Seminar 13

1. Studiați convergența (natura) următoarelor integrale improprii:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

__Soluție.__ Fie $f, g : [1, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$.

Avem $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1, \infty)$.

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty x^{-4}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-4}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3b^3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Deci $\int_1^\infty g(x)\,dx$ este convergentă.

Conform Criteriului de comparație cu inegalități $\int_1^\infty f(x)\,dx$ este convergentă. $\square$

b) $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$.

__Soluție.__ Rezolvați-l voi!

c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx$.

<u>Soluție</u>. Fie $f, g : [1,\infty) \to (0,\infty)$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$,

$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \in (0,\infty).$$

Conform Criteriului de comparație cu limită, $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \sim \int_1^{\infty} g(x)\,dx$ (Cele două integrale improprii au aceeași natură).

$$\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{b}-2\right) = \infty.$$

Deci $\int_1^{\infty} g(x)\,dx$ este divergentă.

Așadar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă. $\square$

d) $\int_1^\infty \sin \frac{1}{x^{12}} dx$.

Soluție. Fie $f:[1,\infty) \to [0,\infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x^{12}}$.

f funcție descrescătoare.

Conform Criteriului integral al lui Cauchy $\int_1^\infty f(x) dx \sim$

$\sim \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^{12}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 12$).

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Deci $\int_1^\infty f(x) dx$ este convergentă.

2. Determinați:

a) $\iint_A xy \, dx dy$, unde $A = [-1,2] \times [1,3]$.

Soluție. A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$.

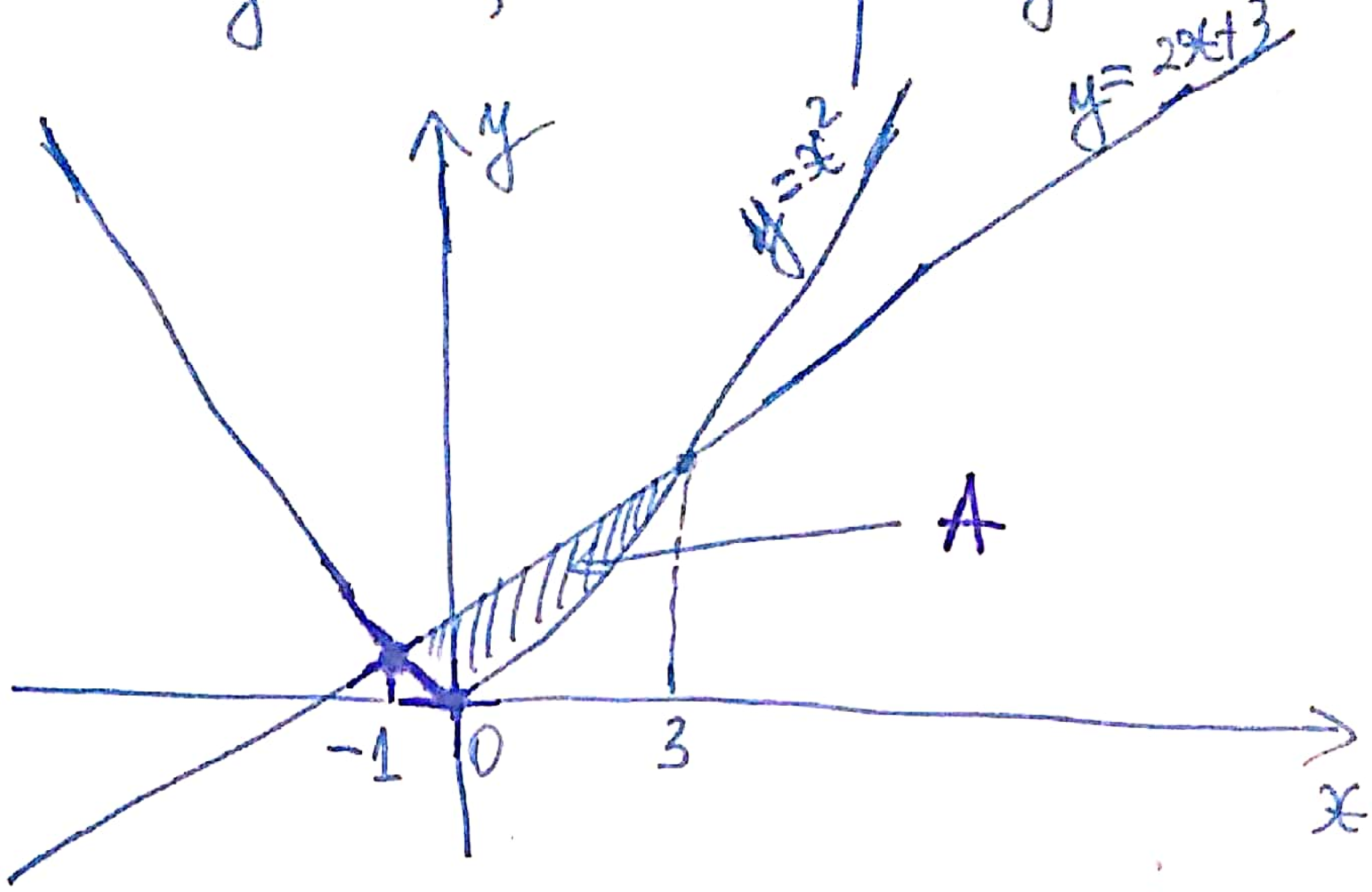
f continuă.

