

LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Cursul VI

Claudia MUREȘAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Mulțimi parțial ordonate: poseturi

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set”) o pereche (A, \leq) formată dintr-o mulțime A și o **relație de ordine** \leq pe A , i. e.:

- \leq este o **relație binară** pe A : $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- \leq este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- \leq este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- \leq este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine \leq este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci (A, \leq) se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Relația de ordine strictă asociată ordinii \leq este

$$<^{\text{not.}} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}.$$

Relația de succesiune asociată ordinii \leq este

$$<^{\text{not.}} = \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists a \in A)(x < a < y)\}.$$

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := <^{-1}$.

Dualul unui poset; diagrame Hasse; despre lanțuri

Remarcă (Cu notațiile din definiția anterioară, avem:)

- \geq este o relație de ordine pe A ; (A, \geq) se numește *posetul dual* posetului (A, \leq)
- clar: (A, \leq) este lanț ddacă (A, \geq) este lanț
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui \geq
- \succ este relația de succesiune asociată lui \geq
- Să ne amintim că muchiile dintr-o diagramă Hasse reprezintă perechile din relația de succesiune, \prec , asociată ordinii posetului reprezentat prin acea diagramă.
- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului (A, \leq) .

Remarcă

Fie (A, \leq) un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \not\leq b$;
- dacă (A, \leq) este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \not\leq b$.

Poseturi mărginite; funcții izotone

Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit* sau *poset cu 0 și 1*, iar minimul și maximum unui poset mărginit se notează adesea cu 0, respectiv 1.

Definiție

Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.

f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) dacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) dacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.

Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinele naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă dacă este morfism între posetul (A, \leq) și posetul dual lui (B, \sqsubseteq) , anume (B, \supseteq) , unde $\supseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Funcții izotone; izomorfisme de poseturi

Remarcă

- Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă.
- Orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare (dar nu și infimumurile și supremumurile, nici măcar pe ale mulțimilor finite, nici măcar dacă este bijectivă).
- Orice funcție izotonă duce lanțuri în lanțuri.
- Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

- **Intuitiv:** două poseturi finite sunt izomorfe ddacă au aceeași diagramă Hasse.

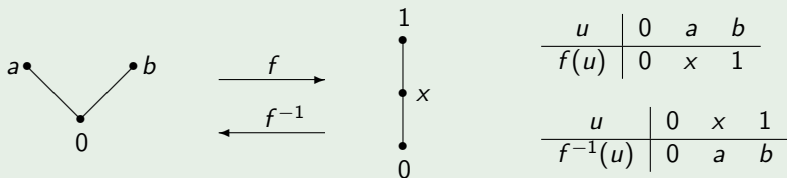
Remarcă

Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Morfisme bijective versus izomorfisme de poseturi

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin următorul tabel, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Demonstrația următoarei remarci (a se vedea seminarul) arată că aceasta e unica situație în care inversa unei funcții izotone bijective f între două poseturi (P, \leq) și (Q, \sqsubseteq) nu este izotonă: există $a, b \in P$, incomparabile, cu $f(a), f(b)$ comparabile.

Remarcă

Fie $f : L \rightarrow M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) . Dacă (L, \leq) este lanț, atunci inversa lui f , f^{-1} , este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici**
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

laticile Ore și laticile Dedekind,

și apoi vom demonstra că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.

- Așadar, vom arăta că, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

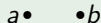
Lattice Ore

Definiție

O *latice Ore* este un poset (L, \leq) cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

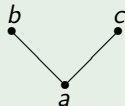
Exemplu (poseturi care nu sunt latici Ore)

Mulțimile indicate sub aceste diagrame nu au minoranți/majoranți, așadar nu au infimum/supremum.

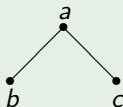


$a \bullet \quad \bullet b$

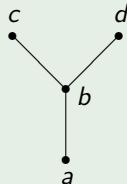
$\nexists \inf\{a, b\}$
 $\nexists \sup\{a, b\}$



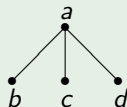
$\nexists \sup\{b, c\}$



$\nexists \inf\{b, c\}$



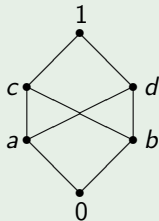
$\nexists \sup\{c, d\}$



$\nexists \inf\{b, c\}$
 $\nexists \inf\{b, d\}$
 $\nexists \inf\{c, d\}$

Poset finit și mărginit care nu este latice Ore

Exemplu



În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c \leq 1$, $d \leq 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \not\leq d$ și $d \not\leq c$).

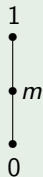
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 \leq a$, $0 \leq b$ și a și b sunt *incomparabile*).

Așadar, acest poset nu este o latice Ore, cu toate că este mărginit, așa cum vom vedea că sunt toate laticile finite.

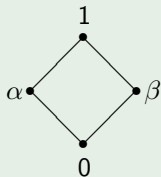
Exemple de latici Ore

Exemplu

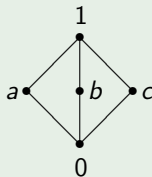
Următoarele poseturi sunt latici Ore, după cum se poate verifica direct:



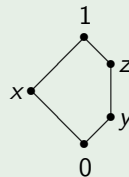
\mathcal{L}_3



rombul



diamantul



pentagonul

Primul dintre aceste poseturi este lanțul cu 3 elemente. Și denumirile celorlalte trei poseturi se datorează formelor diagramelor lor Hasse.

Remarcă

Orice lanț este lattice Ore, pentru că, dacă (L, \leq) este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în (L, \leq) $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică (L, \vee, \wedge) , unde L este o mulțime, iar \vee și \wedge sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \rightarrow L$ și $\wedge : L^2 \rightarrow L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemplu

Pentru orice mulțime T , se verifică ușor că $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este o latice Dedekind, folosind proprietățile din calculul cu mulțimi demonstrate la primele seminarii.

