# FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN

## A) NOTIUNI GENERALE

*Definitia 1.* Se numeste diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $a<b\in\mathbb{R}$ o multime finita de elemente $\Delta=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ astfel incat $x_0<x_1<.....<x_n=b$.

*Notatie.*$\Delta: a=x_0<x_1<....<x_n=b$

$D([a,b])=\{\Delta|\,\Delta\ \textit{diviziune a intervalului}\ [a,b]\}$

*Definitia 2.* Fie $\Delta\in D([a,b]),\Delta: a=x_0<x_1<....<x_n=b$.

a) Numarul real $\|\Delta\|=\max\{|x_{i+1}-x_i|\,|\,0\le i\le n-1\}$ se numeste norma diviziunii $\Delta$.

b) O multime finita $t_\Delta=\{t_1,t_2,....,t_n\}$ cu $t_i\in[x_{i-1},x_i]\ \ \forall 1\le i\le n$ se numeste sistem de puncte internediare asociat diviziunii $\Delta$.

*Definitia 3.* Se considera o functie $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ \Delta\in D([a,b]),\ \Delta: a=x_0<x_1<....<x_n=b$ si $t_\Delta=\{t_1,t_2,....,t_n\}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $\Delta$. Numarul real $\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})$ se numeste suma Riemann asociata functiei $f$, diviziunii $\Delta$ si sistemului de puncte intermediare $t_\Delta$.

*Notatie.*$\sigma_\Delta(f;t_\Delta)\overset{not}{=}\sum\limits_{i=1}^n f(t_i)(x_i-x_{i-1})$

*Definitia 4.* Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie marginita, $\Delta\in D([a,b]),\Delta: a=x_0<x_1<....<x_n=b$, $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ si $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\forall 1\le i\le n$.

a) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})$ se numeste suma Darboux superioara asociata functiei $f$ si diviziunii $\Delta$.

b) Numarul real $\sum\limits_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})$ se numeste suma Darboux inferioara asociata functiei $f$ si diviziunii $\Delta$.

*Notatie.* $S_\Delta(f)\overset{not}{=}\sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})$

$s_\Delta(f)\overset{not}{=}\sum\limits_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})$

*Definitia 5.* O functie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann pe $[a,b]$ daca $\exists I\in\mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\forall\varepsilon>0\exists\delta_\varepsilon>0$ astfel incat $|\sigma_\Delta(f;t_\Delta)-I|<\varepsilon\forall\Delta\in D([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ si $\forall t_\Delta$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $\Delta$.

*Notatie.* a) $I\overset{not}{=}\int\limits_a^b f(x)dx\in\mathbb{R}$ -integrala Riemann a functiei $f$ pe $[a,b]$

b) $\Re([a,b])\overset{not}{=}\{f:[a,b]\to\mathbb{R}|\,f\ \textit{functie integrabila Riemann pe}\ [a,b]\}$

*Teorema 1.* Fie $f\in\Re([a,b])$. Pentru orice sir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ si pentru orice $t_{\Delta_n}$ sistem de puncte intermediare asociat diviziunii $\Delta_n$ exista $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f;t_{\Delta_n})=\int\limits_a^b f(x)dx$.

*Criteriul de integrabilitate al lui Darboux.* Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie marginita. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

a) $f \in \Re([a,b])$

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel incat $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \; \forall \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$.

*Definitia 6.* O multime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeste neglijabila Lebesgue daca $\forall \varepsilon > 0 \varepsilon \; \exists ((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sir de intervale deschise astfel incat $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$.

*Teorema 2 (Proprietatile multimilor neglijabile Lebesgue).* Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime neglijabila Lebesgue si $B \subseteq A$, atunci $B$ este multime neglijabila Lebesgue.

b) Daca $A \subseteq \mathbb{R}$ este multime finita sau multime numarabila, atunci $A$ este neglijabila Lebesgue.

c) Daca $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un sir de multimi neglijabile Lebesgue, atunci $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ este multime neglijabila Lebesgue.

d) Multimea vida $\varnothing$ este neglijabila Lebesgue.

*Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.* O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$ daca si numai daca $f$ este functie marginita si $D_f = \{x \in [a,b] | \, f \textit{ nu este continua in } x\}$ este multime neglijabila Lebesgue.

Observatie. 1) Daca $f, g \in \Re([a,b])$, atunci $\alpha f + \beta g \in \Re([a,b]) \;\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si $\int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x) dx$.

2) Daca $f, g \in \Re([a,b])$, atunci $f \cdot g \in \Re([a,b])$.

*Teorema 3.* a) Orice functie continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

b) Orice functie monotona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabila Riemann pe $[a,b]$.

*Demonstratie.* a) In demonstratie folosim criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue.

$[a,b]$ multime compacta in $\mathbb{R}$

$f$ functie continua pe $[a,b] \Rightarrow f$ functie marginita pe $[a,b]$ (1)

$D_f = \varnothing \Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue (2)

Din relatiile (1) si (2), folosind criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, rezulta ca $f \in \Re([a,b])$.

b) Vom utiliza criteriul de integrabilitate al lui Darboux.

