Logică Matematică şi Computaţională
Cursul VIII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, c.muresan@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

- **Logica matematică** este o ramură a matematicii care se ocupă cu exprimarea formalizată (i. e. formală, simbolică) a legilor gândirii și studierea acestora cu mijloace matematice.
- Ne propunem să studiem **logica clasică**, în două forme ale ei: **logica clasică a propozițiilor** și **logica clasică a predicatelor** sau a **propozițiilor cu variabile**. Vom face deosebirea dintre aceste două tipuri de logică clasică mai târziu. Ambele sunt **logici bivalente**, adică operează cu doar două **valori de adevăr**: **fals** și **adevărat**.
- Așadar, în **logica clasică**, toate enunțurile (propozițiile, afirmațiile) sunt presupuse a fi **adevărate** sau **false**. Aceasta nu este o condiție trivială, nici măcar dacă eliminăm din discuție enunțurile interogative și pe cele exclamative, după cum ne amintim din primul curs, din exemplul cu enunțul subiectiv, precum și cel cu **paradoxul mincinosului:** să se determine dacă următoarea afirmație este **adevărată** sau **falsă**: *Această afirmație este falsă.*

Logică matematică clasică. Calculul propozițional

- În acest curs vom începe studiul **logicii propoziționale clasice**.
- Vom studia **sistemul formal al calculului propozițional clasic** sub trei aspecte fundamentale:
  1. **sintaxa**, care se ocupă de limbajul formal al calculului propozițional clasic, i. e. de cadrul formal, de exprimarea în simboluri a obiectelor matematice cu care vom lucra;
  2. **algebra**, care asociază o structură algebrică sistemului formal descris în partea de sintaxă și folosește această asociere pentru a transfera proprietățile algebrice ale acelei structuri în proprietăți logice, și invers;
  3. **semantica**, aceasta fiind partea în care, pe baza structurii algebrice atașate logicii, se calculează efectiv **valorile de adevăr** ale enunțurilor (**fals** sau **adevărat**).
- Există și alte aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic, cum ar fi: aspectul **topologic**, cel **probabilist** etc., dar studierea lor depășeste cadrul și scopul acestui curs.
- Toate aceste aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic sunt denumite *dimensiuni ale sistemului logic*.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

Alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită, și de obicei considerată numărabilă; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Să notăm cu A *alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic*, adică mulțimea simbolurilor primitive: $A = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), [,]\}$.

Cuvintele peste alfabetul simbolurilor primitive

Definiție

Șirurile (alăturările) finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Notație

Așadar *mulțimea cuvintelor* calculului propozițional clasic este mulțimea A^+ a cuvintelor finite și nevide peste alfabetul A:
$A^+ = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$.

Exemplu

$u \rightarrow \neg\, v$, $\neg\,(u \rightarrow \neg\, v) \rightarrow w$, $\rightarrow u \rightarrow\rightarrow uv\neg\,)$ sunt **cuvinte**.

Observație

Intuiția ne determină să conferim "înțeles" simbolurilor primitive, și ne spune că primele două cuvinte din exemplul anterior "au sens", în timp ce al treilea "nu are sens". Dintre cuvintele peste alfabetul definit mai sus, le vom selecta pe cele care "au sens", și le vom numi *enunțuri*. Urmează definiția lor riguroasă:

Cuvintele care “au sens“: enunțurile

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\,\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*. Enunțurile care nu sunt variabile propoziționale, adică se află în cazul (E_2) sau (E_3) din definiția anterioară, se numesc *enunțuri compuse*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Remarcă

Conform definiției enunțurilor, **toate enunțurile** se obțin prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), așadar E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste A care include pe V și este închisă la $\neg$ și $\rightarrow$, i. e. cea mai mică (în sensul incluziunii, adică în posetul $(\mathcal{P}(A^+), \subseteq)$) submulțime M a lui A^+ cu proprietățile:

1. $V \subseteq M$,
2. pentru orice $\varphi \in M$, rezultă că $\neg\,\varphi \in M$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in M$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in M$.

Remarcă (E e închiderea lui V în familia Moore a submulțimilor lui A^+ închise la $\neg$ și $\rightarrow$)

Fie $\mathcal{M} = \{M \subseteq A^+ \mid (\forall\,\psi, \chi \in M)\,(\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in M)\}$.
$\mathcal{M}$ este sistem de închidere pe $\mathcal{P}(A^+)$. Într–adevăr, $A^+ \in \mathcal{M}$, iar, dacă I este o mulțime nevidă și $(M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}$, atunci, pentru orice $\psi, \chi \in \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, avem, pentru fiecare $i \in I$, $\psi, \chi \in M_i$, așadar $\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in M_i$, prin urmare $\neg\,\psi, \psi \rightarrow \chi \in \bigcap\limits_{i \in I} M_i$, așadar $\bigcap\limits_{i \in I} M_i \in \mathcal{M}$.
Dacă notăm cu $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(A^+) \rightarrow \mathcal{P}(A^+)$ operatorul de închidere asociat lui $\mathcal{M}$, atunci, conform remarcii anterioare, $E = C_{\mathcal{M}}(V)$.

Rolul parantezelor; parantezări corecte

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț).

O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.

