Tutoriat 8 - Rezolvări
Inele. Polinoame.

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 13 ianuarie 2021 -

Exercițiul 1

Arătați că:

- $\mathbf{Q}/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.
- $\mathbf{Z}/(X^2 - X) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
- $\mathbf{Z}/(X^2 - 1) \ncong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Rezolvare

- Putem rescrie $\mathbf{Q}/(X^2-1) \cong \mathbf{Q}/((X-1)(X+1))$. Pentru a arăta că $(X-1)$ și $(X+1)$ sunt comaximale, trebuie să arătăm că suma lor generează tot $\mathbf{Q}[X]$. Este suficient să arătâm că suma idealelor conține elementul unitate.

  Observăm că $(X + 1) - (X - 1) = 2$. Înmulțind relația cu $\frac{1}{2}$ (putem face această operație întrucât lucrăm în mulțimea numerelor raționale) obținem 1.

  $\mathbf{Q}/((X-1)(X+1)) \cong \mathbf{Q}/(X-1) \cap (X+1)$
  $\mathbf{Q}/(X-1) \cap (X+1) \cong \mathbf{Q}/(X-1) \times \mathbf{Q}/(X+1)$

  Clasele de echivalență ale lui $\mathbf{Q}/(X - 1)$ sunt resturile obținute prin împărțirea oricărui polinom la $X - 1$, deci sunt polinoame de grad 0, de forma $\{a \mid a \in \mathbf{Q}\}$, deci $\mathbf{Q}/(X-1) \cong \mathbf{Q}$. Analog pentru $\mathbf{Q}/(X+1) \cong \mathbf{Q}$

  În concluzie, $\mathbf{Q}/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

- Demonstrația decurge asemănător pentru $\mathbf{Z}/(X^2 - X)$, cu observația că $X^2 - X = X(X - 1)$. Sunt comaximale deoarece $X - (X - 1) = 1$.

- Spre deosebire de primul subpunct, aici nu mai putem înmulți relația cu $\frac{1}{2}$, întrucât lucrăm cu mulțimea numerelor întregi.

Presupunem că inelul factor ar fi izomorf cu $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Ne uităm la elementele idempotente ale acestor două inele.
Observație: deoarece X^2-1 aparține idealului prin care factorizăm, $\widehat{X^2-1}=\widehat{0}$, de unde $\widehat{X^2}=\widehat{1}$.
Fie $\widehat{a}X+\widehat{b}$ un element indempotent.
Atunci $(\widehat{a}X+\widehat{b})^2=\widehat{a}X+\widehat{b}$, $\widehat{a}^2X^2+2\widehat{a}\widehat{b}X+\widehat{b}^2=\widehat{a}X+\widehat{b}$, $\widehat{a}^2+2\widehat{a}\widehat{b}X+\widehat{b}^2=\widehat{a}X+\widehat{b}$.

$\begin{cases}\widehat{a}^2+\widehat{b}^2=\widehat{b}\\ 2\widehat{a}\widehat{b}=\widehat{a}\end{cases}$ Singurele soluții ale ecuațiilor în $\mathbf{Z}$ sunt $a=0$ și $b\in\{0,1\}$.
Deci obținem 3 elemente indempotente.
În $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, sunt 4 elemente idempotente: $\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Având număr diferit de idempotenți, inelele nu sunt izomorfe.

Exercițiul 2

Fie idealul $I=(X^3,X^5)$ al inelului de polinoame $\mathbf{Q}[X]$.

1. Dați un exemplu de polinom care aparține lui I și are 4 termeni nenuli.
2. Dați un exemplu de polinom care nu aparține lui I și are 3 termeni nenuli.
3. Este adevărat că $I=(X^3)$? Dar că $I=(X^5)$? Justificați.
4. Determinați elementele nilpotente din inelul factor $\mathbf{Q}[X]/I$.
5. Determinați elementele idempotente din inelul factor $\mathbf{Q}[X]/I$.
6. Sunt izomorfe inelele $\mathbf{Q}[X]/I$ și $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$?. Justificați.

Rezolvare

(1) Cum $X^5\in I$, un astfel de polinom este $X^5+X^6+X^7+X^8$.
(2) Fie $P=X^2+X^1+1$. Presupunem ca $P\in I$. Atunci $P=X^3*A+X^5*B$, unde A,B sunt polinoame. Observăm că P poate fi rescris ca $P=X^3*C$, cu C polinom. Comparând gradele posibile pentru X^3*C și pentru P, rezultă că P nu poate fi egal cu X^3*C. Contradicție. Prin urmare $P\notin I$ și P are 3 termeni nenuli, deci este un polinom valid pentru cerință.
(3) Orice polinom din I poate fi scris sub forma X^3*A+X^5*B cu A,B polinoame. Astfel, aranjând termenii, putem scrie mai departe că un polinom din I este de forma X^3*C cu C polinom. Putem observa imediat că $I=(X^3)$. De asemenea, din ultima relație, avem că $I\neq(X^5)$ deoarece $I=(X^3)$ și $X^3\in(X^3)$ dar $X^3\notin(X^5)$.
(4) Elementele din grupul factor sunt de forma $P=a\widehat{X^2+bX}+c=X(\widehat{b+aX})+c$, cu $a,b,c\in\mathbf{R}$. P este nilpotent daca $\exists n\in\mathbf{N}$ a.î. P^n este multiplu de X^3. Din ultima relație, daca scriem P^n folosind binomul lui Newton observăm ca acesta