Presupunem, fara a restrange generalitatea, ca $f$ este functie crescatoare.

Fie $\Delta \in D([a,b]), \Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$. Vom evalua $S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$.

$S_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

$s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1i}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$

$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \|\Delta\| \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = \|\Delta\| (f(b) - f(a))$

Fie $\varepsilon > 0$.

Alegem $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$

$\forall \Delta \in D([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ avem ca $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \|\Delta\|(f(b) - f(a)) \leq \delta_\varepsilon(f(b) - f(a)) < \varepsilon$.

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Darboux, deducam ca $f \in \Re([a,b])$.

*Teorema 4.* Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii astfel ca $f \in \Re([a,b])$ si $A = \{x \in [a,b] | \, f(x) \neq g(x)\}$ este multime finita. Atunci $g \in \Re([a,b])$ si

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx$.

*Exemplu.* Sa se arate ca functia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data de $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in (0,1] \\ 2, x = 0 \end{cases}$ este integrabila Riemann pe $[0,1]$ si sa se calculeze $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Se observa ca $f$ este continua pe multimea $(0,1]$ si ca $f$ nu este continua in punctul $x_0 = 0$.

$D_f = \{0\}$ multime finita$\Rightarrow D_f$ multime neglijabila Lebesgue

$0 \leq f(x) \leq 2 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow f$ functie marginita

Aplicand criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue, avem ca $f$ este integrabila Riemann pe $[0,1]$.

Alegem $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = x^2 \ \forall x \in [0,1]$.

$g$ functie continua pe $[0,1] \Rightarrow g$ functie integrabila Riemann pe $[0,1]$.

$A = \{x \in [0,1] | \, f(x) \neq g(x)\} = \{0\}$ multime finita.

Din teorema 4 avem ca

$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \mid_0^1 = \frac{1}{3}$.

# B) PROPRIETATILE FUNCTIILOR INTEGRABILE RIEMANN

*Definitia 7.* Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f, F : I \to \mathbb{R}$ doua functii. Spunem ca $F$ este o primitiva a functiei $f$ daca $F$ este functie derivabila pe $I$ si $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.

*Teorema* 5. Fie $f \in \Re([a,b])$ si functia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \ \forall x \in [a,b]$. Atunci $F$ este functie continua pe $[a,b]$. Daca, in plus, $f$ este continua in punctul $x_0 \in [a,b]$, atunci $F$ este derivabila in $x_0$ si $F'(x_0) = f(x_0)$.

*Corolar.* Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat. Orice functie continua $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe $I$.

*Teorema 6.* Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ doua intervale nedegenerate, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $I$ si $g, h : J \to I$ doua functii derivabile pe $J$. Atunci functia $F : J \to \mathbb{R}$ definita prin $F(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ este derivabila pe $J$ si $F'(x) = f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \ \forall x \in J$.

*Formula Leibniz-Newton.* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie integrabila Riemann care admite primitive, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele functiei $f$. Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

*Formula de integrare prin parti pentru integrala Riemann.* Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile astfel ca $f', g' \in \Re([a,b])$. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

*Teorema 7.* Se considera $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ doua functii integrabile Riemann.

a) Daca $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

b) Daca $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

c) Daca $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ si $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, atunci $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

d) Daca $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ , $\int_a^b f(x)dx = 0$ si $\exists x_0 \in [a,b]$ astfel incat $f$ este continua in $x_0$, atunci $f(x_0) = 0$.

e) Avem ca $|f| \in \Re([a,b])$ si ca

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

*Teorema de medie pentru functii integrabile Riemann.* Se considera $f, g \in \Re([a,b])$ cu urmatoarele proprietati:

a) $f$ are proprietatea lui Darboux

b) $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$.

Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

*Corolar.* Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua. Atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel incat $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

*Teorema convergentei uniforme pentru integrala Riemann.* Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie astfel ca $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci $f \in \Re([a,b])$ si $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

*Teorema convergentei marginite pentru integrala Riemann.* Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \xrightarrow{s} f$

b) $\exists M > 0$ astfel incat $|f_n(x)| \leq M \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

*Teorema convergentei monotone pentru integrala Riemann.* Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\Re([a,b])$ si $f \in \Re([a,b])$ astfel ca:

a) $f_n \xrightarrow{s} f$

b) $f_n \leq f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ sau $f_n \geq f_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Atunci $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Exemplu. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.

Se alege sirul de functii $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$f_n$ functie continua pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n$ integrabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Fie $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, \frac{\pi}{2}) \\ 1, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Este clar ca $f_n \xrightarrow{s} f$.

$f$ este functie marginita pe $[0,1]$ si $D_f = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ este multime neglijabila Lebesgue$\Rightarrow f$ este integtabila Riemann pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$|f_n(x)| = |\sin^n x| \leq 1\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$

Se verifica ipotezele teoremei convergentei marginite pentru integrala Riemann. Asadar, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0.$