Adică, pentru orice enunțuri ψ și $\psi \to \chi$:

- $\neg(\psi)$ este o parantezare corectă a enunțului $\neg\psi$;
- $\psi \to (\chi)$, $(\psi) \to \chi$ și $(\psi) \to (\chi)$ sunt parantezări corecte ale enunțului $\psi \to \chi$.

Prioritățile conectorilor logici

Observație

Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ și prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.

Noțiunea de **prioritate** are aici semnificația obișnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru construirea unui enunț.

Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, de fapt regula (E_2) se va aplica înaintea regulii (E_3), i. e., pentru orice enunțuri α și β, scrierea $\neg\,\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\,\alpha) \rightarrow \beta$.

Egalitatea între enunțuri

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), desigur, modulo parantezarea aleasă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Pentru a putea defini riguros egalitatea de enunțuri, să definim:

Definiție (arborii binari asociați enunțurilor)

Orice enunț are un *arbore binar asociat*, definit **recursiv** astfel:

- pentru orice variabilă propozițională p, arborele binar asociat lui p este arborele cu un singur nod, etichetat cu p;
- pentru orice enunț ψ, arborele binar asociat enunțului $\neg\psi$ are rădăcina etichetată cu, conectorul logic $\neg$, și arborele binar asociat lui ψ ca unic subarbore;
- pentru orice enunțuri ψ și χ, arborele binar asociat enunțului $\psi \rightarrow \chi$ are rădăcina etichetată cu, conectorul logic $\rightarrow$, arborele binar asociat lui ψ ca subarbore stâng și arborele binar asociat lui χ ca subarbore drept.

Remarcă (unicitatea arborelui binar asociat unui enunț)

Cum un enunț se află în unul și numai unul dintre cazurile (E_1), (E_2) și (E_3), se demonstrează inductiv că un enunț are un unic arbore binar asociat: dacă S e mulțimea enunțurilor care au câte un unic arbore binar asociat, atunci, conform definiției anterioare:

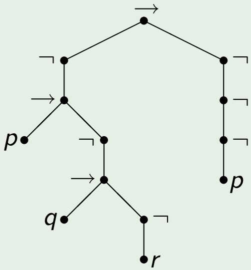
1. $V \subseteq S$,
2. pentru orice $\psi \in S$, rezultă $\neg\psi \in S$,
3. pentru orice $\psi, \chi \in S$, rezultă că $\psi \rightarrow \chi \in S$,

Remarcă (continuare – a se vedea mai jos inducția după un concept)

prin urmare $S = E$, conform definiției mulțimii E a tuturor enunțurilor.

Exemplu

Arborele binar asociat enunțului $\neg(p \to \neg(q \to \neg r)) \to \neg\neg\neg p$, unde $p, q, r \in V$, este:



Definiție

Considerăm două enunțuri ca fiind *egale* (modulo parantezări corecte) ddacă au același arbore binar asociat, în care ordinea fiilor unui nod (deci diferența dintre subarborele stâng și subarborele drept) contează (adică inversând doi subarbori distincți ai unui nod obținem un arbore diferit).

Riguros:

Definiție (enunțurile, arborii binari asociați lor și parantezările corecte)

Mulțimea E a *enunțurilor* calculului propozițional clasic este cea mai mică submulțime $E \subseteq A^+$ a mulțimii cuvintelor (finite și nevide) peste alfabetul A al simbolurilor primitive având proprietățile:

1. $V \subseteq E$; oricărui $p \in V$ îi asociem arborele cu un singur nod, etichetat cu p;
2. dacă $\psi \in E$, atunci $\neg(\psi) \in E$;
   în plus, dacă $\psi \in V$ sau există $\alpha \in E$ astfel încât $\psi \in \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$, atunci avem și $\neg\psi \in E$;
   enunțurilor $\neg\psi$ și $\neg(\psi)$ le asociem arborele binar având rădăcina etichetată cu $\neg$ și, ca unic subarbore al rădăcinii, arborele binar asociat lui ψ;
3. dacă $\psi, \chi \in E$, atunci $(\psi) \rightarrow (\chi) \in E$;
   în plus, dacă $\psi \in V$ sau există $\alpha \in E$ astfel încât $\psi \in \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$, atunci avem și $\psi \rightarrow (\chi) \in E$;
   similar, dacă $\chi \in V$ sau există $\beta \in E$ astfel încât $\chi \in \{\neg\beta, \neg(\beta)\}$, atunci avem și $(\psi) \rightarrow \chi \in E$;
   iar, dacă există $\alpha, \beta \in E$ astfel încât $\psi \in V \cup \{\neg\alpha, \neg(\alpha)\}$ și $\chi \in V \cup \{\neg\beta, \neg(\beta)\}$, atunci avem și $\psi \rightarrow \chi \in E$;
   enunțurilor $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \rightarrow (\chi)$, $(\psi) \rightarrow \chi$ și $(\psi) \rightarrow (\chi)$ le asociem arborele binar având rădăcina etichetată cu $\rightarrow$, arborele binar asociat lui ψ ca subarbore stâng al rădăcinii și arborele binar asociat lui χ ca subarbore drept al rădăcinii.

