CONTINUITATEA – FCȚ. CU MAI MULTE VARIABILE

- identific unde e sigur continuă ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
- identific %fcț pe $\mathbb{R}^2$ care convin ($y=-x$, $y=x$, $y=x^2$ ...)
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x,-x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ ...

Caz I Nu sunt egale $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ nu e continuă în $(0,0)$

Caz II Sunt egale $= l$.

Demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$

Se evaluează $|f(x,y)-l|$ în sensul că se demonstrează inegalitățile

$$0 \le |f(x,y)-l| \le g(x,y)$$

$$0 \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0, \quad |f(x,y)-l| \to 0, \quad g(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \\ f(x,y) = l \end{array}\right\} \Rightarrow f = \text{continuă pe } \mathbb{R}^2$$

CONVERGENȚA SIMPLĂ / UNIFORMĂ

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
- se găsește A : $f: A \to \mathbb{R}$ $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

  $f_n \xrightarrow[A]{s} f$
- Fixăm $n \in \mathbb{N}$

  $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in A} g(x)$
- calculăm g' + tabel de semne $\Rightarrow \sup\limits_{x\in A} g(x)$
- Dacă $\sup g(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_n \xrightarrow[A]{u} f$

  $\sup g(x) \notin \mathbb{R} \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[A]{u}} f$

...NȚIABILITATEA / DERIVABILITATEA

- f continuă pe D ; $D = ?$ - se studiază continuitatea
- f diferențiabilă pe ramuri ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = a$; $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = b$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = l$$

$$T(x,y) = ax + by$$

- l se calculează similar ca la continuitate.

PUNCTE DE EXTREM LOCAL ALE FUNCȚIEI

- Se studiază continuitatea funcției și se identifică pct. de discont.
- Se studiază diferențiabilitatea fct. și se identifică pct. în care fct. nu e diferențiabilă
- Se determină punctele critice ale fct. f egalând cu 0 toate deriv. parțiale. Sistemul se rezolvă pe mulțimea pe care f = deriv.

$$(\mathbb{R}^2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Se studiază diferențiabilitatea de ordinul 2 a fct. f și se identifică punctele critice în care f nu e dif. de 2 ori. Se calculează:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

- Se construiește hessiana funcției f în fiecare punct critic în care f = dif de 2 ori și verificăm dacă putem să ne pronunțăm dacă acestea sunt sau nu P.E.L.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(0,0) \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \det Hf$

1) $\Delta_1, \Delta_2 > 0 \Rightarrow x_0$ = minim local
2) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0 \Rightarrow x_0$ = maxim local
3) $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0$ și cel puțin unul dintre ele $= 0 \Rightarrow$ nu ne putem pronunța
4) orice alt caz $\to x_0 \neq$ PEL.

- Se aplică def. de PEL. pt punctele
  - discont
  - nedif
  - unde nu e dif de 2 ori
  - unde nu putem aplica Hf

Ex: $f(x,y) - f(0,0) \geq 0 \Rightarrow$ minim local

INTEGRALA MULTIPLĂ

$\boxed{*}$ când D = precizat

$D = [a,b] \times [c,d]$

$f : D \to \mathbb{R}$

f continuă pe D

D = interval deschis 2-dimensional (grafic)

$\to \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dx \right) dy$

$\boxed{*}$ când D nu e precizat ca intervale ci ca mulțime

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le 1 - y^2,\ y \ge 0\}$

f continuă pe D

D este cuprinsă între 2 curbe

- scot x în fct de y / sau invers
- D este simplă în raport cu Ox / Oy
- $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$, D = închisă $\Rightarrow$ f integrabilă Riemann pe D

$\to$ calcul la fel.

$\boxed{*}$ Schimbarea de variabilă / Coordonate Polare

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2\}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2 \Rightarrow \mathcal{B}((a,b), r)$

$f : A \to \mathbb{R} \quad f(x,y)$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \varphi(R,\theta) = (\overbrace{R\cos\theta}^{x}, \overbrace{R\sin\theta}^{y}) \qquad R \ge 0,\ \theta \in [0;2\pi] / [-\pi;\pi]$

$A : (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2$

$B : \begin{cases} (R\cos\theta - a)^2 + (R\sin\theta - b)^2 \le r^2 \\ R \ge 0 \\ \theta \in [0;2\pi] / [-\pi;\pi] \end{cases} \to$ se scot R și θ în intervale

$I = \iint_{\varphi(B)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(R\cos\theta, R\sin\theta)\,|R|\,dR\,d\theta$

$\varphi(B) \to B$

$(x,y) \to (R\cos\theta, R\sin\theta)$

$dx\,dy \to |\det \varphi'(R,\theta)|\,dR\,d\theta \to |R|\,dR\,d\theta$

$R \in [p,q],\ \theta \in [m,n] \Rightarrow I = \int_m^n \left(\int_p^q f(R\cos\theta, R\sin\theta)\,|R|\,dR \right) d\theta$

INTEGRALA DE I TIP

$\boxed{1}$ $\int_\gamma f(x,y)\,dl$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ $\forall t \in [a,b]$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y)$

f continuă pe $\mathbb{R}^2$

$\gamma: [a;b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\left.\begin{matrix} \text{Calculăm } \begin{cases} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{cases} \forall t \in [a;b] \\ \gamma_1', \gamma_2' \text{ fcții continue pe } [a;b] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma \text{ drum de clasă } C^1$$

$$I = \int_\gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$$

$$\|x, y\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\boxed{2}$ $\int_c f(x,y)\,dl$ $c: x = g(y)$, $y \in [a,b]$ (sau invers)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y)$, continuă pe $\mathbb{R}^2$

$y: [m,n] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Im} \gamma = c$

$c: x = g(y)$, $y \in [a,b] \Rightarrow y = t \in [a;b]$
$x = g(t)$

$\gamma: [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\underset{\gamma_1(t)}{\underset{\shortparallel}{g(t)}}, \underset{\gamma_2(t)}{\underset{\shortparallel}{t}})$

$$\left.\begin{matrix} \text{Calculăm } \gamma_1'(t), \gamma_2'(t) \ \forall t \in [a,b] \\ \gamma_1', \gamma_2' \text{ continue} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma \text{ drum de clasă } C^1$$

$$\int_c f\,dl = \int_\gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt \ \ldots$$

INTEGRALA DE AL II - LEA TIP - curbilinie

$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ $c \subset \mathbb{R}^2$ $y = g(x)$, $x \in [a;b]$

$P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

P, Q continue pe $\mathbb{R}^2$

$\gamma : [a;b] \to \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = (\underset{\gamma_1(t)}{\underset{\parallel}{t}}, \underset{\gamma_2(t)}{\underset{\parallel}{g(t)}})$ drum în $\mathbb{R}^2$

Calculăm $\gamma_1'(t)\, \gamma_2'(t)$ $\forall t \in [a,b]$

$\left.\begin{array}{l} \\ \gamma_1', \gamma_2' \text{ funcții continue pe } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma$ drum de clasă C^1 în $\mathbb{R}^2$

$$\int_c P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\gamma P dx + Q dy = \int_a^b [P(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, \gamma_1'(t) + Q(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, \gamma_2'(t)]\, dt$$