DERIVATE PARŢIALE. FUNCŢII DIFERENŢIABILE

Derivabilitatea funcţiilor de o variabilă cu valori în $\mathbb{R}^n$

Definiţie. *Fie* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *şi* $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n$.

Dacă există (în $\mathbb{R}^n$*), limita* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, *spunem că* f *este derivabilă în* x_0. *Limita* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *se numeşte derivata lui* f *în* x_0 *şi se notează* $f'(x_0)$.

Dacă f *este derivabilă în toate punctele unei mulţimi* $E \subseteq (a,b)$, *atunci spunem că* f *este derivabilă pe* E.

Observaţie. *Fie* $(a,b) \subseteq R$, $x_0 \in (a,b)$ *şi* $f : (a,b) \to R^n$. *Dacă* $f = (f_1, ..., f_n)$ *atunci* f *este derivabilă în* x_0 *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1, ..., f_n$ *sunt derivabile în* x_0. *În acest caz* $f'(x_0) = (f_1(x_0), ..., f_n(x_0))$.

Exemplu. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *o funcţie dată de* $f(x) = (e^{2x}, x^2 + x, \sin x)$. *Atunci* $f'(x) = (2e^{2x}, 2x+1, \cos x)$.

Derivata după o direcţie

Definiţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid$ *există* $r > 0$ *astfel încât* $B(x,r) \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{R}^p \mid \|y - x\| < r\} \subseteq D\}$, $u \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}^q$. *Dacă există, limita* $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$ *se numeşte derivata lui* f *în punctul* c *după vectorul* u *(sau după direcţia* u*, dacă* $\|u\| = 1$*) şi se notează cu* $\frac{df}{du}(c)$, $\frac{\partial f}{\partial u}(c)$ *sau cu* $f'_u(c)$.

Aşadar

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} \overset{not}{=} \frac{df}{du}(c) \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial u}(c) \overset{not}{=} f'_u(c).$$

Definiţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$, $e_i = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^p$, *unde* 1 *este pe poziţia* $i \in \{1, 2, ..., p\}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}^q$. *Derivata lui* f *după vectorul* e_i *în punctul* c *(dacă există) se numeşte derivata parţială a lui* f *în* c *în raport cu variabila* x_i *şi se notează cu* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$.

Aşadar

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \lim_{t\to 0}\frac{f(c+te_i)-f(c)}{t},$$

i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = \lim_{t\to 0}\frac{f(c_1,..,c_{i-1},c_i+t,c_{i+1},...,c_p)-f(c_1,..,c_{i-1},c_i,c_{i+1},...,c_p)}{t}.$$

Exemple

1. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ pentru $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Soluţie. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

pentru $(x,y)\neq(0,0)$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de $f(x,y)=\{\begin{array}{ll} 0, & xy=0 \\ 1, & xy\neq 0\end{array}$, are următoarele proprietăţi:

a) există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

b) nu este continuă în $(0,0)$.

Soluţie.

a) Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Aşadar f are derivate parţiale în origine.

b) Deoarece $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=1$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = 1 \neq f(0,0),$$

deci f nu este continuă în $(0,0)$.

3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de $f(x,y)=x^2y^3$, $c=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ şi $u=(m,n)\in\mathbb{R}^2$ un vector nenul.

Observăm că $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy^3$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Atunci

$\frac{\partial f}{\partial u}(c)=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{f(a+tm,b+tn)-f(a,b)}{t}=$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{(a+tm)^2(b+tn)^3-a^2b^3}{t}=\lim\limits_{t\to0}2m\left(a+tm\right)\left(b+tn\right)^3+3n\left(a+tm\right)^2\left(b+tn\right)^2=$

$=2mab^3+3na^2b^2=m\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+n\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=$

$=(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))\begin{pmatrix} m\\ n\end{pmatrix}=(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\frac{\partial f}{\partial y}(a,b))u^t.$

Exerciţii

i) Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ pentru $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0\}\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=xy\ln x$ pentru orice $y\in\mathbb{R}$, $x>0$.

ii) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dată de $f(x,y)=\{\begin{array}{ll}\frac{x}{y}, & y\neq0\\ 0, & y=0\end{array}$, are următoarele proprietăţi:

a) există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$;

b) nu este continuă.