Egalitatea enunțurilor modulo parantezări corecte

Definiție (enunțurile, arborii binari asociați lor și parantezările corecte – continuare)

Considerăm relația binară $\risingdotseq$ pe E definită prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\varphi \risingdotseq \psi$ ddacă φ și ψ au același arbore binar asociat, în care ordinea fiilor unui nod contează. Evident, $\risingdotseq$ este o relație de echivalență pe E.
Identificăm mulțimea factor $E/\risingdotseq$ cu E, identificând fiecare $\varphi \in E$ cu $\varphi/\risingdotseq$. Deci oricare două enunțuri φ, ψ astfel încât $\varphi \risingdotseq \psi$ vor fi considerate egale.

Exemplu

Dacă $p, q \in V$, atunci $(\neg\, p) \rightarrow (\neg\,(\neg\, q)) \risingdotseq \neg\, p \rightarrow \neg\,\neg\, q$, așadar considerăm $(\neg\, p) \rightarrow (\neg\,(\neg\, q)) = \neg\, p \rightarrow \neg\,\neg\, q$.

Conectorii logici derivați

Notație (abrevieri pentru enunțuri compuse)

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg \varphi \rightarrow \psi$ (*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "sau" ψ)

$\varphi \wedge \psi := \neg (\varphi \rightarrow \neg \psi)$ (*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "și" ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ (*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ "echivalent cu" ψ)

Definiție

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Observație

Conectorii logici derivați se scriu ca niște operatori binari, și le vom acorda aceeași prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv "binar" $\rightarrow$.

Remarcă

În această prezentare a sistemului formal al logicii propoziționale clasice, am considerat negația și implicația ca și conectori logici primitivi, iar disjuncția, conjuncția și echivalența ca și conectori logici derivați, introduși prin notațiile de mai sus, pe baza celor primitivi.
Există prezentări ale sistemului formal al logicii propoziționale clasice care sunt echivalente cu cea din acest curs și care folosesc alți conectori logici primitivi.

Schemele (i. e. tipurile) de axiome

- Am definit limbajul cu care vom lucra. Acum vom defini, tot la acest nivel, formal, sintactic, noțiunea de "adevăr" în logica pe care o construim. "Adevărurile sintactice" vor fi "teoremele" acestei logici, iar, pentru a le obține, vom da un set de axiome și vom defini o modalitate prin care, din adevăruri sintactice stabilite până la un moment dat, se deduc alte adevăruri sintactice. Acea modalitate se va numi **regula de deducție modus ponens**.

Definiție

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & \varphi \to (\psi \to \varphi) \\
(A_2) & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)) \\
(A_3) & (\neg\, \varphi \to \neg\, \psi) \to (\psi \to \varphi)
\end{array}
$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Mulțimea axiomelor, i. e. a enunțurilor pornind de la care se deduc adevărurile sintactice

Definiție (continuare)

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1), (A_2) și (A_3), cu φ, ψ și χ enunțuri date.
Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) și (A_3), simplu, **axiome**.

Notație

Notăm cu Ax mulțimea axiomelor:

$$
\begin{array}{rll}
Ax = & \{\varphi \to (\psi \to \varphi), & \\
 & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)), & \\
 & (\neg \varphi \to \neg \psi) \to (\psi \to \varphi) & \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}.
\end{array}
$$

- Așa cum am anunțat, acum vom defini **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), adică modalitatea prin care, din aceste axiome, se obțin toate **teoremele** (**adevărurile sintactice**) în acest sistem logic.

Remarcă

Se poate demonstra că schemele de axiome de mai sus sunt **independente**, i. e. niciuna dintre ele nu poate fi dedusă din celelalte două prin modalitatea de deducție sintactică pe care o vom defini.

O modalitate pentru a demonstra acest fapt este să se definească semantica logicii propoziționale clasice, ca în cursul următor, să se demonstreze Teorema de Completitudine Tare, care afirmă că deducția sintactică, coincide cu deducția semantică, apoi să se arate că, pentru fiecare două dintre aceste trei axiome, există cel puțin o evaluare care le atribuie valoarea 1 (reprezentând **adevărul**), dar celei de–a treia axiome îi atribuie valoarea 0 (reprezentând **falsul**).

Acest fapt arată și că, între aceste trei scheme de axiome, nu există două din care să se deducă sintactic **toate** adevărurile sintactice (teoremele) acestui sistem logic, care se deduc din toate cele trei scheme de axiome.

Se pot, însă, defini alte seturi echivalente de scheme de axiome (adică seturi de scheme de axiome din care se deduc sintactic aceleași teoreme), cu aceiași sau cu alți conectori logici primitivi.

Notație (scrierea regulilor de deducție)

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Regula de deducție **modus ponens** și teoremele formale

Definiție (teoremele (formale), i. e. adevărurile sintactice)

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notații

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.
Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție (regula de deducție modus ponens (MP))

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:
$\dfrac{\vdash \psi, \ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$, sau, echivalent: $\dfrac{\psi, \ \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$.

Definiția recursivă a mulțimii teoremelor formale

Remarcă

Regula (T_3), chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulțime închisă la regulile (T_1) și (T_2), i. e. cea mai mică mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

1. $M \supseteq Ax$,
2. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obțină prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2), adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunț obținut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.

