**FMI, Info, Anul I**
**Logică matematică şi computaţională**

# Seminar 6

**(S6.1)** Să se arate, folosind substituţia, că formula

$$\chi := (((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6) \wedge (\neg(v_4 \to v_{10}) \to v_2)) \to ((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6)$$

este tautologie.
**Demonstraţie:** Ştim că $v_0 \wedge v_1 \to v_0$ este tautologie. Aplicăm Propoziţia 1.21.(ii) pentru $\varphi := (v_0 \wedge v_1) \to v_0$, $v := v_0$ şi $\chi := (v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6$ pentru a obţine că:

$$\psi := \varphi_v(\theta) = (((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6) \wedge v_1 \to ((v_0 \to \neg(v_3 \to v_5)) \to v_6)$$

este tautologie. Aplicăm încă o dată Propoziţia 1.21.(ii) pentru $\varphi := \psi$, $v := v_1$ şi $\chi := \neg(v_4 \to v_{10}) \to v_2$ pentru a obţine că $\chi$ este tautologie.

□

**(S6.2)** Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

**Demonstraţie:**

(i) Fie $e$ un model al lui $\Gamma$. Vrem să arătăm că $e$ este model al lui $\psi$. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\boldsymbol{\to}} e^+(\psi) = 1 \mathbin{\boldsymbol{\to}} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie $e$ un model al lui $\Gamma$. Vrem să arătăm că $e$ este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \to e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \to 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie $e$ un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model $e$ al lui $\Gamma$, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model $e$ al lui $\Gamma$, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model $e$ al lui $\Gamma$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

$\square$

**Notaţie.** *Pentru orice mulţime $\Gamma$ de formule şi orice formulă $\varphi$, notăm cu $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ faptul că există o submulţime finită $\Delta$ a lui $\Gamma$ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.*

**(S6.3)** Să se arate că pentru orice mulţime de formule $\Gamma$ şi orice formulă $\varphi$ avem că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu este finit satisfiabilă.

**Demonstraţie:**

Avem întâi că $\Gamma \vDash_{fin} \varphi \iff$ există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \vDash \varphi \iff$ (din Propoziţia 1.30.(i)) există $\Delta \subseteq \Gamma$ finită cu $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ nesatisfiabilă (*).
Apoi, cum o mulţime finit satisfiabilă înseamnă o mulţime pentru care orice submulţime finită a sa e satisfiabilă, avem că $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ nu e finit satisfiabilă $\iff$ există $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ finită astfel încât $\Delta'$ e nesatisfiabilă (**).
Noi vrem să arătăm că (*) este echivalent cu (**).
Pentru "(*) implică (**)", luăm $\Delta' := \Delta \cup \{\neg\varphi\}$, ce este, clar, o submulţime finită a lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.
Pentru "(**) implică (*)", luăm $\Delta := \Delta' \cap \Gamma$. Clar, $\Delta$ este o submulţime finită a lui $\Gamma$. Rămâne de arătat că $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. Cum $\Delta' \subseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, avem:

$$\Delta' = \Delta' \cap (\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = (\Delta' \cap \Gamma) \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) = \Delta \cup (\Delta' \cap \{\neg\varphi\}) \subseteq \Delta \cup \{\neg\varphi\}.$$

Cum $\Delta'$ e nesatisfiabilă, rezultă că şi $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$ e nesatisfiabilă. $\square$

**(S6.4)** Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(V1) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\Gamma$ este satisfiabilă ddacă $\Gamma$ este finit satisfiabilă.

(V2) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\Gamma$ este nesatisfiabilă ddacă $\Gamma$ nu este finit satisfiabilă.

(V3) Pentru orice $\Gamma \subseteq Form$, $\varphi \in Form$, $\Gamma \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash_{fin} \varphi$.

**Demonstraţie:**

Echivalenţa între (V1) şi (V2) este evidentă.

Demonstrăm că (V2) $\Rightarrow$ (V3):

$$
\begin{aligned}
\Gamma \vDash \varphi \quad & \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.30.(i))} \\
& \iff \quad \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ nu este finit satisfiabilă (conform (V2) pentru } \Gamma \cup \{\neg\varphi\}) \\
& \iff \quad \Gamma \vDash_{fin} \varphi \text{ (conform (S6.3)).}
\end{aligned}
$$

Demonstrăm că (V3) $\Rightarrow$ (V2):

$$
\begin{aligned}
\Gamma \text{ este nesatisfiabilă} \quad & \iff \quad \Gamma \vDash \perp \text{ (conform Propoziţiei 1.29)} \\
& \iff \quad \Gamma \vDash_{fin} \perp \text{ (conform (V3) pentru } \Gamma \text{ şi } \perp) \\
& \iff \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î. } \Delta \vDash \perp \\
& \iff \quad \text{există o submulţime finită } \Delta \text{ a lui } \Gamma \text{ a.î.} \\
& \qquad\quad \Delta \text{ este nesatisfiabilă (conform Propoziţiei 1.29)} \\
& \iff \quad \Gamma \text{ nu este finit satisfiabilă.}
\end{aligned}
$$

$\square$