Lista 2.

– Rezolvare –

①. Luăm pe rând, după numărul de elemente ale partițiilor:

– cu 1 element:

$(\{1,2,3,4\})$ → Relația de echivalență coresp. este $\{(1,1); (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) \ldots\}$ (fiecare cu fiecare).

– cu 2 elemente –

$(\{1,2\}, \{3,4\})$, $(\{1,3\}, \{2,4\})$, $(\{1,4\}, \{2,3\})$, $\cancel{(\{2,3\}, \{1\}}$, $(\{1\}, \{2,3,4\})$, $(\{2\}, \{1,3,4\})$, $(\{3\}, \{1,2,4\})$, $(\{4\}, \{1,2,3\})$.

Relația corespunzătoare pt. $(\{1,2\}, \{3,4\})$ este

$\{(1,1); (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$.

– cu 3 elemente –

$(\{1,2\}, \{3\}, \{4\})$, $(\{1,3\}, \{2\}, \{4\})$, $(\{1,4\}, \{2\}, \{3\})$, $(\{2,3\}, \{1\}, \{4\})$, $(\{2,4\}, \{1\}, \{3\})$, $(\{3,4\}, \{1\}, \{2\})$.

Pt. $(\{1,2\}, \{3\}, \{4\})$ avem relația

$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,1)\}$.

– cu 4 elemente –

$(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\})$ → relația de echivalență este $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

② Pentru a dem. că o rel. este de echivalență, trebuie să dem. că îndeplinește propr. de sim, refl., tranz.

a). $x, y \in \mathbb{R}$, $x \alpha y$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$.

Verificăm

① Reflexivitate. $x \alpha x$? $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cum $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \alpha x$ ⓐ

② Simetrie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \alpha y$. Trebuie să verificăm dacă $y \alpha x$.

$x \alpha y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x-y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow y \alpha x$. ⓑ

③ Tranzitivitate. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \alpha y$ și $y \alpha z$.
Trebuie să verificăm dacă $x \alpha z$.

$$\left.\begin{array}{l} x \alpha y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ y \alpha z \Rightarrow y - z \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow (x-y) + (y-z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Z}. \text{ ⓒ}$$

a, b, c $\Rightarrow$ α este rel. de echivalență.

b) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \beta y$ dacă $|x - y| < 2$.

① Reflexivitate. Fie $x \in \mathbb{R}$, $|x - x| = 0 < 2 \Rightarrow x \beta x$.

② Simetrie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x \beta y \Rightarrow |x-y| < 2$,
deci $|-(x-y)| = |x-y| < 2 \Rightarrow |y - x| < 2 \Rightarrow y \beta x$.

③ Tranzitivitate. Fie x, y, z a.î. $x \beta y$, $y \beta z$.

~~Pent~~ Pentru a demonstra că relația nu este tranzitivă, este suficient să găsim o pereche x, y, z a.î. $x \beta y$ și $y \beta z$ dar $x \not\beta z$.

Putem alege $x=0$, $y=1{,}5$, $z=3 \in \mathbb{R}$. avem că:

$|x-y|<2$, deci $x \beta y$

$|y-z|<2$, deci $y \beta z$

dar $|x-z| = 3 \not< 2$, deci $x \not\beta z$.

Din cele de mai sus avem deci că β nu e rel. de echivalență.

c) $x, y \in \mathbb{R}$, $x \gamma y$ dacă $x+y \in \mathbb{Z}$.

① Reflexivitate. Fie $x \in \mathbb{R}$. Pt. ca $x \gamma x$ trebuie ca $x + x \in \mathbb{Z}$. Alegând $x = \frac{1}{3}$, se obține deci că $x \not\gamma x$, deci γ nu e rel. de echivalență.

⑤ Orice relație de echivalență pe o mulțime partiționează în mod unic mulțimea, și viceversa, orice partiție a unei mulțimi determină o relație de echivalență. ~~a ac~~ Astfel, cerința este echivalentă cu a determina numărul de moduri de a partiționa mulțimea în 2 mulțimi. ~~Ea~~

Pentru a calcula acest număr, considerăm pe rând că una dintre mulțimi are:

- 1 element și deci avem: C_{2020}^{1} moduri
- 2 elemente și deci avem: C_{2020}^{2} moduri

⋮

- 1010 elemente și deci avem: C_{2020}^{1010} moduri.

