

Analiza matematică este o simfonie coerentă a infinitului.

David Hilbert

That Cauchy had so much trouble proving the mean value theorem or coming to terms with the notion of uniform convergence should alert us to the fact that these ideas are not easily assimilated. The student needs time with them. The highly refined proofs that we know today leave the mistaken impression that the road of discovery in mathematics is straight and sure. It is not. Experimentation and misunderstanding have been essential components in the growth of mathematics.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina vii.

MISCELLANEA

În acest capitol sunt prezentate diverse concepte matematice care nu sunt parte integrantă a Analizei Matematice, dar care sunt folosite în cadrul acesteia.

ELEMENTE DE LOGICĂ

CALCULUL CU PROPOZIȚII

Propoziția, adevărul și falsul - noțiuni primare Principalii operatori logici

Din punct de vedere logic o teorie științifică este un sistem de propoziții (enunțuri, legi, afirmații) adevărate sau considerate altfel. Logica nu se ocupă cu definirea noțiunii de propoziție și nici a adevărului sau falsului, toate acestea fiind considerate noțiuni primare (nedefinite).

Dacă o propoziție p este adevărată vom scrie $v(p) = 1$, iar dacă este falsă, $v(p) = 0$; simbolurilor 0 și 1 le vom spune valori de adevăr, primul desemnând falsul, iar cel de al doilea adevărul.

Cele mai simple propoziții sunt de forma ” A este B ”. De exemplu: ”Eminescu este autorul poeziei Luceafărul”, ”Balena este mamifer” etc. Pornind de la asemenea propoziții simple, prin conectări diverse, se obțin propoziții compuse. Logica își propune să studieze cum se transmit valorile de adevăr la propozițiile compuse, construite cu ajutorul operatorilor logici.

Principalii operatori logici sunt:

- 1) **negația**, notată cu non sau cu \neg sau cu \neg (în limbaj uzual NU).
- 2) **disjuncția**, notată cu \vee (în limbaj uzual SAU).
- 3) **conjuncția**, notată cu \wedge (în limbaj uzual ȘI).
- 4) **implicația**, notată cu \rightarrow (în limbaj uzual DACĂ..., ATUNCI...).
- 5) **echivalența**, notată cu \leftrightarrow (în limbaj uzual DACĂ ȘI NUMAI DACĂ).

Observație. Dacă p și q desemnează două propoziții, atunci avem:

$v(p)$	$v(q)$	$v(\bar{p})$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

și

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \rightarrow q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Observație

1. $(p \wedge q)$ este $\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$,
2. $(p \rightarrow q)$ este $(\bar{p} \vee q)$,
3. $(p \longleftrightarrow q)$ este $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Observație. Din tabloul de mai sus rezultă următoarele:

1. $v(p \longleftrightarrow q) = 1$ dacă și numai dacă $v(p) = v(q)$.
2. dacă $v(p) = 0$, atunci $v(p \rightarrow q) = 1$, oricare ar fi propoziția q (se spune că falsul implică orice).
3. dacă $v(q) = 1$, atunci $v(p \rightarrow q) = 1$, oricare ar fi propoziția p .
4. pentru a afla valoarea de adevăr a implicației $p \rightarrow q$ este suficient să examinăm doar cazul $v(p) = 1$.

Definiție. O propoziție compusă și adevărată indiferent de ce valori de adevăr au propozițiile care o compun se numește tautologie.

Observație. Dacă propoziția $(p \rightarrow q)$ este adevărată vom nota $p \Rightarrow q$ și vom spune că p este o condiție suficientă pentru q sau că q este o condiție necesară pentru p .

Observație. Dacă propoziția $(p \longleftrightarrow q)$ este adevărată vom nota $p \Leftrightarrow q$ și vom spune că p este o condiție necesară și suficientă pentru q (și invers).

Exerciții.

1. Să se găsească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții compuse:

- i) Dacă temperatura este sub zero grade, atunci apa îngheață.
- ii) Dacă apa fierbe la $100^{\circ} C$, atunci două corpuri încărcate cu electricitate de semne contrare se atrag.

Observație. *Exercițiul anterior ne avertizează că trebuie să facem distincție între implicația logică și succesiunea cauză-efect din lumea fizică.*

2. Să se arate că următoarele propoziții sunt tautologii:

- i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ (comutativitate).
- ii) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ (asociativitate).
- iii) $p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$, $p \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p$ (absorție).
- iv) $p \vee p \Leftrightarrow p$, $p \wedge p \Leftrightarrow p$ (idempotență).
- v) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitate).
- vi) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ (legile lui De Morgan).
- vii) $\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$ (principiul dublei negații).

3. Să se arate că următoarele propoziții sunt tautologii:

- i) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (implicația este tranzitivă).
- ii) $((p \vee q) \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$.
- iii) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \Rightarrow q$ (regula modus-ponens).
- iv) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \rightarrow \overline{p})$.

Observație. *Echivalența de mai sus se va folosi, spre exemplu, în cadrul observației de la pagina 19, în care se prezintă o caracterizare alternativă a noțiunii de funcție injectivă.*

4. Să se arate că $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$ nu este tautologie.

5. Să se afle negația propozițiilor:

- i) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
- ii) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

CALCULUL CU PREDICATE

Constante și variabile Predicate (unare, binare, etc) Cuantificatorul universal și cuantificatorul existențial

Printre semnele (simbolurile) întâlnite în propozițiile matematicii se află constante și variabile. Astfel se întâlnesc constante precum un număr, semnul de adunare, etc, toate având o semnificație precisă, care rămâne neschimbată în decursul desfășurării raționamentelor. Deosebirea capitală dintre constante și variabile constă în aceea că în timp ce primele au o semnificație prin ele însele, ultimele nu au această semnificație. Spre exemplu propoziția "1 + 2i este un număr real" are un conținut clar (este falsă), dar propoziția " x este un număr real" nu are o semnificație precisă, ea capătă o astfel de semnificație numai după înlocuirea variabilei x .

Definiție. *Expresiile de forma $p(x, y, z, \dots)$, care atunci când înlocuim variabilele x, y, z, \dots cu constante, se transformă în propoziții bine determinate, se numesc predicate unare, binare, etc, după cum avem 1, 2, etc, variabile.*

Observație. *Operatorii logici studiați permit introducerea unor noi predicate.*

De exemplu, pentru predicatele $p(x)$ și $q(x)$, putem considera noile predicate $\bar{p}(x), p(x) \vee q(x), p(x) \wedge q(x)$ etc.

În afara operatorilor logici de mai sus, în matematică, mai intervin și alți operatori, anume cuantificatorul universal, notat \forall , și cuantificatorul existențial, notat \exists .

Prin cuantificatorul \forall se trece de la predcatul $p(x)$ la propoziția

$$(\forall x) p(x)$$

care este falsă numai dacă există o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie falsă.

Prin cuantificatorul \exists se trece de la predcatul $p(x)$ la propoziția

$$(\exists x) p(x)$$

care este adevărată numai dacă există (cel puțin) o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată.

Prin urmare avem tautologiile:

$$\overline{(\forall x) p(x)} \Leftrightarrow (\exists x) \bar{p}(x)$$

și

$$\overline{(\exists x) p(x)} \Leftrightarrow (\forall x) \bar{p}(x).$$

Observație. Tautologiile de mai sus arată că prin negare \forall se schimbă în \exists , iar \exists se schimbă în \forall .

Observație. Avem următoarea proprietate de comutativitate a cuantificatorilor de același tip:

$$(\forall x)(\forall y) p(x, y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) p(x, y)$$

și

$$(\exists x)(\exists y) p(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) p(x, y)$$

sunt tautologii.

Observație. Fie $p(x)$ și $q(x)$ două predicate unare. Dacă propoziția

$$(\forall x) (p(x) \rightarrow q(x))$$

este adevărată, vom nota

$$p(x) \Rightarrow q(x).$$

A arăta că propoziția de mai sus este falsă înseamnă a găsi o constantă a astfel ca $p(a)$ să fie adevărată, iar $q(a)$ să fie falsă.

Unui astfel de exemplu i se spune contraexemplu la propoziția dată.

Analog vom spune că $p(x)$ este echivalent cu $q(x)$ și vom scrie

$$p(x) \Leftrightarrow q(x),$$

dacă propoziția

$$(\forall x)(p(x) \longleftrightarrow q(x))$$

este adevărată.

Exerciții.

1. Să se arate că oricare ar fi predicatul binar $p(x, y)$ avem:

$$(\exists x)(\forall y) p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x) p(x, y).$$

Este adevărată implicația reciprocă?

Observație extrem de importantă. *Exercițiul de mai sus arată că ordinea cuantificatorilor logici este extrem de importantă. Acest lucru se poate constata comparând noțiunile de continuitate și continuitate uniformă (vezi paginile 224 și 225), de convergență simplă și convergență uniformă pentru șiruri de funcții (vezi paginile 144, 145 și 146) etc.*

Bibliografie

1. *Gheorghe Enescu, Introducere în logica matematică*, Editura Științifică, București, 1965 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 10566
2. *Grigore Moisil, Elemente de logică și teoria mulțimilor*, Editura Științifică, București, 1968, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 13259
3. *Gheorghe Enescu, Logica simbolică*, Editura Științifică, București, 1971 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 18512

ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

Meritul nemuritor al lui Georg Cantor este acela de a se fi hazardat în domeniul infinitului fără a se teme de lupta, interioară sau externă, nu numai cu paradoxurile imaginare, cu prejudecățile larg răspândite, cu sentințele filozofilor, dar și cu opiniile exprimate de mari matematicieni. În acest mod el a creat un nou domeniu - teoria mulțimilor.

F. Hausdorff

Mulțimea ca noțiune primară
Noțiunea de submulțime a unei mulțimi
Egalitatea a două mulțimi
Intersecția și reuniunea a două mulțimi
Mulțimea vidă
Mulțimi disjuncte
Diferența a două mulțimi
Complementara unei mulțimi în raport cu o altă mulțime
Produsul cartezian a două mulțimi

Funcțiile manifestă din când în când o comportare particulară în anumite puncte din domeniul lor de definiție, care în cazurile cele mai importante este un interval, ele posedă acolo "singularități". H. Hankel se ocupase deja cu astfel de chestiuni și expusese principiul său de "condensare a singularităților". Astfel de puncte singulare scot în relief, în intervalul care formează argumentul funcției, anumite "varietăți" sau totalități care deși constituie numai o parte a punctelor intervalului, cu toate acestea pot conține infinit de multe puncte. Se ridică problema structurii unor astfel de varietăți sau mulțimi (de puncte) infinite.

Pe această cale a ajuns Georg Cantor la a sa teorie a mulțimilor. La extinderea teoremei de unicitate a reprezentărilor seriilor trigonometrice în cazul că pentru un număr infinit de valori seria nu este convergentă, el s-a văzut nevoit încă din 1872 să anticipeze anumite discuții, chiar dacă numai "aluzive", care "pot servi să pună în lumină relații ce apar totdeauna atunci când se dau mărimi numerice în număr finit sau infinit". (Este vorba de concepte ca "punct de acumulare", "punct limită", "derivare" la mulțimi de puncte ș.a.).

Totuși, înainte de a ajunge la teoria mulțimilor a lui Cantor, avem de citat unii precursori ai săi. Cele mai vechi considerații care se referă la un "paradox

al infinitului" provin chiar din perioada finală a antichității; ele se găsesc în comentariul lui Proclus asupra lui Euclid, însă nu descoperite, ci numai relatate de el, din nefericire fără să numească un nume. (Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Științifică, București, 1968, paginile 247-248).

Mulțimea ca noțiune primară

Conceptul de mulțime este unul de bază în matematică. Toate obiectele matematice se reduc, în ultimă instanță, la acest concept. Vom considera că această noțiune este deja asimilată din anii de liceu. Nu vom încerca să definim noțiunea de mulțime sau să prezentăm axiomele teoriei mulțimilor. Studentul interesat poate vedea modul în care materialul pe care-l vom prezenta poate fi axiomatizat, consultând următoarele lucrări: *Paul Halmos, Naive Set Theory*, Springer-Verlag, 1974; *Paul Bernays (Abraham Fraenkel), Axiomatic set theory*, North-Holland Publishing Company, 1958. Prin urmare vom prezenta aici numai câteva elemente de teoria naivă a mulțimilor, teorie ale cărei baze au fost puse de către matematicianul german Georg Cantor. În timp au fost puse în evidență o serie de slăbiciuni ale teoriei mulțimilor, așa cum a fost ea dezvoltată de către Cantor. Pentru a remedia această situație, o nouă teorie a mulțimilor a fost elaborată de către Ernst Zermelo și Adolf Fraenkel și dezvoltată de către Kurt Gödel și Paul Cohen (pentru detalii, se poate consulta lucrarea **Kurt Gödel (1906-1975)**, de *Ralf Schindler*, *Gazeta Matematică*, seria A, nr.1, 2008, paginile 72-76).

Notă istorică. *Georg Cantor* (1845-1918) s-a născut la Sank Petersburg. A studiat la Universitatea din Berlin, cu Weierstrass, Kummer și Kronecker, unde devine prietenul lui Schwarz. Aici preocupările lui privesc teoria numerelor. În 1869 primește un post la Universitatea din Halle. Sub influența lui Heine, cercetările lui Cantor se vor îndrepta către analiza matematică. În 1870 el va demonstra unicitatea reprezentării unei funcții cu ajutorul unei serii trigonometrice (problemă care, în prealabil, a fost studiată, fără succes, de mulți matematicieni celebri, printre care Heine, Dirichlet, Lipschitz și Riemann). În 1872 este promovat ca profesor extraordinar la Universitatea din Halle. În același an, în decursul unei excursii în Elveția, îl va întâlni pe Dedekind, cu care va avea o prietenie solidă. Tot în 1872, Cantor publică un articol privind seriile trigonometrice, în care definește numerele reale în termeni de șiruri convergente de numere raționale. În 1873 Cantor a arătat

că mulțimea numerelor raționale (precum și mulțimea numerelor algebrice) este numărabilă. În 1874 publică un articol în care arată că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă. Mai mult, într-o scrisoare din anul 1877 către Dedekind, arată că între punctele intervalului $[0, 1]$ și punctele din \mathbb{R} există o corespondență bijectivă. Cantor a fost surprins de această descoperire, fapt care l-a făcut să exclame: "Deși am demonstrat acest lucru, nu-l pot crede". În 1878 publică un articol în care apare în mod riguros noțiunea de corespondență bijectivă. Între 1879 și 1884 publică o serie de șase articole în *Mathematische Annalen*, în care se prezintă o introducere în teoria mulțimilor. Ideile sale prezentate aici au fost întâmpinate cu ostilitate de către mulți matematicieni. În 1879, la sugestia lui Heine, este promovât la gradul de profesor. În 1896 el îi scrie lui Hilbert, prezentându-i paradoxurile pe care le-a descoperit în cadrul teoriei mulțimilor. Moare în 1918 într-un azil de boli mentale.

Cantor rămâne în istoria matematicii ca fondatorul teoriei moderne a mulțimilor și ca cel care a introdus conceptul de număr infinit (prin introducerea numerelor cardinale). Până la el infinitul era, în matematică, un subiect tabu. Conform lui Gauss infinitul putea fi utilizat numai ca "un fel de a spune" care nu are valoare matematică. Ideile lui Cantor au determinat reevaluarea fundamentelor tuturor ramurilor matematicii și au dat matematicii forma modernă de astăzi.

Noțiunea de submulțime a unei mulțimi

$x \in A$ înseamnă că x este un element al lui A ; se mai spune că x aparține lui A sau că mulțimea A conține elementul x .

$x \notin A$ înseamnă că x nu aparține lui A .

Definiție. Fie A și B două mulțimi. Spunem că A este o submulțime a lui B dacă orice element al lui A este și element al lui B .

În acest caz scriem $A \subseteq B$.

Dacă $A \subseteq B$, dar există un element al lui B care nu este element al lui A , spunem că A este o submulțime proprie a lui B și scriem $A \subset B$.

Egalitatea a două mulțimi

Definiție. Două mulțimi A și B se numesc egale dacă conțin aceleași elemente.

În acest caz scriem $A = B$.

Observație. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Intersecția și reuniunea a două mulțimi; Mulțimea vidă; Mulțimi disjuncte

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci intersecția lor, notată $A \cap B$, este mulțimea tuturor elementelor care aparțin ambelor mulțimi.

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci reuniunea lor, notată $A \cup B$, este mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre cele două mulțimi.

Observație

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

Observație. Am presupus, în mod tacit, că intersecția și reuniunea a două mulțimi este tot o mulțime. Aceasta implică, printre altele, existența unei mulțimi care nu are nici un element (deoarece, dacă A și B nu au elemente comune, atunci intersecția lor nu are nici un element).

Definiție. Mulțimea care nu are nici un element se numește mulțimea vidă și se va nota cu \emptyset .

Definiție. Două mulțimi A și B care nu au elemente comune (i.e. $A \cap B = \emptyset$) se numesc disjuncte.

Propoziție. Fie mulțimile A , B și C .

Atunci avem:

i) proprietatea de idempotență:

$$A \cap A = A \cup A = A;$$

ii) proprietatea de comutativitate:

$$A \cap B = B \cap A$$

și

$$A \cup B = B \cup A;$$

iii) *proprietatea de asociativitate:*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

și

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

iv) *proprietatea de distributivitate:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

și

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Observație. Fiind dată o familie de mulțimi A_j , cu $j \in J$, putem considera

$$\bigcup_{j \in J} A_j$$

mulțimea tuturor elementelor care aparțin cel puțin unei mulțimi A_j și

$$\bigcap_{j \in J} A_j$$

mulțimea tuturor elementelor care aparțin tuturor mulțimilor A_j .

Diferența a două mulțimi; Complementara unei mulțimi în raport cu o altă mulțime; Legile lui De Morgan

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci complementara lui B în raport cu A este mulțimea tuturor elementelor lui A care nu aparțin lui B și se va nota cu $A - B$.

Observație

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$

Observație. Uneori mulțimea A este subînțeleasă, nefiind necesar să fie menționată explicit. În acest caz $A - B$ se va numi complementara lui B .

Propoziție. Pentru două mulțimi A și B avem:

$$(A \cap B) \cap (A - B) = \emptyset$$

și

$$A = (A \cap B) \cup (A - B).$$

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei de continuitate globală (vezi pagina 208).

Propoziție (Legile lui De Morgan). Pentru trei mulțimi A , B și C avem:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

și

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C).$$

Notă istorică. *Augustus De Morgan* s-a născut în 1806, în India (colonie britanică în acel timp). A studiat la Trinity College Cambridge. În 1827 primește un post la University College London. În 1833 a definit și a introdus riguros metoda inducției matematice. A fost primul președinte al London Mathematical Society (înființată în 1866). A murit în 1871.

Produsul cartezian a două mulțimi

Definiție. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci produsul cartezian, notat $A \times B$, al lui A cu B , este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) , cu $a \in A$ și $b \in B$, unde $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Notă istorică. *René Descartes* (1596-1650) creator al geometriei analitice, ofițer al armatei franceze, matematician, a fost unul dintre cei mai de seamă filozofi ai tuturor timpurilor. S-a născut în Franța. A urmat colegiul din Anjou între 1604 și 1612, studiind aici limbile clasice, logica, filozofia și matematica (după cărțile lui Clavius). A studiat la Universitatea din Poitiers, de unde primește, în 1616, o diplomă în drept, pentru ca ulterior să se înscrie la școala militară din Breda. În 1618 începe studiul matematicii și mecanicii sub îndrumarea olandezului Isaac Beeckman. În 1619 se înrolează în armata bavareză, iar în 1628 se stabilește, după multe călătorii prin Europa, în Olanda. În 1637 publică tratatul ”*Discours de la méthode pour bien conduire*

sa raison et chercher la vérité dans les sciences". El susține aici că numai matematicile reprezintă ceva sigur, deci totul trebuie să aibă la bază matematicile. În 1649 regina Suediei îl convinge pe Descartes să viziteze țara sa. Aici își va găsi Descartes sfârșitul, răpus de pneumonie.

Observație.

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ și } b = b'.$$

Observație. În mod natural, considerentele de mai sus pot fi extinse pentru a defini produsul cartezian al oricărui număr finit de mulțimi.

Bibliografie

1. Grigore Moisil, **Elemente de logică și teoria mulțimilor**, Editura Științifică, București, 1968, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 13259
2. Constantin Năstăsescu, **Introducere în teoria mulțimilor**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1974, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 22130
3. A. A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, A. Levy, **Foundations of Set Theory**, Elsevier Science Publishers B.V., 1984, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 36779

FUNCȚIE, GRUP, INEL, CORP, SPAȚIU VECTORIAL, RELAȚII

Noțiunea de funcție
Compunerea a două funcții
Funcții injective, surjective, bijective
Inversa unei funcții
Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție
Noțiunile de grup, inel și corp
Noțiunea de spațiu vectorial
Relație de echivalență
Mulțimea cât (sau factor) generată de o relație de echivalență
Surjecția canonică generată de o relație de echivalență
Relație de ordine
Mulțime ordonată, Mulțime total ordonată
Majorant, Minorant
Mulțime majorată, minorată, mărginită
Marginea superioară și inferioară a unei mulțimi
Maximul și minimul unei mulțimi
Mulțime complet ordonată
Mulțime bine ordonată

Pe lângă conceptul de limită și conceptul de continuitate, care se definește cu ajutorul celui de limită, concepte pe care îndeosebi A. L. Cauchy le pune la baza analizei expusă sistematic, conceptul de funcție, ale cărui începuturi datează poate de la Leibniz, se dovedește a fi un concept fundamental, dar și problematic. În secolul al XVIII-lea se impusese conceptul de "funcție complet arbitrară" cu prilejul problemei coardei vibrante. La Leonhard Euler funcțiile sunt date în două moduri: mai întâi, printr-o "expresie analitică" și în al doilea rând, printr-o curbă trasată "cu mâna liberă". Surprinzătoarea capacitate a seriilor trigonometrice, întrebuințate poate pentru prima oară de către Daniel Bernoulli și cercetate amănunțit de către J. B. J. Fourier, de a reprezenta și funcții aparent cu totul neregulate, a condus în sfârșit la lucrările lui P. G. Lejeune Dirichlet asupra limitei posibilităților de reprezentare și, în legătură cu aceasta, la un concept extrem de general, care tocmai din această cauză nu este lipsit de dificultăți. (Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Științifică, București, 1968, paginile 247-248).

Noțiunea de funcție

Pentru matematicienii de acum un secol și jumătate, cuvântul funcție însemna, în mod obișnuit, o formulă, ca de exemplu

$$f(x) = x^2 + 3x - 5,$$

care asocia oricărui număr real un alt număr real.

Faptul că anumite formule, ca de exemplu

$$f(x) = \sqrt{x - 5},$$

nu asociau numere reale oricărui număr real, era binecunoscut, dar nu era considerat ca un motiv destul de solid pentru a extinde noțiunea de funcție.

Întrebarea dacă asocierea

$$h(x) = |x|$$

este o "funcție", a născut controverse la acel timp, deoarece, în definitiv, definiția lui $|x|$ este dată "pe bucăți", anume

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Pe măsură ce matematica s-a dezvoltat, a devenit din ce în ce mai clar că cerința ca o funcție să fie dată printr-o formulă este foarte restrictivă și că o definiție mai generală este necesară.

Iată o definiție "provizorie" a funcției: O funcție f de la o mulțime A la o mulțime B este o lege de corespondență care asociază ORICĂRUI element x din A un UNIC element $f(x)$ din B .

Să observăm că această definiție are un punct slab, anume ambiguitatea expresiei "lege de corespondență".

Am dori să eliminăm acest inconvenient prin definirea funcției numai în termeni de teoria mulțimilor. Această abordare are dezavantajul de a fi oarecum artificială, dar câștigul în ceea ce privește rigoarea este mult mai important comparativ cu orice altfel de dezavantaje.

Definiție. Fie A și B două mulțimi. O funcție de la A la B este tripletul format cu aceste două mulțimi și o submulțime f a lui $A \times B$ cu proprietățile următoare:

- i) pentru orice $a \in A$ există $b \in B$ astfel ca $(a, b) \in f$.
 ii) dacă pentru $a \in A$ și $b, b' \in B$ avem $(a, b) \in f$ și $(a, b') \in f$, atunci $b = b'$.

Observație. A se numește domeniul lui f , iar B se numește codomeniul lui f .

Observație. Tripletul (A, B, f) se mai notează $f : A \rightarrow B$.

Observație. Faptul că $(a, b) \in f$ se mai notează $f(a) = b$. Se mai spune că b este valoarea lui f în a sau că b este imaginea lui a prin f .

Compunerea a două funcții

Definiție. Fie f o funcție cu domeniul A și codomeniul B , iar g o funcție cu domeniul B' și codomeniul C , unde $B \subseteq B'$. Definim o nouă funcție, notată $g \circ f$, care are domeniul A și codomeniul C , dată de

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{există } b \in B \text{ astfel ca} \\ (a, b) \in f \text{ și } (b, c) \in g\}.$$

Observație. Avem deci

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

și

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

pentru orice $x \in A$.

Funcții injective, surjective, bijective

Așa cum vom constata în cadrul acestui curs, anumite clase de funcții, anume cele injective, surjective și bijective, sunt extrem de utilizate (vezi, spre exemplu, definiția mulțimii finite și a mulțimii numărabile -pagina 34, Propoziția de la pagina 215, Teorema de continuitate a inversei -pagina 216, Teorema de injectivitate locală -pagina 322, Teorema de inversiune locală (forma slabă) -pagina 323, Teorema de surjectivitate locală -pagina 327, Teorema aplicației deschise -pagina 329, Teorema de inversiune locală -pagina 329).

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește bijectivă dacă:

- i) f este injectivă, i.e. pentru orice $a, a' \in A$ și $b \in B$ astfel ca $(a, b) \in f$ și $(a', b) \in f$ avem $a = a'$,
și
- ii) f este surjectivă, i.e. pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca $(a, b) \in f$.

Observație. Utilizând exercițiul 3 iv) de la pagina 5, se poate constata că f este injectivă dacă și numai dacă pentru orice $a, a' \in A$, $f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ dacă și numai dacă pentru orice $a, a' \in A$, $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$.

Observație. f este surjectivă dacă și numai dacă pentru orice $b \in B$ există $a \in A$ astfel ca

$$f(a) = b.$$

Observație. f este bijectivă dacă și numai dacă pentru orice $b \in B$ există un unic $a \in A$ astfel ca

$$f(a) = b.$$

Exerciții.

1. Fie $f : A \rightarrow B$. Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$, pentru orice $X, Y \subseteq A$, dacă și numai dacă $f(A - X) \subseteq B - f(A)$, orice $X \subseteq A$.

2. Fie $f : A \rightarrow B$. Să se arate că f este surjectivă dacă și numai dacă $f(A - X) \supseteq B - f(A)$, orice $X \subseteq A$.

3. Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$. Să se arate că:

- i) dacă f și g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă;
- ii) dacă f și g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă;
- iii) dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă;
- iv) dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

4. Să se arate că pentru orice mulțime nevidă X nu există nicio funcție surjectivă $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$.

Inversa unei funcții

Noțiunea de inversă a unei funcții va interveni în diverse teoreme din cadrul acestui curs (a se vedea Teorema de inversiune locală (forma slabă) -pagina 323 și Teorema de inversiune locală -pagina 329).

Definiție. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție bijectivă. Atunci inversa lui f , notată cu f^{-1} , este funcția cu domeniul B , codomeniul A și

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f\}.$$

Observație. Avem $f^{-1} : B \rightarrow A$ și

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Imaginea și preimagea unei mulțimi printr-o funcție

Noțiunile de imagine și de preimage a unei mulțimi printr-o funcție sunt des utilizate în cadrul teoriei funcțiilor continue (vezi paginile 208, 210 și 212).

Definiție. Fie $f : A \rightarrow B$ și $E \subseteq A$. Atunci imaginea lui E prin funcția f este submulțimea lui B dată de

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}.$$

Propoziție. Fie $f : A \rightarrow B$ și $E, F \subseteq A$. Atunci avem:

1)

$$E \subseteq F \Rightarrow f(E) \subseteq f(F);$$

2)

$$f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F);$$

3)

$$f(E \cup F) = f(E) \cup f(F);$$

4)

$$f(E - F) \subseteq f(E).$$

Observație. În 2), incluziunea este, în general, strictă.

Definiție. Fie $f : A \rightarrow B$ și $H \subseteq B$. Atunci imaginea inversă (sau preimagea) lui H , prin funcția f , este submulțimea lui A dată de

$$f^{-1}(H) = \{x \mid x \in A \text{ și } f(x) \in H\}.$$

Observație. Nu am cerut în definiția de mai sus ca f să fie bijectivă. Totuși, dacă f este bijecție, atunci $f^{-1}(H)$ din definiția de mai sus, este imaginea lui H prin inversa lui f , anume prin f^{-1} .

Propoziție. Fie $f : A \rightarrow B$ și $G, H \subseteq B$. Atunci avem:

1)

$$G \subseteq H \Rightarrow f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H);$$

2)

$$f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H);$$

3)

$$f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H);$$

4)

$$f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H).$$

Noțiunile de grup, inel și corp

Noțiunile de grup, inel și corp își vor găsi exemplificarea în capitolul următor în care se studiază mulțimile numerelor naturale, întregi, raționale și reale.

Definiție. Un cuplu $(G, *)$ format cu o mulțime nevidă G și cu o lege de compoziție $*$ pe G (i.e. $x * y \in G$, pentru orice $x, y \in G$), se numește grup dacă sunt verificate următoarele axiome:

i)

$$x * (y * z) = (x * y) * z,$$

pentru orice $x, y, z \in G$;

ii) există $e \in G$ astfel încât

$$e * x = x * e = x,$$

pentru orice $x \in G$;

iii) pentru orice $x \in G$ există $x' \in G$ astfel încât

$$x' * x = x * x' = e.$$

Dacă în plus este verificată și axioma

iv)

$$x * y = y * x,$$

pentru orice $x, y \in G$,

atunci grupul se numește comutativ (sau abelian).

Observație. Elementul e este unic determinat și se numește elementul neutru al grupului G . Elementul x' este unic determinat și poartă numele de simetricul (sau inversul, sau opusul) elementului x .

Definiție. O mulțime nevidă A , împreună cu două legi de compoziție $+$ și \cdot (i.e. $x + y \in A$ și $x \cdot y \in A$, pentru orice $x, y \in A$) se numește inel dacă sunt verificate următoarele axiome:

i) $(A, +)$ este grup abelian;

ii) (A, \cdot) este monoid, i.e.

iii)

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$

pentru orice $x, y, z \in A$;

iib) există $1 \in A$ astfel încât

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x,$$

pentru orice $x \in A$.

iii)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

și

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x,$$

pentru orice $x, y, z \in A$, i.e. înmulțirea este distributivă față de adunare la stânga și la dreapta.

Observație

1. Elementul neutru al grupului $(A, +)$, notat cu 0, se numește elementul zero al inelului, iar 1 (care este unic determinat) poartă numele de elementul unitate al inelului.

2. Dacă este satisfăcută și axioma:

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

pentru orice $x, y \in A$, atunci spunem că inelul A este comutativ.

3. Spunem că A este un inel fără divizori ai lui zero dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \text{ implică } x \cdot y \neq 0.$$

Un inel comutativ cu cel puțin două elemente și care nu are divizori ai lui zero se numește domeniu de integritate.

Definiție. Un inel K se numește corp dacă $0 \neq 1$ și dacă este satisfăcută următoarea axiomă:

pentru orice $x \in K - \{0\}$ există $x^{-1} \in K$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$, i.e. orice element al lui K care este diferit de 0 este simetrizabil în raport cu înmulțirea.

Un corp se numește comutativ dacă înmulțirea sa este comutativă.

Noțiunea de spațiu vectorial

Noțiunea de spațiu vectorial își va găsi exemplificarea în capitolul următor în care se studiază mulțimea \mathbb{R}^n .

Definiție. Fie K un corp. Se numește spațiu vectorial (peste corpul K) un grup abelian $(V, +)$ pe care este dată o lege de compoziție externă cu domeniul $K \times V$ și codomeniul V $((\alpha, u) \rightarrow \alpha u)$ care satisface, pentru orice $\alpha, \beta \in K$ și orice $u, v \in V$ următoarele condiții:

1)

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u;$$

2)

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v;$$

3)

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u;$$

4)

$$1u = u.$$

Terminologie. Elementele lui V se numesc vectori, iar elementele lui K se numesc scalari. $+$ poartă numele de adunarea vectorilor, iar legea de compoziție externă se numește înmulțirea vectorilor cu scalari. Elementul neutru al grupului $(V, +)$ se numește vectorul zero și se va nota cu 0 , ca și scalarul zero. Dacă $K = \mathbb{R}$, atunci se spune că V este spațiu vectorial real.

Observație. Uneori spațiile vectoriale sunt numite și spații liniare.

Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste corpul K .

Un sistem $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de vectori se numește bază a lui V dacă:

1) pentru orice $x \in V$, există $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ astfel încât

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n;$$

2) pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ funcționează implicația:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Relații

Toate noțiunile de mai jos își vor găsi exemplificarea în capitolul consacrat mulțimilor \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} .

Definiție. Se numește relație pe o mulțime nevidă X , orice submulțime nevidă ρ a lui $X \times X$.

Dacă $(x, y) \in \rho$, vom scrie $x\rho y$.

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește:

- reflexivă dacă $x\rho x$, pentru orice $x \in X$;
- simetrică dacă $x\rho y \Rightarrow y\rho x$, pentru orice $x, y \in X$;
- antisimetrică dacă $x\rho y$ și $y\rho x \Rightarrow x = y$, pentru orice $x, y \in X$;
- tranzitivă dacă $x\rho y$ și $y\rho z \Rightarrow x\rho z$, pentru orice $x, y, z \in X$.

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Observație. De multe ori relația de echivalență ρ se notează prin \sim . Astfel xpy se scrie sub forma $x \sim y$.

Definiție. Fie \sim o relație de echivalență pe X și $x \in X$. Mulțimea $\hat{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}$ se numește clasa de echivalență a lui x .

Observație.. Fie \sim o relație de echivalență pe X și $x, y \in X$. Atunci $\hat{x} = \hat{y}$ sau $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Definiție. Fie \sim o relație de echivalență pe X . Mulțimea $\{x \mid x \in X\}$, notată X/\sim , se numește mulțimea cât (sau factor) a lui X generată de \sim .

Definiție. Fie \sim o relație de echivalență pe X . Funcția $p : X \rightarrow X/\sim$, dată de $p(x) = \hat{x}$, pentru orice $x \in X$, se numește surjecția canonică generată de \sim .

Definiție. O relație ρ pe o mulțime nevidă X se numește relație de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

Observație. De multe ori relația de ordine ρ se notează prin \leq . Astfel xpy se scrie sub forma $x \leq y$.

Definiție. Un cuplu (X, \leq) unde X este o mulțime nevidă, iar \leq este o relație de ordine pe X se numește mulțime ordonată.

Definiție. Mulțimea ordonată (X, \leq) se numește total ordonată dacă pentru orice $x, y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$ (i.e. orice două elemente sunt comparabile).

Definiție. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă a lui X și $m \in X$. Atunci m se numește majorant (minorant) al lui A dacă pentru orice $a \in A$, avem $a \leq m$ (respectiv $a \geq m$).

Observație. Dacă m este majorant al lui A și $m \in A$, atunci m este unic și se numește maximul lui A (și se notează cu $\max(A)$) sau ultim element al lui A sau cel mai mare element al lui A . Dacă m este minorant al lui A și $m \in A$, atunci m este unic și se numește minimul lui A (și se notează cu $\min(A)$) sau prim element al lui A sau cel mai mic element al lui A .

Definiție. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă a lui X . Dacă există un majorant $m \in X$ al lui A , atunci spunem că A este majorată (mărginită superior). Dacă există un minorant $m \in X$ al lui A , atunci spunem că A este minorată (mărginită inferior). Dacă A este mărginită inferior și superior, atunci A se numește mărginită.

Definiție. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată și A o submulțime nevidă majorată a lui X . Se spune că A are margine superioară dacă există cel mai mic majorant (i.e. mulțimea majoranților lui A are minim, sau, altfel spus, mulțimea majoranților lui A are un cel mai mic element, adică, echivalent, mulțimea majoranților lui A are un prim element). În acest caz notăm cu $\sup A$ cel mai mic majorant al lui A . $\sup A$ se numește marginea superioară a lui A sau supremum de A .

Fie (X, \leq) o mulțime ordonată și A o submulțime nevidă minorată a lui X .

Se spune că A are margine inferioară dacă există cel mai mare minorant (i.e. mulțimea minoranților lui A are maxim, sau, altfel spus mulțimea minoranților lui A are un cel mai mare element, sau, echivalent, mulțimea minoranților lui A are un ultim element). În acest caz notăm cu $\inf A$ cel mai mare minorant al lui A . $\inf A$ se numește marginea inferioară a lui A , sau infimum de A .

Observație. Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă majorată a lui X . Dacă există $\max A$, atunci există și $\sup A$ și $\sup A = \max A$.

Fie (X, \leq) o mulțime ordonată, A o submulțime nevidă minorată a lui X . Dacă există $\min A$, atunci există și $\inf A$ și $\inf A = \min A$.

Definiție. O relație de ordine \leq pe mulțimea nevidă X se numește completă dacă pentru orice submulțime nevidă majorată A a lui X există $\sup A$. Se spune în acest caz că mulțimea ordonată (X, \leq) este complet ordonată.

Definiție. O mulțime ordonată se numește bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a sa are prim element (sau spus altfel, minim, sau, încă, cel mai mic element).

Exerciții

1. Fie A o mulțime și $(A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A (i.e. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ și $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru orice $i \neq j$). Să se arate că $x \sim y$ dacă și numai dacă există $i \in I$ astfel încât $x, y \in A_i$ definește o relație de echivalență pe A , pentru care clasele de echivalență coincid cu elementele partiției considerate.

2. Fie X o mulțime nevidă. Pe $\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ se consideră relația dată de $A \rho B$ dacă și numai dacă $A \subseteq B$. Să se arate că ρ este o relație de ordine care nu este totală dacă X are cel puțin două elemente.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară, Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

2. *Ion D. Ion, A. Ghioca, N. Nediță, Matematică, Algebră, Manual pentru clasa a XII-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 27854

3. *Marius Rădulescu, Sorin Rădulescu, Teoreme și probleme de analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 27184

STRUCTURI FUNDAMENTALE ALE ANALIZEI MATEMATICE

"... între numere există o astfel de perfecțiune și armonie încât trebuie să
medităm zile și nopți la admirabila lor încheiere."

Simon Stevin

Așa cum nu poți face agronomie fără a cunoaște proprietățile solului, nu poți
studia diferite clase de funcții fără a aprofunda în prealabil structura mulțimilor
pe care aceste funcții urmează să fie definite.

Solomon Marcus

Șocul matematicii, Editura Albatros, București, 1987, pagina 221

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE \mathbb{N} MULȚIMI FINITE ȘI INFINITE

Axiomele lui Peano
Adunarea, înmulțirea și relația de ordine pe \mathbb{N}
 \mathbb{N} este bine ordonată
Mulțimi finite și infinite
Mulțimi numărabile și nenumărabile
Mulțimi cel mult numărabile

"Dumnezeu a creat numerele naturale, restul este opera omului"
Leonard Kronecker

Create de intelectul uman pentru a număra obiectele din diferite colecții, numerele nu se referă la caracteristicile individuale ale obiectelor numărate. Astfel, numărul 6 este o abstracție a tuturor colecțiilor reale formate din 6 obiecte; el nu depinde de nici o proprietate specifică a acestor obiecte sau de simbolurile folosite. Caracterul abstract al ideii de număr devine clar numai la un stadiu relativ avansat al dezvoltării intelectuale. Pentru copii, numerele rămân totdeauna legate de obiecte palpabile, ca de pildă degete sau pietricele; în limbile diferitelor triburi, numerele au încă un sens numeric concret, folosindu-se cuvinte diferite pentru numărarea obiectelor de diferite tipuri.

Ce este matematica?, de R. Courant și H. Robbins, Editura Științifică, București, 1969, pagina 17

Pornind de la proprietățile elementare ale numerelor naturale care ne sunt cunoscute din experiența cotidiană, vom prezenta o axiomatizare a acestora care sintetizează o experiență milenară.

Axiomele lui Peano

Se consideră ca noțiuni primare mulțimea \mathbb{N} și o lege care asociază oricărui element $n \in \mathbb{N}$ un alt element $n' \in \mathbb{N}$ numit succesorul lui n .

Iată axiomele lui Peano:

AP1. Orice $n \in \mathbb{N}$ are un unic succesor (deci $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dată de $s(n) = n'$ este funcție).

AP2. Există un element din \mathbb{N} , desemnat prin 1, care are proprietatea că $n' \neq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (deci $1 \notin s(\mathbb{N})$).

AP3. Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, avem $m' \neq n'$ (deci s este injectivă).

AP4. Dacă $S \subseteq \mathbb{N}$, $1 \in S$ și $(n \in S \Rightarrow n' \in S)$, atunci $S = \mathbb{N}$.

Din motive evidente, ultima axiomă poartă numele de axioma inducției matematice.

Consecințe imediate

1. Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ și $m' = n'$, atunci $m = n$.

2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \neq n'$.

3. Pentru orice $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $p' = n$ (i.e. orice număr natural diferit de 1 are un predecesor).

Observație. Dacă P este o proprietate a unui element oarecare a lui \mathbb{N} , care este adevărată pentru 1 și care presupusă adevărată pentru $n \in \mathbb{N}$ este adevărată și pentru n' , atunci P este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel putem vorbi despre demonstrație și definiție prin inducție matematică.

Adunarea pe \mathbb{N}

Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m + n$ definit prin inducție matematică după n astfel:

$$m + 1 = m'$$

și

$$m + n' = (m + n)'.$$

Proprietăți

1.

$$m + (n + p) = (m + n) + p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, i.e. adunarea pe \mathbb{N} este asociativă.

2.

$$m + n = n + m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, i.e. adunarea pe \mathbb{N} este comutativă.

3.

$$m + p = n + p \Rightarrow m = n,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

4.

$$n + p \neq n,$$

pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$.

Înmulțirea pe \mathbb{N}

Fiecărui cuplu (m, n) de numere naturale i se asociază numărul natural desemnat prin $m \cdot n$ definit prin inducție matematică după n astfel:

$$m \cdot 1 = m$$

și

$$m \cdot n' = mn + m.$$

Proprietăți

1.

$$m \cdot n = n \cdot m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, i.e. înmulțirea pe \mathbb{N} este comutativă.

2.

$$m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, i.e. înmulțirea pe \mathbb{N} este distributivă față de adunarea pe \mathbb{N} .

3.

$$m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$, i.e. înmulțirea pe \mathbb{N} este asociativă.

4.

$$m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

Relația de ordine pe \mathbb{N}

Teoremă. Dacă $m, n \in \mathbb{N}$ avem una și numai una dintre următoarele situații:

- a) $m = n$
- b) există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = n + p$
- c) există $q \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = m + q$.

Definiție. Spunem că $m \in \mathbb{N}$ este mai mic decât $n \in \mathbb{N}$, fapt care va fi notat prin

$$m < n,$$

dacă există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n = m + p.$$

Observație. Pe \mathbb{N} putem introduce relația \leq dată de echivalența

$$n \leq m \Leftrightarrow n < m \text{ sau } n = m.$$

Conform teoremei de mai sus, \mathbb{N} , cu această relație, devine o mulțime total ordonată.

Proprietăți.

1.

$$m < n \Rightarrow m + p < n + p$$

și

$$m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p,$$

pentru orice $m, n, p \in \mathbb{N}$.

2.

$$m < n \Rightarrow m + 1 \leq n,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$.

3.

$$1 \leq n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, i.e. 1 este prim element al lui \mathbb{N} .

Rezultatul de mai jos, care arată că mulțimea \mathbb{N} este bine ordonată, se va dovedi util în demonstrația Teoremei de existență a părții întregi (vezi pagina 64).

Teoremă. Pentru orice submulțime nevidă S a lui \mathbb{N} , există $a \in S$ astfel încât $a \leq x$, pentru orice $x \in S$ (i.e. orice submulțime nevidă a lui \mathbb{N} are un prim element, ceea ce înseamnă că \mathbb{N} este bine ordonată).

Demonstrație. Dacă $1 \in S$, atunci demonstrația este încheiată.
Dacă $1 \notin S$, fie

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < x \text{ pentru orice } x \in S\}.$$

Evident $1 \in B$.

Există $p \in B$ astfel încât $p + 1 \notin B$ căci altfel, conform cu AP 4, $B = \mathbb{N}$, de unde, alegând $x \in S$ (S este nevidă), rezultă contradicția $x < x$.

Cum $p + 1 \notin B$, există $a \in S$ astfel încât

$$a \leq p + 1. \tag{1}$$

Deoarece $p \in B$, deducem că $p < x$, pentru orice $x \in S$, deci

$$p + 1 \leq x, \tag{*}$$

pentru orice $x \in S$.

În particular, avem

$$p + 1 \leq a. \tag{2}$$

Din (1) și (2), deducem că $a = p + 1$, deci, conform cu (*),

$$a \leq x,$$

pentru orice $x \in S$.

Cum $a \in S$, demonstrația este încheiată.

Remarcă. Alegerea propozițiilor investite cu statul de axiomă nu este unică. Spre exemplu se poate alege un sistem de axiome în care axioma inducției să fie propoziție, dar în care Teorema de mai sus să fie axiomă. Faptul capital care trebuie reținut este că nu putem evita existența unor propoziții cu statul de axiomă.

Remarcă. $1'$ se notează cu 2, $2'$ se notează cu 3, etc.

Notă istorică. Giuseppe Peano (1858-1932) a studiat la Universitatea din Torino, universitate la care va predă începând cu 1880. A fost de asemenea profesor al Academiei Militare din Torino. A publicat (în latină) în 1889 celebrele axiome care-i poartă numele. În 1890 a prezentat celebrul exemplu de curbă care umple un pătrat (adică a prezentat un exemplu de funcție continuă și surjectivă din $[0, 1]$ în pătratul unitate - a se vedea exercițiul 7 de la pagina 483). În 1891 fondează "Revista di matematica".

Mulțimi finite și infinite

Definiție. Un segment inițial al lui \mathbb{N} , determinat de $k \in \mathbb{N}$, este o submulțime a lui \mathbb{N} de forma $\{1, 2, \dots, k\}$.

Definiție. O mulțime A se numește finită dacă este vidă sau dacă există o bijecție între ea și un segment inițial al lui \mathbb{N} .

În caz contrar mulțimea se numește infinită.

Mulțimi numărabile și nenumărabile; Mulțimi cel mult numărabile

Definiție. O mulțime A se numește numărabilă dacă există o bijecție între ea și \mathbb{N} .

Definiție. O mulțime A se numește cel mult numărabilă dacă este finită sau numărabilă.

Propoziție. Orice submulțime a unei mulțimi finite este finită. Orice submulțime a unei mulțimi numărabile este cel mult numărabilă.

Teoremă. Reuniunea unei familii finite de mulțimi finite este finită. Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi cel mult numărabile este cel mult numărabilă.

Observație. Vom admite, cu statutul de axiomă, următoarea afirmație:
Orice mulțime infinită conține o submulțime numărabilă.

Exerciții

1. Să se arate că dacă A și B sunt mulțimi numărabile, atunci $A \times B$ este numărabilă.

2. Fie A o mulțime finită și $f : A \rightarrow A$. Să se arate că f este injectivă dacă și numai dacă f este surjectivă dacă și numai dacă f este bijectivă.

Bibliografie

1. *Michael Artin*, **Algebra**, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.

2. *Wilfred Barnes*, **Introduction to abstract algebra**, D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts Toronto London, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 25847

3. *H. Behnke, F. Bachmann, K. Fladt, W. Süss*, **Fundamentals of Mathematics**, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 36662

4. *I. Creangă, C. Cazacu, Gh. Opaiț, P. Minuț, C. Reischer*, **Introducere în teoria numerelor**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 11340

5. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York, 1960 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29636

6. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 24668

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI \mathbb{Z}

\mathbb{Z} ca o mulțime factor a lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
generată de o anumită relație de echivalență
Adunarea și înmulțirea pe \mathbb{Z}
Relația de ordine în \mathbb{Z}
Scufundarea lui \mathbb{N} în \mathbb{Z}

În scopul modelării situațiilor în care ne vedem nevoiți să lucrăm cu temperaturi inferioare celei la care îngheață apa, cu altitudini situate sub nivelul mării sau cu evenimente anterioare nașterii lui Christos, se introduce o nouă mulțime de numere, numită mulțimea numerelor întregi, mulțime care posedă o "copie" a mulțimii numerelor naturale.

Construcția lui \mathbb{Z}

Faptul că o ecuație precum $x + 3 = 2$ nu are soluții în \mathbb{N} (fapt care se constată imediat scriind ecuația sub forma $2 + x + 1 = 2$) ne determină să încercăm "lărgirea" mulțimii \mathbb{N} astfel încât să putem rezolva ecuația de mai sus în mulțimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluții ale unei ecuații de tipul $x + n = m$. Vom obține astfel mulțimea numerelor întregi, notată cu \mathbb{Z} .

Iată cum se face acest lucru:

Definiție. Pe mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definim următoarea relație binară:

$$(m, n) \equiv (m', n') \Leftrightarrow m + n' = n + m'.$$

Observație. Definiția relației binare de mai sus, care se dovedește a fi o relație de echivalență, este naturală deoarece "ecuațiile $x + n = m$ și $x + n' = m'$ au aceeași soluție dacă și numai dacă $m + n' = n + m'$ ".

Definiție. Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ două operații, anume:
- o adunare prin

$$(m, n) + (m', n') = (m + m', n + n')$$

- o înmulțire prin

$$(m, n) \cdot (m', n') = (mm' + nn', mn' + nm').$$

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii de mai sus sunt naturale dacă gândim pe (m, n) ca "soluție a ecuației $x + n = m$ " deoarece un "calcul" simplu arată că din $x + n = m$ și $y + n' = m'$ rezultă $x + y + n + n' = m + m'$ și $xy + mn' + nm' = mm' + nn'$.

Aceste operații pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sunt asociative și comutative, iar înmulțirea este distributivă față de adunare.

Definiție. Definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ două operații, anume:

- o adunare prin

$$(\hat{m}, \hat{n}) + (\hat{m}', \hat{n}') = (\hat{m + m'}, \hat{n + n'}),$$

i.e.

$$(\hat{m}, \hat{n}) + (\hat{m}', \hat{n}') = (\hat{m}, \hat{n}) + (\hat{m}', \hat{n}')$$

- o înmulțire prin

$$(\hat{m}, \hat{n}) \cdot (\hat{m}', \hat{n}') = (\hat{mm' + nn'}, \hat{mn' + nm'}),$$

i.e.

$$(\hat{m}, \hat{n}) \cdot (\hat{m}', \hat{n}') = (\hat{m}, \hat{n}) \cdot (\hat{m}', \hat{n}').$$

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ sunt corecte, adică nu depind de reprezentanții aleși.

Definiție. Mulțimea $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \equiv$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea se desemnează prin \mathbb{Z} , iar elementele sale se numesc numere întregi.

Observație. Așadar un număr întreg este o clasă de echivalență.

Despre adunarea și înmulțirea pe \mathbb{Z}

Se constată cu ușurință că adunarea în \mathbb{Z} este asociativă și comutativă.

$(1, 1) \stackrel{\text{not}}{=} 0$ este element neutru la adunare, i.e.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Z}$ cu reprezentantul (m, n) definim $-\alpha = (n, m)$; atunci

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$, deci $-\alpha$ este opusul lui α relativ la adunarea în \mathbb{Z} .

Prin urmare $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian.

Se constată cu ușurință că înmulțirea în \mathbb{Z} este asociativă, comutativă și distributivă față de adunarea în \mathbb{Z} .

$(2, 1) \stackrel{\text{not}}{=} 1$ este element neutru la înmulțire, i.e.

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Proprietăți.

1.

$$\alpha \cdot 0 = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2.

$$\alpha(-\beta) = -\alpha\beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

3.

$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

4.

$$\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

5.

$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \text{ și } \gamma \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

6.

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$.

Observație

1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este domeniu de integritate.
2. În \mathbb{Z} , ecuația considerată la începutul acestei secțiuni, anume $x+3=2$ are soluția -1 .

Relația de ordine pe \mathbb{Z}

Să observăm că elementele lui \mathbb{Z} diferite de 0 sunt mulțimile de forma $\{(n+r, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ sau $\{(n, n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde $r, s \in \mathbb{N}$.

Definiție. Spunem că $\alpha = (u, v) \in \mathbb{Z}$ este pozitiv dacă $u > v$, adică dacă există $r \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n+r, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Spunem că $\alpha = (u, v) \in \mathbb{Z}$ este negativ dacă $u < v$, adică dacă există $s \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha = \{(n, n+s) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Observație.

1. Orice număr întreg este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.
2. Suma și produsul a două numere întregi pozitive sunt pozitive.

Definiție. Spunem că numărul întreg α este mai mic decât numărul întreg β și notăm această situație prin $\alpha < \beta$ dacă există un numărul întreg pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Observație. Relația binară pe \mathbb{Z} dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$, este o relație de ordine totală.

Proprietăți. Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, avem:

1. $\alpha > 0$ dacă și numai dacă α este pozitiv
2. $\alpha < 0$ dacă și numai dacă α este negativ
3. $\alpha < \beta$ dacă și numai dacă $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$
4. $\alpha < \beta$ și $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$
5. $\alpha < \beta$ și $\gamma < 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Scufundarea lui \mathbb{N} în \mathbb{Z}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dată de

$$f(p) = (1 + p, 1),$$

pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are proprietățile:

$$f(p + q) = f(p) + f(q)$$

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

$$p < q \Rightarrow f(p) < f(q),$$

pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$.

Prin urmare f este injectivă și ca atare putem identifica $p \in \mathbb{N}$ cu $f(p) \in \mathbb{Z}$, deci f este o scufundare a lui \mathbb{N} în \mathbb{Z} .

Propoziție. \mathbb{Z} este numărabilă.

Demonstrație. Totul decurge din egalitatea

$$\mathbb{Z} = \{-n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Exercițiu. Să se arate că funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ dată de

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{dacă } z \geq 0 \\ -1 - 2z, & \text{dacă } z < 0 \end{cases},$$

este bijectivă.

Bibliografie

1. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York, 1960 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29636
2. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 24668

MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE \mathbb{Q}

\mathbb{Q} ca o mulțime factor a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$
generată de o anumită relație de echivalență
Adunarea și înmulțirea pe \mathbb{Q}
 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ
Relația de ordine pe \mathbb{Q}
Scufundarea lui \mathbb{Z} în \mathbb{Q}
Relația de ordine pe \mathbb{Q} nu este completă
 \mathbb{Q} este numărabilă

Întregii au apărut ca abstracții în procesul numărării unor colecții finite de obiecte. Însă în viața de toate zilele trebuie nu numai să numărăm obiecte individuale, dar să și măsurăm cantități, ca de pildă lungimea, aria, greutatea și timpul. Dacă vrem să operăm cu ușurință cu rezultatele măsurătorilor acestor cantități, care admit subdivizări oricât de fine, este necesar să extindem limitele aritmeticii dincolo de întregi.

Ce este matematica?

R. Courant și H. Robbins, Editura Științifică, București, 1969, pagina 68

Construcția lui \mathbb{Q}

Faptul că o ecuație precum $x \cdot 2 = 3$ nu are soluții în \mathbb{Z} ne determină să încercăm "lărgirea" mulțimii \mathbb{Z} astfel încât să putem rezolva ecuația de mai sus în mulțimea lărgită. Cu alte cuvinte, vom introduce noi numere privite ca soluții ale unei ecuații de tipul $x \cdot n = m$, unde $m \in \mathbb{Z}$, iar $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Vom obține astfel mulțimea numerelor raționale, notată cu \mathbb{Q} .

Iată cum se face acest lucru:

Fie $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Definiție. Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definim următoarea relație binară:

$$(p, q) \equiv (p', q') \Leftrightarrow p \cdot q' = q \cdot p'.$$

Observație. Definiția relației binare de mai sus, care se dovedește a fi o relație de echivalență, este naturală deoarece "ecuațiile $x \cdot q = p$ și $x \cdot q' = p'$ au aceeași soluție dacă și numai dacă $p \cdot q' = q \cdot p'$ ".

În conformitate cu tradiția vom nota perechea $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ cu $\frac{p}{q}$.

Deci $\frac{p}{q} \equiv \frac{p'}{q'}$ dacă și numai $p \cdot q' = q \cdot p'$.

Definiție. Definim pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ două operații, anume:

- o adunare prin

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

- o înmulțire prin

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii de mai sus sunt naturale dacă gândim pe $\frac{p}{q}$ ca "soluție a ecuației $x \cdot q = p$ " deoarece un "calcul" simplu arată că din $x \cdot q = p$ și $y \cdot q' = p'$ rezultă $(x + y) \cdot qq' = pq' + p'q$ și $xy \cdot qq' = pp'$.

Aceste operații pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ sunt asociative și comutative, iar înmulțirea este distributivă față de adunare.

Definiție. Definim pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \equiv$ două operații, anume:

- o adunare prin

$$\frac{\hat{p}}{q} + \frac{\hat{p}'}{q'} = \frac{\hat{p}q' + \hat{p}'q}{qq'},$$

i.e.

$$\frac{\hat{p}}{q} + \frac{\hat{p}'}{q'} = \frac{\hat{p}}{q} + \frac{\hat{p}'}{q'}$$

- o înmulțire prin

$$\frac{\hat{p}}{q} \cdot \frac{\hat{p}'}{q'} = \frac{\hat{p}\hat{p}'}{qq'},$$

i.e.

$$\frac{\hat{p}}{q} \cdot \frac{\hat{p}'}{q'} = \frac{\hat{p}}{q} \cdot \frac{\hat{p}'}{q'}.$$

Observație. Definițiile adunării și înmulțirii pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \equiv$ sunt corecte, adică nu depind de reprezentanții aleși.

Definiție. Mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \equiv$ înzestrată cu adunarea și înmulțirea se desemnează prin \mathbb{Q} , iar elementele sale se numesc numere raționale.

Observație. Așadar un număr rațional este o clasă de echivalență.

Despre adunarea și înmulțirea pe \mathbb{Q}

Se constată cu ușurință că adunarea în \mathbb{Q} este asociativă și comutativă.

$\frac{0}{1} \stackrel{\text{not}}{=} 0$ este element neutru la adunare, i.e.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Q}$ cu reprezentantul $\frac{p}{q}$ definim $-\alpha = -\frac{p}{q}$; atunci

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$, deci $-\alpha$ este opusul lui α relativ la adunarea în \mathbb{Q} .

Prin urmare $(\mathbb{Q}, +)$ este grup abelian.

Se constată cu ușurință că înmulțirea în \mathbb{Q} este asociativă, comutativă și distributivă față de adunarea în \mathbb{Q} .

$\frac{1}{1} \stackrel{\text{not}}{=} 1$ este element neutru la înmulțire, i.e.

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Pentru $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$, cu reprezentantul $\frac{p}{q}$, definim $\frac{1}{\alpha} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$; se constată că $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{Q} - \{0\}$, deci $\frac{1}{\alpha}$ este inversul lui α relativ la înmulțirea în \mathbb{Q} .

Din cele de mai sus decurge următoarea:

Observație. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Relația de ordine pe \mathbb{Q}

Definiție. Spunem că un număr rațional $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este pozitiv (negativ) dacă $pq > 0$ (< 0).

Observație.

1. Definiția de mai sus este corectă, adică nu depinde de reprezentantul ales.
2. Orice număr rațional este fie 0, fie pozitiv, fie negativ.

Definiție. Spunem că numărul rațional α este mai mic decât numărul rațional β , și notăm această situație prin $\alpha < \beta$, dacă există un număr rațional pozitiv γ astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Observație. Relația binară pe \mathbb{Q} dată de $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ este o relație de ordine totală.

Proprietăți. Pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, avem:

1. $\alpha > 0$ dacă și numai dacă α este pozitiv;
2. $\alpha < 0$ dacă și numai dacă α este negativ;
3. $\alpha < \beta$ dacă și numai dacă $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$;
4. $\alpha > 0$ și $\beta > 0$ implică $\alpha \cdot \beta > 0$;
5. $\alpha < \beta$ și $\gamma > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$;
6. $\alpha < \beta$ și $\gamma < 0 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$;
7. dacă $\alpha < \beta$, atunci mulțimea $\{x \in \mathbb{Q} \mid \alpha < x < \beta\}$ este infinită;
8. ecuația $x^2 = 2$ nu are soluții în \mathbb{Q} ;
9. există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\alpha < n$.

Scufundarea lui \mathbb{Z} în \mathbb{Q}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dată de

$$f(p) = \frac{p}{1},$$

pentru orice $p \in \mathbb{Z}$, are proprietățile:

$$f(p + q) = f(p) + f(q)$$

$$f(pq) = f(p)f(q)$$

$$p < q \Rightarrow f(p) < f(q),$$

pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare f este injectivă și ca atare putem identifica $p \in \mathbb{Z}$ cu $f(p) \in \mathbb{Q}$, deci f este o scufundare a lui \mathbb{Z} în \mathbb{Q} .

Relația de ordine pe \mathbb{Q} nu este completă

Teoremă. Nu orice submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{Q} are margine superioară (i.e. relația de ordine pe \mathbb{Q} nu este completă).

Demonstrație. Fie

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0, x \geq 0, x^2 < 2\}.$$

Deoarece $1 \in A$, deducem că $A \neq \emptyset$.

Evident 2 este un majorant al lui A .

Nu există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a = \sup A$.

Într-adevăr, dacă presupunem contrariul, să observăm că $a \geq 1$.

Ne putem plasa în una și numai una dintre următoarele două situații:

A. $a^2 < 2$

B. $a^2 > 2$.

Dacă ne situăm în situația A, considerăm

$$b = \frac{2 - a^2}{2(a + 1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

Vom arăta că $a + b \in A$, de unde, deoarece a este majorant al lui A , obținem $a + b \leq a$, inegalitate care conduce la contradicția $b \leq 0$.

Rămâne să arătăm că $a + b \in A$, i.e.

$$(a + b)^2 < 2.$$

În acest scop, să observăm că

$$b(a + 1)^2 = \frac{2 - a^2}{2} < 1,$$

deci

$$b < \frac{1}{(a + 1)^2} < 1.$$

Atunci

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + 2ab + b <$$

$$< a^2 + 2ab + b + a^2b = a^2 + b(a+1)^2 = \frac{a^2+2}{2} < 2.$$

Dacă ne situăm în situația B, considerăm

$$c = \frac{a^2 - 2}{2(a+1)^2} \in \mathbb{Q}.$$

Vom arăta că $a - c$ este majorant al lui A , deci $a \leq a - c$, inegalitate care conduce la contradicția $c \leq 0$.

Rămâne să arătăm că

$$x \leq a - c,$$

pentru orice $x \in A$.

Cum

$$x^2 < 2,$$

pentru orice $x \in A$, este suficient să arătăm că

$$2 < (a - c)^2.$$

Să observăm că

$$c < 1,$$

fapt echivalent cu

$$0 < (a + 2)^2.$$

Atunci

$$\begin{aligned} (a - c)^2 &= a^2 - 2ac + c^2 > a^2 - 2ac - c^2 > \\ &> a^2 - 2ac - c > a^2 - 2ac - c - a^2c = a^2 - c(a+1)^2 = \\ &= \frac{a^2 + 2}{2} > 2. \end{aligned}$$

În acest mod demonstrația este încheiată.

\mathbb{Q} este numărabilă

Propoziție. \mathbb{Q} este numărabilă.

Demonstrație. Deoarece

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_n,$$

unde

$$A_0 = \{0\}$$

și

$$A_n = \left\{ \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, -\frac{3}{n}, \dots \right\},$$

deducem că \mathbb{Q} este cel mult numărabilă.

Cum \mathbb{Q} este infinită, deducem că \mathbb{Q} este numărabilă.

Bibliografie

1. *Edmund Landau*, **Foundations of Analysis**, Chelsea Publishing Company, New York, 1960 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29636
2. *Constantin Meghea*, **Bazele analizei matematice**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 24668

MULȚIMEA NUMERELOR REALE \mathbb{R}

Tăietură în \mathbb{Q}
Tăietură în \mathbb{Q} de prima și de a doua speță
 \mathbb{R} ca mulțime factor a mulțimii tuturor tăieturilor în \mathbb{Q}
Adunarea pe \mathbb{R}
Relația de ordine pe \mathbb{R}
Înmulțirea pe \mathbb{R}
 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ
Scufundarea lui \mathbb{Q} în \mathbb{R}
Relația de ordine pe \mathbb{R} este completă

Considerațiile care constituie obiectul acestei mici scrieri datează din toamna anului 1858. Mă găseam pe atunci, ca profesor la Politehnica confederată de la Zürich, pentru prima oară în situația de a trebui să expun elementele calculului diferențial și am simțit cu această ocazie, mai acut ca oricând, lipsa unei baze științifice a aritmeticii. Pentru conceptul de apropiere a unei mărimi variabile de o valoare limită fixă și îndeosebi pentru demonstrarea propoziției că orice mărime care crește constant, dar nu peste orice limită, trebuie desigur să se apropie de o valoare limită, am recurs la evidențe geometrice. Și astăzi socotesc această folosire a intuiției geometrice în primul stadiu al predării calculului diferențial ca extraordinar de utilă, ba chiar indispensabilă, din punct de vedere didactic, când vrem să nu pierdem prea mult timp. Dar nimeni nu va tăgădui că acest fel de introducere în calculul diferențial nu poate revendica o valoare științifică. Pe atunci, pentru mine acest sentiment de nesatisfacție a fost așa de puternic încât am luat hotărârea fermă să reflectez tot timpul, până când voi fi găsit o fundamentare pur aritmetică și total riguroasă a principiilor analizei infinitezimale. Se spune așa de des că obiectul calculului diferențial ar fi mărimile continue și totuși nicăieri nu se dă o explicație a acestei continuități și chiar cele mai riguroase expuneri ale calculului diferențial nu-și bazează demonstrațiile pe continuitate, ci ele apelează sau la reprezentări geometrice mai mult sau mai puțin conștiente, sau la reprezentări provocate de geometrie, sau aceste expuneri se sprijină pe propoziții care nu sunt demonstrate niciodată pur aritmetic. Din această categorie face parte, de pildă, propoziția menționată mai sus, și o cercetare mai precisă m-a convins că această propoziție, sau chiar oricare propoziție echivalentă, poate fi privită

oarecum ca un fundament suficient pentru analiza infinitezimală. Este numai vorba să se descopere adevărata sa origine în elementele aritmeticii, și astfel să se obțină, în același timp, o definiție reală a naturii continuității. Acest lucru mi-a reușit la 24 noiembrie 1858.