Demonstrațiile formale

Definiție

Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

În scrierea definiției de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiției, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într–o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarcă

Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Teoremele sunt enunțurile care admit demonstrații formale

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală ddacă există o demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Enunțurile deductibile din ipoteze

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_0) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_0) și (CS_2) de un număr finit de ori.

Notație

Notăm faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție (și regula de deducție din ipoteze este tot modus ponens)

Regula (CS_2) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}.$$

Definiția recursivă a unei mulțimi de consecințe sintactice

Remarcă

Regula (CS_3), chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulțimea consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri este cea mai mică mulțime închisă la regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2), adică cea mai mică mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și mulțimea Σ a ipotezelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

1. $M \supseteq Ax$,
2. $M \supseteq \Sigma$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că (CS_3) spune că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ nu conține alte elemente decât cele obținute din regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2).

Remarcă (deducția pornind de la axiome și de la ipotezele din Σ)

Definiția consecințelor sintactice ale lui Σ este exact definiția teoremelor formale în care mulțimea Ax se înlocuiește cu $Ax \cup \Sigma$.

Demonstrații formale din ipoteze

Definiție

Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O *Σ–demonstrație formală pentru φ* este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. $\varphi_i \in \Sigma$;
3. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ–demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarcă

Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstrație formală.

Enunțurile deductibile din ipoteze sunt exact enunțurile care admit demonstrații formale din acele ipoteze

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ–demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_0) și (CS_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstrații formale și poate avea Σ–demonstrații formale de lungimi diferite.

Inducția după un concept

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de **enunț**.

Observație

O tehnică importantă de demonstrație la care vom apela în acest capitol al cursului este ceea ce vom numi *inducție după un concept*, pe care o vom întâlni în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**.
Într–adevăr, să descriem această metodă de demonstrație, în fiecare dintre cele trei forme în care poate să apară într–un raționament matematic în această teorie, și s–o analizăm, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție după un număr natural.

Inducția după enunțuri

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \rightarrow \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea enunțurilor este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de cuvinte care include mulțimea variabilelor propoziționale și care este închisă la regulile (E_2) și (E_3) din definiția enunțurilor, i. e. mulțimea E a enunțurilor este cea mai mică mulțime M de cuvinte care satisface proprietățile:

- $V \subseteq M$;
- *închiderea la* (E_2): dacă $\psi \in M$, atunci $\neg\psi \in M$;
- *închiderea la* (E_3): dacă $\psi, \chi \in M$, atunci $\psi \to \chi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a cuvintelor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la regulile (E_2) și (E_3), rezultă că $M_P \supseteq E$, i. e. toate enunțurile sunt printre cuvintele care satisfac proprietatea P.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după enunțuri poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de numărul de pași în care se obține un enunț din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ se obține într–un singur pas, adică φ este o variabilă propozițională, atunci φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n+1$**:** dacă enunțul φ se obține în $n+1$ pași, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem două cazuri:
  1. $\varphi = \neg\psi$, pentru un enunț ψ care se obține în n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ satisface proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P;
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două enunțuri ψ și χ care se obțin, fiecare, în cel mult n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ satisfac proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P.

Întrucât orice enunț se obține într–un număr finit de pași din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), **principiul inducției matematice** (obișnuite, după un număr natural) ne asigură de faptul că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice enunț satisface proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.
Fie P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea teoremelor formale este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea T a teoremelor formale este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei doi pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că $M_P \supseteq T$, i. e. toate teoremele formale sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după teoreme formale poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei demonstrații formale pentru o teoremă formală, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \leadsto n + 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - teorema formală φ_j admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - teorema formală $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice (obișnuite) arată că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice teoremă formală satisface proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*.
Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor, include mulțimea Σ și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- orice enunț din Σ aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și toate enunțurile din Σ și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că M_P include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i. e. toate consecințele sintactice ale lui Σ sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după consecințele sintactice ale lui Σ poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei Σ–demonstrații formale pentru o consecință sintactică a lui Σ, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă sau un enunț din Σ, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă sau un enunț din Σ, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - φ_j admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice arată că această demonstrație este completă.

Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

Remarcă

Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Notație

Vom nota acest sistem formal cu $\mathcal{L}$.

Observație

Întreaga prezentare de până acum a fost efectuată la **nivel sintactic**: am pornit de la un **alfabet** (o **mulțime de simboluri**), am definit un tip particular de **cuvinte peste acest alfabet**, numite **enunțuri**, apoi un tip particular de enunțuri, numite **teoreme formale**, și **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), care indică modul în care, din teoreme formale, se obțin alte teoreme formale, cu generalizarea la **consecințe sintactice** ale unor mulțimi de enunțuri.

1. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
2. Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice
3. Proprietăți Sintactice ale Logicii Propoziționale Clasice

În această secțiune vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$, dintre care cea mai importantă este **Teorema deducției**. Acest rezultat ne va conduce la cele mai semnificative teoreme formale ale lui $\mathcal{L}$.

Remarcă

Conform punctului (1), în (2) din propoziția următoare avem chiar echivalență: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $(\exists \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$.