$\iint_A xy\, dx dy = \int_{-1}^2 \left(\int_1^3 xy \, dy \right) dx = \int_{-1}^2 x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} dx =$

$= \int_{-1}^2 \frac{x}{2}(9-1) dx = \int_{-1}^2 4x\, dx = 4 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=-1}^{x=2} = 2(4-1) = 6.$ $\square$

b) $\iint_A xy\, dx dy$, unde A este mulțimea plană limitată de parabola $y=x^2$ și de dreapta $y=2x+3$.

Soluție.



Determinăm punctele de intersecție dintre dreaptă și parabolă.

$2x+3=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

$\Delta = 4+12=16$.

$x_1 = \frac{2-4}{2} = -1$

$x_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 3,\ x^2\leq y\leq 2x+3\}$.

Fie $\alpha,\beta:[-1,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=2x+3$.

α,β - continue.

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$.

f continuă.

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{2x+3} xy\,dy\right)dx = \int_{-1}^{3} x\cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=2x+3} dx =$$

$$= \int_{-1}^{3} \frac{x}{2}\left((2x+3)^2 - (x^2)^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} x\left(4x^2+12x+9-x^4\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}\left(-x^5+4x^3+12x^2+9x\right) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{x^6}{6}\Bigg|_{x=-1}^{x=3} +\right.$$

$$\left. + \cancel{4}\,\frac{x^4}{\cancel{4}}\Bigg|_{x=-1}^{x=3} + \overset{4}{\cancel{12}}\,\frac{x^3}{\cancel{3}}\Bigg|_{x=-1}^{x=3} + 9\,\frac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-1}^{x=3}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(-729+1\right) + \frac{1}{2}\left(81-1\right) + 2\left(27+1\right) + \frac{9}{4}\left(9-1\right) =$$

$$= -\frac{\overset{182}{\cancel{728}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} + 40 + 56 + 18 = -\frac{182}{3} + 114 = \frac{-182+342}{3} =$$