Fundamentele Matematicii, Oskar Becker, Editura Științifică, București, 1968, paginile 253-254.

Este deci evident acum că, dacă am rămâne numai la numere raționale, multe întrebări ar rămâne fără răspuns, fiind nevoiți să introducem interdicții dintre cele mai severe pentru ca nu cumva operațiile considerate să ne scoată din mulțimea \mathbb{Q} . Nu ar fi o strategie potrivită. Numai că de la înțelegerea inevitabilității considerării numerelor raționale până la găsirea pentru aceste numere a unui statut acceptabil din punct de vedere matematic este o cale lungă. I-a trebuit omenirii peste două mii de ani pentru a o putea parcurge. Abia în secolul al XIX-lea s-au cristalizat modalități de definire a conceptului de număr real, în așa fel încât el să includă, printr-un procedeu uniform, atât numerele raționale cât și numerele iraționale.

Solomon Marcus, Șocul matematicii, Editura Albatros, București, 1987, pagina 227

Construcția lui \mathbb{R}

Faptul că o ecuație precum $x^2 = 2$ nu are soluții în \mathbb{Q} ne determină să încercăm "lărgirea" mulțimii \mathbb{Q} astfel încât să putem rezolva ecuația de mai sus în mulțimea lărgită. Vom obține astfel mulțimea numerelor reale, notată cu \mathbb{R} .

Definiție. *Un cuplu (I, II) de mulțimi disjuncte de numere raționale cu proprietățile:*

- 1. pentru orice $a \in I$ și orice $a' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a' < a$, avem $a' \in I$;*
- 2. pentru orice $A \in II$ și orice $A' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $A < A'$, avem $A' \in II$;*
- 3. pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, există $a \in I$ și $A \in II$ astfel încât $A - a < r$, se numește tăietură (în \mathbb{Q}).*

I se numește prima clasă a tăieturii, iar II se numește a doua clasă a tăieturii.

Dacă s este o tăietură, atunci notăm prima clasă a sa prin I_s , iar pe cea de-a doua prin II_s .

Un număr rațional c se zice clasat în raport cu tăietura s dacă $c \in I_s$ sau $c \in II_s$.

Această noțiune, în esența sa, a fost introdusă de Dedekind, în 1872, într-un articol intitulat "Stetigkeit und irrationale Zahlen".

Notă istorică. *Richard Dedekind* s-a născut în 1831 la Braunschweig, Germania. A frecventat școala Martino-Catharineum din Brunswick unde, pentru început, acordă o atenție sporită fizicii și chimiei. Ulterior atenția sa se îndreaptă către matematică. În 1850 se înscrie la Universitatea din Göttingen, având o solidă pregătire matematică dobândită în timpul frecventării, începând cu anul 1848, a colegiului Carolinum. La Göttingen îi are ca profesori pe Gauss, Dirichlet și pe Weber. În 1852 obține de la această universitate un doctorat, sub direcția lui Gauss. În 1855 devine titularul catedrei rămase libere prin moartea lui Gauss. Din 1858 se mută la Politehnica din Zürich. Aici, predând pentru prima dată un curs de calcul diferențial și integral, este condus la construcția numerelor reale prin tăieturi. Din 1860 devine profesor la Politehnica din Brunswick, de unde se și pensionează în 1894. El a introdus noțiunea de ideal, noțiune care este de o importanță capitală în algebră. Pe lângă conceptele introduse și rezultatele obținute, Dedekind a marcat matematica prin abilitatea sa de a-și exprima extrem de clar ideile, fapt care a introdus un nou stil în matematică, stil care a avut o influență majoră asupra generațiilor următoare de matematicieni. A fost membru al Academiei din Göttingen (din 1862), al celei din Berlin (din 1880), al celei din Roma, precum și al Academiei de Științe din Paris (din 1900). A murit în 1916.

Dedekind rămâne în istoria matematicii prin cel puțin două contribuții esențiale, anume prin definirea numerelor iraționale cu ajutorul tăieturilor și prin introducerea noțiunii de ideal.

Lema de mai jos, care furnizează condiții suficiente pentru existența unei tăieturi, se va folosi în cadrul demonstrației teoremei de la pagina 58.

Lemă. *Fie $I, II \subseteq \mathbb{Q}$ astfel încât $I \cap II = \emptyset$, $I, II \neq \emptyset$ și $I \cup II = \mathbb{Q}$.*

Dacă sunt verificate condițiile 1 și 2 din definiția tăieturii, atunci (I, II) este o tăietură.

Proprietăți. *Fie s o tăietură.*

1. *Dacă $a \in I_s$ și $A \in II_s$, atunci $a < A$.*
2. *Există cel mult un număr rațional neclasat în raport cu s .*
3. *Dacă $l \in \mathbb{Q}$ nu este clasat în raport cu s , atunci*

$$I_s = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}$$

și

$$II_s = \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\}.$$

4. Dacă toate numerele raționale sunt clasate în raport cu s , atunci ne situăm în unul și numai unul dintre cazurile următoare:

- a) I_s are un cel mai mare element & II_s nu are un cel mai mic element;
- b) I_s nu are un cel mai mare element & II_s are un cel mai mic element;
- c) I_s nu are un cel mai mare element & II_s nu are un cel mai mic element.

Definiție. O tăietură s în raport cu care toate numerele raționale sunt clasate și astfel încât I_s nu are un cel mai mare element și II_s nu are un cel mai mic element, se numește tăietură de speța a doua.

O tăietură în \mathbb{Q} care nu este de speța a doua, se numește tăietură de prima speță.

Exemple:

1. (I, II) , unde

$$I = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0\} \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \text{ și } a^2 < 2\}$$

și

$$II = \{A \in \mathbb{Q} \mid 2 < A^2\},$$

este o tăietură de speța a doua.

2. Pentru $r \in \mathbb{Q}$, cuplurile

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r \leq A\}),$$

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$$

și

$$(\{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid r < A\})$$

sunt tăieturi de prima speță, numite tăieturile determinate de r .

Vom nota oricare dintre aceste trei tăieturi cu (r) .

Propoziție. Dacă $l, l' \in \mathbb{Q}$ și $l \neq l'$, atunci $(l) \neq (l')$.

Propoziție. Orice tăietură de prima speță este o tăietură determinată de un număr rațional.

Propoziție. Fie $l \in \mathbb{Q}$ și s o tăietură în \mathbb{Q} . Dacă pentru orice $a \in I_s$ și orice $A \in II_s$, avem $a \leq l \leq A$, atunci s este una dintre tăieturile determinate de l .

Notație. Prin τ vom desemna mulțimea tăieturilor în \mathbb{Q} .

Observație. Relația binară pe τ dată de:

$$s \equiv t$$

dacă ($s = t$ atunci când s și t sunt de speța a doua) sau (s și t sunt determinate de același număr rațional atunci când s și t sunt de prima speță) este o relație de echivalență.

Notație. Mulțimea τ / \equiv se va nota cu \mathbb{R} , iar elementele sale se numesc numere reale.

Observație. Pentru $r \in \mathbb{Q}$, notăm cu \hat{r} clasa de echivalență a unei tăieturi în \mathbb{Q} determinate de r .

Evident, $r = r'$ dacă și numai dacă $\hat{r} = \hat{r}'$, unde $r, r' \in \mathbb{Q}$.

Adunarea pe \mathbb{R}

Definiție. Pe τ definim o adunare astfel:
dacă $s, t \in \tau$, atunci

$$s + t = (I_{s+t}, II_{s+t}),$$

unde

$$I_{s+t} = \{a + b \mid a \in I_s \text{ și } b \in I_t\}$$

și

$$II_{s+t} = \{A + B \mid A \in II_s \text{ și } B \in II_t\}.$$

Se constată că $s + t \in \tau$.

Observație. Dacă $s \in \tau$, atunci $(\{-A \mid A \in II_s\}, \{-a \mid a \in I_s\})$ este o tăietură notată cu $-s$.

Dacă s este determinată de $r \in \mathbb{Q}$, atunci $-s$ este determinată de $-r$.

Propoziție. Dacă $s, s' \in \tau$ sunt determinate de r , respectiv r' , atunci $s + s'$ este determinată de $r + r'$.

Propoziție. Fie

$$s = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\}),$$

$$s' = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l \leq A\})$$

și

$$s'' = (\{a \in \mathbb{Q} \mid a < l\}, \{A \in \mathbb{Q} \mid l < A\})$$

cele trei tăieturi în \mathbb{Q} determinate de $l \in \mathbb{Q}$, iar t o tăietură în \mathbb{Q} de speța a doua.

Atunci

$$s + t = s' + t = s'' + t.$$

Definiție. Definim adunarea pe \mathbb{R} prin:

$$\hat{s} + \hat{t} = \widehat{s + t},$$

unde $s, t \in \tau$.

Observație. Ultimele două propoziții arată că adunarea pe \mathbb{R} este bine definită. Evident ea este asociativă și comutativă.

Propoziție. Dacă 0 este clasa de echivalență a unei tăieturi în \mathbb{Q} determinate de $0 \in \mathbb{Q}$, atunci

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propoziție. Dacă $\alpha = \hat{s}$, unde $s \in \tau$, notăm $-\alpha = -\hat{s}$.

Atunci

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observație. Pe \mathbb{R} se poate defini operația de scădere astfel:

$$x - y \stackrel{\text{def}}{=} x + (-y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Observație. $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian.

Relația de ordine pe \mathbb{R}

Definiție. O tăietură în \mathbb{Q} se numește pozitivă (negativă) atunci când în prima clasă (în a doua clasă) a sa se află un număr rațional pozitiv (negativ).

Notăție. Vom nota cu τ_+ mulțimea tăieturilor pozitive.

Propoziție. O tăietură în \mathbb{Q} este fie pozitivă, fie negativă, fie determinată de 0.

Propoziție. Dacă s este una dintre tăieturile determinate de $l \in \mathbb{Q}$, atunci s este pozitivă (negativă) dacă și numai dacă $l > 0$ ($l < 0$).

Propoziție. Suma a două tăieturi pozitive (negative) este o tăietură pozitivă (negativă).

Definiție. Un număr real se numește pozitiv (negativ) atunci când are ca reprezentant o tăietură pozitivă (negativă).

Observație

1. Definiția de mai sus este corectă (adică nu depinde de reprezentantul ales).

2. Suma a două numere reale pozitive (negative) este un număr real pozitiv (negativ).

Definiție. Definim pe \mathbb{R} următoarea relație binară: pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, spunem că $\alpha < \beta$ dacă există $\gamma \in \mathbb{R}$, γ pozitiv, astfel încât $\alpha + \gamma = \beta$.

Relație binară pe \mathbb{R} dată de: $\alpha \leq \beta$ dacă $\alpha < \beta$ sau $\alpha = \beta$ se dovedește a fi o relație de ordine totală pe \mathbb{R} .

Notăție. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x \leq y$, vom folosi următoarele notații:

$$(x, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y > x\},$$

$$[x, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq x\},$$

$$(-\infty, x) \stackrel{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\},$$

$$(-\infty, x] \stackrel{def}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq x\},$$

$$[x, y] = \{u \in \mathbb{R} \mid x \leq u \leq y\},$$

$$[x, y) = \{u \in \mathbb{R} \mid x \leq u < y\},$$

$$(x, y] = \{u \in \mathbb{R} \mid x < u \leq y\}$$

și

$$(x, y) = \{u \in \mathbb{R} \mid x < u < y\}.$$

Proprietăți.

1.

$$\alpha < \beta \text{ dacă și numai dacă } \alpha + \gamma < \beta + \gamma,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

2. Dacă $l, l' \in \mathbb{Q}$ astfel încât $l < l'$, atunci orice tăietură determinată de l este mai mică decât orice tăietură determinată de l' .

3. Fie $\alpha = s \in \mathbb{R}$, unde $s \in \tau$; atunci:

$$a) a \in I_s \Rightarrow \hat{a} \leq \alpha$$

$$b) A \in II_s \Rightarrow \alpha \leq \hat{A}.$$

4. Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\alpha < \beta$, există $l \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\alpha < \hat{l} < \beta$.

5. Fie $s, t \in \tau$ astfel încât $I_s \subseteq I_t$ și $II_s \subseteq II_t$; atunci $\hat{s} = \hat{t}$.

6. Fie $\alpha = \hat{s} \in \mathbb{R}$, unde $s \in \tau$ și $\beta \in \mathbb{R}$; atunci:

$$a) \text{ dacă } \hat{a} \leq \beta, \text{ pentru orice } a \in I_s, \text{ atunci } \alpha \leq \beta;$$

$$b) \text{ dacă } \beta \leq \hat{A}, \text{ pentru orice } A \in II_s, \text{ atunci } \beta \leq \alpha.$$

Proprietățile 3 și 4 se vor utiliza în cadrul demonstrației teoremei de la pagina 57.

Înmulțirea pe \mathbb{R}

Definiție. Pe τ_+ definim o înmulțire astfel:

dacă $s, t \in \tau_+$, atunci

$$s \cdot t = (I_{st}, II_{st}),$$

unde

$$I_{st} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{ab \mid a \in I_s, a > 0 \text{ și } b \in I_t, b > 0\}$$

și

$$II_{s+t} = \{AB \mid A \in II_s \text{ și } B \in II_t\}.$$

Se constată că $s \cdot t \in \tau$.

Observație. Se constată că $s \cdot t$ este pozitivă și că înmulțirea în τ_+ este asociativă și comutativă.

Observație. Pentru $s \in \tau_+$, definim tăietura, notată s^{-1} , dată de $(I_{s^{-1}}, II_{s^{-1}})$, unde

$$I_{s^{-1}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{\frac{1}{A} \mid A \in II_s\}$$

și

$$II_{s^{-1}} = \{\frac{1}{a} \mid a \in I_s \text{ și } a > 0\}.$$

Evident $s^{-1} \in \tau_+$.

Proprietăți.

1. Dacă $s \in \tau_+$, atunci $s \cdot s^{-1} = (1)$.
2. Dacă $s, t, u \in \tau_+$, atunci $s \cdot (t + u) = s \cdot t + s \cdot u$.
3. Dacă s, s' și s'' sunt cele trei tăieturi determinate de $r \in \mathbb{Q}, r > 0$, iar t este o tăietură de speța a doua, atunci $s \cdot t = s' \cdot t = s'' \cdot t$ este o tăietură de speța a doua.
4. Dacă $r, r' \in \mathbb{Q}, r, r' > 0$, atunci $(r) \cdot (r') = (rr')$.

Definiție. Definim înmulțirea în \mathbb{R} astfel:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} st, & \alpha, \beta > 0 \\ -\alpha \cdot (-\beta), & \alpha > 0, \beta < 0 \\ -(-\alpha) \cdot \beta, & \alpha < 0, \beta > 0 \\ (-\alpha) \cdot (-\beta), & \alpha < 0, \beta < 0 \\ 0, & \alpha = 0 \text{ sau } \beta = 0 \end{cases},$$

unde $\alpha = \hat{s}$ și $\beta = \hat{t}$, $s, t \in \tau$.

Observație.

1. Definiția de mai sus este corectă.
2. Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem: $\alpha \cdot \beta = 0$ dacă și numai dacă $\alpha = 0$ sau $\beta = 0$.
3. **Regula semnelor:**

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$$

și

$$(-\alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta) = -\alpha \cdot \beta,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

4. Înmulțirea în \mathbb{R} este asociativă, comutativă și distributivă față de adunarea în \mathbb{R} .

Proprietăți.

- 1.

$$\alpha \cdot \hat{1} = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, există $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \hat{1}.$$

Așadar $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ este grup comutativ.

- 3.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma,$$

pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

4. Pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem:

$$\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta > 0.$$

Prin urmare, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și pentru orice $y \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, avem

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha y \leq \beta y.$$

Observație. Pe \mathbb{R} se poate defini operația de împărțire astfel:

$$\frac{x}{y} \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot \frac{1}{y},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Remarcă. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ.

Scufundarea lui \mathbb{Q} în \mathbb{R}

Să observăm că aplicația $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(r) = \hat{r},$$

pentru orice $r \in \mathbb{Q}$, are proprietățile:

$$f(r + r') = f(r) + f(r'),$$

$$f(rr') = f(r)f(r'),$$

$$r < r' \Rightarrow f(r) < f(r'),$$

pentru orice $r, r' \in \mathbb{Q}$.

Prin urmare f este injectivă și ca atare putem identifica $r \in \mathbb{Q}$ cu $f(r) \in \mathbb{R}$, deci f este o scufundare a lui \mathbb{Q} în \mathbb{R} .

Definiție. Elementele mulțimii $\mathbb{R} - f(\mathbb{Q})$ se numesc numere iraționale.

Relația de ordine pe \mathbb{R} este completă

Teorema de mai jos marchează una dintre deosebirile esențiale dintre \mathbb{Q} și \mathbb{R} . Ea este echivalentă cu Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor (vezi pagina 69) și cu Criteriul lui Cauchy (vezi pagina 140).

Aceste trei fapte echivalente constituie o trăsătură definitorie a lui \mathbb{R} care explică de ce se "face" Analiză Matematică pe \mathbb{R} și nu pe \mathbb{Q} .

Teoremă. Orice submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{R} are margine superioară (i.e. relația de ordine pe \mathbb{R} este completă).

Demonstrație. Fie A o submulțime nevidă majorată a lui \mathbb{R} .

Prin urmare, există $\alpha \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$x \leq \alpha,$$

pentru orice $x \in A$.

Fie

$$I = \{r \in \mathbb{Q} \mid \text{există } x' \in A \text{ astfel încât } r < x'\}$$

și

$$II = \{r \in \mathbb{Q} \mid x \leq r, \text{ pentru orice } x \in A\}.$$

Să observăm că $I \neq \emptyset$, $II \neq \emptyset$ (deoarece $\alpha \in II$), $I \cap II = \emptyset$, $I \cup II = \mathbb{Q}$ și că sunt verificate primele două proprietăți din definiția tăieturii.

Atunci, conform lemei de la pagina 50, (I, II) este o tăietură pe care o vom nota cu \hat{s} .

Fie $M = \hat{s}$.

Vom arăta că M este marginea superioară a lui A .

Într-adevăr, M este majorant al lui A , deoarece, în caz contrar, există $x \in A$ astfel încât $M < x$. Atunci, conform proprietății 4, de la pagina 55, există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M = \hat{s} < r < x$, deci $r \in I$ și drept urmare, având în vedere proprietatea 3 a) de la aceeași pagină 55, obținem contradicția $r \leq M$.

De asemenea M este cel mai mic majorant al lui A .

Într-adevăr, dacă presupunem că există M_1 majorant al lui A , astfel încât $M_1 < M$, alegem $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $M_1 < r < M$. Atunci $r \in II$ (deoarece $x \leq M_1 < r$, pentru orice $x \in A$), de unde contradicția $M \leq r$.

Bibliografie

1. *Constantin Meghea, Bazele analizei matematice*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 24668
2. *Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1964 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23777

COMPLEMENTE PRIVIND SISTEMUL NUMERELOR REALE

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale

\mathbb{R} este un corp arhimedeean

Funcția parte întreagă

Densitatea (în sensul relației de ordine) lui \mathbb{Q} și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ în \mathbb{R}

Caracterizarea cu ε a marginilor unei mulțimi

Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor

\mathbb{R} nu este cel mult numărabilă

Funcțiile modul, exponențială, putere și logaritmică.

Privire abstractă asupra sistemului numerelor reale

Vom prezenta definiția "abstractă" a mulțimii numerelor reale, adică vom pune în evidență lista proprietăților definitorii ale lui \mathbb{R} .

Definiție. O mulțime nevidă \mathbb{R} pe care sunt definite două operații interne, $+$ (adunarea) și \cdot (înmulțirea), precum și o relație de ordine \leq , se numește o mulțime a numerelor reale dacă:

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ;

b) \leq este compatibilă cu structura de corp, i.e.

bi) pentru orice $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $y \geq 0$ și $a \leq b$, rezultă

$$a + x \leq b + x$$

și

$$a \cdot y \leq b \cdot y;$$

bii) pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a \geq 0$ sau $a \leq 0$;

c) pentru orice submulțime A a lui \mathbb{R} care este nevidă și mărginită superior, există $\sup A$.

Observație. În condițiile definiției de mai sus, relația de ordine este totală.

În capitolul precend am construit un model pentru mulțimea numerelor reale (anume modelul lui Dedekind). Deoarece există și alte modele pentru

\mathbb{R} (vezi [2], paginile 39-52, unde este prezentat modelul lui Cauchy, și [1], paginile 32-35, precum și modelul zecimal al lui Weierstarss, vezi [6], pagina 48), se pune problema unicității sistemului numerelor reale. Această problemă este rezolvată (vezi [2], paginile 86-88, precum și [1], paginile 27-28) de următoarea

Teoremă. *Dacă $(\mathbb{R}', +, \cdot, \leq)$ și $(\mathbb{R}'', +, \cdot, \leq)$ satisfac condițiile definiției de mai sus, atunci există $f : \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}''$ astfel încât:*

i)

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$;

ii)

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$;

iii)

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}'$;

iv) pentru orice submulțime A a lui \mathbb{R}' care este nevidă și mărginită superior, $f(A)$ este nevidă și mărginită superior și

$$\sup f(A) = f(\sup A).$$

Observație. Prin urmare, din punct de vedere abstract, există o unică mulțime de numere reale. Orice obiect care se încadrează în definiția de mai sus se va numi mulțimea numerelor reale și se va nota cu \mathbb{R} .

\mathbb{R} este un corp arhimedeean

Următorul rezultat pune în evidență o proprietate esențială a sistemului numerelor reale, anume aceea care afirmă că orice număr real strict pozitiv adunat cu el însuși de un număr suficient de ori se va poziționa la dreapta oricărui alt număr real. El se va folosi în cadrul demonstrațiilor Teoremei de densitate a lui \mathbb{Q} în \mathbb{R} (vezi pagina 65), precum și a Teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi (vezi pagina 66).

Teoremă. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a < nb,$$

i.e. \mathbb{R} este un corp arhimedeean

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ astfel încât

$$nb \leq a,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci mulțimea de numere reale

$$A = \{nb \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este nevidă și majorată, deci, există

$$z = \sup A.$$

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, avem

$$mb + b = (m + 1)b \leq z,$$

deci

$$mb \leq z - b,$$

de unde

$$z \leq z - b,$$

i.e. contradicția

$$b \leq 0.$$

Observație. *Teorema anterioară arată că pentru orice număr real există un număr natural mai mare decât el. Prin urmare \mathbb{N} este nemărginită superior.*

Exerciții

1. Să se arate că pentru $a \in [0, \infty)$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) $a = 0$;
- ii) $a \leq \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- iii) $a \leq \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$.

2. Să se arate că $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = 0$.

Notă istorică. *Arhimede (287-212 Î.C.) a fost unul dintre fondatorii metodei științifice; a fost numit "cel mai luminat cap al antichității". Arhimede*

a studiat, la Alexandria, cu succesorii lui Euclid. A fost prieten cu regele Hieron al doilea al Siracusei. Arhimede a inventat multe dispozitive folosite în lupte, în special în războaiele de apărare duse de Siracusa împotriva romanilor conduși de Marcellus. El a perfectat o metodă de integrare, care i-a permis să calculeze arii, volume și suprafețe. A obținut o aproximare foarte bună a lui π . A descoperit celebrul principiu care descrie comportamentul unui corp scufundat într-un lichid. A fost omorât de către un soldat roman în timpul capturării Siracusei de către romani în al doilea război punic.

Funcția parte întreagă

Pentru $b = 1$, obținem, utilizând teorema de mai sus, că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$a < n.$$

Prin urmare mulțimea

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid a < m\}$$

este nevidă.

Deoarece \mathbb{N} este bine ordonată (vezi teorema de la pagina 33), putem considera n_0 primul element al lui M .

Evident

$$n_0 \geq 2.$$

Atunci

$$n_0 - 1 \notin M,$$

căci altminteri, cum $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$, obținem contradicția

$$n_0 \leq n_0 - 1.$$

Deci

$$n_0 - 1 \leq a < n_0.$$

Prin urmare, cu notația $n_0 - 1 \stackrel{\text{not}}{=} n$, am arătat că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Lucrând cu $-a$ în loc de a , se deduce că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \leq -1$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Este evident că pentru $a \in (-1, 1)$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1,$$

anume $n = -1$, dacă $a \in (-1, 0)$ și $n = 0$, dacă $a \in [0, 1)$.

Prin urmare, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$n \leq a < n + 1.$$

Mai mult, n este unic.

Într-adevăr, dacă există $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$, astfel încât $n \leq a < n + 1$ și $m \leq a < m + 1$, atunci putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $n < m$ și obținem contradicția $a < n + 1 \leq m \leq a$.

Am obținut așadar următoarea:

Teoremă (de existență a părții întregi). *Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, există un unic $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$n \leq a < n + 1.$$

Numărul n se numește partea întreagă a lui a și se notează prin $[a]$.

Observație. *Este valabilă următoarea variantă (multiplicativă) a teoremei care afirmă proprietatea lui \mathbb{R} de a fi corp arhimedeean (vezi [4], paginile 10-11).*

Teoremă. *Fie $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $b \neq 1$. Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât*

$$b^n \leq a < b^{n+1}.$$

Exercițiu. Pentru orice $a \in [0, 1)$ există un unic șir de cifre $r_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ astfel încât o infinitate dintre ele sunt diferite de 9 și

$$a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{10^k},$$

fapt care va fi marcat prin scrierea

$$a = 0, r_1 r_2 \dots$$

Densitatea (în sensul relației de ordine) lui \mathbb{Q} și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ în \mathbb{R}

Teorema de densitate a lui \mathbb{Q} și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ în \mathbb{R}

- i) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere raționale.
- ii) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional.

iii) Între două numere reale diferite există o infinitate de numere iraționale.

Demonstrație.

i) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Atunci $c = b - a > 0$, deci, conform teoremei de la pagina 61, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 < nc.$$

Atunci

$$\frac{[na] + 1}{n} - a \leq \frac{[na] + 1}{n} - \frac{[na]}{n} = \frac{1}{n} < c,$$

de unde

$$\frac{[na] + 1}{n} < b.$$

Cum

$$\frac{[na]}{n} \leq a < \frac{[na] + 1}{n},$$

deducem că

$$a < \frac{[na] + 1}{n} < b,$$

deci

$$\frac{[na] + 1}{n} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

Repetând acest raționament cu a și $\frac{[na]+1}{n}$ în loc de a și b etc, se obține concluzia.

ii) Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât

$$c = a + b \in \mathbb{Q}.$$

Atunci obținem contradicția

$$c - a = b \in \mathbb{Q}.$$

iii) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $d \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Atunci, conform i), există o infinitate de numere raționale r astfel încât

$$a - d < r < b - d,$$

deci

$$a < r + d < b,$$

de unde

$$r + d \in (a, b) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}).$$

Caracterizarea cu ε a marginilor unei mulțimi

Rezultatul de mai jos se va dovedi util în cadrul demonstrației Teoremei de structură a mulțimilor deschise (vezi pagina 104), a Teoremei de la pagina 107, precum și a Teoremei valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213).

Teoremă (de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi). *Fie A o mulțime nevidă majorată de numere reale și $a, b \in \mathbb{R}$.*

Atunci:

i) $\sup A = a$ dacă și numai dacă ($x \leq a$, pentru orice $x \in A$) și (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$)

ii) $\inf A = b$ dacă și numai dacă ($b \leq x$, pentru orice $x \in A$) și (pentru orice $\varepsilon > 0$, există $x' \in A$ astfel încât $x' < b + \varepsilon$).

Demonstrație.

i) " \Rightarrow " Deoarece a este majorant al lui A , deducem că $x \leq a$, pentru orice $x \in A$. Deoarece $a - \varepsilon < a$, iar a este cel mai mic majorant al lui A , deducem că $a - \varepsilon$ nu este majorant al lui A , deci există $x' \in A$ astfel încât $a - \varepsilon < x'$.

" \Leftarrow " Deoarece $x \leq a$, pentru orice $x \in A$, deducem că a este majorant al lui A .

Presupunem, prin reducere la absurd, că există b majorant al lui A astfel încât

$$b < a.$$

Atunci, conform teoremei de la pagina 61, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$1 < n(a - b),$$

i.e.

$$\frac{1}{n} < a - b,$$

de unde

$$x \leq b < a - \frac{1}{n},$$

pentru orice $x \in A$, fapt care, în conformitate cu ipoteza, contrazice existența unui element $x' \in A$ astfel încât

$$a - \frac{1}{n} < x'.$$

Așadar a este cel mai mic majorant al lui A .

Prin urmare

$$a = \sup A.$$

ii) Demonstrație similară.

Exerciții.

1. Să se determine marginile mulțimilor:

$$\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 2n \right\},$$

$$\left\{ \frac{m}{n} + 4\frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \frac{m}{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ \frac{m}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Fie A și B două submulțimi mărginite a lui \mathbb{R} .

Notăm

$$-A = \{-a \mid a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

și

$$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Atunci:

i) $-A$ este mărginită și

$$-\sup A = \inf(-A) \leq \sup(-A) = -\inf(A).$$

ii) $A + B$ este mărginită și

$$\inf(A) + \inf(B) = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

iii) dacă $a \geq 0$ și $b \geq 0$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, atunci $A \cdot B$ este mărginită și

$$\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B).$$

Observație. Dacă A și B nu sunt mulțimi care au toate elementele pozitive, egalitatea $\inf(A) \cdot \inf(B) = \inf(A \cdot B)$ nu mai rămâne valabilă, așa cum arată următorul exemplu:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

și

$$B = \left\{ -1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

unde $\inf A = 0$, $\inf B = -2$ și $\inf(A \cdot B) = -2$.

iv) dacă $A \subseteq B$ atunci

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B),$$

i.e. marginile unei submulțimi se situează între marginile mulțimii.

v) $A \cup B$ este mărginită și

$$\inf\{\inf(A), \inf(B)\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}.$$

Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat extrem de util, care în esență este echivalent cu teoremă de la pagina 58 (vezi [2], pagina 24) și cu Criteriul lui Cauchy (vezi pagina 140). El se va utiliza pentru a justifica faptul că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă (vezi pagina 70).

Teoremă (Principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor)

Fie $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $a_n < b_n$ și

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Demonstrație. Mulțimile $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ și $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt minorate de a_1 și majorate de b_1 .

Prin urmare, conform teoremei de la pagina 58, există

$$a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

și

$$b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Deoarece

$$a_n \leq b_m,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deducem că

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, deci

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n],$$

de unde

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Exercițiu. Să se arate că

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset.$$

Observație. *Exercițiul de mai sus arată că nu putem renunța, în teorema anterioară, la condiția ca intervalele considerate să fie închise.*

\mathbb{R} nu este cel mult numărabilă

Rezultatul următor arată că, spre deosebire de \mathbb{Q} , \mathbb{R} nu este în bijecție cu \mathbb{N} .

Teoremă. \mathbb{R} nu este cel mult numărabilă.

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că \mathbb{R} este numărabilă.

Atunci există x_n , unde $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $x_n \neq x_m$, pentru orice $n \neq m$, și

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Fie a_1 și b_1 astfel încât

$$x_1 \notin [a_1, b_1].$$

Împărțim intervalul $[a_1, b_1]$ în trei părți egale.

Atunci cel puțin unul dintre aceste trei subintervale nu va conține pe x_2 .

Așadar există a_2 și b_2 astfel încât

$$[a_2, b_2] \subseteq [a_1, b_1]$$

și

$$x_2 \notin [a_2, b_2].$$

Repetând acest procedeu, găsim a_n și b_n cu următoarele proprietăți:

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$$

și

$$x_n \notin [a_n, b_n],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform Principiului intervalelor închise incluse a lui Cantor (vezi pagina 69), există

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Atunci

$$x \neq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde obținem contradicția

$$x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \mathbb{R}.$$

Observație. Mulțimea numerelor iraționale (i.e. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) este infinită și nu este numărabilă.

Funcția modul

Funcția modul joacă un rol extrem de important în cadrul analizei matematice.

Propoziție. Funcția $|| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

se numește funcția modul.

Pentru orice $x, y, a \in \mathbb{R}$, avem:

i)

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

ii)

$$|xy| = |x| |y|$$

iii)

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

iv)

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Funcțiile exponențială și logaritmică

În cele ce urmează vom introduce funcțiile exponențială și logaritmică.

Puterea de exponent natural a unui număr real

Definiție. Pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, definim x^n , inductiv, astfel:

$$x^1 = x$$

și

$$x^{n+1} = x^n \cdot x.$$

Definim

$$x^0 = 1.$$

Proprietăți. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ și $n, m \in \mathbb{N}$, avem:

1.

$$x^n = 0 \text{ dacă și numai dacă } x = 0;$$

2.

$$1^n = 1;$$

3.

$$(xy)^n = x^n y^n;$$

4. dacă $x \neq 0$, atunci

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n};$$

5.

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < x^n < y^n;$$

6. dacă $n \geq 2$, atunci

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^n < x$$

și

$$x > 1 \Rightarrow x^n > x.$$

7.

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$$

și

$$x^{n \cdot m} = (x^n)^m.$$

Puterea de exponent rațional a unui număr real pozitiv

Propoziție. Pentru orice $x \in [0, \infty)$ și $n \in \mathbb{N}$, există un unic $a \in [0, \infty)$, astfel ca

$$a^n = x.$$

a se numește rădăcina aritmetică de ordin n a lui x și vom folosi notația

$$a \stackrel{\text{not}}{=} x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

Definiție. Pentru $x \in (0, \infty)$ și $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$, cu $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ și $q \in \mathbb{N}$, elementul

$$(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p,$$

care nu depinde de fracția $\frac{p}{q}$ care reprezintă pe r , se numește puterea de exponent r a lui x și se va nota cu x^r .

Dacă $r \in \mathbb{Q}$ și $r < 0$, definim

$$x^r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^{-r}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-r}.$$

Puterea de exponent real a unui număr real pozitiv și funcția logaritmică

Definiție. O funcție $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$, se numește crescătoare (respectiv strict crescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(respectiv $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$) și se numește descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) dacă pentru orice $x, y \in A$ avem:

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

(respectiv $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$).

O funcție care este crescătoare sau descrescătoare se numește monotonă, iar o funcție care este strict crescătoare sau strict descrescătoare se numește strict monotonă.

Propoziție. Pentru orice $x \in (0, \infty)$, $x > 1$ (respectiv $x < 1$) există o unică funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ astfel ca:

- i) f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).
- ii)

$$f(a + b) = f(a) \cdot f(b),$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

- iii)

$$f(1) = x.$$

Observație. Dacă $a \in \mathbb{Q}$, atunci $f(a) = x^a$, iar mai general, pentru $a \in \mathbb{R}$, avem

$$f(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r < a\} = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r > a\},$$

pentru $x > 1$, respectiv

$$f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r < a\} = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} \text{ și } r > a\},$$

pentru $x < 1$.

Observație. Funcția de mai sus este surjectivă.

Observație. Funcția de mai sus se numește funcția exponențială de bază x și se notează cu \exp_x , iar, pentru $x \neq 1$, inversa ei se numește funcția logaritmică de bază x și se notează cu \log_x .

Pentru $x > 1$, funcția \log_x este strict crescătoare, iar pentru $x < 1$ funcția \log_x este strict descrescătoare.

Mai mult, avem:

$$\log_x(x) = 1$$

și

$$\log_x(ab) = \log_x(a) + \log_x(b),$$

pentru orice $a, b \in (0, \infty)$.

Observație. Pentru $a \in \mathbb{R}$ funcția $p : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$p(x) = \begin{cases} x^a, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases},$$

se numește funcția putere de exponent a .

Propoziție. Pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ și orice $a \in \mathbb{R}$, avem

$$(xy)^a = x^a y^a.$$

Observație. Demonstrațiile afirmațiilor de mai sus privind funcțiile exponențială, putere și logaritmică se pot găsi în [1].

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000
4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801
5. *C. Popa, V. Hiriș, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme**, Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23776.
6. *O. Stănășilă*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29626

MULȚIMEA $\overline{\mathbb{R}}$

Construcția lui $\overline{\mathbb{R}}$

Relația de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$

Adunarea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Scăderea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Înmulțirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Împărțirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Operații adiționale care nu au sens în $\overline{\mathbb{R}}$

În scopul considerării limitelor la infinit sau a limitelor infinite, vom introduce dreapta reală încheiată.

Construcția lui $\overline{\mathbb{R}}$

Vom considera două elemente distincte care nu sunt elemente ale lui \mathbb{R} , elemente care vor fi notate cu $-\infty$ și $+\infty$. De obicei vom scrie ∞ în loc de $+\infty$.

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ se notează cu $\overline{\mathbb{R}}$ și numește dreapta reală încheiată sau sistemul extins al numerelor reale.

Relația de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$

Definiție. *Relația binară pe $\overline{\mathbb{R}}$ definită astfel: $x \leq y$ dacă are loc una dintre următoarele situații:*

- i) $x, y \in \mathbb{R}$ și $x \leq y$;*
- ii) $x = -\infty$ și $y \in \overline{\mathbb{R}}$;*
- iii) $y = \infty$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$,*

este o relație de ordine totală care prelungește relația de ordine de pe \mathbb{R} .

Observație. *Orice submulțime nevidă a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are drept majorant pe ∞ și drept minorant pe $-\infty$.*

Observație. $\min \overline{\mathbb{R}} = -\infty$ și $\max \overline{\mathbb{R}} = \infty$.

Propoziție. *Orice submulțime nevidă a lui $\overline{\mathbb{R}}$ are margine inferioară și margine superioară, deci relația de ordine pe $\overline{\mathbb{R}}$ este completă.*

Observație. Mai precis, pentru o submulțime nevidă A a lui $\overline{\mathbb{R}}$, avem următoarele situații:

- i) dacă $\infty \in A$, atunci $\sup A = \infty$;
- ii) dacă $\infty \notin A$, atunci $A - \{-\infty\} \subseteq \mathbb{R}$ și apar următoarele situații:
 - iiia) $A - \{-\infty\}$ este majorată în \mathbb{R} , caz în care $\sup A(\text{în } \overline{\mathbb{R}}) = \sup A(\text{în } \mathbb{R})$;
 - iiib) $A - \{-\infty\}$ nu este majorată în \mathbb{R} , caz în care $\sup A = \infty$.

Adunarea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Adunarea pe \mathbb{R} se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor adunări în care intervin elementele $-\infty$ și ∞ :

1.

$$x + \infty = \infty + x = \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2.

$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Observație. Nu putem defini coerent operațiile

$$\infty + (-\infty)$$

și

$$(-\infty) + \infty.$$

Motivele acestei imposibilități vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de șiruri.

Scăderea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Scăderea pe \mathbb{R} se poate extinde prin adăugarea următoarelor scăderi în care intervin elementele $-\infty$ și ∞ :

1.

$$x - \infty = -\infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

2.

$$\infty - x = \infty,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Observație. Nu putem defini coerent operațiile

$$\infty - \infty$$

și

$$(-\infty) - (-\infty).$$

Motivele acestei imposibilități vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de șiruri.

Înmulțirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Înmulțirea pe \mathbb{R} se poate extinde comutativ prin adăugarea următoarelor înmulțiri în care intervin elementele $-\infty$ și ∞ :

1.

$$x \cdot (+\infty) = \infty \cdot x = \infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$.

2.

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$.

3.

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$.

4.

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$.

Observație. Nu putem defini coerent operațiile

$$\infty \cdot 0,$$

$$0 \cdot \infty,$$

$$(-\infty) \cdot 0$$

și

$$0 \cdot (-\infty).$$

Motivele acestei imposibilități vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de șiruri.

Împărțirea pe $\overline{\mathbb{R}}$

Împărțirea pe \mathbb{R} se poate extinde prin adăugarea următoarelor împărțiri în care intervin elementele $-\infty$ și ∞ :

1.

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2.

$$\frac{\infty}{x} = \infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$.

3.

$$\frac{\infty}{x} = -\infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

4.

$$\frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$.

5.

$$\frac{-\infty}{x} = \infty,$$

pentru orice $x \in (-\infty, 0)$.

Observație. Nu putem defini coerent operațiile

$$\frac{\infty}{\infty},$$

$$\frac{-\infty}{-\infty},$$

$$\frac{-\infty}{\infty}$$

și

$$\frac{\infty}{-\infty}.$$

Motivele acestei imposibilități vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de șiruri.

Alte operații care nu au sens în $\overline{\mathbb{R}}$

Nu putem defini coerent nici următoarele operații:

$$\begin{array}{c} \infty^0 \\ 1^\infty, \\ 1^{-\infty}, \\ 0^0 \\ \text{și} \\ \frac{0}{0}. \end{array}$$

Motivele acestei imposibilități vor deveni transparente după parcurgerea capitolului privind studiul limitelor de șiruri.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
2. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801

MULȚIMEA \mathbb{R}^n

Deoarece evoluția multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulți parametri, acestea sunt modelate prin intermediul funcțiilor de mai multe variabile, adică a funcțiilor care au drept domeniu de definiție o submulțime a lui \mathbb{R}^n . Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăților mulțimii \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n ca spațiu vectorial peste \mathbb{R}

Produsul scalar în \mathbb{R}^n

Norma unui vector din \mathbb{R}^n

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Bila deschisă, bila închisă și sfera din \mathbb{R}^n

\mathbb{R}^n ca spațiu vectorial peste \mathbb{R}

Dacă X_1, X_2, \dots, X_n sunt mulțimi nevide, atunci produsul lor cartezian, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ constă în toate perechile ordonate (x_1, x_2, \dots, x_n) , cu $x_i \in X_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

În cazul în care toate mulțimile X_i sunt identice, adică $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, vom nota produsul cartezian

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \stackrel{\text{not}}{=} X^n.$$

Vom lucra în cele ce urmează cu \mathbb{R}^n .

Observație. *Așa cum uneori ne referim la \mathbb{R}^1 ca fiind dreapta reală, la fel vom numi uneori \mathbb{R}^2 planul real sau \mathbb{R}^3 spațiul real.*

Observație. *Pentru simplificarea scrierii, vom nota*

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

iar x_1, x_2, \dots, x_n se vor numi prima componentă, a doua componentă, ..., a n -a componentă a lui x .

x va fi numit vector sau punct din \mathbb{R}^n .

Elementul

$$0 = (0, 0, \dots, 0)$$

se numește originea sau vectorul zero al lui \mathbb{R}^n .

Vom introduce două operații algebrice pe \mathbb{R}^n .

Definiție. Dacă $c \in \mathbb{R}$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci definim $c \cdot x$ (notat pe scurt cu cx), numit produsul numărului real c cu vectorul x , astfel

$$c \cdot x = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci definim $x+y$, numit suma vectorilor x și y , prin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Teoremă. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ și $b, c \in \mathbb{R}$. Atunci avem:

A 1.

$$x + y = y + x.$$

A 2.

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

A 3.

$$0 + x = x + 0.$$

A 4.

$$x + (-1)x = (-1)x + x = 0.$$

I 1

$$1x = x.$$

I 2.

$$b(cx) = (bc)x.$$

D

$$c(x + y) = cx + cy$$

și

$$(b + c)x = bx + cx.$$

Observație. Prin urmare, \mathbb{R}^n , cu cele două operații descrise mai sus, este spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

Observație. Vom folosi următoarele notații

$$(-1)x \stackrel{\text{not}}{=} -x$$

și

$$x + (-y) \stackrel{\text{not}}{=} x - y.$$

Observație. Sistemul $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, formează o bază a spațiului vectorial real \mathbb{R}^n , orice vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ putând fi scris sub forma

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Produsul scalar în \mathbb{R}^n și norma unui vector din \mathbb{R}^n

Definiție. Pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definim $x \cdot y$ (notat pe scurt xy), numit produsul scalar al vectorilor x și y , prin

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

și norma lui x , notată $\|x\|$, prin

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Iată principalele proprietăți ale produsului scalar.

Propoziție. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ și $c \in \mathbb{R}$ avem:

i)

$$x \cdot x \geq 0.$$

ii)

$$x \cdot x = 0 \iff x = 0.$$

iii)

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

iv)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

și

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

v)

$$(cx) \cdot y = c(x \cdot y) = x \cdot (cy).$$

Vom prezenta acum principalele proprietăți ale normei (sau lungimii) unui vector.

Propoziție (Proprietățile Normei). Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ și $c \in \mathbb{R}$. Atunci:

i)

$$\|x\| \geq 0.$$

ii)

$$\|x\| = 0 \iff x = 0.$$

iii)

$$\|cx\| = |c| \|x\|.$$

iv)

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \left\| x \overset{+}{-} y \right\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Observație. Numărul real $\|x\|$ poate fi gândit ca fiind lungimea lui x sau ca fiind distanța de la 0 la x .

Mai general, $\|x - y\|$ poate fi interpretată ca distanța de la x la y .

Astfel

i) spune că distanța de la x la y este un număr real pozitiv care este 0 dacă și numai dacă $x = y$,

iii), pentru $c = -1$, arată că

$$\|x - y\| = \|y - x\|,$$

adică distanța de la x la y este egală cu distanța de la y la x ,

iar iv) implică inegalitatea

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$$

care este cunoscută sub numele de inegalitatea triunghiului.

Propoziție (Identitatea Paralelogramului). Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Prezentăm acum un rezultat care arată relațiile dintre lungimea unui vector și valorile absolute ale componentelor sale.

Propoziție. Pentru $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, avem

$$|x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Observație. Inegalitatea de mai sus arată că dacă lungimea lui x este mică, atunci lungimile componentelor lui x sunt mici și reciproc.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz

Vom prezenta acum un rezultat foarte util (vezi, spre exemplu, demonstrația Propoziției de la pagina 207, precum și cea a Lemei de aproximare de la pagina 321) care a fost demonstrat de către Cauchy.

Deoarece Buniakovski și Schwarz au dat generalizări utile ale acestui rezultat, el se numește inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Notă istorică. Matematicianul francez *Augustin-Louis Cauchy* (1789 - 1857) a fost fondatorul Analizei Matematice moderne. Laplace și Lagrange au fost prieteni ai familiei Cauchy. La sfatul lui Lagrange, tatăl lui Cauchy a decis că înainte de a începe un studiu serios al matematicii, fiul său are nevoie de un studiu temeinic al limbilor clasice. Astfel, începând cu 1802, Cauchy studiază, timp de doi ani, limbile clasice la École Centrale du Panthéon, iar din 1805 până în 1807 este student la École Polytechnique, pentru ca apoi să urmeze cursurile de la École des Ponts et Chaussées. În 1810 primește prima slujbă la Cherbourg unde contribuie la realizarea infrastructurii portuare necesare războaielor purtate de către Napoleon. Cauchy era un catolic fervent, fapt care i-a cauzat unele neplăceri. După încercări nereușite de a obține o poziție academică la École des Ponts et Chaussées, Bureau des Longitudes și École Polytechnique, fiind preferați în defavoarea sa Legendre, Poincaré, Molard și Binet, reușește să obțină, în 1815, un post la École Polytechnique, iar ulterior, în 1817, un post la Collège de France. Cursul

său, intitulat *Cours d'analyse*, apărut în 1821, prezintă teoremele de bază ale analizei matematice într-un mod foarte riguros. Cartea *Leçons sur le Calcul Différentiel* poate fi considerată ca primul curs riguros de analiză complexă. În 1816 primește marele premiu al Academiei Franceze de Științe pentru o lucrare asupra undelor și devine membru al Academiei de Științe. Relațiile lui Cauchy cu ceilalți membri ai comunității științifice nu au fost prea bune, fiind celebre în epocă opiniile deloc măgulitoare la adresa sa ale lui Poncelet și Abel. Din cauza conjuncturii politice, în 1830, Cauchy petrece o scurtă perioadă în Elveția. Deoarece nu este de acord să depună jurământul de credință față de noul regim instalat la Paris, își pierde toate pozițiile deținute în Franța. În 1831 pleacă la Torino unde acceptă oferta regelui Piemontului de a ocupa o catedră de fizică teoretică. În 1833 pleacă la Praga pentru a-l însoți în exil pe regele Charles al zecelea, unde se întâlnește cu Bolzano. Se înapoiază la Paris, în 1838, unde își reocupă locul la Academie. În 1848 își recapătă și pozițiile universitare. A fost unul dintre cei mai prolifici matematicieni, publicând 789 de articole. Multe noțiuni de analiză matematică, analiză complexă, ecuații diferențiale, fizică matematică și mecanică teoretică sunt legate de numele său.

Notă istorică. *Victor Buniakovski* (1804-1889) a fost profesor la St. Petersburg.

Notă istorică. *Hermann Amandus Schwarz* (1843-1921) a fost studentul și succesorul lui Weierstrass la Berlin. A avut numeroase contribuții matematice, în special în cadrul analizei complexe.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$x \cdot y \leq \|x\| \|y\|.$$

Mai mult, dacă x și y nu sunt zero, atunci avem egalitate dacă și numai dacă există un număr real strict pozitiv c astfel ca

$$x = cy.$$

Demonstrație. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $z = ax - by$, atunci

$$z \cdot z \geq 0,$$

de unde, folosind proprietățile precedente, avem

$$0 \leq a^2 x \cdot x - 2abx \cdot y + b^2 y \cdot y.$$

Alegem $a = \|y\|$ și $b = \|x\|$.

Prin urmare avem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|y\|^2 \|x\|^2 - 2 \|y\| \|x\| (x \cdot y) + \|x\|^2 \|y\|^2 = \\ &= 2 \|x\| \|y\| (\|x\| \|y\| - (x \cdot y)), \end{aligned}$$

de unde

$$x \cdot y \leq \|x\| \|y\|.$$

Dacă $x = cy$, cu $c > 0$, atunci

$$\|x\| = c \|y\|,$$

deci

$$x \cdot y = (c)y \cdot y = c(y \cdot y) = c \|y\|^2 = (c \|y\|) \|y\| = \|x\| \|y\|.$$

Reciproc, dacă $x \cdot y = \|x\| \|y\|$, atunci pentru $a = \|y\|$ și $b = \|x\|$, elementul $z = ax - by$ are proprietatea că

$$z \cdot z = 0,$$

de unde $z = 0$, adică

$$\|y\| x = \|x\| y.$$

Prin urmare

$$x = cy,$$

unde $c = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (am folosit faptul că $\|y\| \neq 0$).

Corolar. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

Mai mult, dacă x și y nu sunt zero, atunci avem egalitate dacă și numai dacă există un număr real c astfel ca

$$x = cy.$$

Observație. Dacă $\|x\| = \|y\| = 1$, atunci $|x \cdot y| \leq 1$, iar în acest caz $x \cdot y$ poate fi interpretat geometric ca fiind cosinusul unghiului dintre x și y . În \mathbb{R}^2 sau \mathbb{R}^3 , unde se poate defini unghiul φ dintre x și y , se arată că

$x \cdot y = \|x\| \|y\| \cos \varphi$; această formulă este folosită adesea pentru a defini produsul scalar $x \cdot y$. În prezența unui produs scalar geometria spațiului este mult mai bogată deoarece se poate defini noțiunea de unghi dintre doi vectori.

Fenomenele descrise mai sus permit trecerea la un nivel nou de abstrac-tizare prin degajarea următoarelor definiții:

Definiție. *Dat un spațiu vectorial real V , o funcție $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:*

1)

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \langle \alpha x, z \rangle + \langle \beta y, z \rangle ,$$

pentru orice $x, y, z \in V$ și orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2)

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle ,$$

pentru orice $x, y \in V$;

3)

$$\langle x, x \rangle \geq 0,$$

pentru orice $x \in V$;

4) pentru orice $x \in V$,

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

se numește produs scalar pe V .

Definiție. *Dat un spațiu vectorial real V , o funcție $\|.\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:*

1)

$$\|x\| \geq 0,$$

pentru orice $x \in V$;

2) pentru orice $x \in V$,

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

3)

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| ,$$

pentru orice $x \in V$ și orice $\alpha \in \mathbb{R}$;

4) pentru orice $x, y \in V$, avem

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

se numește normă pe V .

Perechea $(V, \|\cdot\|)$ se numește spațiu normat.

Observație. Numele de Identitatea Paralelogramului este justificat de următoarea interpretare geometrică: în paralelogramul cu vârfurile $0, x, x+y$ și y suma pătratelor lungimilor diagonalelor este egală cu suma pătratelor lungimilor laturilor. Importanța identității paralelogramului rezidă în faptul că satisfacerea ei pentru orice doi vectori caracterizează normele care provin dintr-un produs scalar (vezi [1], pagina 27).

Bila deschisă, bila închisă și sfera din \mathbb{R}^n

Definiție. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ și $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

Atunci mulțimea

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$$

se numește bila deschisă cu centrul x și raza r (din \mathbb{R}^n) și se notează cu $B(x, r)$, mulțimea

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$$

se numește bila închisă cu centrul x și raza r (din \mathbb{R}^n) și se notează cu $B[x, r]$, iar mulțimea

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}$$

se numește sfera cu centrul x și raza r (din \mathbb{R}^n) și se notează cu $S(x, r)$.

Exerciții

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|,$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care nu satisface identitatea paralelogramului.

Observație. Mai general, pentru $p \in [1, \infty]$, funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{dacă } p \in [1, \infty) \\ \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, & \text{dacă } p = \infty \end{cases},$$

pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, este o normă care satisface identitatea paralelogramului dacă și numai dacă $p = 2$.

3. Să se arate că există a și b numere reale strict pozitive astfel ca

$$a \|x\|_1 \leq \|x\| \leq b \|x\|_1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Să se arate că există a și b numere reale strict pozitive astfel ca

$$a \|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq b \|x\|_1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Observație. Ultimele două exerciții exemplifică un fenomen mult mai general, anume faptul că pentru orice două norme $\|\cdot\|_1$ și $\|\cdot\|_2$ pe \mathbb{R}^n , există $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ astfel încât

$$\|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Este adevărat că

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_1 \|y\|_1$$

și

$$|x \cdot y| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$?

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

dacă și numai dacă există $c \geq 0$ astfel ca $x = cy$ sau $y = cx$?

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, este adevărat că

$$\|x + y\|_\infty = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

dacă și numai dacă există $c \geq 0$ astfel ca $x = cy$ sau $y = cx$?

8. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, atunci

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

dacă și numai dacă $x \cdot y = 0$.

În acest caz spunem că x și y sunt ortogonali sau perpendiculari.

9. Să se descrie mulțimile

$$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 < 1\},$$

$$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < 1\}$$

și

$$B_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty < 1\}.$$

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică II**, Editura Universității din București, 1998 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214

ELEMENTE DE TOPOLOGIE

La mijlocul secolului al XIX-lea a început o dezvoltare cu totul nouă a geometriei, care curând a devenit una dintre marile forțe ale matematicii moderne. Noul subiect, denumit topologie sau *analysis situs*, are ca obiect studiul proprietăților figurilor geometrice care persistă, chiar dacă figurile sunt supuse unor transformări care distrug toate proprietățile lor metrice și proiective. ... Când Bernhard Riemann a venit la Göttingen ca student, atmosfera matematică a acestui orașel universitar era plină de interes pentru aceste noi și ciudate idei geometrice. Curând el și-a dat seama că în aceste idei se află cheia înțelegerii celor mai profunde proprietăți ale funcțiilor analitice de o variabilă complexă. Poate că nimic nu a dat un impuls mai puternic dezvoltării ulterioare a topologiei decât marea construcție a teoriei lui Riemann a funcțiilor, în care noțiunile topologice sunt absolut fundamentale.

Ce este matematica?, de R. Courant și H. Robbins, Editura Științifică, București, 1969, pagina 252

În acest capitol vom introduce conceptele de bază ale topologiei și vom prezenta câteva dintre proprietățile topologice cruciale ale lui \mathbb{R}^n .

NOȚIUNI ELEMENTARE DE TOPOLOGIE PE \mathbb{R}^n ȘI $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțime deschisă și mulțime închisă
Vecinătate a unui punct
Punct interior al unei mulțimi
Punct de acumulare al unei mulțimi
Teorema intervalelor nevide închise incluse din \mathbb{R}^n
Teorema Bolzano-Weierstrass
Teorema de structură a mulțimilor deschise
Marginile unei mulțimi mărginite de numere reale sunt puncte
aderente ale mulțimii
Definiția spațiului topologic
Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțime deschisă și mulțime închisă

Noțiunile de mulțime deschisă și mulțime închisă sunt esențiale. Ele intervin, în mod explicit sau implicit, în aproape orice definiție sau teorema din acest curs (vezi spre exemplu: noțiunile de vecinătate, punct de acumulare, punct frontieră, mulțime compactă, mulțime conexă, definiția limitei unui șir, definiția funcției continue, definiția limitei unei funcții într-un punct etc).

Definiție. O submulțime D a lui \mathbb{R}^n se numește deschisă în \mathbb{R}^n (sau simplu deschisă) dacă pentru orice punct x din D există un număr real strict pozitiv r astfel ca bila deschisă cu centrul x și raza r să fie conținută în D .

Observație. Altfel spus, mulțimea D din \mathbb{R}^n este deschisă dacă orice punct al său este centrul unei bile deschise conținută în D .

Exemple-Exerciții

1. \mathbb{R}^n este deschisă.
2. $(0, 1)$ este deschisă în \mathbb{R} , dar $[0, 1]$ nu este deschisă în \mathbb{R} .
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ și $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ sunt deschise în \mathbb{R}^2 , dar $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ nu este deschisă în \mathbb{R}^2 .
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1) \text{ și } y = 0\}$ nu este deschisă în \mathbb{R}^2 (a se compara cu 2).

5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1)\}$ este deschisă în \mathbb{R}^2 .
6. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1)\}$ nu este deschisă în \mathbb{R}^2 .
7. Orice bilă deschisă din \mathbb{R}^n este deschisă în \mathbb{R}^n .

Rezultatul de mai jos colectează proprietățile esențiale ale mulțimilor deschise.

Propoziție (Proprietățile mulțimilor deschise)

- i) \emptyset și \mathbb{R}^n sunt deschise (în \mathbb{R}^n).
- ii) Intersecția oricăror două mulțimi deschise din \mathbb{R}^n este o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n .
- iii) Reuniunea unei familii arbitrare de mulțimi deschise din \mathbb{R}^n este o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n .

Observație. Intersecția unei familii finite de mulțimi deschise din \mathbb{R}^n este o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n .

Intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise din \mathbb{R}^n nu este, în general, o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n , așa cum arată următorul exemplu:

$$D_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$$

este o mulțime deschisă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = [0, 1],$$

iar $[0, 1]$ nu este mulțime deschisă.

Definiție. O submulțime F a lui \mathbb{R}^n se numește închisă în \mathbb{R}^n (sau simplu, închisă) dacă $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă în \mathbb{R}^n .

Exemple-Exerciții

1. \mathbb{R}^n este închisă.
2. $[0, 1]$ și $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$ sunt închise în \mathbb{R} .
3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ este închisă în \mathbb{R}^2 .
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ este închisă în \mathbb{R}^2 .
5. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ este închisă în \mathbb{R}^3 .
6. Orice bilă închisă din \mathbb{R}^n este închisă în \mathbb{R}^n .

Rezultatul de mai jos colectează proprietățile esențiale ale mulțimilor închise.

Propoziție (Proprietățile mulțimilor închise)

- i) \emptyset și \mathbb{R}^n sunt închise (în \mathbb{R}^n).
- ii) Reuniunea oricăror două mulțimi închise din \mathbb{R}^n este o mulțime închisă din \mathbb{R}^n .
- iii) Intersecția unei familii arbitrare de mulțimi închise din \mathbb{R}^n este o mulțime închisă din \mathbb{R}^n .

Observație. Deși în vorbirea curentă, ca de exemplu atunci când ne referim la o ușă sau o fereastră, cuvintele deschis și închis sunt antonime, nu același lucru este valabil în contextul de mai sus.

Spre exemplu \mathbb{R}^n și \emptyset sunt mulțimi deschise și închise (în \mathbb{R}^n), iar $[0, 1]$ nu este nici deschisă, nici închisă (în \mathbb{R}).

Vecinătate a unui punct

Vom introduce acum o altă noțiune topologică care ne va fi utilă ulterior și care permite caracterizarea mulțimilor deschise și închise în alt mod.

Definiție. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, atunci orice mulțime care conține o mulțime deschisă (în \mathbb{R}^n) ce conține x se numește vecinătate (în \mathbb{R}^n) a lui x .

Mulțimea vecinătăților lui x se notează cu \mathcal{V}_x .

Punct interior al unei mulțimi

Definiție. Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numește punct interior al mulțimii A dacă aceasta este o vecinătate (în \mathbb{R}^n) a lui x .

Punct de acumulare al unei mulțimi

Definiție. Un element $x \in \mathbb{R}^n$ se numește punct de acumulare al mulțimii A dacă orice vecinătate (în \mathbb{R}^n) a lui x conține cel puțin un punct al lui A diferit de x .

Mulțimea punctelor de acumulare ale lui A se notează cu A' .

Exerciții

1. O mulțime $V \subseteq \mathbb{R}^n$ este vecinătate a lui $x \in \mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă există o bilă deschisă din \mathbb{R}^n , cu centrul în x , conținută în V .

2. Un element $x \in \mathbb{R}^n$ este punct interior al mulțimii A dacă și numai dacă există o bilă deschisă din \mathbb{R}^n , cu centrul în x , conținută în A .

3. Un element $x \in \mathbb{R}^p$ este punct de acumulare al mulțimii A dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in A$ astfel ca $0 < \|x - x_n\| < \frac{1}{n}$.

4. Orice punct din $[0, 1]$ este punct de acumulare al lui $[0, 1]$. Orice punct din $(0, 1)$ este punct interior al lui $[0, 1]$, dar 0 și 1 nu sunt puncte interioare ale lui $[0, 1]$.

5. Orice punct al lui $(0, 1)$ este punct de acumulare și punct interior al lui $(0, 1)$. Totuși, 0 și 1 sunt de asemenea puncte de acumulare ale lui $(0, 1)$, deci *un punct de acumulare al unei mulțimi nu aparține neapărat mulțimii respective*.

6. Să se determine punctele de acumulare și cele interioare pentru mulțimea $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

7. O submulțime finită a lui \mathbb{R}^n nu are puncte de acumulare și nici puncte interioare.

Rezultatul de mai jos prezintă o caracterizare a mulțimilor deschise în termeni de puncte interioare și în termeni de vecinătăți.

Teoremă. *Pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n , următoarele afirmații sunt echivalente:*

- i) A este deschisă (în \mathbb{R}^n).
- ii) Orice punct al lui A este un punct interior al lui A .
- iii) A este vecinătate (în \mathbb{R}^n) pentru orice punct al său.

Următorul rezultat, care furnizează o caracterizare a mulțimilor închise în termeni de puncte de acumulare, este extrem de util (vezi demonstrația teoremei Heine-Borel[pagina 115] și a teoremei de permanență a compacității pentru funcții continue [pagina 212]).

Teoremă. *O submulțime F a lui \mathbb{R}^n este închisă (în \mathbb{R}^n) dacă și numai dacă F conține orice punct de acumulare al său.*

Demonstrație.

" \Rightarrow " Fie x un punct de acumulare al lui F .

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $x \notin F$.

Atunci $x \in \mathbb{R}^n - F$, și cum $\mathbb{R}^n - F$ este mulțime deschisă, deducem că $\mathbb{R}^n - F$ este o vecinătate a lui x .

Cum x este un punct de acumulare al lui F , $\mathbb{R}^n - F$ conține cel puțin un punct din F .

Această contradicție încheie demonstrația acestei implicații.

” \Leftarrow ” Vom arăta că $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă.

Dacă $y \in \mathbb{R}^n - F$, atunci y nu este un punct de acumulare al lui F , deci există o vecinătate V a lui y care nu conține puncte din F , i.e. $V \subseteq \mathbb{R}^n - F$, adică $\mathbb{R}^n - F$ este o vecinătate a lui y .

Prin urmare, cum y a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}^n - F$, deducem că $\mathbb{R}^n - F$ este deschisă.

Teorema intervalelor nevide închise incluse din \mathbb{R}^n

Reamintim că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a \leq b$, intervalul deschis din \mathbb{R} , notat cu (a, b) , este mulțimea deschisă

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Similar, intervalul închis din \mathbb{R} , notat cu $[a, b]$, este mulțimea închisă

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Produsul cartezian a două intervale se numește dreptunghi, iar produsul cartezian a trei intervale se numește paralelipiped. Pentru simplitate, vom folosi termenul de interval (din \mathbb{R}^n), indiferent de n , mai precis vom adopta următoarea:

Definiție. *Un interval deschis J , din \mathbb{R}^n , este produsul a n intervale deschise din \mathbb{R} .*

Observație. *Prin urmare, dat un interval deschis J , din \mathbb{R}^n , există $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$, astfel ca*

$$J = \{x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < \zeta_i < b_i, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Similar, avem:

Definiție. *Un interval închis I , din \mathbb{R}^n , este produsul a n intervale închise din \mathbb{R} .*

Observație. *Prin urmare, pentru un interval închis I , din \mathbb{R}^n , există $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$, astfel ca*

$$I = \{x = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq \zeta_i \leq b_i, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Definiție. O submulțime a lui \mathbb{R}^n este mărginită dacă există un interval în care este conținută.

