Tutoriat 8

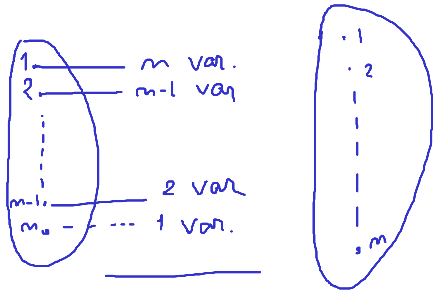
Grupul de permutări.

Grupul de permutări = necomutativ

Ce e o permutare?

$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \xrightarrow{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$

σ e una dintre bijecții



$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

nr. funcții : $n!$

Definesc $(S_n, \circ)$ grupul permutărilor cu n elemente cu compunerea uzuală.

Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$

• **Def**: Fie $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $i < j$ DAR $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Spunem că perechea (i, j) s.n. INVERSIUNE.

Notație : $inv(\sigma) \stackrel{def}{=}$ nr. inversiunilor lui σ

• **Def**: $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ s.n. SEMNUL / SIGNATURA LUI σ

• Propoziție-Definiție.

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)} \in \{-1, 1\}$$

σ pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$

σ impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$

$1 < i < j$

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Def $1 \leq i < j \leq n$. Permutarea

$\tau_{ij} \stackrel{not}{=} (i\ j) \in S_n$ definită așa:

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} k, & k \neq i, k \neq j \\ i, & k = j \\ j, & k = i \end{cases}$$ s.n. TRANSPOZIȚII

Def: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$ s.n. grupul altern de grad n

Prop: $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \cdot)$ morfism surjectiv

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)}$$

$$\varepsilon(\sigma \circ \tau) = (-1)^{inv(\sigma) + inv(\tau)} \quad \Big| \quad \varepsilon(\sigma^2) = (-1)^{2\, inv(\sigma)} = \left((-1)^{inv(\sigma)}\right)^2 = 1$$

$$Ker(\varepsilon) = A_n \trianglelefteq S_n, \quad |A_n| = \frac{n!}{2}$$

Def: Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Mulțimea $\mathcal{O}_\sigma(k) := \{\sigma^i(k) \mid i \in \mathbb{Z}\}$

$$= \{k, \sigma(k), \sigma^2(k), \sigma^{-2}(k), \dots\}$$

s.n. ORBITA LUI K

Orbita — trivială $\Leftrightarrow \mathcal{O}_\sigma(k) = \{k\}$

Propoziție $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

Fie $m :=$ cel mai mic nr. nat. a.î. $\sigma^m(k) = k$

Atunci $\mathcal{O}_\sigma(k) = \{k, \sigma(k), \sigma^2(k), \dots, \sigma^{m-1}(k)\}$ $\quad \sigma^{m-j}(k) \circ \sigma^j(k) = k$

Ex: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{3 \xrightarrow{\sigma} \overbrace{4 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 3}^{\mathcal{O}_\sigma(4)}}_{\mathcal{O}_\sigma(3)} \xrightarrow{\sigma} 4$$

Orbitele

$\mathcal{O}_\sigma(1) = \{3, 4, 1\} = \{1, 3, 4\} = \mathcal{O}_\sigma(3) = \mathcal{O}_\sigma(4)$

$\mathcal{O}_\sigma(2) = \{2\}$ — trivială

$\mathcal{O}_\sigma(5) = \{5, 7, 6, 8\} = \{5, 6, 7, 8\}$

orbite netriviale

Obs: $\sigma \in S_n$, toate orbitele sunt triviale $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

Def $\sigma \in S_n$ s.n. CICLU dacă are o singură orbită netrivială $\overset{\text{not}}{\parallel}$ $\mathcal{O}_\sigma$

iar lungimea ciclului $\sigma \overset{\text{not}}{=} \ell(\sigma) = |\mathcal{O}_\sigma|$.

ex: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathcal{O}_\sigma(2) = \{2, 6, 4\} \xrightarrow[\text{imediat}]{\text{not}} (2\ 6\ 4)$

Def: Doi cicli $\sigma, \tau \in S_n$ sunt DISJUNCȚI dacă $O_\sigma \cap O_\tau = \emptyset$

+**Prop:** $\sigma\tau = \tau\sigma$

Prop: $2 \leq m \leq n$, $\sigma = (i_1 \, i_2 \, \dots \, i_m) \in S_n$

a) $\sigma^{-1} = (i_m \, i_{m-1} \, \dots \, i_2 \, i_1)$

b) $\theta(\sigma) = m = \ell(\sigma) \iff \sigma^m = e$

ordinul lui σ

Teoremă $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Atunci σ se poate descompune ca produs de cicli disjuncți. Scrierea e unică până la o rearanjare a acestora.