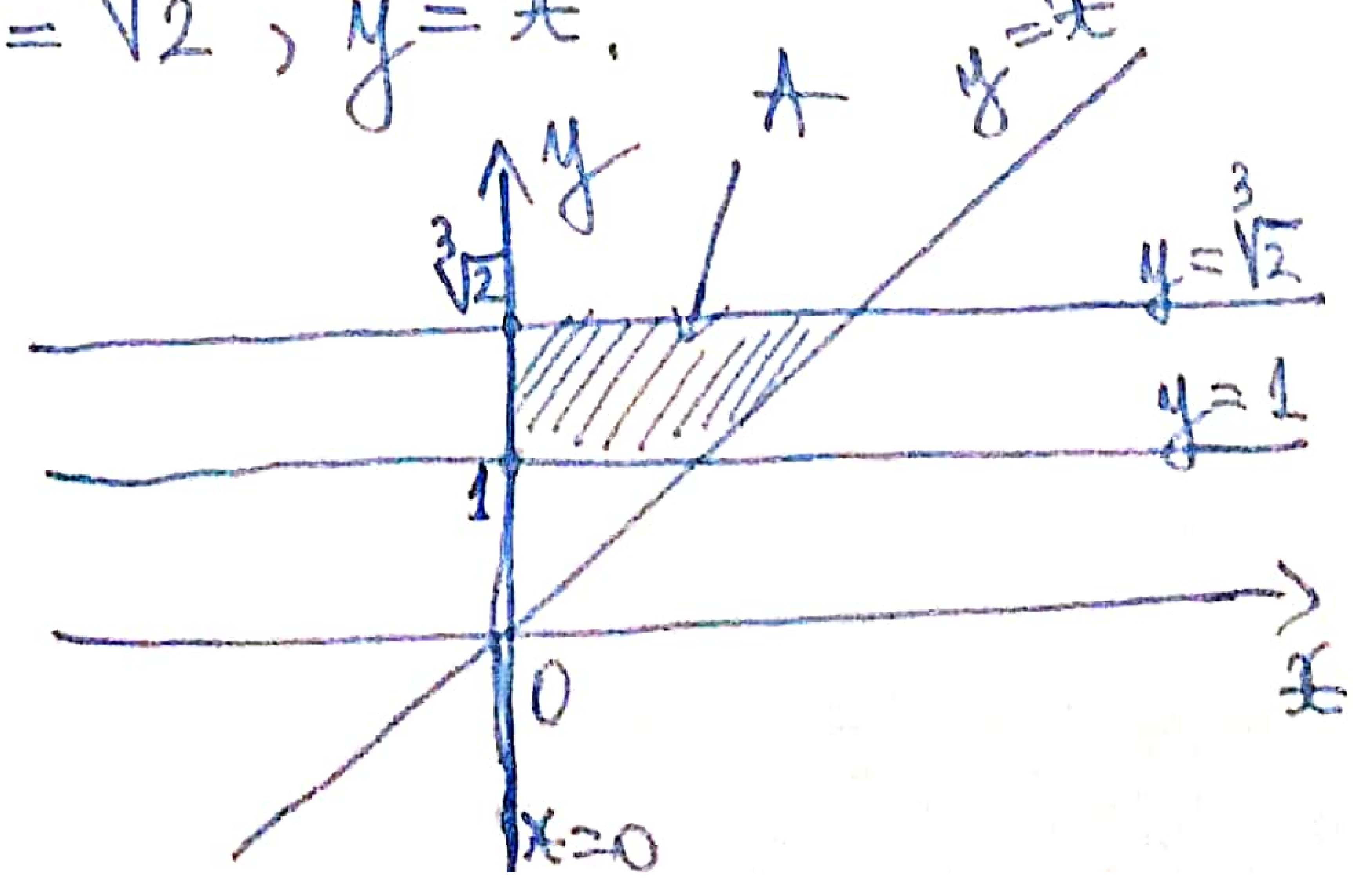
$$= \frac{160}{3}. \qquad \square$$

c) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $y=-x^2-x+2$ și $y=x-1$.

<u>Soluție.</u> Exercițiu!

d) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt[3]{2}$, $y=x$.

<u>Soluție.</u>



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le y\le \sqrt[3]{2},\ \ 0\le x\le y\}$.

Fie $\varphi,\psi:[1,\sqrt[3]{2}]\to\mathbb{R}$, $\varphi(y)=0$, $\psi(y)=y$.

φ,ψ continue.

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$.

f continuă.

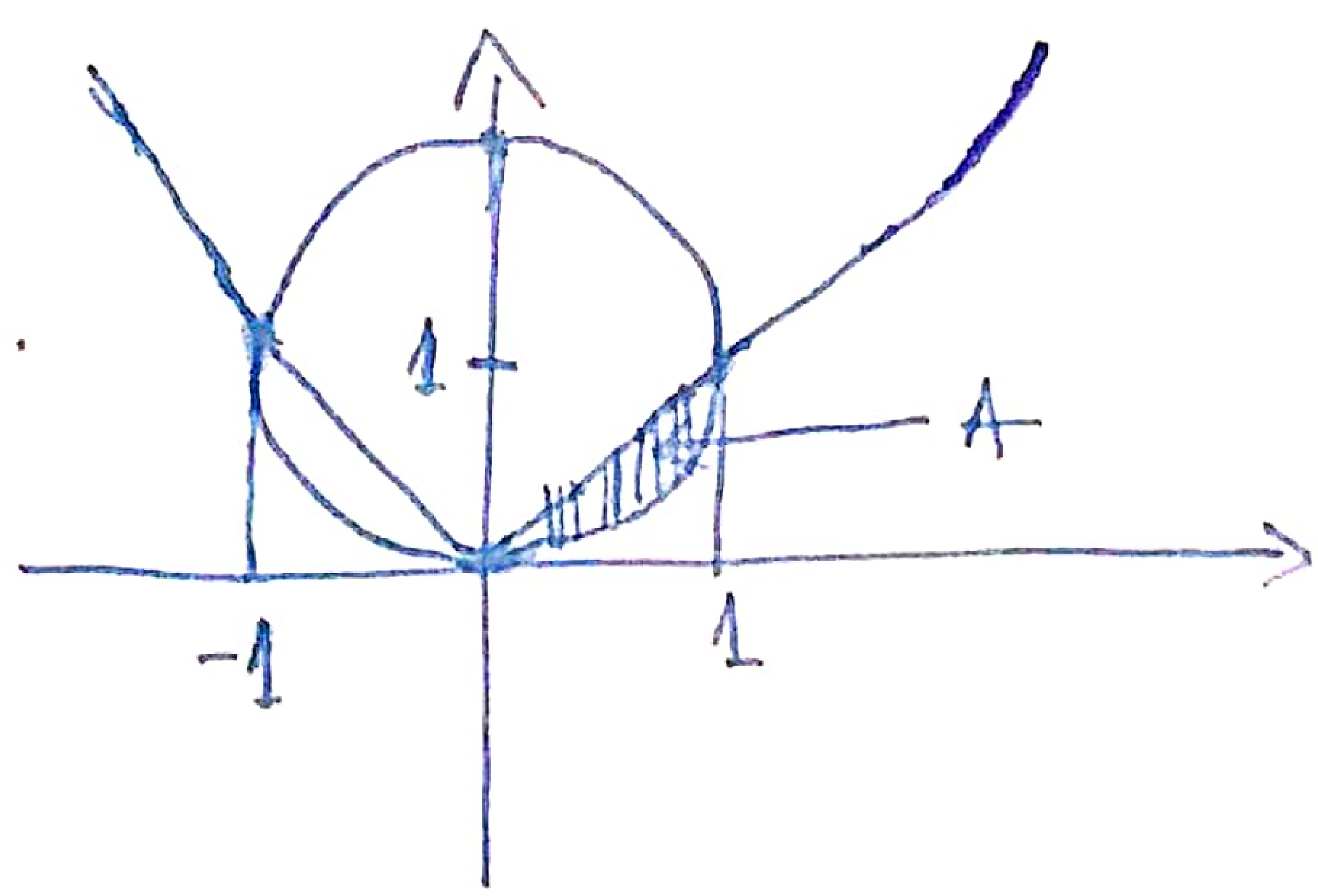
$$\iint_A y\,dx\,dy=\int_1^{\sqrt[3]{2}}\left(\int_0^y y\,dx\right)dy=\int_1^{\sqrt[3]{2}} yx\Big|_{x=0}^{x=y}dy=$$

$$=\int_1^{\sqrt[3]{2}} y(y-0)\,dy=\frac{y^3}{3}\Big|_{y=1}^{y=\sqrt[3]{2}}=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}.\quad\square$$

e) $\iint_A (1-y)\,dx\,dy$, unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2\le 1,$

$y\le x^2,\ x\ge 0\}$.

