplă, netedă.

$$\int_C F\,ds = \int_{-1}^{1} F(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} t \cdot t^2 \sqrt{1^2 + (2t)^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \underbrace{t^3\sqrt{1+4t^2}}_{\text{funcție impară}}\,dt = 0. \square$$

b) $\int_C xy\,dx - y^2\,dy$, unde $C: \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}, t \in [0,1]$.

Soluție. Fie $F = (P,Q): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (xy, -y^2)$, i.e. $P, Q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x,y) = xy$, $Q(x,y) = -y^2$.

F continuă.

C curbă simplă, netedă.

$$\int_C F\,dr = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C xy\,dx - y^2\,dy =$$

$$= \int_0^1 P\big(x(t), y(t)\big)\cdot x'(t)\,dt + \int_0^1 Q\big(x(t), y(t)\big)\,y'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^2\cdot t^3\cdot 2t\,dt + \int_0^1 (-t^6)\cdot 3t^2\,dt = \int_0^1 2t^6\,dt -$$

$$-3\int_0^1 t^8\,dt = \frac{2}{7} - \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \overset{3)}{\frac{2}{7}} - \overset{7)}{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{21}. \quad \square$$