UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 6

① Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții continue, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ și $x_0 \in \mathbb{R}$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) h este continuă în x_0

b) $f(x_0) = g(x_0)$.

Soluție:

a) $\Rightarrow$ b) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ și $(y_n)_n \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a.î. $\lim_n x_n = \lim_n y_n = x_0$

Cum h și f sunt continue în x_0, avem:

$$\lim_n h(x_n) = \lim_n f(x_n) = f(x_0) = h(x_0) \quad (1)$$

Cum h și g sunt continue în x_0, avem:

$$\lim_n h(y_n) = \lim_n g(y_n) = g(x_0) = h(x_0) \quad (2)$$

Din (1) și (2) avem că $f(x_0) = g(x_0)$.

b) $\Rightarrow$ a) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\lim_n x_n = x_0$. Vreau $\lim_n h(x_n) = h(x_0)$

Avem $h(x_n) - h(x_0) = \begin{cases} f(x_n) - f(x_0) & ; x_n \in \mathbb{Q} \\ g(x_n) - g(x_0) & ; x_n \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ deci avem

$$|h(x_n) - h(x_0)| \leq |f(x_n) - f(x_0)| + |g(x_n) - g(x_0)| \quad (\forall) n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Cum f și g sunt continue, $\lim_n |f(x_n) - f(x_0)| = \lim_n |g(x_n) - g(x_0)| = 0$

deci având în vedere (3), tragem concluzia că $\lim_n |h(x_n)-h(x_0)|=0$.
i.e. $\lim_n h(x_n)=h(x_0)$

Așadar h este continuă în x_0

(2) Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\mathbb{Q} \\ g(x), & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Să se arate că:

h-derivabilă în $x_0 \iff f(x_0)=g(x_0)$ și $f'(x_0)=g'(x_0)$.

Soluție:

"$\Rightarrow$" Deoarece h este derivabilă în $x_0\in\mathbb{R}$, avem că ea este continuă în x_0, deci $f(x_0)=g(x_0)$

Fie $(x_n)_n\subseteq\mathbb{Q}$ și $(y_n)_n\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $\lim_n x_n=\lim_n y_n=x_0$. Cum h și f sunt derivabile în x_0, avem:

$$\lim_n \frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0}=\lim_n \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0)=h'(x_0) \quad (1)$$

Cum h și g sunt derivabile în x_0, avem

$$\lim_n \frac{h(y_n)-h(x_0)}{y_n-x_0}=\lim_n \frac{g(y_n)-g(x_0)}{y_n-x_0}=g'(x_0)=h'(x_0) \quad (2)$$

Din (1) și (2), deducem că $f'(x_0)=g'(x_0)$.

"$\Leftarrow$" Fie $f'(x_0)=g'(x_0):=L$. Fie $(x_n)_n\subseteq\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ a.î. $x_n\xrightarrow{n}x_0$

Avem $$\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0}-L=\begin{cases}\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-L, & x_n\in\mathbb{Q}\\[2ex] \dfrac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}-L, & x_n\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$, deci

$$\left|\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0}-L\right|\le\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}-L\right|+\left|\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0}-L\right| \quad (3)$$

CAMEN

Cum f și g sunt derivabile în x_0 avem

$$\lim_n \left| \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} - L \right| = \lim_n \left| \frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} - L \right| = 0,$$ deci ținând seama de (3), tragem concluzia că $$\lim_n \left| \frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n-x_0} - L \right| = 0$$

Așadar $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = L$, deci h este derivabilă în x_0

(3) Să se determine punctele de derivabilitate pentru funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^3-x^2 & ; x\in\mathbb{Q} \\ 0 & ; x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

Soluție:

Conform exercițiului (2), dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este un punct de derivabilitate pt. funcția f, atunci $x_0^3-x_0^2=0$ și $3x_0^2-2x_0=0$. Cum $x_0=0$ este singurul punct care verifică condițiile de mai sus, concluzionăm că $x_0=0$ este singurul punct de derivabilitate pentru f.