Soluție.



Determinăm punctele de intersecție dintre cercul $x^2+(y-1)^2=1$ și parabola $y=x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2=1-(y-1)^2 \\ x^2=y \end{array}\right\}\Rightarrow 1-(y-1)^2=y\Rightarrow \cancel{1}-y^2+2y-\cancel{1}=y\Rightarrow$$

$\Rightarrow -y^2+y=0 \Rightarrow y(-y+1)=0 \Rightarrow y=0$ sau $y=1$.

$y=0 \underset{\underset{x^2=y}{\uparrow}}{\Rightarrow} x=0$

$y=1 \underset{\underset{x^2=y}{\uparrow}}{\Rightarrow} x=\pm 1$.

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\le y\le x^2\}$.

Fie $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=1-\sqrt{1-x^2}$, $\beta(x)=x^2$.

α,β continue.

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=1-y$.

f continuă.

$$\iint_A (1-y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x^2}(1-y)\,dy\right)dx=$$

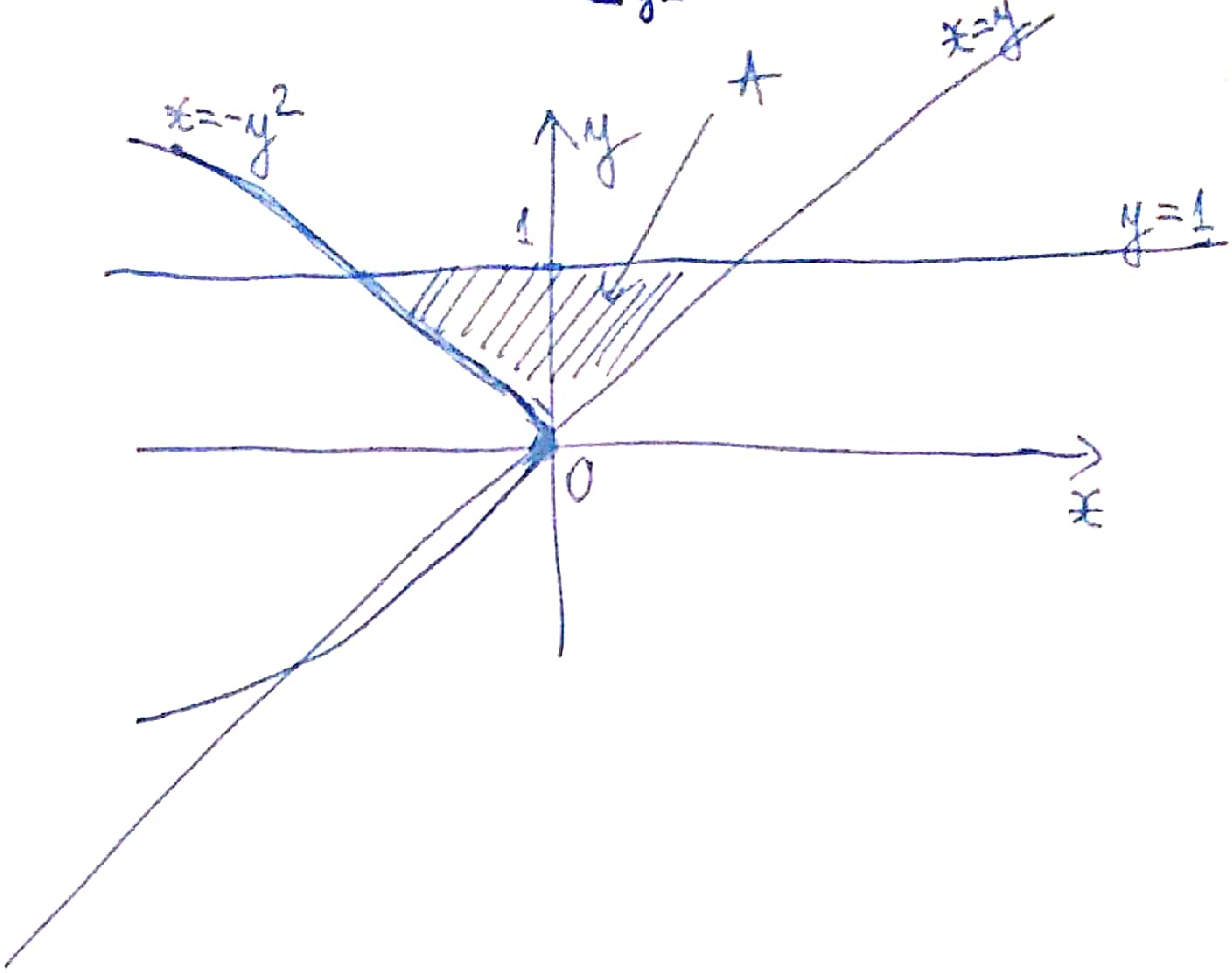
$$=-\int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2}\Bigg|_{y=1-\sqrt{1-x^2}}^{y=x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1-x^2)^2-(\cancel{1}-\cancel{1}+\sqrt{1-x^2})^2\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(\cancel{1}+x^4-2x^2-\cancel{1}+x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^4-x^2)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=1}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\overset{3)}{\frac{1}{5}}-\overset{5)}{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{15}.\ \square$$

f) $\iint_A y\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $x=-y^2$, $x=y$, $y=1$.

