Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de anul acesta de la Mincu
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$. Găsiți preimaginea lui $[6, 12]$ (mai multe exemple pe acest site).

Demonstrație. Aplicăm definiția preimaginii:

$$\begin{aligned} f^{-1}([6,12]) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [6,12] \,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid 6 \le f(x) \le 12 \,\} \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 6 \le x^2 + x \le 12 \,\right\} \end{aligned}$$

Deci problema se reduce la a găsi soluțiile inecuației $6 \le x^2 + x \le 12$.

- Rezolvăm $6 \le x^2 + x \iff 0 \le x^2 + x - 6$:

  $$\begin{aligned} \Delta &= 1 + 4 \cdot 6 = 25 \\ x_1 &= \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 &= \frac{-1-5}{2} = -3 \end{aligned}$$

  Soluția este $x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$.

- Rezolvăm $x^2 + x \le 12 \iff x^2 + x - 12 \le 0$:

  $$\begin{aligned} \Delta &= 1 + 4 \cdot 12 = 49 \\ x_1 &= \frac{-1+7}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{-1-7}{2} = -4 \end{aligned}$$

  Soluția este $x \in [-4, 3]$.

Punând laolaltă rezultatele, obținem că preimaginea lui $[6, 12]$ este

$$((-\infty, -3] \cup [2, +\infty)) \cap [-4, 3] = [-4, -3] \cup [2, 3]$$

□

Exercițiul 2. Fie $f : [1, \infty) \to (0, 1]$, unde

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

Demonstrați că f este bijectivă și găsiți f^{-1}.

Demonstrație. Ca să arătăm că f este bijectivă arătăm, pe rând, că este injectivă și surjectivă:

- f injectivă $\iff$ pentru orice $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ avem că $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

  Fie $x_1, x_2 \in [1, \infty)$.

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \iff & \frac{2x_1}{1 + x_1^2} = \frac{2x_2}{1 + x_2^2} \\ \iff & x_1(1 + x_2^2) = (1 + x_1^2)x_2 \\ \iff & x_1 + x_1x_2^2 = x_2 + x_1^2x_2 \\ \iff & x_1 - x_2 + x_1x_2^2 - x_1^2x_2 = 0 \\ \iff & (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1x_2 = 1 \iff x_1 = \frac{1}{x_2} \\ \qquad \iff x_1 = x_2 = 1 \\ \qquad \text{pentru că } x_1, x_2 \in [1, \infty) \end{cases}$$

- f surjectivă $\iff$ pentru orice $y \in (0, 1]$ există un $x \in [1, \infty)$ astfel încât $f(x) = y$.

  Trebuie să ne gândim cum ar arăta un x pentru care $f(x) = y$. Am avea că

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{1 + x^2} = y \\ \iff & yx^2 - 2x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0 \text{ pentru că } y \in (0, 1]$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

  Dintre cele două posibilități, dacă încercăm să introducem valoarea $y = \frac{1}{2}$ doar prima convine. Acum trebuie să și demonstrăm că aceasta ar fi formula potrivită pentru x.

  Fie $y \in (0, 1]$. Luăm $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$. Avem că

$$f\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right) = \frac{2\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right)^2} = \frac{2 + 2\sqrt{1 - y^2}}{y} \cdot \frac{1}{\frac{y^2}{y^2} + \frac{1 + 2\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2}{y^2}}$$

$$= \frac{2 + 2\sqrt{1 - y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{2 + 2\sqrt{1 - y^2}} = y$$

Din cele de mai sus rezultă că f este bijectivă.

Conform definiției, inversa unei funcții $f : A \to B$ este o funcție $g : B \to A$ cu proprietatea că $f \circ g = \mathbb{1}_B$ și $g \circ f = \mathbb{1}_A$.

Luăm $g : (0,1] \to [1,\infty)$, $g(y) = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. Atunci avem că $f \circ g = \mathbb{1}_{[1,\infty)}$ (conform calculelor de la surjectivitate), și putem arăta și că $g \circ f = \mathbb{1}_{(0,1]}$ (prin alte calcule asemănătoare). □

Exercițiul 3. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat (respectiv orientat). Definim relația de echivalență pe noduri $n \,\rho\, m \iff n$ este vecin cu m. Ce reprezintă închiderea tranzitivă a lui ρ în acest caz?

Demonstrație. Conform definiției, închiderea tranzitivă a lui ρ este

$$\rho' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \rho^n$$

Să vedem ce reprezintă ρ^n pentru un anumit n.

Dacă există o muchie între nodul a și nodul b ($(a,b) \in \rho$), și o muchie între b și c ($(b,c) \in \rho$), atunci în ρ^2 vom avea perechea $(a,c) \in \rho^2$. Cu alte cuvinte, spunem că două noduri se află în relația $x \,\rho^2\, y$ dacă există un drum de lungime doi între x și y.

Reunind toate drumurile de lungime $1, 2, \ldots, \infty$ obținem că $x \,\rho'\, y$ dacă există un drum de orice lungime între x și y.

