Breviar pentru Cursurile III şi IV de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Relaţii binare

Relaţii n–are, relaţii binare:

Definiţia 1.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulţimi. Se numeşte *relaţie n–ară* între mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulţime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observaţia 1.1. Pentru $n = 1$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie unară* pe o mulţime: prin definiţie, o *relaţie unară* pe o mulţime A este o submulţime a lui A.

Pentru $n = 2$ în definiţia anterioară se obţine noţiunea de *relaţie binară*.

Definiţia 1.2. Fie A şi B două mulţimi. Se numeşte *relaţie binară* între A şi B o submulţime R a produsului direct $A \times B$.

Pentru fiecare $a \in A$ şi fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a\,R\,b$ şi se citeşte: *a este în relaţia R cu b.*

Exemplul 1.1. Pentru orice mulţimi A şi B, produsul direct $A \times B$ este o relaţie binară între A şi B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relaţiile binare între A şi B).

Tipuri de relaţii binare:

Definiţia 1.3 (tipuri de relaţii binare). Fie A şi B mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relaţie binară între A şi B). R se zice:

- *funcţională* ddacă: pentru orice $a \in A$ şi orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a\,R\,b_1$ şi $a\,R\,b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relaţie funcţională între A şi B se mai numeşte *funcţie parţială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$; o relaţie funcţională totală între A şi B se mai numeşte *funcţie* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi orice $b \in B$, dacă $a_1\,R\,b$ şi $a_2\,R\,b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a\,R\,b$.

Remarca 1.1. Definiţia de mai sus a unei funcţii este exact definiţia din cursul al doilea, în care identificăm o funcţie cu graficul ei: o funcţie $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noţiunea de funcţie injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relaţie funcţională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă şi surjectivă.

Într–adevăr:

Remarca 1.2. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relaţie funcţională (funcţie parţială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puţin un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- aşadar, R este o **funcţie** ddacă este o **relaţie funcţională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puţin un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie injectivă şi surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relaţie funcţională totală injectivă/surjectivă/injectivă şi surjectivă** ddacă este o **funcţie injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Definiţia 1.4. Pentru orice mulţime A,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relaţie binară între A şi A, numită *diagonala lui A*.

Remarca 1.3 (Δ_A = egalitatea pe A). Pentru orice mulţime A, Δ_A este chiar **relaţia de egalitate pe** A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a \, \Delta_A \, b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarca 1.4 ($\Delta_A = id_A$). Pentru orice mulţime A, Δ_A este o funcţie, chiar o funcţie bijectivă, anume **funcţia identică a lui A (identitatea lui A)**:

$$\Delta_A = id_A : A \to A, \text{ pentru orice } a \in A, \, id_A(a) = a.$$

Operaţii cu relaţii binare:

- Relaţiile sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile obişnuite cu mulţimi: reuniunea, intersecţia, diferenţa etc..
- Astfel, pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţii binare R şi S între A şi B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relaţii binare între A şi B.

Definiţia 1.5. Pentru orice mulţimi A, B, A', B' şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $R' \subseteq A' \times B'$, se defineşte *produsul direct* al relaţiilor R şi R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relaţie binară între $A \times A'$ şi $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulţime I, orice familii de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ şi orice familie de relaţii binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se defineşte *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod\limits_{i \in I} R_i$, ca fiind următoarea relaţie binară între $\prod\limits_{i \in I} A_i$ şi $\prod\limits_{i \in I} B_i$: $\prod\limits_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall \, i \in I) \, (a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ şi } a_i \, R_i \, b_i)\} \subseteq \prod\limits_{i \in I} A_i \times \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Observaţia 1.2. Definiţia produsului direct de relaţii binare este diferită de definiţia produsului direct de mulţimi al aceloraşi relaţii binare, adică de produsul lor direct ca mulţimi. Mulţimile obţinute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecţie, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulţimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecţiei în cauză cu identitatea.

Remarca 1.5 (facultativă). Cu notaţiile din definiţia anterioară, dacă avem încă o pereche de relaţii binare $S \subseteq A \times B$ şi $S' \subseteq A' \times B'$, atunci, în cazul în care R, R', S şi S' sunt nevide:

$$R \times R' = S \times S' \text{ ddacă } [R = S \text{ şi } R' = S']$$

În general, dacă avem încă o familie de relaţii binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci, în cazul în care $I \neq \emptyset$ şi, pentru fiecare $i \in I$, $R_i \neq \emptyset$ şi $S_i \neq \emptyset$:

$$\prod_{i \in I} R_i = \prod_{i \in I} S_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (R_i = S_i)$$

Într–adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalenţa de mai sus rezultă, prin dublă implicaţie, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $\prod\limits_{i \in I} R_i = \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalenţa: $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Remarca 1.6 (facultativă). Desigur, şi pentru două familii de mulţimi nevide $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ indexate de aceeaşi mulţime nevidă I, avem:

$$\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i \in I} B_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (A_i = B_i),$$

pentru că, având o familie de elemente arbitrare $(x_i)_{i \in I}$, avem: $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow\; (\forall \, i \in I) \, (x_i \in A_i)$, şi la fel pentru $(B_i)_{i \in I}$, de unde rezultă că: $(A_i)_{i \in I}$ şi $(B_i)_{i \in I}$ au aceleaşi elemente ddacă, pentru fiecare $i \in I$, A_i şi B_i au aceleaşi elemente.