(4) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă în origine.

Soluție:

Fie $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ a.î. $\lim_n (x_n,y_n)=(0,0)$, i.e. $x_n \xrightarrow{n} 0$, $y_n \xrightarrow{n} 0$.

Atunci, cum $\left|\frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+y_n^2}\right| \leq \frac{x_n^2}{x_n^2+y_n^2}|x_n| + \frac{y_n^2}{x_n^2+y_n^2}|y_n| \leq |x_n|+|y_n|$

$(\forall) n \in \mathbb{N}$, deducem că:

$$\lim_n \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+y_n^2} = 0 \quad (1)$$

Deoarece $\lim_n (x_n^3+y_n^3) = 0$, obținem că: $\lim_n \frac{\sin(x_n^3+y_n^3)}{x_n^3+y_n^3} = 1 \quad (2)$.

Din (1) și (2), concluzionăm că $\lim_n \frac{x_n^3+y_n^3}{x_n^2+y_n^2} \cdot \frac{\sin(x_n^3+y_n^3)}{x_n^3+y_n^3} = 0$, deci

$\lim_n \frac{\sin(x_n^3+y_n^3)}{x_n^2+y_n^2} = 0$, i.e. $\lim_n f((x_n, y_n)) = f(0,0)$.

Prin urmare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, deci f este continuă în $(0,0)$

(5) Fie $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Să se arate că f nu este continuă în origine.

Soluție:

Să presupunem, prin reducere la absurd, că f este continuă în $(0,0)$. Atunci pentru orice $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ a.î. $\lim_n (x_n, y_n) = (0,0)$, avem $\lim_n f((x_n, y_n)) = f(0,0) = 0$

În particular avem $\lim_n f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0$, deci obținem contradicția $\frac{1}{2} = 0$

Așadar f nu este continuă în origine.

Altfel: Trecând la coordonate polare $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, obținem

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{r^2} = \sin\varphi\cos\varphi$

ceea ce arată că limita în $(0,0)$ nu există, deci funcția nu este continuă în origine.

⑥ Fie $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Să se arate că f - nu este continuă în origine.

Soluție:

Fie $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$; $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow (0,0)$. Atunci $f(x_n,y_n) \longrightarrow \frac{1}{2}$

Dacă $(x_n',y_n')=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$, atunci $f(x_n',y_n') \longrightarrow 0$

Prin urmare $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ nu există și ca atare f - nu e continuă în $(0,0)$

observație: Deși $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)=0$ $(\forall) m\in\mathbb{R}$, totuși limita nu există

⑦ Să se studieze continuitatea funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Soluție: Pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ funcția este continuă (fiind elementară).

altfel: $(\forall)\, a,b\in\mathbb{R}$ și $(\forall)(a_n)_n,(b_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_n a_n=a$ și $\lim\limits_n b_n=b$
$\Rightarrow \lim\limits_n f((a_n,b_n))=f(a,b))$

Să studiem continuitatea în $(0,0)$

Fie $\varepsilon>0$. Alegem $\delta_\varepsilon=\sqrt{2\varepsilon}$. Fie $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta_\varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\delta_\varepsilon$

(norma euclidiană).

Avem: $|f(x,y)-f(0,0)| = |f(x,y)| = \left|xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = |xy|\cdot\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2} \le$

$\le |xy|\cdot\frac{|x^2+y^2|}{x^2+y^2} = |xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2) < \frac{1}{2}\cdot\delta_\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon$

Prin urmare f este continuă în (0,0) și deci f este continuă pe $\mathbb{R}^2$

(8) Să se arate că nu există funcții continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î.
$f(x)\in\mathbb{Q} \iff f(x+1)\notin\mathbb{Q}$.