Nu considerăm și cazurile cu mai mult de 1010 elemente deoarece se repetă în cele de mai sus. (Adică dacă alegem ca o mulțime să aibă 1011 elemente e ca și cum am alege ca cealaltă să aibă 1009 elemente).

Deci nr. căutat este:

$$N = C_{2020}^{1} + C_{2020}^{2} + \ldots + C_{2020}^{1010}.$$

Avem următoarele proprietăți pt. combinări.

1) $C_{2020}^{0} + C_{2020}^{1} + \ldots + C_{2020}^{2020} = 2^{2020}$.

2) $C_{2020}^{0} + C_{2020}^{1} + \ldots + C_{2020}^{1010} = C_{2020}^{1010} + C_{2020}^{1011} + \ldots + C_{2020}^{2020}$.

~~Dar~~ 3) $C_{2020}^{0} = C_{2020}^{2020} = 1$.

Din 1, 2, 3 $\Rightarrow N = \dfrac{2^{2020} - C_{2020}^{0} - C_{2020}^{1} - C_{2020}^{1010}}{2}$

$$N = \frac{2^{2020} - 2 - C_{2020}^{1010}}{2}.$$

⑤ Pentru a stabili dacă ~ este relație de echivalență trebuie să verificăm cele 3 proprietăți:

① Reflexivitatea: pt. $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$, $x \sim x$. Cum pt. $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ $x^2 - x = x^2 - x \Rightarrow x \sim x\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}$, deci relația este reflexivă.

② Simetria. Pt. $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y$ trebuie ~~atunci~~ ca $y \sim x$.

$x \sim y \Leftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$ sau $x^2 - 5x = y^2 - 5y \Rightarrow$

~~Cum~~ $\Rightarrow y^2 - y = x^2 - x$ sau $y^2 - 5y = x^2 - 5x \Rightarrow$

$\Rightarrow y \sim x. \Rightarrow$ Relația ~ este simetrică.

③ Tranzitivitatea. pt. $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \sim y$, $y \sim z$ trebuie $x \sim z$. Putem să intuim că această relație nu este tranzitivă, din forma de mai sus a relației. Astfel, e suficient să găsim un contra-exemplu.

Alegem: $x = 1$, $y = 0$, $z = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - x = 1^2 - 1 = 0 \\ y^2 - y = 0^2 - 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \sim y.$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2 - 5y = 0^2 - 0 = 0 \\ z^2 - 5z = 25 - 25 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y \sim z.$$

Dar

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - x = 1^2 - 1 = 0 \\ z^2 - z = 25 - 5 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 5x = 1^2 - 5 = -4 \\ z^2 - 5z = 25 - 25 = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x \not\sim z.$$

Deci relația ~ nu este de echivalență.

7. Considerăm mai întâi $\mathbb{Z}_{31}$. Pentru fiecare număr trebuie să determinăm clasa lui de echivalență, ceea ce este echivalent cu a găsi restul împărțirii ~~at~~ numărului la 31.

~~Astfel~~.

$2019^{2019} = (M_{31}+4)^{2019} = M_{31}+4^{2019}$. Deci este suficient să vedem cât este 4^{2019} mod 31. Pentru a putea calcula rapid, vom folosi mica teoremă a lui Fermat, care spune că dacă p este un nr. prim, ~~at~~ și a un nr. nat, atunci

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Prin urmare, putem scrie:

$$4^{2019} \equiv 4^{9} \pmod{31}, \text{ deoarece } 2019 \equiv 9 \bmod 30.$$

$$4^{9} = 4\cdot(16)^{4} = 4\cdot 8^{2} = 4\cdot 2 = 8 \pmod{31}$$

În mod analog, avem:

$$2020^{2020} = M_{31} + 5^{2020} \equiv 5^{10} \pmod{31}$$

$$25^{5} = 25\cdot(25)^{4} = 5 \pmod{31}$$

$$2021^{2021} = 6^{11} \pmod{31} = 6\cdot 36\cdot \cancel{5}^{4} = 6\cdot 5\cdot 5 = 26 \pmod{31}$$

În mod analog, pentru $\mathbb{Z}_{100}$, trebuie să determinăm restul fiecărui nr. la împărțirea cu 100.