Latici

Lemă (amintită din cele de mai sus)

Fie (L, \leq) un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1 $x \leq y$
- 2 există în L $\inf\{x, y\} = x$
- 3 există în L $\sup\{x, y\} = y$

Lemă

Fie (L, \vee, \wedge) o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1 $x \wedge y = x$
- 2 $x \vee y = y$

Demonstrație: Fie $x, y \in L$.

(1) \Rightarrow (2): În următorul șir de egalități, mai întâi scriem x în concordanță cu ipoteza (1), apoi aplicăm comutativitatea lui \vee și cea a lui \wedge , și, în final, absorbția: $x \wedge y = x$ implică $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = y$.
(2) \Rightarrow (1): Urmărim pașii demonstrației implicației anterioare, sărind peste aplicarea comutativității, pentru că aici nu este necesară: $x \vee y = y$ implică $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

- ❶ Fie $\mathcal{L} := (L, \leq)$ o latice Ore. Definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde \vee și \wedge sunt operații binare pe mulțimea L , definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore \mathcal{L} . Atunci $\Phi(\mathcal{L})$ este o latice Dedekind.
- ❷ Fie $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde \leq este o relație binară pe mulțimea L , definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ dacă $x \vee y = y$ (ceea ce este echivalent cu $x \wedge y = x$, după cum ne asigură o leamnă de mai sus). Atunci $\Psi(\mathcal{L})$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
- ❸ Aplicațiile Φ și Ψ sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore \mathcal{L} , $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$, și, pentru orice latice Dedekind \mathcal{L} , $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Demonstrație: (1) Ca în enunț, să considerăm o latice Ore $\mathcal{L} := (L, \leq)$, și să definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde \vee și \wedge sunt operații binare pe mulțimea L , definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore \mathcal{L} . Trebuie să demonstrăm că $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind. A se observa că identitățile stabilite mai jos sunt valabile în orice poset în care există infimumurile și supremumurile care apar în aceste identități.

Este evident, din definiția maximului și a minimului și din reflexivitatea unei relații de ordine, că orice submulțime a lui L cu un singur element are maxim și minim, ambele egale cu unicul său element. Așadar, pentru orice $x \in L$,
 $x \vee x = \sup\{x, x\} = \sup\{x\} = \max\{x\} = x$ și
 $x \wedge x = \inf\{x, x\} = \inf\{x\} = \min\{x\} = x$, ceea ce înseamnă că operațiile \vee și \wedge sunt idempotente.

Pentru orice $x, y \in L$, avem egalitatea de mulțimi $\{x, y\} = \{y, x\}$, prin urmare
 $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$,
deci \vee și \wedge sunt comutative.

Fie $x, y, z \in L$. Vom demonstra că există în L $\sup\{x, y, z\}$ și
 $\sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ (știm că în L există supremumurile mulțimilor de 1 sau 2 elemente, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ există în L).

Să notăm $t := \sup\{y, z\}$ și $u := \sup\{x, t\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Egalitatea $t = \sup\{y, z\}$ și definiția supremumului arată că $y \leq t$ și $z \leq t$.

Similar, faptul că $u = \sup\{x, t\}$ implică $t \leq u$.

$y \leq t$ și $t \leq u$, deci $y \leq u$ conform tranzitivității lui \leq . Analog, $z \leq t$ și $t \leq u$ implică $z \leq u$ conform tranzitivității lui \leq .

$u = \sup\{x, t\}$, prin urmare $x \leq u$.

Deci $x \leq u$, $y \leq u$, $z \leq u$, așadar u este un majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$. Deci mulțimea $\{x, y, z\}$ are cel puțin un majorant. Vom demonstra că u este cel mai mic majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, adică este supremumul acestei mulțimi.

Fie $s \in L$ un majorant arbitrar (dar fixat) al mulțimii $\{x, y, z\}$.

Întrucât s este majorant pentru $\{x, y, z\}$, avem $y \leq s$ și $z \leq s$, de unde, ținând seama de faptul că $t = \sup\{y, z\}$, obținem $t \leq s$ conform caracterizării supremumului.

Dar faptul că s este majorant pentru $\{x, y, z\}$ implică și $x \leq s$.

Deci $x \leq s$, $t \leq s$ și $u = \sup\{x, t\}$, de unde obținem $u \leq s$ conform caracterizării supremumului.

Am arătat că $u \leq s$ pentru orice majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, ceea ce înseamnă că $\sup\{x, y, z\}$ există în L și $\sup\{x, y, z\} = u = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.

Dar această egalitate ne dă și

$$\sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = \sup\{z, \sup\{x, y\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}.$$

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, așadar $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

(A se observa că, la fel ca mai sus, se poate demonstra, “din aproape în aproape” sau prin inducție matematică, faptul că în L există supremumul oricărei mulțimi finite nevide, și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $x_1, \dots, x_n \in L$,

$$\sup\{x_1, \dots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \dots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases}$$

Principiul dualității pentru poseturi și identitatea

$\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$ arată că avem și

$\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$, adică $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

Am demonstrat că \vee și \wedge sunt asociative.

Pentru a demonstra absorbția, să considerăm $x, y \in L$. Avem de arătat că

$\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$. Să notăm așadar $s := \sup\{x, y\}$ și $i := \inf\{x, s\}$.

$s = \sup\{x, y\}$, deci $x \leq s$, prin urmare $i = \inf\{x, s\} = \min\{x, s\} = x$, conform unei proprietăți a poseturilor demonstrate mai sus.

Deci $i = x$, ceea ce înseamnă că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$, adică $x \wedge (x \vee y) = x$.

Faptul că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$ și **Principiul dualității pentru poseturi** arată că avem și $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$, adică $x \vee (x \wedge y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, \vee și \wedge satisfac și absorbția, ceea ce încheie demonstrația punctului (1): $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.