Definiţia 1.6. Pentru orice mulţimi A, B, C şi orice relaţii binare $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$, se defineşte *compunerea lui S cu R* ca fiind relaţia binară între A şi C notată $S \circ R$ şi definită prin: $S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists b \in B) [(a, b) \in R \text{ şi } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarca 1.7 (temă). Diagonala unei mulţimi este element neutru la compunere şi la dreapta, şi la stânga, i. e., pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ şi $\Delta_B \circ R = R$.

Remarca 1.8. Compunerea ca relaţii binare a două funcţii coincide cu compunerea lor ca funcţii. În particular, rezultatul ei este tot o funcţie.

Definiţia 1.7. Pentru orice mulţimi A, B şi orice relaţie binară $R \subseteq A \times B$, se defineşte *inversa lui R*, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relaţie binară între B şi A:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$$

Altfel scris: prin definiţie, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$:

$$b\, R^{-1}\, a \Leftrightarrow a\, R\, b$$

Remarca 1.9. A se observa faptul că, pentru orice relaţie binară R, se defineşte inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcţii, care se definesc numai pentru funcţiile bijective, această restricţie provenind atât din constrângerea ca relaţia binară să fie funcţie, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcţie (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiţia funcţiei este exact definiţia bijectivităţii (i. e. a injectivităţii şi surjectivităţii) în oglindă).

Remarca 1.10. Este imediat faptul că inversa ca relaţie a unei funcţii bijective este inversa ei ca funcţie (a se vedea şi remarca următoare).

Remarca 1.11 (temă). Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcţională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă şi surjectivă ddacă R^{-1} este funcţie.

Remarca 1.12. A se observa că o relaţie binară injectivă şi surjectivă nu este neapărat o funcţie (bijectivă), pentru că nu i se impune condiţia de a fi funcţională, şi nici cea de a fi totală.

Exerciţiul 1.1 (temă). Fie A, B mulţimi şi $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Remarca 1.13 (asociativitatea compunerii de relaţii binare). Fie A, B, C, D mulţimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ şi $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Remarca 1.14. Fie A, B, C mulţimi, $R \subseteq A \times B$ şi $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exerciţiul 1.2 (temă). Fie A, B, C şi I mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ şi $T \subseteq B \times C$ relaţii binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relaţii binare de la A la B, i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.

Să se demonstreze că:

- $R \circ \emptyset = \emptyset = \emptyset \circ R$
- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$

- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea şi cu intersecţia:**

  (i) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

  (ii) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

  Generalizare:

  (i) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$

  (ii) $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$

- **compunerea este distributivă faţă de reuniune, la stânga şi la dreapta:**

  (i) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$

  (ii) $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

  Generalizare:

  (i) $T \circ (\bigcup_{i \in I} R_i) = \bigcup_{i \in I} (T \circ R_i)$

  (ii) $(\bigcup_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup_{i \in I} (R_i \circ P)$

- **compunerea nu este distributivă faţă de intersecţie (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ şi $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ şi $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S)$)
- **compunerea (la stânga şi la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**

  (i) $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $T \circ R \subsetneq T \circ S$)

  (ii) $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$ (dar $R \subsetneq S$ nu implică $R \circ P \subsetneq S \circ P$)

  prin urmare:

  (i) $T \circ (\bigcap_{i \in I} R_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (T \circ R_i)$

  (ii) $(\bigcap_{i \in I} R_i) \circ P \subseteq \bigcap_{i \in I} (R_i \circ P)$

Să ne amintim definiţia puterilor unei mulţimi:
Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi.
Amintesc definiţia **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i \in I}$ (numit şi **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i \in I}$):

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\, (f(i) \in A_i)\}.$$

Fie A o mulţime arbitrară.
Amintesc că **puterile unei mulţimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\} = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A)\} = \prod_{i \in I} A.$$

Notaţia următoare, a *puterii a n–a a unei mulţimi* A, A^n, pentru un număr natural nenul n, corespunde cazului particular $I = \overline{1, n}$ şi $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

Notaţia 1.1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice mulţime A, se notează:

$$A^n := A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}.$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

2 Relaţii binare pe o mulţime

În cele ce urmează, când nu se va menţiona altfel, A va fi o mulţime arbitrară.

Definiţia 2.1. Se numeşte *relaţie binară pe* A o relaţie binară între A şi A, i. e. o submulţime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplul 2.1. A^2 şi Δ_A sunt relaţii binare pe A.

Remarca 2.1. Dacă A este finită şi nevidă, iar R este o relaţie binară pe A, atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulţimea vârfurilor A şi mulţimea arcelor R), aşadar relaţia binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

3 Operaţii cu relaţii binare pe o mulţime

Definiţia 3.1 (puterile naturale ale unei relaţii binare pe o mulţime). Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, se defineşte *puterea a n–a a lui R*, notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarca 3.1. Asociativitatea compunerii de relaţii binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relaţie binară R pe A şi orice număr natural nenul n:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}.$$

Nota 3.1. Pentru o relaţie binară R şi un $n \in \mathbb{N}$, se va deduce din context dacă notaţia R^n semnifică: $\underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R}$ (operaţie care poate fi definită numai dacă R este o relaţie binară pe o mulţime, nu între două mulţimi diferite) sau produsul direct de relaţii binare $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$ sau produsul direct de mulţimi $\underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n \text{ de } R}$.