Pentru:

$$2019^{2019} = (2020-1)^{2019} = M_{2020^2} + C_{2019}^{2018} \cdot 2020 \cdot (+1) - 1$$

$$= 2020 \cdot 2019 - 1 \pmod{100} = 79 \pmod{100}.$$

(Am folosit binomul lui Newton și am ținut cont că $2020^2 = 0 \bmod 100$).

Pentru:

$$2020^{2020} = 202^{2020} \cdot 10^{2020} = 0 \pmod{100}$$ (se împarte exact la 100).

Pentru:

$$2021^{2021} = (2020+1)^{2020} = \cancel{2021} \, M_{2020^2} + 2021 \cdot 2020 + 1^{2020} =$$

$$= 21 \bmod 100.$$

(12).

Lista 1.

$f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\max(f,g)$ surjectivă, $\min(f,g)$ injectivă

Cum $\max(f,g)$ este surjectivă $\Rightarrow (\exists)\, y_0 \in \mathbb{N}$ c.î.

$\max(f(y_0), g(y_0)) = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow f(y_0) = g(y_0) = 0$.
$f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$(\exists)\, y_1 \in \mathbb{N}$ c.î. $\max(f(y_1), g(y_1)) = 1$. y_1 nu poate fi y_0 deoarece $\max(f(y_1), g(y_1)) \neq 0$. Dacă una din funcții este 0, atunci funcția $\min(f,g)$ in y_1 va fi tot 0, deci nu va fi injectivă. Astfel, $f(y_1) = g(y_1) = 1$.

Vom demonstra deci prin inducție că $f(k) = g(k)$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$.

Fie $P(k)$: $f(k) = g(k)$, $k \in \mathbb{N}$

Pasul 1: Verificăm relația pt. $k=0$ (am verificat mai sus).

Pasul 2: Considerăm $P(0), P(1), \dots, P(k)$ adevărate și demonstrăm $P(k+1)$

Analog, cum funcția max este surjectivă $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists)\, y_{k+1}$ c.î. $\max(f(y_{k+1}), g(y_{k+1})) = k+1$ y_{k+1} nu poate fi niciunul din $\{y_0, y_1, \dots y_k\}$ deoarece $\max(f(y_{k+1}), g(y_{k+1})) \notin \{0, 1, \dots, k\}$. ~~Înseamnă~~

Cum $\max(f(y_{k+1}), g(y_{k+1})) = k+1$, înseamnă că cel puțin una din funcții este $k+1$.

În mod analog, dacă una din funcții ar fi mai mică decât $k+1$, atunci funcția $min(f(y_{k+1}), g(y_{k+1}))$ nu ar mai fi injectivă.

Deci $f(y_{k+1}) = g(y_{k+1}) = k+1 \Rightarrow P(k+1)$ A

$\Rightarrow P(k)$ A $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

Cum $P(k)$ A $(\forall)\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow (\forall)\ x \in \mathbb{N}$ $f(x) = g(x)$

deoarece $max(f(x), g(x)) = t \in \mathbb{N}$, iar din $P(t)$

avem că $f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$ c.c.t.d.

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \le 0 \\ mx, & x \in (0,1) \\ m^2 - x, & x \ge 1 \end{cases}$$

$x^2 + m \ge m \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R}$

f strict descrescatoare pe $(-\infty, 0]$ cu $Im f_{/(-\infty,0]} = [m, +\infty)$

$Im f_{/(0,1)} = (0, m), \ m > 0 \qquad Im f_{/(0,1)} = 0, \ m = 0.$

$Im f_{/(0,1)} = (m, 0), \ m < 0$

$m^2 - x$ strict descrescatoare $Im f_{/[1,+\infty)} = (-\infty, m^2-1]$

Pentru $m = 0$ f nu e inj $(f(0) = f(\frac{1}{2}) = 0.)$

f injectivă dacă $m^2 - 1 \le 0, \ m > 0$

$m^2 \le 1$

$|m| \le 1 \qquad -1 \le m \le 1$

Pentru $m < 0$ $\left.\begin{array}{l} Im f_{/(-\infty,0)} = (m, +\infty) \\ Im f_{/(0,1)} = (m, 0) \end{array}\right| \Rightarrow$ f nu e injectivă $\Rightarrow m \in (0, 1].$

f surjectivă dacă $Im f = \mathbb{R}$

I. $m > 0$

$[m, +\infty) \cup (0, m) \cup (-\infty, m^2-1] = \mathbb{R}$

$(0, +\infty) \cup (-\infty, m^2-1] = \mathbb{R}$

$m^2 - 1 \ge 0 \qquad \left.\begin{array}{l} m^2 \ge 1 \\ m > 0 \end{array}\right| \Rightarrow m \ge 1$