(2) Ca în enunț, să considerăm o latice Dedekind $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ și să definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde \leq este o relație binară pe mulțimea L , definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ddacă $x \wedge y = x$, conform unei leme de mai sus). Trebuie să demonstrăm că $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Din idempotența lui \vee , avem că, pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$, deci $x \leq x$, adică \leq este reflexivă.

Fie $x, y, z \in L$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, i. e. $x \vee y = y$ și $y \vee z = z$, prin urmare, folosind aceste două egalități și asociativitatea lui \vee , obținem:

$x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, deci $x \vee z = z$, ceea ce înseamnă că $x \leq z$. Așadar \leq este tranzitivă.

Acum fie $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$ și $y \leq x$, adică $x \vee y = y$ și $y \vee x = x$. Dar $x \vee y = y \vee x$ din comutativitatea lui \vee , deci $x = y$. Așadar \leq este antisimetrică. Am demonstrat că \leq este o relație de ordine.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Fie $x, y \in L$, arbitrare, fixate. Trebuie să demonstrăm că există în $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ infimumul și supremumul mulțimii $\{x, y\}$ și că acestea sunt egale cu $x \wedge y$ și respectiv $x \vee y$.

Din asociativitatea și idempotența lui \vee , avem că $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$. Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui \vee , obținem $y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.

Fie $l \in L$, a. î. $x \leq l$ și $y \leq l$, adică $x \vee l = l$ și $y \vee l = l$. Atunci, conform asociativității lui \vee , $(x \vee y) \vee l = x \vee (y \vee l) = x \vee l = l$, deci $x \vee y \leq l$.

Caracterizarea supremumului ne dă acum: $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui \wedge , obținem:

$(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq x$.

Din asociativitatea și idempotența lui \wedge , avem: $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq y$.

Fie $l \in L$, a. î. $l \leq x$ și $l \leq y$, adică $l \wedge x = l$ și $l \wedge y = l$. Atunci, conform asociativității lui \wedge , $l \wedge (x \wedge y) = (l \wedge x) \wedge y = l \wedge y = l$, așadar $l \leq x \wedge y$.

Caracterizarea infimumului ne dă acum: $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2): $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore.

Echivalența celor două definiții ale laticii

(3) Fie $\mathcal{L} = (L, \leq)$ o latice Ore. Atunci $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind, unde, pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ în $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Fie $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = (L, \sqsubseteq)$. Atunci (L, \sqsubseteq) este o latice Ore, cu \sqsubseteq definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\sup\{x, y\} = y \in \{x, y\}$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\} = y$ (a se vedea o proprietate de mai sus) ddacă $x \leq y$. Așadar $\sqsubseteq = \leq$, deci $(L, \sqsubseteq) = (L, \leq)$, adică $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Acum fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, unde relația de ordine \leq este definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$, sau, echivalent, $x \leq y$ ddacă $x \wedge y = x$, iar supremumurile și infimumurile sunt date de: pentru orice $x, y \in L$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ și $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.

Atunci $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = (L, \sqcup, \sqcap)$ este o latice Dedekind, cu \sqcup și \sqcap definite după cum urmează, în funcție de supremumurile și infimumurile din laticea Ore $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqcup y = \sup\{x, y\} = x \vee y$ și $x \sqcap y = \inf\{x, y\} = x \wedge y$, deci $\sqcup = \vee$ și $\sqcap = \wedge$, așadar $(L, \sqcup, \sqcap) = (L, \vee, \wedge)$, ceea ce înseamnă că $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.

Demonstrația teoremei este încheiată.

Notății alternative pentru latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într-un anumit moment.
- Pentru orice latice L , vom folosi oricare dintre notațiile: (L, \leq) , (L, \vee, \wedge) și (L, \vee, \wedge, \leq) , în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L : ordinea ei parțială \leq , operațiile ei binare \vee și \wedge , sau toate acestea.

Exemplu

Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\emptyset, (\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, pentru că $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ este unica relație binară pe \emptyset , iar unica operație binară pe \emptyset , adică funcție definită pe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ cu valori în \emptyset , este $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, și toate aceste componente satisfac, în mod trivial, condițiile din definiția unei latici;
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T ;
- $(\mathbb{N}, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |)$;
- $(D_n, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n ;
- orice lanț (L, \max, \min, \leq) , de exemplu: $\mathcal{L}_n = (L_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$.

- Proprietatea următoare generalizează compunerea incluziunilor nestrictе și de același sens de mulțimi cu \cup , precum și cu \cap , membru cu membru.

Propoziție (două inegalități nestrictе și de același sens într-o latice se pot compune cu \vee , precum și cu \wedge , membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într-o latice este compatibilă cu \vee și cu \wedge)

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) , dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.

$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.

Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = x \wedge a \wedge y \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$,
deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.

Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = x \vee a \vee y \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$,
deci $x \vee y \leq a \vee b$.

Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui \vee și \wedge . (Asociativitatea acestor operații ne-a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: \vee și \wedge , \leq și \geq , respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă (L, \vee, \wedge, \leq) este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că (L, \wedge, \vee, \geq) este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii (L, \vee, \wedge, \leq) .

Este evident că duala dualei unei latici (L, \vee, \wedge, \leq) este chiar (L, \vee, \wedge, \leq) .

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară (L, \vee, \wedge, \leq) rămâne valabil dacă în el interschimbăm \vee cu \wedge și \leq cu \geq .*

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate”.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici**
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită de mai sus)

Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție.

f se numește *morfism de poseturi* (sau *funcție izotonă*, sau *funcție crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie (L, \vee, \wedge) și (M, \sqcup, \sqcap) două latici și $f : L \rightarrow M$ o funcție.

f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

- ① $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
și
- ② $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latice.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici. Într-adevăr, dacă (L, \vee, \wedge) , (M, \sqcup, \sqcap) și (N, γ, \wedge) sunt latici, iar $f : L \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow N$ sunt morfisme de latici, atunci $g \circ f : L \rightarrow N$ satisface următoarele egalități, pentru orice $a, b \in L$:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \vee b) &= g(f(a \vee b)) = g(f(a) \sqcup f(b)) = \\ &g(f(a)) \gamma g(f(b)) = (g \circ f)(a) \gamma (g \circ f)(b) \quad \text{și}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a \wedge b) &= g(f(a \wedge b)) = g(f(a) \sqcap f(b)) = \\ &g(f(a)) \wedge g(f(b)) = (g \circ f)(a) \wedge (g \circ f)(b).\end{aligned}$$

Remarcă

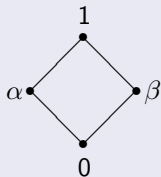
Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.

