Seminar 1 - 06.10.2021 - 143

1. Fie o mulț. $A = \{x \mid x = \frac{a+1}{2a+1}, a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$.
Să se arate că $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \overset{not.}{=} B$

Rez: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

$A \subseteq B$

Obs. că $A \subseteq \mathbb{R}$ (prin def.). Pt. a arăta că $A \subseteq B$ trebuie să arătăm că $\frac{1}{2} \notin A$. (i.e. $\frac{a+1}{2a+1} \neq \frac{1}{2}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$).
Presupunem că $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ a.î. $\frac{a+1}{2a+1} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow 2a+2 = 2a+1 \Rightarrow 2 = 1$ ab.

Așadar $\frac{a+1}{2a+1} \neq \frac{1}{2}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

$\Rightarrow A \subseteq B$

$B \subseteq A$

Fie $b \in B$. Vrem să arătăm că $\exists a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ a.î. $b = \frac{a+1}{2a+1}$.

$b = \frac{a+1}{2a+1} \Rightarrow 2ab + b = a + 1$

$2ab - a = 1 - b$

$a(2b-1) = 1 - b$

$a = \frac{1-b}{2b-1}, \forall b \in B$.

$a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-b}{2b-1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 2b = 1 - 2b \Leftrightarrow 2 = 1$ ab

$\Rightarrow a \neq -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow B \subseteq A$.

Obs.: Ex. 1 reformulare:
Arătați că funcția $f : \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ este surjectivă (bijectivă).

T: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3a-1}{a-2},\ a \in \mathbb{R}\setminus\{2\}\} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$.

2. $\underbrace{(3\mathbb{N}+2)}_{A} \cap \underbrace{(5\mathbb{N}+1)}_{B} = \underbrace{15\mathbb{N}+11}_{C}$.

Rez:

$C \subseteq A \cap B$ $(C \subseteq A$ și $C \subseteq B)$

Fie $x \in C \Rightarrow x = 15k+11,\ k \in \mathbb{N}$.

$x = 15k+11 = 15k+9+2 = 3(5k+3)+2 \in A \Rightarrow C \subseteq A$

$x = 15k+11 = 5(3k+2)+1 \in B \Rightarrow C \subseteq B$

$\Rightarrow C \subseteq A \cap B$.

$A \cap B \subseteq C$

Fie $x \in A \cap B \Rightarrow x = 3k+2 = 5l+1$ cu $k, l \in \mathbb{N}$ corespunzătoare.

$3k+2 = 5l+1 \quad |+1$

$3k+3 = 5l+2$

$3(k+1) = 5l+2 \Rightarrow 3 \mid 5l+2$, $3 \mid 3l$ $\Rightarrow 3 \mid 2l+2$

$\Rightarrow 3 \mid 2(l+1)$, $3 \nmid 2$, $(3,2)=1$ $\Rightarrow 3 \mid l+1 \Rightarrow l = 3p+2 \quad (=3t-1)$

$x = 5l+1 = 5(3p+2)+1 = 15p+11 \in C$.

SAU $5 \mid 3k+1$. Considerăm cele 5 cazuri posibile:

$k = 5t, 5t+1, 5t+2, 5t+3$ sau $5t+4$.

T: $(3\mathbb{N}+1) \cap (7\mathbb{N}+6) = 21\mathbb{N}+13$.

3. Det. A și B știind că $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,3\}$ și $A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$.

Exemplu: $\{1,3,4\} \not\subseteq \{3,4,5\}$

Obs: $C \not\subseteq D \iff \exists\, x \in C,\ x \notin D \ (x \in C \setminus D)$.

Pt. noi: $A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ sau } 2 \in A \cap B \\ 1 \in A \setminus B \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \in A \cap B$

$A = \{1,2,3,4,5\}$
$B = \{2,4,5\}$

$\{2\} \subseteq A \cap B \subseteq \{2,4,5\}$

!! Sunt 4 soluții distincte.

Submulțimile lui $\{3,4,5\}$ sunt:

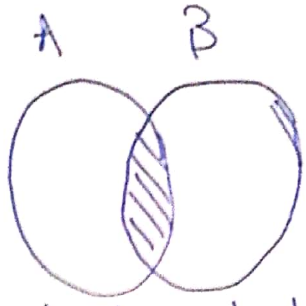
$M = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}\}$

$A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\} \iff A \cap B \notin M$.

$(A \cap B) \cap \{3,4,5\} = \emptyset \quad \not\Leftrightarrow \quad A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$.

Principiul includerii și excluderii

Notație: $\text{card}(A) \overset{\text{not.}}{=} |A|$.



P.I.E.: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

În general:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Dem. se face prin inducție matematică

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| -$$

ip. de ind.

$$- \left|\underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n}_{\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)}\right|$$

4. Câte nr. de forma x^2, x^3 sau x^5 se află în mulțimea $\{1, 2, \ldots, 10^6\}$? $(x \in \mathbb{N})$.

Rez:

x^2: $x^2 \leq 10^6 \Rightarrow x \leq 1000$ – A

x^3: $x^3 \leq 10^6 \Rightarrow x \leq 100$ – B

x^5: $x^5 \leq 10^6 \Rightarrow x \leq \left[\sqrt[5]{10^6}\right] = 15$ – C

$A \cap B: x^6 \leq 10^6 \Rightarrow x \leq 10$

$A \cap C: x^{10} \leq 10^6$

$B \cap C: x^{15} \leq 10^6 \Leftrightarrow x^5 \leq 10^3 \Rightarrow x \leq 3.$

$A \cap B \cap C: x^{30} \leq 10^6 \Leftrightarrow x^5 \leq 10^2 \Rightarrow x \leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq 1$

$|A \cup B \cup C| \overset{P.I.E.}{=} |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 1000 + 100 + 15 - 10 - 3 - 2 + 1 = 1101.$

T: Fie $A = \{1, 2, \ldots, 1000\}$.

a. Câte nr. divizibile cu 3 sunt în A?

b. Câte nr. din A sunt divizibile cu 2 sau 7? Dar cu 2 și 7?

c. Câte nr. din A nu sunt divizibile cu 15?

Hint: $\left[\frac{n}{3}\right] \left(= \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right)$