Soluție:

Să pp. că $(\exists)$ o funcție continuă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a.î. $f(x)\in\mathbb{Q}\iff f(x+1)\notin\mathbb{Q}$.
Definim $h,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $h(x)=f(x+1)-f(x)$ și $g(x)=f(x+1)+f(x)$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$, care evident sunt continue și ca atare au proprietatea lui Darboux. Prin urmare $h(\mathbb{R})$ și respectiv $g(\mathbb{R})$ sunt intervale.
Cum $h(\mathbb{R})$ și $g(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ se reduc la un punct, adică h și g sunt constante

Prin urmare f este constantă ceia ce contrazice faptul că f ia cel puțin două valori, anume una rațională și una irațională

Altă soluție: Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x+1)-f(x)$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$.
Cum g-continuă și $g(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ că g este constantă
deci $(\exists)$ $c\in\mathbb{R}$ a.î. $g(x)=c$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$

$f(x)\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(x+1)\notin\mathbb{Q}\Rightarrow g(x)\notin\mathbb{Q}$ (i.e $c\notin\mathbb{Q}$).

Deci $f(x+1)=f(x)+g(x)=f(x)+c\notin\mathbb{Q}$.
Pe de altă parte $f(x+2)\in\mathbb{Q}$ (altfel $f(x+2)\notin\mathbb{Q}\Rightarrow f(x+1)\in\mathbb{Q}$ contradicție).
Avem $\underset{\mathbb{Q}\ni}{f(x+2)}=f(x+1)+c=\underset{\mathbb{Q}\ni}{f(x)}+2c \Rightarrow 2c\in\mathbb{Q}\iff c\in\mathbb{Q}$. contradicție

(9) Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\alpha_1,\alpha_2 \geq 0$; $\beta_1,\beta_2>0$

Atunci f continuă în $(0,0) \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$.

Soluţie:

„$\Longrightarrow$" Ştim f continuă în $(0,0)$. Vrem $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$.

Cum f continuă în $(0,0)$ avem că:

$(\forall)\ (x_n,y_n)\subseteq\mathbb{R}^2$; $(x_n,y_n)\longrightarrow(0,0) \implies f(x_n,y_n)\longrightarrow f(0,0)=0$

În particular pentru şirul $\left(\dfrac{1}{n^{\beta_2}};\dfrac{1}{n^{\beta_1}}\right)\longrightarrow(0,0)$; $n\in\mathbb{N}^*$ avem.

$$f\left(\frac{1}{n^{\beta_2}};\frac{1}{n^{\beta_1}}\right)=\frac{\dfrac{1}{n^{\alpha_1\beta_2}}\cdot\dfrac{1}{n^{\alpha_2\beta_1}}}{\left(\dfrac{1}{n^{\beta_1\beta_2}}+\dfrac{1}{n^{\beta_1\beta_2}}\right)^{\gamma}}=\frac{n^{\gamma\beta_1\beta_2-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}}{2^{\gamma}}$$

Cum $f\left(\dfrac{1}{n^{\beta_2}};\dfrac{1}{n^{\beta_1}}\right)\xrightarrow{n} f(0,0)=0 \implies \gamma\beta_1\beta_2-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)<0$ sau

$\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$.

„$\Longleftarrow$" Ştim $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$. Vrem f continuă în $(0,0)$

Deoarece $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=\dfrac{|x|^{\alpha_1}\cdot|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}}=\dfrac{(|x|^{\beta_1})^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}(|y|^{\beta_2})^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}}$

$\leq\dfrac{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}}=(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}-\gamma}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

Deoarece ştim din ipoteză că $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}+\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}>\gamma$. Deci f continuă în $(0,0)$.

Am folosit că:

$(\forall)\ x, y, a, b > 0$ avem: $x^a \cdot y^b \leq (x+y)^{a+b}$.

inegalitate evidentă deoarece avem:

$x^a \cdot y^b \leq (x+y)^{a+b} \ \Big|: y^{a+b} \neq 0 \iff \left(\frac{x}{y}\right)^a \leq \left(\frac{x}{y}+1\right)^{a+b}$.

iar $\left(\frac{x}{y}\right)^a \leq \left(\frac{x}{y}+1\right)^a \leq \left(\frac{x}{y}+1\right)^{a+b}$.

qed.