Propoziție (o numim ad–hoc Propoziția $\star$)

Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. *dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;*
2. *dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demonstrație: (1) Presupunem că $\Sigma \subseteq \Delta$ și demonstrăm, prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ, că orice consecință sintactică a lui Σ este și consecință sintactică a lui Δ.
Așadar considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

$$P(\varepsilon): \quad \Delta \vdash \varepsilon$$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$, i. e. mulțimea

Propoziția $\star$, (1): dintr–o mulțime de ipoteze se deduc toate enunțurile deductibile din submulțimile sale

consecințelor sintactice ale lui Σ este inclusă în mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P. Este suficient să demonstrăm că mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include mulțimea axiomelor și pe Σ și este închisă la (MP).
Cazul 1: Dacă φ este axiomă, atunci $\Delta \vdash \varphi$. Așadar $Ax \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.
Cazul 2: Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci, cum $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $\varphi \in \Delta$, prin urmare $\Delta \vdash \varphi$. Așadar $\Sigma \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.
Cazul 3 (pasul de inducție): presupunem că există $\psi \in E$, a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, adică $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$, i. e. au loc: $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Delta \vdash \varphi$ prin (MP), adică $\varphi \in \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.
Demonstrația primului punct este încheiată, pentru că cele de mai sus arată că mulțimea $\{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ include pe Ax și pe Σ și e închisă la (MP), așadar $\{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$ include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\}$, i. e.:

$$\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid \Delta \vdash \varepsilon\},$$

așadar, dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$.
(2) Și aici procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ. Considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

Propoziția $\star$, (2): orice enunț deductibil dintr–o mulțime de ipoteze se deduce dintr–o submulțime finită a sa

$Q(\varepsilon): \quad (\exists\,\Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0,\ \Gamma \vdash \varepsilon)$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid Q(\varepsilon)\}$.

Cazul 1: Dacă $\varphi \in Ax$, atunci $\vdash \varphi$, i. e. $\emptyset \vdash \varphi$; $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $\emptyset$ este o mulțime finită, așadar φ satisface proprietatea Q.

Cazul 2: Dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci: $\{\varphi\} \vdash \varphi$, iar $\{\varphi\} \subseteq \Sigma$ și $\{\varphi\}$ este o mulțime finită, așadar φ satisface proprietatea Q

Cazul 3 (pasul de inducție): dacă există $\psi \in E$, a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. există $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$ și $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$ a. î. Γ_1 și Γ_2 sunt finite, $\Gamma_1 \vdash \psi$ și $\Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \aleph_0$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este o mulțime finită, iar, întrucât $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, prin aplicarea punctului (1) obținem: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ și $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ prin (MP), așadar φ satisface proprietatea Q.

Am încheiat demonstrația punctului (2), întrucât cele de mai sus arată că mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea Q include pe Ax și pe Σ și e închisă la (MP), așadar include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, anume mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ. i. e.:

$\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid (\exists\,\Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0,\ \Gamma \vdash \varepsilon)\}$.

Propoziția $\star$, (3): enunțurile deductibile din enunțuri deductibile dintr–o mulțime Σ de ipoteze se deduc din Σ

De fapt, conform punctului (1):

$$\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \vdash \varepsilon\} = \{\varepsilon \in E \mid (\exists\, \Gamma \subseteq \Sigma)\,(|\Gamma| < \aleph_0,\ \Gamma \vdash \varepsilon)\}.$$

(3) Aici vom folosi **Teorema deducției** (vedeți mai jos), în demonstrarea căreia se utilizează numai punctul (1) din această propoziție.

Am preferat scrierea punctelor acestei propoziții unul după altul, în același rezultat, dar puteam intercala, undeva între punctele (1) și (3), rezultatul de mai jos numit **Teorema deducției** și abreviat (TD).

Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci, conform punctului (2), există o mulțime finită Γ a. î. $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$.

Dacă $\Gamma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, adică $\vdash \varphi$, prin urmare $\Sigma \vdash \varphi$.

Dacă $\Gamma \neq \emptyset$, atunci fie $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$.

Dacă orice enunț din Δ este consecință sintactică a lui Σ, atunci, pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$, $\Sigma \vdash \gamma_i$.

$\Gamma \vdash \varphi$ înseamnă că $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, ceea ce, conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \rightarrow \varphi$, ceea ce, din nou conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)$, și, continuând astfel, prin aplicări succesive ale (TD), obținem $\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi))\ldots)$, așadar

$\Sigma \vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots \to (\gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi))\ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_1$, de unde, prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \gamma_2 \to (\gamma_3 \to \ldots \to (\gamma_{n-1} \to (\gamma_n \to \varphi))\ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_2$, și, continuând în acest mod, prin aplicări succesive ale regulii de deducție (MP), se obține $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația punctului (3).

Propoziție (principiul identității și principiul terțului exclus)

Pentru orice $\varphi \in E$, următoarele enunțuri sunt teoreme formale:

1. **principiul identității** *(abreviat* **PI***): $\vdash \varphi \to \varphi$;*
2. **principiul terțului exclus** *(abreviat* **PTE***): $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.*

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$.

(1) Aceasta este o demonstrație sintactică pentru enunțul $\varphi \to \varphi$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) & (A_1) \\
\vdash [\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)] & (A_2) \\
\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi) & (\mathrm{MP}) \\
\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi) & (A_1) \\
\vdash \varphi \to \varphi & (\mathrm{MP})
\end{array}$$

(2) Prin definiție, $\varphi \vee \neg\varphi = \neg\varphi \to \neg\varphi$, iar, conform (PI): $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$.