Teorema de caracterizare a funcţiilor derivabile. *Fie $U=\overset{\circ}{U}\subseteq\mathbb{R}$, $c\in U$ şi $f:U\to\mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) Funcţia f este derivabilă în c.

ii) Există o aplicaţie liniară $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (i.e. $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$, pentru orice $\alpha,\beta,x,y\in\mathbb{R}$) astfel încât $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{|x-c|}=0$.

iii) Există o aplicaţie liniară $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega:U\to\mathbb{R}$ astfel încât şi $f(x)=f(c)+L(x-c)+|x-c|\,\omega(x)$ şi $\lim\limits_{x\to c}\omega(x)=0$.

Demonstraţie. i)$\Rightarrow$ii) Considerând aplicaţia liniară $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de $L(u)=f^{'}(c)u$ pentru orice $u\in\mathbb{R}$, avem

$$\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{|x-c|}=\frac{f(x)-f(c)-f^{'}(c)(x-c)}{x-c}\frac{x-c}{|x-c|}=$$

$$=(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f^{'}(c))\frac{x-c}{|x-c|},$$

de unde, cum $\lim\limits_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f^{'}(c))=0$ şi $\frac{x-c}{|x-c|}\in\{-1,1\}$, obţinem că

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{|x-c|}=\lim_{x\to c}(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f^{'}(c))\frac{x-c}{|x-c|}=0.$$

ii)$\Rightarrow$i) Aplicaţia liniară $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ are proprietatea că

$$L(x)=L(x\cdot 1)=xL(1),$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Ca atare, cum $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{|x-c|}=0$ şi $\frac{|x-c|}{x-c}\in\{-1,1\}$, obţinem

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{|x-c|}\cdot\frac{|x-c|}{x-c}=0,$$

i.e.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-(x-c)L(1)}{x-c}=0,$$

de unde

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=L(1).$$

Aşadar f este derivabilă în c. $\Box$

Această nouă abordare ne conduce la următoarea:

Definiţie. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in\overset{\circ}{D}$ şi $f:D\to\mathbb{R}^q$. Spunem că f este diferenţiabilă (sau derivabilă) în c dacă există o aplicaţie liniară $L:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ (i.e. $L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y)$ pentru orice $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $x,y\in\mathbb{R}^p$) astfel încât*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-L(x-c)}{\|x-c\|}=0.$$

Observaţie. *L, dacă există, este unică şi se notează cu $Df(c)$ sau $f^{'}(c)$ şi se numeşte diferenţiala (sau derivata) lui f în punctul c.*

Notă. *Aplicaţia L din definiţia anterioară este unică.*

Propoziţie. *Fie $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in\overset{\circ}{D}$ şi $f:D\to\mathbb{R}^q$. Funcţia f este diferenţiabilă (sau derivabilă) în c dacă şi numai dacă există o aplicaţie liniară*

$L:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ *şi o funcţie* $\omega:D\to\mathbb{R}$ *astfel încât şi* $f(x)=f(c)+L(x-c)+\|x-c\|\,\omega(x)$ *pentru orice* $x\in D$ *şi* $\lim\limits_{x\to c}\omega(x)=0$.

Teorema de continuitate a funcţiilor diferenţiabile. *Fie* $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in\overset{\circ}{D}$ *şi* $f:D\to\mathbb{R}^q$. *Dacă* f *este diferenţiabilă în* c, *atunci* f *este continuă în* c.

Demonstraţie.

$\lim\limits_{x\to c}f(x)=\lim\limits_{x\to c}f(c)+f'(c)(x-c)+\|x-c\|\,\omega(x)=f(c)$. $\square$

Teorema privind derivabilitatea după o direcţie a funcţiilor diferenţiabile. *Fie* $D\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in\overset{\circ}{D}$ *şi* $f:D\to\mathbb{R}^q$ *astfel încât* f *este diferenţiabilă în* c.