Soluție.



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ -y^2 \le x \le y\}$.

Fie $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(y) = -y^2$, $\psi(y) = y$.

φ, ψ continue

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$.

f continuă.

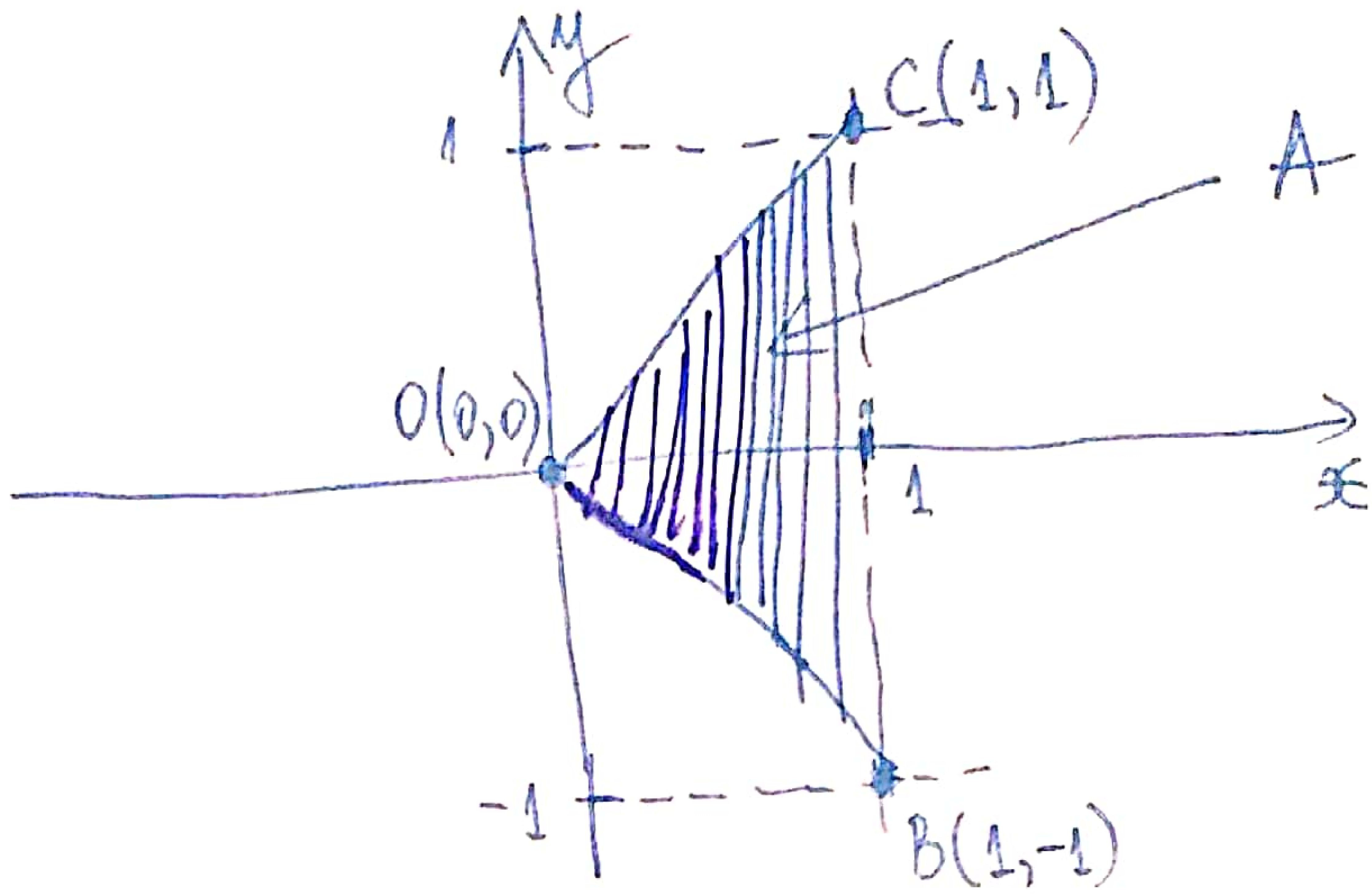
$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-y^2}^{y} y\,dx \right) dy = \int_0^1 yx \Big|_{x=-y^2}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 y(y+y^2)\,dy = \int_0^1 (y^2+y^3)\,dy = \frac{y^3}{3}\Big|_{y=0}^{y=1} + \frac{y^4}{4}\Big|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}. \quad \square$$

g) $\iint_A x\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană limitată de triunghiul OBC, $O(0,0)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$.

Soluție.



Scriem ecuațiile dreptelor OB, OC și BC.

OB: $\dfrac{y-y_0}{y_B-y_0} = \dfrac{x-x_0}{x_B-x_0} \Leftrightarrow \dfrac{y-0}{-1-0} = \dfrac{x-0}{1-0} \Leftrightarrow y=-x.$

OC: $\dfrac{y-y_0}{y_C-y_0} = \dfrac{x-x_0}{x_C-x_0} \Leftrightarrow \dfrac{y-0}{1-0} = \dfrac{x-0}{1-0} \Leftrightarrow y=x.$

BC: $x=1$.