Remarca 3.2. $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

Remarca 3.3. Pentru orice relaţie binară $R \subseteq A \times A$ şi orice $n \in \mathbb{Z}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Remarca 3.4 (comutarea şi adunarea exponenţilor întregi de acelaşi semn la compunerea puterilor unei relaţii binare pe o mulţime – facultativă). Fie $R \subseteq A^2$ şi n, k două numere întregi de acelaşi semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

4 Tipuri de relaţii binare pe o mulţime

Definiţia 4.1 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;

- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb şi bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb şi bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa.

Observaţia 4.1. Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relaţie binară totală** este specific **relaţiilor binare pe o mulţime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relaţii binare în general (relaţii binare între două mulţimi)**, şi **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relaţiilor binare pe o mulţime.

Remarca 4.1 (caracterizarea acestor tipuri de relaţii binare prin operaţii cu mulţimi). Fie R o relaţie binară pe A. Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică este Δ_A;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu şi reciproc;
- singura relaţie binară pe A care este simultan simetrică şi asimetrică este $\emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu şi reciproc;
- R este asimetrică şi tranzitivă ddacă R este ireflexivă şi tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă şi totală.

Definiţia 4.2 (tipuri de relaţii binare pe o mulţime). Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relaţie binară pe A). R se numeşte:

- *(relaţie de) preordine* ddacă e reflexivă şi tranzitivă;
- *(relaţie de) echivalenţă* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relaţie reflexivă, simetrică şi tranzitivă;
- *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relaţie reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică;
- *(relaţie de) ordine totală* ddacă e simultan o relaţie de ordine şi o relaţie totală (în acest al doilea sens de mai sus);

- *(relaţie de) ordine strictă* ddacă e asimetrică şi tranzitivă.

Remarca 4.2 (consecinţă a remarcii anterioare). • Întrucât orice relaţie de ordine este reflexivă, rezultă că o relaţie de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.

- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine.

- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Remarca 4.3. Orice relaţie de ordine este reflexivă, şi orice relaţie de ordine strictă este ireflexivă.

Nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan reflexive şi ireflexive. Prin urmare, nu există relaţii binare pe o mulţime nevidă care să fie simultan relaţii de ordine şi relaţii de ordine strictă.

A se vedea, în Cursul III, secţiunea facultativă despre matrici caracteristice.

5 Despre produsul direct de relaţii binare pe o mulţime

Lema 5.1. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ şi $(C_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi, iar $(Q_i)_{i\in I}$, $(R_i)_{i\in I}$ şi $(S_i)_{i\in I}$ familii de relaţii binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ şi $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

- $\prod\limits_{i\in I} R_i \subseteq \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i \subseteq S_i)$*;*

- $\prod\limits_{i\in I} R_i = \prod\limits_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0, i_1 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$*;*

- $(\prod\limits_{i\in I} R_i) \cap (\prod\limits_{i\in I} S_i) = \prod\limits_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ *(şi la fel pentru $\cup$, $\setminus$, Δ în loc de $\cap$);*

- $(\prod\limits_{i\in I} Q_i) \circ (\prod\limits_{i\in I} R_i) = \prod\limits_{i\in I}(Q_i \circ R_i)$*;*

- $(\prod\limits_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod\limits_{i\in I} R_i^{-1}$.

Propoziţia 5.1. *Fie I o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi şi $(R_i)_{i\in I}$ o familie de relaţii binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:*

(i) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este reflexivă ddacă R_i este reflexivă, pentru fiecare $i \in I$*

(ii) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} ireflexivă, atunci $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este ireflexivă*

(iii) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este simetrică ddacă R_i este simetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(iv) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este antisimetrică ddacă R_i este antisimetrică, pentru fiecare $i \in I$*

(v) dacă există $i_0 \in I$ cu R_{i_0} asimetrică, atunci $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este asimetrică*

(vi) $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este tranzitivă ddacă R_i este tranzitivă, pentru fiecare $i \in I$*

Prin urmare:

- $\prod\limits_{i\in I} R_i$ *este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine, ddacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este o preordine, respectiv echivalenţă, respectiv ordine;*

- $\prod_{i \in I} R_i$ *este o ordine strictă ddacă există* $i_0 \in I$ *a.î.* R_{i_0} *este o ordine strictă şi, pentru fiecare* $i \in I \setminus \{i_0\}$, R_i *este o ordine,*

pentru că: dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i *este antisimetrică, atunci:* $\prod_{i \in I} R_i$ *este asimetrică ddacă există* $i_0 \in I$ *cu* R_{i_0} *asimetrică.*

6 Relaţii de echivalenţă şi partiţii a unei mulţimi

Exemplul 6.1. Δ_A şi A^2 sunt relaţii de echivalenţă pe A, anume cea mai mică şi, respectiv, cea mai mare relaţie de echivalenţă pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relaţia de incluziune între mulţimi.

Definiţia 6.1. Fie A nevidă şi $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulţimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte *partiţie* a lui A ddacă satisface următoarele condiţii:

(i) pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$

(ii) pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulţimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)

(iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Propoziţia 6.1. *Fie* A *nevidă şi* $(A_i)_{i \in I}$ *o partiţie a lui* A*. Atunci, pentru orice* $x \in A$*, există un unic* $i_0 \in I$*, a. î.* $x \in A_{i_0}$.