Atunci

$$\frac{df}{du}(c)=Df(c)(u),$$

pentru orice $u\in\mathbb{R}^p$.

În particular

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)=Df(c)(e_i),$$

pentru orice $i\in\{1,2,...,p\}$.

Demonstraţie. Având în vedere diferenţiabilitatea lui f în c, obţinem

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)-Df(c)(c+tu-c)}{\|c+tu-c\|}=0,$$

i.e.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)-tDf(c)(u)}{|t|}=0.$$

Prin urmare

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)-tDf(c)(u)}{|t|}\frac{|t|}{t}=0,$$

i.e.

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c+tu)-f(c)}{t}=Df(c)(u),$$

deci există $\frac{df}{du}(c)$ şi

$$\frac{df}{du}(c)=Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$. $\square$

Observaţie.

Pentru $f = (f_1, f_2, ..., f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ diferenţiabilitatea lui f în c echivalează cu diferenţiabilitatea funcţiilor $f_1, f_2, ..., f_q$ în c, deci, în principiu, putem presupune că $q = 1$.

Dacă f este diferenţiabilă în c, atunci $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este dată

$$Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = (Df_1(c)(u_1, u_2, ..., u_p), ..., Df_q(c)(u_1, u_2, ..., u_p)) =$$

$$= (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c)u_p, ..., \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c)u_p),$$

pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$.

Matricea asociată acestei aplicaţii liniare, pentru perechea de baze canonice, este

$$\left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & ... & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{array} \right).$$

Această matrice se numeşte matricea Jacobi a lui f în c şi se notează $J_f(c)$.

În cazul $q = 1$, avem

$$Df(c)(u_1, u_2, ..., u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p,$$

pentru orice $(u_1, u_2, ..., u_p) \in \mathbb{R}^p$, care, în mod tradiţional, se scrie sub forma

$$Df(c) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p.$$

Criteriul de continuitate. *Fie* $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}^q$ *satisfăcând următoarele două proprietăţi:*

i) există derivatele parţiale în orice punct din D*;*

ii) derivatele parţiale sunt mărginite pe D.

Atunci f *este continuă în* c.

Criteriul de diferenţiabilitate. *Fie* $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in D$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}^q$ *satisfăcând următoarele două proprietăţi:*

i) există derivatele parţiale în orice punct din D;
ii) derivatele parţiale sunt continue în c.
Atunci f este diferenţiabilă în c.

Teorema privind comportamentul derivatelor parţiale la sumă, produs scalar şi produs cu scalari. *Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$, $u \in \mathbb{R}^p - \{0\}$, $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ şi $\varphi : D \to \mathbb{R}$ astfel încât f, g şi φ au derivate parţiale în raport cu vectorul u în c. Atunci:*
α) $\alpha f + \beta g$în c şi

$$\frac{\partial(\alpha f + \beta g)}{\partial u}(c) = \alpha \frac{\partial f(c)}{\partial u} + \beta \frac{\partial g(c)}{\partial u}.$$

β) $f \cdot g$ are derivată parţială în raport cu vectorul u în c şi

$$\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial u}(c) = g(c) \cdot \frac{\partial f(c)}{\partial u} + f(c) \cdot \frac{\partial g(c)}{\partial u},$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.
γ) φf are derivată parţială în raport cu vectorul u în c şi

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial u}(c) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(c) f(c) + \varphi(c) \frac{\partial f(c)}{\partial u},$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Demonstraţie.

α) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(\alpha f + \beta g)(c+tu) - (\alpha f + \beta g)(c)}{t} =$
$= \lim\limits_{t \to 0} \frac{\alpha f(c+tu) - \alpha f(c)}{t} + \lim\limits_{t \to 0} \frac{\beta g(c+tu) - \beta g(c)}{t} = \alpha \frac{\partial f(c)}{\partial u} + \beta \frac{\partial g(c)}{\partial u}$.

β) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(f \cdot g)(c+tu) - (f \cdot g)(c)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(\sum\limits_{i=1}^{q} f_i g_i)(c+tu) - (\sum\limits_{i=1}^{q} f_i g_i)(c)}{t} =$
$= \lim\limits_{t \to 0} \sum\limits_{i=1}^{q} \frac{(f_i g_i)(c+tu) - (f_i g_i)(c)}{t} = \sum\limits_{i=1}^{q} \lim\limits_{t \to 0} \frac{(f_i g_i)(c+tu) - (f_i g_i)(c)}{t} =$
$= \sum\limits_{i=1}^{q} (g_i(c) \frac{\partial f_i(c)}{\partial u} + f_i(c) \frac{\partial g_i(c)}{\partial u}) = g(c) \cdot \frac{\partial f(c)}{\partial u} + f(c) \cdot \frac{\partial g(c)}{\partial u}$

γ) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(\varphi f)(c+tu) - (\varphi f)(c)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(\varphi f)(c+tu) - (\varphi f)(c)}{t} =$
$= (\lim\limits_{t \to 0} \frac{(\varphi f_i)(c+tu) - (\varphi f_i)(c)}{t})_{i=\overline{1,q}} = (\frac{\partial \varphi}{\partial u}(c) f_i(c) + \varphi(c) \frac{\partial f_i(c)}{\partial u})_{i=\overline{1,q}} =$
$= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(c) f(c) + \varphi(c) \frac{\partial f(c)}{\partial u}$. $\square$

Teorema privind comportamentul funcţiilor diferenţiabile la sumă, produs scalar şi produs cu scalari. *Fie* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$, $f, g : D \to \mathbb{R}^q$ *şi* $\varphi : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât* f, g *şi* φ *sunt diferenţiabile în* c. *Atunci:*

α) $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în c şi

$$D(\alpha f + \beta g)(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c).$$

β) $f \cdot g$ este diferenţiabilă în c şi

$$D(f \cdot g)(c)(u) = g(c)Df(c)(u) + f(c)Dg(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

γ) φf este diferenţiabilă în c şi

$$D(\varphi f)(c)(u) = D\varphi(c)(u)f(c) + \varphi(c)Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Demonstraţie.

α) Deoarece f şi g sunt diferenţiabile în c rezultă că $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{\|x-c\|} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)-g'(c)(x-c)}{\|x-c\|}$. Înmulţind cu α şi β şi adunând obţinem că $\lim\limits_{x\to c}\frac{(\alpha f+\beta g)(x)-(\alpha f+\beta g)(c)-(\alpha f'(c)+\beta g'(c))(x-c)}{\|x-c\|} = 0$.

β) Deoarece f şi g sunt diferenţiabile în c rezultă că $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{\|x-c\|} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)-g'(c)(x-c)}{\|x-c\|}$. Atunci

$\lim\limits_{x\to c}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(c)-(g(c)Df(c)+f(c)Dg(c))(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}\frac{(f\cdot g)(x)-f(c)\cdot g(x)+f(c)\cdot g(x)-(f\cdot g)(c)-(g(c)Df(c)+f(c)Dg(c))(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}\frac{(f\cdot g)(x)-f(c)\cdot g(x)-(g(x)Df(c))(x-c)}{\|x-c\|} + \frac{g(x)Df(c)(u)(x-c)-g(c)Df(c)(x-c)}{\|x-c\|} +$
$+ \frac{f(c)\cdot g(x)-(f\cdot g)(c)-f(c)Dg(c)(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}\frac{(g\cdot f)(x)-g(x)\cdot f(c)-g(x)Df(c)(x-c)}{\|x-c\|} + \frac{g(x)Df(c)(u)(x-c)-g(c)Df(c)(x-c)}{\|x-c\|} +$
$+ \frac{f(c)\cdot g(x)-(f\cdot g)(c)-f(c)Dg(c)(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(c)-(Df(c))(x-c)}{\|x-c\|} + \lim\limits_{x\to c}\left(g(x) - g(c)\right) Df(c)\frac{x-c}{\|x-c\|} +$
$+ \lim\limits_{x\to c} f(c) \cdot \frac{g(x)-g(c)-Dg(c)(x-c)}{\|x-c\|} = 0.$

γ) Deoarece f şi g sunt diferenţiabile în c rezultă că $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-f'(c)(x-c)}{\|x-c\|} = 0$ şi $\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)-g'(c)(x-c)}{\|x-c\|}$. Atunci