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ -x\le y\le x\}$.

Fie $\alpha,\beta:[0,1]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=-x$, $\beta(x)=x$.

α,β continue.

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x$.

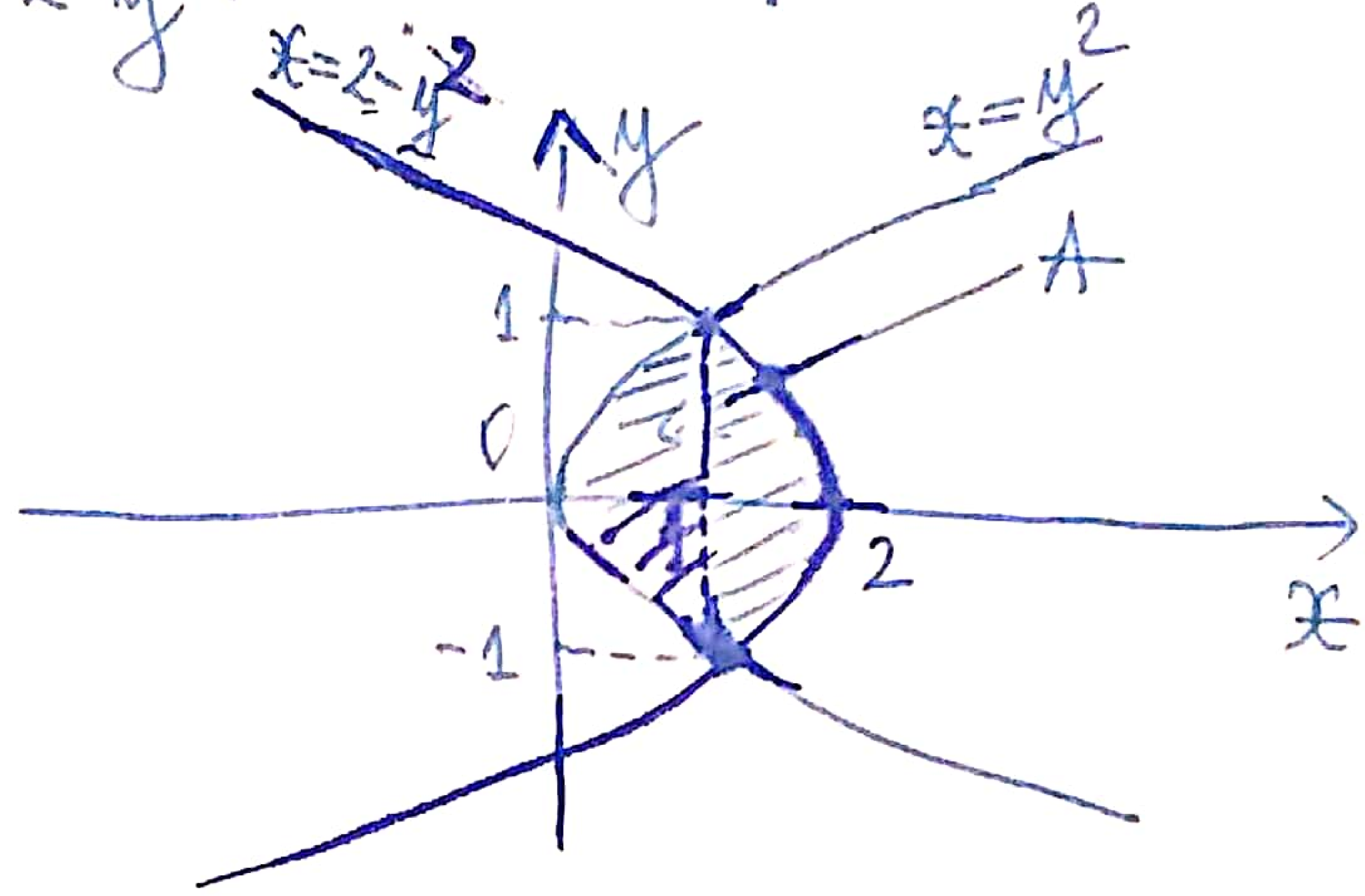
f continuă.

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-x}^{x} x\,dy \right) dx = \int_0^1 xy \Big|_{y=-x}^{y=x} dx =$$

$$= \int_0^1 x(x+x)\,dx = 2\,\frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}. \quad \square$$

h) $\iint_A xy\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $x=y^2$ și $x=2-y^2$.

<u>Soluție.</u>



Determinăm punctele de intersecție dintre parabolele $x=y^2$ și $x=2-y^2$.

$y^2 = 2-y^2 \Leftrightarrow 2y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm 1.$

$y=1 \underset{x=y^2}{\Rightarrow} x=1$

$y=-1 \underset{x=y^2}{\Rightarrow} x=1.$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le y\le 1,\ y^2\le x\le 2-y^2\}.$

Fie $\varphi,\psi:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $\varphi(y)=y^2$, $\psi(y)=2-y^2$.

φ,ψ continue.

