Tutoriat 6 - Rezolvări
Grupul de permutări

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 9 decembrie 2020 -

Exercițiul 1

Fie permutarea $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 & 11 & 10 \end{smallmatrix}\right) \in S_{11}$

1. Descompuneți σ în produs de cicli dijuncți.
2. Descompuneți σ în produs de transpoziții.
3. Calculați $\text{sgn}(\sigma)$ și $\text{ord}(\sigma)$.
4. Există permutări de ordin 35 în S_{11}
5. Rezolvați ecuația $x^{2011} = \sigma$.

Rezolvare:

1. $\sigma = (1, 3, 5, 9)(2, 4, 7, 8, 6)(10, 11)$
2. având descompusă permutarea in cicli decscompunerea în transpoziții este $\sigma = (1, 3)(3, 5)(5, 9)\ (2, 4)(4, 7)(7, 8)(8, 6)\ (10, 11)$
3. Signatura unui produs de ciclii este produsul signaturiilor ciclilor. Un ciclu de lungime n are signatura $(-1)^{n-1}$. Deci $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^1 = 1$. Ordinul permutării este cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclilor în care acesta se descompune. $\text{ord}(\sigma) = \text{cmmmc}(4,\ 5,\ 2) = 20$.
4. Cum $35 = 7 \cdot 5$ rezultă că permutarea ar trebui să conțină cel puțin un ciclu de lungime 7 și un ciclu de lungime 5. Însă lungimea acestor cicli este $12 > 11$ și deci prin urmare nu poate exista o permutare din S_{11} cu ordinul 35.
5. Trebuie să argumentăm de unde poate proveni fiecare ciclu din permutarea σ (spre exemplu 2 2-ciclu pot proveni dintr-un ciclu de lungime 4 ridicat la pătrat). Luând pe rând ciclii din σ, cel de lungime 5 poate proveni doar dintr-un ciclu de lungime 5, cel de lungime 4 în mod analog iar

cel de lungime 2 tot dintr-un ciclu de lungime 2. Ne rămâne să vedem ce ciclu de lungime 5 ridicat la 2011 da ciclul de lungime 5 din σ. Folosindu-ne de ordinul unui ciclu, găsim pe rând ciclii și deci x = $(1,9,5,3)(2,4,7,8,6)(10,11)$

Exercițiul 2

Fie $\sigma = (1324) \in S_4$.

1. Determinați soluțiile ecuației $x^2 = \sigma, x \in S_4$
2. Determinați soluțiile ecuației $x^3 = \sigma, x \in S_4$.
3. Aflați numărul de elemente din $H =< \sigma >$ (subgrupul generat de σ în S_4.
4. Aflați indicele lui H în S_4.
5. Arătați că H nu e subgrup normal în S_4.
6. Determinați cel mai mic subgrup normal al lui S_4 care-l conține pe H.

(Examen algebră, 31.01.2020, seria 13)

Rezolvare:

1. Pentru ca ecuația $x^2 = \sigma, x \in S_4$ să aibă soluție, σ trebuie să fie o permutare pară.
   Putem scrie σ astfel
   $$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$
   ord(σ) = 2 + 3 = 5 $\Rightarrow$ sgn(σ) = -1, σ este impară deci ecuația nu are soluție.

2. Trebuie să știm că atunci când ridicăm o transpoziție la puterea a treia obținem aceeași transpoziție, când ridicăm un ciclu de lungime trei la puterea a treia obținem permutarea identică, iar când ridicăm un ciclu de lungime patru la puterea a treia obținem tot un ciclu de lungime patru. Astfel, soluția ecuației $x^3 = \sigma, x \in S_4$ poate fi doar un ciclu de patru. Fie permutarea
   $$x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$
   $$x^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$$
   $$\sigma = x^3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

3. σ este un ciclu de lungime patru, deci $\sigma^4 = e$. Astfel numărul de elemente din $H =< \sigma >$ este 4, $H = \{e, \sigma, (12)(34), (1423)\}$.

4. S_4 are $4! = 24$ elemente. Indicele lui H în S_4, $[S_4 : H] = \frac{\text{ord}(S_4)}{\text{ord}(H)} = 6$.

5. Dacă H ar fi subgrup normal în S_4, atunci $\forall x \in S_4, \forall y \in H\ xyx^{-1} \in H$.
Fie $x = (123)$
$$x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$
$x^{-1} = (132)$
$$x = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$$
$x\sigma x^{-1} = (123)(1324)(132) = (1342) \notin H \Rightarrow H$ nu e subgrup normal.

6. Vom demonsta la exercițiul următor că S_4 are următoarele subgrupuri normale $\{e\}, K, A_4, S_4$. Dintre acestea, cel mai mic subgrup care îl conține pe H este S_4.

Exercițiul 3

Fie $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$. Să se arate că:

1. K este subgrup normal în S_4 (deci și în A_4).
2. S_4/K este izomorf cu S_3.
3. A_4 nu are subgrupuri de ordin 6.
4. Subgrupurile normale ale lui S_4 sunt $\{e\}, K, A_4, S_4$.

Referință: Cornel Băețică, Crina Boboc, Sorin Dăscălescu, Gabriel Mincu, ”Probleme de algebră”, capitolul 3, exercițiul 66

Rezolvare:

1. Fie $\sigma \in S_4$. Dacă K este subgrup normal în S_4, atunci $\sigma x \sigma^{-1} \in K$, $x \in S_4$. $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) \in K$. Analog și pentru celelalte elemente din K, deci K subgrup normal.

