Curs 2

13.10.2020

A mulțime, $\mathcal{P}(A) \to$ reprezintă mulțimea părților mulțimii A

$\mathcal{P}(A) \overset{def}{=} \{B \mid B \subseteq A\}$ $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ($\emptyset \subseteq A$ $(\forall)$ A mulțime)

Ex 1) $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $(|A| = n)$ $\mathcal{P}(A) \left(\overset{not}{=} 2^{[n]}\right)$ $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq \{1,2,\dots,n\}\}$. $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

$$\underbrace{\emptyset}_{0\text{ elem.}}, \underbrace{\{1\}, \dots, \{n\}}_{1\text{ elem}}, \underbrace{\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{n-1,n\}}_{2\text{ elem}}, \dots, \underbrace{\{1,2,\dots,n\}}_{n\text{ elem.}}$$

2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$; $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\underbrace{\emptyset}_{a}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{b}\}$; $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))| = 2^2 = 4$.

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \underset{\text{"}\{a\}\text{"}}{\{\emptyset\}}, \underset{\text{"}\{b\}\text{"}}{\{\{\emptyset\}\}}, \underset{\text{"}\{a,b\}\text{"}}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}\}.$$

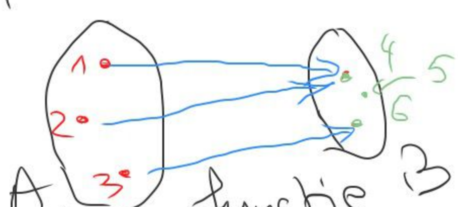
Def Fie A și B 2 mulțimi. O funcție f de la A la B (notație $f: A \to B$) este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ cu proprietatea:

$(\forall)\, x \in A$ $(\exists!)\, b_x \in B$ a.î. $(x, b_x) \in f$.

Obs 1) f asociază fiecărui element al lui A $(x \in A)$ un unic element din B $(b_x \in B)$, pe care-l vom nota cu $f(x)$.

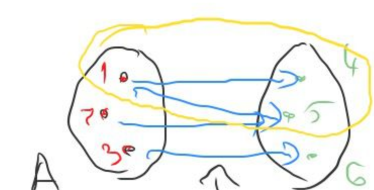
2) $f: A \to B$ funcție $x \in A \longmapsto f(x) \in B$.

Ex



funcție

$f: \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ $f(1) = 4$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$.



NU e fct.

Notație Dc $f: A \to B$ e fct., atunci $A \to$ domeniul de definiție al lui f
$B \to$ codomeniul (sau domeniul valorilor) lui f

Graficul funcției f este o mulțime $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$.

$\operatorname{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$

imaginea lui f

Obs 2 fct $f: A \to B$, $g: C \to D$ sunt egale dacă: $A = C$, $B = D$, $f(a) = g(a)$ $(\forall)$ $a \in A$.

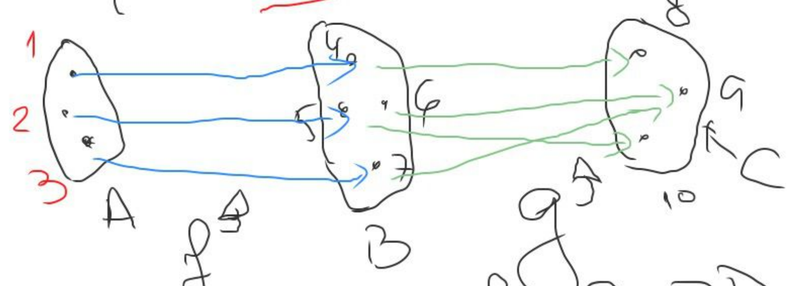
Ex 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$
$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{N}$

$f \neq g$ (f și g nu sunt egale)

2) $f: \{1,2\} \to \{0\}$ $f(1) = f(2) = 0$
$g: \{1,2\} \to \{0\}$ $g(x) = x^2 - 3x + 2$ $(\forall)$ $x \in \{1,2\}$ $\Rightarrow g(1) = g(2) = 0$ $\Big| \Rightarrow f = g$.

Def Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$ 2 fct. Compunerea funcțiilor g și f, notată cu $g \circ f$ este funcția $g \circ f: A \to C$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(\forall)$ $x \in A$.

Ex



$g \circ f: A \to C$ $(g \circ f)(1) = 8$
$(g \circ f)(2) = 10$
$(g \circ f)(3) = 9$.

Propr $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ fct. Atunci $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
(compunerea fct. e asociativă)

Def Fie $f: A \to B$ o fct.

f s.n. injectivă dacă $(\forall)\, x, y \in A$ cu $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (echivalent pt $(\forall)\, x, y \in A$ cu $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.)

f s.n. surjectivă dacă $Im(f) = B$ (echivalent $(\forall)\, y \in B\, (\exists)\, x_y \in A$ a.î. $f(x_y) = y$)

f s.n. bijectivă dacă f e simultan inj și surj.

Ex 1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = 2n+1$ f e inj și nu e surj.

2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]$ f e surj. și nu e inj

3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ $f(n) = n+1$ f e bij.

Funcții speciale 1) Fct. caracteristică a unei submulțimi: $A \subseteq X$; $\varphi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

$\varphi_A : X \to \{0, 1\}$.