Observaţia 6.1. În cele ce urmează vom defini **clasele unei relaţii de echivalenţă**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulţimilor. Aici, toate clasele de echivalenţă sunt mulţimi, în această accepţiune a relaţiilor binare ca fiind definite între mulţimi. Dacă adoptăm definiţia relaţiilor binare din sistemul axiomatic prezentat în Cursul I, care permitea unei relaţii binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relaţia de **cardinal echivalenţă**, studiată în Cursul II, este o relaţie de echivalenţă pe **clasa mulţimilor**, iar clasele ei de echivalenţă sunt **clase proprii, cu excepţia clasei lui** $\emptyset$ (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Pentru cele ce urmează, vom considera mulţimea A nevidă, şi o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relaţie binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ şi $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiţia simetriei, putem interschimba x şi y şi continua seria de implicaţii, obţinând implicaţie dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalenţa: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiţia 6.2. Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalenţă a lui* x *raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulţime a lui A, notată cu $\widehat{x}$ sau cu $x/\sim$: $\widehat{x} := x/_{\sim} := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarca 6.1. Observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\widehat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Propoziţia 6.2 (proprietăţile claselor de echivalenţă). *(i) Pentru orice* $x \in A$, $x \in \widehat{x}$*, şi, aşadar,* $\widehat{x} \neq \emptyset$.

(ii) Pentru orice $x, y \in A$*, avem:*

- *dacă* $x \sim y$*, atunci* $\widehat{x} = \widehat{y}$*;*
- *dacă* $(x, y) \notin \sim$*, atunci* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Propoziţia 6.3 (proprietăţile claselor de echivalenţă). *Pentru orice* $x, y \in A$*:*

- $x \sim y$ *ddacă* $y \sim x$ *ddacă* $x \in \widehat{y}$ *ddacă* $y \in \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} = \widehat{y}$*;*

- $(x,y) \notin \sim$ *ddacă* $(y,x) \notin \sim$ *ddacă* $x \notin \widehat{y}$ *ddacă* $y \notin \widehat{x}$ *ddacă* $\widehat{x} \cap \widehat{y} = \emptyset$.

Definiţia 6.3. Fiecare $x \in A$ se numeşte *reprezentant al clasei* $\widehat{x}$.

Remarca 6.2 (proprietăţile claselor de echivalenţă). Pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\widehat{x}$ ddacă $y \in \widehat{x}$.

Definiţia 6.4. Mulţimea claselor de echivalenţă ale lui $\sim$ se notează cu $A/\sim$ şi se numeşte *mulţimea factor a lui A prin* $\sim$ sau *mulţimea cât a lui A prin* $\sim$: $A/\sim = \{\widehat{x} \mid x \in A\}$.

Observaţia 6.2. Denumirile de **mulţime factor** şi **mulţime cât** se datorează faptului că mulţimea $A/\sim$ din definiţia anterioară se obţine prin "împărţirea mulţimii A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$" (a se vedea următoarea propoziţie).

Propoziţia 6.4 (clasele de echivalenţă formează o partiţie). *Mulţimea factor* $A/\sim$ *este o partiţie a lui* A.

Remarca 6.3. Funcţia $p : A \to A/\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \widehat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că $\widehat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiţia 6.5. Cu notaţiile de mai sus, funcţia p se numeşte *surjecţia canonică de la A la* $A/\sim$.

Notaţia 6.1. Notăm cu:

- $\mathrm{Part}(A)$ mulţimea partiţiilor lui A;
- $\mathrm{Eq}(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe mulţimea A.

Propoziţia 6.5. *Mulţimea partiţiilor unei mulţimi nevide este în bijecţie cu mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe acea mulţime.*

Într–adevăr, funcţiile:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Eq}(A) \arrow[r, shift left, "\psi"] & \mathrm{Part}(A) \arrow[l, shift left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

definite prin:

- pentru orice $\sim \in \mathrm{Eq}(A)$, $\varphi(\sim) = A/\sim$,
- pentru orice $(A_i)_{i\in I} \in \mathrm{Part}(A)$, $\psi((A_i)_{i\in I}) = \{(x,y) \mid x,y \in A, (\exists\, i \in I)\,(x,y \in A_i)\} = \bigcup_{i\in I} A_i^2 \subseteq A^2$,

sunt inverse una alteia, aşadar sunt inversabile, deci bijective.

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de acelaşi tip) (i. e. funcţiile care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se defineşte în funcţie de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcţiilor**, definite între două mulţimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noţiuni de **nucleu**, o funcţie nu poate fi raportată decât la ea însăşi, de unde şi denumirea din definiţia următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A şi B două mulţimi nevide arbitrare şi $f : A \to B$ o funcţie arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiţie:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definiţia 6.6 (nucleul de săgeată dublă). Se numeşte *nucleul (de săgeată dublă al) lui f* următoarea relaţie binară pe A, notată $Ker(f)$:

$$Ker(f) := \{(x,y) \mid x,y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

- În cazul morfismelor, au loc proprietăţi de forma: morfismul este injectiv ddacă nucleul său este trivial.
- Şi aici avem o proprietate de acest tip:

Remarca 6.4. (i) $Ker(f) \supseteq \Delta_A$;

(ii) $Ker(f) = \Delta_A$ ddacă f este injectivă.

Remarca 6.5. $Ker(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de acelaşi tip sunt **congruenţe**, adică relaţii de echivalenţă care păstrează operaţiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruenţe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.

- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulţimi şi funcţii, ca aceea din propoziţia următoare, de exemplu) se zice *comutativă* ddacă, indiferent pe ce drum "urmărim săgeţile" şi compunem funcţiile, între oricare două mulţimi din diagramă se obţine aceeaşi funcţie, i. e. toate compunerile de funcţii între acele mulţimi sunt egale (mulţimile pot fi şi 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Pentru cele ce urmează, renunţăm la fixarea lui A, B şi f.