Observație (tehnică de efectuare a demonstrațiilor sintactice)

Uneori, este convenabil ca **demonstrațiile formale (demonstrațiile sintactice)**, cum este cea de mai sus, dar și multe raționamente care urmează în acest curs,

Observație (continuare)

să fie alcătuite "de la coadă la cap" (desigur, "pe ciornă").
Demonstrații ca, de exemplu, cea a punctului (1) din propoziția ce succedă **Teorema deducției**, demonstrație care începe prin considerarea unei mulțimi de ipoteze, ar fi dificil de conceput "de la cap la coadă".

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin "TD" denumirea acestei teoreme.)

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Din punctul (1) din Propoziția $\star$ și (MP), obținem: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, așadar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$, dar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$": Ipoteza acestei implicații este: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Aici vom proceda prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Considerăm următoarea proprietate asupra enunțurilor: pentru orice $\varepsilon \in E$:

$P(\varepsilon): \quad \Sigma \vdash \varphi \to \varepsilon$

și demonstrăm că $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varepsilon\} \subseteq \{\varepsilon \in E \mid P(\varepsilon)\}$.

Cazul 1 (pas de verificare): Dacă ψ este o axiomă, atunci $\vdash \psi$, și, cum $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), o aplicare a regulii (MP) ne dă $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Cazul 2 (tot pas de verificare): Dacă $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$, atunci avem două subcazuri:
Subcazul 2.1: $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), deci $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Așadar $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ prin (MP).
Subcazul 2.2: $\psi = \varphi$. Conform (PI), $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ și, prin urmare, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Cazul 3 (pasul de inducție): dacă există un enunț α a. î. α și $\alpha \rightarrow \psi$ satisfac ipoteza de inducție, adică proprietatea P, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$, atunci, întrucât $\vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ conform (A_2), deci $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$, aplicând (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, și, aplicând (MP) încă o dată, obținem $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Așadar mulțimea enunțurilor care satisfac proprietatea P include pe Ax și $\Sigma \cup \{\varphi\}$ și e închisă la (MP), prin urmare această mulțime include cea mai mică mulțime de enunțuri cu aceste proprietăți, adică pe $\{\varepsilon \in E \mid \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varepsilon\}$, iar această din urmă mulțime conține pe ψ conform ipotezei acestei implicații, prin urmare ψ are proprietatea P, adică $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Remarcă

În demonstrațiile pentru (PI), (PTE) și (TD), schema de axiome (A_3) nu a fost folosită.

Limbajul acestei teorii matematice versus metalimbaj

Observație

Denumirea de **teoremă** pentru rezultatul anterior este o denumire din **metalimbaj**, pentru că acest rezultat este o proprietate a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Denumirea de **teoremă formală** este din limbajul sistemului formal al logicii propoziționale clasice, ea denumește un tip de obiect cu care lucrează acest sistem formal.

Este importantă această distincție. Similaritatea celor două denumiri se datorează faptului că acest sistem formal (al logicii propoziționale clasice) este o formalizare a unor legi ale gândirii (în special a procedeelor gândirii care sunt, în mod curent, folosite în elaborarea raționamentelor matematice), și conține denumiri care îi sugerează întrebuințarea, destinația.

Aceleași considerații sunt valabile pentru **conectorii logici** din sistemul formal al calculului propozițional clasic: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$, versus **conectorii logici din metalimbaj**, folosiți în enunțurile referitoare la calculul propozițional clasic, scriși fie prin denumirile lor: "non" sau "not" sau "negație", "implică" sau "rezultă", "sau", "și", "echivalent" sau "ddacă", fie prin simbolurile consacrate, în cazul implicației și echivalenței: $\Rightarrow$ și $\Leftrightarrow$, respectiv.

La fel pentru alți termeni din acest sistem logic, precum și din sistemul formal al calculului cu predicate clasic, prezentat în ultimul curs.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E$, arbitrare, fixate.

Notație (pentru următoarele reguli de deducție)

Regula de deducție $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ va semnifica faptul că φ se deduce printr–o demonstrație formală din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, adică: $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Remarcă (cu notația de tip $\dfrac{\text{ipoteze}}{\text{concluzie}}$)

Regula de deducție $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$ implică regula $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi_1, \ldots, \Sigma \vdash \varphi_n}{\Sigma \vdash \varphi}$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$, de unde, luând $\Sigma = \emptyset$, obținem și cazul particular: $\dfrac{\vdash \varphi_1, \ldots, \vdash \varphi_n}{\vdash \varphi}$.

Într–adevăr, dacă avem $\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$, adică $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$, și au loc $\Sigma \vdash \varphi_1, \ldots, \Sigma \vdash \varphi_n$, atunci, conform afirmației (3) din Propoziția $\star$, rezultă că $\Sigma \vdash \beta$.

Remarcă (modus ponens, cu scrierea de mai sus)

Conform afirmației (3) din Propoziția $\star$, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, în particular mulțimea teoremelor formale, este inchisă la regula $\dfrac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, pe care o numim tot **modus ponens**.