$m \in [1, +\infty)$

II. $m = 0 \qquad [0, +\infty) \cup (-\infty, -1] = \mathbb{R}$ (fals)

III. $m < 0 \qquad [m, +\infty) \cup (m, 0) \cup (-\infty, m^2-1] = \mathbb{R}$

$[m, +\infty) \cup (-\infty, m^2-1] = \mathbb{R}$

$$m^2 - 1 \geq m$$

$$m^2 - m - 1 \geq 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$m_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$m_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$m < 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right]$$

f inj $\Rightarrow$ f inj și surj $\Rightarrow$ $m = 1$

5. $f: \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$ $f(x+iy) = x + (-1)^{x+y} y$

$\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, a,b \in \mathbb{Z}\}$ $i \in \mathbb{C}, i^2 = -1$

f surjectivă dacă $(\forall)\ a \in \mathbb{Z}\ \exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ a.î.

$f(x+iy) = a$

$x + (-1)^{x+y} y = a$

$x = a-1$
$y = a-1$ $\Rightarrow f(x+iy) = a-1 + (-1)^{(a-1)+(a-1)}$

$= a-1 + (-1)^{2(a-1)}$

$= a-1+1 = a.$

Deci f este surjectivă.

6. f surjectivă și strict monotonă $f(f(n)) \geq n$
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$

I. f strict descrescătoare

$f(0) > f(1) > \dots$

f surjectivă $\Rightarrow (\forall)\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ x$ a.î. $f(x) = n$

Notez $f(0) = y$.

f surjectivă $\Rightarrow \exists\ x'$ a.î. $f(x') = y+1$

f strict desc $\underset{f(x')}{y+1} > \underset{f(0)}{y}$

$\Rightarrow x' < 0$
Dar $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\Bigg| \Rightarrow$ contradicție

f nu este strict descrescătoare

ii. f strict descrescătoare

$f(0) < f(1) < \dots$

Pp că $f(0) \neq 0$, atunci $f(0) = y$, $y \neq 0$

f surj $\Rightarrow \exists\, x$ a.î. $f(x) = 0$, $x \neq 0$

$y \in \mathbb{N}, y \neq 0 \Rightarrow \underset{f(0)}{\underset{\shortparallel}{y}} > \underset{f(x)}{\underset{\shortparallel}{0}}$

f strict descrescătoare $\Rightarrow 0 > x$, $x \in \mathbb{N}$ $\Big| \Rightarrow$ contradicție

Astfel pp făcută este falsă $\Rightarrow f(0) = 0$

$f(f(n)) \geq f(n)$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow f(n) \geq n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

$f(0) \geq f(0)$

$f(f(1)) \geq f(1) \Rightarrow f(1) \geq 1$

f surjectivă $\Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x) = 1$

$f(x) \geq x$ $(\forall)\, x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Pentru $x \geq 2$ $f(x) \geq 2$

$f(0) = 0$ $\Big\} \Rightarrow f(1) = 1$.

$P(n):\ f(n) = n$

$P(n) \rightarrow P(n+1)$: $\exists\, x \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x) = n+1$

$f(x) \geq x$ $(\forall)\, x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Pentru $x \geq n+2$ $f(x) \geq n+2$

$f(0) = 0$ $f(1) = 1$

$\dots f(n) = n$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n+1) = n+1$

conform pp inducției matematice $f(x) = x$ $(\forall)\, x \in \mathbb{N}$

14. $m, n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ $m \leq 2n$

$f : \{1, 2, \ldots, 2n\} \to \{1, 2, \ldots, 2n\}$ bijective

dintre $1 + f(1), 2 + f(2), \ldots, 2n + f(2n)$ m impare

f bijectivă $\Rightarrow$ f injectivă și surjectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(1), f(2), \ldots, f(2n)$ iau toate valorile

din $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ $\Rightarrow$ n pare, n impare