Propoziţia 6.6 (proprietatea de universalitate a mulţimii factor). *Fie A o mulţime nevidă, $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A şi $p : A \to A/\sim$ surjecţia canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \widehat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.*

Atunci: pentru orice mulţime nevidă B şi orice funcţie $f : A \to B$ cu $\sim \subseteq Ker(f)$, există o unică funcţie $\tilde{f} : A/\sim \to B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\widehat{x}) = f(x).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A/\sim \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

7 Operatori de închidere şi familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulţimea părţilor unei mulţimi şi **familiile Moore (sistemele de închidere)** de părţi ale unei mulţimi.

- Aceste noţiuni pot fi definite şi studiate pe **mulţimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în consideraţiile de mai jos, se poate înlocui mulţimea părţilor unei mulţimi cu o mulţime arbitrară M, incluziunea de mulţimi cu o relaţie de ordine arbitrară $\leq$ pe M, iar intersecţia cu **infimumul** în **mulţimea ordonată** $(M, \leq)$ (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noţiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).

- Vom vedea că, în mulţimi ordonate arbitrare:

  (i) supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);

  (ii) infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).

- Pentru familii de mulţimi:

  (i) am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulţimi este $\emptyset$ (cea mai mică mulţime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulţimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulţime A);

  (ii) nu există o cea mai mare mulţime (dintre toate mulţimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulţime A, deci ar conţine fiecare mulţime A, deci ar avea ca submulţime mulţimea tuturor mulţimilor, care nu există (a se revedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulţime dintre părţile unei anumite mulţimi. Deci ce mulţime va fi intersecţia familiei vide de mulţimi?

Remarca 7.1. Intersecţia familiei vide nu există decât raportat la o mulţime totală T: intersecţia familiei vide de părţi ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulţimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **defineşte** în următorul mod, şi este egală cu mulţimea totală T:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x.

Exerciţiul 7.1. Fie T o mulţime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulţimi de părţi ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

(i) $\bigcup\limits_{A \in X} A \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$

(ii) $\bigcap\limits_{A \in X} A \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ şi $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulţime cu un singur element)), atunci:

(i) $M \subseteq \bigcup\limits_{A \in Y} A$

(ii) $M \supseteq \bigcap\limits_{A \in Y} A$

Definiţia 7.1. Fie T o mulţime arbitrară.

- Se numeşte *familie Moore de părţi ale lui* T (sau *sistem de închidere pe mulţimea părţilor lui* T) o familie de părţi ale lui T închisă la intersecţii arbitrare, i. e. o familie de mulţimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulţime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap\limits_{s \in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap\limits_{s \in S} M_s = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc *sisteme de închidere*.
- Se numeşte *operator de închidere pe* $\mathcal{P}(T)$ o funcţie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietăţile:
  (i) $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);
  (ii) $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);
  (iii) dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Peste tot în restul acestei secţiuni, T va fi o mulţime arbitrară.

Remarca 7.2. Orice familie Moore de părţi ale lui T conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui T, adică pe T.

Exemplul 7.1.
- $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- Funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall\, X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\{T\}$ este o familie Moore de părţi ale lui T.
- $\emptyset$ nu este o familie Moore de părţi ale lui T, pentru că nu îl conţine pe T.

Aşadar:

Remarca 7.3. Orice familie Moore este nevidă.

Propoziţia 7.1. *Dacă $\mathcal{M}$ este o familie Moore de părţi ale lui T, atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), şi aceasta este egală cu intersecţia mulţimilor din $\mathcal{M}$ care includ pe A.*

Propoziţia 7.2 ($\star$). *Fie I o mulţime nevidă şi $\mathcal{M} = (M_i)_{i\in I}$ o familie Moore de părţi ale lui T.*

Definim funcţia $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiţie, cea mai mică mulţime din $\mathcal{M}$ care include pe X, adică $C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap\limits_{\substack{M\in\mathcal{M},\\ X\subseteq M}} M$.

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiţia 7.2 (mulţimi închise). Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C, $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulţimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulţimi închise* raportat la operatorul de închidere C.

Propoziţia 7.3 (caracterizare echivalentă pentru mulţimile închise). *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulţimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulţimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.*

Propoziţia 7.4 ($\star\star$). *Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulţimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C).*

Atunci $\mathcal{M}_C$ este o familie Moore de părţi ale lui T.

Propoziţia 7.5. *Aplicaţiile din cele Propoziţiile ($\star$) şi ($\star\star$) sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;

(ii) pentru orice familie Moore $\mathcal{M}$ de părţi ale lui T, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ şi mulţimea familiilor Moore de părţi ale lui T sunt în bijecţie.

Exemplul 7.2.

- Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.
- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcţia constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall\, X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

8 Închiderile relaţiilor binare pe o mulţime

- Peste tot în această secţiune, A va fi o mulţime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulţimea submulţimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulţimea relaţiilor binare pe A.
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = id_A$ =relaţia de egalitate pe A.

Propoziţia 8.1. *Fie $(R_i)_{i\in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relaţii binare pe A. Atunci:*

(i) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e reflexivă

(ii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e simetrică

(iii) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e tranzitivă

(iv) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o preordine

(v) dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relaţie de echivalenţă, atunci $\bigcap\limits_{i\in I} R_i$ e o relaţie de echivalenţă

Remarca 8.1. Propoziţia anterioară arată că familia relaţiilor binare reflexive/simetrice/ tranzitive/de preodine/de echivalenţă pe A este o familie Moore de părţi ale lui A^2.