A este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

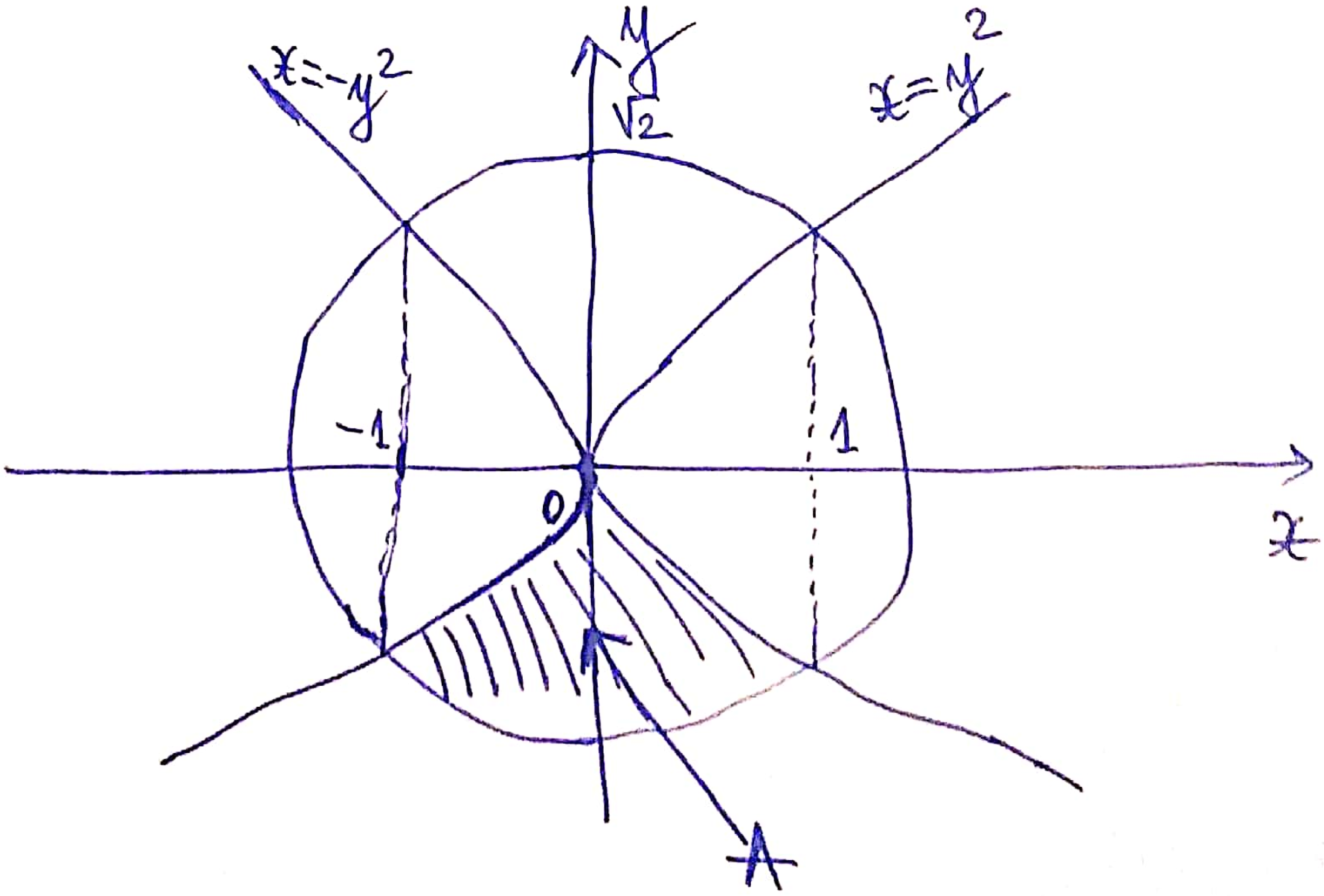
f continuă.

$$\iint_A xy \, dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{2-y^2} xy \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} y \frac{x^2}{2} \Big|_{x=y^2}^{x=2-y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{y \left[(2-y^2)^2 - (y^2)^2 \right]}_{\text{funcție impară}} dy = 0. \square$$

i) $\iint_A y \, dx\,dy$, unde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2,$
$x \le y^2, x \ge -y^2, y \le 0\}$.

Soluție.



Determinăm punctele de intersecție dintre parabola $x=-y^2$ și cercul $x^2+y^2=2$, respectiv dintre parabola $x=y^2$ și cercul $x^2+y^2=2$.

$$\begin{cases} x=-y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y^2 \\ (-y^2)^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y^2 \\ y^4+y^2-2=0. \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y^4+y^2-2=0. \\ y^2 \overset{\text{not}}{=} t. \end{array}\right| \Rightarrow t^2+t-2=0$$