Într-adevăr, dacă (L, \vee, \wedge, \leq) și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \rightarrow M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

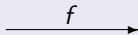
Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă (continuare)

În ce privește implicația reciprocă, să considerăm următorul contraexemplu, în care f este funcție izotonă, dar nu este morfism de latici, pentru că $f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p = f(\alpha) \vee f(\beta)$:



rombul: (R, \vee, \wedge)



$\mathcal{L}_4 = (L_4, \vee, \wedge)$

x	0	α	β	1
$f(x)$	0	m	p	1

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici. Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiție

Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*. În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici este un izomorfism de latici dacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă. Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici este simultan un morfism de latici și o funcție inversabilă, deci bijectivă.

Reciproc, fie (L, \vee, \wedge) și (M, \sqcup, \sqcap) două latici și $f : L \rightarrow M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.

f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \rightarrow L$ inversa funcției f .

Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.

Rezultă că

$f^{-1}(a \sqcup b) = f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

Definiție (amintită de mai sus)

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* dacă este morfism de poseturi inversabil, i. e. morfism de poseturi bijectiv, cu inversa tot morfism de poseturi, i. e. funcție izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici dacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.

Reciproca rezultă din remarca de mai sus conform căreia un izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare. Să arătăm acest fapt pentru cazul particular al infimumurilor și supremumurilor mulțimilor de două elemente, demonstrând astfel reciproca:

Fie (L, \vee, \wedge, \leq) și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ un izomorfism de ordine între poseturile (L, \leq) și (M, \sqsubseteq) , adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \rightarrow L$, este, de asemenea, izotonă.

Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.

$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.

Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui (M, \sqsubseteq) , prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.

Să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.

Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.

Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și

$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.

Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică

$a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui (L, \leq) .

Acum aplicăm din nou definiția supremului, și obținem:

$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.

Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.

În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat-o, înlocuim

$u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.

Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.

Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.

Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.

Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.

Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici**
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Am văzut mai sus că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într-o latice (L, \vee, \wedge, \leq) , avem:

- o mulțime L ,
- o relație de ordine (parțială) \leq pe L ,
- două operații binare \vee și \wedge pe L , notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul (L, \leq) ;
- \vee și \wedge sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru \wedge ;
- \vee și \wedge verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ dacă și numai dacă $x \vee y = y$ și $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite**
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.

Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.

Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.

O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.

O latice mărginită se mai numește *latice cu 0 și 1* sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.

Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite**
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ o funcție. f se numește *morfism de latici mărginite* dacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.

Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.

Într-adevăr, să considerăm trei latici mărginite, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și $(N, \gamma, \wedge, \triangle, \nabla)$ și două morfisme de latici mărginite $f : L \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow N$. Atunci f și g sunt morfisme de latici, deci $g \circ f$ este un morfism de latici, conform unui rezultat de mai sus. În plus:

- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\perp) = \triangle$ și
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\top) = \nabla$,

așadar $g \circ f : L \rightarrow N$ este un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.

Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiție

Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.

Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Demonstrație: Implicația directă este trivială.

Dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ sunt latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ este un morfism bijectiv de latici mărginite, atunci:

- f este un morfism bijectiv de latici, prin urmare, conform unui rezultat de mai sus, inversa $f^{-1} : M \rightarrow L$ a lui f este un morfism de latici;
- în plus, conform definiției unui morfism de latici mărginite, $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$, deci $f^{-1}(\perp) = f^{-1}(f(0)) = 0$ și $f^{-1}(\top) = f^{-1}(f(1)) = 1$, așadar f^{-1} este un morfism de latici mărginite.

Așadar, f este un morfism de latici mărginite inversabil cu inversa morfism de latici mărginite, i. e. f este un izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

Am văzut că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare. Prin urmare, orice funcție izotonă surjectivă între două poseturi mărginite

Morfisme de latici mărginite

Remarcă (continuare)

păstrează minimul și maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de-al doilea poset, și duce maximul primului poset în maximul celui de-al doilea poset.

Remarcă

Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulțimii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A , dacă \leq și \sqsubseteq sunt ordini totale pe A , atunci poseturile (laticile) (A, \leq) și (A, \sqsubseteq) sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite**
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Definiție

Dată o latice (L, \vee, \wedge) , o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L , adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Este imediat că o sublatică (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latică (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L , adică restricțiile operațiilor lui L la M :

- restricția lui \vee la M este operația binară \sqcup pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui \wedge la M este operația binară \sqcap pe M , definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite:
 - restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente);
 - restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L :

- operația \sqcup , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \vee ;
- operația \sqcap , definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu \wedge ;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M , ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M , se notează, de obicei tot cu 0 și 1 , respectiv.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M , care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L :

- notând cu \sqsubseteq ordinea laticii M , pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea \sqsubseteq a laticii M este, într-adevăr, restricția lui \leq la M , și \sqsubseteq se notează, de obicei, tot cu \leq .

Remarcă

Orice submulțime a unei latici \mathcal{L} este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatică, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din \mathcal{L} ale perechilor de elemente ale sale.

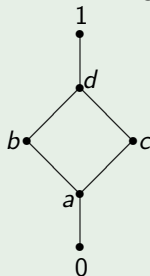
Exercițiu (temă)

Orice submulțime total ordonată a unei latici \mathcal{L} este sublatică a lui \mathcal{L} .