Într–adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăţi, fiind relaţie de echivalenţă pe A.

Şi, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relaţiilor reflexive pe A conţine pe A^2, care este intersecţia familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziţiei anterioare, această familie este închisă la intersecţii nevide arbitrare. Aşadar, familia relaţiilor reflexive pe A este închisă la intersecţii arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarca 8.2. Remarca anterioară şi o serie de propoziţii despre familii Moore şi operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, anume intersecţia tuturor relaţiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică unica relaţie binară $\overline{R}$ pe A care satisface următoarele trei proprietăţi:

- $\overline{R}$ este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relaţie reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \to \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$.
Toate aceste consideraţii rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietăţile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{S}$
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{T}$
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relaţie de echivalenţă – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{E}$

Aceste notaţii **nu** sunt consacrate, ci sunt notaţii ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează.

Definiţia 8.1. Fie R o relaţie binară pe A. Se numeşte:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relaţie binară reflexivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relaţie binară simetrică pe A care include pe R, adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R, adică $Pre(R)$;
- *relaţia de echivalenţă generată de* R cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A care include pe R, adică $\mathcal{E}(R)$.

Remarca 8.3. Idempotenţa operatorilor de închidere arată că, pentru orice relaţie binară R pe A: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ şi $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarca 8.4. Fie R o relaţie binară pe A. Conform descrierii mulţimilor închise din secţiunea despre operatori de închidere şi familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relaţie de echivalenţă ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Propoziţia 8.2. *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$

(ii) $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$

(iii) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

(iv) $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$

(v) $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Remarca 8.5 (temă). Dacă A este o mulţime finită şi nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

(i) $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n$;

(ii) şirul $R^0,\ R^1,\ R^2,\ \ldots, R^n,\ \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent.

Propoziţia 8.3 (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct – facultativă). *Fie R o relaţie binară pe A. Atunci:*

(i) $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$*;*

(ii) $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$*;*

(iii) $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ *şi* $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ *nu sunt neapărat egale.*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică şi tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică şi tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Corolarul 8.1 (temă – facultativă).

- *$\mathcal{R}$ păstrează simetria şi tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);*
- *$\mathcal{S}$ şi $\mathcal{T}$ păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relaţie binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ şi $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.*

Propoziţia 8.4 (temă – facultativă).

- *$\mathcal{T}$ păstrează simetria;*
- *$\mathcal{S}$ nu păstrează tranzitivitatea.*

Remarca 8.6 (nu există închiderea antisimetrică sau ordinea generată). Fie R o relaţie binară pe A, arbitrară. De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R, sau o relaţie de ordine generată de R?

Două motive sunt următoarele fapte, fiecare uşor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relaţie binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiţia antisimetriei), şi deci nu este nici relaţie de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conţine cel puţin două elemente distincte a şi b, aşadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relaţie de ordine, prin urmare A^2 nu aparţine familiei relaţiilor antisimetrice pe A, deci nici familiei relaţiilor de ordine pe A, aşadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părţi ale lui A^2, pentru că niciuna dintre ele nu conţine intersecţia familiei vide de părţi ale lui A^2, anume pe A^2.

9 Relaţii de ordine

Remarca 9.1. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică şi antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică şi antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică şi antisimetrică;
- aşadar: R e simetrică şi antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică şi antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ şi $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarca 9.2. Pentru orice mulţime A, Δ_A este singura relaţie binară pe A care este simultan relaţie de echivalenţă şi relaţie de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară şi faptul că Δ_A este tranzitivă.

În plus, cum Δ_A este cea mai mică relaţie reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă şi este inclusă în orice relaţie binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A şi cea mai mică relaţie de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarca 9.3 (obţinerea unei relaţii de ordine dintr–o relaţie de preordine; aplicaţie: ordinele de complexitate ale algoritmilor). Fie A o mulţime nevidă şi $R \subseteq A^2$ o relaţie de preordine pe A.

Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy$ şi $yRx]$). Se demonstrează că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A.

Considerăm mulţimea factor $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_\sim$ definim relaţia binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.

Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanţi**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) şi $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalenţa: xRy ddacă zRt. Şi se demonstrează că $\leq$ este o relaţie de ordine pe $A/_\sim$.

Remarca 9.4. Dacă A e o mulţime nevidă, atunci nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi reflexivă, şi ireflexivă, prin urmare nu există nicio relaţie binară pe A care să fie şi relaţie de ordine, şi relaţie de ordine strictă

Exerciţiul 9.1 (ordine versus ordine strictă). Fie A o mulţime, O mulţimea relaţiilor de ordine pe A şi S mulţimea relaţiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicaţiile $\varphi : O \to S$ şi $\psi : S \to O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y$ şi $x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y$ sau $x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ şi $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relaţie de ordine pe A diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relaţie de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obţine o relaţie de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ şi $\varphi \circ \psi = id_S$, ceea ce înseamnă că φ şi ψ sunt bijecţii între O şi S.

Definiţia 9.1. Fie A o mulţime, $\leq$ o relaţie de ordine pe A şi $<$ o relaţie de ordine strictă pe A.

Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y$ şi $x \neq y\}$ se numeşte *relaţia de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y$ sau $x = y\}$ se numeşte *relaţia de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exerciţiul anterior.)