Exerciții

1. Un interval deschis din \mathbb{R}^n este mulțime deschisă.
2. Un interval închis din \mathbb{R}^n este mulțime închisă.
3. O submulțime a lui \mathbb{R}^n este mărginită dacă și numai dacă există o bilă în care este conținută.

Așa cum am văzut, proprietatea crucială a sistemului numerelor reale, echivalentă cu faptul că relația de ordine pe \mathbb{R} este completă, este faptul că pentru orice șir de intervale nevide închise incluse din \mathbb{R} , există un element, din \mathbb{R} , care se află în fiecare interval. Această proprietate este valabilă într-un cadru mai general (anume în \mathbb{R}^n). Mai precis este valabilă următoarea:

Teoremă (a intervalelor nevide închise incluse). Fie $(I_m)_{m \geq 1}$ un șir de intervale nevide închise incluse din \mathbb{R}^n , deci, astfel ca

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_m \supseteq I_{m+1} \supseteq \dots$$

Atunci există un element din \mathbb{R}^n care se află în fiecare interval.

Teorema de mai sus se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei Bolzano-Weierstrass (vezi această pagină) și al demonstrației Teoremei Heine-Borel (vezi pagina 115).

Teorema Bolzano-Weierstrass

Următorul rezultat este extrem de important pentru ceea ce urmează a fi prezentat în continuare. El se va folosi în cadrul Lemei lui Cesàro (vezi pagina 139).

Teorema Bolzano - Weierstrass. Orice submulțime mărginită și infinită a lui \mathbb{R}^n are (cel puțin) un punct de acumulare.

Demonstrație. Fie B o submulțime mărginită și infinită a lui \mathbb{R}^n .

Să considerăm I_1 un interval închis astfel ca

$$B \subseteq I_1.$$

Prin înjumătățirea "laturilor" lui I_1 se obțin 2^n intervale închise incluse în I_1 .

Deoarece B este infinită, cel puțin unul dintre cele 2^n intervale închise incluse în I_1 va conține o infinitate de elemente din B .

Fie I_2 un astfel de interval închis inclus în I_1 .

Se repetă procedeul de mai sus și se obține un șir $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots$ de intervale nevide închise incluse din \mathbb{R}^n .

Conform rezultatului precedent există $\eta \in \mathbb{R}^n$ astfel ca

$$\eta \in I_k,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că η este punct de acumulare al lui B , ceea ce va încheia demonstrația.

Să observăm pentru început că

$$0 < l(I_k) \stackrel{def}{=} \max\{b_1^k - a_1^k, \dots, b_n^k - a_n^k\} = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1),$$

unde

$$I_k = [a_1^k, b_1^k] \times \dots [a_n^k, b_n^k],$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Fie V o vecinătate arbitrară a lui η .

Atunci există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ astfel ca

$$z \in \mathbb{R}^n, \|z - \eta\| < r \Rightarrow z \in V.$$

Alegem k , suficient de mare, astfel încât să avem

$$I_k \subseteq V.$$

Alegerea unui astfel de k este posibilă deoarece pentru η și w din I_k , avem

$$\|\eta - w\| \leq \sqrt{n} l(I_k) = \frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} l(I_1),$$

și există k , suficient de mare, astfel încât să avem

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{k-1}} l(I_1) < r.$$

Pentru un astfel de k avem

$$I_k \subseteq V.$$

Deoarece I_k conține o infinitate de elemente din B , deducem că V conține cel puțin un element al lui B diferit de η .

Prin urmare η este punct de acumulare al lui B .

Notă istorică. *Karl Weierstrass* (1815-1897) a fost profesor la Berlin și a avut o influență covârșitoare la dezvoltarea Analizei Matematice. S-a născut în 1815 în Ostenfelde, Bavaria. Între 1829 și 1834 urmează cursurile gimnaziului catolic din Paderborn, unde capătă o instrucție matematică mult peste ceea ce se aștepta la acel nivel (citea regulat Crelle's Journal). În 1834, la insistențele tatălui său și împotriva voinței sale de a studia matematica, se înscrie la Universitatea din Bonn pentru a studia dreptul, finanțele și economia. Rezultatul acestui conflict a fost o perioadă de 4 ani de viață ușoară, nededicată studiului acestor științe. A studiat însă matematica pe cont propriu. În 1839 se înscrie la Academia din Münster, unde îl întâlnește pe Gudermann, care l-a încurajat puternic în studiile sale matematice. În 1841 este numit profesor la gimnaziul din Münster, iar în 1842 la cel din Deutsche Krone unde stă până în 1848, când se mută la colegiul Hoseanum din Braunsberg. A publicat câteva articole referitoare la funcții abeliene în revista acestui gimnaziu, care nu au avut ecou. După ce în 1854 publică în Crelle's Journal articolul "Zur Theorie der Abelschen Functionen", Universitatea din Königsberg îi decernează titlul de doctor. După o numire la Technische Hochschule din Berlin, Universitatea din Berlin îi oferă ceea ce dorea de mult, anume un post de profesor. În 1861 accentul pus pe rigoare îl va conduce la descoperirea celebrului exemplu de funcție continuă care nu este derivabilă în nici un punct, exemplu ce a produs stupefacție la acea dată (vezi pagina 467). Lista studenților lui Weierstrass este numeroasă: Cantor, Frobenius, Hölder, Hurwitz, Klein, Kneser, Lie, Mertens, Minkowski, Mittag-Leffler, Schwarz, Stolz. A murit, în 1897, la Berlin.

Notă istorică. *Bernard Bolzano* (1781-1848) a fost profesor de filosofia religiei la Praga, dar a avut contribuții importante și la dezvoltarea Analizei Matematice, fiind, împreună cu Cauchy, un pionier în introducerea rigorii în acest domeniu.

Exerciții

1. Să se găsească o submulțime a lui \mathbb{R}^2 care nu este nici deschisă, nici închisă.

2. Orice submulțime deschisă a lui \mathbb{R}^n este reuniunea unei familii numărabile de mulțimi închise.

3. Orice submulțime închisă a lui \mathbb{R}^n este intersecția unei familii numărabile de mulțimi deschise.

4. (**Aderența sau închiderea unei mulțimi**) Pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n , fie \overline{A} intersecția tuturor submulțimilor închise a lui \mathbb{R}^n care conțin pe A .

\overline{A} se numește închiderea lui A și este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime închisă care conține pe A .

Să se arate că:

i) \overline{A} este o mulțime închisă;

ii)

$$A \subseteq \overline{A};$$

iii)

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A};$$

iv)

$$A \text{ este închisă dacă și numai dacă } A = \overline{A};$$

v)

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \text{ pentru orice } r > 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset, \text{ pentru orice vecinătate } V \text{ a lui } x\}; \end{aligned}$$

vi)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

vii) Este adevărat că

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B} ?$$

5. (**Interiorul unei mulțimi**) Pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n , fie $\overset{\circ}{A}$ reuniunea tuturor submulțimilor deschise a lui \mathbb{R}^n care sunt conținute în A .

$\overset{\circ}{A}$ se numește interiorul lui A și este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă care este conținută în A .

Să se arate că:

i) $\overset{\circ}{A}$ este o mulțime deschisă;

ii)

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A;$$

iii)

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A};$$

iv)

A este deschisă dacă și numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$;

v)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{A} &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{există } r > 0, \text{ astfel încât } B(x, r) \subseteq A\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{există o mulțime deschisă astfel încât } x \in D \subseteq A\}; \end{aligned}$$

vi)

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B};$$

vii)

$$\overset{\circ}{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n;$$

viii) Există o submulțime A a lui \mathbb{R}^n astfel ca $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ și $\overline{A} = \mathbb{R}^n$?

6. Să se arate că, pentru o submulțime A a lui \mathbb{R}^n , avem:

$$\overline{\mathbb{R}^n - A} = \mathbb{R}^n - \overset{\circ}{A}$$

și

$$\mathbb{R}^n - \overset{\circ}{A} = \mathbb{R}^n - \overline{A}.$$

7. Să se arate că dacă A și B sunt mulțimi deschise din \mathbb{R} , atunci $A \times B$ este mulțime deschisă din \mathbb{R}^2 .

8. Fie A și B submulțimi ale lui \mathbb{R} . Atunci $A \times B$ este o mulțime închisă din \mathbb{R}^2 dacă și numai dacă A și B sunt mulțimi închise din \mathbb{R} .

9. (Acest exercițiu va fi folosit în cadrul demonstrației Teoremei Arzelà-Ascoli - vezi pagina 254) Dacă A este o submulțime a lui \mathbb{R}^n , atunci există o submulțime numărabilă C a lui A cu proprietatea că dacă $x \in A$ și $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, atunci există un element $z \in C$ astfel ca $\|x - z\| < \varepsilon$. Deci, orice element al lui A este fie în C , fie este un punct de acumulare al lui C .

10. Dacă A este o submulțime a lui \mathbb{R}^n , atunci $x \in \mathbb{R}^n$ este un punct de acumulare al lui A dacă și numai dacă orice vecinătate a lui x conține o infinitate de puncte din A .

11. O submulțime finită a lui \mathbb{R}^n nu are puncte de acumulare. Există submulțimi nemărginite ale lui \mathbb{R}^n care nu au puncte de acumulare.

12. (Frontiera unei mulțimi) Dacă A este o submulțime a lui \mathbb{R}^n , atunci $x \in \mathbb{R}^n$ se numește punct frontieră al lui A dacă orice vecinătate a lui x conține (cel puțin) un punct din A și (cel puțin) un punct din $\mathbb{R}^n - A$.

Mulțimea punctelor frontieră se notează cu $Fr(A)$.

Să se arate că

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n - A} = \overline{A} - \overset{\circ}{A}.$$

Să se arate că mulțimea A este deschisă dacă și numai dacă nu conține nici unul dintre punctele sale frontieră.

Să se arate că mulțimea A este închisă dacă și numai dacă conține toate punctele sale frontieră.

Să se arate că, dacă B este o altă submulțime a lui \mathbb{R}^n , atunci

$$Fr(A \cup B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B)$$

și

$$Fr(A \cap B) \subseteq Fr(A) \cup Fr(B).$$

Să se arate că

$$Fr(A \cup Fr(A)) \subseteq Fr(A).$$

Observație. Noțiunea de frontieră a unei mulțimi din \mathbb{R}^n intervine, în mod esențial, în a doua teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă (vezi pagina 409), precum și în definiția, lema și observația de la paginile 409-410.

13. Să se determine \overline{A} , $\overset{\circ}{A}$, A' și $Fr(A)$, pentru următoarele submulțimi ale lui \mathbb{R} :

- a) $A = [0, 1] \cup \{2\}$;
- b) $A = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$;
- c) $A = \mathbb{Q}$;
- d) $A = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$;
- e) $A = \mathbb{N}$.

Teorema de structură a mulțimilor deschise

Rezultatul de mai jos arată că intervalele deschise constituie "cărămizile" cu ajutorul cărora se poate construi orice mulțime deschisă a dreptei reale.

Teorema de structură a mulțimilor deschise. *Orice mulțime deschisă și nevidă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale deschise, disjuncte două câte două.*

Demonstrație. Fie U o mulțime deschisă a dreptei reale.

Pentru un punct $x \in U$ vom construi cel mai mare interval deschis care conține pe x și care este conținut în U , interval notat cu I_x și numit componentă a lui U .

Deoarece U este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U.$$

Fie

$$S = \{y \in \mathbb{R} \mid x < y \text{ și } y \notin U\}.$$

Dacă $S = \emptyset$, atunci

$$(x, \infty) \subseteq U.$$

Dacă $S \neq \emptyset$, atunci, cum S este minorată, există $\zeta = \inf S$.

Atunci

$$\zeta \notin U.$$

Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $\zeta \in U$, atunci, cum U este deschisă, există $\delta > 0$ astfel încât $(\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U$.

Deoarece $\inf S = \zeta < \zeta + \delta$, conform Teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi (vezi pagina 66), există $y \in S$ cu proprietatea că

$$\zeta - \delta < \zeta < y < \zeta + \delta,$$

deci

$$y \in (\zeta - \delta, \zeta + \delta) \subseteq U,$$

de unde obținem contradicția

$$y \notin S.$$

În particular, avem

$$x \neq \zeta.$$

De asemenea, avem

$$(x, \zeta) \subseteq U.$$

Într-adevăr, dacă presupunem, prin reducere la absurd, că există $x_0 \in (x, \zeta)$ astfel încât $x_0 \notin U$, atunci $x_0 \in S$, de unde contradicția $\zeta \leq x_0$.

O construcție analoagă la stânga punctului x ne asigură existența unui interval deschis

$$I_x = (\eta, \zeta) \subseteq U,$$

unde $\eta, \zeta \in \overline{\mathbb{R}}$, cu proprietatea că $\eta, \zeta \notin U$.

Este evident că

$$U = \bigcup_{x \in U} I_x.$$

Fie $I_{x_1} = (\eta_1, \zeta_1)$ și $I_{x_2} = (\eta_2, \zeta_2)$ două componente ale lui U .

Dacă

$$I_{x_1} \cap I_{x_2} \neq \emptyset,$$

atunci

$$I_{x_1} = I_{x_2}.$$

Într-adevăr, fie $x_0 \in I_{x_1} \cap I_{x_2}$. Atunci $\eta_1 < x_0 < \zeta_1$ și $\eta_2 < x_0 < \zeta_2$. Dacă $\zeta_1 < \zeta_2$, atunci $\eta_2 < x_0 < \zeta_1 < \zeta_2$, de unde $\zeta_1 \in (\eta_2, \zeta_2) \subseteq U$, contradicție care arată că $\zeta_1 \geq \zeta_2$. Similar obținem că $\zeta_1 \leq \zeta_2$.

Deci $\zeta_1 = \zeta_2$. Analog se arată că $\eta_1 = \eta_2$. În concluzie $I_{x_1} = I_{x_2}$.

Dacă \mathcal{M} reprezintă familia componentelor distincte ale lui U , putem considera funcția $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{Q}$ dată de

$$f(I_x) = r_x,$$

unde $r_x \in \mathbb{Q} \cap I_x$.

Deoarece elementele familiei \mathcal{M} sunt distincte, f este injectivă, deci, cum \mathbb{Q} este numărabilă, \mathcal{M} este cel mult numărabilă.

Observație. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\eta < a < b < \zeta.$$

Atunci

$$I_x = (\eta, \zeta) = (\eta, a] \cup [a, b] \cup [b, \zeta). \quad (*)$$

Cum

$$\frac{1}{a - \eta} > 0,$$

datorită faptului că \mathbb{R} este corp arhimedeean, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$n_0 > \frac{1}{a - \eta}.$$

Atunci

$$(\eta, a] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} [\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Într-adevăr, incluziunea \supseteq este imediată.

Pentru a justifica incluziunea \subseteq , vom considera $x \in (\eta, a]$.

Dacă $x \in [\eta + \frac{1}{n_0}, a]$, atunci

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} [\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Dacă $x \in (\eta, \eta + \frac{1}{n_0}]$, atunci cu notația $n = [\frac{1}{x-\eta}]$, avem

$$n \leq \frac{1}{x-\eta} < n+1,$$

i.e.

$$\eta + \frac{1}{n+1} < x \leq \eta + \frac{1}{n},$$

adică

$$x \in [\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}].$$

Cum

$$x \in (\eta, \eta + \frac{1}{n_0}),$$

avem

$$n_0 < \frac{1}{x-\eta},$$

de unde

$$n_0 \leq n = [\frac{1}{x-\eta}],$$

deci

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} [\eta + \frac{1}{n+1}, \eta + \frac{1}{n}] \cup [\eta + \frac{1}{n_0}, a].$$

Prin urmare incluziunea \subseteq este justificată.

Așadar intervalul $(\eta, a]$ se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.

Similar se justifică faptul că intervalul $[b, \zeta)$ se bucură de aceeași proprietate, deci, conform cu (*), intervalul $I_x = (\eta, \zeta)$ se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.

Deducem astfel, din teorema de structură a mulțimilor deschise din \mathbb{R} , că orice mulțime deschisă a dreptei reale se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de intervale închise care au interioarele disjuncte.

De fapt are un loc un fenomen mai general, anume, dacă prin cub din \mathbb{R}^n înțelegem produsul cartezian a n intervale închise de aceeași lungime, atunci orice mulțime deschisă din \mathbb{R}^n se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de cuburi care au interioarele disjuncte (vezi [2], paginile 71-72).

Acest fapt este util pentru a realiza o comparație între măsura Jordan și măsura Lebesgue.

Marginile unei mulțimi mărginite de numere reale sunt puncte aderente ale mulțimii

Rezultatul de mai jos arată că deși marginile unei mulțimi mărginite de numere reale pot să nu aparțină mulțimii, ele se află într-o strânsă relație de natură topologică cu mulțimea.

Teoremă. Fie A o mulțime mărginită de numere reale.

Atunci:

- i) $\sup A \in \overline{A}$ și $\inf A \in \overline{A}$;
- ii) dacă $\sup A \notin A$, atunci $\sup A \in A'$ și dacă $\inf A \notin A$, atunci $\inf A \in A'$.

Demonstrație.

- i) Pentru orice vecinătate V a lui $\sup A$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât

$$(\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \subseteq V.$$

Atunci, conform teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi (vezi pagina 66), există $a \in A$ astfel încât

$$\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A,$$

deci

$$a \in (\sup A - \varepsilon, \sup A + \varepsilon) \cap A \subseteq V \cap A,$$

adică

$$V \cap A \neq \emptyset,$$

ceea ce arată că

$$\sup A \in \overline{A}.$$

Similar se dovedește că

$$\inf A \in \overline{A}.$$

ii) Dacă $\sup A \notin A$, raționamentul de mai sus arată

$$\{V - \{\sup A\}\} \cap A \neq \emptyset,$$

deci

$$\sup A \in A'.$$

Similar se justifică afirmația privitoare la inf.

Definiția spațiului topologic

Din cele discutate mai sus se degajă, la un nivel de abstractizare mai ridicat, următoarele definiții:

Definiție. Fie X o mulțime nevidă. Se numește topologie pe X o familie de submulțimi ale lui X , notată τ , care verifică următoarele trei axiome:

- 1) $\emptyset, X \in \tau$
- 2) $D_1, D_2 \in \tau$ implică $D_1 \cap D_2 \in \tau$
- 3) dacă $D_i \in \tau$, pentru orice $i \in I$, atunci $\bigcup_{i \in I} D_i \in \tau$.

Definiție. Se numește spațiu topologic un dublet (X, τ) , unde τ este o topologie pe mulțimea X .

Elementele mulțimii τ se numesc mulțimi deschise.

Observație. Noțiunile de mulțime închisă, vecinătate a unui punct, punct interior al unei mulțimi, punct de acumulare al unei mulțimi, închiderea unei mulțimi, interiorul unei mulțimi și cea de frontieră a unei mulțimi au sens în cadrul mai general al unui spațiu topologic (vezi [1]).

Structura topologică a lui $\overline{\mathbb{R}}$

Propoziție. Mulțimea

$$\tau = \{D \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R}\} \cup \{D \cup [-\infty, y) \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ și } y \in \mathbb{R}\} \cup \\ \cup \{D \cup (x, \infty] \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ și } x \in \mathbb{R}\} \cup$$

$$\cup \{D \cup [-\infty, y) \cup (x, \infty] \mid D \text{ este deschisă în } \mathbb{R} \text{ și } x, y \in \mathbb{R}\}$$

este o topologie pe $\overline{\mathbb{R}}$, numită topologia uzuală pe $\overline{\mathbb{R}}$.

Observație. Ca atare, toate noțiunile topologice descrise mai sus au sens în $\overline{\mathbb{R}}$.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
2. *G. B. Folland*, **Real Analysis, Modern Techinques and Their Applications**, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
3. *C. Popa, V. Hiriș, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme**, Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23777

CONEXITATE ȘI COMPACITATE

Mulțimi conexe
Mulțimi compacte
Teorema Heine-Borel
Teorema lui Cantor

Mulțimi conexe

Unele spații pot fi împărțite în mod natural în două sau mai multe părți. De exemplu, spațiul care constă din două drepte care nu se intersectează poate fi împărțit în cele două drepte. Iată un alt exemplu: complementara în plan a unui cerc constă din două părți: punctele aflate în interiorul acestui cerc și punctele aflate în afara lui. La fel, dacă p este un punct al dreptei L , atunci complementara în L a acestui punct se împarte în mod natural în două semidrepte determinate de p (îndepărtarea lui p divide L în două părți). În fiecare din exemplele precedente împărțirea apare în mod natural și este unică. Mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale admite o astfel de împărțire în mai multe moduri. Fiecare număr irațional x produce o împărțire a mulțimii \mathbb{Q} în mulțimea acelor numere raționale care sunt mai mici decât x și mulțimea numerelor raționale mai mari decât x . Mulțimea numerelor iraționale poate fi, la fel, împărțită în mai multe moduri prin diferite numere raționale. Pe de altă parte, unele mulțimi nu pot fi împărțite în părți în nici un mod natural; acest lucru este valabil de exemplu pentru dreaptă, pentru segmentul de dreaptă, pentru un plan și pentru discul circular. Este desigur posibilă o împărțire forțată a spațiului respectiv. De exemplu, dacă I este intervalul $[a, b]$ și c este un număr care satisface condiția $a < c < b$, atunci c împarte I în două intervale $[a, c]$ și $[c, b]$. Însă, deoarece ele au un punct comun c , această împărțire nu poate fi privită ca satisfăcătoare. Am putea face o împărțire îndepărtând punctul c din una dintre mulțimi, să zicem din a doua. Fie $A = [a, c]$ și $B = (c, b]$; atunci $A \cup B = I$ și $A \cap B = \emptyset$. Dar o astfel de împărțire sau "rupere" a lui I nu este naturală, deoarece mulțimea B se "lipește" de A în punctul c . Dacă îndepărtăm punctul c și din A pentru a elimina "lipirea", atunci $A \cup B \neq I$ dar $A \cup B$ este complementara punctului c în I ; deci acest exemplu este analog exemplului legat de complementara punctului p pe dreapta L .

Introducere în topologie, W.G. Chinn, N.E. Steenrod, Editura Tehnică, București, 1981, paginile 51-52

O analiză atentă a rezultatelor de analiză matematică studiate în liceu ne arată că un rol esențial l-au jucat intervalele, adică mulțimile constituite

dintr-o "bucată". În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestui concept, anume noțiunea de mulțime conexă.

Definiție. O submulțime D a lui \mathbb{R}^n se numește *neconexă* dacă există două mulțimi deschise A și B cu proprietatea că $A \cap D$ și $B \cap D$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este D .

Definiție. O submulțime C a lui \mathbb{R}^n se numește *conexă* dacă nu este *neconexă*.

Exemple

1. \mathbb{N} este *neconexă* în \mathbb{R} .
2. Mulțimea $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ este *neconexă* în \mathbb{R} .
3. $\mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ este *neconexă* în \mathbb{R} .

Teoremă. Mulțimea $I = [0, 1]$ este *conexă* în \mathbb{R} .

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două mulțimi deschise A și B astfel ca $A \cap I$ și $B \cap I$ sunt nevide, disjuncte și reuniunea lor este I .

Să presupunem că $1 \in B$.

Fie $c = \sup(A \cap I) \in A \cup B$.

Dacă $c \in A$, atunci $c \in (0, 1)$.

Deoarece A este deschisă și îl conține pe c , atunci există puncte din $A \cap I$ mai mari decât c , ceea ce contrazice definiția lui c .

Dacă $c \in B$, atunci $c \in (0, 1]$.

Deoarece B este deschisă și îl conține pe c , atunci există $c_1 < c$ astfel ca intervalul $[c_1, 1]$ este conținut în $B \cap I$, ceea ce contrazice definiția lui c .

Prin urmare, I este o mulțime conexă.

Observație. Similar se arată că mulțimea $(0, 1)$ este conexă în \mathbb{R} .

Observație. De fapt are loc un fenomen mai general, anume o submulțime a lui \mathbb{R} este conexă dacă și numai dacă este interval (vezi [1], pagina 134).

Teoremă. Mulțimea \mathbb{R}^n este conexă (în \mathbb{R}^n).

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că există două mulțimi deschise A și B astfel ca $A \cap \mathbb{R}^n$ și $B \cap \mathbb{R}^n$ sunt nevide, disjuncte și reuniunea lor este \mathbb{R}^n .

Fie $x \in A$ și $y \in B$.

Atunci

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + t(y - x) \in A\}$$

și

$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + t(y - x) \in B\}$$

sunt două mulțimi deschise (din \mathbb{R}), astfel încât $A_1 \cap [0, 1]$ și $B_1 \cap [0, 1]$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este $[0, 1]$.

Prin urmare $[0, 1]$ nu este conexă (în \mathbb{R}), contradicție care încheie demonstrația.

Corolar. *Singurele submulțimi ale lui \mathbb{R}^n care sunt deschise și închise sunt \emptyset și \mathbb{R}^n .*

Demonstrație. Fie A o submulțime a lui \mathbb{R}^n care este deschisă și închisă.

Atunci $B = \mathbb{R}^n - A$ este de asemenea deschisă și închisă.

Dacă A nu este \emptyset sau \mathbb{R}^n , atunci A și B sunt două mulțimi deschise, nevide, disjuncte și reuniunea lor este \mathbb{R}^n , ceea ce contrazice teorema de mai sus.

Așadar, A este \emptyset sau \mathbb{R}^n .

Exercițiu. O submulțime deschisă A a lui \mathbb{R}^n este conexă dacă și numai dacă nu există două submulțimi deschise, nevide, disjuncte ale lui \mathbb{R}^n a căror reuniune să fie mulțimea A .

Este util, uneori, să avem un alt criteriu pentru a decide dacă o submulțime deschisă a lui \mathbb{R}^n este conexă.

În acest scop avem nevoie de următoarea definiție.

Definiție. *Segmentul, din \mathbb{R}^n , de capete $x, y \in \mathbb{R}^n$ este mulțimea*

$$\{u \in \mathbb{R}^n \mid \text{există } t \in [0, 1] \text{ astfel încât } u = x + t(y - x)\},$$

care se notează cu $[x, y]$.

Definiție. *O linie poligonală care unește punctele x și y , din \mathbb{R}^n , este o mulțime P pentru care există segmentele L_1, L_2, \dots, L_n , din \mathbb{R}^n , astfel încât L_1 are extremitățile x și z_1 , L_2 are extremitățile z_1 și z_2 , ..., L_n are extremitățile z_{n-1} și y , iar*

$$P = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n.$$

Teoremă. Fie G o mulțime deschisă din \mathbb{R}^n . Atunci G este conexă dacă și numai dacă orice două puncte din G pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în G .

Demonstrație.

” \Leftarrow ” Să presupunem că G nu este conexă.

Atunci există A și B două mulțimi deschise astfel încât $A \cap G$ și $B \cap G$ sunt nevide, disjuncte și reuniunea lor este G .

Fie

$$x \in A \cap G$$

și

$$y \in B \cap G.$$

Conform ipotezei, există segmentele L_1, L_2, \dots, L_n , din G , astfel încât L_1 are extremitățile x și z_1 , L_2 are extremitățile z_1 și z_2 , ..., L_n are extremitățile z_{n-1} și y .

Fie k cel mai mic număr natural astfel încât extremitatea z_{k-1} a lui L_k se află în $A \cap G$, iar z_k se află în $B \cap G$.

Atunci mulțimile

$$A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in A \cap G\}$$

și

$$B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid z_{k-1} + t(z_k - z_{k-1}) \in B \cap G\}$$

au proprietatea că sunt mulțimi deschise, iar $A_1 \cap [0, 1]$ și $B_1 \cap [0, 1]$ sunt nevide, disjuncte și reuniunea lor este $[0, 1]$.

Prin urmare am obținut o contradicție, anume aceea că $[0, 1]$ nu este mulțime conexă.

” \Rightarrow ” Fie $x \in G$.

Fie

$$G_1 = \{y \in G \mid \text{există segmentele } L_1, L_2, \dots, L_n \text{ din } G, \text{ astfel încât } L_1 \text{ are extremitățile } x$$

$$\text{și } z_1, L_2 \text{ are extremitățile } z_1 \text{ și } z_2, \dots, L_n \text{ are extremitățile } z_{n-1} \text{ și } y\}$$

și

$$G_2 = \{y \in G \mid \text{nu există segmente } L_1, L_2, \dots, L_n \text{ din } G, \text{ astfel încât } L_1 \text{ are extremitățile}$$

x și z_1 , L_2 are extremitățile z_1 și z_2, \dots , L_n are extremitățile z_{n-1} și y .

Evident

$$G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Cum $x \in G_1$, deducem că G_1 este nevidă.

Vom arăta că G_1 este mulțime deschisă în \mathbb{R}^n .

Fie

$$y \in G_1 \subseteq G.$$

Deoarece G este mulțime deschisă, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca

$$\|w - y\| < r \Rightarrow w \in G.$$

Dar, folosind definiția lui G_1 , există segmentele L_1, L_2, \dots, L_n , din G , astfel încât L_1 are extremitățile x și z_1 , L_2 are extremitățile z_1 și z_2, \dots, L_n are extremitățile z_{n-1} și y .

Pentru un $w \in \mathbb{R}^n$, astfel ca $\|w - y\| < r$, va rezulta că există segmentele L_1, L_2, \dots, L_n și $[y, w]$, din G , astfel încât L_1 are extremitățile x și z_1 , L_2 are extremitățile z_1 și z_2, \dots, L_n are extremitățile z_{n-1} și y , $[y, w]$ are extremitățile y și w , deci $w \in G_1$.

Prin urmare G_1 este mulțime deschisă în \mathbb{R}^n .

Similar se arată că G_2 este mulțime deschisă în \mathbb{R}^n .

Atunci G_2 este vidă (căci altfel se contrazice faptul că G este conexă), ceea ce încheie demonstrația acestei implicații.

Mulțimi compacte

O privire atentă asupra materiei de analiză matematică studiată în liceu relevă importanța intervalelor închise și mărginite. În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestui concept, anume noțiunea de mulțime compactă.

Definiție. O submulțime K a lui \mathbb{R}^n se numește compactă dacă pentru orice $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \mid \alpha \in A\}$ astfel ca $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$, există $J \subseteq A$, J finită, astfel ca $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} D_\alpha$, i.e. pentru orice acoperire cu mulțimi deschise, din \mathbb{R}^n , a lui K , există o subacoperire finită a sa.

Observație. Esența definiției de mai sus constă în faptul ca prin intermediul ei se face trecerea de la o familie arbitrară de mulțimi deschise la o familie finită de astfel de mulțimi.

Exemple

1. Orice submulțime finită a lui \mathbb{R}^n este compactă.
2. $[0, \infty)$ nu este compactă (în \mathbb{R}).
3. $(0, 1)$ nu este compactă (în \mathbb{R}).
4. $[0, 1]$ este compactă (în \mathbb{R}).

Teorema Heine-Borel

Nu este ușor să se arate, folosind numai definiția, că o mulțime este compactă.

De aceea, următorul rezultat, care caracterizează mulțimile compacte din \mathbb{R}^n , este foarte util (vezi Teorema lui Cantor, pagina 118, Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue, pagina 212, Teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue, pagina 213, Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue, pagina 216, Teorema lui Dini, pagina 220).

Teorema Heine-Borel. *O submulțime a lui \mathbb{R}^n este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.*

Notă istorică. *Heinrich Eduard Heine* (1821-1881) a studiat la Berlin, fiind studentul lui Weierstrass, Gauss și Dirichlet. A predat la Bonn și la Halle. Pe lângă teorema de mai sus, o altă contribuție importantă a sa este formularea conceptului de continuitate uniformă (vezi pagina 221).

Notă istorică. *Emile Borel* (1871-1956), studentul lui Hermite, a fost profesor la Paris și unul dintre cei mai influenți matematicieni. A studiat la École Normale Supérieure din Paris. În 1893, pe când avea numai 22 de ani, este numit la Universitatea din Lille, iar în 1896 la École Normale Supérieure (unde, timp de 10 ani, începând cu anul 1910, este director). În 1909 devine titularul catedrei de teoria funcțiilor (creată special pentru el) de la Sorbona, poziție pe care o va deține până în 1941. Din 1921 este membru al Academiei de Științe, al cărui președinte devine în 1934. Împreună cu Lebesgue și Baire, este fondatorul teoriei măsurii. Este unul dintre fondatorii teoriei jocurilor. A fost membru al Camerei Deputaților a parlamentului francez (1924-1936), precum și ministru al navigației (1925-1940). În 1941 este arestat de către regimul de la Vichy, după care devine membru al rezistenței franceze. Cele mai importante opere ale lui Borel sunt: *Le Hasard* (1913), *L'espace et le*

temps (1921), Traité du calcul de probabilité et ses applications (1924-34),
Les paradoxes de l'infini (1946).

Demonstrația Teoremei Heine-Borel

" \Rightarrow " Fie K o submulțime compactă a lui \mathbb{R}^n .

Vom arăta că K este închisă.

Fie, în acest sens, $x \in \mathbb{R}^n - K$.

Pentru orice $m \in \mathbb{N}$, să considerăm mulțimile deschise

$$G_m = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| > \frac{1}{m}\}.$$

Atunci

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m = \mathbb{R}^n - \{x\},$$

deci

$$K \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m.$$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$K \subseteq G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n_0} \subseteq G_{n_0}.$$

Atunci

$$\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| < \frac{1}{n_0}\} \subseteq \mathbb{R}^n - K,$$

ceea ce arată, având în vedere că x a fost ales arbitrar, că $\mathbb{R}^n - K$ este deschisă, deci K este închisă.

Să arătăm că K este mărginită.

Fie mulțimile deschise

$$H_m = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < m\},$$

unde $m \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$K \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_m.$$

Cum K este compactă, există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca

$$K \subseteq H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{n_0} \subseteq H_{n_0},$$

ceea ce arată că K este mărginită.

” \Leftarrow ”

Fie $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ astfel încât

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha.$$

Deoarece K este mărginită, există un interval închis I_1 , din \mathbb{R}^n , având proprietatea că

$$K \subseteq I_1.$$

Spre exemplu, putem alege

$$I_1 = \{(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \mid |\zeta_i| < r, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

pentru un r suficient de mare.

Să presupunem că K nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Atunci, cel puțin unul dintre cele 2^n intervale închise obținute prin înjumătățirea ”laturilor” lui I_1 conține puncte din K și intersecția lui K cu acest interval nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Fie I_2 un astfel de interval.

Continuând acest procedeu obținem un șir $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de intervale nevide închise incluse astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, mulțimea nevidă $K \cap I_n$ nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Conform Teoremei intervalelor nevide închise incluse (vezi pagina 98), există

$$y \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k.$$

Atunci y este un punct de acumulare al lui K .

Cum K este închisă, $y \in K$, deci există $\alpha_0 \in A$, astfel ca

$$y \in D_{\alpha_0}.$$

Prin urmare, există $\varepsilon > 0$ cu proprietatea următoare:

$$\|w - y\| < \varepsilon \Rightarrow w \in D_{\alpha_0}.$$

Întrucât lungimea laturilor lui I_k este $\frac{r}{2^{k-2}}$, avem că

$$w \in I_k \Rightarrow \|w - y\| < \frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}},$$

deci dacă k este ales astfel ca

$$\frac{r\sqrt{n}}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

atunci toate punctele lui I_k se găsesc în D_{α_0} , ceea ce contrazice faptul că $I_k \cap K$ nu este conținută în nici o reuniune finită de elemente din mulțimea $\{D_\alpha = \overset{\circ}{D}_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Teorema lui Cantor

Vom prezenta în continuare un rezultat datorat lui Cantor care întărește proprietatea de completitudine anterioară, aici fiind considerate mulțimi închise și mărginite, în loc de intervale. Vom folosi acest rezultat în cadrul demonstrației teoremei lui Baire (vezi pagina 121) și a lui Dini (pagina 220).

Teorema lui Cantor. *Fie F_1 o submulțime a lui \mathbb{R}^n , închisă, nevidă și mărginită, iar*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \dots$$

un șir de mulțimi nevide și închise.

Atunci există un punct din \mathbb{R}^n care aparține tuturor mulțimilor F_n .

Demonstrație. Conform teoremei lui Heine-Borel (vezi pagina 115), F_1 este o mulțime compactă.

Să considerăm mulțimile deschise

$$G_k = \mathbb{R}^n - F_k,$$

unde $k \in \mathbb{N}$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \emptyset.$$

Atunci

$$F_1 \subseteq \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k,$$

și cum F_1 este o mulțime compactă, există G_1, G_2, \dots, G_p astfel ca

$$F_1 \subseteq \bigcup_{k \in \{1, 2, \dots, p\}} G_k \subseteq G_p,$$

deci

$$F_p \subseteq F_1 \cap F_p = \emptyset,$$

de unde contradicția $F_p = \emptyset$.

Ca atare, demonstrația este încheiată.

Observație. *Conceptele de mulțime conexă și mulțime compactă au sens în cadrul mai larg al unui spațiu topologic (vezi [1]).*

Exerciții

1. Să se arate, fără a folosi teorema Heine-Borel, că dacă K este o submulțime compactă a lui \mathbb{R}^n , iar $F \subseteq K$ este o mulțime închisă, atunci F este compactă (în \mathbb{R}^n).
2. Să se arate că dacă K este o submulțime compactă a lui \mathbb{R} , atunci K este o submulțime compactă a lui \mathbb{R}^2 .
3. Dacă K este o mulțime compactă din \mathbb{R}^n , iar x un punct arbitrar din \mathbb{R}^n , atunci mulțimea $K_x = \{x + y \mid y \in K\}$ este de asemenea compactă.
4. Să se precizeze când este compactă intersecția a două mulțimi deschise. Este posibil ca intersecția unei familii infinite de mulțimi deschise să fie o mulțime nevidă compactă?

Bibliografie

1. *Ion Colojoară, Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
2. *C. Popa, V. Hiriș, M. Megan, Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme*, Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23777

COMPLEMENTE DE TOPOLOGIE

Teorema de acoperire a lui Lebesgue Teorema lui Baire

Teorema de acoperire a lui Lebesgue

Precizări privind natura acoperirilor cu mulțimi deschise ale mulțimilor compacte sunt furnizate de următorul rezultat care va fi folosit în studiul uniform continuității (vezi pagina 226), precum și în teoria dimensiunii și în teoria spațiilor uniforme.

Teorema de acoperire a lui Lebesgue. *Fie $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o acoperire cu mulțimi deschise din \mathbb{R}^n a unei submulțimi compacte K a lui \mathbb{R}^n .*

Atunci există un număr real strict pozitiv λ , astfel ca pentru orice $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \lambda$, există $\alpha \in A$ astfel ca

$$x, y \in D_\alpha.$$

Notă istorică. *Henri Léon Lebesgue* (1875-1941) a fost fondatorul integralei care îi poartă numele. A studiat la Școala Normală Superioară în perioada 1899-1902. Este autorul uneia din cele mai remarcabile cuceriri ale analizei moderne, anume teoria integralei care-i poartă numele, teorie ce a permis un studiu mai profund al seriilor Fourier. În 1910 este numit profesor la Sorbona.

Demonstrație. Pentru orice punct u a lui K , există $\alpha_u \in A$ astfel ca

$$u \in D_{\alpha_u}.$$

Fie $\delta_u > 0$ astfel ca

$$\|v - u\| < 2\delta_u \Rightarrow v \in D_{\alpha_u}.$$

Atunci $\{S_u\}_{u \in K}$, unde

$$S_u = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v - u\| < \delta_u\},$$

este o acoperire a lui K cu mulțimi deschise.

Prin urmare, cum K este compactă, există $u_1, u_2, \dots, u_p \in K$, astfel ca

$$K \subseteq S_{u_1} \cup S_{u_2} \cup \dots \cup S_{u_p}.$$

Alegem

$$\lambda = \min\{\delta_{u_1}, \delta_{u_2}, \dots, \delta_{u_p}\} > 0.$$

Dacă $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \lambda$, atunci există $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ astfel ca

$$x \in S_{u_j} \subseteq D_{\alpha_{u_j}},$$

deci

$$\|x - u_j\| < \delta_{u_j}.$$

Atunci

$$\|y - u_j\| \leq \|y - x\| + \|x - u_j\| < \lambda + \delta_{u_j} < 2\delta_{u_j},$$

și drept urmare

$$y \in D_{\alpha_{u_j}}.$$

Așadar

$$x, y \in D_{\alpha_{u_j}}.$$

Observație. Cu notația $\text{diam}(A) = \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$, unde A este o submulțime a lui \mathbb{R}^n , teorema lui Lebesgue se reformulează astfel: *Fie $\{D_\alpha\}_{\alpha \in A}$ o acoperire cu mulțimi deschise din \mathbb{R}^n a unei submulțimi compacte K a lui \mathbb{R}^n . Atunci există un număr real strict pozitiv λ , astfel ca pentru orice submulțime A a lui K având diametrul mai mic decât λ , există $\alpha_0 \in A$ astfel ca $A \subseteq D_{\alpha_0}$.*

Teorema lui Baire

Teorema lui Baire, în forma de mai jos, dar mai ales sub alte forme mai generale, constituie un instrument extrem de fin, care are o gamă largă de aplicații. Unele dintre ele se vor studia în cadrul cursului de analiză funcțională (anume Teorema aplicației deschise, Teorema graficului închis și Principiul mărginirii uniforme). Pentru multe alte aplicații vezi [1].

Teorema lui Baire. *Fie $\{H_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ o familie numărabilă de submulțimi închise din \mathbb{R}^n astfel încât $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$ conține o mulțime nevidă deschisă.*

Atunci cel puțin una dintre mulțimile H_k conține o mulțime nevidă deschisă.

Observație. Rezultatul de mai sus poate fi reformulat în una dintre următoarele forme echivalente:

i) Orice intersecție numărabilă de mulțimi deschise dense în \mathbb{R}^n este densă în \mathbb{R}^n .

ii) Orice reuniune numărabilă de mulțimi închise în \mathbb{R}^n cu interiorul vid este o mulțime cu interiorul vid.

Observație. Dacă mulțimile familiei nu sunt deschise, rezultatul nu este valabil (de exemplu mulțimile \mathbb{Q} și $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sunt dense în \mathbb{R} , însă intersecția lor este vidă). De asemenea, dacă familia de mulțimi nu este cel mult numărabilă, rezultatul nu este valabil (de exemplu mulțimile $\mathbb{R} - \{x\}$, unde $x \in \mathbb{R}$, sunt deschise și dense în \mathbb{R} , însă intersecția lor este vidă).

Notă istorică. René Luois Baire (1874-1932) a fost profesor la Dijon. A adus contribuții la teoria mulțimilor și la analiză reală. Baire s-a născut la 21 ianuarie 1874 la Paris. În 1886, pe când avea 12 ani, a câștigat o bursă care i-a permis să capete o bună educație, în ciuda condițiilor materiale precare oferite de familia sa. A fost un student eminent al liceului Lakanal. În 1890 studiază timp de un an la secția specială de matematică a liceului Henri IV. Apoi trece admiterea atât la École Polytechnique, cât și la École Normale Supérieure. Alege să studieze la cea din urmă. Aici audiază cursurile lui Goursat, iar la Sorbona pe cele ale lui Hermite, Picard și Poincaré. La un examen, având să demonstreze continuitatea funcției exponențiale, în mijlocul demonstrației își dă seama că ”demonstrația pe care o învățase la liceul Henri IV era pur și simplu un artificiu deoarece nu se sprijinea suficient pe definiția funcției”. Ca rezultat imediat a urmat o notă ce nu l-a mulțumit pe Baire și decizia de a studia din nou, mai atent, cursul de analiză matematică cu accent pe conceptul de continuitate al unei funcții generale. A obținut un post la un liceu din Bar-le-Duc care, deși îi asigura securitatea financiară, nu l mulțumea căci nu avea ocazia să fie în contact cu lumea universitară. Aici lucrează în teoria funcțiilor și asupra conceptului de limită, elaborând o teză despre funcții discontinue pe care o va susține în 1899, din comisie făcând parte Darboux și Picard. A studiat și în Italia, unde a legat o strânsă prietenie cu Volterra. Chiar înainte de a-și susține doctoratul, sănătatea îi era zdruncinată. După aceea nu a mai putut contribui la progresul matematicii

decât foarte scurte perioade. A continuat să predea la diverse licee, iar în 1901 devine conferențiar la Universitatea din Montpellier. În 1904 primește o bursă Peccot care îi permite să predea la Collège de France. În 1905 se mută la Universitatea din Dijon, unde în 1907 este numit profesor. Datorită stării mai mult decât precare a sănătății sale, cere un concediu pentru a se reface. Nefiind în stare să-și reia activitatea, se retrage la Geneva, unde i se și acordă titlul de Cavaler al Legiunii de Onoare și de membru al Academiei de Științe. Se pensionează în 1925 și moare la 5 Iulie 1932.

Baire a făcut un pas decisiv în fundamentarea riguroasă a conceptului de funcție și continuitate. A văzut cu claritate că o teorie a mulțimilor infinite era fundamentală pentru Analiza Reală. Denjoy a fost cel mai faimos student al lui Baire.

Demonstrație. Fie G_0 o mulțime nevidă deschisă inclusă în $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, nu există nici o mulțime nevidă deschisă inclusă în H_k .

Dacă $x_1 \in G_0 - H_1$, atunci există $r_1 > 0$, astfel ca

$$G_1 \stackrel{\text{not}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| < r_1\} \subseteq F_1 \stackrel{\text{not}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| \leq r_1\} \subseteq G_0$$

și

$$F_1 \cap H_1 = \emptyset.$$

La fel, dacă $x_2 \in G_1 - H_2$, atunci există $r_2 > 0$, astfel ca

$$G_2 \stackrel{\text{not}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_1\| < r_2\} \subseteq F_2 \stackrel{\text{not}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_2\| \leq r_2\} \subseteq G_1$$

și

$$F_2 \cap H_2 = \emptyset.$$

Continuând acest procedeu, obținem, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in G_{k-1} - H_k$ și $r_k > 0$, astfel ca

$$G_k \subseteq F_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_k\| \leq r_k\} \subseteq G_{k-1}$$

și

$$F_k \cap H_k = \emptyset.$$

Aplicând Teorema lui Cantor (vezi pagina 118) familiei $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, găsim un element w cu proprietatea că

$$w \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$

Deoarece, $F_k \cap H_k = \emptyset$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deducem că

$$w \notin G_0 \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} H_k.$$

Pe de altă parte, $F_k \subseteq G_0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deci

$$w \in G_0.$$

Această contradicție încheie demonstrația, arătând că cel puțin una dintre mulțimile H_k conține o mulțime nevidă deschisă.

Încheiem această secțiune cu două aplicații ale teoremei lui Baire.

Corolar. *Spațiul \mathbb{R}^2 nu poate fi prezentat ca reuniunea unei familii numărabile de drepte.*

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există familia $\{L_n\}_{n \geq 1}$ de drepte (care sunt mulțimi închise) astfel ca

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n.$$

Deoarece \mathbb{R}^2 este o mulțime nevidă și deschisă, rezultă, în conformitate cu teorema lui Baire, că există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca L_{n_0} să conțină o mulțime nevidă și deschisă, ceea ce nu este adevărat.

\mathbb{Q} este o reuniune numărabilă de mulțimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulțimi nu conține o mulțime deschisă nevidă. Vom arăta că $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu are această proprietate.

Corolar. *Nu există nici o familie cel mult numărabilă de mulțimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulțimi nu conține o mulțime deschisă nevidă și astfel ca $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ să fie reuniunea mulțimilor din această familie.*

Demonstrație. Presupunând contrariul și având în vedere observația precedentă, ar rezulta că există o familie cel mult numărabilă de mulțimi închise astfel încât nici una dintre aceste mulțimi nu conține o mulțime deschisă nevidă și astfel ca \mathbb{R} să fie reuniunea mulțimilor din această familie. Acest fapt contrazice teorema lui Baire.

Exerciții

1. Dacă submulțimea A a lui \mathbb{R}^n nu conține o mulțime nevidă deschisă (din \mathbb{R}^n), este posibil ca \overline{A} să conțină o mulțime nevidă deschisă (din \mathbb{R}^n)?
2. Dacă submulțimea B a lui \mathbb{R}^n conține o mulțime nevidă închisă (din \mathbb{R}^n), trebuie ca și $\overset{\circ}{B}$ să conțină o mulțime nevidă închisă (din \mathbb{R}^n)?
3. Nu există o familie cel mult numărabilă de mulțimi deschise a căror intersecție să fie \mathbb{Q} .
4. O submulțimea A a lui \mathbb{R}^n se numește densă în \mathbb{R}^n dacă orice punct din \mathbb{R}^n este punct de acumulare pentru A . Arătați că A este densă în \mathbb{R}^n dacă și numai dacă $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.
5. Dați un exemplu de o mulțime deschisă și de una închisă care este densă în \mathbb{R}^n . Sunt unice?

Bibliografie

1. *John C. Oxtoby, Measure and Category*, Springer-Verlag, 1971
- cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București

CONVERGENȚĂ

În acest capitol vom prezenta noțiunile fundamentale privind șirurile și seriile de elemente din \mathbb{R}^p , precum și pe cele referitoare la șirurile de funcții.

ELEMENTE INTRODUCTIVE DESPRE ȘIRURI

Șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ are limita a , când n tinde spre infinit, dacă oricărui număr pozitiv ε , oricât de mic, i se poate asocia un întreg N (care depinde de ε), astfel încât $|a - a_n| < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$. Aceasta este formularea abstractă a noțiunii de limită a unui șir. Nu este de mirare faptul că la prima confruntare cu această noțiune, ea nu poate fi înțeleasă în câteva minute. Există o atitudine nefericită, aproape snoabă, din partea unor autori de manuale, care prezintă cititorului această definiție fără o pregătire prealabilă, ca și cum explicarea nu ar fi de demnitatea unui matematician.

Definiția sugerează o întrecere între două persoane, A și B . Persoana A pretinde ca o cantitate fixată a să fie aproximată prin a_n cu o precizie mai mare decât o margine aleasă $\varepsilon = \varepsilon_1$; B satisface pretenția, demonstrând că există un întreg $N = N_1$, astfel încât toți termenii a_n , care urmează după elementul a_{N_1} , satisfac această condiție. Atunci A poate deveni mai exigent și va fixa o nouă margine mai mică, $\varepsilon = \varepsilon_2$. B satisface din nou pretenția lui A , găsim un întreg $N = N_2$ (eventual mult mai mare). Dacă B poate mulțumi pe A , oricât de mică ar fi marginea aleasă de A , atunci avem situația exprimată de $a_n \rightarrow a$.

Există o anumită dificultate psihologică în înțelegerea acestei definiții precise a limitei. Intuiția noastră ne sugerează o idee "dinamică" despre noțiunea de limită, ca rezultat al unui proces de "mișcare": ne deplasăm în lungul șirului de întregi $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ și atunci observăm comportarea șirului a_n . Ni se pare că am putea observa faptul că $a_n \rightarrow a$. Însă această atitudine "naturală" nu este capabilă de o formulare matematică, riguroasă. Pentru a ajunge la o definiție precisă, trebuie să inversăm ordinea pașilor; în loc de a privi mai întâi la variabila independentă n și apoi la variabila dependentă a_n , trebuie să ne bazăm definiția noastră pe ceea ce trebuie să facem dacă vrem să verificăm afirmația că $a_n \rightarrow a$. Printr-un astfel de procedeu, trebuie să alegem mai întâi o mică margine arbitrară în jurul lui a și apoi trebuie să stabilim dacă putem satisface această condiție, luând variabila independentă n suficient de mare. Apoi, dând denumiri simbolice, ε și N frazelor "margine arbitrar de mică" și " n suficient de mare", suntem conduși la definiția precisă a limitei

Ce este matematica?, de R. Courant și H. Robbins, Editura Științifică, București, 1969, pagina 309

Noțiunea de șir
 Operații algebrice cu șiruri din \mathbb{R}^p
 Limita unui șir din \mathbb{R}^p
 Șiruri convergente și divergente din \mathbb{R}^p
 Mărginirea șirurilor convergente din \mathbb{R}^p
 Reducerea studiului convergenței unui șir din \mathbb{R}^p la convergența a
 p șiruri din \mathbb{R}
 Noțiunea de subșir al unui șir din \mathbb{R}^p
 Condiții echivalente pentru divergența șirurilor din \mathbb{R}^p
 Comportamentul șirurilor convergente din \mathbb{R}^p la operațiile
 algebrice
 Trecerea la limită în inegalități pentru șiruri din \mathbb{R}^p
 Marginile unei submulțimi mărginite a lui \mathbb{R} sunt limitele unor
 șiruri de elemente din mulțimea respectivă

Studiul șirurilor de elemente din \mathbb{R}^p s-a impus datorită apariției în manevrarea multor obiecte a unor scheme de aproximare care se realizează cu ajutorul unor procese iterative (spre exemplu metoda coardei a lui Newton, determinarea soluțiilor unor sisteme cu ajutorul principiului contracțiilor etc).

Noțiunea de șir

Definiție. Fie M o mulțime. Un șir din M este o funcție cu domeniul \mathbb{N} (sau $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, unde $k \in \mathbb{N}$) și codomeniul o submulțime a lui M .

Observație. Dacă $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ este un șir, valoarea lui x în n se va nota x_n (în loc de $x(n)$), iar funcția $x : \mathbb{N} \rightarrow M$ se va nota $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Operații algebrice cu șiruri din \mathbb{R}^p

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt două șiruri din \mathbb{R}^p , atunci definim suma lor ca fiind șirul, din \mathbb{R}^p , $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, diferența lor ca fiind șirul, din \mathbb{R}^p , $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar produsul lor scalar ca fiind șirul, din \mathbb{R} , $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R} , iar $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir din \mathbb{R}^p , atunci definim produsul lor ca fiind șirul, din \mathbb{R}^p , $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R}^p , iar $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir din \mathbb{R} astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem $y_n \neq 0$, atunci definim câtul lor ca fiind șirul, din \mathbb{R}^p , $(\frac{x_n}{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Limita unui șir din \mathbb{R}^p . Șiruri convergente și divergente din \mathbb{R}^p

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R}^p , un element $x \in \mathbb{R}^p$, se numește o limită a lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui x , există $n_V \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$, să avem

$$x_n \in V.$$

Vom spune că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către x .

Dacă un șir, din \mathbb{R}^p , are o limită din \mathbb{R}^p , vom spune că el este convergent, iar în caz contrar îl vom numi divergent.

Observație. Definiția de mai sus are sens și pentru șiruri cu elemente dintr-un spațiu topologic.

Teoremă. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R}^p , un element $x \in \mathbb{R}^p$ este o limită a sa dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Observație. Pentru suportul intuitiv al noțiunii de limită a unui șir se poate consulta [3], pagina 219.

Teorema de unicitate a limitei. Un șir din \mathbb{R}^n nu poate avea mai mult de o limită.

Observație. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir din \mathbb{R}^p care are limită $x \in \mathbb{R}^p$, atunci vom scrie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

sau

$$\lim x_n = x$$

sau

$$x_n \rightarrow x.$$

Mărginirea șirurilor convergente din \mathbb{R}^p

Următorul rezultat arată că familia șirurilor convergente constituie o subclasă a familiei șirurilor mărginite.

Propoziție. *Un șir convergent din \mathbb{R}^n este mărginit (i.e. dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir convergent din \mathbb{R}^p , atunci există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\|x_n\| < M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Observație. *Reciproca propoziției de mai sus nu este valabilă, așa cum ne arată șirul de numere reale $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Reducerea studiului convergenței unui șir din \mathbb{R}^p la convergența a p șiruri din \mathbb{R}

Următorul rezultat arată că studiul convergenței unui șir din \mathbb{R}^n se reduce la studiul convergenței unor șiruri din \mathbb{R} .

Teoremă. *Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$x_n = (\zeta_{1n}, \zeta_{2n}, \dots, \zeta_{pn}),$$

converge către un element

$$y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p) \in \mathbb{R}^p$$

dacă și numai dacă șirul $(\zeta_{in})_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , converge către η_i , pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Demonstrație.

" \Rightarrow " Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_n - y\| < \varepsilon.$$

Dar, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$,

$$|\zeta_{in} - \eta_i| \leq \|x_n - y\|,$$

fapt care arată că, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, șirul $(\zeta_{in})_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , converge către η_i .

" \Leftarrow " Pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$|\zeta_{in} - \eta_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}},$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_n - y\|^2 = \sum_{i=1}^p |\zeta_{in} - \eta_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

adică şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , converge către y .

Noţiunea de subşir al unui şir din \mathbb{R}^p

Noţiunea de subşir al unui şir se dovedeşte a fi foarte utilă permiţând introducerea noţiunii de mulţime a punctelor limită ale unui şir de elemente din \mathbb{R}^p (vezi pagina 152).

Definiţie. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir din \mathbb{R}^p , iar $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul, din \mathbb{R}^p , dat de $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$, se numeşte un subşir al său.

Observaţie. Fie $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ o funcţie strict crescătoare. Atunci k defineşte un subşir al lui $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, prin $x \circ k$ şi orice subşir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poate fi definit în acest mod.

Propoziţie. Dacă şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , converge către $x \in \mathbb{R}^p$, atunci orice subşir al său converge către x .

Corolar. Dacă şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , converge către $x \in \mathbb{R}^p$, iar $m \in \mathbb{N}$, atunci şirul $(x_{m+n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge către x .

Condiţii echivalente pentru divergenţa şirurilor din \mathbb{R}^p

Următorul rezultat descrie situaţia în care un şir nu converge către x .

Propoziţie. Dat fiind şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , şi $x \in \mathbb{R}^p$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge către x .

ii) există o vecinătate V a lui x , astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $m_n \in \mathbb{N}$, $m_n > n$, astfel încât

$$x_{m_n} \notin V.$$

iii) există o vecinătate V a lui x și un subșir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât nici unul dintre elementele subșirului nu se află în V .

Comportamentul șirurilor convergente din \mathbb{R}^p la operațiile algebrice

Propoziție

i) Fie șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , convergente către x , respectiv y .

Atunci șirurile $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converg către $x + y$, $x - y$ și respectiv $x \cdot y$.

ii) Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , convergent către $y \in \mathbb{R}$.

Atunci șirul $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , converge către $xy \in \mathbb{R}^p$.

iii) Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , convergent către $x \in \mathbb{R}^p$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^* , convergent către $y \in \mathbb{R}^*$.

Atunci șirul $(\frac{1}{y_n} x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , converge către $\frac{1}{y} x \in \mathbb{R}^p$.

Trecerea la limită în inegalități pentru șiruri din \mathbb{R}^p

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213).

Propoziție. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , convergent către $x \in \mathbb{R}^p$. Dacă există $c \in \mathbb{R}^p$ și $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca

$$\|x_n - c\| \leq r,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\|x - c\| \leq r.$$

Demonstrație. Mulțimea

$$V = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - c\| > r\}$$

este deschisă.

Dacă $x \in V$, atunci V este o vecinătate a lui x , deci există $n_V \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$ să avem

$$x_n \in V,$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare

$$x \notin V,$$

adică

$$\|x - c\| \leq r.$$

Marginile unei submulțimi mărginite a lui \mathbb{R} sunt limitele unor șiruri de elemente din mulțimea respectivă

Propoziție. *Fie A o submulțime mărginită a lui \mathbb{R} . Atunci există două șiruri $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A astfel încât*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup A.$$

Demonstrație. Conform definiției marginii superioare a unei mulțimi, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $y_n \in A$, astfel încât

$$\sup A - \frac{1}{n} < y_n \leq \sup A.$$

Prin urmare, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup A - \frac{1}{n} \right) = \sup A,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup A.$$

Analog se găsește un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf A.$$

Observație. *De fapt are loc un fenomen mai general, anume dacă A este o submulțime a lui \mathbb{R}^P și $a \in \overline{A}$, atunci există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din A astfel încât*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Exerciții

1. Fie șirurile $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , convergente, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem

$$x_n \leq y_n.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Mai general, dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sunt trei șiruri din \mathbb{R} , astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

atunci, dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt convergente și au aceeași limită, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x.$$

2. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , are limita $x \in \mathbb{R}$, atunci șirul $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita $|x|$.

3. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

4. Fie $p \in \mathbb{Z}$ și $a \in (-1, 1)$. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p a^n = 0.$$

5. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din $(0, \infty)$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

6. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din $(0, \infty)$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1.$$

Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent.

7. Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din $(0, \infty)$, astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} < 1.$$

Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

8. Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din $(0, \infty)$, astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} > 1$.

Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent.

9. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ şi $0 < b \leq a$, să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

10. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(2 + \sqrt{3})^n\}$$

11. Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} şi $\alpha \in (0, \infty)$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 1$$

şi, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, avem

$$|x_n + x_m| \geq \alpha.$$

Să se arate că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent şi să se precizeze posibilele valori ale limitei lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

12. Să se arate că dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are proprietatea că există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât orice subşir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al său are un subşir $(x_{n_{k_p}})_{p \in \mathbb{N}}$ care converge către l , atunci el este convergent către l .

13. Să se arate că dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are proprietatea că există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât subşirurile $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ şi $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converg către l , atunci şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către l .

14. Să se caracterizeze şirurile convergente de numere întregi.

15. Fie $x_1 \in \mathbb{R}$ şi

$$x_{n+1} = |x_n - 2^{1-n}|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se studieze convergenţa şirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000
3. *Solomon Marcus*, **Șocul matematicii**, Editura Albatros, București, 1987 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 33883

CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU ȘIRURI

Teorema convergenței monotone Criteriul lui Cauchy

Pentru a arăta, cu metodele prezentate până acum, că un șir este convergent, trebuie să cunoaștem sau să intuim care este limita șirului. De multe ori, acest lucru nu este ușor de realizat. Rezultatele următoare vor elimina parțial acest neajuns.

Teorema de mai jos se va folosi, spre exemplu, în cadrul demonstrației propozițiilor de la paginile 162 și 165, propoziției de la pagina 289, Teoremei de reprezentare a lui Riesz (vezi pagina 373), precum și în cadrul demonstrației formulei lui Stirling (vezi pagina 460).

Teorema convergenței monotone. *Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale care este crescător (i.e.*

$$x_n \leq x_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este mărginit, caz în care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Demonstrație.

” \Rightarrow ” Am văzut acest rezultat în secțiunea precedentă.

Mai mult, fie

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon,$$

de unde, având în vedere că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, deducem că

$$l - \varepsilon \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq l + \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$\left| \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

” \Leftarrow ” Există

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n \stackrel{\text{not}}{=} l.$$

Atunci

$$x_n \leq l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mai mult, având în vedere definiția supremului, pentru orice $\varepsilon > 0$, există x_{n_ε} astfel ca

$$l - \varepsilon < x_{n_\varepsilon},$$

de unde, deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător, deducem că

$$l - \varepsilon < x_n \leq l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, adică

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Corolar. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale care este descrescător (i.e. $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă este mărginit, caz în care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Criteriul lui Cauchy

Teorema anterioară este un instrument extraordinar de util, dar are inconvenientul că se aplică numai pentru șiruri monotone. Am dori, ca atare, un alt criteriu care să implice convergența, chiar dacă șirul nu este monoton. Acesta este criteriul lui Cauchy, un criteriu foarte des utilizat (vezi demonstrațiile următoarelor rezultate: Criteriului lui Dirichlet - pagina 189,

Teorema punctelor fixe pentru contracții - pagina 229, Lema de la pagina 325).

Pentru început vom prezenta o formă a teoremei Bolzano-Weierstrass specializată pentru șiruri, rezultat care va fi folosit în cadrul demonstrației Criteriului lui Cauchy (vezi pagina 140), Teoremei de permanență a compacității pentru funcții continue (vezi pagina 212), a Teoremei valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213), precum și a Teoremei Arzelà-Ascoli (vezi pagina 254).

Lema lui Cesàro. *Un șir mărginit din \mathbb{R}^p are (cel puțin) un subșir convergent.*

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit din \mathbb{R}^p .

Dacă există numai un număr finit de valori distincte pentru elementele șirului, atunci cel puțin una dintre aceste valori se repetă de o infinitate de ori, și, prin urmare, putem obține un subșir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alegând această valoare de fiecare dată când ea apare.

Dacă există un număr infinit de valori distincte pentru elementele șirului, cum mulțimea termenilor șirului este mărginită, conform teoremei Bolzano-Weierstrass (vezi pagina 98), există un punct de acumulare $l \in \mathbb{R}^p$ al mulțimii termenilor șirului.

Fie x_{n_1} un element al șirului astfel ca

$$\|x_{n_1} - l\| < 1.$$

Cum l este punct de acumulare pentru mulțimea

$$S_1 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

l este punct de acumulare și pentru mulțimea

$$S_2 = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}, n > n_1\}.$$

Prin urmare, există un $x_{n_2} \in S_2$ (deci $n_2 > n_1$) astfel încât

$$\|x_{n_2} - l\| < \frac{1}{2}.$$

Continuând în acest mod, găsim un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel încât

$$\|x_{n_k} - l\| < \frac{1}{k},$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$, deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l.$$

Definiție. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , se numește șir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Observație. Spre deosebire de definiția șirului convergent care cuprinde elemente "exterioare" șirului considerat (anume limita acestuia), definiția șirului Cauchy are avantajul de a implica numai elementele șirului dat; prin urmare, dezavantajul "ghicirii" valorii limitei unui șir pentru testarea convergenței acestuia cu ajutorul definiției șirului convergent nu este prezent în definiția șirului Cauchy.

