CURS 7

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SEMANTICA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Definiţia 6.8

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$\varphi_\chi(\chi')$:= expresia obţinută din φ prin înlocuirea tuturor apariţiilor lui χ cu χ'.

$\varphi_\chi(\chi')$ se numeşte substituţia lui χ cu χ' în φ. Spunem şi că $\varphi_\chi(\chi')$ este o instanţă de substituţie a lui φ.

Propoziţia 6.9

Pentru orice formule φ, χ, χ', $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Propoziţia 6.10

Pentru orice formule φ, χ, χ',

$$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare şi $v \in V$ o variabilă.

Notaţie.

Pentru orice $a \in \{0, 1\}$, definim evaluarea $e_{v \leftarrow a} : V \to \{0, 1\}$ prin

$$e_{v \leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziţia 7.1

Fie θ o formulă şi $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ,

$$(e_{v \leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Demonstraţie. Exerciţiu suplimentar.

Propoziţia 7.2

Pentru orice formule φ, ψ, θ şi orice variabilă $v \in V$,

(i) $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$.

(ii) Dacă φ este tautologie atunci şi $\varphi_v(\theta)$ este tautologie.

(iii) Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci şi $\varphi_v(\theta)$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie. Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară şi $a := e^+(\theta)$. Aplicând Propoziţia 7.1, rezultă că $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\varphi)$ şi $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$.

(i) Deoarece $\varphi \sim \psi$, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$.

(ii) Deoarece φ este tautologie, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 1$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$.

(iii) Deoarece φ este nesatisfiabilă, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 0$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$. □

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică şi o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observaţie.

$v_0 \to v_0$ este tautologie şi $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Notaţii.

- Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ şi o numim adevărul.
- Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\perp$ şi o numim falsul.

Observaţie.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

Notaţii

- Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
- Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

- Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie şi $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie şi $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Propoziţia 7.3

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 7.4

$$\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$$

$$\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie Γ o mulţime de formule.

Definiţia 7.5

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$). Notaţie: $e \vDash \Gamma$.
- Γ este satisfiabilă dacă are un model.
- Γ este finit satisfiabilă dacă orice submulţime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem şi că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Mulţimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.
Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

$$Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi).$$

Fie Γ, Δ mulţimi de formule.

Definiţia 7.6

O formulă φ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.
Notaţie: $\Gamma \vDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulţimea consecinţelor semantice ale lui Γ. Aşadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiţia 7.7

- Δ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.
  Notaţie: $\Gamma \vDash \Delta$.
- Γ şi Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Notaţie: $\Gamma \sim \Delta$.

Observaţie.

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziţia 7.8

(i) $Mod(\emptyset) = \{0,1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al mulţimii vide. În particular, mulţimea vidă este satisfiabilă.

(ii) $Cn(\emptyset)$ este mulţimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 7.9

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$.

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 7.10

Fie Γ o mulţime de formule. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 7.11

Fie Γ o mulţime de formule.

(i) $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puţin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ şi $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Demonstraţie.

(i) Avem că $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ şi $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ şi $e^+(\neg\varphi) = 1$ $\iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie e un model al lui Γ. Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\square$

Propoziţia 7.12

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule.

(i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$.

(iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.

(iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ este o altă mulţime finită de formule, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

  (a) $\Gamma \sim \Delta$.

  (b) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulţime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulţime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulţime Γ de formule şi pentru orice formulă φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă există o submulţime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.

Propoziţia 7.13

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Lema 7.14
Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un şir (ε_n) în $\{0,1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulţime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \to \{0,1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0,1,\ldots n\}$.

Demonstraţie. Definim şirul (ε_n) prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1_0) Pentru orice submulţime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2_0) Există o submulţime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0, avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că P_0 este satisfăcută. În cazul (1_0) este evident. Să considerăm cazul (2_0). Fie Δ o submulţime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulţime finită a lui Γ. Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e. Rezultă că $e \vDash \Delta$ şi, din faptul că $e \vDash \Delta_0$, obţinem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Demonstraţie. (continuare)

Pasul de inducţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ a.î. $\boldsymbol{P_n}$ este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulţime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ şi } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulţime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1}, avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_{n+1}}$ este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulţime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulţime finită a lui Γ. Prin urmare, conform $\boldsymbol{P_n}$, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Din (2_{n+1}), obţinem şi $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. $\square$

Teorema 7.15 (Teorema de compacitate)
Pentru orice mulţime Γ de formule,

$$\Gamma \text{ este satisfiabilă ddacă } \Gamma \text{ este finit satisfiabilă.}$$

Demonstraţie.

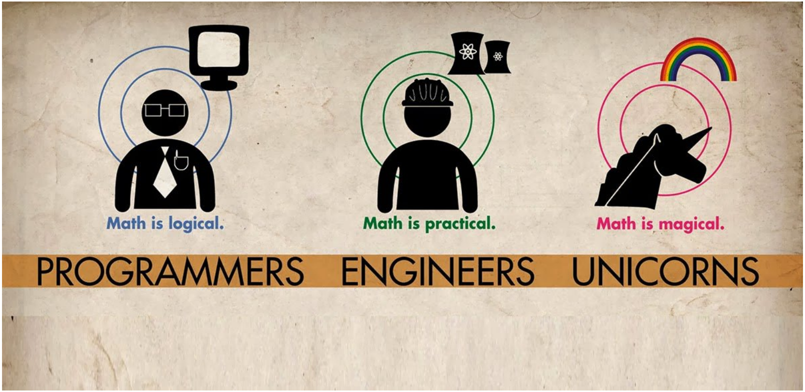
"$\Rightarrow$" Evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\overline{e} : V \to \{0,1\}, \quad \overline{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este şirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că $\overline{e}$ este model al lui Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară şi fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulţime finită a lui Γ, putem aplica Proprietatea $\boldsymbol{P_k}$ pentru a obţine un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Atunci $\overline{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziţia 6.1, rezultă că $\overline{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\overline{e} \vDash \varphi$.

Prin urmare, $\overline{e}$ este model al lui Γ, deci Γ este satisfiabilă. $\square$



Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.