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

(tranzitivitatea implicației)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$	(TD)
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	(TD)
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	(TD)

Așadar:

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{teorema formală anterioară} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \psi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \psi \to \chi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(MP)}
\end{array}$$

Ca mai sus, folosind (MP), se obțin următoarele reguli de deducție din teoremele formale care le precedă. La fel se obțin:

- din axioma (A_1) și (MP):

(afirmarea concluziei)

- $$\frac{\varphi}{\psi \to \varphi}$$

- din axioma (A_3) și (MP):

(principiul reducerii la absurd)

- $$\frac{\neg\varphi \to \neg\psi}{\psi \to \varphi}$$

(inversarea premiselor)

- $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
- $\dfrac{\varphi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație:

$$\begin{array}{ll}
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi) & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to \chi & \text{(MP)} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \chi & \text{(MP)} \\
\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(TD)} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} \vdash \psi \to (\varphi \to \chi) & \text{(TD)} \\
\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) & \text{(TD)}
\end{array}$$

(negarea premisei)

- $\vdash \varphi \rightarrow (\neg\,\varphi \rightarrow \psi)$ și $\vdash \neg\,\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\neg\,\varphi \rightarrow \psi}$ și $\dfrac{\neg\,\varphi}{\varphi \rightarrow \psi}$

Demonstrație:

$\{\varphi, \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \neg\,\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\varphi, \neg\,\varphi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \neg\,\varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi\} \vdash \neg\,\varphi \rightarrow \psi$	(TD)
$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\,\varphi \rightarrow \psi)$	(TD)

Așadar:

$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\,\varphi \rightarrow \psi)$	teorema formală anterioară
$\vdash \neg\,\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	**inversarea premiselor**

(principiul dublei negații)

- $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ și $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$
- $\dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$

Demonstrație:

$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi$	ipoteză
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\neg\varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\neg\varphi\} \vdash \varphi$	(MP)
$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	(TD)

Așadar:

$\vdash \neg\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	
$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	**principiul reducerii la absurd**

(principiul contrapoziției)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi)$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \psi$	(MP)
$\{\varphi \rightarrow \psi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\psi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\neg\,\psi$	(TD)
$\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi$	**principiul reducerii la absurd**
$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi)$	(TD)

(comutativitatea disjuncției)

- $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$	ipoteză
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\neg\varphi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \varphi$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$	(TD)

(comutativitatea conjuncției)

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$

Demonstrație: Să observăm că:

$$
\begin{array}{ll}
\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \psi \to \neg\,\varphi & \text{ipoteză} \\
\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\psi \to \psi & \textbf{principiul dublei negații} \\
\{\psi \to \neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi & \textbf{tranzitivitatea implicației} \\
\vdash (\psi \to \neg\,\varphi) \to (\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi) & \text{(TD)} \\
\vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi) & \textbf{principiul contrapoziției}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi & \text{ipoteză} \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \neg\,\psi) & \text{definiția lui } \wedge \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash (\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi) \to (\varphi \to \neg\,\psi) & (A_3) \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi) & \textbf{principiul contrapoziției} \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\psi \to \neg\,\varphi) & \text{(MP)} \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\neg\,\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi) & \text{teorema formală de mai sus} \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \neg\,(\psi \to \neg\,\varphi) & \text{(MP)} \\
\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \wedge \varphi & \text{definiția lui } \wedge \\
\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi) & \text{(TD)}
\end{array}
$$

Din **comutativitatea conjuncției** și definiția echivalenței obținem:

(comutativitatea echivalenței)

- $\dfrac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

(prima lege a lui De Morgan)

- $\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ și $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\dfrac{\neg\varphi \vee \neg\psi}{\neg(\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\neg(\varphi \wedge \psi)}{\neg\varphi \vee \neg\psi}$

Demonstrație:

$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	ipoteză
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\psi \vee \neg\varphi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	definiția lui $\vee$
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	**principiul reducerii la absurd**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	**principiul dublei negații**
$\{\neg\varphi \vee \neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	definiția lui $\wedge$
$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	(TD)

$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$	ipoteză
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$	definiția lui $\wedge$
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\psi$	**principiul dublei negații**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\neg(\varphi \wedge \psi)\} \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$	definiția lui $\vee$
$\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	(TD)

(adevărul nu implică falsul)

- $\vdash (\varphi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow \neg\,\varphi$
- $\dfrac{\varphi \rightarrow \neg\,\varphi}{\neg\,\varphi}$

Demonstrație:

$\{\varphi \rightarrow \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \rightarrow \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\varphi \rightarrow \neg\,\varphi, \neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\varphi$	(MP)
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash (\varphi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow \neg\,\varphi$	(TD)
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\,\varphi)$	**principiul contrapoziției**
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,\neg\,\varphi$	ipoteză
$\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\,\varphi)$	(MP)
$\vdash \neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\,\varphi)$	(MP)
$\vdash (\varphi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow \neg\,\varphi$	**principiul reducerii la absurd**

(slăbirea)

- $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$
- $\dfrac{\varphi \to \chi, \psi \to \chi}{(\varphi \vee \psi) \to \chi}$

Demonstrație:

$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	**negarea premisei**	$\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(A_1)
$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$	definiția lui $\vee$	$\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$	definiția lui $\vee$