$\lim\limits_{x\to c}\frac{(\varphi f)(x)-(\varphi f)(c)-(\varphi' f+\varphi f')(c)(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}\frac{(\varphi f)(x)-\varphi(c)f(x)+\varphi(c)f(x)-(\varphi f)(c)-(\varphi' f+\varphi f')(c)(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}\frac{\varphi(x)f(x)-\varphi(c)f(x)-\varphi'(c)f(x)(x-c)}{\|x-c\|} + \frac{\varphi'(c)f(x)(x-c)-\varphi'(c)f(c)(x-c)}{\|x-c\|}+$
$+\frac{\varphi(c)f(x)-\varphi(c)f(x)-\varphi(c)f'(x)(x-c)}{\|x-c\|} =$
$= \lim\limits_{x\to c}f(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(c)-\varphi'(c)(x-c)}{\|x-c\|} + \lim\limits_{x\to c}\varphi'(c)(f(x)-f(c))\frac{x-c}{\|x-c\|}+$
$+\lim\limits_{x\to c}\varphi(c)\frac{f(x)-f(x)-f(x)(x-c)}{\|x-c\|} = 0. \ \square$

Exemple

1. Să se scrie matricea Jacobi asociată funcţiei $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x,y) = \ln xy$ pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cu $xy > 0$, în punctul $(1,1)$.

Soluţie. Deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y},$$

deducem că

$$J_f(1,1) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)) = (1,1).$$

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x,y,z) = 2x^2 - y + 6xy - z^3 + 3z$ pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Să se calculeze derivata lui f în origine după vectorul $(2,1,-3)$.

Soluţie. Deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 6y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 6x \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2 + 3,$$

sunt continue, deducem că f este diferenţiabilă şi

$$Df(x,y,z) = (4x+6y)dx + (-1+6x)dy + (-3z^2+3)dz,$$

deci

$$Df(0,0,0) = -dy + 3dz.$$

Prin urmare, derivata lui f în origine după vectorul $(2,1,-3)$ este

$$Df(0,0,0)(2,1,-3) = -1 - 9 = -10.$$

3. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, descrisă de

$$f(x,y)=\{\begin{array}{cc}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{array},$$

are următoarele proprietăţi:

a) există $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$;

b) nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Soluţie. a) Pentru $(x,y)\neq(0,0)$ avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\text{ şi }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

În plus,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0\text{ şi }\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Aşadar f are derivate parţiale.

b) Dacă, prin reducere la absurd, f ar fi diferenţiabilă în origine, atunci

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

i.e.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=0,$$

de unde contradicţia

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=0,\text{ i.e. }\frac{1}{2}=0.$$

Exerciţii

i) Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y,z)=2x^2-y+6xy-z^3+3z$ pentru orice $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Să se calculeze derivata lui f în origine după vectorul $(1,2,0)$.

ii) Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, descrisă de

$$f(x,y)=\{\begin{array}{cc}xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{array},$$

este diferenţiabilă în $(0, 0)$.

Teorema de diferenţiabilitate a funcţiilor compuse. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $E \subseteq \mathbb{R}^q$, $c \in \overset{\circ}{D}$, $f : D \to E$ *şi* $g : E \to \mathbb{R}^s$ *astfel încât:*

i) $f(c) \in \overset{\circ}{E}$*;*

ii) f *este diferenţiabilă în* c*;*

iii) g *este diferenţiabilă în* $f(c)$*.*

Atunci

$$(g \circ f)'(c) = g'(f)(c) \circ f'(c)$$

, în particular dacă $s = 1$ *obţinem că*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(c) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(c))\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(c))\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(c) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_q}(f(c))\frac{\partial f_q}{\partial x_j}(c),$$

pentru orice $j \in \{1, ..., p\}$*, unde* $f = (f_1, ..., f_q)$*.*

Demonstraţie.