$\Delta=1+8=9.$

$$t_1=\frac{-1-3}{2}=-2$$

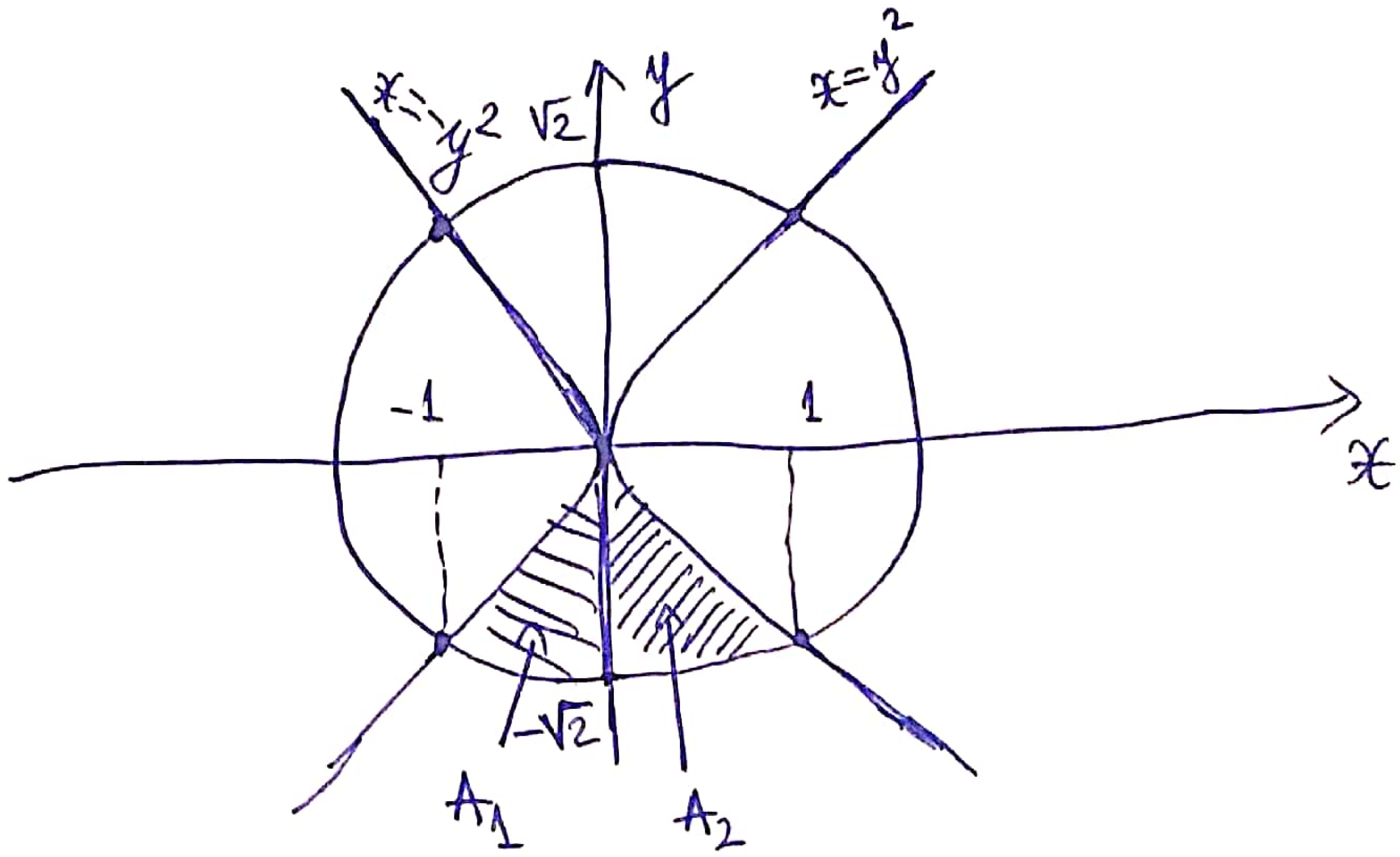
$$t_2=\frac{-1+3}{2}=1.$$

$$y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1 \xRightarrow[x=-y^2]{} x=-1.$$

$$\begin{cases} x=y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ y^4+y^2-2=0 \end{cases}$$

Obținem (ca mai sus) $y=\pm 1$ și $x=1$.

Avem $A=A_1 \cup A_2$, unde $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 0,$
$-\sqrt{2-x^2}\le y\le -\sqrt{-x}\}$ și $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,$
$-\sqrt{2-x^2}\le y\le -\sqrt{x}\}.$



$A_1 \cap A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0,\ y \in [-\sqrt{2}, 0]\} = \{0\} \times [-\sqrt{2}, 0]$.

$\mu(A_1 \cap A_2) = 0$.

Fie $\alpha, \beta : [-1,0] \to \mathbb{R}$, $\alpha(x) = -\sqrt{2-x^2}$, $\beta(x) = -\sqrt{-x}$.

α, β continue.

A_1 este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\gamma(x) = -\sqrt{2-x^2}$, $\delta(x) = -\sqrt{x}$.

γ, δ continue.

A_2 este mulțime măsurabilă Jordan și compactă.

Fie $f : A = A_1 \cup A_2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$.

f continuă.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{A_2} f(x,y)\,dx\,dy$.

$\iint_{A_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{-x}} y\,dy \right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} y^2 \Big|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=-\sqrt{-x}} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} (-x - 2 + x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{x=-1}^{x=0} - 2x\Big|_{x=-1}^{x=0} + \frac{x^3}{3}\Big|_{x=-1}^{x=0} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2} - 2(0+1) + \frac{1}{3}(0+1) \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{6} \right) = -\frac{7}{12}.$$

$$\iint_{A_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} y\, dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 \Big|_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=-\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2 + x^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} - 2x\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{1} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{6} \right) = -\frac{7}{12}.$$

$$\iint_A y\, dx\, dy = -\frac{7}{12} - \frac{7}{12} = -2 \cdot \frac{7}{12} = -\frac{7}{6}. \qquad \square$$