Remarca 9.5. Relaţia de ordine strictă asociată unei relaţii de ordine totale este o relaţie totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulţimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notaţia 9.1. Pentru orice mulţime A, orice $R \subseteq A^2$ şi orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1Ra_2,\ a_2Ra_3, \ldots$ şi prin: $a_1Ra_2Ra_3 \ldots$.

Definiţia 9.2.

- O mulţime A înzestrată cu o relaţie de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ şi se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set“).
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relaţie de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Observaţia 9.1. Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operaţii**, ci cu o **relaţie binară.**

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notaţiile din definiţia anterioară, A se numeşte *mulţimea elementelor*, sau *mulţimea suport*, sau *mulţimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea şi noţiunile de **substructură** a unui poset şi **morfism** de poseturi.

Definiţia 9.3. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a,b) \in A^2 \mid a \leq b \text{ şi } a \neq b\}$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$.

Relaţiei de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relaţia de succesiune* (numită şi *relaţia de acoperire*), notată $\prec$ şi definită astfel: $\prec:= \{(a,b) \in A^2 \mid a < b \text{ şi nu există } x \in A \text{ a. î. } a < x < b\} \subseteq A^2$.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numeşte *succesor al lui a* (se mai spune că b *acoperă pe a*)
- a se numeşte *predecesor al lui b* (sau se spune că *a este acoperit de b*)

Remarca 9.6 (temă). Cu notaţiile din definiţia anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci şi ireflexivă) şi nu e tranzitivă.

Notaţia 9.2 (notaţii uzuale într–un poset). Cu notaţiile din definiţia anterioară: $\geq:=\leq^{-1}$, $>:=<^{-1}=\geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ:=\prec^{-1}$.

Definiţia 9.4. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulţimea A este *densă raportat la ordinea $\leq$*, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe A* ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$, i. e. ddacă $\prec= \emptyset$ în posetul $(A, \leq)$.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse:

- Amintim că relaţiile binare (pe mulţimi finite şi nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relaţiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ţine seama de proprietăţile de reflexivitate, tranzitivitate şi antisimetrie ale unei relaţii de ordine pentru a elimina redundanţele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăţi. Această reprezentare grafică a unei relaţii de ordine se numeşte *diagramă Hasse*.
- Şi această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relaţii (de ordine) pe mulţimi finite şi nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit şi nevid (i. e. cu A finită şi nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulţimea nodurilor egală cu A şi mulţimea muchiilor egală cu relaţia de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ şi a cărui reprezentare grafică respectă regula:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
  - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găseşte în relaţia de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el.**

Observaţia 9.2. Faptul că, într–un poset finit şi nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y şi
- x şi y sunt conectate printr–un lanţ (mai precis, prin cel puţin un lanţ; aici, **lanţ** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulţimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulţime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanţ cu ordinea indusă).

Observaţia 9.3. În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Observaţia 9.4. Diagrama Hasse a unei **mulţimi liniar ordonate** este "liniară".

Amintim că o **mulţime liniar ordonată** se mai numeşte **mulţime total ordonată** sau **lanţ**.

Notaţia 9.3. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanţul cu k elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulţimea suport a lanţului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulţime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanţul cu k elemente.

Remarca 9.7. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanţul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulţime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

Mai precis, dacă L_k este o mulţime cu exact k elemente, iar $\leq$ şi $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Mai general: dacă L_k şi M_k sunt mulţimi cu exact k elemente, iar $\leq$ este o ordine totală pe L_k şi $\sqsubseteq$ este o ordine totală pe M_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ şi $(M_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulţumim cu explicaţia intuitivă: două poseturi finite şi nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeaşi diagramă Hasse.**

Elemente distinse într–un poset:

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset şi $X \subseteq A$.

Remarca 9.8. Este imediat faptul că relaţia binară pe X dată de mulţimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, şi că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiţia 9.5. Ordinea pe X din remarca anterioară se numeşte *ordinea indusă de* $\leq$ *pe* X şi se notează tot cu $\leq$.

Posetul $(X, \leq)$ se numeşte *subposet* sau *submulţime (parţial) ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Dacă $(X, \leq)$ este un lanţ (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numeşte *submulţime total ordonată a lui* $(A, \leq)$.

Definiţia 9.6. Un element $a \in A$ se numeşte:

- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarca 9.9. X poate avea mai mulţi minoranţi (majoranţi), şi poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Definiţia 9.7.

- Un minorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X şi se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparţine lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numeşte *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X şi se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarca 9.10. Minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notaţia de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (şi $\leq$)). La fel pentru maxim.

Definiţia 9.8. Un poset cu minim şi maxim se numeşte *poset mărginit.* (Minimul şi maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiţia anterioară.)

Remarca 9.11. O mulţime care are minim sau maxim are cel puţin un element (pentru că minimul unei mulţimi aparţine acelei mulţimi şi la fel şi maximul), deci nu poate fi vidă.

Definiţia 9.9. Un element $x \in X$ se numeşte:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulţimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarca 9.12. Din definiţia anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X şi minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X şi element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Remarca 9.13. Orice poset finit şi nevid are elemente maximale şi elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit şi nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e şi un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

În orice poset finit şi nevid, orice element care nu este element maximal are cel puţin un succesor, şi orice element care nu este element minimal are cel puţin un predecesor.

În orice poset finit şi nevid, închiderea tranzitivă a relaţiei de succesiune este relaţia de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relaţiei de succesiune (i. e. preordinea generată de relaţia de succesiune) este relaţia de ordine.

Definiţia 9.10. *Infimumul lui* X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulţimii minoranţilor lui X, şi se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.

Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulţimii majoranţilor lui X, şi se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

Remarca 9.14. Infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulţimea minoranţilor este nevidă.

Dar, fiind maximul unei mulţimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât şi notaţia, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (şi $\leq$)).

La fel pentru supremum.

Remarca 9.15. Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparţine mulţimii ddacă este minimul mulţimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, şi atunci $\min(X) = \inf(X)$.

Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparţine mulţimii ddacă este maximul mulţimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, şi atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarca 9.16. Din definiţia infimumului şi a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ şi
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lema 9.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $x \leq y$

(ii) există în L $\inf\{x, y\} = x$

(iii) există în L $\sup\{x, y\} = y$

Principiul dualităţii pentru poseturi:

- **Principiul dualităţii pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esenţial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim $\leq$ cu $\leq^{-1}$ (notată $\geq$;* conform definiţiei inversei unei relaţii binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*), $<$ cu $<^{-1}$ (notată $>$), $\prec$ cu $\prec^{-1}$ (notată $\succ$), toţi minoranţii cu majoranţi (ca noţiuni) şi vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale şi vice-versa, toate minimurile cu maximuri şi vice-versa şi toate infimumurile cu supremumuri şi vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este uşor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relaţia de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranţii lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranţii lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ şi vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ şi vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, şi, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ şi vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noţiunile de minorant şi majorant sunt *duale una alteia*, şi la fel pentru noţiunile de element minimal şi element maximal, minim şi maxim, infimum şi supremum, respectiv.

- Posetul $(A, \geq)$ se numeşte *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- Ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualităţii pentru poseturi**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".
- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obţine prin "răsturnarea diagramei Hasse" a acelui poset "cu susul în jos".
- Lanţurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Remarca 9.17. Fie $(A, \leq)$ un poset şi $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanţ, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Remarca 9.18. Fie $(L, \leq)$ un poset şi $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.

Remarca 9.19. Pentru orice mulţime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup\limits_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap\limits_{A \in X} A$

Remarca 9.20 (temă: scrieţi această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$). Fie $(L, \leq)$ un poset şi $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ şi $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ şi $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.
Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Remarca 9.21. Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, şi, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ şi $\max(L)$.

Propoziţia 9.1. *Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;

(ii) pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.

10 Funcţii izotone

Definiţia 10.1. Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcţie.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcţiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi.*

Observaţia 10.1. Se consideră că denumirea de **funcţie crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulţimile de numere, şi, de aceea, se preferă denumirea de **funcţie izotonă** în cazul funcţiilor între poseturi arbitrare.

Remarca 10.1. Cu notaţiile din definiţia de mai sus, f este funcţie antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ şi posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarca 10.2. Compunerea a două funcţii izotone este o funcţie izotonă.

Exerciţiul 10.1 (temă). Orice funcţie izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.
I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ şi $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $< := \leq \setminus \Delta_A$ şi $\sqsubset := \sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ şi, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcţie izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

Definiţia 10.2. O funcţie între două poseturi se numeşte *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă şi cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exerciţiul 10.2 (temă). Fie $f : L \to M$ o funcţie bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Exerciţiul 10.3 (temă). Fie $f : L \to M$ o funcţie surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ şi $(M, \sqsubseteq)$. Arătaţi că, dacă $(L, \leq)$ este lanţ, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanţ.

Remarca 10.3. Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile şi supremumurile arbitrare.

Exerciţiul 10.4 (Teorema Knaster–Tarski (temă)). Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcţie izotonă.
Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

(i) $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) şi $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;

(ii) dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Şi **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

(i) $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) şi $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;

(ii) dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulţimi parţial ordonate (poseturi):

Definiţia 10.3. Se numeşte *mulţime (parţial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulţime A şi o **relaţie de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relaţie binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ şi $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relaţia de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numeşte *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniar ordonată* sau *lanţ*.

Relaţia de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este $< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relaţia de succesiune asociată ordinii $\leq$ este $\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\, (x < a < y)\}$.
Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ şi $\succ := \prec^{-1}$.

Remarca 10.4. Cu notaţiile din definiţia anterioară, avem:

- $\geq$ este o relaţie de ordine pe A
- $>$ este relaţia de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relaţia de succesiune asociată lui $\geq$

11 Operatori de închidere şi sisteme de închidere pe poseturi arbitrare

Pe tot parcursul acestei secţiuni, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.

Următoarea definiţie o generalizează pe cea din Cursul III în care posetul de referinţă era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulţime arbitrară.

Definiţia 11.1.
- Se numeşte *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulţime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulţime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numeşte *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcţie $C : A \to A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietăţile:
  - (i) $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
  - (ii) $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
  - (iii) dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Remarca 11.1. Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conţine $\inf(\emptyset) = \max(A)$, aşadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplul 11.1.
- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcţia constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\{\max(A)\}$ este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 11.1. *Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.*

Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziţia 11.2. *Fie $C : A \to A$ un operator de închidere pe $(A, \leq)$. Atunci imaginea lui C este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, având ca elemente exact punctele fixe ale lui C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. Vom nota cu $M_C = C(A)$.*

Propoziţia 11.3. *Aplicaţiile din cele două propoziţii precedente sunt inverse una alteia, adică:*

(i) pentru orice operator de închidere $C : A \to A$ pe $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;

(ii) pentru orice sistem de închidere M pe $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.

Aşadar aceste aplicaţii sunt bijecţii, deci mulţimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ şi mulţimea sistemelor de închidere pe $(A, \leq)$ sunt în bijecţie.