2. $|S_4/K| = 6$, deci S_4/K este izomorf cu $\mathbf{Z}_6$ sau S_3 *(demonstație tutoriat 3, exercițiul 3)*. Dacă S_4/K ar fi izomorf cu $\mathbf{Z}_6$ atunci acesta ar fi grup ciclic și ar conține un element de ordin 6, pe care îl notez cu $\widehat{\sigma}$. Dar $\sigma \in S_4$ permutare deci $\text{ord}(\sigma) \in \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci $\widehat{\sigma}$ nu poate avea ordin 6. Deci S_4/K nu este izomorf cu $\mathbf{Z}_6 \Rightarrow S_4/K \cong S_3$.

3. A_4 este subgrupul permutărilor pare din S_4. $\text{ord}(A_4) = 12$. $A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$. A_4 are un element de ordin 1, trei elemente de ordin 2 și opt elemente de ordin 3. Dacă X este un subgrup cu 6 elemente, atunci X nu poate fi izomorf cu $\mathbf{Z}_6$ pentru că nu are niciun element de ordin 6. Deci X ar trebui să fie izomorf cu S_3. Astfel X trebuie să conțină două elemente de ordin 2, și acestea pot fi doar (12)(34), (13)(24), (14)(23). Alegând oricare dintre ele o vor genera pe cea de-a treia. Deci nu putem obține un subgrup cu 6 elemente al lui A_4.

4. Fie X subgrupurile normale al lui S_4. Vom analiza două cazuri:
   a) $X \subseteq A_4$
   b) $X \nsubseteq A_4$
   a) În acest caz, conform teoremei lui Lagrange, un subgrup propriu al lui A_4 are ordinul 2, 3, 4 sau 6. Deja am demonstrat că nu există subgrupuri cu 6 elemente. Un grup cu ordinul 4 nu are elemente de ordin 3 (nu ar respecta Langrange, $3 \nmid 4$). Deci singurul grup cu 4 elemente este K. Subgrupurile cu 3 sau 2 elemnente sunt ciclice, generate de o transpoziție sau un ciclu de trei. Acestea nu pot fi grupuri normale.
   b) În acest caz, există $\sigma \in X$ permutare impară. σ poate fi o transpoziție sau un ciclu de lungime 4. Dacă σ este transpoziție $\sigma = (ij)$, atunci $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i)\tau(j)) \in X \ \forall \ \tau \in S_4$. Deci X conține toate transpozițiile, iar acestea generează S_4 (vezi problema următoare). Dacă σ este ciclu de lungime 4, $\sigma = (ijkl)$, atunci X va conține toti ciclii de lungime 4. $\sigma^2 = (ik)(jl) \in X$, deci X va conține și toate produsele de câte două transpoziții. Dar (ijkl)(iljk) = (jlk) $\in X$, deci X conține toți ciclii de lungime 3 $\Rightarrow X = S_4$.

Exercițiul 4

Să se arate că S_n este generat de fiecare din următoarele mulțimi de permutări:

1. (12), (13), ..., (1,n)
2. (12), (23), ..., (n-1, n)
3. (12), (12...n)

Rezolvare:

Știm ca orice permutare poate fi descompusa in transpoziții. Este deci suficient să demonstrăm ca având permutările date putem forma orice transpoziție. Astfel, fiecare permutare din S_n poate fi descompusă in transpoziții iar fiecare transpoziție în permutările date.

1. Vrem să obținem în cazul general transpoziția (a, b), cu $a, b \leq n$. Având permutările de forma (1, x), se poate observa că $(a, b) = (1, a)(1, b)(1, a)$. Cum avem $(1, a)$ și $(1, b)$ pentru orice a și b în setul nostru de permutări, putem obține orice transpoziție și deci S_n este generat de acest set.

2. Observăm că în acest set de mulțimi dacă facem produsul elementelor în stilul $(1, 2)(2, 3)(3, 4)...(a - 1, a)$ vom obține o permutare circulară a primelor a elemente la stânga. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a-1 & a \\ 2 & 3 & 4 & \dots & a & 1 \end{smallmatrix}\right) \in S_{11}$. Vedem că dacă am permuta circular la dreapta primele a-1 elemente acum am obține permutarea (1, a) pentru orice a. Deci, am obține toate permutările de la punctul anterior iar desrpre ele știm deja că genereaza pe S_n. Pentru a permuta circular la dreapta primele a-1 elemente trebuie să permutam circular la stanga de a-1 ori primele n elemente. Deci $(1, a) =$

$(1,2)(2,3)(3,4)...(a-1,a)$ $((1,2)(2,3)(3,4)...(a-2,a-1))^{a-2}$. Prin urmare, setul dat de permutări generează S_n.

3. În mod analog ca subpunctul de mai sus, putem să incercăm să generăm elementele de forma (a-1, a) avand permutările date. Dacă le putem genera pe toate ne putem folosi de punctul anterior în a argumenta concluzia. Observăm că $(a-1,a) = (1,2,...,n)^{a-1}(1,2)(1,2,3,...,n)^{n-a+1}$. Astfel, putem genera orice element din multimea anterioară de permutări iar cum acestea generează toată mulțimea S_n, avem deci concluzia că elementele date generează toată mulțimea.