Deoarece f este diferenţiabilă în c rezultă că există $\omega_1 : D \to \mathbb{R}^q$ astfel încât $f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \|x - c\| \omega_1(x)$ pentru orice $x \in D$ şi $\lim\limits_{x \to c} \omega_1(x) = 0$. Deoarece g este diferenţiabilă în $f(c)$ rezultă că există $\omega_2 : E \to \mathbb{R}^s$ astfel încât $g(y) = g(f(c)) + g'(f(c))(y - f(c)) + \|y - f(c)\| \omega_2(y)$ pentru orice $x \in D$ şi $\lim\limits_{x \to c} \omega_2(x) = 0$. Înlocuind pe y cu obţinem

$g(f(x)) = g(f(c)) + g'(f(c))(f(x) - f(c)) + \|f(x) - f(c)\| \omega_2(f(x)) =$

$= g(f(c)) + g'(f(c))(f'(c)(x-c) + \|x - c\| \omega_1(x)) + \|f'(c)(x - c) + \|x - c\| \omega_1(x)\| \omega_2(f(x)) =$

$= g(f(c)) + g'(f(c)) \circ f'(c)(x-c) + \|x - c\| (g'(f(c)) \omega_1(x) + \left\| f'(c)(\frac{x-c}{\|x-c\|}) + \|x - c\| \omega_1(x) \right\| \omega_2$

Notam $\omega(x) = g'(f(c)) \omega_1(x) + \left\| f'(c)(\frac{x-c}{\|x-c\|}) + \|x - c\| \omega_1(x) \right\| \omega_2(f(x))$.

Rezultă că $\lim\limits_{x \to c} \omega(x) = 0$ şi că $(g \circ f)'(c) = g'(f)(c) \circ f'(c)$.$\square$

Exemplu. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ descrisă de $f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2)$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, unde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă, constituie o soluţie a ecuaţiei $xz\frac{\partial f}{\partial x} - yz\frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Soluţie. Deoarece

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2x\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial \varphi}{\partial u} + 2y\frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{ şi } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - 2z\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

deducem că

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=(xyz-xyz)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(2zx^2-2zy^2-2zx^2+2zy^2)\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0.$$

În relaţiile de mai sus derivatele parţiale ale funcţiei f au fost considerate în punctul (x,y), iar cele ale funcţiei φ în punctul $(xy, x^2+y^2-z^2)$.

Exerciţiu. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2)$ pentru orice $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, unde $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă, constituie o soluţie a ecuaţiei $xy^2\frac{\partial f}{\partial x}+x^2y\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+y^2)f$.

Teorema de diferenţiabilitate a inversei unei funcţii. *Fie* $D,E\subseteq\mathbb{R}^p$ *două mulţimi deschise,* $c\in D$ *şi* $f:D\to E$ *astfel încât:*
i) f *este bijectivă*
ii) f *este diferenţiabilă în* c *există* $(f'(c))^{-1}$
iii) f^{-1} *este continuă în* $f(c)$.
Atunci f^{-1} *este diferenţiabilă în* c şi $(f^{-1})'(f(c))=(f'(c))^{-1}$.

Teorema de inversare locală. *Fie* $D\subseteq\mathbb{R}^p$ *o mulţime deschisă,* $f:D\to\mathbb{R}^p$ *şi* $c\in D$ *astfel încât:*
i) f *este diferenţiabilă pe* D
ii) f' *este continuă pe* D
iii) există $(f'(c))^{-1}$.
Atunci există $D_1,D_2\subseteq\mathbb{R}^p$ *astfel încât* $D_1\subseteq D$, *funcţia* $g:D_1\to$*dată de* $g(x)=f(x)$ *pentru orice* $x\in D_1$ *este bijectivă.*

Notă. În condiţiile teoremei anterioare
i) Funcţia $g^{-1}:D_2\to D_1$ este derivabilă în $f(c)$ şi $(g^{-1})'(f(c))=(f'(c))^{-1}$.
ii) Se poate alege D_1 astfel încât să existe $(f'(c))^{-1}$ pentru orice $x\in D_1$ şi g^{-1} să fie derivabilă pe D_2 $((g^{-1})'(y)=(f'(g^{-1}(y))^{-1}$ pentru orice $y\in D_2)$.