Lemă. Un șir convergent $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , este șir Cauchy.

Lemă. Un șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , este mărginit.

Lemă. Un șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , care are un subșir convergent, este convergent.

Demonstrație. Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Dacă subșirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge către $l \in \mathbb{R}^p$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu următoarele proprietăți:

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$$

și

$$\|x_{n_{k_\varepsilon}} - l\| < \varepsilon.$$

Pentru orice număr natural n astfel ca $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|x_n - l\| \leq \|x_{n_{k_\varepsilon}} - l\| + \|x_n - x_{n_{k_\varepsilon}}\| < 2\varepsilon.$$

Prin urmare, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către l .

Criteriul lui Cauchy. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , este convergent dacă și numai dacă este Cauchy.

Demonstrație.

" \Rightarrow " Vezi una dintre lemele de mai sus.

" \Leftarrow " Dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R}^p , este Cauchy, atunci, așa cum am văzut mai sus, este mărginit. Conform lemei lui Cesàro, el are un subșir convergent. Lema de mai sus implică faptul că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Observație. *Importanța criteriului lui Cauchy rezidă în posibilitatea testării convergenței fără a se face apel la elemente exterioare mulțimii termenilor șirului.*

Exerciții

1. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,$$

pentru orice $\alpha \in (0, \infty)$.

2. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0,$$

pentru orice $a \in (-1, 1)$.

3. Fie $\alpha \in (0, \infty)$. Să se arate că șirul dat prin relația de recurență

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $x_1 \in (0, \infty)$, este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{\alpha}.$$

4. Fie $\alpha, \beta \in [0, 1]$,

$$x_1 = \alpha\beta$$

și

$$x_{n+1} = (\alpha - x_n)(\beta - x_n) + x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , este mărginit și

$$x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

6. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , este mărginit și

$$x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{n^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

7. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , este mărginit și

$$x_{n+1} \sqrt[n]{2} \geq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

8. Să se arate că dacă șirul mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , satisface inegalitatea

$$x_{n+2} \leq \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

9. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , dat de

$$x_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

10. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , dat de

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

11. Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , dat de $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ...,

$$x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

12. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathbb{R} , are proprietatea că există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| < \lambda |x_n - x_{n+1}|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci el este convergent.

13. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din $(0, \infty)$, are proprietatea că

$$x_{n+1} \leq \frac{1}{S_{n+1}}((S_n - 1)x_n + x_{n-1}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, atunci el este convergent și să se afle limita sa.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000

ȘIRURI DE FUNCȚII

Convergență simplă și uniformă pentru șiruri de funcții

Caracterizarea convergenței uniforme cu ajutorul $\|\cdot\|_\infty$

Criteriul lui Cauchy pentru convergență uniformă

Convergență simplă și uniformă pentru șiruri de funcții

De multe ori, suntem confrunțați cu un fenomen f care nu poate fi evaluat în mod nemijlocit, dar care este prezentat ca limita unui șir de alte fenomene f_n care pot fi controlate. Apare astfel, în mod natural, noțiunea de convergență simplă pentru șiruri de funcții

Definiție. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Spunem că șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (simplu), pe D_0 , către f , și vom nota

$$f_n \xrightarrow{s} f,$$

dacă, pentru orice $x \in D_0$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

i.e.

pentru orice $x \in D_0$ și orice $\varepsilon > 0$, există $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$,

astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{x,\varepsilon}$,

avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Exerciții

1. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

2. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

3. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

4. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

5. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n}, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$.

6. Să se studieze convergența simplă a șirului de funcții, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Observație. Suntem interesați în a studia în ce măsură proprietățile funcțiilor f_n se transmit la funcția f . Așa cum arată exemplul 2 de mai sus (unde deși funcțiile f_n sunt continue, funcția limită nu are această proprietate), convergența simplă nu este instrumentul adecvat acestui scop. O analiză geometrică a exemplului de mai sus arată că motivul discontinuității funcției limită în 1 este faptul că, pe măsură ce n crește, graficul lui f_n se depărtează de graficul lui f în apropierea lui 1. Prin urmare avem nevoie de o nouă noțiune de convergență pentru șiruri de funcții, convergență care să oblige "graficul lui f_n să converge către graficul lui f ".

Definiție. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Spunem că şirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe D_0 , către f , şi vom nota

$$f_n \xrightarrow{u} f,$$

dacă

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât,

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, şi orice $x \in D_0$,

avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Observaţie. În cazul în care $p = q = 1$, $f_n \xrightarrow{u} f$ înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D_0$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_{x,\varepsilon}$, graficul lui f_n se află între $G_{f-\varepsilon}$ şi $G_{f+\varepsilon}$, adică "graficul lui f_n converge către graficul lui f ".

Observaţie. Vom vedea că noţiunea de convergenţă uniformă pentru şiruri de funcţii este cea care permite transferul proprietăţilor lui f_n la f , în particular, permite permutarea limitei cu derivata şi cu integrala. De asemenea, ea ne permite construcţia unor obiecte matematice foarte "exotice", ca de exemplu funcţii din \mathbb{R} în \mathbb{R} care sunt continue, dar sunt nederivabile în orice punct al lui \mathbb{R} , curbe a căror imagine umple un pătrat etc. (vezi paginile 481-483).

Observaţie. Din păcate, fenomenul convergenţei uniforme nu apare în situaţiile întâlnite de către fizicieni atât de des pe cât ar dori-o aceştia. Din acest motiv, în cadrul teoriei integralei Riemann, permutarea limitei cu integrala are loc într-un cadru prea restrâns în raport cu nevoile impuse de fizică. Acesta constituie unul dintre motivele care au condus la elaborarea teoriei integralei Lebesgue.

Lema următoare furnizează o condiţie necesară şi suficientă pentru ca un şir de funcţii să nu convergă uniform.

Lemă. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, unde $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și $f : D_0 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Atunci $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge uniform, pe D_0 , către f , dacă și numai dacă există $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$, un subșir $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și un șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elemente din D_0 , astfel încât

$$\|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)\| \geq \varepsilon_0,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exerciții. Să studieze convergența uniformă a șirurilor de funcții prezentate mai sus.

Caracterizarea convergenței uniforme cu ajutorul $\|\cdot\|_\infty$

Definiție. Dacă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o funcție mărginită, definim norma lui f prin

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} \|f(x)\|.$$

Exercițiu. Să se arate că $\|\cdot\|_\infty$ verifică proprietățile normei.

Propoziție. Un șir $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funcții mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, converge uniform, pe D_0 , către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Exercițiu. Să se aplice această propoziție pe exemplele de mai sus.

Criteriul lui Cauchy pentru convergență uniformă

Ca și în cazul șirurilor de numere reale, prezentăm un criteriu de tip Cauchy (care va fi folosit în cadrul demonstrației Teoremei lui Tietze -vezi pagina 249, precum și a Teoremei Arzelà-Ascoli -vezi pagina 254).

Criteriul lui Cauchy pentru convergență uniformă. Fie șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funcții mărginite, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Atunci există $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe D , către f , dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Exerciții

1. Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

i) $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [-1, 1]$.

ii) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [-1, 1]$.

iii) $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{x + n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0, \infty)$.

iv) $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{x + n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [a, b]$, unde $0 < a < b$.

Observație. Exercițiile iii) și iv) arată că este important să precizăm pe ce mulțime studiem convergența uniformă.

v) $f_n : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in (-1, 1)$.

2. Fie $f_n : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții care converge uniform către $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că șirul de funcții $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge uniform.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
2. *Ion Colojoară, Radu Miculescu, Cristinel Mortici*, **Analiză Matematică, Teorie. Metode. Aplicații**, Editura Art, București, 2002, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39681
3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000
4. *C. Popa, V. Hiriș, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme**, Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23777

LIMITA SUPERIOARĂ ȘI INFERIOARĂ A UNUI ȘIR

Noțiunea de limită superioară și limită inferioară pentru un șir mărginit de numere reale

Caracterizarea convergenței șirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară și inferioară

În această secțiune vom introduce noțiunile de limită superioară și limită inferioară pentru un șir mărginit de numere reale care sunt utile pentru "clasificarea" șirurilor divergente.

Noțiunea de limită superioară și limită inferioară pentru un șir mărginit de numere reale

Supremumul unei submulțimi S a lui \mathbb{R} poate fi descris ca fiind infimumul mulțimii acelor numere reale ce sunt mai mari decât orice element al lui S .

Este util să se relaxeze această condiție și să se considere infimumul mulțimii acelor numere reale pentru care există numai un număr finit de elemente ale lui S mai mari decât ele.

Din mai multe motive, în cazul șirurilor de numere reale este important să se considere o ușoară modificare a acestui concept. Într-adevăr, un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de numere reale, furnizează o submulțime a lui \mathbb{R} , dar șirul posedă o structură suplimentară prin faptul că elementele sale sunt indexate după \mathbb{N} , deci avem aici o ordonare, care nu este prezentă în cazul unei mulțimi arbitrare de numere reale. Ca urmare, același număr poate să apară de mai multe ori în mulțimea termenilor șirului, fenomen ce nu este prezent pentru mulțimi arbitrare de numere reale. Suntem conduși astfel la următoarea

Definiție. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale mărginit superior. Atunci limita superioară a sa, notată

$$\limsup x_n$$

sau

$$\overline{\lim} x_n,$$

este infimumul mulțimii numerelor reale v , cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât

$$v < x_n.$$

Similar, fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale mărginit inferior. Atunci limita inferioară a sa, notată

$$\liminf x_n$$

sau

$$\underline{\lim} x_n,$$

este supremumul mulțimii numerelor reale v , cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n , astfel încât

$$v > x_n.$$

Observație. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere reale mărginit, atunci limita superioară și limita inferioară există și sunt unice.

Observație. Unii autori folosesc notația $\limsup x_n = \infty$ pentru a marca faptul că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit superior, respectiv notația $\liminf x_n = -\infty$ pentru a marca faptul că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit inferior.

Există și alte moduri de a caracteriza limita superioară a unui șir de numere reale. Anume avem:

Propoziție. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale mărginit superior și $l^* \in \mathbb{R}$.

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

i)

$$l^* = \limsup x_n.$$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr finit de numere naturale n astfel încât

$$l^* + \varepsilon < x_n,$$

dar există un număr infinit de numere naturale n astfel încât

$$l^* - \varepsilon < x_n.$$

iii)

$$l^* = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n.$$

iv)

$$l^* = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n.$$

v)

$$l^* = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \text{există un subșir } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ al lui } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ astfel ca } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x\}.$$

Observație. *Mulțimea*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \text{există un subșir } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ al lui } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ astfel ca } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x\}$$

care poartă numele de mulțimea punctelor limită ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ne dă, prin "bogația" elementelor sale, o măsură asupra "gradului" de divergență al unui șir, anume, cu cât această mulțime are mai multe elemente, cu atât șirul în cauză este "mai divergent".

Exercițiu. Formulați și demonstrați propoziția analoagă pentru limita inferioară.

Caracterizarea convergenței șirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară și inferioară

Teoremă. *Un șir de numere reale mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă*

$$\liminf x_n = \limsup x_n,$$

caz în care limita șirului este această valoare comună.

Demonstrație.

" \Rightarrow " Fie

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon.$$

Ultima inegalitate arată că

$$\limsup x_n \leq l + \varepsilon$$

iar prima că

$$l - \varepsilon \leq \liminf x_n.$$

Prin urmare

$$\limsup x_n - \liminf x_n \leq 2\varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$\liminf x_n = \limsup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

" \Leftarrow " Fie

$$l = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$ să avem

$$x_n \leq l + \varepsilon$$

și există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^2$ să avem

$$l - \varepsilon \leq x_n.$$

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, avem

$$l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon,$$

deci

$$l = \liminf x_n = \limsup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Observație. Teorema de mai sus subliniază modul în care noțiunile de limită superioară și inferioară contribuie la clasificarea șirurilor divergente prin evaluarea distanței dintre limita inferioară și cea superioară, anume cu cât distanța dintre $\liminf x_n$ și $\limsup x_n$ este mai mare, cu atât șirul în cauză este "mai divergent".

Exerciții

1. Să se determine $\liminf x_n$ și $\limsup x_n$ pentru:

i)

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{1 + n(-1)^n} + \sin \frac{n\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

ii)

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iii)

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos \frac{n\pi}{2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

iv)

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale mărginite.
Să se arate că:

a)

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n.$$

b) dacă $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, atunci

$$\liminf cx_n = c \liminf x_n$$

și

$$\limsup cx_n = c \limsup x_n.$$

b') dacă $c \in \mathbb{R}$, $c \leq 0$, atunci

$$\liminf cx_n = c \limsup x_n$$

și

$$\limsup cx_n = c \liminf x_n.$$

c)

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n).$$

d)

$$\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

e) dacă

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n$$

și

$$\limsup x_n \leq \limsup y_n.$$

Observație. În general, inegalitățile de mai sus sunt stricte.

Pentru a justifica acest fapt se poate studia cazul

$$x_n = (-1)^n$$

și

$$y_n = (-1)^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că

$$\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

În particular, dacă șirul $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, atunci și șirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

4. Pentru un șir mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale pozitive, să se arate că

$$\underline{\lim} (2 - x_{n+1})x_n \leq 1.$$

5. Pentru un șir mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și pentru orice $p \in \mathbb{N}$ avem

$$x_n - x_{n+p} < \varepsilon,$$

să se arate că șirul considerat este convergent.

6. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că

$$\overline{\lim} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{x_n} \geq 4.$$

Să se arate că există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive pentru care $\overline{\lim}_{x_n} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n}{x_n} = 4$.

7. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive, să se arate că

$$\overline{\lim} n \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1 \right) \geq 1.$$

Să se arate că există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive pentru care $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} - 1) = 1$.

7. Fie un șir crescător $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale strict pozitive care are proprietatea că

$$x_{nm} \geq nx_m,$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$.

Să se arate că dacă $\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{n} < \infty$, atunci șirul $(\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

8. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale dat prin relația de recurență

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_{n+1} + x_n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, este convergent.

Bibliografie

1. *Ion Colojoară, Radu Miculescu, Cristinel Mortici, Analiză Matematică, Teorie. Metode. Aplicații*, Editura Art, București, 2002, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39681
2. *Nicu Boboc, Analiză Matematică I*, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak, Problems in Mathematical Analysis I*, American Mathematical Society, 2000
4. *Gh. Siretchi, Calcul Diferențial și Integral, vol. 1, noțiuni fundamentale*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II32924

METODA LUI CESÀRO DE SUMARE

Șirul mediilor aritmetice ale unui șir de numere reale Noțiunea de șir Cesàro sumabil Convergența implică convergența în sensul lui Cesàro

Vom prezenta în această secțiune un alt instrument care permite "manipularea" șirurilor divergente, instrument care se va dovedi util în studiul seriilor Fourier.

Șirul mediilor aritmetice ale unui șir de numere reale Noțiunea de șir Cesàro sumabil

Chiar dacă un șir nu este convergent, este posibil să i se atașeze o "limită generalizată".

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din \mathbb{R}^p , atunci șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit de

$$S_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se numește șirul mediilor aritmetice ale lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observație. Deoarece considerarea mediei aritmetice tinde să netezească eventualele fluctuații ale lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ne așteptăm ca șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ să aibă mai multe șanse de convergență decât șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiție. În condițiile de mai sus, dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către y , spunem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cesàro sumabil către y (sau că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cesàro convergent).

Observație. Conceptul de sumabilitate Cesàro se va dovedi util în cadrul teoriei seriilor Fourier, mai precis în cadrul teoremei lui Fejér (vezi pagina 503).

Notă istorică. Ernesto Cesàro (1859-1906) s-a născut la Napoli, Italia. Tatăl său a fost printre primii fermieri italieni care au folosit mecanizarea în agricultură. Cesàro a studiat la Gimnaziul din Napoli și Nola, precum

și la Ècole des Mines din Liège, cu Catalan. Acesta l-a ajutat să publice primul său articol de matematică, în 1883. Era primul articol dintr-o serie de nouă având drept subiect teoria numerelor. Cesàro a frecventat, la Sorbona, cursurile predate, printre alții, de Hermite (care a și citat în una dintre lucrările sale un rezultat al lui Cesàro) și Darboux. În urma unui conflict cu unul dintre profesorii săi de la Liège, având și suportul lui Dini, primește o bursă care-i va permite să studieze la Universitatea din Roma. În 1887 obține titlul de doctor. După o scurtă perioadă ca profesor la un liceu din Roma devine titularul catedrei de Matematică de la Universitatea din Palermo, catedră pe care o ocupă până în 1891, an în care devine titularul catedrei de Analiză Matematică de la Universitatea din Napoli. Principalele contribuții ale lui Cesàro au privit geometria diferențială. Ele sunt cuprinse în cartea intitulată "Lezione di Geometria intrinseca" (1896). Prin lucrările lui privind fizica matematică, a fost unul dintre cei care au răspândit în Europa ideile lui Maxwell (trebuie menționat că a fost necesar un timp îndelungat pentru ca oamenii de știință să înțeleagă importanța acestora). Moartea lui Cesàro s-a produs în circumstanțe tragice, anume în urma încercării de a-și salva de la înec propriul fiu în vârstă de 17 ani.

Este rezonabil să ne așteptăm ca limita generalizată a unui șir convergent să fie chiar limita sa.

Convergența implică convergența în sensul lui Cesàro

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației teoremei lui Tauber (vezi pagina 492).

Teoremă. *Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente, din \mathbb{R}^p , care converge către x , atunci șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către x .*

Demonstrație. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

De asemenea, există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\|x_n - x\| < M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\begin{aligned}\|S_n - x\| &= \frac{\|(x_1 - x) + (x_2 - x) + \dots + (x_n - x)\|}{n} \leq \\ &\leq \frac{\|(x_1 - x) + \dots + (x_{n_\varepsilon} - x)\|}{n} + \frac{\|(x_{n_\varepsilon+1} - x) + \dots + (x_n - x)\|}{n} \leq \\ &\leq n_\varepsilon \frac{M}{n} + \frac{n - n_\varepsilon}{n} \varepsilon.\end{aligned}$$

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n_\varepsilon \frac{M}{n} = 0,$$

există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem

$$n_\varepsilon \frac{M}{n} < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon, n_0\}$, avem

$$\|S_n - x\| < 2\varepsilon,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x.$$

Observație. *Una dintre cele mai spectaculoase aplicații ale metodei de sumare a lui Cesàro este teorema lui Féjer, care afirmă că o funcție continuă se determină din seria sa Fourier folosind procesul sumabilității Cesàro, deși nu poate fi determinată întotdeauna din seria sa Fourier folosind convergența obișnuită.*

Exerciții

1. Șirul dat de

$$x_n = 1 + (-1)^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, nu este convergent, dar este Cesàro sumabil către 1, care este cea mai naturală alegere pentru o limită generalizată a lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, deoarece acest șir are două subșiruri convergente către 0 și respectiv 2.

2. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir monoton de numere reale, care este Cesàro sumabil către $x \in \mathbb{R}$, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale convergente către $l \in \mathbb{R}$, respectiv $l' \in \mathbb{R}$.

Atunci șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dat de

$$z_n = \frac{x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \dots + x_n y_0}{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergent către ll' .

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

NUMERELE e ȘI γ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e este irațional

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$

O sumă de bani S_0 , investită cu o dobândă anuală de $r\%$ va genera, după un an, în cazul calculării anuale a dobânzii, o sumă de

$$S_0 + rS_0 = S_0(1 + r).$$

Dacă dobânda este calculată semestrial, după primul semestru suma generată este de

$$S_0 + \frac{r}{2}S_0 = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right),$$

iar după un an este de

$$S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right) + S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)\frac{r}{2} = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2,$$

sumă mai mare decât cea acumulată în cazul calculului anual al dobânzii, deoarece, în acest al doilea caz, dobânda acumulată în primul semestru se va constitui într-o nouă sumă care, la rândul ei, va genera dobândă în cel de al doilea semestru.

În cazul în care dobânda este calculată de n ori pe an, suma generată după un an este

$$S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Cu cât n este mai mare, cu atât investiția este mai profitabilă.

Suma maximă ce se poate obține după un an este

$$S_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n.$$

Așadar, în mod natural suntem conduși la studiul limitei șirului

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Aceasta este și motivul pentru care limita șirului descris mai sus poartă numele de baza logaritmului natural.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Propoziție. *Șirurile*

$$((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

și

$$(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$$

sunt convergente și au aceeași limită notată cu e .

Demonstrație. Conform cu inegalitatea mediilor, avem

$$((1 + \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n(1 + \frac{1}{n}) + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

i.e.

$$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare șirul, de termen general $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător.

Să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ și orice $k \in \{1, \dots, n\}$ este valabilă inegalitatea

$$C_n^k \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!},$$

deci

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + (\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}) = \\ &= 2 + (1 - \frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n} < 3, \end{aligned}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, deci șirul de termen general $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit superior.

Prin urmare, conform Teoremei convergenței monotone (vezi pagina 137), șirul de termen general $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

După cum am observat mai sus, avem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 2$, avem

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + C_m^1 \frac{1}{m} + \dots + C_m^n \frac{1}{m^n} + C_m^{n+1} \frac{1}{m^{n+1}} + \dots + C_m^m \frac{1}{m^m},$$

deci

$$1 + C_m^1 \frac{1}{m} + \dots + C_m^n \frac{1}{m^n} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m,$$

de unde, prin trecere la limită după m , obținem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e.$$

Așadar

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < e,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, de unde deducem că șirul de termen general

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

e este irațional

Propoziție. $e \notin \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Să remarcăm faptul că, pentru orice $q \in \mathbb{N}$, avem

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{m!}\right).$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{m!} &= \frac{1}{(q+1)!} \left[1 + \frac{1}{q+2} + \dots + \frac{1}{(q+2)(q+3)\dots m} \right] < \\ &< \frac{1}{(q+1)!} \left[1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} \dots + \frac{1}{(q+2)^{m-q-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{(q+1)!} \frac{1 - \left(\frac{1}{q+2}\right)^{m-q}}{1 - \frac{1}{q+2}} < \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+2}} = \frac{q+2}{q! \cdot (q+1)^2} < \frac{1}{q!} \frac{q+2}{q(q+2)} = \frac{1}{q! \cdot q}, \end{aligned}$$

pentru orice $q, m \in \mathbb{N}$, $m > q$, deducem că

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{m!} \right) < \frac{1}{q! \cdot q},$$

deci

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q! \cdot q},$$

pentru orice $q \in \mathbb{N}$.

Să presupunem, prin reducere la absurd, că există $p, q \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$e = \frac{p}{q}.$$

Atunci $q > 1$ (pentru că $e \in (2, 3)$).

Deoarece

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) < \frac{1}{q \cdot q!},$$

deducem că

$$0 < q! \left[\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \right] < \frac{1}{q} < 1,$$

ceea constituie o contradicție, deoarece

$$q! \left[\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) \right] \in \mathbb{Z}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n) = \gamma$$

Propoziție. Șirul

$$(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)_{n \in \mathbb{N}}$$

este convergent.

Limita sa se notează cu γ .

Demonstrație. Așa cum am văzut mai sus

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Conform inegalității mediilor, avem

$$(1 \cdot (1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1 + n(1 - \frac{1}{n})}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

deci

$$(1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1},$$

de unde

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} < \frac{1}{(1 - \frac{1}{n})^n},$$

i.e.

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} < (1 + \frac{1}{n-1})^n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e,$$

deducem că

$$e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Așadar

$$(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1},$$

de unde, având în vedere monotonia funcției logaritmice, avem

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad (*)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Cu notația

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n,$$

inegalitatea de mai sus arată că

$$c_{n+1} - c_n < 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Așadar șirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător.

De asemenea, prin sumarea inegalităților de tip $(*)$, deducem că

$$0 < c_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin urmare șirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit inferior.

În concluzie, conform Teoremei convergenței monotone (vezi pagina 137), șirul $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Observație. γ este cu aproximație de cinci zecimale 0,57721.

Nu se cunoaște dacă γ este număr rațional.

Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Exerciții.

1. Să se arate că dacă șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

2. Dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

atunci există un şir convergent $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care are proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

şi

$$e = x_n + \frac{\alpha_n}{n \cdot n!},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n!e - [n!e]) = 0.$$

4. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale astfel încât

$$x_n < n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = 0.$$

5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \infty.$$

6. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive şi $p \in \mathbb{N}$.

Să se arate că

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1 + x_{n+p}}{x_n}\right)^n \geq e^p.$$

7. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât şirul $(n\{an!\})_{n \in \mathbb{N}}$ să fie convergent.

8. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

9. Să se arate că şirul $(\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\})_{n \in \mathbb{N}}$ nu este convergent.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000
3. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801
4. *Gh. Sirețchi*, **Calcul Diferențial și Integral, vol. 1, noțiuni fundamentale**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32924
5. *Andrei Vernescu*, **Numărul e și Matematica Exponențială**, Editura Universității din București, 2004 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București

ȘIRURI DE NUMERE REALE CU LIMITĂ INFINITĂ

În conformitate cu definiția topologiei pe $\overline{\mathbb{R}}$ și a limitei unui șir de elemente dintr-un spațiu topologic, suntem conduși la următoarea

Propoziție. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$x_n > \varepsilon.$$

Propoziție. Pentru un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$x_n < \varepsilon.$$

Exerciții

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale.

Atunci:

- i) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty$;
- ii) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$;
- iii) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in (0, \infty]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty$;
- iv) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in [-\infty, 0)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$;
- v) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in (0, \infty]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = -\infty$;
- vi) dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l \in [-\infty, 0)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \infty$;
- vii) dacă $x_n \neq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

LEMA LUI STOLZ-CESÀRO

Un instrument foarte util pentru calculul limitelor de șiruri este lema lui Stolz-Cesàro care permite determinarea limitei unui șir în cazul în care ne confruntăm cu situații de genul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Notă istorică. *Otto Stolz* (1842-1905) s-a născut în Hall, Tirol, Austria. A studiat la Gimnaziul și Universitatea din Innsbruck. În 1864 primește titlul de doctor în matematică de la Universitatea din Viena, cu o teză de geometrie, unde funcționează ca Privatdozent până în 1871. Între 1869 și 1871, beneficiind de o bursă, urmează la Berlin cursurile lui Weierstrass, Kummer și Kronecker și la Göttingen cursurile lui Klein. Sub influența lui Weierstrass devine interesat de probleme de analiză matematică. În 1876 devine profesor la Universitatea din Innsbruck.

Teoremă. *Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict crescător și*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty.$$

Atunci, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Demonstrație. Cu notația $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$ vom studia cazurile:

i) $l = \infty$

ii) $l = -\infty$

iii) $l \in \mathbb{R}$.

Pentru cazul i), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$y_n > 0$$

și

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 3\varepsilon,$$

i.e.

$$x_{n+1} - x_n > 3\varepsilon(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităților de mai sus corespunzătoare lui $n \in \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \dots, m\}$, obținem

$$x_{m+1} - x_{n_\varepsilon} > 3\varepsilon(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}),$$

i.e.

$$\frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} > 3\varepsilon - 3\varepsilon \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\left| \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} \right| < \varepsilon$$

și

$$\left| \frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} \right| < \frac{1}{3},$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, avem

$$\frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Cazul ii) se tratează asemănător.

Pentru cazul iii), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$y_n > 0$$

și

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - l \right| < \varepsilon,$$

i.e.

$$(l - \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l + \varepsilon)(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităților de mai sus corespunzătoare lui $n \in \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \dots, m\}$, obținem

$$(l - \varepsilon)(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}) < x_{m+1} - x_{n_\varepsilon} < (l + \varepsilon)(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}),$$

i.e.

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (l - \varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - \varepsilon < \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} - l < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (l + \varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} + \varepsilon$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} < \varepsilon$$

și

$$-\varepsilon < -(l + \varepsilon)\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} < \varepsilon$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_\varepsilon$.

Prin urmare, pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$, avem

$$-3\varepsilon = -\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon < \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} - l < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Teoremă. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale astfel încât $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict monoton și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

Atunci, dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$, există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Demonstrație. Putem presupune, fără pierderea generalității, că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător.

Cu notația $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$, vom studia cazurile:

i) $l = \infty$

ii) $l = -\infty$

iii) $l \in \mathbb{R}$.

Pentru cazul i), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 3\varepsilon,$$

i.e.

$$x_{n+1} - x_n < 3\varepsilon(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităților de mai sus corespunzătoare lui $k \in \{n, n+1, \dots, m\}$, obținem

$$x_{m+1} - x_n < 3\varepsilon(y_{m+1} - y_n),$$

i.e.

$$x_n - x_{m+1} > 3\varepsilon(y_n - y_{m+1}),$$

de unde

$$\frac{x_n}{y_n} > 3\varepsilon - 3\varepsilon \frac{y_{m+1}}{y_n} + \frac{x_{m+1}}{y_n},$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$,

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ fixat, deoarece $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = \lim_{p \rightarrow \infty} y_p = 0$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m_\varepsilon > n \geq n_\varepsilon$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n}$$

și

$$\frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \frac{1}{3},$$

deci

$$\frac{x_n}{y_n} > 3\varepsilon - 3\varepsilon \frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} + \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n} > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

Prin urmare, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\frac{x_n}{y_n} > \varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty.$$

Cazul ii) se tratează asemănător.

Pentru cazul iii), avem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$l - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < l + \varepsilon,$$

i.e.

$$(l + \varepsilon)(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (l - \varepsilon)(y_{n+1} - y_n)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Atunci, prin adunarea inegalităților de mai sus corespunzătoare lui $k \in \{n, n+1, \dots, m\}$, obținem

$$(l + \varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < x_{m+1} - x_n < (l - \varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

i.e.

$$-x_{m+1} + (l + \varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < -x_n < -x_{m+1} + (l - \varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

de unde

$$x_{m+1} - (l - \varepsilon)(y_{m+1} - y_n) < x_n < x_{m+1} - (l + \varepsilon)(y_{m+1} - y_n),$$

deci

$$\frac{x_{m+1}}{y_n} - (l - \varepsilon) \frac{y_{m+1}}{y_n} - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \frac{x_{m+1}}{y_n} - (l + \varepsilon) \frac{y_{m+1}}{y_n} + \varepsilon$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ fixat, deoarece $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = \lim_{p \rightarrow \infty} y_p = 0$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $m_\varepsilon > n \geq n_\varepsilon$ astfel încât

$$-\varepsilon < \frac{x_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon,$$

$$-\varepsilon < (l - \varepsilon) \frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon$$

și

$$-\varepsilon < (l + \varepsilon) \frac{y_{m_\varepsilon+1}}{y_n} < \varepsilon,$$

deci

$$-3\varepsilon = -\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - l < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Exerciții

1. Fie $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)x_{n+1} - nx_n] = l.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

2. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_{n+1} - x_n) = 1.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$

3. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că $x_1 > 0$ și

$$x_{n+1} = \frac{nx_n}{n + x_n^2},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

4. Fie $l \in \overline{\mathbb{R}}$ și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n) = l.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^3}.$$

5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n) = 0.$$

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = 0.$$

6. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale cu proprietatea că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = b.$$

Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

7. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șir de numere reale cu proprietatea că $x_1 > 0, y_1 > 1$,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + y_n x_n^2}$$

și

$$y_{n+1} = y_n (1 + x_n^2),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde

$$z_n = x_n \cdot y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergent.

8. Fie șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $x_1 = e$ și

$$x_{n+1} = e^{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se calculeze :

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i x_j}{n^4}.$$

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214
2. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801

SERII DE ELEMENTE DIN \mathbb{R}^p

În ceea ce mă privește, mărturisesc că toate raționamentele și calculele bazate pe serii neconvergente mi s-au părut totdeauna aproape suspecte.

Jean d' Alembert

The term infinite summation is an oxymoron. Infinite means without limit, nonterminating, never ending. Summation is the act of coming to the highest point (summus, summit), reaching the totality, achieving the conclusion. How can we conclude a process that never ends? The phrase itself should be a red flag alerting us to the fact that something very subtle and nonintuitive is going on. It is safer to speak of an infinite series for a summation that has no end, but we shall use the symbols of addition, the $+$ and the \sum . We need to remember that they no longer mean quite the same thing. The Greeks of the classical era avoided such dangerous constructions. An illustration of this can be found in the quadrature of the parabola by Archimedes of Syracuse. To make the problem concrete, we state it as one of finding the area of the region bounded below by $y = x^2$, above by $y = 4$, and on the left by the y axis. We mark the following points: $O(0, 0)$, $P(0, 4)$, $A(2, 4)$, $B(1, 1)$, $C_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $C_2(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$, $D_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, $D_2(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$, $D_3(\frac{5}{4}, \frac{25}{16})$, $D_4(\frac{7}{4}, \frac{49}{16})$, The area of the triangle OPA is 4. It can be shown that the area of triangle OAB is 1, the sum of the areas of the triangles OBC_1 and BAC_2 is $\frac{1}{4}$, the sum of the areas of triangles OC_1D_1 , C_1BD_2 , BC_2D_3 , and C_2AD_4 is $\frac{1}{16}$, and so on. As we take more triangles, we get successive approximations to the total area: 4 , $4 + 1$, $4 + 1 + \frac{1}{4}$, $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$, Archimedes then makes the observation that each of these sums brings us closer to $\frac{16}{3}$ A modern reader is inclined to make the jump to an infinite summation at this point and say that the actual area is $4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{16}{3}$. This is precisely what Archimedes did not do. He proceeded very circumspectly, letting K denote the area to be calculated and demonstrating that K could not be larger than $\frac{16}{3}$ nor less than $\frac{16}{3}$ It may seem that Archimedes did a lot of unnecessary work simply to avoid infinite summations, but there is a good reason to avoid infinite summations for they are manifestly not summations in the usual sense. Ordinary sums are very well behaved. They are associative ..., they are commutative These simple facts do not always hold for infinite sums.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 13-15

To be able to treat infinite summations with the care that they require, we

need to view them from a different angle. The first step in this transformation of perspective is to move from the endless sum to an endless sequence of partial sums.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina 119.

Noțiunea de serie de elemente din \mathbb{R}^p
Operații algebrice cu serii
Serii absolut convergente și serii semiconvergente
Produsul a două serii

Noțiunea de serie de elemente din \mathbb{R}^p

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (e, π, γ), precum și în definirea riguroasă a funcțiilor elementare.

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din \mathbb{R}^p , definim seria generată de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ca fiind șirul $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k.$$

Dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ se numește suma seriei și se notează cu S .

x_n -urile poartă numele de termenii seriei, iar S_n -urile de sume parțiale.

Prin convenție, simbolurile $\sum x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ sau $\sum_{n \geq 1} x_n$ vor desemna atât seria generată de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cât și suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Observație. Deși în general elementele unei serii sunt indexate cu numere naturale, există situații în care este de preferat să începem indexarea cu $n = 0$ sau cu $n = k$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Observație. Următorul rezultat furnizează o condiție necesară, însă nu și suficientă, pentru convergența unei serii.

Lemă. Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din \mathbb{R}^p , este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Reciproca nu este adevărată.

Demonstrație. Într-adevăr,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0.$$

Următoarele două rezultate decurg îndată din cele corespunzătoare din capitolul privind șirurile de elemente din \mathbb{R}^p .

Teoremă. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din $[0, \infty)$. Atunci $\sum x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit. În acest caz

$$\sum x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Criteriul lui Cauchy. Seria $\sum x_n$, cu termeni din \mathbb{R}^p , este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|S_m - S_n\| = \|x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m\| < \varepsilon.$$

Exemple standard de serii (seria geometrică și seria armonică)

1. Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum a^n$, numită seria geometrică, este convergentă dacă și numai dacă $|a| < 1$.

2. Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum \frac{1}{n^a}$, numită seria armonică, este convergentă dacă și numai dacă $a > 1$.

Operații algebrice cu serii din \mathbb{R}^p

Teoremă. Dacă seriile $\sum x_n$ și $\sum y_n$, cu termeni din \mathbb{R}^p , sunt convergente, atunci seriile $\sum (x_n + y_n)$ și $\sum (x_n - y_n)$ sunt convergente și sunt valabile relațiile

$$\sum (x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$$

și

$$\sum (x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n.$$

Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din \mathbb{R}^p , este convergentă, $c \in \mathbb{R}$, iar $w \in \mathbb{R}^p$, atunci seriile $\sum cx_n$ și $\sum w \cdot x_n$ sunt convergente și

$$\sum cx_n = c \sum x_n$$

și

$$\sum w \cdot x_n = w \cdot \sum x_n.$$

Serii absolut convergente și serii semiconvergente

Definiție. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din \mathbb{R}^p , spunem că seria $\sum x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum \|x_n\|$ este convergentă.

O serie, cu termeni din \mathbb{R}^p , se numește semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Observație. Pentru seriile care au drept termeni numere reale pozitive nu există distincție între noțiunile de convergență și convergență absolută.

Folosind criteriul lui Cauchy, se poate demonstra următoarea:

Teoremă. Dacă seria $\sum x_n$, cu termeni din \mathbb{R}^p , este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Teorema următoare arată că termenii seriilor absolut convergente pot fi manipulați precum termenii sumelor finite, adică nu este importantă ordinea în care se sunează.

Teoremă. Fie $\sum x_n$ o serie absolut convergentă cu termeni din \mathbb{R}^p , cu suma S . Atunci pentru orice bijecție $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, seria $\sum x_{\sigma(n)}$ este convergentă și are suma S .

Demonstrație. Notând $x_{\sigma(n)}$ cu y_m , avem

$$\|y_1\| + \|y_2\| + \dots + \|y_m\| \leq \sum \|x_n\|,$$

deci seria $\sum x_{\sigma(n)}$ este absolut convergentă.

Fie S' suma sa.

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\|S - (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\| < \varepsilon$$

și

$$\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\| < \varepsilon.$$

Alegem r astfel ca

$$\left\| S' - (y_1 + y_2 \dots + y_r) \right\| < \varepsilon$$

și astfel ca elementele x_1, x_2, \dots, x_n să se afle printre elementele y_1, y_2, \dots, y_r .

În continuare alegem $m \geq n$ astfel ca elementele y_1, y_2, \dots, y_r să se afle printre elementele x_1, x_2, \dots, x_m .

Atunci

$$\begin{aligned} \left\| S' - S \right\| &\leq \|S - (x_1 + x_2 \dots + x_n)\| + \|x_1 + x_2 \dots + x_n - (y_1 + y_2 \dots + y_r)\| \\ &\quad + \left\| S' - (y_1 + y_2 \dots + y_r) \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon + (\|x_{n+1}\| + \dots + \|x_m\|) + \varepsilon < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, deci

$$S' = S.$$

Teorema următoare arată că, spre deosebire de seriile absolut convergente, seriile semiconvergente au un comportament total opus în privința sumei seriei obținute în urma permutării termenilor. Pentru demonstrație se poate consulta [3], paginile 232-234.

Teoremă. *Fiind dată o serie semiconvergentă de numere reale $\sum_n u_n$ și două numere elemente α, β din $\overline{\mathbb{R}}$, astfel încât $\alpha \leq \beta$, există o bijecție $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că*

$$\underline{\lim} S_n(\sigma) = \alpha$$

și

$$\overline{\lim} S_n(\sigma) = \beta$$

unde

$$S_n(\sigma) := \sum_{i=1}^n u_{\sigma(i)}.$$

Produsul a două serii

Următoarea definiție este motivată de modul în care se înmulțesc două polinoame și este utilă în demonstrarea proprietăților uzuale ale funcțiilor elementare.

Definiție. Pentru seriile $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ și $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$, cu termeni din \mathbb{R}^p , se definește produsul Cauchy al lor ca fiind seria $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$, unde

$$x_k = y_0 \cdot z_k + y_1 \cdot z_{k-1} + \dots + y_k \cdot z_0.$$

Remarcă. Produsul Cauchy a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă. Spre exemplu, produsul Cauchy al seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ cu ea însăși nu este o serie convergentă.

Teoremă. Dacă seriile, cu termeni din \mathbb{R}^p , $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ și $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ sunt absolut convergente, cu sumele x , respectiv y , atunci produsul Cauchy al lor este o serie absolut convergentă cu suma $x \cdot y$.

Teorema lui Mertens. Fie seriile, cu termeni din \mathbb{R} , $\sum a_n$ și $\sum b_n$, astfel încât $\sum a_n$ converge absolut către A , iar $\sum b_n$ converge către B . Atunci produsul Cauchy al lor este o serie convergentă cu suma AB .

Notă istorică. Franz Mertens s-a născut în 1840 în Prusia. A studiat la Berlin cu Kronecker și Kummer. În 1865 obține titlul de doctor în matematici, iar apoi profesează în Cracovia, Graz și Viena. Contribuțiile sale esențiale sunt în teoria analitică a numerelor. A murit în 1927.

Teorema lui Cesàro. Fie seriile, cu termeni din \mathbb{R} , $\sum a_n$ și $\sum b_n$, iar $\sum c_n$ produsul Cauchy al celor două. Dacă $\sum a_n$ converge către A , iar $\sum b_n$ converge către B , atunci, notând cu $(C_n)_n$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum c_n$, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_1 + C_2 + \dots + C_n}{n} = AB.$$

Exerciții

1. Să se arate că $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$.
2. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, este convergentă seria $\sum a_n^2$? Dar, în cazul în care $a_n \geq 0$, pentru orice n , este convergentă seria $\sum \sqrt{a_n}$?
3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă și $a_n \geq 0$, pentru orice n , este convergentă seria $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$?
4. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din $(0, \infty)$. Să se arate că seria $\sum \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ este divergentă.
5. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci seria $\sum \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n(n+1)}$ este convergentă.
6. Fie $(a_n)_n$ un șir descrescător de elemente din $[0, \infty)$. Să se arate că, dacă seria $\sum a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. Este adevărată reciproca?
7. Fie $(a_n)_n$ un șir de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Să se arate că seriile $\sum a_n$ și $\sum (a_n + 2a_{n+1})$ au aceeași natură.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000.
3. *G.E. Șilov*, **Analiză matematică. Funcții de o variabilă**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32958

CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII

Criteriile de comparație

Criteriul raportului și criteriul rădăcinii

Criteriul lui Raabe

Criteriile lui Abel și Dirichlet

Unele funcții elementare ca sume de serii

Pentru stabilirea naturii unei serii dispunem de unele criterii de convergență.

Criteriile de comparație

Criteriul de comparație cu inegalități. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din $[0, \infty)$, astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$$x_n \leq y_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Dacă seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă.

Criteriul de comparație la limită. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din $(0, \infty)$.

a) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum x_n$ și $\sum y_n$ au aceeași natură.

b) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ și seria $\sum y_n$ este convergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este convergentă.

c) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ și seria $\sum y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum x_n$ este divergentă.

Observație. Criteriile de mai sus sunt utile dacă dispunem de niște serii standard a căror natură este cunoscută (și care de obicei sunt seria geometrică și seria armonică) și de inegalități și limite standard adecvate.

Criteriul raportului și criteriul rădăcinii

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy).

a) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din \mathbb{R}^p , astfel încât există $r \in [0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$(\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \leq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă există $r \in (1, \infty)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$(\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \geq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Corolar. Pentru $r \in (0, 1)$, notând cu S suma seriei $\sum x_n$, iar cu S_n sumele sale parțiale avem,

$$\|S - S_n\| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din \mathbb{R}^p , astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n\|)^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{not}}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in [0, 1)$ și divergentă pentru $r \in (1, \infty)$.

Criteriul raportului (al lui D'Alembert).

a) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in [0, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă există $r \in (1, \infty)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq r,$$

atunci seria $\sum x_n$ este divergentă.

Notă istorică. *Jean Le Rond D'Alembert* (1717-1783) a fost secretarul Academiei Franceze; a contribuit la studiul dinamicii și al ecuațiilor diferențiale.

Corolar. Pentru $r \in [0, 1)$, notând cu S suma seriei $\sum x_n$, iar cu S_n sumele sale parțiale avem,

$$\|S - S_n\| \leq \frac{r}{1-r} \|x_n\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \stackrel{\text{not}}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in [0, 1)$ și divergentă pentru $r \in (1, \infty)$.

Remarcă. Deși criteriul rădăcinii este mai "puternic" decât cel al raportului, el este mai ușor de aplicat, de cele mai multe ori. Dacă $r = 1$, ambele criterii sunt inutilizabile. În acest caz, următorul criteriu poate decide natura seriei.

Criteriul lui Raabe

Criteriul lui Raabe

a) Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in (1, \infty)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{r}{n},$$

atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

b) Dacă există $r \in (-\infty, 1)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq 1 - \frac{r}{n},$$

atunci seria $\sum x_n$ nu este absolut convergentă.

Demonstrație. a) Să presupunem că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in (1, \infty)$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ să avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \leq 1 - \frac{r}{n},$$

i.e.

$$n \|x_{n+1}\| \leq (n-1) \|x_n\| - (r-1) \|x_n\|,$$

adică

$$0 < (r-1) \|x_n\| \leq (n-1) \|x_n\| - n \|x_{n+1}\|.$$

Prin urmare, şirul $(n \|x_{n+1}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător începând cu rangul n_0 , deci mărginit.

Prin adunarea inegalităţilor de tipul celor de mai sus, obţinem

$$(r-1)(\|x_{n_0}\| + \dots + \|x_n\|) \leq (n_0-1) \|x_{n_0}\| - n \|x_{n+1}\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum \|x_n\|$ este mărginit, i.e. seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

b) Să presupunem că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $r \in (-\infty, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$\frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \geq 1 - \frac{r}{n},$$

i.e.

$$n \|x_{n+1}\| \geq (n-r) \|x_n\| \geq (n-1) \|x_n\|.$$

Prin urmare, şirul $(n \|x_{n+1}\|)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător începând cu rangul n_0 , deci există un număr real strict pozitiv c astfel încât

$$\|x_{n+1}\| \geq \frac{c}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Cum seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, deducem că seria $\sum x_n$ nu este absolut convergentă.

Notă istorică. *Joseph L. Raabe* (1801-1859) a predat la Zürich; a contribuit la studiul geometriei şi al analizei matematice.

Corolar. Pentru $r \in (1, \infty)$, notând cu S suma seriei $\sum x_n$, iar cu S_n sumele sale parţiale avem,

$$\|S - S_n\| \leq \frac{n}{r-1} \|x_{n+1}\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de elemente din $\mathbb{R}^p - \{0\}$, astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|}) \stackrel{\text{not}}{=} r$, atunci seria $\sum x_n$ este absolut convergentă pentru $r \in (1, \infty)$ și nu este absolut convergentă, pentru $r \in [0, 1)$.

Observație. Formulări mai generale ale criteriilor de mai sus, care folosesc noțiunile de limită superioară și limită inferioară, se pot găsi în [2].

Criteriile lui Abel și Dirichlet

Criteriile anterioare prezintă condiții în care o serie este absolut convergentă. Deoarece, așa cum am menționat, există serii care sunt convergente fără a fi absolut convergente, este util să dispunem de criterii care să garanteze convergența acestor tipuri de serii.

Lema lui Abel. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din \mathbb{R}^p , iar $(s_k)_k$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum y_n$.

Atunci, pentru $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, avem

$$\sum_{j=n}^m x_j \cdot y_j = (x_{m+1} \cdot s_m - x_n \cdot s_{n-1}) + \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1}) \cdot s_j.$$

Criteriul lui Dirichlet. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de elemente din \mathbb{R}^p , iar $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum y_n$. Presupunem că $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este mărginit, că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către 0 și că seria $\sum \|x_n - x_{n+1}\|$ este convergentă (de exemplu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere reale pozitive, care converge către 0).

Atunci seria $\sum x_n \cdot y_n$ este convergentă.

Notă istorică. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet s-a născut în februarie 1805 la Düren, Franța (acum în Germania). Merge la gimnaziu în Bonn începând din 1817, dar după doi ani frecventează un alt colegiu iezuit din Köln. Se hotărăște să-și continue studiile la Paris unde frecventează cursurile de la Collège de France și de la Faculté des Sciences unde are ca profesori pe Fourier, Laplace, Legendre și Poisson. Din 1823 Dirichlet este luat în ocrotire de către generalul Foy (o figură celebră din armata franceză în timpul războaielor lui Napoleon). În iulie 1825 prezintă la Academia din Paris primul lui articol, asupra teoremei lui Fermat, care-l va face faimos. În același an generalul Foy moare, iar Dirichlet se hotărăște să se întoarcă

în Germania. Predă la universitățile din Breslau (1827), Colegiul Militar și Universitatea din Berlin (1828-1855). A fost un bun prieten al lui Jacobi pe care l-a și însoțit în Italia (1843) în perioada de convalescență a acestuia. În 1855 i se oferă catedra lui Gauss de la Göttingen. A avut numeroase contribuții la teoria numerelor, a introdus noțiunea modernă de funcție, iar studiile sale despre stabilitatea sistemului solar l-au condus la celebra problemă a funcțiilor armonice care au condiții date pe frontieră. De asemenea este faimos pentru stabilirea condițiilor pentru convergența seriilor trigonometrice, publicate în 1828 în Crelle's Journal. A murit în 1859 la Göttingen (Germania).

Demonstrație. Fie $M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\|s_k\| \leq M,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \cdot y_j \right\| \leq M \{ \|x_{m+1}\| + \|x_n\| + \sum_{j=n}^m \|x_j - x_{j+1}\| \}.$$

Faptul că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către 0 (împreună cu aplicarea criteriului lui Cauchy, vezi pagina 140) va încheia demonstrația.

Corolar. În condițiile de mai sus, cu ipoteza suplimentară că $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir descrescător de numere reale pozitive care converge către 0, avem, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right\| \leq 2M \|x_{n+1}\|.$$

Criteriul ce urmează întărește ipotezele asupra seriei $\sum y_n$, dar le slăbește pe cele asupra șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din \mathbb{R} .

Criteriul lui Abel. Fie $\sum y_n$ o serie convergentă de elemente din \mathbb{R}^p , iar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de elemente din \mathbb{R} care este monoton și convergent.

Atunci seria $\sum x_n y_n$ este convergentă.

Notă istorică. *Niels Henrik Abel* s-a născut în 1802 în Norvegia. Din 1815 a studiat la școala din Christiania sub îndrumarea lui Bernt Holmboe (din 1817), iar din 1821 la Universitatea din aceeași localitate. În 1824 a demonstrat imposibilitatea găsirii soluțiilor unui polinom de grad 5 "prin radicali". A avut contribuții substanțiale la teoria funcțiilor eliptice, precum și la teoria lui Galois. De altfel primul volum al Crelle's Journal, din 1827, conține un articol al lui Abel, anume "Recherches sur les fonctions elliptiques". A murit în 1829, sănătatea sa fiind șubredă de mulți ani.

Demonstrație. Să presupunem că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător și că limita sa este x .

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|x_{m+1}s_m - x_ns_{n-1}\| < \varepsilon,$$

unde $(s_k)_k$ este șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum y_n$.

În plus, fie $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|s_k\| \leq M,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Atunci

$$\left\| \sum_{j=n}^m (x_j - x_{j+1})s_j \right\| \leq |x_n - x_{m+1}| M.$$

Din cele de mai sus și lema lui Abel se deduce concluzia.

Corolar. *În condițiile de mai sus, avem*

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum_{j=1}^n x_j y_j \right\| \leq |x| \|s - s_n\| + 2M \|x - x_{n+1}\|.$$

Există o clasă importantă de serii, anume acelea care au termenii numere reale cu semnele alternând.

Definiție. *Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbb{R} - \{0\}$ se numește alternat dacă elementele mulțimii $\{(-1)^n x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sunt toate pozitive sau toate negative. O serie generată de un șir alternat se numește alternată.*

Criteriul lui Leibniz. Fie $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir descrescător de elemente din $[0, \infty)$.

Atunci seria alternată $\sum (-1)^n z_n$ este convergentă.

Mai mult, notând cu S suma seriei $\sum (-1)^n z_n$, iar cu S_n sumele sale parțiale avem

$$\|S - S_n\| \leq z_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notă istorică. *Gottfried Leibniz* (1646-1716) a studiat la școala Nicolai din Leipzig, precum și la Universitatea din același oraș și la cea din Jena. A obținut titlul de doctor în drept de la Universitatea din Altdorf. Este primul care folosește notația $\int f(x)dx$, într-un manuscris datat 21 noiembrie 1675 și într-un articol, apărut în *Acta Eruditorum*, în 1686. În aceeași revistă publică, în 1684, detalii privind concepțiile sale privind calculul diferențial în cadrul articolului *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...* A fost membru al Royal Society of London și al Accademia din Roma. Este, alături de Newton, unul dintre fondatorii calculului diferențial și integral.

Unele funcții elementare ca sume de serii

Noțiunile anterioare ne permit să (re)definim într-o manieră extrem de riguroasă funcțiile elementare.

1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă și

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Să se arate că

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y},$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Pentru orice $x, \alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $|x| < 1$, seria $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ este absolut convergentă și

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha.$$

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu $\sin x$.

Așadar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

4. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ este absolut convergentă și suma sa se notează cu $\cos x$.

Așadar

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x.$$

5. Au loc relațiile:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos(x),$$

$$\sin(0) = 0,$$

$$\cos(0) = 1$$

și

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Există un număr real, notat cu π , astfel încât:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos x > 0,$$

pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ și

$$\sin(x+2\pi) = \sin x,$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Definim funcția $tg : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

și funcția $ctg : \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Observație. Pentru justificarea rezultatelor de mai sus, se pot consulta [1] și [4].

Exerciții

1. Să se arate că:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^{n+1}} \cos \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sin 1;$$

$$\text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^3 3^n x}{3^n} = \frac{3}{4} \cos x;$$

$$\text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90};$$

$$\text{v)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{4}$$

2. (Criteriul de condensare al lui Cauchy) Fie $(a_n)_n$ un șir descrescător de elemente din $[0, \infty)$.

Să se arate că seria $\sum a_n$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum 2^n a_{2^n}$ este convergentă.

Aplicație: stabiliți natura seriei $\sum \frac{1}{n \log n}$.

3. (Criteriul lui Gauss) Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive. Dacă există un șir mărginit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $\lambda > 0$ astfel încât

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{b_n}{n^{1+\lambda}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci seria $\sum a_n$ este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă dacă $\alpha \leq 1$.

Aplicație: să se arate că dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $y \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \dots, -n, \dots\}$, atunci seria

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1!y} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!y(y+1)} + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!y(y+1)\dots(y+n-1)} + \dots,$$

numită seria hipergeometrică, este convergentă dacă și numai dacă $\alpha + \beta < y$.

Notă istorică. *Johann Carl Friedrich Gauss* s-a născut la Brunswick, Germania, în aprilie 1777. Încă de la 7 ani i-a uimit pe dascălii săi cu abilitățile sale matematice. În 1888 intră la gimnaziu, iar din 1792, cu sprijinul material al ducelui de Brunswick-Wolfenbüttel, urmează Brunswick Collegium Carolinum. În 1795 merge la Universitatea din Göttingen unde devine prieten cu Farkas Bolyai, prietenie ce va dura peste ani. Ducele de Brunswick continuă să-l sprijine material în decursul pregătirii tezei sale de doctorat sub îndrumarea lui Pfaff. În 1801 publică carte "Disquisitiones Arithmeticae". În 1807 devine directorul observatorului astronomic din Göttingen, iar în 1809 publică o a doua carte, intitulată "Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solemambientum". Contribuțiile lui Gauss la astronomia teoretică iau sfârșit în 1817, deși va face observații astronomice până la vârsta de 70 de ani. A mai publicat "Disquisitiones generales circa seriem infinitam", "Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi", "Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen", "Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata", "Disquisitiones generales circa superficies curva", "Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik" și "Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrum". I se oferă o poziție la Universitatea din Berlin, pe care însă o refuză. În 1831, la Göttingen este numit profesor fizicianul Wilhelm Weber, împreună cu care Gauss începe un studiu al magnetismului terestru, descoperă legea lui Kirchhoff și construiește o variantă primitivă a telegrafului. A murit în februarie 1855.

4. Să se studieze natura următoarelor serii:

- i) $\sum e^{-n^2}$;
- ii) $\sum \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$;
- iii) $\sum \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{(n+1)!} x^n$, unde $x \in (0, \infty)$;
- iv) $\sum \sigma(n)x^n$, unde $x \in (0, \infty)$ iar $\sigma(n)$ reprezintă numărul divizorilor lui n ;
- v) $\sum \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$;
- vi) $\sum \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (3n)}\right)^2$;
- vii) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;
- viii) $\sum \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n}$;
- ix) $\sum \sin \pi(2 + \sqrt{3})^n$;
- x) $\sum \frac{\cos nx}{n}$, unde $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- xi) $\sum \frac{\sin nx}{n}$, unde $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- xii) $\sum \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{n}$;
- xiii) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$;
- xiv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$, unde $x_1 = x_2 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n^2} x_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Bibliografie

1. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
3. *W.J. Kaczor, M.T. Nowak*, **Problems in Mathematical Analysis I**, American Mathematical Society, 2000.
4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002- cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801

CONTINUITY

Cronologic, conceptul de continuitate este ulterior celui de derivată; logic, însă, îl precede. Derivata este, am putea spune, personajul principal al Calculului diferențial, tot așa cum integrala este personajul principal al Calculului integral. Derivata și integrala au avut de la început o interpretare geometrică și fizică directă, ele constituiau pentru Newton și Leibniz modele matematice ale unor realități cu un conținut intuitiv precis. Nu același lucru se poate spune despre continuitate, în ciuda faptului că termenul ca atare face imagine. Proprietatea de continuitate a apărut în Analiza matematică nu la contactul ei direct cu realitatea empirică, ci în laboratorul de lucru al matematicianului, din necesități interne, de ordin teoretic. Două momente importante au marcat (după Cauchy) evoluția înțelegerii ideii de continuitate. În 1872, Weierstrass a șocat lumea matematică prin exemplul său de funcție continuă în orice punct din \mathbb{R} , dar nederivabilă în nici un punct. În 1905, Emile Picard comenta ironic acest fapt, observând că dacă Newton și Leibniz ar fi știut de existența unei funcții ca aceea a lui Weierstrass, calculul diferențial nu ar mai fi fost creat. ... Până la Weierstrass se credea că derivabilitatea este o consecință a continuității, de aceea nici nu prea se vorbea de derivabilitate, ci de derivată (derivabilitatea fiind considerată echivalentă cu continuitatea). În manualele de matematici din secolul al XIX-lea, inclusiv manualele scrise de mari matematicieni, se "demonstra" ceea ce astăzi atrage căderea la examen: Continuitatea implică derivabilitatea. Marele Cauchy nu făcea distincție între continuitate și derivabilitate; mai precis, nu bănuia că una dintre aceste proprietăți ar putea avea loc în absența celeilalte. Al doilea moment important în clarificarea ideii de continuitate este anul 1875, când Gaston Darboux dă un exemplu de derivată discontinuă, arătând totodată că orice derivată are proprietatea valorii intermediare (numită astăzi proprietatea lui Darboux): Nu se poate trece de la o valoare la alta fără a se parcurge toate valorile intermediare. Până la Darboux, matematicienii erau convingeți că proprietatea de continuitate este echivalentă cu proprietatea valorii intermediare; chiar termenul de continuitate își are explicația în această interpretare. Într-adevăr, proprietatea lui Darboux constă în faptul că funcția nu poate "sări" de la o valoare la alta, trecerea trebuind să se facă în mod continuu (aici cuvântul continuu fiind folosit în accepțiunea sa intuitivă). Dar, așa cum, confundând continuitatea cu derivabilitatea, Cauchy și alți mari matematicieni nu se înșelau decât pe jumătate, deoarece derivabilitatea implică proprietatea de continuitate, confuzia dintre continuitate și proprietatea lui Darboux conținea și ea jumătate de adevăr, deoarece continuitatea implică proprietatea lui Darboux. Prin clarificările aduse de Weierstrass și Darboux, devenea clar că intuiția proprietății matematice de continuitate este foarte înșelătoare, o adevărată capcană care urma să fie depășită abia în secolul nostru (i.e. XX), prin perfecționarea și

rafinarea instrumentelor Analizei. O literatură considerabilă privind proprietățile de continuitate, derivabilitate și proprietatea lui Darboux a permis să se precizeze statutul acestora, gradul lor de independență și de condiționare reciprocă.

Solomon Marcus, Școlul matematicii, Editura Albatros, București, 1987, paginile 246-247

Continuity is such an obvious geometric phenomenon, that only slowly did it dawn on mathematicians, that it needed a precise definition. Well into the 19th century it was simply viewed as a descriptive term for curves that are unbroken. The preeminent calculus text of that era was S. F. Lacroix's *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*. It was first published in 1802. The sixth edition appeared in 1858. Unchanged throughout these editions was its definition of continuity: "By the law of continuity is meant that which is observed in the description of lines by motion, and according to which the consecutive points of the same line succeed each other without any interval". This intuitive notion of continuity is useless when one tries to prove anything. The first appearance of the modern definition of continuity was published by Bernhard Bolzano in 1871 in the Proceedings of the Prague Scientific Society under the title *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwieschen je zwey [sic] Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*. This roughly translates as Purely analytic proof of the theorem that between any two values that yield results of opposite sign there will be at least one real root of the equation. The title says it all. Bolzano was proving that any continuous function has the intermediate value property. Bolzano's article raises an important point. If he has to prove that continuity implies the intermediate value property, then he is not using the intermediate value property to define continuity. Why not? Such a definition would agree with the intuitive notion of continuity. If a function is defined at every point on the interval $[a, b]$, then to say it has the intermediate property is equivalent to saying that it has no jumps or breaks. There are several problems with choosing this definition of continuity. A function that has the intermediate value property on $[0, 1]$ is not necessarily bounded on that interval. ... Another problem with using the intermediate value property to define continuity is that two functions can have it while their sum does not. ... Perhaps the most important aspect of continuity that the intermediate value property lacks, and the one that may have suggested the modern definition, is that if f is continuous in a neighborhood of a and if there is a small error in the input so that instead of evaluating f at a we evaluate it at something very close to a , then we want the output to be very close to $f(a)$. The function defined by

$f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, satisfies the intermediate value property no matter how we define $f(0)$, provided that $-1 \leq f(0) \leq 1$, but at $a = 0$ any allowance for error in the input will result in an output that could be any number from -1 to 1 . We want to be able to control the variation in the output by setting a tolerance on the input. ...This definition (i.e. the $\delta - \varepsilon$ definition of continuity) does it all for us: it implies the intermediate value property, it implies that a continuous function on $[a, b]$ is bounded and achieves its bounds on that interval, it is preserved when we add two continuous functions or multiply them or even take compositions of continuous functions.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 91-95.

PROPRIETĂȚI LOCALE ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

Definiția continuității unei funcții într-un punct; formulări echivalente

Operații algebrice cu funcții continue

Continuitatea aplicațiilor liniare

având domeniul \mathbb{R}^p și codomeniul \mathbb{R}^q

Definiția continuității unei funcții într-un punct; formulări echivalente

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$. Spunem că funcția f este continuă în a dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a (care depinde de V), astfel ca pentru orice

$$x \in D \cap U$$

să avem

$$f(x) \in V.$$

Dacă $D_1 \subseteq D$, atunci spunem că f este continuă pe D_1 dacă f este continuă în orice punct din D_1 .

Observație. Definiția de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată și în cadrul spațiilor topologice.

Observație. Din definiția de mai sus decurge faptul că dacă $a \in D - D'$ (i.e. a este un punct izolat al lui D , adică există o vecinătate U a lui a cu proprietatea că $U \cap D = \{a\}$), atunci f este continuă în a . Se poate consulta și Teorema de la pagina 259, care precizează condiții echivalente pentru continuitate în cazul în care $a \in D \cap D'$.

Prezentăm acum o propoziție care furnizează condiții echivalente pentru continuitate. Ea se va dovedi utilă în cadrul demonstrațiilor următoarelor rezultate: Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue (vezi pagina 212), Teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213), Teorema de la pagina 219, Teorema de la pagina 287, Lema de la pagina 325.

Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$.

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este continuă în a .

b) pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, dacă

$$x \in D \text{ și } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

c) pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din D , care converge către a , șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

Demonstrație.

a) \Rightarrow b) Mulțimea

$$M_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^q \mid \|y - f(a)\| < \varepsilon\}$$

este o vecinătate a lui $f(a)$.

Ca atare, există U , vecinătate a lui a , astfel ca

$$x \in U \cap D \Rightarrow f(x) \in M_\varepsilon.$$

Deoarece U este o vecinătate a lui a , există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \delta_\varepsilon\} \subseteq U,$$

și ca atare, dacă

$$x \in D \text{ și } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$x \in U \cap D$$

și deci

$$f(x) \in V_\varepsilon,$$

adică

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

$b) \Rightarrow c)$ Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir, de elemente din D , care converge către a .
Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel încât, dacă

$$x \in D \text{ și } \|x - a\| < \delta_\varepsilon,$$

atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\|x_n - a\| < \delta_\varepsilon.$$

Cum $x_n \in D$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către $f(a)$.

$c) \Rightarrow a)$ Presupunem, prin reducere la absurd, că $a)$ este falsă.

Atunci există V_0 , vecinătate a lui $f(a)$, astfel ca, pentru orice U , vecinătate a lui a , există $x_U \in D \cap U$, astfel încât

$$f(x_U) \notin V_0.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$U_n = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \frac{1}{n}\}.$$

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in D \cap U_n$, astfel încât

$$f(x_n) \notin V_0,$$

fapt care contrazice $c)$. \square

Criteriu de discontinuitate. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$. Funcția f nu este continuă în a dacă și numai dacă există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din D , care converge către a , dar pentru care șirul $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge către $f(a)$.

Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$. Atunci f este continuă în a dacă și numai dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a)$, există o vecinătate U a lui a , astfel ca

$$U \cap D = f^{-1}(V).$$

Exerciții

1. Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $c \in \mathbb{R}$;

b. $f : [0, 1] \cup \{\frac{3}{2}\} \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 7, & x = \frac{3}{2} \\ 2, & x \in [2, 3] \end{cases}.$$

c. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

d. $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$;

e. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0; \end{cases}$$

f. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

g. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

h. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

2. Fie $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$g_1(x) = f(x, 0),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, și $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$g_2(x) = f(0, x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că g_1 și g_2 sunt continue.

Să se arate că dacă g_1 și g_2 sunt continue în 0, nu rezultă, în general, că f este continuă în 0.

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \text{ unde } p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, (|p|, q) = 1, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \end{cases}.$$

Funcția descrisă mai sus poartă numele de funcția lui Riemann.

Să se studieze continuitatea lui f .

4. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue și $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Să se arate că h este continuă în $x_0 \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă

$$f(x_0) = g(x_0).$$

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de numere reale nenule având următoarele proprietăți:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

și

$$f(x + x_n) = f(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că f este constantă.

6. Fie $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții cu proprietatea că mulțimile punctelor lor de continuitate sunt dense în $[0, 1]$. Să se arate că există cel puțin un punct al intervalului $[0, 1]$ în care ambele funcții sunt continue.

7. Să se arate că orice funcție $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ care are graficul închis (i.e. pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $[0, 1]$ și orice $x, y \in [0, 1]$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$, rezultă $f(x) = y$) este continuă.

Operații algebrice cu funcții continue

Rezultatele de mai jos arată că familia funcțiilor continue are un comportament "bun" la operațiile algebrice.

Teoremă. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in D$. Dacă f, g și φ sunt continue în a , atunci $f + g$, $f - g$, fg , φf și $\frac{f}{\varphi}$ (dacă $\varphi(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$) sunt continue în a .

Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă f este continuă în a , atunci $\|f\|$ este continuă în a .

Teoremă. Fie $f : D_1 \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow D_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ și $g : D_2 \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow D_3 \subseteq \mathbb{R}^r$. Dacă f este continuă în a , iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a .

Continuitatea aplicațiilor liniare având domeniul \mathbb{R}^p și codomeniul \mathbb{R}^q

Până acum am considerat funcții generale.

În continuare vom considera o clasă specială de funcții, anume funcțiile liniare.

Definiție. O funcție $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește liniară dacă

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

și

$$f(cx) = cf(x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ și $c \in \mathbb{R}$.

Teoremă. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție liniară. Atunci există pq numere reale, notate c_{ij} , $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, p}$, astfel încât, pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ și $y = f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, avem:

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1p}x_p,$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2p}x_p,$$

.....

$$y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qp}x_p.$$

Reciproc, dacă considerăm pq numere reale, notate c_{ij} , $i = \overline{1, q}$, $j = \overline{1, p}$, atunci funcția care asociază oricărui $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, elementul $y = f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, descris de ecuațiile de mai sus, este liniară.

Demonstrație. Fie

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

...

$$e_p = (0, \dots, 0, 1),$$

și

$$f(e_1) = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{q1}),$$

$$f(e_2) = (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{q2}),$$

...

$$f(e_p) = (c_{1p}, c_{2p}, \dots, c_{qp}).$$

Pentru un element arbitrar $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, avem

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_p e_p.$$

Cum f este liniară, avem

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_p f(e_p),$$

de unde

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{q1}) + x_2 (c_{12}, c_{22}, \dots, c_{q2}) + \dots + x_p (c_{1p}, c_{2p}, \dots, c_{qp}) = \\ &= (x_1 c_{11} + x_2 c_{21} + \dots + x_p c_{1p}, \dots, x_1 c_{q1} + x_2 c_{q2} + \dots + x_p c_{qp}) = (y_1, y_2, \dots, y_q). \end{aligned}$$

Reciproca este imediată. \square

Rezultatul de mai sus ne va ajuta să stabilim că orice aplicație liniară $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este continuă. Acest fapt se va folosi atunci când vom demonstra Propoziția de la pagina 299, precum și atunci când vom demonstra Teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (vezi pagina 304).

Propoziție. Pentru orice aplicație liniară $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ există $M \in [0, \infty)$ cu proprietatea că

$$\|f(x)\| \leq M \|x\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

În particular, o astfel de funcție este continuă.

Demonstrație. Avem, utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (vezi pagina 86),

$$|y_i|^2 \leq \|x\|^2 \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2,$$

de unde

$$\|f(x)\| = \|y\| \leq \|x\| \left(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, i.e., cu notația

$$M = \left(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avem

$$\|f(x)\| \leq M \|x\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Ca atare, avem

$$\|f(u - v)\| = \|f(u) - f(v)\| \leq \left(\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p |c_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v\|,$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^p$, ceea ce implică îndată continuitatea lui f . \square

Observație. Există aplicații liniare între anumite spații normate (infinit dimensionale) care nu sunt continue.

Observație. Funcțiile polinomiale, raționale (i.e. cele care sunt cât de funcții polinomiale), putere, exponențială, logaritmică, sin, cos, tg, ctg sunt continue.

Bibliografie

1. Robert G. Bartle, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

PROPRIETĂȚI GLOBALE ALE FUNCȚIILOR CONTINUE

Caracterizări alternative pentru continuitatea globală

Continuitate și conexitate:

Teorema de permanență a conexității pentru funcții continue;

Teorema lui Bolzano a valorilor intermediare.

Continuitate și compacitate:

Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue;

Teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue.

Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue

Pâna acum am studiat continuitatea unei funcții local, adică într-un punct. În continuare vom studia proprietățile funcțiilor care sunt continue în fiecare punct al domeniului de definiție.

Caracterizări alternative pentru continuitatea globală

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrațiilor următoarelor rezultate: Teorema de permanență a conexității (vezi pagina 210), Teorema lui Bolzano a valorilor intermediare (vezi pagina 211), Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue (vezi pagina 216), Teorema lui Dini (vezi pagina 220), Teorema continuității uniforme (vezi pagina 226), Teorema lui Tietze (vezi pagina 249).

Teorema de continuitate globală. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.*

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) *f este continuă pe D ;*

b) *pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q$, există $G_1 = \overset{\circ}{G}_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, astfel încât*

$$G_1 \cap D = f^{-1}(G);$$

c) *pentru orice $H = \overline{H} \subseteq \mathbb{R}^q$, există $H_1 = \overline{H}_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, astfel încât*

$$H_1 \cap D = f^{-1}(H).$$

Observație. *Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată și în cadrul spațiilor topologice, validitatea ei păstrându-se.*

Demonstrație

$a) \Rightarrow b)$ Fie

$$G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q.$$

Dacă $a \in f^{-1}(G)$, deoarece G este o vecinătate a lui $f(a)$, rezultă, folosind continuitatea lui f în a , că există $U_a = \overset{\circ}{U}_a \subseteq \mathbb{R}^q$ astfel încât

$$x \in U_a \cap D \Rightarrow f(x) \in G.$$

Alegem

$$G_1 = \bigcup_{a \in G} U_a.$$

$b) \Rightarrow a)$ Fie $a \in D$ și G o vecinătate deschisă a lui $f(a)$.

Atunci există $G_1 = \overset{\circ}{G}_1 \subseteq \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$G_1 \cap D = f^{-1}(G).$$

G_1 este o vecinătate deschisă a lui a , deoarece $a \in G_1$.

Dacă $x \in G_1 \cap D$, atunci $f(x) \in G$, deci f este continuă în a .

Acum vom arăta că $b) \Leftrightarrow c)$.

Pentru început, să observăm că pentru $B \subseteq \mathbb{R}^q$ și $C = \mathbb{R}^q - B$ avem

$$f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$$

și

$$f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = D. \quad (1)$$

Dacă B_1 este o submulțime a lui \mathbb{R}^p astfel ca

$$B_1 \cap D = f^{-1}(B)$$

și $C_1 = \mathbb{R}^p - B_1$, atunci

$$C_1 \cap f^{-1}(B) = \emptyset$$

și

$$D = (B_1 \cap D) \cup (C_1 \cap D) = f^{-1}(B) \cup (C_1 \cap D). \quad (2)$$

Din formule (1) și (2) deducem că

$$C_1 \cap D = f^{-1}(C).$$

Echivalența $b) \Leftrightarrow c)$ decurge imediat din considerentele de mai sus. \square

Corolar. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este continuă pe \mathbb{R}^p .

b) pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(G)$ este deschisă în \mathbb{R}^p .

c) pentru orice $H = \overline{H} \subseteq \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(H)$ este închisă în \mathbb{R}^p .

Observație. Teorema de mai sus nu afirmă că, pentru o funcție continuă f și o mulțime deschisă G , $f(G)$ este deschisă.

Într-adevăr, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci

$$f((-1, 1)) = \left(\frac{1}{2}, 1\right].$$

Mai mult,

$$f([1, \infty)) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

și

$$f(\mathbb{R}) = (0, 1],$$

deci proprietatea unei mulțimi de a fi deschisă sau închisă nu se păstrează prin acțiunea unei funcții continue.

Vom vedea însă că situația este diferită în ceea ce privește compacitatea și conexitatea.

Continuitate și conexitate

Rezultatul de mai jos arată că imaginea unei mulțimi conexe printr-o funcție continuă este o mulțime conexă.

Teorema de permanență a conexității pentru funcții continue.

Fie $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă H este conexă și f este continuă, atunci $f(H)$ este conexă.

Observație. Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată și în cadrul spațiilor topologice, validitatea ei păstrându-se.

Demonstrație. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $f(H)$ este neconexă.

Atunci există două mulțimi deschise A și B din \mathbb{R}^q , astfel încât $A \cap f(H)$ și $B \cap f(H)$ sunt nevide, disjuncte și reuniunea lor este $f(H)$.

Întrucât f este continuă, conform Teoremei de continuitate globală (vezi pagina 208), există două mulțimi deschise A_1 și B_1 din \mathbb{R}^p , astfel ca

$$A_1 \cap H = f^{-1}(A)$$

și

$$B_1 \cap H = f^{-1}(B).$$

Atunci $A_1 \cap H$ și $B_1 \cap H$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este H , ceea ce contrazice faptul că H este conexă. \square

Adjectivul continuă pentru o funcție sugerează că nu există întreruperi în graficul funcției. Ca atare, următorul rezultat nu este neașteptat.

Teorema lui Bolzano a valorilor intermediare. Fie $f : H \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și continuă, iar H conexă.

Dacă $k \in \mathbb{R}$ satisface inegalitatea

$$\inf\{f(x) \mid x \in H\} < k < \sup\{f(x) \mid x \in H\},$$

atunci există cel puțin un punct în H în care f ia valoarea k .

Demonstrație. Fie mulțimile deschise și disjuncte

$$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t < k\}$$

și

$$B = \{t \in \mathbb{R} \mid t > k\}.$$

Întrucât f este continuă, conform Teoremei de continuitate globală (vezi pagina 208), există două mulțimi deschise, A_1 și B_1 , din \mathbb{R}^p , astfel ca

$$A_1 \cap H = f^{-1}(A)$$

și

$$B_1 \cap H = f^{-1}(B).$$

Dacă f , prin absurd, nu ar lua, pe H , valoarea k , atunci $A_1 \cap H$ și $B_1 \cap H$ sunt nevide, disjuncte, iar reuniunea lor este H , ceea ce contrazice faptul că H este conexă. \square

Continuitate și compacitate

Rezultatul de mai jos arată că imaginea unei mulțimi compacte printr-o funcție continuă este o mulțime compactă. El se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213) și a Teoremei de continuitate a inversei pentru funcții continue (vezi pagina 216).

Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue.
Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă K este compactă și f este continuă, atunci $f(K)$ este compactă.

Observație. *Teorema de mai sus are un caracter pur topologic, ea putând fi formulată și în cadrul spațiilor topologice, validitatea ei păstrându-se.*

Demonstrație. Conform Teoremei Heine-Borel (vezi pagina 115), știm că mulțimea K este mărginită și închisă în \mathbb{R}^p .

Conform aceluiași rezultat, este suficient să arătăm că $f(K)$ este mărginită și închisă în \mathbb{R}^q .

Să presupunem, prin absurd, că $f(K)$ nu este mărginită.

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in K$, astfel încât

$$\|f(x_n)\| \geq n.$$

Cum K este mărginită, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit, deci, în conformitate cu lema lui Cesàro (vezi pagina 139), există un subșir al său convergent către x .

Pentru că $x_n \in K$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și K este închisă, rezultă că $x \in K$.

Deoarece f este continuă în x , există o vecinătate V a lui x , astfel ca, pe V , f este mărginită, ceea ce contrazice faptul că $|f(x_n)| \geq n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Așadar $f(K)$ este mărginită.

Vom arăta că $f(K)$ este închisă.

Pentru aceasta, în conformitate cu Teorema de la pagina 96, este suficient să arătăm că orice punct de acumulare y al lui $f(K)$ este din $f(K)$.

Într-adevăr, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $z_n \in K$, astfel ca

$$\|f(z_n) - y\| < \frac{1}{n}.$$

Conform lemei lui Cesàro (vezi pagina 139), există $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, un subsir al lui $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent către z .

Pentru că $z_n \in K$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și K este închisă, rezultă că

$$z \in K.$$

Deoarece f este continuă în z , conform Teoremei de la pagina 201, avem

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = y,$$

ceea ce arată că $y \in f(K)$.

Deci $f(K)$ este închisă. \square

Rezultatul de mai jos arată că "o funcție continuă pe un compact este mărginită și își atinge marginile". El se va folosi în cadrul demonstrației Propoziției de la pagina 215, precum și a Teoremei lui Tietze (vezi pagina 249).

Teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue. *Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție continuă, unde K este mulțime compactă. Atunci există x^* și x_* , puncte din K , astfel încât*

$$\|f(x^*)\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|$$

și

$$\|f(x_*)\| = \inf_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Demonstrație. Deoarece f este continuă, conform celei de a doua Teoreme de la pagina 215, $\|f\|$ este continuă și ca atare, folosind Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue (vezi pagina 212), precum și Teorema Heine-Borel (vezi pagina 115), mulțimea $\{\|f(x)\| \mid x \in K\}$ este mărginită.

Fie

$$M = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in K\}.$$

Conform Teoremei de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi (vezi pagina 66), putem considera un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din K , astfel încât

$$M \geq \|f(x_n)\| \geq M - \frac{1}{n}, \quad (*)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, conform Lemei lui Cesàro (vezi pagina 139), există un punct x^* din K și $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, un subsir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergent către x^* .

Deoarece $\|f\|$ este continuă, folosind Teorema de la pagina 201, Propoziția de la pagina 132 și $(*)$, avem

$$\|f(x^*)\| = M = \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Similar se arată cealaltă parte a teoremei. \square

Corolarul de mai jos se va folosi în demonstrația Propoziției de caracterizare a aplicațiilor liniare și injective de la \mathbb{R}^p la \mathbb{R}^q (vezi pagina 215), Teoremei de aproximare a lui Bernstein (vezi pagina 244), Teoremei lui Rolle (vezi pagina 277), Teorema lui Darboux (pagina 282), Criteriului de stabilire a punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile (vezi pagina 342), precum și a Primei teoreme de medie la integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386).

Corolar. Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, unde K este mulțime compactă. Atunci există x^* și x_* , puncte din K , astfel încât

$$f(x^*) = \sup_{x \in K} f(x)$$

și

$$f(x_*) = \inf_{x \in K} f(x).$$

Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue

Observație. Să remarcăm că $S = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| = 1\}$ este mărginită și închisă, deci, conform Teoremei Heine-Borel (vezi pagina 115), compactă.

În conformitate cu Teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213), pentru o aplicație liniară $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ există x^* și x_* puncte din S , astfel încât

$$\|f(x^*)\| = \sup_{x \in S} \|f(x)\| = M$$

și

$$\|f(x_*)\| = \inf_{x \in S} \|f(x)\| = m.$$

Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p - \{0\}$, avem

$$\frac{x}{\|x\|} \in S,$$

deci

$$m \leq \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \frac{1}{\|x\|} \|f(x)\| \leq M,$$

de unde

$$m \|x\| \leq \|f(x)\| \leq M \|x\|,$$

relație valabilă și pentru $x = 0$.

Dacă $m > 0$, atunci f este injectivă, căci pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$f(x) = f(y),$$

avem

$$f(x - y) = 0,$$

deci

$$m \|x - y\| \leq \|f(x - y)\| = 0,$$

de unde,

$$x = y.$$

Vom arăta că are loc și reciproca (rezultat care va fi utilizat în cadrul demonstrației Teoremei de injectivitate locală, vezi pagina 322, și al Teoremei de inversiune locală, vezi pagina 329).

Propoziție. *Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară și injectivă.*

Atunci există $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$ astfel încât

$$m \|x\| \leq \|f(x)\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Demonstrație. Avem

$$m = \inf_{x \in S} \|f(x)\| > 0,$$

deoarece, în caz contrar, conform Teoremei valorii minime și maxime pentru funcții continue (vezi pagina 213), există $x_* \in S$ astfel ca

$$m = \|f(x_*)\| = 0,$$

de unde

$$f(x_*) = f(0),$$

deci, cum f este injectivă,

$$x_* = 0,$$

ceea ce contrazice

$$x_* \in S.$$

Atunci $\frac{x}{\|x\|} \in S$, pentru orice $x \in X - \{0\}$, deci

$$m \leq \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|,$$

de unde

$$m \|x\| \leq \|f(x)\|,$$

inegalitate care este validă și pentru $x = 0$. \square

Observație. *Din Propoziția de mai sus rezultă că dacă aplicația liniară $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este bijectivă, atunci inversa sa este continuă. Vom arăta că acest rezultat este valabil și în cazul în care f nu este liniară. Teorema de mai jos se va dovedi utilă pentru stabilirea teoremei de inversiune locală (forma slabă)-vezi pagina 323.*

Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue. *Fie $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție continuă și injectivă, unde K este o mulțime compactă. Atunci funcția $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ este continuă.*

Demonstrație. Fie H o submulțime închisă din \mathbb{R}^p .

Atunci $H \cap K$ este închisă și mărginită, deci, conform Teoremei Heine-Borel (vezi pagina 115), ea este compactă.

Drept urmare, utilizând Teorema de permanență a compacității pentru funcții continue (vezi pagina 212), $H_1 = f(H \cap K)$ este compactă, deci închisă.

Avem

$$H_1 = f(H \cap K) = (f^{-1})^{-1}(H),$$

de unde

$$H_1 \cap f(K) = (f^{-1})^{-1}(H),$$

relație care, ținând cont de Teorema de continuitate globală (vezi pagina 208), arată că funcția $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ este continuă. \square

Exerciții

1. Vom spune că o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , are proprietatea lui Darboux dacă pentru orice interval $J \subseteq I$, $f(J)$ este interval.

Să se arate că o funcție continuă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , are proprietatea lui Darboux.

2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases},$$

are proprietatea lui Darboux, dar nu este continuă

3. Să se arate că o funcție injectivă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , care are proprietatea lui Darboux este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

4. Să se arate că nu există nicio funcție continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$(f \circ f)(x) = -x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. Să se arate că orice funcție continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care are proprietatea că

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, este surjectivă.

6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și strict crescătoare. Să se arate că $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și strict crescătoare.

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, care nu ia aceeași valoare de două ori. Este adevărat că f este strict monotonă?

6. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție, astfel încât fiecare valoare a sa este luată de exact două ori. Să se arate că f nu este continuă pe $[0, 1]$.

7. Să se arate că nu există funcții continue, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât

$$f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow f(x+1) \notin \mathbb{Q}.$$

8. Să se arate că nu există funcții continue și bijective din \mathbb{R}^2 în \mathbb{R} .

9. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ două funcții continue astfel încât

$$f \circ g = g \circ f.$$

Să se arate că există $x_0 \in [a, b]$, astfel ca

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023.

ȘIRURI DE FUNCȚII CONTINUE

Limita uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă

Teorema lui Dini

Limita uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă

Limita unui șir de funcții continue nu este neapărat o funcție continuă, așa cum se poate observa pe exemplul următor: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$.

Vom arăta că dacă șirul de funcții continue converge uniform, atunci limita sa este o funcție continuă. Mai precis avem următorul rezultat care se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei lui Tietze (vezi pagina 249), precum și al Teoremei de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala infinită (vezi pagina 435).

Teoremă. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, un șir de funcții continue care converge uniform către $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este continuă.

Demonstrație. Deoarece șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către f , pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ și orice $x \in D$ să avem

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pentru arăta că f este continuă într-un punct arbitrar $a \in D$, să observăm că

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)\| + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \|f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Deoarece f_{n_ε} este continuă în a , există $\delta_{\varepsilon, a} > 0$, astfel încât dacă $x \in D$ și $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon, a}$, atunci

$$\|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ca atare, dacă $x \in D$ și $\|x - a\| < \delta_{\varepsilon, a}$, avem

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

ceea ce, conform Teoremei de la pagina 201, stabilește continuitatea lui f în a .

Teorema lui Dini

Teorema următoare furnizează condiții suficiente pentru ca un șir de funcții continue care converge simplu, pe o mulțime compactă, către o funcție continuă, să convergă uniform.

Teorema lui Dini. *Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime compactă, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții continue astfel încât*

$$f_{n+1} \leq f_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$f_n \xrightarrow{s} f,$$

unde $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, este o funcție continuă.

Atunci

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Demonstrație. Considerând, $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$, în loc de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, putem presupune că $f \equiv 0$.

Pentru orice $\varepsilon > 0$ și $n \in \mathbb{N}$, considerăm

$$K_n = f_n^{-1}([\varepsilon, \infty)).$$

Deoarece f_n este continuă și K este compactă (deci, conform Teoremei Heine-Borel-vezi pagina 115, închisă), rezultă (având în vedere Teorema de continuitate globală-vezi pagina 208) că K_n este închisă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Evident

$$K_{n+1} \subseteq K_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Avem

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset,$$

căci, altminteri, dacă

$$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n,$$

atunci

$$f_n(x_0) \geq \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fapt care contrazice ipoteza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0.$$

Atunci, conform teoremei lui Cantor (vezi pagina 118), există $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât

$$K_{n_0} = \emptyset.$$

Drept urmare

$$f_{n_0}(x) \leq \varepsilon,$$

pentru orice $x \in K$, de unde

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n_0}(x) \leq \varepsilon,$$

pentru orice $x \in K$ și orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, adică

$$f_n \xrightarrow{u} f.$$

Notă istorică. *Ulisse Dini* (1845-1918) a studiat la Pisa și Paris cu Bertrand și Hermite. A predat la Universitatea din Pisa, al cărei rector a și fost între anii 1888 și 1890. A fost ales, în 1880, membru al parlamentului italian și senator, în 1880. În 1908 devine director al Scuola Normale di Pisa. A contribuit la dezvoltarea geometriei și analizei matematice (în special la teoria seriilor Fourier). Dini a publicat multe monografii (Fundamentele teoriei funcțiilor de o variabilă reală, în 1878; un tratat despre seriile Fourier, în 1880 etc).

Exerciții

1. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{(1+x)^n}{e^{2nx}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$, converge uniform pe orice interval de forma $[a, 1]$, unde $0 < a < 1$.

2. Fie șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \cos^{2n} x,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, unde $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

Să se arate că $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform pe $[a, \frac{\pi}{2}]$ și neuniform pe $[0, \frac{\pi}{2}]$.

3. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{1 + (\ln x)^n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [1, 2]$.

4. Fie șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dat de recurența:

$$f_1 \equiv 0$$

și

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}[x - f_n^2(x)],$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$.

Să se arate că $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

5. Să se arate că șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$, nu converge uniform.

6. Să se arate că șirul de funcții discontinue $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dat de

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1 \\ 0, & \text{aliminteri} \end{cases},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in \mathbb{R}$, converge uniform către o funcție continuă.

7. Să se determine toate funcțiile continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt limita uniformă a unui șir de polinoame.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *C. Popa, V. Hiriş, M. Megan*, **Introducere în analiza matematică prin exerciții și probleme**, Editura Facla, 1976 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 23777.

CONTINUITATE UNIFORMĂ

Noțiunea de continuitate uniformă

Teorema continuității uniforme

Noțiunea de funcție Lipschitz

Noțiunea de continuitate uniformă

Pentru o funcție, $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, continuitatea lui f pe D echivalează cu:

pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ și $a \in D$ există $\delta_{a,\varepsilon} \in \mathbb{R}$, $\delta_{a,\varepsilon} > 0$ astfel încât dacă $x \in D$ și $\|x - a\| < \delta_{a,\varepsilon}$, atunci

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Trebuie reținut aici că $\delta_{a,\varepsilon}$ depinde, în general, atât de ε , cât și de a .

Dependența lui $\delta_{a,\varepsilon}$ de a reflectă faptul că f își poate schimba rapid valorile în jurul lui a .

Uneori se poate alege $\delta_{a,\varepsilon}$ independent de a , adică dependent numai de ε .

Spre exemplu, pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = 2x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, putem alege

$$\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prin contrast, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, avem

$$f(x) - f(a) = \frac{a - x}{ax}.$$

Dacă $\delta < a$ și $|x - a| \leq \delta$, atunci

$$|f(x) - f(a)| \leq \frac{\delta}{a(a - \delta)},$$

iar această inegalitate nu poate fi îmbunătățită, deoarece egalitatea are loc pentru $x = a - \delta$.

Dacă dorim $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, atunci cea mai mare valoare pe care o putem alege pentru δ este $\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$.

Așadar, pentru $a > 0$, f este continuă în a , deoarece putem alege

$$\delta_{a,\varepsilon} = \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$$

și aceasta este cea mai mare valoare posibilă.

Deoarece

$$\inf_{a>0} \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} = 0,$$

nu putem alege $\delta_{a,\varepsilon}$ independent de a .

Dacă vom restrânge domeniul lui f la $[u, \infty)$, atunci

$$\inf_{a>0} \frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a} = \frac{\varepsilon u^2}{1 + \varepsilon u} > 0$$

poate fi ales ca fiind $\delta_{a,\varepsilon}$ și, după cum se observă, această cantitate nu depinde de a .

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $H \subseteq D$. Spunem că f este uniform continuă pe H dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x, a \in H$ și $\|x - a\| < \delta_\varepsilon$ să avem

$$\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Observație. Reamintim că diametrul unei submulțimi A a lui \mathbb{R}^p este $\sup_{x,y \in A} \|x - y\|$. Cu această terminologie, o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este uniform continuă pe H dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricum am alege H o submulțime a lui D cu diametrul inferior lui δ_ε , imaginea ei prin funcția f are diametrul inferior lui ε .

Observație. Este clar că o funcție uniform continuă pe H este continuă pe H . Reciproca nu este, în general, valabilă.

Teorema continuității uniforme

Rezultatul următor arată că pe o mulțime compactă, continuitatea este automat uniformă. Acest rezultat este foarte util fiind folosit în cadrul demonstrațiilor următoarelor rezultate: Teoremele de la pagina 241, Teorema de aproximare a lui Bernstein (vezi pagina 244), Teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue (vezi pagina 364), Teorema de reprezentare a lui Riesz (vezi pagina 373), Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 388), Teorema de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina 396), Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina 397), Teorema de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 400), Prima teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă (vezi pagina 408), Teorema privind calculul variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă (vezi pagina 470).

Teorema continuității uniforme. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție continuă și K o submulțime compactă a lui D .

Atunci f este uniform continuă pe K .

Demonstrație. Utilizând Teorema de continuitate globală (vezi pagina 208), pentru $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ putem considera acoperirea cu mulțimi deschise a lui K dată de familia $\{f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2}) \mid u \in \mathbb{R}^q)\}$.

Conform teoremei de acoperire a lui Lebesgue (vezi pagina 120), există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in K$, cu $\|x - y\| < \delta$, există $u \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că

$$x, y \in f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2})),$$

i.e.

$$f(x), f(y) \in f^{-1}(B(u, \frac{\varepsilon}{2})),$$

ceea ce înseamnă că

$$\|f(x) - u\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și

$$\|f(y) - u\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

ceea ce implică

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - u\| + \|f(y) - u\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in K$ astfel încât

$$\|x - y\| < \delta,$$

rezultă

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

fact care ne asigură că f este uniform continuă pe K .

Noțiunea de funcție Lipschitz

Funcțiile Lipschitz constituie o clasă importantă de funcții uniform continue.

Definiție. O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește Lipschitz dacă există $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ astfel încât

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in D$.

Dacă se poate alege $M < 1$, f se numește contracție.

Observație. Este clar, alegând $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$, că orice funcție Lipschitz este uniform continuă. Reciproca nu este valabilă (vezi $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sqrt{x}$, pentru orice $x \in [0, 1]$). Orice funcție liniară este Lipschitz. Mai mult, așa cum vom vedea, orice funcție derivabilă, cu derivata mărginită, este Lipschitz.

Notă istorică. Rudolf Otto Sigismund Lipschitz s-a născut la 14 mai 1832, la Königsberg, Germania. A început de timpuriu studiile universitare la Universitatea din Königsberg, sub îndrumarea lui Franz Neumann. Ulterior merge la Berlin, unde este îndrumat de către Dirichlet și unde obține titlul de doctor în matematici în august 1853. În următorii patru ani predă la gimnaziile din Königsberg și din Elbing, pentru ca în anul 1857 să devină Privatdozent la Universitatea din Berlin. Este numit, în anul 1862, profesor extraordinar la Breslau. Împreună cu H. Schroeter și M. Frankenheim, pune

bazele unui seminar de matematică și fizică matematică. În anul 1864 este numit profesor la Universitatea din Bonn, unde își va petrece restul carierei, deși a primit o ofertă pentru ocuparea unui post la Göttingen. Cel mai remarcabil fapt în legătură cu activitatea matematică a lui Lipschitz este diversitatea domeniilor de care s-a ocupat: teoria numerelor, teoria funcțiilor Bessel, teoria seriilor Fourier, ecuații diferențiale, mecanică analitică, teoria potențialului.

A murit la Bonn, Germania, la 7 octombrie 1903.

Exerciții

1. O funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă și numai dacă există $c \in A$ astfel încât f este uniform continuă pe $A_{c,s} = A \cap (-\infty, c]$ și pe $A_{c,d} = A \cap [c, \infty)$.

2. O funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă și numai dacă pentru orice două șiruri $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

3. Fie $a \geq 0$. Să se arate că funcția $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \ln x$, pentru orice $x \in (a, \infty)$, este uniform continuă dacă și numai dacă $a > 0$.

4. Este uniform continuă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$?

5. Să se arate că $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, sunt uniform continue, dar fg nu este uniform continuă.

6. Să se arate că $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este uniform continuă dacă și numai dacă poate fi extinsă la o funcție continuă pe $[a, b]$. Este $f : (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$, uniform continuă?

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *James Munkres, Topology. A first course*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
3. *Gheorghe Siretchi, Calcul Diferențial și Integral, vol. 1, Noțiuni fundamentale*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32924

TEOREME DE PUNCT FIX

Noțiunea de punct fix

Teoreme de punct fix

Teorema punctelor fixe pentru contracții

Principiul contracțiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli

Teorema de punct fix a lui Brouwer

Noțiunea de punct fix

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție. Un punct $u \in D$ se numește punct fix al lui f dacă

$$f(u) = u.$$

Multe rezultate au la baza demonstrației existența punctelor fixe pentru o funcție. Ca atare, este de dorit să dispunem de rezultate care să asigure existența punctelor fixe.

Teoreme de punct fix

Teorema punctelor fixe pentru contracții. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o contracție.

Atunci f are un unic punct fix.

Demonstrație. Conform definiției contracției, există $C \in (0, 1)$ astfel încât

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$.

Definim inductiv șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel:

$x_1 \in \mathbb{R}^p$ este arbitrar și

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către un punct fix (unic) al lui f și vom estima viteza de convergență.

Folosind metoda inducției matematice se arată că

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq C^{n-1} \|x_2 - x_1\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, folosind relația de mai sus, avem

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \dots + \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq (C^{m-2} + C^{m-3} + \dots + C^{n-1}) \|x_2 - x_1\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} C^{n-1} = 0$, relația de mai sus arată că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy, deci convergent (am utilizat aici Criteriul lui Cauchy-vezi pagina 140).

Fie

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Atunci

$$f(u) = u.$$

Mai mult, prin trecere la limită, după m , în inegalitatea de mai sus, obținem următoarea estimare a vitezei de convergență:

$$\|u - x_n\| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C} \|x_2 - x_1\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Acum vom arăta că punctul u este unic.

Să presupunem că v este un alt punct fix al lui f .

Atunci

$$\|u - v\| = \|f(u) - f(v)\| \leq C \|u - v\|,$$

de unde

$$0 \leq (C - 1) \|u - v\|,$$

deci

$$\|u - v\| = 0,$$

adică

$$u = v. \quad \square$$

Dacă funcția f nu este definită pe \mathbb{R}^p , trebuie să avem grijă ca elementele șirului definit iterativ să facă parte din domeniul de definiție al funcției.

Teoremă. Fie $f : D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\} \rightarrow \mathbb{R}^q$ pentru care există C cu proprietatea că

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in D$ și

$$\|f(0)\| \leq B(1 - C).$$

Atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel:

$$x_1 = 0$$

și

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge către un unic punct fix al lui f , care se găsește în D .

Demonstrație. Vom arăta că elementele șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fac parte din D , ceea ce va încheia demonstrația (care decurge ca mai sus).

Din ipoteză, avem

$$\|x_2\| = \|f(0)\| \leq B(1 - C) \leq B.$$

Cum

$$\|x_3 - x_2\| \leq C \|x_2\|,$$

deducem că

$$\|x_3\| \leq \|x_2\| + C \|x_2\| = (1 + C) \|x_2\| \leq B(1 - C^2),$$

iar inductiv obținem

$$\|x_{n+1}\| \leq B(1 - C^n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. \square

Observație. Rezultatele de mai sus au anumite avantaje: furnizează o metodă constructivă pentru punctul fix și o estimare a erorii de aproximare precum și unicitatea punctului fix. Totuși, cerința ca f să fie contractie este foarte restrictivă.

Observație. *Teorema punctelor fixe pentru contracții, în ipostaze mai generale (vezi mai jos), cunoscută și sub numele de principiul contracțiilor al lui Banach-Caccioppoli sau Picard-Banach, este un instrument esențial în stabilirea existenței și unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale.*

Notă istorică. *Charles Emile Picard s-a născut în 1856 la Paris. Studiază la Liceul Napoléon, numit ulterior Henri IV, fiind un elev eminent, și este admis la École Polytechnique și École Normale Supérieure fiind clasat al doilea, respectiv primul la examenul de admitere. Absolvă École Normale Supérieure unde și funcționează ca asistent timp de un an, pentru ca apoi, în 1878 să fie numit lector la Universitatea din Paris, iar mai apoi, în 1879, profesor la Toulouse. În 1881 se întoarce la Paris unde este numit conferențiar pentru mecanică și astronomie la École Normale. În 1881 Picard devine membru al secției de matematică a Académie des Sciences. În același an se căsătorește cu fata lui Hermite cu care are trei copii: o fată și doi băieți, care au murit în primul război mondial. În 1885 Picard este numit la catedra de calcul diferențial de la Sorbona, deși nu împlinise vârsta de 30 de ani (așa cum prevedeau regulamentele academice ca o condiție obligatorie pentru ocuparea unei catedre). În 1879 schimbă această catedră cu cea de analiză matematică și algebră superioară. A avut contribuții importante la dezvoltarea analizei matematice, teoriei funcțiilor, ecuațiilor diferențiale și a geometriei analitice. A scris o carte de referință în trei volume, publicată între 1891 și 1896, intitulată *Traité d'analyse*. A aplicat analiza matematică la studiul elasticității, căldurii și electricității. Picard a primit premiul Poncelet, în 1886, Grand Prix des Sciences Mathématiques, în 1888, Grande Croix de la Légion d'Honneur, în 1932, precum și medalia de aur Mittag-Leffler, în 1937. A devenit membru al Academiei Franceze în 1924 și este ales președinte al Congresului Internațional al Matematicienilor de la Strasbourg din 1920. Iată cum îl caracteriza Hadamard: "O trăsătură definitorie a personalității științifice a lui Picard a fost perfecțiunea actului de predare, unul dintre cele mai minunate, dacă nu cel mai minunat pe care l-am întâlnit". Picard a murit în 1941 la Paris.*

Notă istorică. *Stefan Banach s-a născut într-un mic sat numit Ostrowsko la 50 de kilometri în sudul orașului Cracovia, din Polonia, la 30 martie 1892. A urmat cursurile școlii primare din Krakowia iar în 1902 începe studiile la gimnaziul Henryk Sienkiewicz din Crakovia. Printr-o întâmplare fericită unul dintre colegii lui Banach a fost Witold Wilkosz care se pregătea*

să devină profesor de matematică. Gimnaziul respectiv nu era unul dintre cele mai bune și drept urmare Wilkosz s-a mutat la un altul. Banach însă rămâne la Henryk Sienkiewicz, dar va avea în continuare strânse legături cu Wilkosz. De-a lungul primilor ani, la acest gimnaziu, Banach primește note excelente la matematică. Totuși trece examenul de final fără strălucire. La terminarea gimnaziului, Banach și Wilkosz doreau să studieze matematica, însă amândoi au simțit că nimic nou nu mai este cu putință în matematică, așa că au ales să studieze alte domenii: Banach ingineria, iar Wilkosz limbile orientale. Faptul că doi viitori extraordinari matematicieni au luat această decizie arată că nu a existat nimeni care să-i îndrume în mod adecvat. Banach părăsește Krakovia și se mută la Liov, unde devine student la Universitatea Tehnică. Este aproape sigur că, fără nici un ajutor material din partea familiei, Banach s-a întreținut din lecții particulare. Acest fapt l-a solicitat foarte mult, căci i-a fost necesar mai mult timp decât în mod normal pentru a absolvi aceste studii. Banach nu era apt din punct de vedere fizic pentru satisfacerea stagiului militar, datorită unor grave probleme de vedere ce i-au afectat ochiul stâng. În timpul primului război mondial a contribuit la construcția de drumuri și a predat la diverse școli din Cracovia. De asemenea a audiat diverse cursuri de matematică la Universitatea din acest oraș. O întâmplare neobișnuită avea să aibă un efect major asupra carierei sale. Steinhaus, care își satisfacea serviciul militar, era pe cale să ocupe un post la Universitatea Jan Kazimierz din Liov, dar locuia încă la Cracovia așteptând numirea. Obişnuia să se plimbe pe străzile Cracoviei pe înserate. Iată ce relatează el însuși în memoriile sale: ” În timpul unei astfel de plimbări am auzit cuvintele măsura Lebesgue. M-am apropiat de banca din parc și m-am prezentat celor doi tineri ucenici în matematică. Cei doi erau Stefan Banach și Otto Nikodym. De atunci ne-am întâlnit regulat și am decis să înființăm o societate de matematică”. Steinhaus i-a comunicat lui Banach o problemă la care se gândise fără succes. După câteva zile, Banach a avut ideea principală pentru problema respectivă, iar cei doi au scris un articol pe această temă. Războiul a întârziat publicarea acestui prim articol al lui Banach care a apărut în Buletinul Academiei din Cracovia în 1918. Din acest moment Banach a publicat articole importante de matematică într-un ritm susținut. Lui Banach i s-a oferit o poziție de către Lomnicki la Universitatea Tehnică din Liov. Aici și-a susținut teza de doctorat sub îndrumarea lui Lomnicki în 1920 (teză care este considerată ca marcând nașterea analizei funcționale), iar, în 1922, Universitatea Jan Kazimierz din Liov i-a acordat ”habilitation” pentru o teză în teoria măsurii. În 1924 Banach a fost promovat ca pro-

fesor plin și a petrecut anul academic 1925 la Paris. Anii dintre cele două războaie mondiale au fost extrem de plini pentru Banach. În 1929 împreună cu Steinhaus a înființat *Studia Mathematica* (a cărei politică editorială era concentrarea pe cercetările de analiză funcțională și alte domenii conexe). În 1931, împreună cu Steinhaus, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz și Sierpinski, a înființat o serie de *Monografii Matematice*. Primul volum din această serie, intitulat "Teoria operatorilor liniari", a fost scris de Banach și a apărut în 1932. În 1927 Kuratowski a ocupat o poziție la Universitatea Tehnică din Liov, unde a lucrat până în 1934. Împreună cu Banach a scris, în această perioadă, câteva articole. Modul în care Banach lucra era total neconvențional. Îi plăcea să facă matematică împreună cu colegii săi într-o cafenea din Liov. Iată ce spunea Ulam: "Era dificil să stai în cafenea sau să bei mai mult decât Banach. Discutam probleme propuse chiar acolo, adeseori cu nici un rezultat chiar după câteva ore de gândire. A doua zi Banach apărea cu câteva mici foi de hârtie conținând schema demonstrației pe care o găsisese". În 1939 Banach a fost ales președintele Societății Poloneze de Matematică. La începutul celui de al doilea război mondial Liovul a fost ocupat de către trupele sovietice. Banach era în relații bune cu matematicienii sovietici, vizitând Moscova de câteva ori. A fost bine tratat de către noua administrație sovietică și chiar numit decanul Facultății de Științe al Universității, acum renumită Ivan Franko. După ocuparea Liovului de către trupele naziste, în iunie 1941, Banach a trăit în condiții dificile. A fost arestat, pentru câteva săptămâni, sub învinuirea de trafic de valuta germană. A supraviețuit unei perioade în care membrii Academiei Poloneze erau omorâți (conducătorul său de doctorat, Lomnicki a murit în tragica noapte de 3 iulie 1941). Se îmbolnăvește și moare la Liov la data de 31 august 1945.

Banach a fondat analiza funcțională modernă și a avut contribuții majore la dezvoltarea teoriei spațiilor vectoriale topologice. În teza sa de doctorat din 1920 a definit axiomatic ceea ce astăzi numim spații Banach. Această idee a fost introdusă și de către alți matematicieni aproape în același timp (de exemplu de către Wiener), dar aceștia nu au dezvoltat teoria. Numele de spații Banach se datorează lui Fréchet. Importanța operei lui Banach constă în faptul că a dezvoltat o teorie sistematică a analizei funcționale, având drept bază lucrările lui Volterra, Fredholm și Hilbert în domeniul ecuațiilor integrale.

Banach este autorul unor rezultate fundamentale privind spațiile vectoriale normate (teorema Hahn-Banach, principiul mărginirii uniforme (Banach-Steinhaus), teorema aplicației deschise etc). Paradoxul Banach-Tarski (o

sferă poate fi împărțită în două submulțimi care pot fi combinate astfel încât să rezulte două sfere, fiecare identică cu cea inițială), a cărui demonstrație folosește axioma alegerii, a determinat mulți matematicieni să se întrebe dacă utilizarea amintitei axiome este legitimă, fiind o contribuție majoră la dezvoltarea teoriei axiomatice a mulțimilor.

Notă istorică. *Renato Caccioppoli* s-a născut în 1904 la Napoli, Italia. De la Universitatea din Napoli obține licența în matematică, în anul 1925, fiind influențat de Mario Picone, al cărui asistent devine în același an. Cu o mică întrerupere (când va predă la Universitatea din Padova) și-a desfășurat întreaga activitate la Universitatea din Napoli. Având convingeri antifasiste (era nepotul lui Bakunin), își exprimă cu ocazia vizitei lui Hitler și Mussolini la Napoli, în mai 1938, opoziția față de aceștia, ceea ce conduce la arestarea sa. Pentru a evita un proces, beneficiind de ajutorul mătușii sale Maria Bakunin, care era profesoară de chimie la Universitatea din Napoli, este declarat nebun și internat într-un azil. După cel de al doilea război mondial își reia activitatea științifică și este ales membru al Accademia dei Lincei. Se alătură Partidului Comunist Italian, deși nu împărtășește întru totul politica acestuia. Ultimii săi ani de viață sunt triști: este dezamăgit din punct de vedere politic, simte că inspirația matematică îl părăsește și divorțează de soție. Devine alcoolic și izolat. Se împușcă pe 8 mai 1959. Caccioppoli, un excelent pianist, a avut contribuții însemnate la dezvoltarea analizei matematice, a calculului variațional, a ecuațiilor diferențiale. În articolul *Misura e integrazione degli insiemi dimensionalmente orientati*, apărut în *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, introduce noțiunea de mulțimi de parametru finit, mulțimi cunoscute astăzi sub numele de mulțimi Caccioppoli.

Rezultatul de prezentat mai jos, anume Principiul contracțiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli, este un instrument fundamental în stabilirea existenței și unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare.

Pentru început vom prezenta câteva noțiuni care ne vor permite formularea principiului mai sus amintit și care au o mare însemnătate în sine.

Definiție. *Se numește metrică pe mulțimea X o funcție $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ care satisface următoarele condiții:*

1)

$$d(x, y) = 0$$

dacă și numai dacă

$$x = y.$$

2)

$$d(x, y) = d(y, x),$$

pentru orice $x, y \in X$.

3)

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$$

pentru orice $x, y, z \in X$.

Definiție. Se numește spațiu metric un dublet (X, d) , unde d este o metrică pe mulțimea X . Când nu va fi pericol de confuzie, vom omite d din această definiție.

Definiție. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din spațiul metric (X, d) , se numește convergent dacă există $x \in X$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ implică

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definiție. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de elemente din spațiul metric (X, d) , se numește Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ implică

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definiție. Un spațiu metric se numește complet dacă orice șir Cauchy de elemente din spațiul respectiv este convergent.

Definiție. O funcție $f : X \rightarrow X$, unde (X, d) este un spațiu, se numește contracție dacă există $C \in (0, 1)$, astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$.

Principiul contractiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o contracție. Atunci f are un unic punct fix.*

Observație. *Demonstrația acestui principiu, deci și modul de obținere al punctului fix, este similară cu cea a teoremei punctelor fixe pentru contracții.*

Teorema de mai jos este un rezultat fundamental în teoria punctelor fixe, cerințele asupra proprietăților funcției f fiind mult restrânse.

Teorema de punct fix a lui Brouwer. *Fie $B > 0$ și $D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq B\}$. Atunci orice funcție continuă $f : D \rightarrow D$ are cel puțin un punct fix.*

Notă istorică. *L.E.J. Brouwer (1881-1966) a studiat și a fost profesor la Amsterdam (din 1912, cu susținerea lui Hilbert). A avut contribuții la topologie, logică și fundamentele matematicii. Teza de doctorat a lui Brouwer, publicată în 1907, a constituit o contribuție majoră la disputa dintre Russell și Poincaré privitoare la fundamentele matematicii. Din 1912 a devenit membru al Academiei Regale de Științe din Olanda, iar apoi al Royal Society of London, al Academiei de Științe din Berlin și al Academiei de Științe din Göttingen. A fost membru al comitetului de redacție al revistei Mathematische Annalen.*

Pentru o demonstrație a Teoremei lui Brouwer, bazată pe noțiuni elementare, se poate consulta **N. Dunford** și **J.T. Schwartz**, *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York, 1960.

Exerciții

1. Dați exemplu de o funcție continuă $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ care nu are puncte fixe.
2. Să se aplice rezultatele anterioare pentru calculul aproximativ al soluțiilor ecuației

$$10x - 1 = \sin x.$$

3. Să se calculeze $\sqrt{10}$ cu o aproximație de 10^{-4} .

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

TEOREME DE APROXIMARE

Noțiunea de aproximare uniformă a unei funcții cu o altă funcție
Noțiunea de funcție în scară. Aproximarea uniformă a funcțiilor
continue cu funcții în scară

Noțiunea de funcție liniară pe porțiuni. Aproximarea uniformă a
funcțiilor continue cu funcții liniare pe porțiuni

Polinoamele Bernstein

Teorema lui Bernstein

Teorema Stone-Weierstrass

Ideea fundamentală pe care se sprijină construcția lui Weierstrass pentru \mathbb{R} este aproximarea cu numere mai simple, anume cu cele raționale. Acest lucru este ilustrat de faptul următor: pentru $\sqrt{2}$ (care este una dintre soluțiile ecuației $x^2 - 2 = 0$) nu se poate specifica în mod concret o valoare a sa; se poate aproxima această valoare cu o acuratețe oricât de bună cu ajutorul numerelor raționale.

Situația în cazul funcțiilor este complet similară. În general, funcțiile care sunt definite ca soluții ale unor ecuații diferențiale nu se pot scrie, folosind un număr finit de operații algebrice elementare, ca expresii de funcții elementare. Se pot obține însă aproximații ale lor oricât de bune. Așadar, din punctul de vedere al aplicațiilor, este necesar, de multe ori, să se aproximeze funcțiile continue cu funcții mai simple. Mai mult, pentru multe dintre funcțiile elementare, ca de exemplu \sin , \cos , \exp , \ln , etc, în calculele practice, facem apel, de fapt, la aproximații ale lor. Spre pildă, atunci când se apasă tasta e^x a unui calculator, răspunsul generat de acesta nu este exact e^x , ci o aproximare a sa.

Deși există mai multe moduri rezonabile de a defini noțiunea de aproximare, cea mai naturală și mai importantă este cea în care se cere ca, în fiecare punct al domeniului de definiție, valoarea funcției de aproximare să nu difere de valoarea funcției date cu mai mult de o valoare prestabilită.

Este vorba aici de aproximarea uniformă care este strâns legată de convergența uniformă.

Principalul rezultat din această secțiune afirmă că orice funcție reală continuă poate fi aproximată, pe un interval compact al axei reale, oricât de bine dorim, cu polinoame. Polinoamele sunt funcții ușor de controlat (ele sunt

complet determinate de mulțimea finită a coeficienților lor); ele joacă pentru aproximarea funcțiilor continue, rolul pe care îl joacă numerele raționale pentru aproximarea numerelor reale.

Noțiunea de aproximare uniformă a unei funcții cu o altă funcție

Definiție. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Spunem că g aproximează uniform pe f , pe D , cu eroarea $\varepsilon > 0$, dacă

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in D$, adică dacă

$$\|f - g\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in D} \|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

Spunem că funcția f poate fi aproximată, pe D , cu funcții din clasa \mathcal{A} , dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $g_\varepsilon \in \mathcal{A}$, astfel încât

$$\|f - g_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

sau, echivalent, există un șir de funcții din \mathcal{A} , care converge uniform către f , pe D .

Noțiunea de funcție în scară. Aproximarea uniformă a funcțiilor continue cu funcții în scară

Definiție. O funcție $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește funcție în scară dacă ia numai un număr finit de valori distincte, iar orice valoare nenulă este luată pe un interval din \mathbb{R}^p .

De exemplu, pentru $p = q = 1$, funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ 1, & -2 < x \leq 0 \\ 3, & 0 < x < 1 \\ -5, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

este o funcție în scară.

Folosind Teorema continuității uniforme (vezi pagina 226) se demonstrează următoarea care se va dovedi utilă în cadrul demonstrației lemei lui Riemann (vezi pagina 500).

Teoremă. *O funcție continuă $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde D este un interval compact din \mathbb{R}^p , poate fi aproximată uniform cu funcții în scară.*

Noțiunea de funcție liniară pe porțiuni. Aproximarea uniformă a funcțiilor continue cu funcții liniare pe porțiuni

Este de așteptat ca funcțiile continue să fie approximate uniform cu funcții mai simple care sunt continue (funcțiile în scară nu sunt continue).

Definiție. *O funcție $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește liniară pe porțiuni dacă există $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n \in \mathbb{R}$ astfel ca*

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = b$$

și

$$g(x) = A_k x + B_k,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ și pentru orice $x \in [c_k, c_{k+1}]$

Observație. *Bineînțeles că pentru ca g să fie continuă, numerele reale A_k și B_k trebuie să îndeplinească anumite relații.*

Folosind Teorema continuității uniforme (vezi pagina 226) se demonstrează următoarea

Teoremă. *O funcție continuă, $f : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde J este un interval compact, poate fi aproximată uniform cu funcții continue liniare pe porțiuni.*

Polinoamele Bernstein

Definiție. *Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Polinomul Bernstein de ordin n , asociat funcției f , este definit prin*

$$B_n(x) = B_n(x; f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Notă istorică. *Serge N. Bernstein* (1880-1968), matematician rus, a avut contribuții însemnate la dezvoltarea analizei matematice, teoriei aproximării și teoriei probabilităților. S-a născut la Odesa. A absolvit liceul în 1898. Apoi merge la Paris unde studiază la Sorbona și la École d'Electrotechnique Supérieure. Între 1902 și 1903 se află la Göttingen. Obține titlul de doctor în matematici de la Sorbona, în anul 1904, cu o teză în care rezolvă cea de a 19-a problemă din lista lansată de către Hilbert la congresul matematicienilor din 1900. La întoarcerea în Rusia este nevoit să se înroleze într-un nou program doctoral deoarece autoritățile ruse nu recunoșteau, pentru posturile din învățământul superior gradele obținute în străinătate. Obține titlul de doctor de la Universitatea din Harkov, cu o teză în care rezolvă cea de a 20-a problemă din lista menționată anterior. Va predă la această universitate până în 1933, an în care începe să predea la Universitatea din Leningrad (timp în care activează și în cadrul Academiei de Științe a URSS). Din 1943 va predă la Universitatea din Moscova. A avut rezultate remarcabile în teoria aproximării funcțiilor și în teoria probabilităților (pe care a încercat, în 1917, să o axiomatizeze).

Observație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in [0, 1]$, avem:

$$1 = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (1)$$

Înlocuind n cu $n-1$ și k cu j , avem:

$$1 = \sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j x^j (1-x)^{n-1-j},$$

de unde, prin înmulțirea cu x și folosirea relației

$$C_{n-1}^j = \frac{j+1}{n} C_n^{j+1},$$

avem

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{j+1}{n} C_n^{j+1} x^{j+1} (1-x)^{n-(j+1)},$$

de unde, notând $j+1$ cu k , obținem

$$x = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Aşadar

$$x = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (2)$$

Un calcul similar, bazat pe formula (1) (unde se înlocuieşte n cu $n-2$) şi pe

$$C_{n-2}^{k-2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} C_n^k,$$

ne furnizează

$$(n^2 - n)x^2 = \sum_{k=0}^n (k^2 - k) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Prin urmare, avem

$$(1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x = \sum_{k=0}^n (\frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (3)$$

Înmulţind (1) cu x^2 , (2) cu $-2x$, şi adunând cu (3), *obţinem*

$$\frac{1}{n}x(1-x) = \sum_{k=0}^n (x - \frac{k}{n})^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad (4)$$

relaţie ce va fi folosită ulterior.

Să remarcăm că relaţia (1) spune că polinomul Bernstein de ordin n , pentru funcţia f_0 , dată de $f_0(x) = 1$, coincide cu f_0 , iar relaţia (2) spune acelaşi lucru pentru funcţia f_1 , dată de $f_1(x) = x$. Formula (3) arată că polinomul Bernstein, de ordin n , pentru funcţia f_2 , dată de $f_2(x) = x^2$, este

$$B_n(x; f_2) = (1 - \frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x,$$

care converge uniform către f_2 .

Vom arăta în continuare că acest fapt este valabil pentru orice funcţie continuă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema lui Bernstein

Teorema de aproximare a lui Bernstein. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci, șirul polinoamelor Bernstein, asociate lui f , converge uniform către f .

Demonstrație. Deoarece, din (1), avem

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

obținem

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \{f(x) - f(\frac{k}{n})\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

de unde

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f(\frac{k}{n}) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \quad (*)$$

În conformitate cu Corolarul de la pagina 214, funcția f este mărginită, deci există $M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$|f(x)| \leq M,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Deoarece funcția f este continuă pe mulțimea compactă $[0, 1]$, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 226), deducem că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in [0, 1]$, cu $|x - y| < \delta_\varepsilon$, să avem

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$n \geq \max\left\{\frac{1}{\delta_\varepsilon^4}, \frac{M^2}{4\varepsilon^2}\right\}.$$

Pentru partea din suma ce apare în membrul drept al inegalității (*) la care participă acei k cu proprietatea că

$$\left|x - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}} \leq \delta_\varepsilon,$$

avem majorarea

$$\sum_k \varepsilon C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon.$$

Pentru partea din suma ce apare în membrul drept al inegalității (*) la care participă acei k cu proprietatea că

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}},$$

adică cu proprietatea că

$$\left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \geq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

avem, folosind (4), majorarea

$$\begin{aligned} \sum_k 2M C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= 2M \sum_k \frac{\left(x - \frac{k}{n} \right)^2}{\left(x - \frac{k}{n} \right)^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq 2M \sqrt{n} \sum_k \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq 2M \sqrt{n} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \\ &= 2M \sqrt{n} \frac{1}{n} x(1-x) \leq \frac{M}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

deoarece, pentru orice $x \in [0, 1]$, avem

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}.$$

Ca atare

$$|f(x) - B_n(x)| \leq 2\varepsilon,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$, adică

$$B_n(x) \xrightarrow{u} f,$$

pe $[0, 1]$. \square

Corolar. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci există un șir de polinoame care converge uniform către f .

Demonstrație. Se aplică teorema de mai sus funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$g(t) = f((b-a)t + a),$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. \square

Teorema Stone-Weierstrass

Teorema de aproximare a lui Bernstein stă la baza demonstrației următorului rezultat (care se poate demonstra și fără a se face apel la teorema lui Bernstein):

Teorema Stone-Weierstrass. Fie $K \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime compactă și \mathcal{A} o familie de funcții continue cu domeniul K și codomeniul \mathbb{R} , având următoarele proprietăți:

- a) funcția e , dată de $e(x) = 1$, pentru orice $x \in K$, aparține lui \mathcal{A} .
- b) dacă f și g aparțin lui \mathcal{A} , atunci $\alpha f + \beta g$ aparține lui \mathcal{A} , pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- c) dacă f și g aparțin lui \mathcal{A} , atunci fg aparține lui \mathcal{A} .
- d) pentru orice $x \neq y \in K$, există $f \in \mathcal{A}$, astfel ca $f(x) \neq f(y)$.

Atunci, pentru orice funcție continuă $f : K \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ există un șir de funcții din \mathcal{A} , care converge uniform către f .

Notă istorică. Marshall N. Stone (1903-1989) a studiat la Harvard (între 1919 și 1922). Obține titlul de doctor în matematică în 1926 cu o teză elaborată sub îndrumarea lui Birkhoff. A fost profesor la Columbia University, Harvard University, Yale University, iar din 1946 a fost decanul Departamentului de Matematică de la Chicago University. A avut contribuții însemnate la dezvoltarea analizei matematice, în special la teoria spațiilor Hilbert și a algebrelor Booleene.

Observație. Teorema de aproximare a lui Bernstein are marele avantaj (spre deosebire de Teorema Stone-Weierstrass) de a furniza o metodă constructivă pentru obținerea unui șir de polinoame care converge uniform către funcția continuă considerată.

Exercițiu. Fie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. K poate fi parametrizat cu ajutorul unghiului $\theta \in [0, 2\pi]$, unde $\tan \theta = \frac{y}{x}$. O funcție $p : K \rightarrow \mathbb{R}$, de forma

$$p(\theta) = A_0 + (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) + \dots + (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta),$$

pentru orice $\theta \in [0, 2\pi]$, unde $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n$ sunt numere reale, se numește polinom trigonometric.

Să se arate că orice funcție continuă $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ poate fi aproximată uniform cu polinoame trigonometrice.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

EXTINDEREA FUNCȚIILOR CONTINUE

Existența unei funcții continue care ia valori prestabilite pe două mulțimi închise disjuncte Teorema lui Tietze

Uneori este de dorit să se extindă domeniul unei funcții continue fără a schimba valorile funcției pe domeniul ei inițial. Acest lucru poate fi realizat într-un mod trivial, definind funcția prin valoarea 0 în afara domeniului ei inițial de definiție. Această metodă nu generează, de regulă, o extindere continuă. De fapt, așa cum se vede considerând funcția $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, uneori nu există o extindere continuă. Totuși, așa cum vom vedea mai jos, o extindere continuă există întotdeauna dacă domeniul inițial de definiție este o mulțime închisă. Mai mult, marginile extinderii se află între marginile funcției inițiale.

Existența unei funcții continue care ia valori prestabilite pe două mulțimi închise disjuncte

Observație. Fie A și B două submulțimi închise ale lui \mathbb{R}^p , astfel ca

$$A \cap B = \emptyset.$$

Definim

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|y - x\|$$

și $\varphi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Atunci φ este continuă și are următoarele proprietăți:

$$\varphi|_A = 0,$$

$$\varphi|_B = 1$$

și

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Teorema lui Tietze

Teorema lui Tietze, într-o formă mai generală decât cea prezentată mai jos, este un instrument des utilizat în studiul proprietăților de separare ale spațiilor topologice, anume în caracterizarea spațiilor topologice normale.

Teorema lui Tietze. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și mărginită, unde D este o mulțime închisă. Atunci există o funcție continuă $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca*

$$g|_D = f$$

și

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| = \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Notă istorică. *Heinrich Tietze* (1880-1964) a fost profesor la München și a avut contribuții însemnate în topologie, geometrie și algebră. Teorema de mai sus a fost demonstrată în 1914. Tatăl lui Tietze a fost directorul Institutului Geologic al Universității din Viena. Tietze a studiat, începând cu 1898, la Technische Hochschule din Vienna (unde devine prieten, printre alții, cu Hahn). Obține titlul de doctor, în 1904, de la Universitatea din Viena, sub îndrumarea lui Gustav von Escherich. A fost profesor la Brno, Erlangen și München. A fost membru al Academiei de Științe din Bavaria, al Royal Society of London și al Academiei de Științe din Austria.

Demonstrație. Conform Teoremei valorii maxime și minime pentru funcții continue (vezi pagina 213), putem considera

$$M = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

și, în conformitate cu Teorema de continuitate globală (vezi pagina 208), mulțimile închise

$$A_1 = \{x \in D \mid f(x) \leq -\frac{M}{3}\}$$

și

$$B_1 = \{x \in D \mid f(x) \geq \frac{M}{3}\}.$$

Atunci, folosind observația anterioară, deducem existența unei funcții continue $\varphi_1 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi_1|_{A_1} = -\frac{M}{3},$$

$$\varphi_{1|B_1} = \frac{M}{3}$$

și

$$-\frac{M}{3} \leq \varphi_1(x) \leq \frac{M}{3},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Funcția $f_2 = f - \varphi_1$ este continuă și

$$\sup_{x \in D} |f_2(x)| \leq \frac{2}{3}M.$$

Fie acum

$$A_2 = \{x \in D \mid f(x) \leq -\frac{2}{3}\frac{M}{3}\}$$

și

$$B_2 = \{x \in D \mid f(x) \geq \frac{2}{3}\frac{M}{3}\}.$$

Folosind din nou observația anterioară, deducem existența unei funcții continue $\varphi_2 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$\varphi_{2|A_2} = -\frac{2}{3}\frac{M}{3},$$

$$\varphi_{2|B_2} = \frac{2}{3}\frac{M}{3}$$

și

$$-\frac{2}{3}\frac{M}{3} \leq \varphi_2(x) \leq \frac{2}{3}\frac{M}{3},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Funcția $f_3 = f_2 - \varphi_2 = f - \varphi_1 - \varphi_2$ este continuă și

$$\sup_{x \in D} |f_3(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 M.$$

Procedând ca mai sus, obținem un șir de funcții continue, $\varphi_n : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, astfel ca, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, să avem

$$|f(x) - (\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x))| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M, \quad (*)$$

pentru orice $x \in D$, și

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M, \quad (**)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Definim, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcția continuă $g_n : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, prin

$$g_n = \varphi_1 + \dots + \varphi_n.$$

Atunci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, și $x \in \mathbb{R}^p$, avem

$$\begin{aligned} |g_m(x) - g_n(x)| &= |\varphi_{n+1}(x) + \dots + \varphi_m(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n M \left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n-1}\right) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M, \end{aligned}$$

relație care arată, folosind Criteriul lui Cauchy pentru convergență uniformă (vezi pagina 147-148), că șirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către o funcție ce va fi notată cu g .

Cum funcțiile g_n sunt continue, conform Teoremei de la pagina 219, g este funcție continuă.

De asemenea, din (*), rezultă că

$$|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M,$$

pentru orice $x \in D$, deci

$$g|_D = f.$$

Mai mult, din (**), deducem că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x \in \mathbb{R}^p$, avem

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} M \left(1 + \frac{2}{3} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \leq M,$$

de unde

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| \leq \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Inegalitatea

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| \geq \sup_{x \in D} |f(x)|$$

fiind evidentă, avem

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} |g(x)| = \sup_{x \in D} |f(x)|. \quad \square$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *James Munkres, TOPOLOGY A first course*, Prentice Hall, 1975.

ECHICONTINUITATE

Noțiunea de familie mărginită de funcții continue Echicontinuitatea unei familii de funcții Teorema Arzelà-Ascoli

Am folosit de multe ori până acum teorema lui Bolzano-Weierstrass (orice mulțime infinită și mărginită din \mathbb{R}^p are un punct de acumulare) și rezultatul corespunzător pentru șiruri, anume lema lui Cesàro (orice șir mărginit din \mathbb{R}^p are un subșir convergent). Vom prezenta acum un rezultat analog pentru mulțimi de funcții continue. Pentru simplitate, vom prezenta aici numai forma referitoare la șiruri, deși se pot defini și pentru funcții noțiunile de vecinătate, mulțime deschisă și închisă, punct de acumulare etc.

