Curs 11

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $a \in I$ și $f \in C^\infty(I)$.

Definiție. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul a.

Teoremă. Seria Taylor asociată funcției f în punctul a (de mai sus) este convergentă în $x \in I$ și are suma $f(x)$ dacă și numai dacă $(R_n(x))_n$ converge la 0 (i.e. $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$), unde $R_n(x)$ este restul formulei lui Taylor.

Observație. În general $a = 0$. Seria Taylor asociată funcției f în punctul 0 se mai numește și seria MacLaurin asociată funcției f.

Exercițiu. Folosind teorema precedentă arătați că

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$0 \in I$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(x) = e^{x} \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Conform Formulei lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange, $\forall x \in \mathbb{R}^*$ (i.e. $x \neq 0$), $\exists$ c între 0 și x (i.e. $c \in (0, x)$ sau $c \in (x, 0)$) astfel încât $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n +$

$$+ \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}}_{= R_n(x)} = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Avem echivalența: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$.

$$|R_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|R_{n+1}(x)|}{|R_n(x)|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^c}{(n+2)!}|x|^{n+2}}{\frac{e^c}{(n+1)!}|x|^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{e^c}\cdot\overset{|x|}{\cancel{|x|^{n+2}}}}{\underset{n+2}{\cancel{(n+2)!}}}\cdot\frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{e^c}\cdot\cancel{|x|^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+2} = 0<1$$

Conform Criteriului raportului pentru șiruri cu termeni strict pozitivi avem $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

Conform teoremei precedente avem $\underset{e^x}{\underset{\|}{f(x)}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$.

Dacă $x=0$, atunci $e^x=e^0=1$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{0^n}{n!}=1$ $(0^0=1)$.

Deci $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. $\square$

Observație. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in (-1, 1)$ (suma seriei geometrice).

Înlocuim x cu $-x$ în formula precedentă și avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in (-1,1).$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

În ultima relație înlocuim x cu x^2 și obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Exercițiu. Arătați că $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\forall x \in [-1, 1]$.

Soluție. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Observăm că $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in [-1, 1]$.

Conform observației precedente avem $f'(x) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Integrăm „termen cu termen" și obținem că există

$C\in\mathbb{R}$ a.î. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+C \;\forall x\in(-1,1)$.

$f(0)=\operatorname{arctg}0=0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{0^{2n+1}}{2n+1}=0.$$

Deci $0=0+C$, i.e. $C=0$.

Prin urmare $\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\;\forall x\in(-1,1)$.

Dacă $x=1$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}$ (convergentă, conform Criteriului lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem

$$\underbrace{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\operatorname{arctg}x}_{=\operatorname{arctg}1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}.$$

Dacă $x=-1$, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n+1}$ (convergentă, conform Criteriului lui Leibniz).

Conform Teoremei a doua a lui Abel avem

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\parallel$$

$$\operatorname{arctg}(-1)$$

Așadar $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1, 1]$. □

<u>Seria binomială.</u> $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in (-1, 1)$ avem

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Derivate parțiale. Diferențiabilitate

Considerăm $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall i = \overline{1,n}\}$.

<u>Definiție.</u> Pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ definim:

1) $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

2) $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

<u>Observație.</u> Atunci când nu specificăm, se subînțelege că notăm $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ etc.

<u>Definiție.</u> Fie $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Definim norma lui x, $\|x\| \overset{def.}{=} \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

<u>Propoziție.</u> Aplicația de mai sus $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definește o normă pe $\mathbb{R}^n$, i.e. are proprietățile:

1) $\|x\|\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$.
2) $\|x\|=0 \iff x=(0,\dots,0) \overset{not.}{=} 0_{\mathbb{R}^n}$
3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$.
4) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

<u>Observație.</u> $\forall$ $x,y\in\mathbb{R}^n$, $\underbrace{d_2(x,y)}_{\overset{not.}{\|}\ d(x,y)}=\|x-y\|$.

<u>Observație.</u> Fie $f:D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Atunci, $\forall$ $a\in D$, $f(a)=(f_1(a),\dots,f_n(a))$.

Prin urmare, am definit funcțiile $f_1,\dots,f_n:D\to\mathbb{R}$.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ și $a \in \mathring{D}$.

Definiție. 1) Spunem că f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a (sau că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a) dacă există (în $\mathbb{R}^n$) limita $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$, unde

$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{poziția } i}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$. În acest caz notăm

$\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \overset{\text{not.}}{=} \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a + t e_i) - f(a)}{t}$ ($\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ se numește derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i în punctul a).

2) Spunem că f este diferențiabilă (sau derivabilă) în punctul a dacă există o aplicație liniară $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (i.e. $T(x + y) = T(x) + T(y)$ și $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$) a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Observație. Aplicația liniară T, din definiția de mai sus, dacă există, este unică, se notează $df(a)$ sau $f'(a)$ și se numește diferențiala funcției f în a ($df(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$).

Observații. ① Fie $c \in A$. Sunt echivalente:

i) f continuă în c.

ii) $f_1, \dots, f_n$ continue în c.

② Sunt echivalente:

i) f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a.

ii) $f_1, \dots, f_n$ admit derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul a.

Dacă una dintre afirmațiile i) sau ii) de la ② este satisfăcută, atunci $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)\right) \in$
$\in \mathbb{R}^n$.

③ Sunt echivalente:

i) f este diferențiabilă în a.

ii) $f_1, \dots, f_n$ sunt diferențiabile în a.

Dacă una dintre afirmațiile i) sau ii) de la (3) este satisfăcută, atunci $df(a)=(df_1(a),\dots,df_n(a))$.

Teoremă. Dacă f este diferențiabilă în punctul a, atunci f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a pentru orice $i\in\{1,\dots,m\}$ și

$$df(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\ df(a)(u=(u_1,\dots,u_m)) = {}^t\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}\right]$$

(Înmulțire de matrice; Vom obține o matrice coloană; Luăm transpusa și obținem o matrice linie, adică un vector (din $\mathbb{R}^n$)).

Observație. Dacă $n=1$, avem $f:D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ și formula precedentă devine: $df(a):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$,

$$df(a)\left(u=(u_1,\dots,u_m)\right) = {}^t\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)u_m.$$

<u>Teoremă.</u> Dacă f este diferențiabilă în a, atunci f este continuă în a.

<u>Observație.</u> Reciproca afirmației precedente nu este, în general, adevărată.

<u>Propoziție.</u> Orice aplicație liniară $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în orice punct $a \in \mathbb{R}^m$ și $df(a) = f$.

<u>Observație (Caz particular al propoziției precedente).</u> Proiecțiile $pr_i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $pr_i(u=(u_1,\dots,u_m)) = u_i \ \forall i=\overline{1,m}$ sunt diferențiabile în orice punct $a \in \mathbb{R}^m$ și $dpr_i(a) = pr_i \ \forall i=\overline{1,m}$, deoarece sunt aplicații liniare.

Notăm $pr_i = dx_i \ \forall i=\overline{1,m}$.

Cu această notație, dacă $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in \mathring{D}$ avem $df(a)(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)u_m = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,pr_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,pr_m(u) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1(u) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,dx_m(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^m$, i.e.

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,dx_m.$$