Sublatice și sublatice mărginite

Exemplu

Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



Se observă, direct din această diagramă Hasse, că submulțimea $M := \{a, b, c, d\}$ este o **sublatice** a lui L , pentru că este închisă la infimumurile și supremumurile perechilor de elemente ale ei.

Evident, M este o **latice mărginită**, cu primul element a și ultimul element d . Dar $0, 1 \notin M$ (primul și ultimul element din L nu aparțin lui M), așadar M **nu** este o **sublatice mărginită** a lui L .

Exemple de submulțimi ale lui L care **nu sunt sublatice** ale lui L : $\{b, c\}$ sau $\{0, b, c, 1\}$ etc..

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că:

- 1 imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatică (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
- 2 mai general: imaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatică (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
- 3 preimaginea printr-un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatică (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (3) este trivial.)

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive**
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Propoziție

În orice latice (L, \vee, \wedge) , următoarele două afirmații, numite legile de distributivitate, sunt echivalente:

(d_1) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

(d_2) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Demonstrație: $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Din (d_1) , comutativitatea lui \wedge aplicată de două ori, absorbția, din nou (d_1) , asociativitatea lui \vee , din nou comutativitatea lui \wedge , apoi absorbția, și, în final, încă o dată comutativitatea lui \wedge , avem: pentru orice $x, y, z \in L$,
$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) = \\ &= (x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) = \\ &= (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = x \vee (y \wedge z), \text{ deci} \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z). \end{aligned}$$

 $(d_2) \Rightarrow (d_1)$: Prin dualitate, din implicația precedentă.

Definiție

O latice se zice *distributivă* dacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Latici distributive

Remarcă

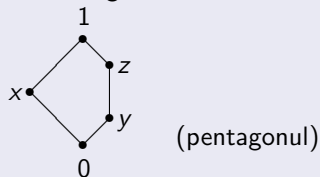
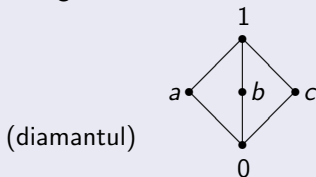
A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

Remarcă

Pentru orice mulțime T , laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă. Acest fapt este cunoscut de la seminar: \cup și \cap sunt distributive una față de cealaltă.

Remarcă (temă)

Diamantul și pentagonul nu sunt latici distributive. Acest fapt se poate verifica prin considerarea, în fiecare dintre aceste latici, a celor trei elemente diferite de maximul și minimul laticii respective ca poset, și așezarea lor într-o anumită ordine într-o lege de distributivitate, astfel încât acea lege să nu fie satisfăcută.



Latici distributive

Remarcă

Orice lanț este o latice distributivă.

Într-adevăr, dacă (L, \leq) este un lanț (i. e. o mulțime total ordonată), atunci știm că (L, \leq) este o latice în care, pentru orice $x, y \in L$,

$x \wedge y = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Atunci, considerând trei elemente arbitrare $x, y, z \in L$, faptul că (L, \leq) este lanț ne asigură de existența unei ordonări între aceste elemente, de exemplu $x \leq y \leq z$; în acest caz, din definițiile lui \vee and \wedge de mai sus ($\vee = \max$ și $\wedge = \min$), obținem: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x = x \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Celelalte cazuri, privind alte ordonări posibile între x, y and z , se tratează similar, și, din analiza tuturor acestor cazuri, rezultă că laticea (L, \leq) este distributivă.

Remarcă

Remarca anterioară arată că, de exemplu, \mathcal{L}_n (cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat), (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) sunt latici distributive.

Am dat mai sus un exemplu de latice distributivă care nu este lanț: după cum știm, $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$ nu este lanț dacă mulțimea T are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Latici distributive

Rezultatul următor pune în evidență un alt exemplu de latice distributivă care nu este lanț.

Corolar

$(\mathbb{N}, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |)$ este o latice distributivă.

Demonstrație: Acest fapt rezultă din distributivitatea lanțului (\mathbb{N}, \leq) .

Într-adevăr, dacă notăm cu \mathcal{P} mulțimea numerelor prime naturale, observăm că fiecare număr natural nenul n se scrie sub forma: $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{e_p(n)}$, unde

$e_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k \mid n\} \in \mathbb{N}$ pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, iar produsul anterior este finit, i. e. familia $(e_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ este de suport finit, adică doar un număr finit de elemente din această familie sunt nenule.

Se mai observă că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{cmmmc}\{m, n\} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{e_p(m), e_p(n)\}} \text{ și}$$

$$\text{cmmdc}\{m, n\} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(m), e_p(n)\}}.$$

Latici distributive

Distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$ ne asigură de faptul că, pentru orice

$x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și orice $p \in \mathcal{P}$,

$\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\} = \max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}$, de

unde rezultă că: $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\}} =$

$\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}}$, adică:

$\text{cmmdc}\{x, \text{cmmmc}\{y, z\}\} = \text{cmmmc}\{\text{cmmdc}\{x, y\}, \text{cmmdc}\{x, z\}\}$, iar această egalitate este exact prima lege de distributivitate aplicată numerelor naturale nenule x, y, z .

(Dacă nu sunteți obișnuiți cu acest gen de scriere, puteți efectua produsele de mai sus numai după numerele naturale prime p care divid măcar unul dintre numerele naturale nenule x, y, z .)

A rămas de demonstrat faptul că, atunci când numărul 0 apare în prima lege de distributivitate, egalitatea obținută este satisfăcută, fapt ce poate fi arătat foarte ușor, ținând seama de identitățile: $\text{cmmmc}\{0, n\} = 0$ și $\text{cmmdc}\{0, n\} = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv pentru $n = 0$).

Latici distributive

Remarcă

Este evident că orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarcă (temă)

Imaginea oricărei latici distributive printr-un morfism de latici este o latice distributivă.

Propoziție (caracterizare a laticilor distributive)

O latice L este distributivă dacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

Notă

Demonstrația propoziției anterioare se găsește în *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*, de Sergiu Rudeanu, precum și în cele două cărți de D. Bușneag și D. Piciu din bibliografia din primul curs. Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite**
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Complementul unui element într-o latice mărginită

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.

Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.

Un astfel de element y se numește *complement al lui x* .

O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x , atunci x este un complement al lui y , după cum arată comutativitatea lui \vee și \wedge .

Remarcă

Este imediat faptul că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente, pentru că, dacă $a \in L$ este un complement al lui 0, atunci $a = a \vee 0 = 1$, iar, dacă $b \in L$ este un complement al lui 1, atunci $b = b \wedge 1 = 0$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Remarcă

În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

Într-adevăr, fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită și $x, a, b \in L$ a. î. a și b sunt complemente ale lui x , adică:

$$\begin{cases} x \vee a = 1 \\ x \wedge a = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \vee b = 1 \\ x \wedge b = 0 \end{cases}$$

Atunci, conform relațiilor de mai sus (care dau definiția unui complement), distributivității lui L și comutativității lui \wedge ,

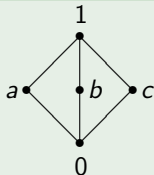
$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$,
deci $a = a \wedge b$, ceea ce înseamnă că $a \leq b$ (a se vedea teorema privind echivalența celor două definiții ale noțiunii de latice).

Interschimbând a și b în șirul de egalități de mai sus, obținem $b = b \wedge a$, deci $b \leq a$.

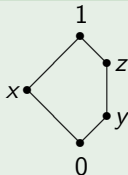
Prin urmare $a = b$, conform antisimetriei relației de ordine \leq .

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Exemplu



diamantul



pentagonul

Aceste două latici mărginite nu sunt distributive, iar acest fapt poate fi demonstrat și prin intermediul remarciilor anterioare.

Într-adevăr, în diamant, fiecare două dintre elementele a , b , c sunt complemente ale celui de-al treilea.

Iar, în pentagon, y și z sunt complemente ale lui x .

Deci aceste două latici mărginite nu satisfac proprietatea de unicitate a complementului, așadar nu sunt distributive, conform remarciilor de mai sus.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete**
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Latici complete

Definiție

O latice (L, \leq) se zice *completă* dacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul (L, \leq) .

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplu

- Pentru orice mulțime T , laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.
- Considerând $0, 1 \in \mathbb{R}$ și ordinea naturală \leq pe \mathbb{R} (desigur, restricționată la mulțimea suport a fiecăreia dintre cele două latici de mai jos), avem:
 - ① laticea $([0, 1] \cap \mathbb{Q}, \max, \min, \leq, 0, 1)$ este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ $\inf\{x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}/2\}$);
 - ② laticea $((0, 1), \max, \min, \leq)$ nu este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $(0, 1)$ $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, sau $\inf((0, 1))$, sau $\sup((0, 1))$).

Remarcă

- Orice latice completă (L, \leq) este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat mai sus, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide.
- O latice (L, \leq) este completă dacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în (L, \leq) , dacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în (L, \leq) . Aceste echivalențe rezultă din faptul că, în orice poset (L, \leq) , următoarele afirmații sunt echivalente:
 - 1 pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în (L, \leq) ;
 - 2 pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în (L, \leq) .

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi**
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Definiție

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie arbitrară de mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este “un fel de reuniune” în care mulțimile care se reunesc sunt “făcute disjuncte”, prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notăție

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Notăție

Dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i \in \overline{1,n}} A_i \stackrel{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^n A_i \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \dots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A, B, C , se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și o identificare de indici, adică o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A \coprod (B \coprod C) = (A \coprod B) \coprod C$.

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$? Putem considera că familia de mulțimi $\{A, B\}$ este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi**
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \amalg B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \amalg B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \amalg B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$:
$$\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}.$$

În cazul în care (A, \leq) are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar (B, \sqsubseteq) are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) , notată $(A, \leq) \dot{+} (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \amalg (B \setminus \{0\}), \leq \dot{+} \sqsubseteq)$, unde $\leq \dot{+} \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \amalg (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus:
$$\leq \dot{+} \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Observație

Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într-un curs anterior.

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \dot{+} \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \amalg B$, $A \times B$ și $(A \amalg (B \setminus \{0\}))$, respectiv. Adică: $(A \amalg B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \amalg (B \setminus \{0\}), \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.

Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).

În cazul sumei directe și a sumei ordinale, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \amalg B$ vizavi de mulțimile “din care provin” acestea: sunt ambele din A , ambele din B , sau unul din A și unul din B .

În cazul produsului direct, acest fapt se obține dintr-un rezultat mai general, dintr-un curs anterior, rezultat privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă și suma ordinală de poseturi sunt asociative, dar nu sunt comutative;**
- **produsul direct de poseturi este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi (A, \leq_A) , (B, \leq_B) și (C, \leq_C) , există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \rightarrow A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Fie (A, \leq) și (B, \sqsubseteq) două poseturi.

- 1 Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
- 2 Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (B, \sqsubseteq) sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
- 3 Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și (A, \leq) sunt izomorfe.
- 4 Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
- 5 Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

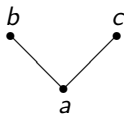
Remarcă

Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid (L, \leq) este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu (L, \leq) și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

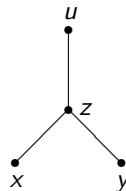
Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite.**

Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:



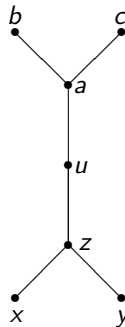
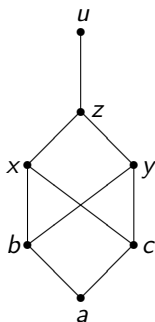
(A, \leq)



(B, \subseteq)

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \amalg B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui (A, \leq) dedesubtul diagramei Hasse a lui (B, \sqsubseteq) , apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B :