Noțiunea de familie mărginită de funcții continue

Fie K o mulțime compactă fixată din \mathbb{R}^p .

Pentru o funcție continuă $f : K \rightarrow \mathbb{R}^q$ definim

$$\|f\| = \|f\|_K \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in K} \|f(x)\|.$$

Definiție. Familia \mathcal{A} de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , se numește mărginită (sau uniform mărginită) dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f\| \leq M,$$

pentru orice $f \in \mathcal{A}$.

Observație. Este clar că orice familie finită \mathcal{A} este mărginită. În general, o familie infinită nu este mărginită. Totuși, un șir uniform convergent de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , este mărginit.

Mai precis avem:

Lemă. Dacă $\mathcal{A} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}^q$, este un șir uniform convergent de funcții continue, atunci \mathcal{A} este mărginită.

Echicontinuitatea unei familii de funcții

Observație. Dacă $f : K \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o funcție continuă, ea este uniform continuă și ca atare pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}, \delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in K$ cu proprietatea că

$$\|x - y\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Desigur valoarea lui δ_ε depinde și de f , deci, pentru a fi mai exacti, ar trebui să scriem $\delta_{\varepsilon, f}$ (când lucrăm cu mai mult de o funcție este nimerit să punem în evidență acest fapt).

Dacă $\mathcal{A} = \{f_1, \dots, f_n\}$ este o familie finită de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , atunci considerând

$$\delta_{\varepsilon, \mathcal{A}} = \min\{\delta_{\varepsilon, f_1}, \dots, \delta_{\varepsilon, f_n}\} > 0,$$

obținem un δ "valabil" pentru toate funcțiile din \mathcal{A} .

Definiție. Familia \mathcal{A} de funcții, din K în \mathbb{R}^q , se numește echicontinuă dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}, \delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in K$ cu proprietatea că

$$\|x - y\| < \delta_\varepsilon$$

și orice funcție

$$f \in \mathcal{A},$$

avem

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Observație. Spunem că familia \mathcal{A} de funcții, din K în \mathbb{R}^q , are proprietatea (*) dacă pentru orice $x \in K$ și orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există $\delta_{x, \varepsilon} \in \mathbb{R}, \delta_{x, \varepsilon} > 0$ astfel ca pentru orice $y \in K$ cu proprietatea că

$$\|y - x\| < \delta_{x, \varepsilon}$$

și orice funcție

$$f \in \mathcal{A},$$

avem

$$\|f(y) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Dacă familia \mathcal{A} are proprietatea $()$, atunci ea este echicontinuă.*

Mulți autori adoptă ca definiție a echicontinuității proprietatea $()$.*

Observație. Considerentele de mai sus arată că orice familie finită de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , este echicontinuă.

Vom arăta că orice șir uniform convergent de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , este, de asemenea, echicontinuu.

Mai precis avem:

Lemă. Dacă $\mathcal{A} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}^q$, este un șir uniform convergent de funcții continue, atunci \mathcal{A} este echicontinuă.

Teorema Arzelà-Ascoli.

Cele discutate mai sus arată că pentru ca un șir de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , să fie uniform convergent, este necesar ca el să fie mărginit și echicontinuu.

Vom arăta că aceste două proprietăți sunt necesare și suficiente pentru ca o familie \mathcal{A} de funcții continue, din K în \mathbb{R}^q , să aibă proprietatea că orice șir de funcții din \mathcal{A} posedă un subșir uniform convergent.

Teorema Arzelà-Ascoli este un instrument fundamental în stabilirea existenței și unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare, precum și în studiul compacității operatorilor integrali (care se vor studia în cadrul cursului de analiză funcțională).

Teorema Arzelà-Ascoli. Fie K o mulțime compactă din \mathbb{R}^p și \mathcal{A} o familie de funcții continue din K în \mathbb{R}^q .

Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) \mathcal{A} este mărginită și echicontinuă.*
- b) orice șir de elemente din \mathcal{A} posedă un subșir uniform convergent.*

Notă istorică. Cesare Arzelà (1847-1912) a absolvit Universitatea din Pisa, în 1869. A fost profesor la Universitatea din Palermo și la cea din Bologna.

Notă istorică. *Guido Ascoli* (1887-1957) a fost profesor la Milano și Torino.

Demonstrație.

b) \Rightarrow a)

Vom arăta că $\lceil a \rceil \Rightarrow \lceil b \rceil$.

Dacă \mathcal{A} este nemărginită, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $f_n \in \mathcal{A}$ astfel ca

$$\|f_n\| \geq n.$$

Conform primei leme de mai sus, nici un subșir al lui $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu poate fi uniform convergent, deci avem $\lceil b \rceil$.

Dacă \mathcal{A} nu este echicontinuă, atunci există $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $x_n, y_n \in K$ cu proprietatea că

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$$

și $f_n \in \mathcal{A}$ cu proprietatea că

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| \geq \varepsilon_0.$$

Dacă șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ar avea un subșir uniform convergent, atunci, conform celei de a doua leme de mai sus, acest subșir ar fi echicontinuu, ceea ce ar contrazice afirmația de mai sus.

Deci avem $\lceil b \rceil$.

a) \Rightarrow b)

Vom arăta că orice șir de funcții, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, din \mathcal{A} , posedă un subșir uniform convergent.

Conform exercițiului 9 de la pagina 102, există C o submulțime numărabilă a lui K cu proprietatea că pentru orice $y \in K$ și orice $\varepsilon > 0$ există un element $x \in C$ astfel ca

$$\|x - y\| < \varepsilon. \quad (*)$$

Dacă $C = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, atunci $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit din \mathbb{R}^p , deci conform lemei lui Cesàro (vezi pagina 139), există un subșir

$$(f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots)$$

al lui $(f_n(x_1))_{n \in \mathbb{N}}$ care este convergent.

Să remarcăm acum că șirul $(f_{1k}(x_2))_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit din \mathbb{R}^p , deci există un subșir

$$(f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2), \dots)$$

al său care este convergent.

Să remarcăm, în continuare, că șirul $(f_{2k}(x_3))_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir mărginit din \mathbb{R}^p , deci există un subșir

$$(f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), \dots, f_{3n}(x_3), \dots)$$

al său care este convergent.

Procedeul se repetă și definim $g_n = f_{nn}$ ca fiind a n -a funcție din cel de al n -lea subșir.

Din construcție este clar că șirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în orice punct din C .

Vom arăta acum că șirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în orice punct din K și că avem convergență uniformă.

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in K$ cu proprietatea că

$$\|x - y\| < \delta_\varepsilon$$

și orice funcție

$$f \in \mathcal{A}$$

avem

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Folosind faptul că mulțimea K este compactă, precum și faptul că familia $(B(x, \delta_\varepsilon))_{x \in C}$ constituie o acoperire cu mulțimi deschise a lui K (vezi (*)), putem considera

$$C_1 = \{y_1, \dots, y_k\}$$

o submulțime finită a lui C astfel încât pentru orice $x \in K$, există $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ astfel ca

$$\|x - y_i\| < \delta_\varepsilon.$$

Deoarece șirurile $(g_n(y_1))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n(y_k))_{n \in \mathbb{N}}$ sunt convergente, există $M \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n, m \geq M$ să avem

$$\|g_m(y_i) - g_n(y_i)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Fie $x \in K$ arbitrar.

Atunci există $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ astfel ca

$$\|x - y_i\| < \delta_\varepsilon,$$

deci

$$\|g_n(x) - g_n(y_i)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, în particular pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq M$.

Ca atare, avem

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(y_i)\| + \|g_n(y_i) - g_m(y_i)\| + \|g_m(x) - g_m(y_i)\| < 3\varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq M$, fapt care arată, folosind criteriul lui Cauchy pentru convergența uniformă (vezi pagina 147-148), că șirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (care este un subșir al lui este $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) este uniform convergent în orice punct din K . \square

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *James Munkres, TOPOLOGY A first course*, Prentice Hall, 1975.

LIMITE DE FUNCȚII

Limita unei funcții de mai multe variabile într-un punct
Limite la infinit și limite infinite
Limita superioară și inferioară. Oscilația
Limite laterale. Discontinuități de prima și de a doua speță
Limite fundamentale

Analiza Matematică poate fi caracterizată destul de exact ca fiind partea matematicii unde se face în mod sistematic uz de diferite concepte de limită. Printre motivele care au determinat introducerea acestui concept în cadrul prezentului curs abia acum, un rol central îl ocupă acela că în analiza matematică elementară se operează cu câteva tipuri de limite. Am discutat deja despre convergența șirurilor și despre continuitate. În capitolele următoare va apărea noțiunea de limită în contextul prezentării noțiunilor de derivabilitate și de integrabilitate. Toate acestea sunt cazuri particulare ale conceptului general de limită, concept care are un grad ridicat de abstractizare. Din acest motiv am ales ca inițial să introducem și să discutăm separat aceste noțiuni. Odată ce aceste noțiuni au fost înțelese și asimilate, nu mai este atât de greu să se asimileze noțiunea abstractă de limită.

Limita unei funcții de mai multe variabile într-un punct

Cadrul în care vom lucra în această secțiune este următorul:
se consideră o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, c **un punct de acumulare al lui** D și $b \in \mathbb{R}^q$.

Definiție. *Vom spune că f tinde către b , atunci când x tinde către c , dacă pentru orice vecinătate V , a lui b , există U , vecinătate a lui c , astfel încât*

$$f(x) \in V,$$

pentru orice $x \in (U \cap D) - \{c\}$.

Vom nota această situație prin:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} b.$$

Lemă. În cadrul de mai sus, dacă $b' \in \mathbb{R}^q$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} b$ și $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} b'$, atunci $b = b'$.

Observație. Valoarea b , unic determinată de proprietatea $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} b$, poartă numele de limita lui f , atunci când x tinde către c .

Vom marca această situație astfel:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b.$$

Următorul rezultat prezintă formulări echivalente pentru existența limitei unei funcții într-un punct.

Teoremă. În cadrul de mai sus, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) există $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

b) pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D$ astfel ca

$$0 < \|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

c) pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de puncte din $D - \{c\}$ cu proprietatea că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c,$$

avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

Următorul rezultat precizează legătura dintre continuitate și limită.

Teoremă. În cadrul de mai sus, facem presupunerea suplimentară că c este punct al lui D .

Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este continuă în c .

b) există $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Teorema următoare prezintă comportamentul limitei la compunere.

Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^s$ astfel ca $Im f \subseteq D'$, c un punct de acumulare al lui D , $b \in \mathbb{R}^q$ și $a \in \mathbb{R}^s$ astfel încât:

i)

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = b$$

ii) există U , o vecinătate a lui c , astfel încât

$$f(x) \neq b,$$

pentru orice $x \in (U \cap D) - \{c\}$ (deci b este punct de acumulare pentru $Im f$).

iii)

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = a.$$

Atunci există $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x)$ și

$$\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = a.$$

Observație. Condiția ii) din această teoremă este esențială, așa cum arată exemplul următor:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

$$g = f$$

și

$$c = 0.$$

Limite la infinit și limite infinite

Ca și în cazul șirurilor, vom prezenta cazul limitelor infinite, respectiv al limitelor la infinit.

Definiție. Fie $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de acumulare (în cazul $q = 1$, eventual infinit) al mulțimii $E \subseteq \mathbb{R}^q$.

Spunem că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcției f în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice

$$x \in (E \cap U) - \{x_0\},$$

avem

$$f(x) \in V.$$

Această situație se marchează prin notația

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Observație

1. Pentru $q = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

2. Pentru $q = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

avem

$$f(x) < \varepsilon.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$x > \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$x > \delta,$$

avem

$$f(x) < \varepsilon.$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$x < \delta,$$

avem

$$f(x) > \varepsilon.$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, există $\delta \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu proprietatea

$$x < \delta,$$

avem

$$f(x) < \varepsilon.$$

Observație. Comportamentul limitelor de funcții la operațiile algebrice este similar celui din cazul șirurilor.

Limita superioară și inferioară. Oscilația

Vom presupune acum că $q = 1$.

Așadar vom considera o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și c un punct din D .

Noțiunile prezentate mai jos, care sunt analogul noțiunilor de limită superioară și inferioară de la șiruri, sunt utile pentru o caracterizare alternativă a continuității.

Definiție. Definim limita superioară a lui f , atunci când x tinde către c , prin

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \inf_{V \text{ vecinătate a lui } c} \left(\sup_{x \in D \cap V} f(x) \right).$$

Analog se definește noțiunea de limita inferioară a lui f atunci când x tinde către c , care se notează prin $\liminf_{x \rightarrow c} f(x)$.

Definiție. Definim oscilația lui f pe o submulțime A a lui D ca fiind

$$\omega(f, A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{x, y \in A} (f(x) - f(y)),$$

iar oscilația lui f în punctul c ca fiind

$$\omega(f, c) = \inf_{V \text{ vecinătate a lui } c} \omega(f, V \cap D).$$

Observație. În cadrul de mai sus, avem

$$\omega(f, c) = \limsup_{x \rightarrow c} f(x) - \liminf_{x \rightarrow c} f(x).$$

Propoziție. În cadrul de mai sus, următoarele afirmații sunt echivalente:

i) f este continuă în c ;

ii)

$$\omega(f, c) = 0;$$

iii)

$$\limsup_{x \rightarrow c} f(x) = \liminf_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Exerciții

1. În cadrul de mai sus, să se arate că, pentru orice $\alpha > 0$, mulțimea $\{x \in D \mid \omega(f, c) < \alpha\}$ este deschisă.

2. Fie $f_n, f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$. Să se arate că dacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, f_n este continuă, atunci mulțimea punctelor în care f este continuă este densă în \mathbb{R}^p .

Limite laterale. Discontinuități de prima și de a doua speță

În cazul funcțiilor de o variabilă reală se poate discuta despre noțiunile de limite laterale, ceea ce permite o anumită clasificare a punctelor de discontinuitate.

Definiție. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare al lui $A \cap (-\infty, a)$.

Vom spune că $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita la stânga a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a lui l , există o vecinătate U a lui a , astfel încât pentru orice

$$x \in U \cap (-\infty, a)$$

avem

$$f(x) \in V.$$

Această situație se marchează prin

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$$

sau prin

$$f(a-) = l.$$

Analog se definește limita la dreapta a funcției f în punctul a .

Limita la stânga a funcției f în punctul a și limita la dreapta a funcției f în punctul a se numesc limitele laterale ale funcției f în punctul a .

Rezultatul de mai jos caracterizează situația existenței limitei unei funcții într-un punct în termeni de limitele laterale.

Propoziție. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și a un punct de acumulare al lui A . $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcției f în punctul a dacă și numai dacă există ambele laterale (care au sens) ale lui f în a și sunt egale cu l .

Noțiunea de limită laterală permite următoarea clasificare a punctelor de discontinuitate.

Definiție. Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Un punct $a \in A$ se numește punct de discontinuitate de prima speță dacă există și sunt finite limitele laterale (care au sens) ale lui f în a , dar cel puțin una este diferită de $f(a)$. Celelalte

puncte de discontinuitate din A se numesc puncte de discontinuitate de speța a doua.

Propoziția următoare precizează natura și cardinalul discontinuităților unei funcții monotone.

Propoziție. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Atunci discontinuitățile lui f sunt numai de prima speță și mulțimea acestora este cel mult numărabilă.

Observație. Alexandru Froda a demonstrat că mulțimea punctelor de discontinuitate de prima speță ale oricărei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este cel mult numărabilă.

Propoziția următoare precizează natura discontinuităților unei funcții cu proprietatea lui Darboux.

Propoziție. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea lui Darboux, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Atunci f nu are discontinuități de prima speță.

După cum am văzut, există funcții cu proprietatea lui Darboux care nu sunt continue. Propoziția următoare furnizează condiții suficiente pentru ca o funcție cu proprietatea lui Darboux să fie continuă.

Propoziție. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f este continuă.

Propoziția următoare furnizează condiții necesare și suficiente pentru ca o funcție să realizeze un izomorfism între domeniul său de definiție și imaginea sa.

Propoziție. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al dreptei reale. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) $f : I \rightarrow f(I)$ este homeomorfism i.e. f este bijectivă, iar f și f^{-1} sunt continue;
- ii) f este strict monotonă și $f(I)$ este interval
- iii) f este continuă și injectivă.

Aplicații. Funcția $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ este strict monotonă și surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcția $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ este continuă.

Funcția $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ este strict monotonă și surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcția $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ este continuă.

Funcția $tg : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, este strict monotonă și surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcția $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este continuă.

Funcția $ctg : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, este strict monotonă și surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcția $\text{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ este continuă.

Funcția $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ este strict monotonă și surjectivă. Prin urmare, inversa sa, adică funcția $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă.

Limite fundamentale

Prezentăm acum câteva limite fundamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctgx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

unde $a \in (0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r,$$

unde $r \in \mathbb{R}$.

Exerciții

1. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x},$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{t g^2 x}$$

și

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) \ln(1 + \sin^2 x)}{(\sqrt[3]{1+x} - 1) t g^2 2x}.$$

2. Să se arate că dacă funcția continuă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ are limite finite în a și b , atunci ea este mărginită. Este reciproca adevărată?

3. Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare. Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$.

4. Fie $a > 0$ și $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă. Să se arate că f este continuă în 0 dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$.

5. Să se arate că dacă funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită pe fiecare interval $(0, b)$ și dacă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = \infty,$$

atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

6. Să se arate că pentru orice funcție neconstantă și periodică $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nu există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

7. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

i) există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|f(x)| \leq Mx,$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$;

ii)

$$f(x+y) \geq f(x) + f(y),$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

Să se arate că:

a) există și sunt finite limitele $a = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{x}$ și $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$.

b)

$$ax \leq f(x) \leq bx,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801
5. *Gheorghe Siretchi*, **Calcul Diferențial și Integral, vol. 1, Noțiuni fundamentale**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32924

DIFERENȚIABILITATE

DERIVATA PE \mathbb{R}

Introdusă încă în secolul al XVII-lea, concomitent de către Isaac Newton și G.W. Leibniz, noțiunea de derivată este una dintre cele mai importante din Analiza matematică. Derivata este o descriere matematică a vitezei de variație a unei funcții. ... trebuie să deosebim între noțiunea de derivată și aceea de derivabilitate. Derivata este fie un număr real, fie unul dintre simbolurile minus sau plus infinit, în timp ce derivabilitatea nu este un număr, ci o proprietate.

Solomon Marcus, Șocul matematicii, Editura Albatros, București, 1987, paginile 252-253

În timp ce noțiunea de integrală își are rădăcinile în antichitate, cealaltă noțiune fundamentală a analizei, derivata, a apărut abia în secolul al XVII-lea, datorită lui Fermat și altor matematicieni. Legătura organică dintre aceste două noțiuni, aparent cu totul diferite, descoperită de Newton și Leibniz, a inaugurat o dezvoltare fără precedent a științei matematice. Fermat era interesat în determinarea maximelor și minimelor unei funcții. În graficul unei funcții, un maxim corespunde unui vârf mai înalt decât toate celelalte puncte învecinate, în timp ce un minim corespunde unui punct mai coborât decât toate punctele învecinate. ... Pentru a caracteriza punctele de maxim și minim, este naturală folosirea noțiunii de tangentă a unei curbe. Presupunem că graficul nu are colțuri ascuțite sau alte singularități și că, în fiecare punct, el are o direcție determinată, dată de dreapta tangentă în acel punct. În punctele de maxim sau de minim, tangenta la graficul funcției trebuie să fie paralelă cu axa Ox, deoarece, în caz contrar, curba ar urca sau ar coborâ în aceste puncte. Această observație sugerează ideea considerării tangentei la curbă în fiecare punct al graficului funcției.

Ce este matematica?, de R. Courant și H. Robbins, Editura Științifică, București, 1969, pagina 432

The standard definition of the derivative given in first-year calculus is $f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ where this is understood to mean that $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ is a pretty good approximation to $f'(a)$ that gets better as x gets closer to a . As we have seen, we can be much more precise. It is more accurate and useful to introduce the actual difference between the derivative and the average rate of change $f'(a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + E(x, a)$, where $E(x, a)$ is the discrepancy or error introduced when we use the average rate of change in place of the derivative, or vice-versa. Relying on an intuitive notion of limits, we would like to say that $f'(a)$ is the value of the

derivative provided this error, $E(x, a)$, gets closer to 0 as x gets closer to a . The meaning is clear in most cases, but the phrase "gets closer" is still too ambiguous. What is important is that we can make the absolute value of our error as small as it needs to be by controlling the distance of x from a . We now present notation that was introduced by Cauchy in 1823: $\varepsilon > 0$ to represent the size of the allowable error and $\delta > 0$ to represent the distance between x and a . We fix a real number a and say that f is differentiable at $x = a$ if and only if there is a number, denoted by $f'(a)$, such that the error $E(x, a) = f'(a) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ satisfies the following condition: for any specified bound on this error, $\varepsilon > 0$, we can find a distance, δ , such that if x is within δ of a ($0 < |x - a| < \delta$), then the error sits within the allowed bound ($|E(x, a)| < \varepsilon$). We call $f'(a)$ the derivative of f at a The definition just given is neither obvious nor easy to absorb. The reader encountering it for the first time should keep in mind that it is the fruit of two centuries of searching. It looks deceptively like the casual definition for it compares $f'(a)$ to the average rate of change $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. There may be a tendency to ignore the ε and δ and hope they are not important. They are. This has proven to be the definition of the derivative that explains those grey areas where differentiation does seem to be working the way we expect it to.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 13-15

Definiția derivatei pe \mathbb{R} . Legătura dintre derivabilitate și continuitate

Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat

Teorema lui Rolle, Teorema lui Lagrange, Teorema lui Cauchy și Teorema lui Darboux

Derivate de ordin superior. Teorema lui Taylor

Metoda lui Newton

Permutarea limitei cu derivata

Definiția derivatei pe \mathbb{R} . Legătura dintre derivabilitate și continuitate

Așa cum se întâmplă cu orice concept fundamental, noțiunea de derivată sintetizează modelarea unor fenomene care provin din domenii diferite, ca de exemplu problema tangentei, problema vitezei sau problema densității liniare a unei bare materiale (a se vedea, în acest sens, **Analiză Matematică**, Vol.

I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București, paginile 240-241).

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și c un punct de acumulare al lui D , care aparține lui D .

Dacă există (în \mathbb{R}) limita

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se numește derivata lui f în c și se notează $f'(c)$.

Dacă $f'(c)$ este finită, spunem că f este derivabilă în c .

Lemă. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și c un punct de acumulare al lui D , care aparține lui D . Dacă f este derivabilă în c , atunci f este continuă în c .

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de puncte din D , care converge către c , cu $x_n \neq c$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci avem

$$f(x_n) = \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c}(x_n - c) + f(c).$$

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} = f'(c)$$

și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - c) = 0,$$

deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c),$$

deci f este continuă în c . \square

Observație. Așadar continuitatea este o condiție necesară pentru derivabilitate. Se constată cu ușurință că ea nu este și suficientă: de exemplu se poate considera funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Folosind combinații algebrice simple, se poate construi cu ușurință o funcție care nu este derivabilă într-un număr finit de puncte sau chiar într-o mulțime numărabilă de puncte. În 1872, Weierstrass a șocat lumea matematică, construind o funcție continuă în orice punct care nu este derivabilă în nici un

punct (vezi pagina 473, precum și John C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1971, capitolul 11).

Pentru observațiile de mai jos se poate consulta **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București, paginile 250-271.

Regulile de calcul privind derivata sumei, produsului și câtului a două funcții, precum și cea privind calculul derivatei unei funcții vor fi prezentate într-o formă mai generală în secțiunea următoare (vezi pagina 301).

Observație. Dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval, sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, atunci:

i) funcția $f + g$ este derivabilă în x_0 și

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

ii) funcția fg este derivabilă în x_0 și

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

iii) dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Observație. Dacă $f : I \rightarrow J$ și $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, unde I și J sunt intervale, sunt derivabile în punctul $x_0 \in I$, respectiv $f(x_0) \in J$, atunci funcția $g \circ f$ este derivabilă în x_0 și

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Observație. Dacă $f : I \rightarrow J = f(I)$, unde I și J sunt intervale, este o funcție strict monotonă derivabilă în $x_0 \in I$, cu proprietatea că $f'(x_0) \neq 0$, atunci funcția $f^{-1} : J \rightarrow I$ este derivabilă în $f(x_0)$ și

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Observație. Iată derivatele câtorva funcții uzuale:

$$\begin{aligned}(x^n)' &= nx^{n-1}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și pentru orice } n \in \mathbb{N}; \\ (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty) \text{ și pentru orice } \alpha \in \mathbb{R}; \\ (\sin x)' &= \cos x \text{ și } (\cos x)' = -\sin x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}; \\ (a^x)' &= a^x \ln a, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \text{ și pentru orice } a \in (0, \infty);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\ln x)' &= \frac{1}{x}, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty); \\ (tgx)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}; \\ (ctgx)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pentru orice } x \in (-1, 1); \\ (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ pentru orice } x \in (-1, 1); \\ (\arctgx)' &= \frac{1}{1+x^2}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}; \\ (\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat

Noțiunea de derivată este instrumentul principal care se folosește într-o problemă practică de o importanță crucială, anume stabilirea punctelor de extrem ale funcțiilor reale de o variabilă reală.

Prezentăm în continuare primul pas care contribuie la soluționarea acestei probleme, anume teorema lui Fermat.

Lemă. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$, și c un punct de acumulare al lui D , care aparține lui D .

a) Dacă

$$f'(c) > 0,$$

atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem

$$f(c) < f(x).$$

b) Dacă

$$f'(c) < 0,$$

atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c)$, avem

$$f(c) < f(x).$$

Demonstrație.

a) Fie $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât

$$0 < \varepsilon_0 < f'(c).$$

Atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D$, astfel ca $0 < |x - c| < \delta$, avem

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon_0,$$

de unde, pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem

$$-\varepsilon_0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c).$$

Cum pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem $x - c > 0$, rezultă

$$(f'(c) - \varepsilon_0)(x - c) < f(x) - f(c),$$

de unde concluzia.

Demonstrația pentru b) este analoagă. \square

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și $c \in D$.

Punctul c se numește punct de maxim local (relativ) al funcției f , dacă există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem

$$f(c) \geq f(x).$$

Punctul c se numește punct de minim local (relativ) al funcției f , dacă există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$, avem

$$f(c) \leq f(x).$$

Punctele de maxim local și cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei lui Rolle (vezi pagina 277), Teoremei lui Darboux (vezi pagina 282) și a Teoremei lui Fermat-cazul multidimensional (vezi pagina 340).

Teorema lui Fermat. *Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$ este un punct de maxim (sau minim) local al funcției f .*

Dacă f este derivabilă în c , atunci

$$f'(c) = 0.$$

Notă istorică. *Pierre Fermat* (1601-1665) a urmat cursurile Universității din Toulouse, după care, în 1620, pleacă la Bordeaux unde începe primele cercetări matematice. Studiază și la Universitatea din Orléans, de unde primește o diplomă în Drept. A fost unul dintre matematicienii de frunte ai vremilor sale (a avut chiar unele controverse cu Descartes). Rezultatul care l-a făcut faimos este celebra teoremă care afirmă că ecuația $x^n + y^n = z^n$ (cu necunoscutele x, y, z), nu are soluții întregi nenule, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. Acest rezultat a fost demonstrat în 1993-1994 de către Andrew Wiles. Încercările de a demonstra acest rezultat, care s-au întins pe aproape 300 de ani, au stat la originea algebrei moderne.

Observație. *Condiția $c \in \overset{\circ}{D}$ este esențială, așa cum arată următorul exemplu: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$.*

Observație. *Funcția f poate avea puncte de extrem în care să nu fie derivabilă, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstrația Teoremei lui Fermat. Dacă

$$f'(c) > 0,$$

atunci, conform lemei de mai sus, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c, c + \delta)$, avem

$$f(c) < f(x),$$

ceea ce contrazice faptul că $c \in \overset{\circ}{D}$ un punct de maxim local al funcției f .

Dacă

$$f'(c) < 0,$$

atunci, conform lemei de mai sus, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c)$, avem

$$f(c) < f(x),$$

ceea ce contrazice faptul că $c \in \overset{\circ}{D}$ un punct de maxim local al funcției f . \square

Teorema lui Rolle, Teorema lui Lagrange, Teorema lui Cauchy și Teorema lui Darboux

Prezentăm în continuare câteva consecințe ale teoremei lui Fermat.

Teorema lui Rolle. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel ca $f(a) = f(b)$. Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$f'(c) = 0.$$

Notă istorică. *Michel Rolle* (1652-1719), membru al Academiei Franceze, a contribuit la dezvoltarea Geometriei Analitice și a Analizei Matematice.

Demonstrație. Putem presupune că

$$f(a) = f(b) = 0.$$

De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă și că ia și valori pozitive.

Atunci, folosind Corolarul de la pagina 215, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(c) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Conform teoremei anterioare

$$f'(c) = 0. \quad \square$$

Observație. *Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , o funcție derivabilă. Atunci:*

a) între două soluții consecutive ale ecuației $f(x) = 0$, se află cel puțin o soluție a ecuației $f'(x) = 0$;

b) între două soluții consecutive, x_1, x_2 , ale ecuației $f'(x) = 0$, se află cel mult o soluție a ecuației $f(x) = 0$.

Teorema următoare, cunoscută și sub numele de teorema creșterilor finite, este un instrument extrem de utilizat, care intervine în demonstrația multor rezultate centrale din cadrul Analizei Matematice, precum: Teorema de permutare a derivatei cu limita (vezi pagina 290), Criteriul de diferențiabilitate (vezi pagina 301), Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional (vezi pagina 307), Lema premergătoare Teoremei lui Schwarz (vezi pagina 309), Lema de aproximare (vezi pagina 321), Formula Leibniz-Newton (vezi pagina 376), Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 387), Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann (vezi pagina 397), Teorema privind calculul variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă (vezi pagina 470).

Teorema lui Lagrange. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) . Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Demonstrație. Să considerăm funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Se constată cu ușurință că φ este diferența dintre f și funcția care are ca grafic segmentul de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

Prin aplicarea teoremei anterioare funcției φ se obține concluzia. \square

Notă istorică. *Joseph-Louis Lagrange* s-a născut la data de 25 ianuarie 1736, în Torino. El este considerat a fi un matematician francez, deși a fost botezat cu numele de Giuseppe Lodovico Langragia, părinții săi fiind originari din regiunea Torino. Bunicul său a fost căpitan de cavalerie în armata franceză, dar a părăsit Franța pentru a-l sluji pe Ducele de Savoia. Lagrange a studiat la Colegiul din Torino, obiectul său preferat fiind latina. A fost atras de matematică atunci când a citit un articol al lui Halley, privitor la

modul în care este folosită algebra în optică. La finele anului 1754, Lagrange deja obținuse rezultate semnificative în teoria calculului variațional (adică studiul problemelor de tipul următor: fiind date două puncte $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, să se determine o curbă $y = f(x)$, care unește cele două puncte, pentru care valoarea integralei $\int_{x_1}^{x_2} g(x, y) dx$ este minimă; de exemplu, să se determine o curbă care unește cele două puncte, pentru care un obiect supus numai forței de gravitație, se deplasează pe această curbă, între cele două puncte, în cel mai scurt timp). În 1755 a fost numit profesor de matematică la Școala Regală de Artilerie din Torino. A trimis rezultatele sale lui Euler, care a fost impresionat de noile metode elaborate de Lagrange. La propunerea lui Euler, Lagrange a fost ales, în 1756, membru al Academiei din Berlin. Este, de asemenea, membru fondator al Academiei Regale de Științe din Torino. În 1766 îi succede lui Euler ca director al secției de matematică din cadrul Academiei din Berlin. A câștigat, în câteva rânduri, premiul Academiei de Științe din Paris (în anii 1772, împreună cu Euler, pentru studiul problemei celor trei corpuri, în 1774, pentru studiul mișcării lunii și, în 1780, pentru studiul perturbațiilor orbitelor cometelor, provocate de către planete). În perioada petrecută la Berlin a abordat teme diverse din astronomie, precum stabilitatea sistemului solar, mecanică, dinamică, mecanica fluidelor, probabilități, teoria numerelor (a demonstrat că orice număr natural se prezintă ca suma a patru pătrate perfecte). În 1787 părăsește Berlinul pentru a deveni membru al Academiei de Științe din Paris. În 1788 apare o carte esențială, care-l are drept autor pe Lagrange, anume "Mécanique analytique", carte în care se privește mecanica ca un subdomeniu al Analizei Matematice. A fost primul profesor de Analiză Matematică de la École Polytechnique (fondată în 1794). A predat, de asemenea, la École Normale (fondată în 1795). A publicat două volume cu lecțiile de Analiză Matematică susținute în decursul carierei sale didactice. A murit la 3 aprilie 1813.

Consecințe. 1. *În cadrul teoremei de mai sus, avem:*

- a) *dacă $f'(x) = 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este constantă.*
- b) *dacă $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este crescătoare.*
- c) *dacă $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, atunci f este descrescătoare.*

2. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obține diverse aproximații.*

De exemplu, pentru a aproxima pe $\sqrt{105}$, conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (100, 105)$ astfel ca

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}},$$

de unde

$$\frac{5}{2.11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2.10},$$

adică

$$10.22 < \sqrt{105} < 10.25.$$

3. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obține diverse inegalități.*

De exemplu, este cunoscută inegalitatea lui Bernoulli, anume că pentru $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, astfel ca $1 + x > 0$, avem $(1 + x)^n > 1 + nx$. Vom arăta că această inegalitate este valabilă pentru orice exponent real $r \geq 1$. În acest scop putem considera funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = (1 + x)^r$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul de capete x și 0 , se obține inegalitatea de mai sus.

4. *Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval, o funcție continuă, derivabilă pe $I - \{x_0\}$, unde $x_0 \in I$, pentru care există $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Atunci $f'(x_0)$ există și*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x).$$

O generalizare a teoremei lui Lagrange este dată de următorul rezultat.

Teorema lui Cauchy. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) . Atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Demonstrație. Pentru $g(a) = g(b)$ concluzia este imediată.

În caz contrar, să considerăm funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(g(x) - g(a)),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Teorema lui Rolle aplicată acestei funcții încheie demonstrația. \square

De o mare utilitate pentru calculul limitelor de funcții sunt următoarele două rezultate care au la baza demonstrației teorema lui Cauchy (vezi **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București, paginile 303-317).

Regula lui l'Hospital. Fie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$, I un interval din \mathbb{R} , astfel ca $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$ și $x_0 \in [a, b]$. Se consideră două funcții $f, g : I - \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăți:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$).

b) f și g sunt derivabile și $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$.

c) există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Atunci:

i) $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I - \{x_0\}$ (respectiv există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \cap V - \{x_0\}$).

ii) există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Notă istorică. Guillaume François l'Hospital (1661-1704) a fost studentul lui Johann Bernoulli (1667-1748). A fost cel care a tipărit, în 1696, primul curs de Analiză Matematică (care cuprindea lecțiile primite de la Bernoulli).

Complementar regulii lui l'Hospital este următorul rezultat (vezi exercițiul 10).

Teoremă. Fie I un interval din \mathbb{R} , $x_0 \in I$, și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții astfel ca:

a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

b) f și g sunt derivabile în x_0 și $g'(x_0) \neq 0$.

Atunci există V , o vecinătate a lui x_0 , astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I \cap V - \{x_0\}$, și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Teorema lui Darboux

Deși derivata unei funcții nu este în mod necesar continuă (vezi exercițiul 3 de la pagina 293), este valabil următorul rezultat (ce se va folosi în cadrul demonstrației teoremei referitoare la metoda lui Newton).

Teorema lui Darboux. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval din \mathbb{R} , o funcție derivabilă. Atunci pentru orice J , interval inclus în I , $f'(J)$ este interval.

Notă istorică. Jean Gaston Darboux (1842-1917) a urmat liceele din Nîmes și Montpellier, precum și École Polytechnique și École Normale Supérieure. În 1866 obține titlul de doctor în matematici cu o teză intitulată *Sur les surfaces orthogonales*. În anul academic 1866-1867 predă la Collège de France, iar între 1867 și 1872 la Liceul Louis le Grand. Între 1873 și 1881 predă la École Normale Supérieure. A fost decanul Facultății de Științe de la Sorbona, între 1889 și 1903. Darboux a adus contribuții importante în Geometria Diferențială și Analiza Matematică. A fost membru al Royal Society of London și al Académie des Sciences.

Demonstrație. Pentru $a, b \in J$, $a < b$, să presupunem că $f'(a) < f'(b)$.

Pentru $\lambda \in (f'(a), f'(b))$, arbitrar, considerăm funcția $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x,$$

pentru orice $x \in I$.

Avem

$$\varphi'(a) < 0$$

și

$$\varphi'(b) > 0.$$

Cum

$$\lim_{x \searrow a} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} = \varphi'(a) < 0$$

și

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} = \varphi'(b) > 0,$$

există $c, d \in (a, b)$, $c < d$ astfel ca

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a} < 0,$$

pentru orice $x \in (a, c)$, și

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x - b} > 0,$$

pentru orice $x \in (d, b)$.

Ca atare,

$$\varphi(x) - \varphi(a) < 0,$$

pentru orice $x \in (a, c)$ și

$$\varphi(x) - \varphi(b) < 0,$$

pentru orice $x \in (d, b)$.

Atunci, conform Corolarului de la pagina 215, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\varphi(c) = \inf_{x \in [a, b]} \varphi(x).$$

Prin urmare, conform Teoremei lui Fermat (vezi pagina 276), găsim că

$$\varphi'(c) = 0,$$

adică

$$f'(c) = \lambda,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Derivate de ordin superior. Teorema lui Taylor

O generalizare a teoremei lui Lagrange, extrem de utilă din punct de vedere practic, atât pentru calculul limitelor (vezi spre exemplu exercițiul 11), cât și pentru determinarea punctelor de extrem, este dată de Teorema lui Taylor. Acest rezultat se va folosi de asemenea în cadrul demonstrației Teoremei referitoare la metoda lui Newton (vezi pagina 287), Teoremei lui Taylor-cazul multidimensional (vezi pagina 313), precum și în cadrul considerentelor premergătoare Teoremei lui Bernstein (vezi pagina 490).

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe D . Dacă f' este derivabilă în $c \in D$, vom nota $(f')(c) = f''(c)$ și vom numi această valoare a doua derivată a lui f în c .

Similar se definesc a treia, ..., a n -a derivată a lui f în c , notate $f'''(c), \dots, f^{(n)}(c)$.

Teorema lui Taylor. Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu următoarele proprietăți: există $f', f'', \dots, f^{(n-1)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și sunt continue și există $f^{(n)} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a, b]$, există γ , între α și β , astfel ca

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Notă istorică. Brook Taylor (1685-1731) a urmat cursurile St John' College Cambridge. În 1712 devine membru al Royal Society. Taylor este cel care a descoperit metoda integrării prin părți precum și teorema de mai sus (rezultate care sunt conținute în cartea *Methodus incrementorum directa et inversa*, apărută în 1715).

Demonstrație. Fie P numărul real definit de relația

$$\frac{(\beta - \alpha)^n}{n!}P = f(\beta) - \left\{ f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta - \alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^{n-1} \right\}.$$

Considerăm funcția $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(x) = f(\beta) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(\beta - x) + \frac{f''(x)}{2!}(\beta - x)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1} + \frac{P}{n!}(\beta - x)^n \right\},$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Avem, pentru orice $x \in [a, b]$,

$$\varphi'(x) = \frac{P - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta - x)^{n-1},$$

de unde, conform teoremei lui Rolle, se deduce concluzia.

Observație. Cantitatea $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta - \alpha)^n$ se notează cu R_n și se numește restul sub forma lui Lagrange. Acest rest se poate prezenta și în alte forme. Menționăm aici doar forma lui Cauchy, anume, afirmăm că există $\theta \in (0, 1)$ astfel ca

$$R_n = (1 - \theta)^{n-1} \frac{f^{(n)}((1 - \theta)\alpha + \theta\beta)}{(n-1)!}(\beta - \alpha)^n.$$

Metoda lui Newton

Pe lângă problema determinării punctelor de extrem, o altă problemă practică în care noțiunea de derivată își dovedește eficiența este aceea a "rezolvării aproximative" a ecuațiilor.

Atunci când ecuația $f(x) = 0$ nu se poate rezolva "exact" se apelează la tehnici de aproximare a soluțiilor. Una dintre aceste tehnici este metoda lui Newton (sau mai exact metoda lui Newton-Raphson). Metoda are la bază ideea aproximării graficului lui f cu tangenta lui f în apropierea unei soluții a ecuației $f(x) = 0$. Mai precis se procedează astfel: se folosește tangenta pentru a se aproxima graficul lui f în jurul punctului $(x_n, f(x_n))$ de pe graficul lui f , unde $f(x_n)$ este "mic" și $f'(x_n) \neq 0$; se determină punctul x_{n+1} în care tangenta la graficul lui f în $(x_n, f(x_n))$ intersectează axa Ox , i.e. se rezolvă sistemul dat de ecuațiile $y = 0$ și $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ și se obține

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};$$

se continuă procedeul înlocuind punctul $(x_n, f(x_n))$ cu punctul $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$.

Exemple

Un prim exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x^3 - x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum f este continuă și $f(1)f(2) < 0$, deducem că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție între 1 și 2. Se pornește cu punctul $(x_0, f(x_0))$, unde $x_0 = 1$. Iată calculele:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1,5
1	1,5	0,875	5,75	1,347826087
2	1,347826087	0,100682174	4,449905482	1,325200399
3	1,325200399	0,002058363	4,268468293	1,324718174
4	1,324718174	0,000000925	4,264634722	1,324717957
5	1,324717957	-5×10^{-10}	4,264632997	1,324717957

Un alt exemplu: Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x^2 - 2,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Cum f este continuă și $f(1)f(2) < 0$, deducem că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție între 1 și 2. Se pornește cu punctul $(x_0, f(x_0))$, unde $x_0 = 1$. Se obține

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n},$$

de unde

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

Iată calculele:

	Eroarea	Numărul de cifre corecte
$x_0 = 1$	$-0,41421$	1
$x_1 = 1,5$	$0,08579$	1
$x_2 = 1,41667$	$0,00245$	3
$x_3 = 1,41422$	$0,00001$	5

Metoda lui Newton este folosită de cele mai multe dintre calculatoare pentru a calcula soluțiile unor ecuații, deoarece convergența ei este rapidă.

Observație. Metoda lui Newton nu converge întotdeauna. Spre exemplu, pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r}, & \text{pentru } x \geq r \\ -\sqrt{r-x}, & \text{pentru } x \leq r \end{cases}$$

dacă alegem $x_0 = r-h$, obținem $x_1 = r+h$, iar apoi termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oscilează între aceste două valori.

Observație. Dacă metoda lui Newton converge, atunci ea converge către o soluție a ecuației $f(x) = 0$. Dacă x_0 nu este însă suficient de aproape de soluția care se urmărește a fi aproximată, este posibil ca metoda lui Newton să convergă către o altă soluție a ecuației $f(x) = 0$.

Observație. Se poate arăta că dacă inegalitatea

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1$$

este validă pe un interval care are drept punct interior o soluție a ecuației $f(x) = 0$, atunci metoda lui Newton converge către aceea soluție. Această condiție este suficientă, dar nu și necesară.

Iată un alt rezultat pozitiv privind metoda lui Newton. El este, în esență, datorat lui Joseph Fourier și lui J. Raymond Mouraille.

Notă istorică. *Isaac Newton*, fiul unui fermier bogat, dar complet needucat, s-a născut în 1643, la Lincolnshire, Anglia. Frecventează Free Grammar School din Gratham. Din 1661 frecventează cursurile de la Trinity College, Cambridge. Interesul lui Newton pentru matematică este stârnit în 1663, an în care, cumpărând o carte de astronomie, nu o poate înțelege datorită slabei pregătiri matematice. Datorită unei epidemii, în 1665, se întoarce la Lincolnshire, unde, într-o perioadă de doi ani pune bazele noilor sale idei din matematică, fizică, optică și astronomie. În 1669 i se oferă postul de Lucasian Profesor, lăsat liber de către Barrow. A stabilit că, în contradicție cu ceea ce se credea până atunci, lumina nu este formată dintr-o singură entitate de bază, ci este un mixaj de diverse tipuri de raze. Publică aceste concluzii, în 1672, în "Philosophical Transactions of the Royal Society". În 1687 scrie "Philosophiae naturalis principia mathematica", recunoscută ca fiind cea mai importantă carte științifică scrisă vreodată și care-l propulsează în postura de lider internațional în cercetarea științifică. În 1701 preia o funcție guvernamentală la Londra. Regina Anne îi acordă în 1705 titlul de Sir. A murit în 1727.

Teoremă. Fie I un interval al dreptei reale, $a, b \in I$, $a < b$, și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

i)

$$f(a)f(b) < 0$$

ii)

$$f'(x) \neq 0 \text{ și } f''(x) \neq 0,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

iii) există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x_0)f''(x_0) > 0.$$

Fie şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci există $l \in (a, b)$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$$

şi

$$f(l) = 0.$$

Demonstraţie. Cum f are proprietatea lui Darboux, există $l \in (a, b)$ astfel încât $f(l) = 0$.

Deoarece f' şi f'' au proprietatea lui Darboux ele păstrează semn constant pe $[a, b]$.

Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că

$$f'(x) > 0$$

şi

$$f''(x) > 0,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Aşadar f este strict crescătoare.

Fie $x_1 \in (l, b]$.

Atunci

$$x_n > l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Într-adevăr, pentru $n \in \mathbb{N}$, fie

$$P(n): x_n > l.$$

Evident, $P(1)$ este adevărată.

Presupunând că $P(n)$ este adevărată, vom arăta că $P(n+1)$ este adevărată.

Într-adevăr, conform teoremei lui Taylor (vezi pagina 284), există $\zeta \in (l, x_n)$ astfel încât

$$f(l) = f(x_n) + f'(x_n)(l - x_n) + \frac{f''(\zeta)}{2}(l - x_n)^2,$$

de unde

$$f(x_n) + f'(x_n)(l - x_n) < 0,$$

i.e.

$$l - x_n < -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

adică

$$l < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1},$$

deci $P(n+1)$ este adevărată.

Prin urmare, conform metodei inducției matematice,

$$x_n > l,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este descrescător.

Deoarece f este strict crescătoare, avem

$$f(x_n) > f(l) = 0,$$

deci

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0,$$

de unde

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} < x_n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fiind descrescător și mărginit (avem $x_n \in [a, b]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$), este convergent, conform Teoremei convergenței monotone (vezi pagina 138).

Fie $\alpha \in [a, b]$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha.$$

Prin trecere la limită în relația de definire a șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

de unde, având în vedere continuitatea lui f și f' și folosind Teorema de la pagina 202, avem

$$\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

i.e.

$$f(\alpha) = 0.$$

Cum $f(l) = 0$ și f este injectivă (fiind strict crescătoare), deducem că $l = \alpha$.

Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$$

și

$$f(l) = 0.$$

Permutarea limitei cu derivata

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, unde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, I fiind un interval din \mathbb{R} . Este ușor de găsit un șir de funcții care sunt derivabile în orice punct și astfel ca limita șirului să nu fie derivabilă într-un punct. Mai mult, există un șir de funcții, care sunt derivabile în orice punct, și care converge uniform către o funcție continuă, ce nu este derivabilă în nici un punct. Prin urmare, în general, nu este posibil să considerăm derivata limitei unui șir convergent de funcții derivabile, chiar dacă avem convergență uniformă. Vom arăta, în cele ce urmează, că, dacă șirul derivatelor este uniform convergent, atunci situația este favorabilă relativ la problema de mai sus. Mai precis avem următorul rezultat care se va dovedi util în cadrul demonstrației Teoremei de la pagina 436.

Teorema de permutare a limitei cu derivata. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, unde $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, I fiind un interval mărginit din \mathbb{R} . Să presupunem că există $x_0 \in I$ astfel încât șirul $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, că f_n este derivabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și că șirul $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe I , către o funcție $g : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe I , către o funcție derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și, mai mult,

$$f' = g,$$

adică

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

Demonstrație. Să presupunem că extremitățile lui I sunt a și b , cu $a < b$ și să alegem un element arbitrar $x \in I$.

Pentru $m, n \in \mathbb{N}$, conform teoremei lui Lagrange, există y (depinzând de m și n) între x și x_0 , astfel ca

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(x_0) - f_n(x_0) + (x - x_0)(f'_m(y) - f'_n(y)).$$

Ca atare

$$\|f_m - f_n\| \leq |f_m(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a) \|f'_m - f'_n\|,$$

deci șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe I , către o funcție continuă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Fie $c \in I$.

Conform teoremei lui Lagrange, există z (depinzând de m și n) între x și c , astfel ca

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x - c)(f'_m(z) - f'_n(z)).$$

În consecință, pentru $x \in I$, $x \neq c$, avem

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \|f'_m - f'_n\|. \quad (*)$$

Deoarece șirul $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform, pe I , pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\|f'_m - f'_n\| < \varepsilon,$$

deci, trecând la limită, în $(*)$, după m , obținem

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} \right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_\varepsilon$.

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(c) = g(c)$, există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m_\varepsilon$ să avem

$$\left| f'_n(c) - g(c) \right| < \varepsilon.$$

Fie

$$k_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}.$$

Deoarece f_{k_ε} este derivabilă în c , există δ (depinzând de k_ε , deci de ε), astfel ca

$$\left| \frac{f_{k_\varepsilon}(x) - f_{k_\varepsilon}(c)}{x - c} - f'_{k_\varepsilon}(c) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice x astfel ca $0 < |x - c| < \delta$.

Prin urmare

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - g(c) \right| < 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că f este derivabilă în c și că

$$f'(c) = g(c). \quad \square$$

Exerciții

1. Dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, are proprietatea că pentru orice

$$a < x_1 < x_2 < x_3 < b,$$

avem

$$0 \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^2},$$

atunci f este constantă.

2. Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în c , unde $c \in (a, b)$. Să se arate că dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt două șiruri de elemente din (a, b) , primul crescător, iar cel de al doilea descrescător, ambele tinzând către c , atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(c).$$

3. Să se arate că funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

are proprietatea că f' nu este continuă.

4. Fie funcția, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, iar $n \in \mathbb{N}$.

Dacă

$$|f(x)| \leq |\sin x|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se arate că

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1.$$

5. Să se determine punctele de extrem local ale funcției, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă (i.e. există, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$).

Să se arate că, dacă, pentru un $n_0 \in \mathbb{N}$, avem

$$f(1) = f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0,$$

atunci există $x \in (0, 1)$, astfel încât

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

7. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval mărginit din \mathbb{R} , este derivabilă și nemărginită, atunci f' este nemărginită.

8. Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă, pentru care există $M > 0$ astfel încât

$$|f'(x) - f'(y)| \leq M|x - y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

Să se arate că, dacă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci există $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ astfel încât

$$|f(x) - f(y)| \leq \mu |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$.

9. Să se studieze posibilitatea aplicării regulii lui l'Hospital fracției $\frac{f(x)}{g(x)}$ pentru x tinzând la 0, unde $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$g(x) = \sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

10. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ dacă $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

și

$$g(x) = \sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

11. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x^2 \ln(1+x)},$$

folosind formula lui Taylor.

12. Există $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă de două ori astfel ca

$$f \geq 0$$

și

$$f'' < 0 ?$$

13. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, este dată de

$$f_n(x) = \frac{\cos nx}{n},$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$.

14. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirurilor $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, este dată de

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{n},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
4. *Constantin P. Niculescu*, **Analiza matematică pe dreapta reală, O abordare contemporană**, Editura Universitaria Craiova, 2002 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39801
5. *Gheorghe Sirețchi*, **Calcul Diferențial și Integral, vol. 1, Noțiuni fundamentale**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32924

DERIVATA PE \mathbb{R}^n

Derivata după o direcție
Diferențiabilitate. Matricea Jacobi. Jacobianul
Continuitatea derivatelor parțiale asigură diferențiabilitatea
Operații cu funcții diferențiabile
Teorema lui Lagrange - cazul multidimensional
Derivate parțiale de ordin superior;
Schimbarea ordinii de derivare
Diferențiale de ordin superior;
Teorema lui Taylor - cazul multidimensional

Derivata după o direcție

În cursul precedent am considerat derivata unei funcții care are domeniul și codomeniul din \mathbb{R} și am constatat că aceasta constituie instrumentul adecvat pentru a determina punctele de extrem local ale funcției. Deoarece determinarea punctelor de extrem constituie o problemă centrală în multe ramuri ale științei și pentru că în modelarea fenomenelor naturale apar, de obicei, funcții de mai multe variabile, vom încerca să construim un instrument asemănător, adecvat acestui caz, care să servească aceluiași scop.

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}$ și c un punct de acumulare al lui D care aparține lui D .

Dacă există (în \mathbb{R}), limita

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

se numește derivata lui f în c și se notează $f'(c)$.

Dacă $f'(c)$ este finită, spunem că f este derivabilă în c .

Definiția de mai sus (cu impunerea suplimentară ca limita considerată să existe în \mathbb{R}) este valabilă și în cazul în care $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu modificarea că, în acest caz, $f'(c) \in \mathbb{R}^q$. Acest fapt este demn de remarcat, căci o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde I este un interval din \mathbb{R} , este o curbă din \mathbb{R}^q , iar derivata sa în c , când există, generează un vector tangent la curbă în punctul $f(c)$.

Altfel, dacă gândim pe x ca fiind timpul, funcția f furnizează traiectoria unui punct din \mathbb{R}^q , iar derivata sa în c , când există, reprezintă viteza punctului la momentul c .

O privire atentă asupra definiției anterioare arată că unicul loc în care se folosește faptul că funcția considerată are domeniul din \mathbb{R} este atunci când se consideră câtul $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Această expresie nu mai are semnificație pentru o funcție cu domeniu din \mathbb{R}^q .

O cale de a ataca problema ridicată mai sus este de a "tăia" domeniul funcției cu drepte ce trec prin c . Mai precis:

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$, c un punct interior al lui D și $u \in \mathbb{R}^p$.

Un vector $L_u \in \mathbb{R}^q$ se numește derivata lui f , în punctul c , după vectorul u (sau după direcția u , dacă $\|u\| = 1$), dacă există limita $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$ și

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} = L_u.$$

Observație. L_u , dacă există, este unic și se notează $f_u(c)$ sau $\frac{df}{du}(c)$. Notăm cu f_u sau cu $\frac{df}{du}$ funcția rezultantă, care are valori în \mathbb{R}^q și domeniul constând din acele puncte din D , în care există limita $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+tu)-f(c)}{t}$.

Observație. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ și c un punct interior al lui D . Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, unde 1 este pe poziția i . Atunci, dacă există, $f_{e_i}(c) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$, respectiv $f_{e_i} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}$, se numesc derivata parțială a lui f în c , în raport cu variabila x_i , respectiv derivata parțială a lui f în raport cu variabila x_i .

Diferențiabilitate. Matricea Jacobi. Jacobianul

Este posibil ca o funcție care are derivată într-un punct după orice direcție, să nu fie continuă în acel punct (vezi exercițiul 6, de la pagina 314). De asemenea, este posibil ca o funcție să aibă, într-un punct, derivată după o anumită direcție, dar să nu aibă, în același punct, derivată după o altă direcție (vezi exercițiul 4 de la pagina 313 și exercițiul 5 de la pagina 314). Toate aceste lucruri arată că definiția de mai sus, deși marchează un progres în căutările noastre, nu este instrumentul dorit.

Pentru a rezolva problema trebuie să privim definiția funcției derivabile din cazul 1-dimensional într-un alt mod.

Mai precis, avem:

Propoziție. Fie $f : U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in U$.

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

a) f este derivabilă în c .

b) există o aplicație liniară $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$), pentru orice $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$) astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{|x - c|} = 0.$$

Această nouă abordare ne conduce la următoarea:

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Spunem că f este diferențiabilă (sau derivabilă) în c dacă există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ (i.e. $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^p$) astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0.$$

Observație. L , dacă există, este unică și se notează cu $Df(c)$ sau $f'(c)$ și se numește diferențiala (sau derivata) lui f în punctul c .

Propoziția următoare arată că o funcție diferențiabilă într-un punct este continuă în acel punct. Ea se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (vezi pagina 304).

Propoziție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este diferențiabilă în c , atunci există $\delta, K \in \mathbb{R}$, $\delta, K > 0$, astfel încât avem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|,$$

pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$.

În particular, f este continuă în c .

Demonstrație. Conform ipotezei, există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - L(x - c)}{\|x - c\|} = 0,$$

deci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$, avem

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| \leq \|x - c\|,$$

de unde, utilizând inegalitatea triunghiului,

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \|L(x - c)\| + \|x - c\|.$$

Conform propoziției de la pagina 208, există $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$, astfel ca

$$\|L(x - c)\| \leq M \|x - c\|,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Prin urmare

$$\|f(x) - f(c)\| \leq (M + 1) \|x - c\|,$$

pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta$. \square

Exemple

1. Pentru $p = q = 1$, funcția f este diferențiabilă în c dacă și numai dacă f este derivabilă în c și $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$Df(c)(u) = f'(c)u,$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

2. Pentru $p = 1$, $q > 1$, funcția f are componentele f_1, f_2, \dots, f_q , deci $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$. Atunci f este diferențiabilă în c dacă și numai dacă f_1, f_2, \dots, f_q sunt diferențiabile în c și $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ este dată de

$$Df(c)(u) = (f'_1(c)u, f'_2(c)u, \dots, f'_q(c)u) = u(f'_1(c), f'_2(c), \dots, f'_q(c)),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

3. Pentru $p > 1$, $q = 1$, dacă f este diferențiabilă în c , atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$. Existența tuturor derivatelor parțiale în

c , nu este, în general, o condiție suficientă pentru diferențiabilitatea funcției f în c (vezi exercițiile 6 și 7 de la pagina 314).

$Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p,$$

pentru orice $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$.

Observație. Orice funcție liniară $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este diferențiabilă în orice $c \in \mathbb{R}^p$ și

$$Df(c) = f.$$

În particular, aplicațiile $pr_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, date de

$$pr_i(u_1, u_2, \dots, u_p) = u_i,$$

pentru orice $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ și orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, sunt liniare, deci, în orice $c \in \mathbb{R}^p$, avem

$$Dpr_i(c) = pr_i,$$

fapt care justifică notația

$$pr_i = dx_i.$$

Atunci, cu aceste notații, avem

$$\begin{aligned} Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)u_p = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)pr_1(u_1, u_2, \dots, u_p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)pr_p(u_1, u_2, \dots, u_p) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1(u_1, u_2, \dots, u_p) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p(u_1, u_2, \dots, u_p), \end{aligned}$$

pentru orice $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ (avem mai sus o egalitate de numere reale), adică

$$Df(c) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)dx_p = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i,$$

care este o egalitate de aplicații liniare din \mathbb{R}^p în \mathbb{R} .

5. Pentru $p, q > 1$ și $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, dacă f este diferențiabilă în c , atunci, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$.

Mai mult, $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este dată de

$$Df(c)(u_1, u_2, \dots, u_p) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c)u_p, \dots, \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c)u_1 + \dots + \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c)u_p \right)$$

pentru orice $(u_1, u_2, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$.

Matricea asociată acestei aplicații liniare, pentru perechea de baze canonice, este

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix}.$$

Această matrice se numește matricea Jacobi a lui f în c și se notează $J_f(c)$.

Când $p = q$, determinantul acestei matrici poartă numele de Jacobianul lui f în c și se notează

$$\det J_f(c)$$

sau

$$\frac{\partial((f_1, f_2, \dots, f_q))}{\partial((x_1, x_2, \dots, x_p))} \Big|_{x=c}.$$

Rezultatul de mai jos arată că pentru o funcție diferențiabilă putem exprima derivata după o direcție într-un punct prin intermediul diferențialei în acel punct.

Teoremă. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă f este diferențiabilă în c , atunci există $\frac{df}{du}(c)$ și

$$\frac{df}{du}(c) = Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Continuitatea derivatelor parțiale asigură diferențiabilitatea

Am văzut că diferențiabilitatea unei funcții într-un punct implică existența tuturor derivatelor parțiale în acel punct, deci existența derivatelor parțiale într-un punct este o condiție necesară pentru diferențiabilitatea în

acel punct. Ea nu este și o condiție suficientă, așa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

Deși existența derivatelor parțiale într-un punct nu este o condiție suficientă pentru diferențiabilitatea în acel punct, continuitatea acestor derivate parțiale constituie o condiție suficientă.

Mai precis avem:

Teoremă (Criteriu de diferențiabilitate). *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă există o vecinătate V a lui c cu proprietatea că există toate derivatele parțiale în orice punct din V și acestea sunt continue în c , atunci f este diferențiabilă în c .*

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul $q = 1$.

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, fie $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ și orice $y \in D$, astfel ca

$$\|y - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right\| < \varepsilon.$$

Dacă

$$x = (x_1, \dots, x_p)$$

și

$$c = (c_1, \dots, c_p)$$

considerăm vectorii

$$u_0 = x,$$

$$u_1 = (c_1, x_2, \dots, x_p),$$

$$u_2 = (c_1, c_2, x_3, \dots, x_p),$$

$$\dots$$

$$u_{p-1} = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_{p-1}, x_p),$$

$$u_p = c.$$

Atunci

$$f(x) - f(c) = \sum_{j=1}^p (f(u_{j-1}) - f(u_j)).$$

Aplicând teorema lui Lagrange (vezi pagina 278) celui de al j -lea termen din suma precedentă, există ξ_j , aparținând segmentului de capete u_{j-1} și u_j , astfel ca

$$f(u_{j-1}) - f(u_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j)(x_j - c_j).$$

Prin urmare avem

$$f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) = \sum_{j=1}^p (x_j - c_j) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(c) \right).$$

Pentru

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

obținem

$$\left\| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(c)(x_j - c_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^p |x_j - c_j| \varepsilon \leq \|x - c\| \varepsilon \sqrt{p}.$$

Prin urmare, am arătat că f este diferențiabilă în c și că $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$Df(c)(z_1, z_2, \dots, z_p) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)z_p,$$

pentru orice $(z_1, z_2, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$. \square

Operații cu funcții diferențiabile

Rezultatele din această secțiune descriu comportamentul clasei funcțiilor diferențiabile la operații algebrice.

Propoziție. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \overset{\circ}{D}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Dacă f și g sunt diferențiabile în c , atunci $h = \alpha f + \beta g$ este diferențiabilă în c și

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c).$$

b) Dacă f și g sunt diferențiabile în c , atunci $k = f \cdot g$ este diferențiabilă în c și

$$Dk(c)(u) = Df(c)(u)g(c) + f(c)Dg(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

c) Dacă φ este diferențiabilă în c , atunci φf este diferențiabilă în c și

$$D(\varphi f)(c)(u) = D\varphi(c)(u)f(c) + \varphi(c)Df(c)(u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei lui Lagrange - cazul multidimensional (vezi pagina 306), Teoremei lui Taylor - cazul multidimensional (vezi pagina 312), precum și a Teoremei de schimbare de variabilă (vezi pagina 390).

Teoremă (de diferențiabilitate a funcțiilor compuse). Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow D' \subseteq \mathbb{R}^q$, $c \in \overset{\circ}{D}$ și $g : D' \subseteq \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ astfel ca $f(c) \in \overset{\circ}{D'}$.

Dacă f este diferențiabilă în c , iar g diferențiabilă în $f(c) \stackrel{not}{=} b$, atunci $g \circ f \stackrel{not}{=} h : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^r$ este diferențiabilă în c și

$$Dh(c) = D(g \circ f)(c) = Dg(b) \circ Df(c).$$

Demonstrație. Conform ipotezei, există o aplicație liniară $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)}{\|x - c\|} = 0,$$

deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_{\varepsilon, f} \in \mathbb{R}$, $\delta_{\varepsilon, f} > 0$, astfel încât, pentru orice $x \in D$, cu proprietatea că $\|x - c\| < \delta_{\varepsilon, f}$, avem

$$\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq \varepsilon \|x - c\|,$$

și există o aplicație liniară $Dg(b) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)}{\|x - b\|} = 0,$$

deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_{\varepsilon, g} \in \mathbb{R}$, $\delta_{\varepsilon, g} > 0$, astfel încât, pentru orice $y \in D'$, cu proprietatea că $\|y - b\| < \delta_{\varepsilon, g}$, avem

$$\|g(y) - g(b) - Dg(b)(y - b)\| \leq \varepsilon \|y - b\|.$$

Conform propoziției de la pagina 298, există $\gamma, K \in \mathbb{R}$, $\gamma, K > 0$, astfel ca pentru $x \in D$, cu proprietatea $\|x - c\| < \gamma$, să avem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq K \|x - c\|.$$

De asemenea, așa cum ne asigură propoziția de la pagina 208, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca, pentru orice $u \in \mathbb{R}^q$, să avem

$$\|Dg(b)(u)\| \leq M \|u\|.$$

Ca atare, pentru $x \in D$, cu $\|x - c\| < \min\{\gamma, \frac{\delta_{\varepsilon, g}}{K}\}$, avem

$$\|f(x) - f(c)\| \leq \delta_{\varepsilon, g},$$

deci

$$\begin{aligned} \|g(f(x)) - g(f(c)) - Dg(b)(f(x) - f(c))\| &\leq \\ &\leq \varepsilon \|f(x) - f(c)\| \leq K\varepsilon \|x - c\|. \end{aligned} \quad (*)$$

Dacă, în plus, $\|x - c\| < \delta_{\varepsilon, f}$, atunci

$$\begin{aligned} \|Dg(b)(f(x) - f(c)) - Df(c)(x - c)\| &\leq \\ &\leq M \|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \leq M\varepsilon \|x - c\|. \end{aligned} \quad (**)$$

Prin urmare, pentru $x \in D$, cu $\|x - c\| < \min\{\gamma, \frac{\delta_{\varepsilon, g}}{K}, \delta_{\varepsilon, f}\}$, din (*) și (**), avem

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - (Dg(b) \circ Df(c))(x - c)\| \leq (K + M)\varepsilon \|x - c\|,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Observație. Considerente de algebră liniară ne asigură că în condițiile teoremei de mai sus, avem:

$$J_h(c) = J_g(b)J_f(c),$$

adică

$$J_{g \circ f}(c) = J_g(f(c))J_f(c).$$

Altfel scris,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_r}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial h_r}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial h_r}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(b) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(b) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(b) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(b) & \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(f(c)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(f(c)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(c) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(f(c)) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(f(c)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(f(c)) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(f(c)) & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(f(c)) & \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(c) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(c) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de unde

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(c) = \sum_{l=1}^q \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(c)) \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(c),$$

adică

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(c) = \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(c) = \\
&= \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(c)) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(c) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(c)) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(c) + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial y_q}(f(c)) \frac{\partial f_q}{\partial x_j}(c),
\end{aligned}$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ și $j \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Formula de mai sus se va dovedi utilă în cadrul demonstrației Formulei lui Leibniz (vezi pagina 398).

Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional

Însemnătatea teoremei lui Lagrange din cazul 1-dimensional ne arată că este indicat să studiem un corespondent al acestui rezultat și pentru cazul multidimensional.

Să considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x) = (x - x^2, x - x^3),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Pentru orice $c \in \mathbb{R}$, f este diferențiabilă în c și $Df(c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, este dată de

$$Df(c)(u) = ((1 - 2c)u, (1 - 3c^2)u),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}$.

Să observăm că $f(0) = (0, 0)$ și $f(1) = (0, 0)$, dar nu există c , astfel ca $Df(c)(u) = (0, 0)$, pentru un u nenul.

Așadar teorema lui Lagrange nu are un corespondent pentru cazul $q > 1$, chiar dacă $p = 1$.

În multe aplicații este suficient să se considere cazul $q = 1$, iar în această situație teorema lui Lagrange poate fi extinsă.

Mai precis, avem:

Teorema lui Lagrange-cazul multidimensional. *Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a și b este inclus în D , iar funcția f este diferențiabilă în orice punct al acestui segment.*

Atunci există un punct c , pe segmentul de capete a și b , astfel ca

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a).$$

Demonstrație. Se consideră funcția $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$\varphi(t) = f((1 - t)a + tb),$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

Avem

$$\varphi(0) = f(a)$$

și

$$\varphi(1) = f(b).$$

Mai mult, din Teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (vezi pagina 304), avem

$$\varphi'(t) = Df((1 - t)a + tb)(b - a).$$

Din teorema lui Lagrange (vezi pagina 278), există $t_0 \in (0, 1)$, astfel ca

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(t_0),$$

adică

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a),$$

unde

$$c = (1 - t_0)a + t_0b. \square$$

Corolar. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a și b este inclus în D , iar funcția f este diferențiabilă în orice punct al acestui segment.

Atunci, pentru $y \in \mathbb{R}^q$, există un punct c pe segmentul de capete a și b astfel ca

$$\{f(b) - f(a)\} \cdot y = \{Df(c)(b - a)\} \cdot y.$$

Demonstrație. Se aplică rezultatul precedent funcției $F : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = x \cdot y,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$. \square

Corolar. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a, b \in D$ astfel încât segmentul de capete a și b este inclus în D , iar funcția f este diferențiabilă în orice punct al acestui segment.

Atunci există o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$f(b) - f(a) = L(b - a).$$

Demonstrație. Să observăm că dacă $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$, atunci

$$f_i(x) = f(x) \cdot e_i,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ și $x \in D$. Aplicând precedentul corolar, există c_i , pe segmentul de capete a și b , astfel ca

$$f_i(b) - f_i(a) = Df_i(c_i)(b - a) \cdot e_i.$$

Atunci aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ căutată are matricea asociată

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_i)\right)_{i=\overline{1,q}, j=\overline{1,p}}. \quad \square$$

Observație. Așa cum am văzut, în general, nu putem alege aceeași valoare pentru toate c_i -urile.

Derivate parțiale de ordin superior. Schimbarea ordinii de derivare

Dacă f este o funcție cu domeniul din \mathbb{R}^p și codomeniul din \mathbb{R} , f poate avea p derivate parțiale (de prim ordin) notate cu f_{x_i} sau cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Fiecare

dintre aceste derivate parțiale constituie o funcție cu domeniul din \mathbb{R}^p și codomeniul din \mathbb{R} , deci poate avea la rândul ei p derivate parțiale, numite derivate parțiale de al doilea ordin, notate $f_{x_i x_j}$ sau cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, adică derivata parțială a lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în raport cu x_j .

În același mod se definesc derivatele parțiale de al treilea ordin,..., de al n -lea ordin.

Așadar, f poate avea cel mult p^n derivatele parțiale de al n -lea ordin.

Este de mare importanță faptul că, dacă aceste derivate parțiale sunt continue, atunci ordinea de derivare nu este importantă. În plus, acest rezultat ne ferește de existența un număr prea mare de notații distincte pentru derivatele parțiale. Este suficient să considerăm cazul derivatelor parțiale de doilea ordin pentru funcții cu domeniul din \mathbb{R}^2 și codomeniul din \mathbb{R} (pentru rezultate similare celui pe care-l vom prezenta, însă într-un cadru mai larg - de exemplu domeniul din \mathbb{R}^q sau pentru derivate de ordin mai mare decât doi - recomandăm consultarea manualelor [2], [3] și [4]). Ideea demonstrației este de arăta că ambele derivate parțiale mixte de doilea ordin, în $(0, 0)$, sunt limita raportului $\frac{f(h,k)-f(h,0)-f(0,k)+f(0,0)}{hk}$ atunci când (h, k) tinde către $(0, 0)$.

Lemă. Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y)$, unde U este o vecinătate a lui $(0, 0)$, pentru care $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din U și astfel ca $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ să fie continuă în $(0, 0)$.

Atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{A(h, k)}{hk},$$

unde

$$A(h, k) = f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0).$$

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $(h, k) \in U$ cu proprietatea că $|h| < \delta_\varepsilon$ și $|k| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h, k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right| < \varepsilon.$$

Pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ definim, pentru $|h| < \delta_\varepsilon$,

$$B(h) = f(h, k) - f(h, 0),$$

deci avem

$$A(h, k) = B(h) - B(0).$$

Teorema lui Lagrange (vezi pagina 278) ne asigură că există h_0 (care depinde de k) astfel ca

$$0 < |h_0| < |h|$$

și

$$A(h, k) = B(h) - B(0) = hB'(h_0).$$

Dar

$$B'(h_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(h_0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(h_0, 0).$$

Aplicând iarăși teorema lui Lagrange membrului drept al egalității de mai sus, există k_0 astfel ca

$$0 < |k_0| < |k|$$

și

$$B'(h_0) = k \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0).$$

Drept urmare, pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ și $|h| < \delta_\varepsilon$ există h_0 și k_0 astfel ca

$$0 < |h_0| < |h| \text{ și } 0 < |k_0| < |k|,$$

pentru care

$$\frac{A(h, k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(h_0, k_0).$$

Atunci

$$\left| \frac{A(h, k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \right| < \varepsilon,$$

pentru $|k| < \delta_\varepsilon$ și $|h| < \delta_\varepsilon$, de unde concluzia. \square

Teorema lui Schwarz. Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y)$, unde U este o vecinătate a lui (x, y) , pentru care $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ există în orice punct din U și astfel ca $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ să fie continuă în (x, y) .

Atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în (x, y) și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Demonstrație. Putem presupune, fără pierderea generalității, că

$$(x, y) = (0, 0).$$

Am văzut în lema de mai sus că există $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{A(h,k)}{hk}$ și că

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{A(h,k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Pe de altă parte, pentru $h \neq 0$, avem

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{A(h,k)}{hk} = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right).$$

Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice $(h,k) \in U$ cu proprietatea că $|h| < \delta_\varepsilon$ și $|k| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{A(h,k)}{hk} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right| < \varepsilon.$$

Trecând la limită în această inegalitate pentru k tinzând către 0, obținem

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \right| \leq \varepsilon,$$

pentru orice h astfel ca $|h| < \delta_\varepsilon$.

Prin urmare există $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ în $(0,0)$ și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Diferențiale de ordin superior. Teorema lui Taylor-cazul multi-dimensional

Dacă f este o funcție cu domeniul din \mathbb{R}^p și codomeniul din \mathbb{R} , atunci diferențiala lui f într-un punct c este o aplicație liniară $Df(c)$ din \mathbb{R}^p în \mathbb{R} astfel ca, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, așa încât pentru orice z , cu proprietatea că $\|z\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$|f(c+z) - f(c) - Df(c)(z)| < \varepsilon \|z\|.$$

Cu alte cuvinte, $Df(c)$ este aplicația liniară care aproximează cel mai bine diferența $f(c+z) - f(c)$, pentru z ”mic”.

Orice altă aplicație liniară constituie o aproximare mai puțin ”bună”.

Am văzut că, dacă există, $Df(c)$ este dată de

$$Df(c)(z) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)z_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)z_p,$$

unde $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$.

Deși aproximările cu aplicații liniare sunt simple și suficiente pentru multe scopuri, uneori este necesar să obținem aproximări mai exacte.

Este natural să ne îndreptăm atenția asupra funcțiilor pătratice, etc.

Întrucât nu vom intra în amănuntele studiului aplicațiilor multiliniare, vom folosi următoarea:

Definiție. Pentru o funcție $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât există și sunt continue derivatele parțiale de al doilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c , definim diferențiala de ordin doi a lui f în c , ca fiind aplicația, $D^2f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$D^2f(c)(y, z) = \sum_{i,j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j,$$

pentru orice $y = (y_1, \dots, y_p)$, $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{R}^p$.

Similar, pentru o funcție $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$ astfel încât există și sunt continue derivatele parțiale de al treilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c , definim diferențiala de ordin trei a lui f în c , ca fiind aplicația, $D^3f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$D^3f(c)(y, z, w) = \sum_{i,j,k=1}^p \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j w_k,$$

pentru orice $y = (y_1, \dots, y_p)$, $z = (z_1, \dots, z_p)$, $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p$.

Analog se definește diferențiala de orice ordin într-un punct.

Observație. Vom folosi următoarele notații:

$$D^2f(c)(w, w) \stackrel{not}{=} D^2f(c)(w)^2$$

$$D^3f(c)(w, w, w) \stackrel{not}{=} D^3f(c)(w)^3$$

.....

$$D^n f(c)(w, \dots, w) \stackrel{not}{=} D^n f(c)(w)^n.$$

Avem pentru $p = 2$ și pentru $w = (h, k)$:

$$D^2 f(c)(w)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(c)k^2,$$

$$D^3 f(c)(w)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x}(c)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial x}(c)h^2k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y}(c)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial y}(c)k^3,$$

...

$$\begin{aligned} D^n f(c)(w)^n &= \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x \dots \partial x}(c)h^n + C_n^1 \frac{\partial^n f}{\partial x \partial x \dots \partial x \partial y}(c)h^{n-1}k + \\ &+ C_n^2 \frac{\partial^n f}{\partial x \dots \partial x \partial y \partial y}(c)h^{n-2}k^2 + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y \partial y \dots \partial y}(c)k^n. \end{aligned}$$

Teorema următoare va fi folosită în studiul punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile (vezi pagina 341).

Teorema lui Taylor-cazul multidimensional. Fie $f : U \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât pentru orice punct de pe un segment de capete u și v există o vecinătate a sa pe care există și sunt continue derivatele parțiale de al n -lea ordin ale lui f .

Atunci există un punct \bar{u} pe segmentul de capete u și v , astfel ca

$$\begin{aligned} f(v) &= f(u) + \frac{1}{1!}Df(u)(v-u) + \frac{1}{2!}D^2f(u)(v-u)^2 + \dots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!}D^{(n-1)}f(u)(v-u)^{n-1} + \frac{1}{n!}D^n f(\bar{u})(v-u)^n. \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(t) = f(u + t(v-u)),$$

pentru orice $t \in [0, 1]$.

Atunci, conform Teoremei de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (vezi pagina 304),

$$\begin{aligned} F'(t) &= Df(u + t(v - u))(v - u), \\ F''(t) &= D^2f(u + t(v - u))(v - u)^2, \\ &\dots \\ F^{(n)}(t) &= D^n f(u + t(v - u))(v - u)^n. \end{aligned}$$

Conform Teoremei lui Taylor cazul 1-dimensional (vezi pagina 284), există $\psi \in [0, 1]$ astfel ca

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}F'(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}F^n(\psi).$$

Alegem

$$\bar{u} = u + \psi(v - u). \quad \square$$

Exerciții

1. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, dacă $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este dată de

$$f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Să se calculeze $Df(1, 1)$ pentru $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \ln xy,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y + 6xy - z^3 + 3z,$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Să se calculeze derivata lui f în origine după direcțiile $(1, 2, 0)$ și $(2, 1, -3)$.

4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivatele parțiale de prim ordin în origine, dar că, pentru $\alpha\beta \neq 0$, derivata lui f în origine după direcția (α, β) nu există.

Să se arate că f nu este mărginită pe nici o vecinătate a originii, deci nu este continuă în origine.

5. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & \text{în caz contrar} \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivatele parțiale de prim ordin în origine, dar că, pentru $\alpha\beta \neq 0$, derivata lui f în origine după direcția (α, β) nu există.

Să se arate că f nu este continuă în origine, deși este mărginită.

6. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 - y^2}, & x^3 - y^2 \neq 0 \\ 0, & x^3 - y^2 = 0 \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că există derivata lui f în origine după orice direcție, dar f nu este continuă în origine, deși există o vecinătate a originii pe care f este mărginită.

7. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este continuă și are derivate parțiale, dar nu este diferențiabilă în origine.

8. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este continuă numai în origine, punct în care funcția este diferențiabilă.

9. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că f este diferențiabilă în origine, deși pe nici o vecinătate a originii derivatele sale parțiale nu sunt mărginite (deci derivatele sale parțiale nu sunt continue în origine).

10. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$.

Dacă f este diferențiabilă în c , atunci să se exprime derivata lui f în c după direcția vectorului unitar $w = (w_1, \dots, w_p)$.

Utilizând inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, să se arate că există o direcție după care derivata este maximă și că această direcție este unică, dacă cel puțin una dintre derivatele parțiale de prim ordin în c este nenulă. Această direcție se numește direcția gradientului lui f în c .

Arătați că există un unic vector v_c astfel încât

$$Df(c)(w) = v_c \cdot w,$$

pentru orice vector w de normă 1.

Acest vector, v_c , se numește gradientul lui f în c și se notează $\nabla_c f$ sau $\text{grad} f(c)$ și este dat de

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(c), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) \right).$$

Dacă $g : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în c , iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci

$$\nabla_c(\alpha f) = \alpha \nabla_c(f),$$

$$\nabla_c(f + g) = \nabla_c(f) + \nabla_c(g)$$

și

$$\nabla_c(fg) = (\nabla_c(f))g(c) + f(c)(\nabla_c(g)).$$

11. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|f(x)\| = 1,$$

pentru orice $x \in D$.

Să se arate că

$$f(x) \cdot Df(x)(u) = 0,$$

pentru orice $x \in D$ și $u \in \mathbb{R}^p$.

În particular, pentru $q = 1$, vectorii $f(x)$ și $\nabla_x(f)$ sunt perpendiculari pentru orice $x \in D$.

12. Dacă pentru $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in D$, există și este continuă $\frac{\partial f}{\partial x}$ pe D , iar $\frac{\partial f}{\partial y}$ există în c , este f diferențiabilă în c ?

13. a) Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, în origine, există $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, dar că nu sunt egale.

b) Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln(1 + \frac{x^2}{y^2}), & y \neq 0 \\ 0, & \text{în caz contrar} \end{cases},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, în origine, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sunt egale, deși ele nu sunt continue.

14. Fie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă omogenă de grad p (i.e.

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^p f(x_1, \dots, x_n),$$

pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ și orice $\lambda \in \mathbb{R}$).

Să se arate că

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = pf(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Această relație poartă numele de relația lui Euler.

Notă istorică. *Leonard Euler* (1707-1783) care a studiat cu *Johann Bernoulli*, a fost unul dintre marii matematicieni ai omenirii (orb pentru o îndelungată perioadă a vieții) cu o impresionantă operă matematică. Pentru detalii privind biografia acestui titan al matematicii recomandăm articolul *Leonard Euler* (1707-1783), de Ion Chițescu, *Analele Universității din București*, seria matematică, Anul LVI, 2007, Nr. 2, paginile 205-220.

15. Pentru $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, să se arate că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = 0.$$

16. Să se arate că o soluție a ecuație

$$xz \frac{\partial f}{\partial x} - yz \frac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

este dată de

$$f(x, y, z) = \varphi(xy, x^2 + y^2 - z^2),$$

unde $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă.

17. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pentru care există toate derivatele parțiale de prim ordin, iar $p - 1$ dintre ele sunt mărginite.

Să se arate că f este continuă pe D .

18. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție diferențiabilă care are toate componentele omogene.

Să se arate că dacă există $a \in \mathbb{R}^p - \{0\}$ astfel încât $f(a) = 0$, atunci $Df(a)$ nu este injectivă.

19. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \sum_{i=1}^p |x_i|,$$

pentru orice $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.

Să se arate că f este diferențiabilă în $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă $a_i \neq 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Să se scrie, în acest caz, care este $Df(a)$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică II**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023
4. **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București* - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București

TEOREMELE CLASICE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL PE \mathbb{R}^n

Noțiune de funcție de clasă \mathcal{C}^1
Teorema de injectivitate locală
Teorema de surjectivitate locală
Teorema de inversiune locală
Teorema funcțiilor implicite

În prima parte a acestei secțiuni vom arăta că pentru o funcție diferențiabilă într-un punct, caracterul local al acestei funcții este determinat de către diferențiala funcției în punctul respectiv. Mai precis, dacă diferențiala funcției în punctul considerat este injectivă, atunci există o vecinătate a punctului pe care funcția este injectivă; dacă diferențiala funcției în punctul c este surjectivă, atunci există o vecinătate U a lui c și o vecinătate V a lui $f(c)$ astfel ca $f : U \rightarrow V$ să fie surjectivă. Drept consecințe obținem unele teoreme de inversiune și teorema funcțiilor implicite.

În această secțiune vom lucra cu o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Definiție. Dacă derivatele parțiale de prim ordin ale funcției f există și sunt continue în $c \in \overset{\circ}{D}$, spunem că f este de clasă \mathcal{C}^1 în c . Dacă $D_0 \subseteq D$ și f este de clasă \mathcal{C}^1 în orice punct din D_0 , atunci spunem că f este de clasă \mathcal{C}^1 pe D_0 .

Observație. Dacă f este de clasă \mathcal{C}^1 pe mulțimea deschisă D , atunci f este diferențiabilă pe D . Vom arăta în continuare că, în ipotezele de mai sus, diferențiala funcției variază în mod continuu.

Lema 1. Dacă f este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c din D , atunci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice x cu proprietatea că

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Demonstrație. Din continuitatea derivatelor parțiale deducem că, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice x cu proprietatea că

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ și $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, de unde concluzia. \square

Lemă de aproximare. Dacă f este de clasă C^1 pe o vecinătate a unui punct c din D , atunci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca pentru orice x_1, x_2 cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Demonstrație. Conform lemei anterioare, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$, astfel ca, pentru orice x cu proprietatea că

$$\|x - c\| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Pentru x_1, x_2 cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta_\varepsilon,$$

alegem $w \in \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|w\| = 1$$

și

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| = \{f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Funcția $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată, pentru orice $t \in [0, 1]$, de

$$F(t) = \{f(t(x_1 - x_2) + x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

este diferențiabilă pe $(0, 1)$ și

$$F'(t) = \{Df(t(x_1 - x_2) + x_2)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

$$F(0) = \{f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w,$$

$$F(1) = \{f(x_1) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Conform Teoremei lui Lagrange (vezi pagina 278), există $\psi \in (0, 1)$ astfel încât

$$F(1) - F(0) = F'(\psi).$$

Pentru $\bar{x} = \psi(x_1 - x_2) + x_2$, avem

$$\{f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w = \{Df(\bar{x})(x_1 - x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\} \cdot w.$$

Deoarece

$$\|\bar{x} - c\| < \delta_\varepsilon,$$

folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (vezi pagina 86), avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq$$

$$\leq \|Df(\bar{x})(x_1 - x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \varepsilon \|(x_1 - x_2)\|. \quad \square$$

Teorema de injectivitate locală

Vom arăta în cele ce urmează că dacă o funcție este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c și dacă $Df(c)$ este injectivă, atunci există o vecinătate a lui c pe care f este injectivă; în contextul de mai sus, spunem că f este local injectivă.

Teorema de injectivitate locală. *Dacă f este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c din D și $Df(c)$ este injectivă, atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât $f|_U$ este injectivă, unde $U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - c\| \leq \delta\}$.*

Demonstrație. Deoarece $Df(c)$ este injectivă, conform Propoziției de pagina 216, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ astfel încât

$$r \|z\| \leq \|Df(c)(z)\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$,

Lema de aproximare, pentru $\varepsilon = \frac{r}{2}$, ne asigură că există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{r}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

pentru orice x_1, x_2 cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \delta,$$

și, drept urmare, obținem

$$\|Df(c)(x_1 - x_2)\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{r}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

de unde

$$r \|x_1 - x_2\| - \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \frac{r}{2} \|x_1 - x_2\|,$$

i.e.

$$\frac{r}{2} \|x_1 - x_2\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\|,$$

pentru orice $x_1, x_2 \in U$, deci $f|_U$ este injectivă. \square

Observație. Prin urmare $f|_U : U \rightarrow f(U)$ este inversabilă. Teorema de mai jos, care se bazează pe Teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue (vezi pagina 217), arată că această inversă este continuă. Ea se va dovedi utilă în cadrul demonstrației Teoremei de inversiune locală (vezi pagina 329).

Teorema de inversiune locală (forma slabă). Dacă f este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c din D și $Df(c)$ este injectivă, atunci există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ astfel încât $f|_U : U \rightarrow f(U)$ este inversabilă și inversa sa este continuă, unde $U = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - c\| \leq \delta\}$.

Observație. Teorema de mai sus poartă numele de Teorema de inversare locală (forma slabă) deoarece are două slabiciuni, anume $(f|_U)^{-1} : f(U) \rightarrow U$ nu are domeniul de definiție, în mod necesar, o vecinătate a lui $f(c)$ și, în plus, deși ipoteza implică diferențiabilitatea lui f , concluzia nu menționează nimic relativ la diferențiabilitatea inversei lui f .

Teorema de surjectivitate locală

Rezultatul care urmează este complementar celui anterior. El afirmă că dacă o funcție este de clasă C^1 pe o vecinătate a unui punct c și $Df(c)$ este surjectivă, atunci există U , o vecinătate a lui c , și V , o vecinătate a lui $f(c)$, astfel ca $f : U \rightarrow V$ să fie surjectivă. Cu alte cuvinte, orice punct din \mathbb{R}^q care este suficient de apropiat de $f(c)$ este imaginea, prin f , a unui punct apropiat de c . Pentru a demonstra acest rezultat, vom arăta pentru început că el este valabil pentru aplicații liniare, iar apoi pentru funcții care pot fi approximate cu aplicații liniare.

Lemă. *Dacă $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație liniară și surjectivă, atunci există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$, există $x \in \mathbb{R}^p$ cu proprietatea că*

$$\|x\| \leq m \|y\|$$

și

$$L(x) = y.$$

Demonstrație. Fie, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, q\}$,

$$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^q,$$

unde i este pe poziția i .

Există $u_i \in \mathbb{R}^p$ astfel ca

$$L(u_i) = e_i.$$

Atunci, pentru orice $y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q$, avem

$$L(x) = y,$$

unde

$$x = y_1 u_1 + \dots + y_q u_q.$$

Mai mult,

$$\|x\| \leq m \|y\|,$$

unde

$$m = \left\{ \sum_{j=1}^q |u_j|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

Lemă. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ și $g : D = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| < \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}^q$ continuă astfel ca $g(0) = 0$. Fie $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară și surjectivă și $m \in \mathbb{R}$ ca în lema precedentă. Presupunem că, pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^p$, avem

$$\|g(x_1) - g(x_2) - L(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|.$$

Atunci, pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$, astfel ca

$$\|y\| < \beta = \frac{\alpha}{2m},$$

există $x \in D$ cu proprietatea că

$$g(x) = y.$$

Demonstrație. Pentru $y \in \mathbb{R}^q$ astfel ca $\|y\| < \beta = \frac{\alpha}{2m}$, fie

$$x_0 = 0 \text{ și } y_0 = y.$$

Conform lemei precedente, există $x_1 \in \mathbb{R}^p$, astfel ca

$$y_0 = L(x_1 - x_0)$$

și

$$\|x_1 - x_0\| \leq m \|y\|.$$

Atunci $x_1 \in D$.

Fie

$$y_1 = y_0 + g(x_0) - g(x_1) = -\{g(x_1) - g(x_0) - L(x_1 - x_0)\}.$$

Avem

$$\|y_1\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_0\| \leq \frac{1}{2} \|y\|.$$

Din nou, lema de anterioară ne asigură că există $x_2 \in \mathbb{R}^p$, astfel ca

$$y_1 = L(x_2 - x_1)$$

și

$$\|x_2 - x_1\| \leq m \|y_1\|.$$

Atunci

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{2} \|x_1\|,$$

de unde

$$\|x_2\| \leq \frac{3}{2} \|x_1\| < \frac{3}{4} \alpha,$$

și, prin urmare, $x_2 \in D$.

Să presupunem că am ales $0 = x_0, x_1, \dots, x_n \in D$ și $y = y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^q$ astfel încât

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq m \|y_{k-1}\| \leq \frac{m}{2^{k-1}} \|y\|, \quad (*)$$

$$y_{k-1} = L(x_k - x_{k-1})$$

și

$$y_k = y_{k-1} + g(x_{k-1}) - g(x_k), \quad (**)$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

Să observăm că

$$\begin{aligned} \|y_n\| &= \|y_{n-1} + g(x_{n-1}) - g(x_n)\| = \|g(x_{n-1}) - g(x_n) - L(x_n - x_{n-1})\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2m} \|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{1}{2m} m \|y_{n-1}\| \leq \frac{1}{2^n} \|y\| \end{aligned}$$

și că

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_{n-2}\| + \dots + \|x_2 - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leq \\ &\leq m \|y\| \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) < 2m \|y\| < \alpha. \end{aligned}$$

Alegem x_{n+1} astfel ca

$$y_n = L(x_{n+1} - x_n)$$

și

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq m \|y_n\|.$$

Ca mai sus, deducem că

$$\|x_{n+1}\| < \alpha,$$

deci $x_{n+1} \in D$.

Definim

$$y_{n+1} = y_n + g(x_n) - g(x_{n+1});$$

avem

$$\begin{aligned}\|y_{n+1}\| &= \|g(x_{n+1}) - g(x_n) - L(x_{n+1} - x_n)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_{n+1} - x_n\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2m} m \|y_n\| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \|y\|.\end{aligned}$$

Se constată uşor, folosind (*), că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy, deci, conform Criteriului lui Cauchy (vezi pagina 141), el converge către un element $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\|x\| \leq 2m \|y\| < \alpha,$$

deci $x \in D$.

Pe de altă parte, cum

$$\|y_n\| \leq \frac{1}{2^n} \|y\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent către $0_{\mathbb{R}^q}$.

De asemenea

$$y_n = y - g(x_n),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (vezi (**)).

Deoarece g este continuă, folosind Teorema de la pagina 202, obţinem

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = y,$$

ceea ce încheie demonstraţia. \square

Teorema de mai jos se va folosi în decursul demonstraţiei Teoremei de inversiune locală (vezi pagina 329), precum şi a Teoremei multiplicatorilor lui Lagrange (vezi pagina 346).

Teorema de surjectivitate locală. *Dacă f este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c şi $Df(c)$ este surjectivă, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $y \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că*

$$\|y - f(c)\| < \beta,$$

există $x \in \mathbb{R}^p$ aşa încât

$$\|x - c\| < \alpha \text{ şi } f(x) = y.$$

Demonstraţie. Fie m generat de lema de mai sus pentru aplicaţia liniară surjectivă $Df(c)$.

Conform lemei de aproximare, există $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, astfel ca pentru orice x_1, x_2 cu proprietatea că

$$\|x_1 - c\|, \|x_2 - c\| < \alpha,$$

avem

$$\|f(x_1) - f(x_2) - Df(c)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|x_1 - x_2\|.$$

Fie $g : D_0 = \{z \in \mathbb{R}^p \mid \|z\| < \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}^q$, dată de

$$g(z) = f(z + c) - f(c),$$

pentru orice $z \in D_0$.

g este continuă și

$$g(0) = 0.$$

Mai mult, pentru z_1, z_2 , alegând $x_1 = z_1 + c$ și $x_2 = z_2 + c$, avem

$$x_1 - x_2 = z_1 - z_2$$

și

$$g(z_1) - g(z_2) = f(x_1) - f(x_2),$$

deci

$$\|g(z_1) - g(z_2) - Df(c)(z_1 - z_2)\| \leq \frac{1}{2m} \|z_1 - z_2\|.$$

Pentru $y \in \mathbb{R}^q$ astfel ca

$$\|y - f(c)\| < \beta = \frac{\alpha}{2m},$$

considerăm $w = y - f(c)$ și avem

$$\|w\| < \beta.$$

În concordanță cu lema anterioară, există $z \in \mathbb{R}^p$, $\|z\| < \alpha$ astfel ca

$$g(z) = w.$$

Dacă considerăm $x = c + z$, avem

$$\|x - c\| = \|z\| < \alpha$$

și

$$w = g(z) = f(z + c) - f(c) = f(x) - f(c),$$

deci

$$f(x) = w + f(c) = y. \quad \square$$

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul Teoremei de inversiune locală (vezi pagina 329).

Teorema aplicației deschise. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ de clasă \mathcal{C}^1 pe D , cu proprietatea că $Df(x)$ este surjectivă, pentru orice $x \in D$. Atunci $f(D)$ este deschisă.

Mai mult, $f(G)$ este deschisă, pentru orice $G = \overset{\circ}{G} \subseteq D$.

Demonstrație. Fie $c \in G$. Atunci, conform teoremei de surjectivitate locală, există o bilă deschisă cu centrul în $f(c)$ inclusă în $f(G)$, deci $f(G)$ este deschisă. \square

Teorema de inversiune locală

Vom combina cele două rezultate anterioare, pentru cazul în care $p = q$ și $Df(c)$ este injectivă și surjectivă (pentru a fi mai preciși să menționăm că o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă). Mai mult, aceste proprietăți au loc dacă și numai dacă matricea asociată are determinantul nenul. În particular, $Df(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă dacă și numai dacă $\det Jf(c) \neq 0$.

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei funcțiilor implicite (vezi pagina 336).

Teorema de inversiune locală. Fie f o funcție de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c astfel încât $Df(c)$ este bijectivă.

Atunci există o vecinătate U a lui c , cu proprietatea că $V = f(U)$ este o vecinătate a lui $f(c)$, $f : U \rightarrow V$ este bijectivă, iar $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ este continuă.

Mai mult, g este de clasă \mathcal{C}^1 pe V și dacă $y \in V$, iar $x = g(y) \in U$, atunci

$$Dg(y) = D(f^{-1})(f(x)) = (Df(x))^{-1}.$$

Demonstrație. Deoarece $Df(c)$ este injectivă, există $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, astfel ca

$$2r \|z\| \leq \|Df(c)z\|,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$ (vezi Propoziția de la pagina 216).

Conform lemei 1, există o vecinătate U_0 a lui c pe care f este de clasă \mathcal{C}^1 și astfel încât, pentru orice x din această vecinătate, avem

$$r \|z\| \leq \|Df(x)z\|, \quad (*)$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

În continuare, ne vom restrânge la o vecinătate (deschisă) U a lui c , $U \subseteq U_0$, pe care f este injectivă și care este conținută în bila cu centrul în c și de rază α din Teorema de surjectivitate locală (vezi pagina 327).

Atunci, conform Teoremei aplicației deschise (vezi pagina 328), ținând cont că $Df(x)$ este injectivă, deci surjectivă, pentru orice $x \in U$, $V = f(U)$ este o vecinătate (deschisă) a lui $f(c)$.

Mai mult, având în vedere Teorema de inversiune locală - forma slabă (vezi pagina 323),

$$g = (f)^{-1} : f(U) = V \rightarrow U$$

este continuă.

Pentru arăta că g este derivabilă în $y = f(x) \in V$, unde $x \in U$, fie $y_1 = f(x_1) \in V$, unde $x_1 \in U$.

Cum f este diferențiabilă în x , avem

$$f(x_1) - f(x) - Df(x)(x_1 - x) = u(x_1) \|x_1 - x\|,$$

unde

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \|u(x_1)\| = 0.$$

Dacă $M_x = (Df(x))^{-1}$, atunci

$$x_1 - x = M_x \circ Df(x)(x_1 - x) = M_x(f(x_1) - f(x) - u(x_1) \|x_1 - x\|),$$

adică

$$g(y_1) - g(y) - M_x(y_1 - y) = -\|x_1 - x\| M_x(u(x_1)). \quad (**)$$

Deoarece $Df(x)$ este injectivă rezultă, similar cu demonstrația de la Teorema de injectivitate locală (vezi pagina 322), că

$$\|y_1 - y\| = \|f(x_1) - f(x)\| \geq \frac{r}{2} \|x_1 - x\|, \quad (***)$$

pentru y suficient de apropiat de y_1 .

Mai mult, din (*), deducem că

$$\|M_x(u)\| \leq \frac{1}{r} \|u\| ,$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Prin urmare, folosind (**) și (***), obținem

$$\|g(y_1) - g(y) - M_x(y_1 - y)\| \leq \|x_1 - x\| \frac{1}{r} \|u(x_1)\| \leq \frac{2}{r^2} \|u(x_1)\| \|y_1 - y\| .$$

Ca urmare, g este diferențiabilă în $y = f(x)$ și

$$Dg(y) = M_x = (Df(x))^{-1} .$$

Rămâne de arătat că g este de clasă \mathcal{C}^1 pe V .

Fie $z \in \mathbb{R}^p$ și x, x_1, y, y_1 ca mai sus.

Atunci, cum

$$Dg(y) \circ Df(x) = Dg(y_1) \circ Df(x_1) = Id_{\mathbb{R}^p} ,$$

avem

$$Dg(y)(z) - Dg(y_1)(z) = Dg(y) \circ [Df(x_1) - Df(x)] \circ Dg(y_1)(z) .$$

Cum f este de clasă \mathcal{C}^1 , pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru

$$\|x_1 - x\| < \delta_\varepsilon ,$$

să avem

$$\|Df(x_1)(w) - Df(x)(w)\| \leq \varepsilon \|w\| ,$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$.

Mai mult, pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\|Dg(y_1)(u)\| \leq \frac{1}{r} \|u\|$$

și

$$\|Dg(y)(u)\| \leq \frac{1}{r} \|u\| .$$

Prin urmare, pentru y_1 suficient de aproape de y ,

$$\|Dg(y)(z) - Dg(y_1)(z)\| \leq \frac{\varepsilon}{r^2} \|z\| ,$$

pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, de unde $\frac{\partial g_i}{\partial y_j}$ sunt continue în y , adică g este de clasă C^1 pe V .

Exerciții

1. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x + y, 2x + ay),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Calculați Df .

Să se arate că Df este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă, iar acest fapt are loc dacă și numai dacă $a \neq 2$.

Să se determine imaginea prin f a mulțimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ și } 0 \leq y \leq 1\}$ pentru $a = 1$, $a = 2$ și $a = 3$.

2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x, xy) = (u, v),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se traseze curbele $x = ct$, $y = ct$ (în reperul uOv), $u = ct$ și $v = ct$ (în reperul xOy).

Este f injectivă? Dar surjectivă?

Să se arate că pentru $x \neq 0$ există o vecinătate a lui (x, y) pe care f este injectivă și astfel ca imaginea prin f a acestei vecinătăți să fie o vecinătate a lui $f(x)$.

Care este imaginea prin f a mulțimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ și } 0 \leq y \leq 2\}$?

Dar preimaginea prin f a mulțimii $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2 \text{ și } 0 \leq v \leq 2\}$?

3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) = (u, v),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se traseze curbele $x = ct$, $y = ct$ (în reperul uOv), $u = ct$ și $v = ct$ (în reperul xOy).

Să se arate că orice $(u, v) \neq (0, 0)$ este imaginea prin f a două puncte (x, y) , deci f nu este injectivă.

Să se arate că f este local injectivă în orice punct diferit de $(0, 0)$.

Care este imaginea prin f a mulțimii $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 1 \text{ și } 0 \leq y \leq 1\}$?

Dar preimaginea prin f a mulțimii $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 2 \text{ și } 0 \leq v \leq 2\}$?

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că $Df(0)$ este injectivă, dar că f nu are inversă în jurul lui $(0, 0)$.

5. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție de clasă \mathcal{C}^1 inversabilă. Este adevărat că $Df(x)$ este bijectivă, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$?

6. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferențiabilă pe o vecinătate a lui c astfel încât $Df(c)$ are inversă. Este adevărat că f are inversă în jurul lui c ?

7. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferențiabilă în c astfel încât are inversă diferențiabilă în $f(c)$. Este adevărat că $Df(c)$ este injectivă?

8. Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ diferențiabilă pe o vecinătate a lui c astfel încât pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru $\|x - c\| < \delta_\varepsilon$, avem $\|Df(x)(z) - Df(c)(z)\| \leq \varepsilon \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$.

Să se arate că f are derivate parțiale continue în c .

9. Fie $L_0 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară și injectivă. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ astfel încât orice aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu proprietatea că $\|L(z) - L_0(z)\| \leq \alpha \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, este injectivă.

10. Fie $L_0 : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ o aplicație liniară și surjectivă. Să se arate că există $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ astfel încât orice aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, cu proprietatea că $\|L(z) - L_0(z)\| \leq \beta \|z\|$, pentru orice $z \in \mathbb{R}^p$, este surjectivă.

11. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$f(x, y) = (x \cos y, x \sin y),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Să se arate că, pentru orice $x_0 > 0$, există o vecinătate a lui (x_0, y_0) pe care f este injectivă, dar că există o infinitate de puncte care au ca imagine, prin f , pe $f(x_0, y_0)$.

Teorema funcțiilor implicite

Să considerăm o funcție F definită pe o submulțime a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu valori în \mathbb{R}^p .

Identificând pe $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu \mathbb{R}^{p+q} nu este necesar să definim ce înseamnă că F este continuă, diferențiabilă sau de clasă \mathcal{C}^1 într-un punct.

Să presupunem că

$$F(x_0, y_0) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

Problema funcțiilor implicite este de a rezolva ecuația

$$F(x, y) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

pentru una dintre variabile, să zicem x , în termeni de cealaltă variabilă, i.e. să găsim o funcție φ , definită pe o submulțime a lui \mathbb{R}^q cu valori în \mathbb{R}^p , astfel ca

$$\varphi(y_0) = x_0$$

și

$$F(\varphi(y), y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

pentru orice y din domeniul de definiție al lui φ .

Este natural să presupunem că F este continuă într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) și să sperăm că φ este continuă într-o vecinătate a lui y_0 .

Chiar dacă F este de clasă \mathcal{C}^1 într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) , existența și unicitatea unei soluții continue φ pe o vecinătate a lui y_0 nu este asigurată.

Spre exemplu, pentru $p = q = 1$ și pentru funcția

$$F(x, y) = x^2 - y^2,$$

avem două soluții continue corespunzătoare punctului $(0, 0)$, anume

$$\varphi_1(y) = y$$

și

$$\varphi_2(y) = -y;$$

de asemenea avem soluții discontinue, ca de exemplu

$$\varphi_3(y) = \begin{cases} y, & y \in \mathbb{Q} \\ -y, & y \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Funcția

$$G(x, y) = y - x^2$$

are două soluții continue corespunzătoare punctului $(0, 0)$, dar nici una dintre ele nu este definită pe o vecinătate a lui $(0, 0)$.

Funcția

$$H(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ y - x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \end{cases},$$

este de clasă \mathcal{C}^1 într-o vecinătate a lui $(0, 0)$, dar nu are nici o soluție continuă definită pe o vecinătate a lui $y = 0$.

Pentru toate aceste trei exemple, derivata parțială în raport cu variabila x se anulează în punctul considerat.

În cazul $p = q = 1$ condiția suplimentară care trebuie impusă pentru a asigura existența și unicitatea soluției este ca această derivată parțială în raport cu variabila x să nu se anuleze în punctul considerat.

În cazul general, să observăm că derivata $DF(x_0, y_0)$ este o aplicație liniară din $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ în \mathbb{R}^p care induce o aplicație liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, dată de

$$L(u) = DF(x_0, y_0)(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

L este derivata parțială a lui F în raport cu x în punctul (x_0, y_0) .

Condiția suplimentară care trebuie impusă pentru a asigura existența și unicitatea soluției este ca L să fie bijectivă.

Utilizând o eventuală translație, se poate presupune, fără pierderea generalității, că $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Problema de mai sus poate fi interpretată și în termeni de coordonate astfel:

dacă $x = (x_1, \dots, x_p)$ și $y = (y_1, \dots, y_q)$, ecuația

$$F(x, y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

capătă forma unui sistem de p ecuații cu $p + q$ necunoscute, anume

$$x_1, \dots, x_p$$

și

$$y_1, \dots, y_q;$$

mai precis, avem

$$f_1(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) = 0$$

...

$$f_p(x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q) = 0.$$

Se înțelege aici că sistemul este verificat de $(0, 0, \dots, 0 : 0, \dots, 0)$ și că dorim să aflăm x_1, \dots, x_p în funcție de y_1, \dots, y_q , cel puțin pentru cazul în care y_j -urile sunt mici.

Se presupune că derivatele parțiale ale funcțiilor f_i în raport cu toate cele $p + q$ variabile sunt continue în vecinătatea lui zero și că

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}|_{(0, \dots, 0)} \neq 0.$$

Atunci vom arăta că există funcțiile $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ continue în $(y_1, \dots, y_q) = (0, \dots, 0)$ astfel că dacă vom înlocui în sistemul inițial pe x_1 cu $\varphi_1(y_1, \dots, y_q), \dots$, pe x_p cu $\varphi_p(y_1, \dots, y_q)$, obținem o identitate în y_1, \dots, y_q .

Teorema funcțiilor implicite. Fie F o funcție definită pe o submulțime a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ cu valori în \mathbb{R}^p , de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$.

Să presupunem că $F(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q}) = 0_{\mathbb{R}^p}$ și că aplicația liniară $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, dată de

$$L(u) = DF(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$, este bijectivă.

Atunci există o funcție φ , definită pe o submulțime a lui \mathbb{R}^q cu valori în \mathbb{R}^p , de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate W a lui $0_{\mathbb{R}^q}$, astfel ca

$$\varphi(0_{\mathbb{R}^q}) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

și

$$F(\varphi(y), y) = 0_{\mathbb{R}^p},$$

pentru orice $y \in W$.

Demonstrație. Fie funcția dată de

$$H(x, y) = (F(x, y), y),$$

definită pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$ cu valori în $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

H de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$ și

$$DH(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, v) = (DF(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})(u, v), v).$$

Deoarece L este bijectivă,

$$DH(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q}) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q,$$

este bijectivă.

În conformitate cu Teorema de inversiune locală (vezi pagina 329), există o vecinătate U a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, așa încât $V = H(U)$ este o vecinătate a lui $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, $H : U \rightarrow V$ este bijectivă, iar inversa sa, $G : V \rightarrow U$, este continuă.

Mai mult, G este de clasă \mathcal{C}^1 pe V , iar diferențiala sa, într-un punct din V , este inversa diferențialei lui H în punctul corespunzător din U .

Funcția G este dată de

$$G(x, y) = (G_1(x, y), y),$$

unde G_1 este de clasă \mathcal{C}^1 pe V , cu valori în \mathbb{R}^p .

Fie W o vecinătate a lui $0_{\mathbb{R}^q}$ astfel încât dacă $y \in W$, atunci $(0_{\mathbb{R}^p}, y) \in V$ și fie $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^p$, dată de

$$\varphi(y) = G_1(0_{\mathbb{R}^p}, y),$$

pentru orice $y \in W$.

Pentru $(x, y) \in V$, avem

$$\begin{aligned} (x, y) &= (H \circ G)(x, y) = H(G_1(x, y), y) = \\ &= (F(G_1(x, y), y), y). \end{aligned}$$

În particular, pentru $x = 0_{\mathbb{R}^p}$, obținem

$$(0_{\mathbb{R}^p}, y) = (F(\varphi(y), y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Prin urmare

$$0_{\mathbb{R}^p} = F(\varphi(y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Deoarece G_1 este de clasă \mathcal{C}^1 pe V , rezultă că φ este de clasă \mathcal{C}^1 pe W .

□

Observație. Este util să avem o formulă explicită pentru diferențiala lui φ . În acest scop, să introducem derivatele parțiale ale lui F . Pentru $(a, b) \in$

$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ suficient de aproape de $(0_{\mathbb{R}^p}, 0_{\mathbb{R}^q})$, definim $D_x F(a, b) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ca fiind aplicația liniară definită prin

$$D_x F(a, b)(u) = DF(a, b)(u, 0_{\mathbb{R}^q}),$$

pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Similar $D_y F(a, b) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ este aplicația liniară definită prin

$$D_y F(a, b)(v) = DF(a, b)(0_{\mathbb{R}^p}, v),$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^q$.

Să observăm că

$$DF(a, b)(u, v) = D_x F(a, b)(u) + D_y F(a, b)(v). \quad (*)$$

Corolar. În condițiile teoremei de mai sus, pentru orice $y \in W$, $D\varphi(y) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ este aplicația liniară definită prin

$$D\varphi(y) = -(D_x F(\varphi(y), y))^{-1} \circ (D_y F(\varphi(y), y)).$$

Demonstrație. Fie $K : W \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ definită prin

$$K(y) = (\varphi(y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Atunci $F \circ K$ este $0_{\mathbb{R}^p}$ pe W .

Mai mult, pentru orice $y \in W$, avem

$$DK(y)(v) = (D\varphi(y)(v), v),$$

pentru orice $v \in \mathbb{R}^q$.

Atunci

$$0_{\mathbb{R}^p} = D(F \circ K)(y),$$

de unde, folosind (*), obținem

$$0_{\mathbb{R}^p} = D_x F(\varphi(y), y) \circ D\varphi(y) + D_y F(\varphi(y), y),$$

pentru orice $y \in W$.

Ținând cont de faptul că $D_x F(\varphi(y), y)$ este inversabilă, se deduce concluzia.

Exerciții

1. Fie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(x, y) = x^2 - y,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să se arate că este de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a lui $(0, 0)$, dar că pentru nici o vecinătate a lui $(0, 0)$ nu există o funcție continuă φ astfel ca $F(\varphi(y), y) = 0$.

2. Fie $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1^2 - x_2 y_1 + y_2, x_1 y_2 + x_2^3 - y_1),$$

pentru orice $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să se determine punctele $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ în jurul cărora poate fi rezolvată ecuația $F((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}^2})$, aflând x ca funcție de y .

Să se calculeze diferențiala soluției.

3. Să se aplice teorema funcțiilor implicite pe următoarele "contexte":

i) $u + v = x + y$, $xu + yv = 1$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = ?$.

ii) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$, $dz = ?$.

iii) $(y + z) \sin z - y(x + z) = 0 \Rightarrow z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

4. Pentru

$$x_1 = r \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

$$x_3 = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3,$$

$$x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_n = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1},$$

unde $r \in [0, R]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \in [0, \pi]$, $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi]$, să se determine

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}.$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Nicu Boboc*, **Analiză Matematică I**, Editura Universității din București, 1999 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 39214.
3. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

PUNCTE DE EXTREM

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional **Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile** **Extreme cu legături. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange**

În continuare vom discuta problema stabilirii punctelor de extrem ale unei funcții cu domeniul din \mathbb{R}^p și codomeniul din \mathbb{R} , precum și metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru a determina punctele de extrem ale unei funcții care are variabilele supuse la diverse restricții.

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional

Prezentăm un analog al teoremei lui Fermat pentru funcții de mai multe variabile.

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ și $c \in D$.

Punctul c se numește punct de maxim local (relativ) al funcției f , dacă există $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in B(c, \delta) \cap D$, avem

$$f(c) \geq f(x).$$

Punctul c se numește punct de minim local (relativ) al funcției f , dacă există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(c, \delta) \cap D$, avem

$$f(c) \leq f(x).$$

Punctele de maxim local și cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă c este un punct de extrem local al lui f , iar f este diferențiabilă în c , atunci

$$Df(c) = 0.$$

Demonstrație. Orice restricție a lui f , la o dreaptă, care trece prin c , are un punct de extrem în c .

Prin urmare, Teorema lui Fermat (vezi pagina 276) ne asigură că derivata în c , după orice direcție, este nulă.

În particular,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(c) = 0,$$

de unde

$$Df(c) = 0. \quad \square$$

Definiție. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă $Df(c) = 0$, atunci c se numește punct critic al lui f .

Observație. Nu orice punct critic este punct de extrem, așa cu arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x, y) = xy$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, și $c = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Un astfel de punct, care este critic, dar nu este de extrem local, poartă numele de punct șa. În acest exemplu, f restricționată la anumite drepte, ce trec prin origine, are un punct de minim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ și restricționată la anumite drepte, ce trec prin origine, are un punct de maxim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Este posibil ca o funcție restricționată la orice dreaptă, care trece printr-un punct critic al funcției, să aibă puncte de minim relativ. Prin urmare este util să dispunem de un criteriu pentru a stabili dacă un punct critic este punct de extrem sau punct șa.

Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile

Prezentăm acum o modalitate de a selecta dintre punctele critice pe acelea care sunt puncte de extrem local.

Teoremă (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile). Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ care are derivate parțiale de ordin doi continue și $c \in D$ un punct critic al său.

În aceste condiții:

a) dacă

$$D^2f(c)(w)^2 > 0,$$

pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f ;

b) dacă

$$D^2 f(c)(w)^2 < 0$$

pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f ;

c) dacă există $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ astfel încât

$$D^2 f(c)(w_1)^2 > 0$$

și

$$D^2 f(c)(w_2)^2 < 0,$$

atunci c este un punct \mathfrak{s} a pentru f .

Demonstrație. a) Deoarece f are derivate parțiale de ordin doi continue, folosind Corolarul de la pagina 215, există $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$, astfel ca

$$D^2 f(c)(w)^2 \geq m$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$.

Din același motiv, există $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$, cu $\|u - c\| < \delta$, avem

$$D^2 f(u)(w)^2 \geq \frac{m}{2},$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$.

Pentru $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$, conform teoremei lui Taylor - cazul multidimensional (vezi pagina 313), pentru $t \in [0, 1]$, există \bar{c} , pe segmentul de capete c și $c + tw$, astfel ca

$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2} D^2 f(\bar{c})(tw)^2.$$

Prin urmare, pentru $w \in \mathbb{R}^p$, $\|w\| = 1$ și $t \in [0, \delta)$ avem

$$f(c + tw) - f(c) = \frac{t^2}{2} D^2 f(\bar{c})(w)^2 > \frac{m}{4} t^2 \geq 0,$$

deci c este un punct de minim relativ al lui c .

b) Se justifică similar.

c) Fie $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ astfel încât

$$\|w_1\| = \|w_2\| = 1,$$

$$D^2 f(c)(w_1)^2 > 0$$

și

$$D^2 f(c)(w_2)^2 < 0.$$

Atunci, există t , astfel încât

$$f(c + tw_1) > f(c)$$

și

$$f(c + tw_2) < f(c),$$

deci c este punct șa al lui f . \square

Observație. Rezultatul precedent arată că natura punctului critic c este determinată de forma pătratică $D^2 f(c)(w)^2$.

În particular, este important de stabilit dacă această funcție ia valori de semne contrare sau dacă valorile ei au același semn.

Cu notația

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(c) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(c) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(c) \end{vmatrix},$$

unde $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, avem:

a) dacă $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p > 0$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f ;

b) dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^p \Delta_p > 0$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f ;

c) dacă $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p \geq 0$ (sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^p \Delta_p \geq 0$) și există $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, astfel ca $\Delta_j = 0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie (a se vedea în acest sens exercițiul 4);

d) în celelalte cazuri c este un punct șa al lui f .

Detalii privind observația de mai sus se pot găsi în *Constantin Meghea, Irina Meghea, Tratat de Calcul Diferențial și Calcul Integral pentru Învățământul Politehnic*, Editura Tehnica, București, 1997, pagina 451.

Vom demonstra această afirmație în cazul $p = 2$.

Așadar avem de studiat forma pătratică

$$Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Dacă

$$\Delta = AC - B^2 > 0,$$

atunci

$$A \neq 0$$

și avem

$$Q(x, y) = \frac{1}{A}[(Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2],$$

deci semnul lui Q este dat de semnul lui A .

Pe de altă parte, dacă

$$\Delta = AC - B^2 < 0,$$

atunci:

- i) pentru $A \neq 0$, $Q(1, 0) = A$ și $Q(B, -A) = A(AC - B^2)$;
- ii) pentru $A = 0$, $C \neq 0$ sau $A = C = 0$ se arată similar că aplicația Q ia atât valori strict pozitive, cât și strict negative.

Prin urmare avem următorul:

Corolar. Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ care are derivate parțiale de ordin doi continue, $c \in D$ un punct critic al său și

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(c) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c) \right)^2.$$

Atunci:

- a) dacă $\Delta > 0$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) > 0$, c este un punct de minim relativ al lui f ;
- b) dacă $\Delta > 0$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(c) < 0$, c este un punct de maxim relativ al lui f ;
- c) dacă $\Delta < 0$, c este un punct șa al lui f .

Observație. Matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_p}(c) \end{pmatrix},$$

numită Hessiana funcției f în punctul c , este cea care permite selectarea punctelor de extrem dintre punctele critice.

Notă istorică. *Otto Hesse* s-a născut în 1811 la Königsberg, Prusia (azi Kaliningrad, Rusia). Aici urmează gimnaziul și Universitatea unde studiază matematica și științele naturii, avându-i ca profesori pe Jacobi și Bessel. Sub îndrumarea lui Jacobi obține titlul de doctor în matematică, în 1840. În 1845 este numit profesor la Universitatea din Königsberg, în 1855 la Universitatea din Halle, în 1856 la Universitatea Ruprecht-Karls din Heidelberg, iar în 1868 la Politehnica din München. Printre studenții lui Hesse trebuie amintiți Gustav Kirchhoff, Rudolph Lipschitz și Ernst Schröder. A fost membru al Academiei de Științe din Berlin (din partea căreia a primit premiul Steiner), al Academiei de Științe din Göttingen, al Academiei Bavareze de Științe și al London Mathematical Society. A murit în 1874.

Extreme cu legături. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Până în prezent am discutat situația în care punctele de extrem ale unei funcții cu valori reale se află în interiorul domeniului de definiție $D \subseteq \mathbb{R}^p$. Nici una dintre considerațiile anterioare nu se aplică în cazul în care punctele de extrem se află pe frontiera domeniului de definiție al funcției. Dacă frontiera domeniului de definiție al funcției f poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcții φ , atunci problema se reduce la studiul extremelor funcției $f \circ \varphi$. Dacă S este o suprafață conținută în domeniul D de definiție al funcției f cu valori reale, suntem nevoiți, de multe ori, să determinăm extremele funcției $f|_S$. Spre pildă, pentru $D = \mathbb{R}^n$ și $f(x) = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, problema de mai sus revine la a determina punctele de pe S , care sunt cele mai depărtate sau apropiate de origine. Dacă S poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcții φ , atunci problema, ca mai sus, se reduce la studiul extremelor funcției $f \circ \varphi$. De multe ori însă, această abordare nu este cea mai nimerită. Ca atare, dorim să elaborăm o altă procedură pentru rezolvarea acestei probleme. Să presupunem că există o aplicație g , astfel ca $S = \{x \in D \mid g(x) = 0\} = g^{-1}(\{0\})$. Dorim să determinăm extremele relative ale funcției $f|_S$. Dacă f și g sunt de clasă \mathcal{C}^1 pe o vecinătate a unui punct c din D și $Dg(c) \neq 0$, atunci o condiție necesară ca c să fie un extrem relativ al lui $f|_S$ este ca $Dg(c)$ să fie un multiplu de $Df(c)$. În limbajul derivatelor parțiale, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(c)$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_p}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_p}(c)$. Practic dorim să determinăm c . λ , numit multiplicator Lagrange, este de asemenea o necunoscută. Cele p ecuații anterioare, împreună cu ecuația $g(c) = 0$, formează un sistem cu $p+1$ necunoscute, anume c_1, \dots, c_p și λ , unde $c = (c_1, \dots, c_p)$. Mai precis avem:

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange. Fie f și g de clasă \mathcal{C}^1 pe $D \subseteq \mathbb{R}^p$, cu valori în \mathbb{R} și $c \in \overset{\circ}{D}$, așa încât

$$g(c) = 0.$$

Să presupunem că există V_0 o vecinătate a lui c , astfel ca

$$f(x) \leq f(c),$$

(sau $f(x) \geq f(c)$) pentru orice $x \in V_0$ cu proprietatea suplimentară $g(x) = 0$.

Dacă $Dg(c) \neq 0$, atunci există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$Df(c) = \lambda Dg(c).$$

Demonstrație. Fie $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ dată de

$$F(x) = (f(x), g(x)),$$

pentru orice $x \in D$.

F este de clasă \mathcal{C}^1 și

$$DF(x)(w) = (Df(x)(w), Dg(x)(w)),$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$.

Mai mult,

$$x \in S = \{x \in D \mid g(x) = 0\}$$

dacă și numai dacă

$$F(x) = (f(x), 0).$$

Să presupunem că $g(c) = 0$ și că există V_0 o vecinătate a lui c , astfel ca $f(x) \leq f(c)$ pentru orice $x \in V_0$ cu proprietatea suplimentară $g(x) = 0$. (*)

Atunci $DF(c) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^2$ nu este surjectivă, căci altminteri, în conformitate cu Teorema de surjectivitate locală (vezi pagina 327), există $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ și $V' \subseteq V_0$, o vecinătate a lui c astfel ca pentru orice $(\zeta, 0)$ cu proprietatea

$$f(c) < \zeta < f(c) + \varepsilon,$$

există $u \in V'$, astfel ca

$$F(u) = (\zeta, 0),$$

i.e.

$$f(u) = \zeta \text{ și } g(u) = 0,$$

ceea ce contrazice (*).

Prin urmare, cum $DF(c) \neq 0$, deducem că $DF(c)(\mathbb{R}^p)$ este o dreaptă din \mathbb{R}^2 care trece prin origine.

Pe de altă parte, $Dg(c) \neq 0$, deci există $w_0 \in \mathbb{R}^p$, astfel încât

$$Dg(c)(w_0) \neq 0,$$

de unde

$$\begin{aligned} DF(c)(Dg(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)})) &= \\ &= (Df(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)}), Dg(c)(\frac{w_0}{Dg(c)(w_0)})) = (\lambda, 1), \end{aligned}$$

unde

$$\lambda = Df(c)(Dg(c)(w_0)).$$

Atunci $DF(c)(w) = (Df(c)(w), Dg(c)(w))$ și $(\lambda, 1)$ se găsesc pe o dreaptă ce trece prin origine, deci

$$Df(c)(w) = \lambda Dg(c)(w),$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, i.e.

$$Df(c) = \lambda Dg(c).$$

Observație. Condiția $Df(c)(w) = \lambda Dg(c)(w)$, pentru orice $w \in \mathbb{R}^p$, se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c)w_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c)w_p = \lambda[\frac{\partial g}{\partial x_1}(c)w_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_p}(c)w_p].$$

Alegând $w_i = e_i$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, obținem

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(c),$$

...

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(c) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_p}(c),$$

care împreună cu ecuația $g(c) = 0$, formează un sistem de $p+1$ necunoscute, anume c_1, \dots, c_p și λ , unde $c = (c_1, \dots, c_p)$.

Observație. Metoda lui Lagrange prezentată mai sus furnizează o condiție necesară, iar punctele obținute pot fi maxime relative, minime relative sau să nu fie extreme relative. În aplicații, stabilirea naturii acestor puncte se poate baza pe considerente geometrice sau fizice; în alte cazuri acest studiu poate conduce la analize foarte subtile.

Observație. Metoda lui Lagrange prezentată mai sus poate fi extinsă la cazurile în care există mai multe "constrângeri", introducând câte un multiplicator Lagrange suplimentar pentru fiecare constrângere suplimentară.

Observație. Mai multe amănunte privind această metodă se pot afla consultând articolul "Metoda multiplicatorilor lui Lagrange", *Gazeta Matematică, Seria pentru Informare Științifică și Perfecționare Metodică, Nr.4, 2004, p.319-339*.

Exerciții

1. (Generalizare a teoremei lui Rolle). Fie $f : \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x\| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, diferențiabilă în orice punct interior al domeniului de definiție și astfel ca $f(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, cu $\|x\| = 1$.

Să se arate că există un punct interior al domeniului de definiție, fie el c , astfel ca $Df(c) = 0$.

2. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, o mulțime deschisă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, derivabilă în punctul $x_0 \in D$, astfel încât $f'(x_0) \neq 0$. Să se arate că pentru orice vecinătate V , a lui x_0 , există $x \in V$, $x \neq x_0$ astfel încât $f(x) = f(x_0)$.

3. Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct șa.

4. Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^4 + y^4,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct minim relativ și că $\Delta(0, 0) = 0$.

Să se arate că originea este un punct maxim relativ și că $\Delta(0, 0) = 0$, pentru $-f$.

Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^4 - y^4,$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea este un punct staționar și că $\Delta(0, 0) = 0$.

5. Pentru funcția $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + cxy,$$

pentru orice $(x, y) \in D$, să se determine punctele critice și să se stabilească natura lor (de minim, de maxim, ș.a.).

6. Fie $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$.

Să se determine o aplicație liniară

$$F(x) = Ax + B, \quad x \in \mathbb{R},$$

astfel încât

$$\sum_{j=1}^n [F(x_j) - y_j]^2$$

să fie minimă.

F se numește "liniarizarea optimă" a celor n puncte date, în sensul celor mai mici pătrate.

7. Să se arate că o funcție $f : D = \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, unde D este mărginită, care este armonică (i.e. $\sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x) = 0$, pentru orice $x \in D$) nu are puncte de extrem relativ din interiorul lui D .

8. Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, să se arate că originea nu este un punct de extrem relativ, dar că f are ca punct de minim pe $(0, 0)$ de-a lungul oricărei drepte $x = \alpha t, y = \beta t, t \in \mathbb{R}$ care trece prin $(0, 0)$.

Acest exemplu arată că nu putem spera să rezolvăm problema determinării punctelor de extrem ale unei funcții de două variabile prin reducerea la cazul 1-dimensional.

9. Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile:

i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z,$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

ii) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

10. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2},$$

pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nu admite puncte de extrem global.

11. Să se determine extremele globale ale funcției $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRABILITATE

INTEGRALA RIEMANN-STIELTJES

**Noțiunea de funcție integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu
altă funcție**
**Proprietățile de liniaritate și de aditivitate de domeniu pentru
integrala Riemann-Stieltjes**
**Teorema de integrare prin părți pentru integrala
Riemann-Stieltjes**
**Clase de perechi de funcții (f, g) pentru care f este integrabilă
Riemann-Stieltjes în raport cu g**
Problema permutării limitei cu integrala
Teorema de reprezentare a lui Riesz

Originile integralei pot fi urmărite departe în trecut. Ele sunt legate de probleme geometrice ca definirea și determinarea lungimii unei curbe, a ariei unei figuri plane sau a unei suprafețe în spațiu, a volumului unui corp solid sau de problema determinării centrului de greutate al unei figuri plane sau al unui corp solid. Cercetări de acest fel urcă până în antichitatea greacă (Eudox din școala lui Platon, secolul al IV-lea î. C. și Arhimede, din școala din Alexandria, secolul al III-lea î. C.) și sunt cunoscute acum sub numele de metoda exhaustiei, adoptat în secolul al XVII-lea.

La o noțiune foarte importantă se ajunge de obicei din mai multe direcții, după cum și impactul ei se manifestă în mai multe domenii. Așa s-a întâmplat și cu integrala. Dacă itinerarul ei geometric începe încă în Antichitate, originea cinematică se cristalizează abia în secolul al XIV-lea, în legătură cu studiul mișcărilor neuniforme.

Newton impune primatul funcției primitive și legătura dintre primitivă și arie, pe baza unui algoritm deosebit de simplu.

Contrar lui Newton, G.W. Leibniz are ca punct de plecare, în problema ariilor, operația de limită a unei sume.

Abia frații Bernoulli introduc, pe la 1690, termenul de integrală, pe care-l adoptă și Leibniz și care corespunde la ceea ce numim azi primitivă.

Notăția $\int_a^b f(x)dx$ pe care o folosim azi pentru integrala definită a fost introdusă în 1816 de către Fourier.

Până la Cauchy, problema existenței integralei sau primitivei nu era distinctă de problema evaluării lor. ... (Cauchy) obține prima demonstrație a existenței primitivei pentru orice funcție continuă.

În 1845 un nou pas important în clarificarea ideii de integrală este realizat de Bernhard Riemann Riemann este primul care încearcă să definească integrala pentru o funcție nesupusă a priori nici unei restricții.