$x + f(x)$ impar dacă x și $f(x)$ au parități diferite:

x par, $f(x)$ impar sau x impar, $f(x)$ par

I. $m \leq n$

x f par $\Rightarrow C_n^x$

$m - x$ f impar $\Rightarrow C_n^{m-x}$

$C_n^0 \cdot C_n^m + C_n^1 \cdot C_n^{m-1} + \ldots + C_n^n \cdot C_n^0$

II. $m > n$, $m = n + k$

$C_n^k \cdot C_n^{m-k} + C_n^{k+1} \cdot C_n^{m-k-1} + \ldots + C_n^n \cdot C_n^k$.

15. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(f(n)) + f(n) = 2n + 3, \forall n \in \mathbb{N}$

i) Pp că f nu e inj $\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y$ a.î.

$$f(x) = f(y)$$

$$f(f(x)) = f(f(y))$$

$$f(f(x)) + f(x) = f(f(y)) + f(y)$$

$$2x + 3 = 2y + 3 \Rightarrow x = y$$

Deci f este injectivă

ii)

$f(0) = a \quad f(a) + f(0) = 3. \qquad f(n) < 2n+3$

$f(0) = 0 \quad 2f(0) = 3$ (fals)

$f(0) = 1 \quad f(1) = 2.$

$f(0) = 2 \quad f(2) = 1 \Rightarrow f(1) + f(2) = 7$

$\Rightarrow f(1) = 6.$

$f(0) = 3 \quad f(3) = 0. \qquad f(n) < 2n+3 \Rightarrow f(1) < 5$ / ∞

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3,$$

$f(0) + f(3) = \qquad n = 3 \; f(f(3)) + f(3) =$

$f(0) + f(3) = 9$

$n = 0 \quad f(f(0)) + f(0) = f(3) + f(0) = 3 \Rightarrow$ contradicție

Deci $f(0)=1 \quad f(1)=2$.

$$f(f(2)) + f(1) = 5$$

$$f(2) = 3.$$

$P(n) \quad f(n) = n+1$

$P(n) \to P(n+1) \quad f(f(n)) + f(n) = 2n+3$

$$f(n+1) + n+1 = 2n+3$$

$$f(n+1) = n+2$$

$\Rightarrow$ cf pp inducției $f(n) = n+1$.

Lista 2

3. $\mathcal{R}$ relații binare $\{1,2,3\}$

$$g : \mathcal{R} \to \{0,1,\dots,7\}$$

$$g(\rho) = a_1 + 2a_2 + 4a_3$$

(1) reflexivitate $\quad x \rho x \ (\forall)\, x$

(2) simetrie $\quad x \rho y \Rightarrow y \rho x \ (\forall)\, x, y$

(3) tranzitivitate $\quad x \rho y \ \ y \rho z \Rightarrow x \rho z \ (\forall)\, x, y, z$

Voi reprezenta relațiile sub forma unor tabele 3x3 unde 1 reprezintă că cele 2 elemente sunt în relația ρ, 0 în caz contrar

① $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ρ	1	2	3
1	0	0	0
2	1	0	1
3	0	0	0

② $g(\varphi) = 1 \iff a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 0$

φ	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	1
3	0	0	1

③ $g(\varphi) = 2 \iff a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 0,$

φ	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	1	0

$1\ 2 \cdot 2\ 3 \Rightarrow 1\ 3$ fals

④ $g(\varphi) = 3 \iff a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 0$

φ	1	2	3
1	1	1	0
2	1	1	1
3	1	0	1

⑤ $g(\varphi) = 4 \iff a_1 = 0 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 1$

φ	1	2	3
1	0	0	1
2	1	0	0
3	0	1	0

⑥ $g(\varphi) = 5 \iff a_1 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = 1$

φ	1	2	3
1	1	0	1
2	1	1	0
3	0	1	1

7 $g(\varphi) = 6 \Leftrightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$

φ	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

8 $g(\varphi) = 7 \Leftrightarrow a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1$

φ	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

$\Rightarrow Img = \{0, 1, \dots, 7\}$

1 ~~reflexivitate~~ $\Rightarrow$ diagonala principala are doar 1

2 simetrie $\Rightarrow$ tabelul este simetric față de diagonala principală