este multiplu de $X^3 \iff c = 0$. Prin urmare, există o infinitate de elemente nilpotente, acestea fiind de forma $aX^2 + bX$.
(5) Analog subpunctului anterior, $P = ax^2 \widehat{+ bX} + c$. Trebuie să rezolvăm ecuația $P^2 = P$, de unde $(b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2 = aX^2 + bX + c$. Avem două soluții, și anume 0 și 1 care sunt idempotenții triviali. Prin urmare, idempotenții inelului factor sunt idempotenții triviali.
(6) În $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ singurul element nilpotent este $(0, 0)$. În inelul factor, conform (4), există o infinitate de elemente nilpotente. Prin urmare, cele două inele nu pot fi izomorfe.

Exercițiul 3

Fie polinomul $P(X) = X^4 - X^2 + 1$ având rădăcinile complexe $\alpha_1, ..., \alpha_4$.

1. Descompuneți polinomul $P(X)$ în factori ireductibili peste fiecare dintre corpurile $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$.
2. Calculați $\alpha_1^5 + ... + \alpha_4^5$.
3. Determinați explicit coeficienții unui polinom nenul care să aibă ca rădăcini pe $2\alpha_1 - 1, ..., 2\alpha_4 - 1$.

Rezolvare

1. $P(X) = X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 1 - X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X)$.
   Știm că un polinom este ireductibil peste $\mathbf{C}$, dacă este descompus în polinoame de gradul întâi. Însă, peste $\mathbf{R}$, un polinom este ireductibil dacă este descompus în polinoame de gradul întâi sau în polinoame de gradul al doilea cu $\Delta < 0$.
   Calculăm Δ pentru cele două polinoame de gradul al doilea în care lam descompus pe $P(X)$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 3 - 4 = -1 < 0$. Deci forma este ireductibilă peste $\mathbf{R}$.
   Vom arăta că $P(X)$ este ireductibil peste $\mathbf{Q}$. Presupunem că există $\frac{m}{n}, (m, n) = 1, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $P(\frac{m}{n}) = 0$, $\frac{m}{n}$ rădăcină a lui $P(X)$.

   TEOREMĂ

   Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

   Dacă $\dfrac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a polinomului f, atunci $p \,/\, a_0$ și $q \,/\, a_n$.

   Atunci $m|1$ și $n|1$, deci $\frac{m}{n} \in \{+1, -1\}$.
   $P(1) = 1 \neq 0, P(-1) = 1 \neq 0$. Astfel, presupunerea făcută este falsă, deci $P(X)$ este ireductibil peste $\mathbf{Q}$.
   Peste $\mathbf{Z}_2$, $P(X) = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2.f(X) = (X^2 + X + 1)^2.f$

este ireductibil peste $\mathbf{Z}_2$ întrucât $f(\widehat{0}) = \widehat{1}$ și $f(\widehat{1}) = \widehat{1}$.
Peste $\mathbf{Z}_3$, $P(X) = X^4 + \widehat{2}X + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$. $X^2 + \widehat{1}$ este ireductibil peste $\mathbf{Z}_3$.

2. $P(\alpha_i) = 0$, $i \in \overline{(1,4)}$. Deci $\alpha_i^4 - \alpha_i^2 + 1 = 0 \iff \alpha_i^4 = \alpha_i^2 - 1$.
$\alpha_i^5 = \alpha_i^3 - \alpha_i$. $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^5 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^3 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i$
Conform relațiilor lui Viete, $s_1 = p_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0$. $s_2 = -1, s_3 = 0, s_4 = 1$. Dorim să aflăm $p_3 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^3$. Conform formulelor lui Newton
$p_3 - p_2 s_1 + p_1 s_2 - 3s_3 = 0$
$p_1 = s_1 = 0 \Rightarrow p_3 = 3s_3 = 0$
În concluzie, $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^5 = 0$.

3. $2\alpha_i - 1 = \beta_i \iff \alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{2}$
Răspunsul este polinomul $Q(X) = P(\frac{X+1}{2}) = (\frac{X+1}{2})^4 - (\frac{X+1}{2})^2 + 1$.