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \varphi \vee \psi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\varphi \to \psi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \psi \vee \varphi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\psi \to \varphi$	definiția lui $\vee$
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\chi \to \neg\psi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\chi \to \chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\chi \to \neg\neg\chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \neg\neg\chi$	**adevărul nu implică falsul**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi\} \vdash \chi$	**principiul dublei negații**
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi\} \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi$	(TD)

(slăbirea conjuncției)

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$
- $\dfrac{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi}{\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
- caz particular: $\dfrac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

Demonstrație:

$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**slăbirea**
$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	**principiul reducerii la absurd**

Așadar:

$\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow \psi$	ipoteză
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$	**comutativitatea conjuncției**
$\vdash (\psi \wedge \varphi) \rightarrow \varphi$	**tranzitivitatea implicației**

$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi$	ipoteză
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg\chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \chi \rightarrow \psi$	ipoteză
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\chi$	**principiul contrapoziției**
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg\chi$	**slăbirea**
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi\} \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	**principiul reducerii la absurd**

Acum să considerăm cazul particular în care χ este o teoremă formală. Atunci avem:

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi$	ipoteză
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \rightarrow \varphi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \psi\} \vdash \psi$	ipoteză
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \rightarrow \psi$	**afirmarea concluziei**
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	regula de deducție de mai sus
$\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$	
$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	(MP)

Din regula de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular, și următoarele teoreme formale: **principiul dublei negații**, **prima lege a lui De Morgan**, **comutativitatea disjuncției** și **comutativitatea conjuncției**, obținem următoarele teoreme formale, pe care le numim tot:

- **principiul dublei negații**: $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
- **prima lege a lui De Morgan**: $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (a se revedea **comutativitatea echivalenței**)
- **comutativitatea disjuncției**: $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$
- **comutativitatea conjuncției**: $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

Din regula de deducție **slăbirea conjuncției**, cazul particular, **principiul contrapoziției** și **principiul reducerii la absurd** obținem următoarea teoremă formală, pe care o numim tot:

- **principiul reducerii la absurd**: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

(dubla premisă)

- $\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
- $\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

Demonstrație:

$\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi\} \vdash \psi \to (\varphi \wedge \psi)$	(TD)
$\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	(TD)

$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$	ipoteză
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteză
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$	(MP)
$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(TD)
$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$	(TD)

- **falsul implică orice**: $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$
- **orice implică adevărul**: $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$

Demonstrație:

$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$	**negarea premisei**
$\vdash (\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi)$	**dubla premisă**
$\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$	(TD)

$\vdash \neg\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$	(A_1)
$\vdash \psi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi)$	**inversarea premiselor**
$\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$	definiția lui $\vee$

(negarea termenilor unei echivalențe)

- $$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi}$$

Demonstrație:

$\varphi \leftrightarrow \psi$	ipoteză
$\varphi \rightarrow \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	**principiul contrapoziției**
$\psi \rightarrow \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\neg\varphi \rightarrow \neg\psi$	**principiul contrapoziției**
$\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$	**slăbirea conjuncției**

- $\vdash ((\varphi \land \psi) \lor \chi) \leftrightarrow ((\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi))$

Demonstrație: aplicând definiția lui $\lor$:

$\{(\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)\} \vdash \varphi \lor \chi = \neg\varphi \to \chi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)\} \vdash \psi \lor \chi = \neg\psi \to \chi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)\} \vdash (\neg\varphi \lor \neg\psi) \to \chi$	**slăbirea**
$\{(\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)\} \vdash \neg(\varphi \land \psi) \to (\neg\varphi \lor \neg\psi)$	**prima lege a lui De Morgan**
$\{(\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)\} \vdash \neg(\varphi \land \psi) \to \chi = (\varphi \land \psi) \lor \chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\vdash ((\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)) \to ((\varphi \land \psi) \lor \chi)$	(TD)
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash (\varphi \land \psi) \lor \chi = \neg(\varphi \land \psi) \to \chi$	ipoteză
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \chi \to \neg\neg\chi$	**principiul dublei negații**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \neg(\varphi \land \psi) \to \neg\neg\chi$	**tranzitivitatea implicației**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \neg\chi \to (\varphi \land \psi)$	**principiul reducerii la absurd**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \neg\chi \to \varphi = \chi \lor \varphi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \varphi \lor \chi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \neg\chi \to \psi = \chi \lor \psi$	**slăbirea conjuncției**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash \psi \lor \chi$	**comutativitatea disjuncției**
$\{(\varphi \land \psi) \lor \chi\} \vdash (\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi)$	**slăbirea conjuncției**
$\vdash ((\varphi \land \psi) \lor \chi) \to ((\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi))$	**slăbirea conjuncției**
$\vdash ((\varphi \land \psi) \lor \chi) \leftrightarrow ((\varphi \lor \chi) \land (\psi \lor \chi))$	**slăbirea conjuncției**

Disjuncție și conjuncție logică între n enunțuri

Notație (abrevieri definite recursiv)

Fie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (prioritățile: ca la operatori unari, deci aceeași prioritate ca $\neg$):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exercițiu (temă)

Folosind **dubla premisă** și (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu **dubla premisă** și (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi \in E$, au loc echivalențele:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash (\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i) \to \varphi.$$

A se vedea și Propoziția 7.2.53/pagina 160/cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, precum și demonstrația Propoziției $\star$ de mai sus.