Ex: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 10 & 9 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

$O_\sigma(1) = \{3, 10, 4, 9, 7, 6, 2, 8, 5, 1\}$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$

$O_\tau(1) = \{1, 3, 4\}$ $\quad O_\tau(2) = \{2, 5, 6, 7, 8\}$ $\quad O_\tau(9) = \{9, 10\}$

$\tau = (1\;3\;4)(2\;5\;6\;7\;8)(9\;10)$ $\qquad \theta(\tau) = [3, 5, 2] = 30$

ex produs permutări

$$\overset{\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}} \circ \overset{\tau}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = \overset{\sigma \circ \tau}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

$\sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 1$; $\sigma(\tau(2)) = \sigma(1) = 4$

Corolar 1 $\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_r \in S_n$, $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$

Atunci $\theta(\sigma) = [\ell(\tau_1), \ell(\tau_2), \dots, \ell(\tau_r)]$

Corolar 2 $\forall \sigma \in S_n$ se poate scrie (nu neapărat unic) ca produs de transpoziții

$(i_1 \, i_2 \, \dots \, i_m) = (i_1 \, i_2)(i_2 \, i_3) \dots (i_{m-1} \, i_m)$

$S_n = \langle (1\,2), (1\,2\,\dots\,n) \rangle$

Exercitii

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Desc. în produs de cicli și transpoziții

$O_\sigma(1) = \{1, 3, 6\} \Rightarrow (1\,3\,6)$

$O_\sigma(2) = \{2, 4, 5, 7\} \Rightarrow (2\,4\,5\,7)$

$\cdot\ \sigma = \underbrace{(1\,3\,6)}_{\tau_1}\underbrace{(2\,4\,5\,7)}_{\tau_2}$ în cicli

$\sigma = (1\,3)(3\,6)\underbrace{(2\,4)}_{\|}(4\,5)(5\,7)$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $o(\sigma)$, $\varepsilon(\sigma)$, σ^{-1}, σ^{2020}

$2020 : 12 = 168$ rest 4

$o(\sigma) = [\ell(\tau_1), \ell(\tau_2)] = [3, 4] = 12$

$inv(\sigma) = 2 + 2 + 3 + 2 + 2 = 11 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^{11} = -1 \Rightarrow$ impară

$\sigma^{-1} = ((1\,3\,6)(2\,4\,5\,7))^{-1} = (2\,4\,5\,7)^{-1}(1\,3\,6)^{-1} = (7\,5\,4\,2)(6\,3\,1)$

$\sigma^{2020} = \sigma^{12\cdot168+4} = \underbrace{(\sigma^{12})^{168}}_{e} \cdot \sigma^4 = \sigma^4 = ((1\,3\,6)(2\,4\,5\,7))^4 = (1\,3\,6)^4 \underbrace{(2\,4\,5\,7)^4}$

$= \underbrace{(1\,3\,6)^{3+1}}\, e =$

$= (1\,3\,6)$

c) Găsiți toate $x \in S_7$ a.î. $\tau^2 = \sigma$

$\varepsilon(\sigma) = -1$

Dacă ar exista x, atunci $\underset{1}{\varepsilon(x^2)} = \underset{-1}{\varepsilon(\sigma)}$, $1 \neq -1$

$(i_1\, i_2 \dots i_{2k})^2 = (i_1\, i_3 \dots i_{2k-1})(i_2\, i_4 \dots i_{2k})$

$(i_1 \dots i_{2k+1})^2 = (i_1\, i_3 \dots i_{2k+1}\, i_2 \dots i_{2k})$

Deci nu avem τ

Exercitiul 2: Fie permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 9 & 1 & 10 & 11 & 12 & 6 & 13 & 8 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

(a) Descompuneţi permutarea σ în produs de cicli disjunţi, în produs de transpoziţii şi determinaţi signatura permutării σ. (1 punct)

(b) Determinaţi ordinul permutării σ si calculaţi σ^{28}. (1 punct)

(c) Găsiţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$ în grupul S_{13}. (0,5 puncte)

a) $\sigma = \underbrace{(1\,3\,5\,7)}_{\tau_1}\underbrace{(2\,4)}_{\tau_2}\underbrace{(6\,9\,11)}_{\tau_3}\underbrace{(8\,10\,12\,13)}_{\tau_4}$

$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$

$2 \longrightarrow 4$

$6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 11$

$8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 12 \longrightarrow 13$

$\sigma = (1\,3)(3\,5)(5\,7)(2\,4)(6\,9)(9\,11)(8\,10)(10\,12)(12\,13)$

$inv(\sigma) = 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1$

$= 2k+1 \Rightarrow \varepsilon(\sigma) = -1$

Altfel: nr transpoziții $= 9 \Rightarrow \sigma$ impară, $\varepsilon(\sigma) = -1$

b) $o(\sigma) = [\ell(\tau_1), \ell_2, \ell_3, \ell_4] = [\cancel{4}, 2, 3, 4] = 12$

$$\sigma^{28} = \sigma^{12\cdot 2+4} = \sigma^{4} = \underbrace{(1\,3\,5\,7)^4}_{e}\,\underbrace{(2\,4)^4}_{\substack{(2\,4)^2=e \\ (2\,4)^4=e^2}}\,\underbrace{(6\,9\,11)^4}\,\underbrace{(8\,10\,12\,13)^4}_{e} = (6\,9\,11)^{3+1} = (6\,9\,11)$$

c) $x^2 = \sigma$, $x \in S_{13}$

$\varepsilon(x^2) = 1$ $\quad$ $\varepsilon(\sigma) = -1$

$\nexists x$