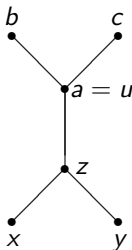


$$(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq) = (A \amalg B, \leq \oplus \sqsubseteq) \quad (B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq) = (B \amalg A, \sqsubseteq \oplus \leq)$$

După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru $(A \amalg B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ și $(B \amalg A, \sqsubseteq \oplus \leq)$, suma directă de poseturi nu este comutativă, întrucât aceste două poseturi nu sunt izomorfe.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Se poate efectua suma ordinală între (B, \sqsubseteq) și (A, \leq) , **nu și invers**. **Diagrama Hasse a sumei ordinale** $(B, \sqsubseteq) \dot{+} (A, \leq)$, se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui (B, \sqsubseteq) dedesubtul diagramei Hasse a lui (A, \leq) , se identifică maximum lui (B, \sqsubseteq) cu minimumul lui (A, \leq) , astfel obținându-se un punct comun, și cele două diagrame Hasse se unesc în acest punct comun:

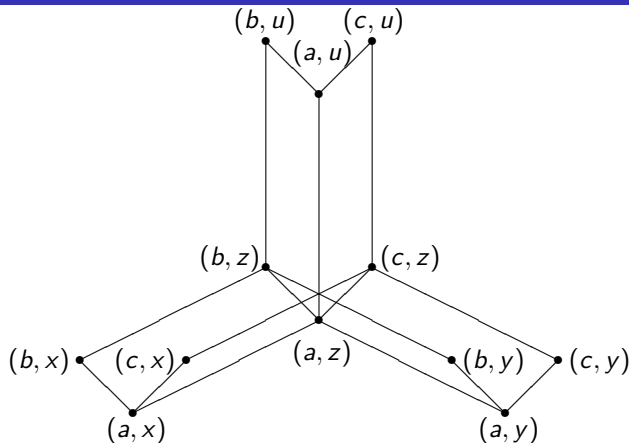


După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru suma directă și suma ordinală a acestor poseturi, prima dintre ele are o muchie în plus față de cea de-a doua.

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui (A, \leq) și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui (B, \sqsubseteq) ;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui (A, \leq) cu perechea formată din:
 - eticheta lui din diagrama Hasse a lui (A, \leq)
și
 - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui (B, \sqsubseteq) căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui (A, \leq) ;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β) , cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ) , cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui (B, \sqsubseteq) :

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi



$$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq) \cong (B \times A, \sqsubseteq \times \leq) = (B, \sqsubseteq) \times (A, \leq)$$

Se observă că produsul direct de poseturi este comutativ, adică poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq) \times (A, \leq) = (B \times A, \sqsubseteq \times \leq)$ sunt izomorfe, $\varphi : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, $\varphi(a, b) = (b, a)$, fiind un izomorfism de poseturi între ele.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1, n}}$ se notează cu

$$(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2) \oplus \dots \oplus (A_n, \leq_n) \text{ sau } \bigoplus_{i=1}^n (A_i, \leq_i) \text{ sau}$$

$$(A_1 \amalg A_2 \amalg \dots \amalg A_n, \leq_1 \oplus \leq_2 \oplus \dots \oplus \leq_n) \text{ sau } \left(\prod_{i=1}^n A_i, \bigoplus_{i=1}^n \leq_i \right) \text{ și este posetul}$$

$$\text{definit, recursiv, astfel: } \bigoplus_{i=1}^n (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i) \right) \oplus (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

La fel pentru suma ordinală a familiei de poseturi $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1, n}}$, pentru cazul în care (A_1, \leq_1) are maxim (A_n, \leq_n) are minim, iar $(A_2, \leq_2), \dots, (A_{n-1}, \leq_{n-1})$ sunt poseturi mărginite.

Se pot face generalizări și la cazuri infinite.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1, n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1, n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \dots \times (A_n, \leq_n)$

sau $\prod_{i=1}^n (A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \dots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^n A_i, \prod_{i=1}^n \leq_i)$

și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\prod_{i=1}^n (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notăție

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă

$(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \dots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct

$(\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \dots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu (A^n, \leq) .

n de A

n de \leq

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I} (A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (f(i) \in A_i)\} : \text{pentru orice } f, g \in \prod_{i \in I} A_i, \\ f \leq g \text{ ddacă } (\forall i \in I) (f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația \leq definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci

$$(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I} (A_i, \leq_i) \text{ este un } \mathbf{poset}.$$

Notăție

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine (A^I, \leq) (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \rightarrow A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui \leq_i , iar cu \prec_i relația de succesiune asociată lui \leq_i , și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs \leq , iar cu \prec notăm relația de succesiune asociată lui \leq , atunci:

- $\leq = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I} \text{ și } (\exists k \in I) (a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec = \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists k \in I) [a_k \prec_k b_k \text{ și } (\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)]\}$.

Într-adevăr, să considerăm $a = (a_i)_{i \in I} \in A$ și $b = (b_i)_{i \in I} \in A$.

Dacă $a \leq b$ și $(\exists k \in I) (a_k <_k b_k)$, atunci $a \leq b$ și $(\exists k \in I) (a_k \neq b_k)$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $a < b$.

Dacă $a < b$, atunci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \leq = \prod_{i \in I} \leq_i$ și

$(a_i)_{i \in I} \neq (b_i)_{i \in I}$, adică $(\forall i \in I) (a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists k \in I) (a_k \neq b_k)$, ceea ce este echivalent cu $(\forall i \in I) (a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists k \in I) (a_k \leq b_k \text{ și } a_k \neq b_k)$, adică $a \leq b$ și $(\exists k \in I) (a_k <_k b_k)$.