Acum să vedem ce reprezintă clasele de echivalență pentru ρ'. Toate nodurile între care există un drum sunt echivalente. O mulțime maximală de noduri care sunt conectate se numește componentă conexă. □

Exercițiul 4. Pe mulțimea $\mathbb{C}^*$ (numere complexe în afară de 0) definim relația $\sim$ cu $z \sim w$ dacă 0, z, și w sunt coliniare. Arătați că $\sim$ este relație de echivalență și găsiți un sistem de reprezentanți.

Demonstrație. Pentru a demonstra că este relație de echivalență trebuie să arătăm că este

- *reflexivă*: Fie $z \in \mathbb{C}^*$. Atunci z se află pe dreapta $(0, z)$. Deci $z \sim z$.
- *simetrică*: Fie $z, w \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z \sim w$. Atunci $0, z, w$ sunt coliniare. Putem spune că și $0, w, z$ sunt coliniare. Deci $w \sim z$.
- *tranzitivă*: Fie $z, w, v \in \mathbb{C}^*$ astfel încât $z \sim w$ și $w \sim v$.

Deoarece toate punctele aflate pe o dreaptă care trece prin origine, am putea lua ca sistem de reprezentanți dreptele:

$$S = \{\ d \text{ dreaptă care trece prin } 0\ \}$$

Dacă ne dăm seama că singurul lucru care contează pentru a distinge aceste drepte este panta lor, putem să luăm ca sistem de reprezentanți unghiul pe care îl fac cu O_x:

$$S = \{\ u \text{ unghi } \mid u \in [0, 2\pi)\ \}$$

Să mai observăm și că obținem aceeași dreaptă dacă luăm două unghiuri la distanță π între ele. Așa că sistemul se poate reduce la

$$S = \{\ u \text{ unghi } \mid u \in [0, \pi)\ \}$$

□

Exercițiul 5. Fie $\sim$ relația pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită prin $(a, b) \sim (c, d)$ dacă $a + d = b + c$. Arătați că $\sim$ este o relație de echivalență și identificați un sistem de reprezentanți.

Demonstrație. Arătăm mai întâi că $\sim$ este de echivalență:

- *reflexivă*: Fie $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Avem că $a + b = b + a$. Deci $(a, b) \sim (a, b)$.
- *simetrică*: Fie $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ astfel încât $(a, b) \sim (c, d)$.
- *tranzitivă*: Fie $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, cu

$$\left.\begin{aligned} (a,b) \sim (c,d) &\iff a+d=b+c \iff a-b=c-d \\ (c,d) \sim (e,f) &\iff c+f=d+e \iff c-d=e-f \end{aligned}\right\} \implies$$
$$\begin{aligned} &\implies a-b=e-f \\ &\iff a+f=b+e \\ &\iff (a,b) \sim (e,f) \end{aligned}$$

Acum trebuie să alegem reprezentanți pentru fiecare clasă de echivalență. Observăm că dacă plecăm de la, de exemplu $(2, 3)$ obținem

$$(0,1) \sim (1,2) \sim (2,3) \sim (3,4) \sim \cdots \sim (n, n+1)$$

Sau dacă plecăm de la $(7, 4)$ obținem

$$(3,0) \sim \cdots \sim (6,3) \sim (7,4) \sim (8,5) \sim \cdots \sim (n+3, n)$$

Deci clasele de echivalență sunt de forma $(n, n + k)$ sau $(n + k, n)$. Luăm separat și cazul (n, n). Deci un sistem de reprezentanți ar fi

$$S = \left\{ (0,k) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ (k,0) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{ (0,0) \}$$

O idee ar fi să identificăm perechile de forma $(k, 0)$ cu $+k$ și cele de forma $(0, k)$ cu simbolul $-k$. Astfel aceste clase de echivalență se identifică cu $\mathbb{Z}$. Dacă avem o pereche oarecare (a, b), dacă $a > b$ atunci aceasta reprezintă numărul pozitiv cu modulul $a - b$, dacă $a < b$ reprezintă numărul negativ cu modulul $b - a$.

Regulile de calcul pentru $\mathbb{Z}$ funcționează și când lucrăm pe aceste perechi. Dacă luăm $(5, 3)$ (care ar însemna $+2$) și adunăm $(1, 6)$ (care ar însemna -5) obținem $(6, 9)$ (care ar însemna (-3)). □

Exercițiul 6. Fie X o mulțime. Demonstrați că mulțimea funcțiilor $f : X \to X$ formează un monoid în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

Demonstrație. Pentru a forma un monoid, operația $\circ$ trebuie să îndeplinească două cerințe:

- să fie asociativă (știm deja asta despre compunerea funcțiilor)
- să admită un element neutru: să existe o funcție $h : X \to X$ cu proprietatea că

$$f \circ h = h \circ f = f, \forall f : X \to X$$

Observăm că în cazul nostru elementul neutru este funcția identică $\mathbb{1}_X$.

□