(Obs. $A, B \subseteq X$. Atunci $A = B \Leftrightarrow \varphi_A = \varphi_B$)

2) "$\varphi(n)$" $\to$ funcția indicatorul lui Euler $\varphi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ $\varphi(n) = \#$ nr. naturale nenule mai mici sau egale cu n și care sunt relativ prime cu n.

$\varphi(n) = |\{k \mid 1 \leq k \leq n$ și $(k, n) = 1\}|$. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$

Cum calculez $\varphi(n)$? Pt $n \geq 2$ $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$ $p_1, \dots, p_r$ prime distincte

$\varphi(p) = p - 1$ $(\forall)$ p-prim.

$\Rightarrow \boxed{\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)}$ (Vezi dem. seminar).

3) Dacă $A \subseteq B$, fct. incluziune $i_A : A \to B$ $i_A(x) = x$ $(\forall)\, x \in A$.

4) Dacă A, B 2 mulțimi, proiecția canonică pe mult. A $p_A : A \times B \to A$

$p_A((a, b)) = a$ $(\forall)\, (a, b) \in A \times B$

5) Fct. parte întreagă, fct. parte fracționară

$[x]$ $\{x\}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ $\quad f(x)=[x]$ $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ $\quad$ ↳ fct. parte întreagă

$g:\mathbb{R}\to[0,1)$ $\quad g(x)=\{x\}$ $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ $\quad$ ↳ fct. parte fracționară

$\boxed{\{x\}=x-[x]\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}}$.

6) Dacă $A=\{1,2,\dots,n\}$ atunci $S_n=\{f \mid f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\},\ f \text{ bijectivă}\}$.
↳ f s.n. permutare a lui $\{1,2,\dots,n\}$

$(|S_n|=n!)$.

Propr Fie fct. $f,f':A\to B$ și $g,g':B\to C$. Atunci:

1. f,g injective $\Rightarrow$ $g\circ f$ e injectivă
2. f,g surjective $\Rightarrow$ $g\circ f$ e surjectivă
3. f,g bijective $\Rightarrow$ $g\circ f$ e bijectivă
4. $g\circ f$ injectivă $\Rightarrow$ f e injectivă (Dați ex de g,f a.î. $g\circ f$ injectivă și g nu e injectivă)
5. $g\circ f$ surjectivă $\Rightarrow$ g e surjectivă (— " — $g\circ f$ surj și f nu e surj.)
6. $g\circ f$ bijectivă $\Rightarrow$ f inj, g surj.

(① f,g inj (resp. surj, bij) $\Rightarrow$ $g\circ f$ e inj (resp. surj, bij).)

Dem ④ Fie $x,y\in A$ a.î. $f(x)=f(y)$ $\Rightarrow$ $g(f(x))=g(f(y))$ $\Rightarrow$ $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(y)$ $\xRightarrow{g\circ f \text{ inj}}$ $x=y$. Deci f e inj.

Prop Fie $f:A\to B$ o funcție. Atunci f este bijectivă $\Leftrightarrow$ există o funcție $g:B\to A$ a.î. $g\circ f=1_A$ și $f\circ g=1_B$ (Pt o mulțime A, $1_A:A\to A$ $1_A(x)=x$ $(\forall)\ x\in A$). ← fct. identitate

Obs Dacă f e bijectivă, atunci fct. g (de mai sus) este unică; g s.n. inversa lui f și s.n. cu f^{-1}.

Prop. Fie $f: A \to B$ funcție, $X, W \subseteq A$, $Y, Z \subseteq B$. Atunci:

1. $X \subseteq W \Rightarrow f(X) \subseteq f(W)$.
2. $Y \subseteq Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$.
3. $f(X \cup W) = f(X) \cup f(W)$.
4. $f(X \cap W) \subseteq f(X) \cap f(W)$ (cu egalitate dacă f e inj)
5. $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$.
6. $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$.
7. $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ (cu egalitate dacă f e inj)
8. $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (cu egalitate dacă f e surj),

unde $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$ ($\mathrm{Im}(f) = f(A)$) și $f^{-1}(Y) \overset{def}{:=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$

s.n. preimaginea lui Y prin f.

Obs Preimaginea unei submulțimi a codomeniului prin funcția f, există întotdeauna (a nu se confunda $f^{-1}(Y)$ cu "obligativitatea" ca f^{-1} să fie inversa lui f (adică f să fie bijectivă).

Dem 4

$$\left.\begin{array}{l} X \cap W \subseteq X \\ X \cap W \subseteq W \end{array}\right| \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} f(X \cap W) \subseteq f(X) \\ f(X \cap W) \subseteq f(W) \end{array}\right| \Rightarrow f(X \cap W) \subseteq f(X) \cap f(W).$$

Dc. $\boxed{f \text{ e inj}}$ fie $b \in f(X) \cap f(W) \xrightarrow[f(X),\ f(W)]{def}$ $\left.\begin{array}{l} (\exists)\ x_0 \in X \text{ a.î. } f(x_0) = b \\ (\exists)\ x_1 \in W \text{ a.î. } f(x_1) = b \end{array}\right| \xrightarrow[inj]{f} x_0 = x_1$

$b = f(x_0)$, $x_0 \in X \cap W$

$\Rightarrow b \in f(X \cap W)$. $\Rightarrow$ $f(X) \cap f(W) = f(X \cap W)$. $\boxtimes$