Așadar are loc egalitatea între $<$ și mulțimea de mai sus.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Să presupunem că există un $k \in I$ astfel încât $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)$. Atunci $a_k <_k b_k$ și $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i \leq_i b_i)$, deci $a < b$, conform expresiei lui $<$ de mai sus. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, astfel încât $a \leq x \leq b$, adică $(\forall i \in I) (a_i \leq_i b_i)$. Atunci $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i \leq_i x_i \leq_i b_i = a_i \leq_i a_i)$ și $a_k \leq_k x_k \leq_k b_k$, prin urmare $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = x_i = b_i)$, conform tranzitivității și antisimetriei lui \leq_i pentru fiecare $i \in I \setminus \{k\}$, și $a_k = x_k$ sau $x_k = b_k$, întrucât $a_k \prec_k b_k$. Așadar $(\forall i \in I) (a_i = x_i)$ sau $(\forall i \in I) (x_i = b_i)$, adică $a = x$ sau $x = b$. Prin urmare, $a \prec b$.

Acum să presupunem că $a \prec b$. Atunci $a < b$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, adică $(\forall i \in I) (a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists k \in I) (a_k \neq b_k)$. Presupunem prin absurd că există $j, k \in I$ astfel încât $j \neq k$, $a_j \neq b_j$ și $a_k \neq b_k$. Atunci $a_j <_j b_j$ și $a_k <_k b_k$. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$ cu $x_k = b_k$ și $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (x_i = a_i)$. Atunci $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare există un unic $k \in I$ astfel încât $a_k \neq b_k$, deci $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)$ și, întrucât $a_k \leq_k b_k$ și $a_k \neq b_k$, are loc $a_k <_k b_k$. Presupunem prin absurd că $a_k \not\prec_k b_k$. Atunci există un $u \in A_k$ astfel încât $a_k <_k u <_k b_k$. Atunci, considerând $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, cu $x_k = u$ și $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (x_i = a_i)$, rezultă $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare, $a_k \prec_k b_k$. Deci $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall i \in I \setminus \{k\}) (a_i = b_i)$.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Așadar are loc și a doua egalitate de mai sus.

Remarcă

Din remarca anterioară deducem că, dacă (A, \leq_A) și (B, \leq_B) sunt poseturi, iar relația de succesiune asociată lui \leq_A , respectiv \leq_B , este \prec_A , respectiv \prec_B , atunci relația de succesiune asociată ordinii produs, $\leq = \leq_A \times \leq_B$, este:

$$\prec = \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ și } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ și } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui \prec , corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr-o diagramă Hasse.

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.

Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.

La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).

Într-adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu \emptyset în definiția anterioară.

Reuniunea familiei vide de mulțimi este \emptyset , așadar mulțimea

$\prod_{i \in \emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \rightarrow \emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$ (unica funcție de la \emptyset la \emptyset ; a se vedea

definiția unei funcții).

Așadar, pentru orice mulțime A , $A^\emptyset = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Este admisă și notația A^\emptyset în loc de A^\emptyset .

Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct**
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

A se revedea, de mai sus, definiția **produsului direct al unei familii de poseturi**. În această definiție se pot înlocui poseturile cu mulțimi înzestrate cu **relații binare** arbitrare, și se obține produsul direct al respectivelor mulțimi înzestrate cu relația produs direct al respectivelor relații binare.

Această construcție poate fi generalizată la mulțimi înzestrate cu **relații n -are**. Dar **produsul direct** se poate defini și pentru structuri algebrice de același tip înzestrate cu anumite **operații**, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.

Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și o **algebră produs direct cu două operații binare** (latice Dedekind).

Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații**.

Exercițiu (temă)

Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p -ară (de aritate p , cu p argumente)** și o **relație k -ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau \mathbb{N}^*).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr-o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea). Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n A_i$,
cu *operațiile produs direct*:
- $\odot \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \odot_i \stackrel{\text{notație}}{=} (\odot_1, \dots, \odot_n)$,
- $f \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n f_i \stackrel{\text{notație}}{=} (f_1, \dots, f_n)$,
- $c \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n c_i \stackrel{\text{notație}}{=} (c_1, \dots, c_n)$
și *relația binară produs direct*:
- $\rho \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^n \rho_i = \rho_1 \times \dots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$:

- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A$,
 $x \odot y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \dots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \dots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ dacă
 $x_1 \rho_1 y_1, \dots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \dots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci
 $A = B^n = \{(b_1, \dots, b_n) \mid b_1, \dots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot
fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i .

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) , cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) (h(i) \in A_i)\},$

cu *operațiile produs direct* \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$,
 $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$,
 $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \rightarrow B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Sciere alternativă pentru *algebra produs direct* (A, \odot, f, c, ρ) :

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in A_i)\},$

cu *operațiile produs direct* \odot (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, $(a_i)_{i \in I} \odot (b_i)_{i \in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A$, $f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} \rho (b_i)_{i \in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) (a_i \in B)\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B .

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume (A, \odot, f, c, ρ) , unde:

- A este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operațiile \odot , f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume:
 $a \odot a := a$, $f(a) := a$ și $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât \emptyset sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relații binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulțimi, deci este tot un singleton, așadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n , să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

- 1 Mnemonic despre poseturi și funcții izotone
- 2 Latici
- 3 Funcții izotone versus morfisme de latici
- 4 Mnemonic despre latici
- 5 Latici mărginite
- 6 Morfisme de latici mărginite
- 7 Sublatiци și sublatiци mărginite
- 8 Latici distributive
- 9 Elemente complementate în latici mărginite
- 10 Latici complete
- 11 Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi
- 12 Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi
- 13 Algebre produs direct
- 14 Produsul direct al familiei vide de mulțimi și operațiile zeroare

Definiție

Dacă \mathcal{A} este o structură algebrică, având mulțimea suport A , iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n -ară* (*operație de aritate n* , *operație cu n argumente*) a lui \mathcal{A} este o funcție $f : A^n \rightarrow A$.

- Pentru orice mulțime A , $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulțimi: un singleton).
- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație 0-ară* (*operație de aritate 0*, *operație fără argumente*) a lui \mathcal{A} este o funcție $f : A^0 \rightarrow A$, deci o funcție $f : \{a\} \rightarrow A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din A** .
- Constantele 0 și 1 dintr-o latice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr-un inel unitar etc..