Solomon Marcus, Șocul matematicii, Editura Albatros, București, 1987, paginile 264-265, 267-268 și 269-270.

If we have waited this long before defining integration, it is because we have not needed a careful definition. For more than a hundred years, it was enough to define integration as the inverse process to differentiation. As we saw in the last section, this is no longer sufficient when we start using Fourier series. We need a broader and clearer definition. Fourier's solution, to define the definite integral in terms of area, raises the question: what do we mean by "area"? As the nineteenth century progressed, it became increasingly evident that the right way to define area was in terms of integration. If we are to avoid circular reasoning, then we must look elsewhere for our definition.

It was Cauchy who first proposed the modern solution to this problem. He defined the integral as the limit of approximating sums. He was first to unlink the definitions of the integral and derivative. We have seen that Archimedes calculated areas by using approximating sums. Leibniz and his successors used these sums to approximate integrals they could not evaluate precisely. But these were approximation techniques, not definitions.

Part of the reason that no one used this definition before Cauchy is that it is ungainly. Following Cauchy, we shall assume that we are working with a continuous function f on a closed and bounded interval $[a, b]$. We choose a positive integer n and an arbitrary partition of $[a, b]$ into n subintervals: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. These subintervals do not have to be of equal length. We form a sum that approximates the value of the definite integral of f from a to b : $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1})$ Cauchy now defines the value of the definite integral to be the limit of all such sums as the lengths of the subintervals approach zero.

It is significant that he does not merely take the limit as n approaches infinity. ... increasing only the number of subintervals is not enough to give us convergence to the desired value.

A more useful definition of integration was given by Bernhard Riemann in

"Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe". ... this was written after the summer of 1852 when Riemann had discussed questions of Fourier series with Dirichlet. Its purpose was nothing less than to find necessary and sufficient conditions for a function to have a representation as a trigonometric series. Riemann never published it, probably because it raises many new questions that he was hoping to answer. It appeared in 1867, after his death. ... Cauchy's definition was adequate for proving that any bounded continuous function is integrable. It was also sufficient for a demonstration that any bounded piecewise continuous function is integrable. Riemann wished to consider even more general functions, functions with infinitely many discontinuities within any finite interval. His definition is very similar to Cauchy's. Like Cauchy, he uses approximating sums: $\sum_{j=1}^n f(x_{j-1}^*)(x_j - x_{j-1})$. Unlike Cauchy who evaluated the function f at the left-hand endpoint of each interval, Riemann allows approximating sums in which x_{j-1}^* can be any point in the interval $[x_{j-1}, x_j]$. Because of this extra freedom, it appears more difficult to guarantee convergence of these series. In fact, Riemann's definition is equivalent to Cauchy's. Cauchy wanted to be able to prove that any continuous function is integrable. Riemann was interested in seeing how discontinuous a function could be and still remain integrable. ... What Riemann gains in allowing x_{j-1}^* to take on any value in $[x_{j-1}, x_j]$ is greater flexibility. In particular, it enables him to establish necessary and sufficient conditions for the existence of the integral.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 237-238 și 250-251.

Noțiunea de funcție integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu altă funcție

Notă istorică. *Bernhard Riemann* (1826-1866) a fost unul dintre matematicienii de frunte ai secolului al XIX-lea. În scurta sa carieră, el a introdus idei de o importanță fundamentală în analiza complexă, analiza reală, geometria diferențială, teoria numerelor și alte domenii ale matematicii. Cercetările sale de geometrie diferențială au constituit baza matematică pentru teoria generală a relativității.

Numele lui Riemann este legat de (probabil) cea mai importantă conjec-tură nedemonstrată încă, a matematicii zilelor noastre, și anume ipoteza lui Riemann, care este de o importanță fundamentală pentru studiul distribuției numerelor prime.

Riemann s-a născut în 1826 în ținutul Hanovrei, mai târziu parte din Germania. Încă de la o vârstă fragedă el își manifestă interesul pentru istorie și matematică, fiind încurajat de către familia sa în acest sens. La vârsta de 14 ani intră la gimnaziul din Hanovra, iar doi ani mai târziu este transferat la gimnaziul din Lüneburg, unde îi este descoperit remarcabilul talent matematic. Schmalfuss, directorul gimnaziului, îi dă lui Riemann o carte de teoria numerelor scrisă de Legendre. Șase zile mai târziu, Riemann îi înapoiază cartea de 859 pagini spunând: "Este o carte minunată! Am terminat-o." Și o terminase. În 1846, Riemann se înscrie la Universitatea Göttingen. Conform dorințelor tatălui său, începe facultatea de teologie, dar se transferă curând la facultatea de filosofie pentru a studia științele și matematica.

Cu toate că Gauss se afla și el la Universitatea din Göttingen în această perioadă, probabil că nu a avut nici un contact personal cu Riemann. Abilitatea lui Riemann i-a atras însă atenția altui matematician de la Göttingen, Moritz Stern. După un an, Riemann se transferă la Universitatea din Berlin, unde poate beneficia de îndrumările lui Jacobi, Steiner, Dirichlet și Eisenstein. Dirichlet a fost cel care l-a influențat cel mai mult pe Riemann și care avea să devină colaboratorul său. În 1850, Riemann se întoarce la Göttingen, unde își va petrece tot restul carierei.

Dizertația lui Riemann, alcătuită sub supravegherea lui Gauss, în 1851, are ca subiect fundamentarea analizei complexe.

Următorul pas în cariera academică a lui Riemann este calificarea ca Privatdozent (lector). Pentru aceasta, el trebuia să prezinte un Habilitationsschrift (eseu) și un Habilitationsvortrag (prelegere). Ambele s-au dovedit a fi opere matematice însemnate. Pentru Habilitationsschrift, Riemann a ales ca subiect seriile Fourier, prezentând eseul complet în anul 1853. Cu toate că seriile trigonometrice fuseseră îndelung folosite în astronomie, problema găsirii soluțiilor ecuației undelor, care pot fi reprezentate prin astfel de serii, a constituit subiectul unor largi dezbateri în secolul al XVIII-lea. Problema de bază era lipsa unei fundamentări a Analizei Matematice. Fourier făcuse în mod extensiv uz de seriile trigonometrice în rezolvarea ecuației căldurii, dar a făcut foarte puține pentru a rezolva aspectele fundamentale. Eseul lui Riemann a constituit un considerabil progres în aceasta problemă, în primul rând prin aceea că a dat primul criteriu de integrabilitate a unei funcții, și prin obținerea unei condiții necesare pentru ca o funcție integrabilă Riemann să poată fi reprezentată printr-o serie Fourier.

Pentru Habilitationsvortrag-ul său, Riemann a propus trei teme, și, contrar așteptărilor sale, Gauss a ales-o pe cea de geometrie. Prelegerea lui

Riemann "Despre falsele ipoteze aflate la baza geometriei" a fost susținută pe 10 iunie 1854. Această operă extraordinară introduce (ceea ce acum se numește) suprafața Riemann n -dimensională și tensorul său de curbura. Rezultatele sale sunt folosite, șaiszeci de ani mai târziu, în teoria generală a relativității a lui Einstein. Probabil că singura persoană din audiență care aprecia adâncimea operei lui Riemann era Gauss, care făcuse muncă de pionierat în geometria diferențială. Un raport al prelegerii lui Riemann nu a fost publicat decât în anul 1868, după moartea sa.

Cu toate că Privatdozent-ul putea colecta taxe de la studenți, postul nu era prevăzut cu salariu. Cu ajutorul lui Dirichlet, Riemann obține un modest post renumerat. El nu devine profesor asistent decât în anul 1857, an în care își publică cercetările sale legate de funcțiile abeliene. Funcțiile abeliene fuseseră studiate de către Abel și Jacobi; ele sunt o generalizare a funcțiilor eliptice. Riemann dezvoltă o teorie geometrică care rezolvă mai multe probleme remarcabile din acest domeniu. Opera sa îl recomandă pe Riemann ca pe un mare matematician, dar nu fără a-i fi controversat acest titlu. El folosește în mod extensiv, fără demonstrație, un principiu variațional, numit principiul lui Dirichlet. Weierstrass avea îndoielile sale în legătură cu acest principiu, care, după moartea lui Riemann, cade în dizgrație. Această stare de fapt a avut însă consecințe fructuoase. Mai mulți matematicieni au găsit cu succes demonstrații ale rezultatelor lui Riemann fără a folosi principiul lui Dirichlet, iar principiului în sine i-a fost dată o demonstrație riguroasă, în anul 1899, de către Hilbert.

În 1859, Dirichlet, care era succesor la catedra lui Gauss din 1855, moare în urma unei boli grave. Riemann este numit în locul său. În același an, el este ales membru corespondent al Academiei de Științe din Berlin. Ca nou membru, lui Riemann i se cere să trimită Academiei un raport al activității sale recente. Raportul trimis de Riemann, numit "Despre numărul numerelor prime mai mici decât un număr dat", este de o importanță fundamentală în teoria numerelor. Riemann arată că diverse rezultate legate de distribuția numerelor prime sunt strâns legate de proprietățile analitice ale funcției zeta. Unele dintre rezultatele sale au fost stabilite în mod riguros de către Hadamard și Vallée-Poussin în 1896, însă celebra sa conjectură a rămas nedemonstrată până în prezent.

Notă istorică. *Thomas Jan Stieltjes* s-a născut în 1856 în Olanda. Tatăl său era un vestit inginer de construcții civile (printre altele, el este cel care a construit portul din Rotterdam), doctor al Universității din Leiden. Stieltjes

și-a început studiile la Politehnica Delft în 1873. Aici își petrece mult timp în bibliotecă citind operele lui Gauss și Jacobi, fapt care-l determină să negligeze cursurile și ca atare să nu poată promova examenele. În 1877 devine asistent la observatorul astronomic de la Leiden. În urma unei corespondențe cu Hermite, începe să-și dedice tot mai mult timp cercetării matematice. În 1885 este ales membru al Academiei Regale de Științe din Amsterdam, iar în 1866 primește titlul de doctor în matematici. În același an este numit profesor la Universitatea din Toulouse. Este foarte cunoscut în special datorită lucrărilor sale privind fracțiile continue. A murit în 1895.

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **mărginite** (această ipoteză se va menține, fără a mai fi menționată explicit, în toată această secțiune).

O partiție (sau o diviziune) a lui $[a, b]$ este o familie finită de intervale închise, care au în comun cel mult un punct și a căror reuniune este $[a, b]$.

De obicei, o partiție P a lui $[a, b]$ este descrisă prin specificarea unei mulțimi finite de numere reale (x_0, x_1, \dots, x_n) astfel ca

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

iar intervale sunt $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$.

Punctele x_0, x_1, \dots, x_n se numesc punctele diviziunii.

De multe ori termenul de partiție desemnează atât familia de intervale, cât și punctele partiției, deci putem scrie

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Pentru două partiții P și Q ale lui $[a, b]$, spunem că Q este o rafinare a lui P dacă orice interval al lui Q este conținut într-un interval al lui P , adică, echivalent, orice punct al lui P este un punct al lui Q .

Scriem, în acest caz,

$$P \subseteq Q.$$

Definiție. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. O sumă Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g , corespunzătoare partiției $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ a lui $[a, b]$, are forma

$$S(P; f, g) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})),$$

unde $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Observație. În cazul în care $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, obținem suma $\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1})$ care poartă numele de sumă Riemann și care poate fi interpretată ca suma ariilor dreptunghiurilor cu baza $[x_{k-1}, x_k]$ și înălțimea $f(\zeta_k)$. Prin urmare, pentru partiții foarte fine ale lui $[a, b]$ este de așteptat ca suma Riemann să genereze o aproximare a "ariei de sub graficul lui f ". Dacă $g(x)$ reprezintă "masa" intervalului $[a, x]$, atunci $g(x_k) - g(x_{k-1})$ reprezintă "masa" intervalului $[x_{k-1}, x_k]$. Așadar, considerând g arbitrară, putem considera alte tipuri de "magnitudini" (altele decât lungimea) ale unui interval.

Observație. Să remarcăm că suma $S(P; f, g) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(g(x_k) - g(x_{k-1}))$ depinde de alegerea punctelor intermediare ζ_k . Ar fi poate potrivit să introducem o notație care să pună în evidență acest fapt. Nu vom proceda astfel deoarece dacă considerăm partiția $Q = (x_0, \zeta_1, x_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, x_n)$ și suma $S(Q; f, g)$, unde punctele intermediare sunt, alternativ, capetele din dreapta și din stânga ale intervalelor, avem $S(Q; f, g) = S(P; f, g)$, deci putem presupune totdeauna că partiția considerată are un număr par de intervale, iar punctele intermediare sunt alternativ, capetele din dreapta și stânga ale intervalelor.

Definiție. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă există un număr real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există o partiție P_ε a lui $[a, b]$ astfel ca pentru orice partiție P , care este o rafinare a lui P_ε , și orice sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ corespunzătoare lui P să avem

$$|S(P; f, g) - I| < \varepsilon.$$

În acest caz, I este unic determinat, se numește integrala Riemann-Stieltjes a lui f în raport cu g și vom nota

$$I = \int_a^b f dg = \int_a^b f(t) dg(t).$$

În cazul special în care $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, spunem că f este integrabilă Riemann.

Observație. Pentru o mai bună înțelegere a definiției de mai sus, cât și pentru legătura ei cu noțiunea clasică de integrabilitate Riemann, este necesară rezolvarea exercițiilor 1, 2 și 3 din această secțiune.

Exemple

1. Pentru $g, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ 1, & x \in (a, b] \end{cases},$$

f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă și numai dacă f este continuă în a , caz în care valoarea integralei este $f(a)$.

2. Funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

nu este integrabilă Riemann.

Pentru studiul fenomenelor mecanice care sunt modelate de integrala Riemann-Stieltjes se poate consulta **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București* (cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București) la paginile 23-33.

Următorul rezultat, analog criteriului lui Cauchy pentru șiruri, se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei de permutare a limitei cu integrala (vezi pagina 366) și a Teoremei de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue (vezi pagina 363).

Criteriul lui Cauchy pentru integrabilitatea Riemann-Stieltjes.

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ există Q_ε , o partiție a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice partiții P și Q care sunt rafinări ale lui Q_ε și orice sume Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$ și $S(Q; f, g)$ corespunzătoare lui P , respectiv Q , avem

$$|S(P; f, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon.$$

Proprietățile de liniaritate și de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann-Stieltjes

Următorul rezultat exprimă proprietățile de liniaritate ale integralei Riemann-Stieltjes.

Teoremă. a) Fie $f_1, f_2, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f_1, f_2 integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Atunci $\alpha f_1 + \beta f_2$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g și

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) dg = \alpha \int_a^b f_1 dg + \beta \int_a^b f_2 dg.$$

b) Fie $f, g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g_1 și g_2 și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $\alpha g_1 + \beta g_2$ și

$$\int_a^b f d(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int_a^b f dg_1 + \beta \int_a^b f dg_2.$$

Următorul rezultat, care exprimă aditivitatea de domeniu a integralei Riemann-Stieltjes, se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei de derivare pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 387).

Teorema de aditivitate de domeniu pentru integrala Riemann-Stieltjes.

a) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$ astfel ca $f|_{[a, c]}$ să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g|_{[a, c]}$ și $f|_{[c, b]}$ să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g|_{[c, b]}$.

Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g și

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

b) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $c \in (a, b)$ astfel ca f să fie integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .

Atunci $f|_{[a,c]}$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g|_{[a,c]}$, $f|_{[c,b]}$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu $g|_{[c,b]}$ și

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes

Teorema care urmează surprinde un fenomen caracteristic integrabilității Riemann-Stieltjes, fenomen care nu apare la integrala Riemann. Ea se va folosi pentru deducerea Corolarului de la pagina 365, Teoremei de integrare prin părți pentru integrala Riemann (vezi pagina 389) și a celei de a doua teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 389).

Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes.

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g dacă și numai dacă g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f , caz în care avem

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Demonstrație. Să presupunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o partiție P_ε a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice partiție Q , care este o rafinare a lui P_ε și orice sumă Riemann-Stieltjes $S(Q; f, g)$ corespunzătoare lui P , avem

$$\left| S(Q; f, g) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon. \quad (*)$$

Fie acum P o rafinare a lui P_ε și să considerăm suma Riemann-Stieltjes $S(P; g, f)$ dată de

$$S(P; g, f) = \sum_{k=1}^n g(\zeta_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})),$$

unde $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ și $\zeta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fie $Q = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n})$ partiția lui $[a, b]$ descrisă astfel:

$$y_{2k} = x_k$$

și

$$y_{2k-1} = \zeta_k,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Să observăm că Q este o rafinare a lui P_ε .

Adunând și scăzând termenii $f(y_{2k})g(y_{2k})$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, obținem

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=1}^{2n} f(\eta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1})),$$

unde punctele intermediare η_k sunt din mulțimea $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, adică

$$S(P; g, f) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - S(Q; f, g).$$

Prin urmare, din (*), avem

$$\left| S(P; g, f) - \{f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f dg\} \right| < \varepsilon,$$

pentru orice partiție P , care este o rafinare a lui P_ε , ceea ce arată că g este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f și

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a). \quad \square$$

Clase de perechi de funcții (f, g) pentru care f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g

Rezultatul următor, care se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei lui Riesz (vezi pagina 373), a celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 389), Teoremei de schimbare de variabilă (vezi pagina 390), precum și a Teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi

pagina 400), ne furnizează o clasă de perechi de funcții f și g pentru care f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .

Teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă și g este monotonă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .

Demonstrație. Putem presupune, fără pierderea generalității, că g este crescătoare.

Deoarece, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), f este uniform continuă, deducem că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in [a, b]$, cu proprietatea că

$$|x - y| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Fie $P_\varepsilon = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ o partiție a lui $[a, b]$, astfel ca

$$\sup_{k \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_k - x_{k-1}) < \delta_\varepsilon,$$

iar $Q = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ o rafinare a sa.

Atunci

$$S(Q; f, g) = \sum_{k=1}^m f(\eta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1}))$$

și

$$S(P_\varepsilon; f, g) = \sum_{k=1}^m f(\zeta_k)(g(y_k) - g(y_{k-1}))$$

unde ζ_k -urile se pot repeta și nu aparțin neapărat intervalului $[y_{k-1}, y_k]$.

Oricum, punctele ζ_k și η_k aparțin unui același interval $[x_{h-1}, x_h]$, deci, conform cu alegerea lui P_ε , avem

$$|f(\zeta_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon.$$

Drept urmare avem

$$|S(P_\varepsilon; f, g) - S(Q; f, g)| = \left| \sum_{k=1}^m (f(\zeta_k) - f(\eta_k))(g(y_k) - g(y_{k-1})) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} \leq \sum_{k=1}^m |f(\zeta_k) - f(\eta_k)| |g(y_k) - g(y_{k-1})| &\leq \varepsilon \sum_{k=1}^m |g(y_k) - g(y_{k-1})| = \\ &= \varepsilon (g(b) - g(a)). \end{aligned}$$

Atunci, pentru P și Q rafinări ale lui P_ε , avem

$$\begin{aligned} |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| &\leq \\ &\leq |S(P; f, g) - S(P_\varepsilon; f, g)| + |S(P_\varepsilon; f, g) - S(Q; f, g)| \leq \\ &\leq 2\varepsilon (g(b) - g(a)), \end{aligned}$$

ceea ce, în conformitate cu criteriul lui Cauchy (vezi pagina 360), implică faptul că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g . \square

Având în vedere Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 362), obținem:

Corolar. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este monotonă și g este continuă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .*

Problema permutării limitei cu integrala

Studiem în continuare problema permutării limitei cu integrala.

Pentru început avem nevoie de următoarea leamnă (care se folosește și în demonstrația Primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes - vezi pagina 386).

Lemă. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât f este continuă și g este crescătoare. Atunci avem estimarea*

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg \leq \|f\| (g(b) - g(a)),$$

unde $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Dacă

$$m \leq f(x) \leq M,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, atunci

$$m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f dg \leq M(g(b) - g(a)).$$

Observație. Dacă f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu funcția monotonă g , atunci $|f|$ este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g , iar inegalitățile de mai sus sunt valabile.

Să presupunem acum că $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este crescătoare, iar $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, este un șir de funcții integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g , care converge simplu către funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Suntem interesați în a determina condiții suficiente pentru ca

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

Considerând $g(x) = x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, și

$$f(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x - \frac{2}{n}), & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases},$$

vom vedea că relația de mai sus nu este valabilă, prin urmare trebuie impuse condiții suplimentare.

Un prim rezultat în această direcție, care va fi utilizat în cadrul Teoremei de continuitate în raport cu parametrul pentru integrale improprii (infinite) cu parametru (vezi pagina 436), este dat de următoarea teoremă:

Teorema de permutare a limitei cu integrala. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții integrabile Riemann-Stieltjes în raport cu g , care converge uniform către funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g și

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg.$$

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\|f_{n_\varepsilon} - f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Conform criteriului lui Cauchy (vezi pagina 360), putem considera o partiție P_ε a lui $[a, b]$, astfel ca pentru orice rafinări P și Q ale sale, să avem

$$|S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f_{n_\varepsilon}, g)| \leq \varepsilon.$$

Alegând aceleași puncte intermediare pentru f_{n_ε} și f , avem

$$\begin{aligned} & |S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(P; f, g)| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^m \|f_{n_\varepsilon} - f\| (g(x_k) - g(x_{k-1})) < \varepsilon(g(b) - g(a)), \end{aligned}$$

unde $P = (x_0, x_1, \dots, x_m)$.

Similar

$$|S(Q; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f, g)| < \varepsilon(g(b) - g(a)).$$

Prin urmare, pentru P și Q rafinări ale lui P_ε ,

$$\begin{aligned} & |S(P; f, g) - S(Q; f, g)| \leq \\ & \leq |S(P; f, g) - S(P; f_{n_\varepsilon}, g)| + |S(P; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f_{n_\varepsilon}, g)| + |S(Q; f_{n_\varepsilon}, g) - S(Q; f, g)| \leq \\ & \leq \varepsilon(1 + 2(g(b) - g(a))), \end{aligned}$$

ceea ce arată, în conformitate cu criteriul lui Cauchy, că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .

Pentru a demonstra că

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dg = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg,$$

să observăm că, în acord cu lema de mai sus, avem

$$\left| \int_a^b f_n dg - \int_a^b f dg \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) dg \right| \leq \|f_n - f\| (g(b) - g(a)),$$

de unde, deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0,$$

rezultă concluzia. \square

Observație. *Ipoteza relativă la convergența uniformă a șirului $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este restrictivă. Există rezultate de același tip, în care restricțiile asupra modului de convergență sunt relaxate, dar în care se cere ca funcția limită să fie integrabilă (vezi cele două teoreme de mai jos).*

Teorema convergenței mărginite pentru integrala Riemann. *Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții integrabile Riemann, cu proprietatea că există $M \in \mathbb{R}$, astfel încât*

$$\|f_n\| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplu către funcția integrabilă Riemann $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, atunci

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Pentru demonstrația teoremei de mai sus avem nevoie de următoarea leamnă care arată că o funcție cu valori pozitive, a cărei integrală este strict pozitivă, este mai mare decât o anumită constantă pe o mulțime "suficient de mare"

Lemă. *Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ o funcție integrabilă cu proprietatea că*

$$\alpha = \int_0^1 f > 0.$$

Atunci mulțimea

$$E = \{x \mid x \in [0, 1] \text{ și } f(x) \geq \frac{\alpha}{3}\},$$

conține un număr finit de intervale închise cu suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3\|f\|}$, unde $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} f(x)$.

Demonstrație. Fie P o partiție a lui $[0, 1]$ astfel ca

$$|S(P, f) - \alpha| < \frac{\alpha}{3},$$

pentru orice sumă Riemann $S(P, f)$.

Atunci

$$\frac{2\alpha}{3} < S(P, f).$$

Vom alege punctele intermediare din suma Riemann $S(P, f)$ astfel ca, de câte ori este posibil, să avem

$$f(\zeta_k) < \frac{\alpha}{3}.$$

Dacă $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, atunci

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum'' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}),$$

unde în \sum' vom considera termenii pentru care $[x_{k-1}, x_k] \subseteq E$, iar în \sum'' vom considera termenii pentru care $[x_{k-1}, x_k] \not\subseteq E$.

Notând cu L suma lungimilor intervalelor care sunt implicate în \sum' , obținem

$$\frac{2\alpha}{3} < S(P, f) \leq \sum' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum'' f(\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) < \|f\| L + \frac{\alpha}{3},$$

de unde

$$\frac{\alpha}{3\|f\|} < L,$$

adică concluzia. \square

Suntem acum în măsură să prezentăm:

Demonstrația teoremei convergenței mărginite. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că

$$[a, b] = [0, 1],$$

$$f_n \geq 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, și că

$$f = 0$$

(ultimele două presupuneri se pot realiza printr-o eventuală înlocuire a lui f_n cu $|f_n - f|$, folosind exercițiul 7 din această secțiune).

Dorim să arătăm că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = 0.$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \neq 0$.

Atunci există un subsir $(\int_a^b f_{n_k})_k$ al lui $(\int_a^b f_n)_n$ și $\alpha > 0$ astfel încât

$$\int_a^b f_{n_k} > \alpha,$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

În conformitate cu lema de mai sus și cu ipoteza, deducem că, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, mulțimea

$$E_k = \{x \mid x \in [0, 1] \text{ și } f_{n_k}(x) \geq \frac{\alpha}{3}\}$$

conține un număr finit de intervale cu suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3M}$.

Prin urmare, există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită, fapt care intră în contradicție cu ipoteza care ne asigură că $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = 0$.

Pentru a încheia demonstrația urmează să justificăm existența punctului $x_0 \in [0, 1]$ cu proprietatea că $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită.

Fără pierderea generalității, putem presupune că mulțimile E_k reprezintă reuniunea unui număr finit de intervale având suma lungimilor mai mare decât $\frac{\alpha}{3M}$.

Este ușor de văzut că

$$\{x \in [0, 1] \mid \text{există un număr infinit de } k \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } x \in E_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Să presupunem, prin reducere la absurd, că nu există $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $\{k \in \mathbb{N} \mid x_0 \in E_k\}$ este infinită.

Atunci

$$\{x \in [0, 1] \mid \text{există un număr infinit de } k \in \mathbb{N} \text{ astfel ca } x \in E_k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \emptyset,$$

deci, cu notațiile

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$$

și

$$G_n = [0, 1] - F_n,$$

avem

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset,$$

i.e.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = [0, 1].$$

Deoarece

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \dots,$$

avem

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq G_{n+1} \subseteq \dots,$$

unde G_n reprezintă o reuniune de intervale având suma lungimilor mai mică decât $1 - \frac{\alpha}{3M}$.

Atunci, cu convenția $G_0 = \emptyset$, obținem următoarea contradicție:

$$\begin{aligned} 1 &= l([0, 1]) = l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n - G_{n-1})\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} l(G_n - G_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l(G_k - G_{k-1}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (l(G_k) - l(G_{k-1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} l(G_n) \leq 1 - \frac{\alpha}{3M}. \end{aligned}$$

Teorema convergenței monotone pentru integrala Riemann. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, un șir monoton de funcții integrabile Riemann, care converge simplu către funcția integrabilă Riemann $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Atunci

$$\int_a^b f = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Demonstrație. Putem presupune, fără pierderea generalității, că

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \dots \leq f(x),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Funcțiile

$$g_n = f - f_n \geq 0$$

sunt integrabile Riemann și avem

$$\|g_n\| \leq \|f_1\| + \|f\|,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

În continuare demonstrația decurge precum cea din a teoremei de convergență dominată.

Observație. Vom reveni asupra problematicii expuse în cadrul teoremelor de mai sus după ce vom discuta despre integrale improprii (vezi paginile 441 și 443). Problema permutării limitei cu integrala se va studia, într-un cadru mult mai larg, în cadrul cursului de Teoria Măsurii.

Teorema de reprezentare a lui Riesz

Prezentăm acum un rezultat central al analizei matematice, anume Teorema de reprezentare a lui Riesz, în formularea căreia apare noțiunea de integrală Riemann-Stieltjes.

O formă mai generală a acestei teoreme se va studia în cadrul cursului de Teoria Măsurii.

Teorema de reprezentare a lui Riesz se va folosi în cadrul cursului de Analiză Funcțională (vezi, spre exemplu, *Romulus Cristescu, Analiză Funcțională*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, teorema 2.2.4, pagina 114).

Fie

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este continuă}\}.$$

Pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$, vom considera

$$\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Definiție. O funcțională liniară pe $\mathcal{C}([a, b])$ este o funcție $G : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel ca

$$G(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha G(f_1) + \beta G(f_2),$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și orice $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a, b])$.

G se numește pozitivă dacă $G(f) \geq 0$ pentru orice $f \geq 0$.

G se numește mărginită dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$|G(f)| \leq M \|f\|,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Lemă. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ crescătoare și $G : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$G(f) = \int_a^b f dg,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Atunci G este o funcțională liniară, pozitivă și mărginită.

Teorema următoare, datorată matematicianului ungur **Riesz**, într-o variantă mai generală, este o teoremă centrală a analizei funcționale.

Teorema de reprezentare a lui Riesz. Fie $G : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională liniară, pozitivă și mărginită.

Atunci există o funcție crescătoare $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$G(f) = \int_a^b f dg,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Demonstrație. Pentru început vom construi funcția crescătoare g .

Cum $G : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcțională liniară mărginită, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$|G(f)| \leq M \|f\|,$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Prin urmare, cum G este liniară și pozitivă, obținem că

$$0 \leq G(f_1) \leq G(f_2) \leq M \|f_2\|,$$

pentru orice $f_1, f_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ cu proprietatea că

$$0 \leq f_1 \leq f_2.$$

Pentru $t \in (a, b)$ și $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare, definim $\varphi_{t,n} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi_{t,n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, t] \\ 1 - n(x - t), & x \in (t, t + \frac{1}{n}] \\ 0, & x \in (t + \frac{1}{n}, b] \end{cases}.$$

Se observă că

$$0 \leq \varphi_{t,m} \leq \varphi_{t,n} \leq 1,$$

pentru orice $t \in (a, b)$ și orice $m, n \in \mathbb{N}$ astfel ca $n \leq m$.

Aceasta arată că șirul de numere reale $(G(\varphi_{t,n}))_n$ este descrescător și mărginit, și, prin urmare, conform Teoremei convergenței monotone (vezi pagina 138), el este convergent

Putem astfel defini funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel:

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} G(\varphi_{t,n}),$$

unde $t \in (a, b)$.

Deoarece

$$0 \leq \varphi_{t,n} \leq \varphi_{s,n} \leq 1,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $t, s \in (a, b)$ astfel ca $t \leq s$, prin trecere la limită după n tinzând la ∞ , obținem

$$g(t) \leq g(s),$$

pentru orice $t, s \in (a, b)$.

Definind

$$g(a) = 0$$

și

$$g(b) = G(\mathbf{1}),$$

unde prin $\mathbf{1}$ înțelegem funcția constant egală cu 1, am definit o funcție crescătoare g , având domeniul $[a, b]$.

Fie acum $f \in \mathcal{C}([a, b])$.

Atunci, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), funcția f este uniform continuă și prin urmare pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x, y \in [a, b]$, astfel ca

$$|x - y| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Deoarece, conform Teoremei de integrabilitate a funcțiilor continue (vezi pagina 364), f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g , pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o partiție P_ε cu proprietatea că

$$\left| \int_a^b f dg - S(Q; f, g) \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

pentru orice rafinare Q a lui P_ε și orice sumă Riemann-Stieltjes $S(Q; f, g)$.

Fie $P = (t_0, t_1, \dots, t_m)$ o rafinare a lui P_ε și $n \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{2}{n} < \min\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_m - t_{m-1}\} \leq \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_m - t_{m-1}\} < \frac{\delta_\varepsilon}{2}.$$

Deoarece, pentru orice $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, șirul descrescător $(G(\varphi_{t_k, n}))_n$ are limita $g(t_k)$, putem presupune că n a fost ales de așa manieră încât

$$g(t_k) \leq G(\varphi_{t_k, n}) \leq g(t_k) + \frac{\varepsilon}{2m \|f\|}. \quad (2)$$

Vom considera funcția continuă $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f^*(x) = f(t_1)\varphi_{t_1, n}(x) + \sum_{k=2}^m f(t_k)(\varphi_{t_k, n}(x) - \varphi_{t_{k-1}, n}(x)),$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Un element $x \in [a, b]$ se află în maximum două dintre intervalele familiei $[t_0, t_1 + \frac{1}{n}], \dots, [t_{k-1}, t_k + \frac{1}{n}], \dots, [t_{m-1}, t_m]$ a căror reuniune este $[a, b]$.

Dacă x aparține unui unic interval din familia descrisă mai sus, atunci:

i)

$$x \in [t_0, t_1)$$

sau

ii) există $k \in \{2, \dots, m\}$ astfel ca

$$x \in (t_{k-1} + \frac{1}{n}, t_k].$$

În cazul i), avem

$$f^*(x) = f(t_1),$$

iar, în cazul ii),

$$f^*(x) = f(t_k),$$

deci

$$|f(x) - f^*(x)| < \varepsilon.$$

Dacă x se află în două intervale din familia descrisă mai sus, atunci există $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ astfel ca

$$x \in [t_k, t_k + \frac{1}{n}],$$

deci

$$f^*(x) = f(t_k)\varphi_{t_k,n}(x) + f(t_{k+1})(1 - \varphi_{t_k,n}(x)),$$

i.e.

$$f^*(x) = f(t_k)(1 - n(x - t_k)) + f(t_{k+1})n(x - t_k).$$

Deoarece

$$|x - t_k| < \delta_\varepsilon \text{ și } |x - t_{k+1}| < \delta_\varepsilon,$$

deducem că

$$|f(x) - f(t_k)| < \varepsilon \text{ și } |f(x) - f(t_{k+1})| < \varepsilon,$$

de unde

$$\begin{aligned} |f(x) - f^*(x)| &\leq |f(x) - f(t_k)| (1 - n(x - t_k)) + |f(x) - f(t_{k+1})| n(x - t_k) < \\ &< \varepsilon(1 - n(x - t_k) + n(x - t_k)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar

$$\|f - f^*\| \leq \varepsilon,$$

de unde

$$|G(f) - G(f^*)| \leq M\varepsilon. \quad (3)$$

Având în vedere (2), avem

$$\left| G(\varphi_{t_k, n}) - G(\varphi_{t_{k-1}, n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| < \frac{\varepsilon}{m \|f\|}, \quad (4)$$

pentru orice $k \in \{2, 3, \dots, m\}$.

Dar, folosind (2) și (4), obținem

$$\begin{aligned} & \left| G(f^*) - \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| = \\ &= \left| G(f(t_1)\varphi_{t_1, n} + \sum_{k=2}^m f(t_k)(\varphi_{t_k, n} - \varphi_{t_{k-1}, n})) - \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| = \\ &= \left| f(t_1)G(\varphi_{t_1, n}) - f(t_1)(g(t_1) - g(t_0)) + \sum_{k=2}^m f(t_k)(G(\varphi_{t_k, n}) - G(\varphi_{t_{k-1}, n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1}))) \right| \leq \\ & \leq |f(t_1)| |G(\varphi_{t_1, n}) - (g(t_1))| + \\ & + \sum_{k=2}^m |f(t_k)| |G(\varphi_{t_k, n}) - G(\varphi_{t_{k-1}, n}) - (g(t_k) - g(t_{k-1}))| \leq \\ & \leq \|f\| \left(\frac{\varepsilon}{2m \|f\|} + \sum_{k=2}^m \frac{\varepsilon}{m \|f\|} \right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ca atare, avem

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f dg - G(f^*) \right| \leq \left| \int_a^b f dg - \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| + \\ & + \left| \sum_{k=1}^m f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) - G(f^*) \right| < 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (5)$$

unde am folosit (1), $\sum_{k=1}^m f(t_k)(g(t_k) - g(t_{k-1}))$ fiind o sumă Riemann-Stieltjes

$S(P; f, g)$, iar P este o rafinare a lui P_ε .

Din (3) și (5), obținem

$$\left| \int_a^b f dg - G(f) \right| \leq \left| \int_a^b f dg - G(f^*) \right| + |G(f^*) - G(f)| \leq 2\varepsilon + M\varepsilon = (2 + M)\varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$, de unde

$$G(f) = \int_a^b f dg.$$

Observație. *Există o corespondență bijectivă între mulțimea funcționalelor liniare, pozitive și mărginite din $\mathcal{C}([a, b])$ în \mathbb{R} și funcțiile crescătoare din $[a, b]$ în \mathbb{R} , care se anulează în a și care sunt continue la dreapta în orice punct din (a, b) .*

Notă istorică. *Frigyes Riesz*, născut la Győr, Ungaria, în 1880, a studiat matematica la Budapesta (unde obține doctoratul în 1902), Göttingen și Zürich. După doi ani petrecuți în învățământul liceal, obține un post în învățământul universitar. Riesz a fost unul dintre fondatorii Analizei Funcționale. În 1907-1908 a descoperit vestita teoremă de reprezentare a funcționalelor liniare și continue. A introdus noțiunea de convergență slabă și a lucrat în teoria operatorilor. În 1911 este numit la Universitatea din Kolossvár (Cluj), care se mută la Szeged în 1920. Aici, în 1922, împreună cu Haar, înființează Institutul Matematic János Bolyai și revista *Acta Scientiarum Mathematicarum*, în care publică multe articole. În 1911 este numit la Universitatea din Budapesta. Celebra teoremă Riesz-Fischer (1907) este fundamentală în Analiza Fourier a spațiilor Hilbert și în mecanica cuantică. A contribuit de asemenea la teoria ergodică, teoria seriilor ortonormale și la topologie. Cartea sa, "Leçon's d'analyse fonctionnelle", scrisă împreună cu studentul său Szökefalvi-Nagy, este una dintre cele mai clare expuneri ale analizei funcționale scrise vreodată. A fost membru al Academiei Ungare și al Academiei Franceze de Științe, iar în 1949 a primit premiul Kossuth. A murit în 1956.

Exerciții

1. Pentru o partiție P , $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$, a lui $[a, b]$, definim norma lui P ca fiind

$$\|P\| = \sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} (x_j - x_{j-1}).$$

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Spunem că f este (*) integrabilă în raport cu g dacă există $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice partiție P a lui $[a, b]$, cu $\|P\| < \delta_\varepsilon$, și orice sumă Riemann-Stieltjes $S(P; f, g)$, avem

$$|S(P; f, g) - I| < \varepsilon.$$

Dacă există, I este unic, se numește (*) integrala lui f în raport cu g și se notează (*) $\int_a^b f dg$.

Să se arate că dacă f este (*) integrabilă în raport cu g , atunci f este integrabilă în raport cu g și

$$(*) \int_a^b f dg = \int_a^b f dg.$$

Observație. În multe manuale de Analiză Matematică se adoptă ca definiție a integrabilității Riemann-Stieltjes (*) integrabilitatea. Dezavantajul unei astfel de abordări este pus în evidență de exercițiul de mai jos.

2. Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Să se arate că o funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este (*) integrabilă în raport cu g dacă și numai dacă f este continuă în $\frac{1}{2}$, caz în care

$$(*) \int_a^b f dg = f(\frac{1}{2}).$$

Dacă $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, este dată de

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

atunci $h|_{[0, \frac{1}{2}]}$ este (*) integrabilă în raport cu $g|_{[0, \frac{1}{2}]}$, $h|_{[\frac{1}{2}, 1]}$ este (*) integrabilă în raport cu $g|_{[\frac{1}{2}, 1]}$, dar h nu este (*) integrabilă în raport cu g .

3. Pentru $g(x) = x$, pentru orice $x \in [a, b]$, să se arate că f este (*) integrabilă în raport cu g dacă și numai dacă f este integrabilă în raport cu g .

Exercițiul de mai sus punctează legătura dintre teoria integralei Riemann descrise mai sus și cea "clasică" pe care o schițăm mai jos (amănunțele se găsesc în **Analiză Matematică**, Vol. I, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București*, la paginile 366-384).

Definiție. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat.

Vom spune că funcția f admite primitive dacă există o funcție derivabilă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $F' = f$.

Funcția F se numește o primitivă a lui f și se notează cu $\int f$ sau cu $\int f(x)dx$.

Definiție. Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din \mathbb{R} .

Se numește diviziune a intervalului $[a, b]$ un sistem de puncte

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

din $[a, b]$, astfel încât

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

unde $n \in \mathbb{N}$.

Cea mai mare dintre lungimile intervalelor $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ se numește norma diviziunii Δ și se notează cu $\|\Delta\|$.

Așadar

$$\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$

Definiție. Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din \mathbb{R} și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Un sistem de n puncte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ cu proprietatea că

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,$$

pentru orice $i \in \overline{1, n}$, se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ .

Definiție. Fie $[a, b]$ un interval închis și mărginit din \mathbb{R} , o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și un sistem $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de n puncte intermediare asociat diviziunii Δ .

Se numește suma Riemann asociată funcției f , diviziunii Δ și punctelor intermediare $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ numărul real

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Acest număr va fi notat prin

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi).$$

Definiție. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se numește integrabilă Riemann dacă există un număr real I_f cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, $\delta_{\varepsilon} > 0$ astfel încât pentru orice diviziune

$$\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

a intervalului $[a, b]$ cu

$$\|\Delta\| < \delta_{\varepsilon}$$

și orice sistem $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de n puncte intermediare asociat diviziunii Δ , are loc inegalitatea

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi) - I_f| < \varepsilon.$$

Numărul real I_f se numește integrala Riemann sau integrala definită a funcției f pe intervalul $[a, b]$ și se notează

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teoremă (Formula Leibniz-Newton). Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann care admite primitive.

Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

unde F este o primitivă a lui f .

Propoziție. Dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci f este mărginită.

Teoremă. Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- 1) funcția f este integrabilă Riemann;
- 2) există un număr real I_f cu proprietatea că oricare ar fi șirul de diviziuni $\Delta_n = (x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n-1}^n, x_{k_n}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, ale intervalului $[a, b]$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0$ și oricare ar fi punctele intermediare $x_{i-1}^n \leq \xi_i^n \leq x_i^n$, $i \in \{1, 2, \dots, k_n\}$, șirul sumelor Riemann $(\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge către I_f .

Definiție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $\Delta = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$.

Pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fie

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

și

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Sumele

$$S_{\Delta} = S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

și

$$s_{\Delta} = s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

se numesc sumele Darboux ale funcției f corespunzătoare diviziunii Δ .

Mai precis, S_{Δ} se numește suma Darboux superioară, iar s_{Δ} se numește suma Darboux inferioară.

Se observă că

$$s_{\Delta} \leq S_{\Delta}.$$

Teoremă (Criteriul de integrabilitate Riemann al lui Darboux). O funcție mărginită $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă și numai

dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ , cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem

$$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon.$$

Definiție. Fie A o mulțime din \mathbb{R} . Spunem că mulțimea A este neglijabilă Lebesgue (sau de măsură Lebesgue nulă) dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există un șir $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de intervale deschise și mărginite cu proprietatea că

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

și

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon,$$

unde prin $|I_n|$ înțelegem lungimea intervalului I_n .

Remarcă. Orice mulțime numărabilă este neglijabilă.

Teoremă (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann). O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann dacă și numai dacă funcția f este mărginită și mulțimea punctelor în care f este discontinuă este neglijabilă (de măsură Lebesgue nulă).

4. Să se arate că o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că mulțimea $A_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ este finită, pentru orice $\varepsilon > 0$, este integrabilă și $\int_a^b f(x) dx = 0$.

5. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită cu proprietatea că, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este integrabilă.

6. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare. Să se arate că $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă în raport cu g dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există P_ε o partiție a lui $[a, b]$ astfel ca pentru orice rafinare $P = (x_1, \dots, x_n)$ a lui P_ε și orice $\zeta_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, avem

$$\sum_{i=1}^n |f(\zeta_i) - f(\eta_i)| \{g(x_i) - g(x_{i-1})\} < \varepsilon.$$

7. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă în raport cu g . Să se arate că $|f|$ este integrabilă în raport cu g .

8. Să se dea exemplu de o funcție f , care nu este integrabilă Riemann, dar pentru care $|f|$ este integrabilă Riemann.

9. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă în raport cu g . Să se arate că f^2 este integrabilă în raport cu g .

10. Să se dea exemplu de o funcție f care nu este integrabilă Riemann, dar pentru care f^2 este integrabilă Riemann.

11. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție crescătoare și $f, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile în raport cu g . Să se arate că fh este integrabilă în raport cu g .

12. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann, astfel ca $f(x) > 0$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Să se arate că

$$\int_a^b f > 0.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1+x^2) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx.$$

14. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x^2)^n dx.$$

15. Să se studieze convergența simplă și uniformă a șirului de funcții $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n \sin^n x \cos x,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

16. Să se arate că, dacă pentru funcția continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, avem

$$\int_a^b x^n f(x) dx = 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci

$$f \equiv 0.$$

17. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0),$$

unde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

18. Să se arate că Teorema integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes este validă și pentru funcții (*) integrabile Riemann-Stieltjes.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și monotonă.

Să se arate că f este (*) integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f și că

$$\int_a^b f df = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}.$$

Să se arate că f este (*) integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu f^2 și că

$$\int_a^b f df^2 = \frac{2(f^3(b) - f^3(a))}{3} \text{ și } \int_a^b f^2 df = \frac{f^3(b) - f^3(a)}{3}.$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Ion Colojoară, Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

TEOREMELE CLASICE ALE CALCULULUI INTEGRAL

Teoreme de medie

Teorema fundamentală a calculului integral

Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann

Teorema de integrare prin părți

Teorema de schimbare de variabilă

Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală

Vom prezenta în cele ce urmează principalele teoreme privind integrala Riemann (-Stieltjes).

Teoreme de medie; Teorema fundamentală a calculului integral; Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann; Teorema de integrare prin părți

Folosind corolarul de la pagina ??? și Lema de la pagina 365, se poate demonstra următorul rezultat, care se va folosi în cadrul demonstrației primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (vezi pagina 388), a celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 389), Teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 400), precum și în cadrul demonstrației Teoremei de reducere a calculului unei integrale duble la o succesiune de integrale Riemann (vezi pagina 412).

Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, g crescătoare și f continuă.*

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b f dg = f(c) \int_a^b dg = f(c) \{g(b) - g(a)\}.$$

Folosind definiția derivatei și Teorema de aditivitate de domeniu a integralei Riemann-Stieltjes (vezi pagina 361), se poate demonstra următorul

rezultat care, prin corolarul său, reprezintă unul dintre pilonii calculului integral și care se va folosi în demonstrația primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (vezi pagina 388), în demonstrația Teoremei de schimbare de variabilă (vezi pagina 390), precum și în cadrul demonstrației formulei lui Leibniz (vezi pagina 398).

Teorema de derivare pentru integrala Riemann-Stieltjes. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, g crescătoare și f continuă.*

Atunci, dacă g este derivabilă în $c \in [a, b]$, funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = \int_a^x f dg,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, este derivabilă în c și

$$F'(c) = f(c)g'(c).$$

Corolar-Teorema fundamentală a calculului integral. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă.*

Atunci o funcție $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ satisface relația

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, dacă și numai dacă

$$F' = f.$$

Observație. *Pentru detalii privind rezultatul de mai sus se pot consulta exercițiile 1-4.*

Teorema de mai jos furnizează condiții suficiente pentru a reduce calculul unei integrale Riemann-Stieltjes la calculul unei integrale Riemann, fapt foarte important din punct de vedere practic. Ea se va folosi în cadrul demonstrației primei teoreme de medie pentru integrala Riemann (vezi pagina 388), a celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 389), precum și a Teoremei de integrare prin părți pentru integrala Riemann (vezi pagina 389).

Teoremă de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă g este derivabilă și cu derivata continuă, iar f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g , atunci fg' este integrabilă Riemann și

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg'.$$

Demonstrație. Deoarece, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), g' este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o partiție $P_\varepsilon = (x_0, \dots, x_n)$, a lui $[a, b]$ astfel ca, pentru orice $\zeta_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$, avem

$$\left| g'(\zeta_k) - g'(\eta_k) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pentru o rafinare P a lui P_ε , evaluând $S(P; f, g)$ și $S(P; fg')$, folosind aceleași puncte intermediare ζ_k , găsim o sumă ce conține termeni de tipul

$$f(\zeta_k)\{g(x_k) - g(x_{k-1})\} - f(\zeta_k)g'(\zeta_k)\{x_k - x_{k-1}\}.$$

Folosind teorema lui Lagrange (vezi pagina 278), termenul de mai sus se mai scrie

$$f(\zeta_k)\{g'(\nu_k) - g'(\zeta_k)\}\{x_k - x_{k-1}\},$$

unde $\nu_k \in [x_{k-1}, x_k]$, deci

$$\left| f(\zeta_k)\{g'(\nu_k) - g'(\zeta_k)\}\{x_k - x_{k-1}\} \right| \leq \varepsilon \|f\| (x_k - x_{k-1}).$$

Prin urmare

$$\left| S(P; f, g) - S(P; fg') \right| < \varepsilon \|f\| (b - a),$$

de unde concluzia. \square

Folosind Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386), Teorema de derivare pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 387), precum și Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 388), se poate demonstra următorul rezultat.

Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $g \geq 0$.
Atunci există $c \in [a, b]$ cu proprietatea că

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Folosind Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 362) și Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 388), se poate demonstra următorul rezultat care constituie o modalitate eficientă pentru calculul integralelor.

Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile, cu derivata continuă.
Atunci

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Folosind Teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue (vezi pagina 364), Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386), Teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 362) și Teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes la integrala Riemann (vezi pagina 388), se poate demonstra următorul rezultat care se va folosi în demonstrația Criteriului lui Dirichlet (vezi pagina 427).

A doua teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes.

a) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescătoare și g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fdg = f(a) \int_a^c dg + f(b) \int_c^b dg.$$

b) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescătoare și g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g + f(b) \int_c^b g.$$

c) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f crescătoare, $f \geq 0$ și g continuă.

Atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(b) \int_c^b g.$$

Dacă f este descrescătoare, atunci există $c \in [a, b]$ astfel ca

$$\int_a^b fg = f(a) \int_a^c g.$$

Teorema de schimbare de variabilă

Următorul rezultat, care constituie o modalitate eficientă pentru calculul integralelor, se va utiliza pentru justificarea corolarului teoremei lui Taylor cu restul sub formă integrală (vezi pagina 391).

Teorema de schimbare de variabilă. Fie $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă, cu derivata continuă și astfel încât $a = \varphi(\alpha) < b = \varphi(\beta)$. Fie f o funcție al cărei domeniu de definiție include imaginea funcției φ și care este continuă pe imaginea lui φ .

Atunci

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Demonstrație. Teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue (vezi pagina 364) ne asigură existența integralelor din egalitatea de mai sus.

Fie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$F(u) = \int_a^u f(x)dx,$$

pentru orice $u \in [a, b]$ și

$$H = F \circ \varphi.$$

Atunci, folosind Teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (vezi pagina 304) și Teorema fundamentală a calculului integral (vezi pagina 387), avem

$$H'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, de unde

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală

Prezentăm mai jos o formă utilă a teoremei lui Taylor ce se va utiliza în cadrul demonstrației Teoremei lui Bernstein (vezi pagina 490).

Teorema lui Taylor cu restul sub formă integrală. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, astfel ca $f, f', \dots, f^{(n)}$ să fie continue.*

Atunci

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \left\{ (b-t)^{n-1} f^{(n-1)}(t) \Big|_{t=a}^{t=b} + (n-1) \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt \right\} = \\ &= -\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt. \end{aligned}$$

Se continuă acest procedeu de integrare prin părți, iar în final se obține concluzia. \square

Corolar. Formula de mai sus se poate scrie, utilizând teorema de schimbare de variabilă, sub forma

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \\ &+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}[a+(b-a)s] ds. \end{aligned}$$

Exerciții

1. Să se dea exemplu de o funcție f integrabilă Riemann pe $[a, b]$ astfel încât aplicația $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F(x) = \int_a^x f,$$

pentru orice $x \in [a, b]$, să nu fie derivabilă.

2. Să se arate că dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă, astfel ca $F' = f$, atunci $F(b) - F(a) = \int_a^b f$.

3. Fie $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că F este derivabilă, dar că F' nu este integrabilă.

4. Fie $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}.$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann, dar că nu există nici o funcție a cărei derivată să fie f .

5. Fie $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă, iar $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \sin \frac{1}{t} dt, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f este derivabilă. Este f' continuă?

7. Să se determine funcțiile $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, derivabile, nenule, care au proprietatea că

$$(n+1) \int_0^x f(t) dt = xf(x),$$

pentru orice $x \in [0, \infty)$.

8. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă $\int_0^a \sin^{2n+1}(\pi(t+x)) dt$ nu depinde de x , atunci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a = 2k$.

9. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există $c \in [0, 1]$, astfel ca

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} f(c).$$

10. Să se arate că există un unic $c \in (\frac{1}{2}, 1)$, astfel ca

$$\int_0^c e^{x^2} dx = (1-c)e^{c^2}.$$

11. Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt = \ln 3.$$

12. Să se determine $\min_{a \in \mathbb{R}} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ax}}{1 + \cos x} dx.$$

13. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă care verifică relația

$$f^3(x) + f(x) \geq x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că

$$\int_0^2 f(x) dx \geq \frac{5}{4}.$$

14. Fie $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ și $f : (a - \delta, a + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și derivabilă în a , cu $f'(a) \neq 0$. Pentru orice $\varepsilon \in (0, \delta)$, conform teoremei de medie, există punctele $c_{s,\varepsilon} \in [a - \delta, a]$ și $c_{d,\varepsilon} \in [a, a + \delta]$ astfel încât

$$\int_{a-\varepsilon}^a f(x) dx = \varepsilon f(c_{s,\varepsilon})$$

și

$$\int_a^{a+\varepsilon} f(x) dx = \varepsilon f(c_{d,\varepsilon}).$$

Să se arate că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c_{d,\varepsilon} - c_{s,\varepsilon}}{\varepsilon} = 1.$$

15. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție monotonă, unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că pentru orice $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, există $c \in (a, b)$, astfel încât

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = f(c)(x_2 - x_1).$$

Să se arate că f este continuă pe (a, b) .

Rămâne valabil rezultatul valabil dacă f este integrabilă, dar nu este monotonă?

16. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Să se arate că, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, șirul de funcții $(f_n)_n$ converge uniform, pe $[a, b]$, către funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

17. Pentru fiecare dintre următoarele situații, să se arate că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g și să se calculeze $\int_a^b f dg$:

- i) $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \text{sign}(x)$;
- ii) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = \max\{1, x^2\}$, $g(x) = x^2$;
- ii) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x$, $g(x) = [e^x]$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

INTEGRALA CU PARAMETRU

Continuitatea în raport cu parametrul Derivabilitatea în raport cu parametrul Formula lui Leibniz Teorema de inversare a ordinii de integrare

Studiul integralelor cu parametru este impus de reprezentarea integrală a funcțiilor reale de o variabilă reală care apare în descrierea matematică a multor fenomene din economie, fizică, tehnică etc.

Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Atunci, pentru orice $t \in [c, d]$ fixat, aplicația dată de $x \rightarrow f(x, t)$, pentru orice $x \in [a, b]$, este integrabilă Riemann.

În aceste condiții, definim

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [c, d]$.

Vom studia în cele ce urmează proprietățile funcției F .

Continuitatea în raport cu parametrul

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației teoremei de la pagina 435.

Teorema de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Atunci funcția, dată de

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [c, d]$, este continuă.

Demonstrație. Deoarece, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $t, t_0 \in [c, d]$, cu

$$|t - t_0| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Atunci, pentru $t, t_0 \in [c, d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_0)| &= \left| \int_a^b \{f(x, t) - f(x, t_0)\} dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx < \varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

deci F este continuă în t_0 , arbitrar ales în $[a, b]$. \square

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Formulei lui Leibniz (vezi pagina 398), precum și în cadrul demonstrației Teoremei de la pagina 436.

Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pentru care există $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ și este continuă pe D .

Atunci funcția dată de

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [c, d]$, este derivabilă și

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Demonstrație. Deoarece, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), $\frac{\partial f}{\partial t}$ este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $t, t_0 \in [c, d]$, cu $|t - t_0| < \delta_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Atunci, pentru t și t_0 ca mai sus, în conformitate cu Teorema lui Lagrange (vezi pagina 278), există t_1 , între t și t_0 , astfel ca

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| = |t - t_0| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_1).$$

Prin urmare, pentru $0 < |t - t_0| < \delta_\varepsilon$, obținem

$$\left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $x \in [a, b]$.

Atunci

$$\left| \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx \right| \leq \int_a^b \left| \frac{f(x, t) - f(x, t_0)}{t - t_0} - \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) \right| dx < \varepsilon(b-a),$$

ceea ce arată că F este derivabilă în t_0 și că

$$F'(t_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Formula lui Leibniz

O generalizare a rezultatului precedent este următoarea:

Formula lui Leibniz. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, pentru care există $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ și este continuă pe D .

Fie $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ două funcții derivabile.

Atunci funcția dată de

$$\varphi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [c, d]$, este derivabilă și

$$\varphi'(t) = f(\beta(t), t)\beta'(t) - f(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Demonstrație. Să considerăm $H : [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$H(u, v, t) = \int_v^u f(x, t) dx.$$

Atunci

$$\varphi(t) = H(\beta(t), \alpha(t), t),$$

pentru orice $t \in [c, d]$.

Drept urmare, conform observației de la pagina 306, avem

$$\varphi'(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(\beta(t), \alpha(t), t)\beta'(t) + \frac{\partial H}{\partial v}(\beta(t), \alpha(t), t)\alpha'(t) + \frac{\partial H}{\partial t}(\beta(t), \alpha(t), t).$$

Dar, conform Teoremei fundamentale a calculului integral (vezi pagina 387), avem

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u, v, t) = f(u, t)$$

și

$$\frac{\partial H}{\partial v}(u, v, t) = -f(v, t),$$

iar conform Teoremei de la pagina 397, avem

$$\frac{\partial H}{\partial t}(u, v, t) = \int_v^u \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx,$$

de unde concluzia. \square

Rezultatul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației teoremei care permite reducerea calculului unei integrale duble la o succesiune de integrale Riemann (vezi pagina 412), precum și în cadrul demonstrației Teoremei de la pagina 435.

Teorema de inversare a ordinii de integrare pentru integrala Riemann. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $D = \{(x, t) \mid a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Atunci

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx.$$

Demonstrație. Continuitatea funcției f asigură existența integralelor iterate de mai sus (vezi Teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue - pagina 364).

Rămâne să stabilim egalitatea de mai sus.

Deoarece, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), f este uniform continuă, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $t, t' \in [c, d]$ și $x, x' \in [a, b]$ cu proprietatea că

$$|t - t'| < \delta_\varepsilon$$

și

$$|x - x'| < \delta_\varepsilon,$$

avem

$$|f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon.$$

Fie $n \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\frac{b - a}{n} < \delta_\varepsilon$$

și

$$\frac{d - c}{n} < \delta_\varepsilon.$$

Vom împărți pe D în n^2 dreptunghiuri egale generate de împărțirea lui $[a, b]$ și $[c, d]$ în n intervale egale.

Pentru orice $j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, să considerăm

$$x_j = a + \frac{(b - a)j}{n}$$

și

$$t_j = c + \frac{(d-c)j}{n}.$$

Atunci

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x, t) dx \right\} dt.$$

Drept urmare, conform Primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386), există $x'_j \in [x_{j-1}, x_j]$ și $t'_k \in [t_{k-1}, t_k]$ astfel ca

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x'_j, t'_k) (x_j - x_{j-1}) (t_k - t_{k-1}).$$

Similar există $x''_j \in [x_{j-1}, x_j]$ și $t''_k \in [t_{k-1}, t_k]$ astfel ca

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n f(x''_j, t''_k) (x_j - x_{j-1}) (t_k - t_{k-1}).$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, t) dx \right\} dt - \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, t) dt \right\} dx \right| \leq \\ & \leq \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \{ f(x'_j, t'_k) - f(x''_j, t''_k) \} (x_j - x_{j-1}) (t_k - t_{k-1}) \right| \leq \\ & \leq \varepsilon (b-a)(d-c). \end{aligned}$$

Cum ε a fost ales arbitrar, deducem concluzia. \square

Exerciții

1. Să se calculeze

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx.$$

2. Pentru

$$F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha^2} \frac{\sin \alpha x}{x} dx,$$

$\alpha \neq 0$, să se calculeze $F'(\alpha)$.

3. Să se arate că

$$\int_0^{\pi} \ln\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right),$$

unde $a, b > 1$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Ion Colojoară*, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

INTEGRALA MULTIPLĂ

Măsura unui interval închis din \mathbb{R}^p
Submulțimi ale lui \mathbb{R}^p de măsură nulă
Integrala Riemann a unei funcții de mai multe variabile
Integrala multiplă ca integrală iterată
Schimbarea de variabile pentru integrala Riemann a funcțiilor de
mai multe variabile

Măsura unui interval închis din \mathbb{R}^p

Definiție. Un interval închis din \mathbb{R}^p este o submulțime J a lui \mathbb{R}^p de forma $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$, unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Observație. J se numește cub în cazul în care $b_1 - a_1 = \dots = b_p - a_p$.

Definiție. Numărul $\mu(J) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_p - a_p)$ se numește măsura lui $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]$.

Observație. Pentru $p = 1$ terminologia clasică este cea de lungime, pentru $p = 2$ cea de arie, iar pentru $p = 3$ cea de volum.

Observație. Dacă există $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ astfel ca $a_k = b_k$, atunci $\mu(J) = 0$; acest fapt nu implică că J este vid, ci faptul că J nu are "grosime" în cea de a k -a dimensiune.

Submulțimi ale lui \mathbb{R}^p de măsură nulă

Definiție 1. O submulțime Z a lui \mathbb{R}^p se numește de măsură Jordan nulă dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o familie finită $\{J_1, \dots, J_n\}$ de intervale închise astfel încât

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^n J_k$$

și

$$\mu(J_1) + \dots + \mu(J_n) < \varepsilon.$$

Notă istorică. *Camille Jordan* (1800-1888) a studiat la liceul din Lion. Începând cu 1855 studiază matematica la École Polytechnique, unde, din 1876, este și profesor de Analiză Matematică. Din 1883 este profesor și la Collège de France. Tratatul său în trei volume, apărut între 1882 și 1887, intitulat Cours d'analyse de l'École Polytechnique, este un model de prezentare riguroasă și pedagogică a chestiunilor de Analiză Matematică. În 1885 devine, pentru o perioadă de 35 de ani, editorul uneia dintre cele mai influente publicații matematice, anume Journal de Mathématiques Pure et Appliquées (cunoscut și sub numele de Journal de Liouville). Trei dintre cei șase fii ai săi au murit în primul război mondial. A fost membru al Académie des Sciences, ofițer al Légion d'honneur și Președinte de onoare al Congresului Internațional al Matematicienilor de la Strasbourg, care a avut loc în 1920.

Exemple

1. Orice submulțime finită a lui \mathbb{R}^p este de măsură Jordan nulă.
2. Orice submulțime a lui \mathbb{R}^p ale cărei elemente formează un șir convergent este de măsură Jordan nulă.
3. Mulțimea $S = \{(x, 0) \mid x \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ este de măsură Jordan nulă.
4. Mulțimea $S = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ este de măsură Jordan nulă.
5. Mulțimea $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ este de măsură Jordan nulă.
6. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, o funcție continuă. Atunci mulțimea $S = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ este de măsură Jordan nulă.
7. Mulțimea $S = \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nu este de măsură Jordan nulă, deși este numărabilă.
8. O reuniune finită de mulțimi de măsură Jordan nulă este o mulțime de măsură Jordan nulă.
9. În contrast cu 6, există $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, două funcții continue, astfel încât $S = \{(f(t), g(t)) \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nu este de măsură Jordan nulă (ea conținând $[0, 1] \times [0, 1]$); S se numește curbă Peano. A se vedea exercițiul 8 de la pagina 481.

Integrala Riemann a unei funcții de mai multe variabile

În cele ce urmează vom presupune că $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulțime compactă, iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o funcție mărginită.

Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ prelungită cu valoarea 0 în afara lui D , se va nota tot cu f .

Deoarece $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulțime compactă, există I_f un interval închis din \mathbb{R}^p , care conține pe D .

Să presupunem că

$$I_f = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p],$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, p\}$, fie P_k o partiție a lui $[a_k, b_k]$.

Aceste partiții induc o partiție P a lui I_f într-un număr finit de intervale închise din \mathbb{R}^p .

Dacă P și Q sunt partiții ale lui I_f spunem că P este o rafinare a lui Q dacă orice interval al lui P este conținut într-un interval al lui Q .

Definiție. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$.

O sumă Riemann a lui f corespunzătoare partiției $P = (J_1, J_2, \dots, J_n)$ a lui I_f , are forma

$$S(P; f) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \mu(J_k),$$

unde $x_k \in J_k$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Spunem că funcția f este integrabilă Riemann dacă există un element $L \in \mathbb{R}^q$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o partiție P_ε a lui I_f astfel ca, pentru orice partiție P , care este o rafinare a lui P_ε , și orice sumă Riemann $S(P; f)$ corespunzătoare lui P , avem

$$\|S(P; f) - L\| < \varepsilon.$$

În acest caz, L este unic determinat, nu depinde de I_f , se numește integrala Riemann multiplă a lui f pe D și se notează $\int_D f$ sau, pentru $p = 2$, $\int_D f$ sau $\int_D f(x, y) dx dy$, sau, pentru $p = 3$, $\int_D f$ sau $\int_D f(x, y, z) dx dy dz$.

Următorul rezultat se va folosi în cadrul demonstrației primei teoreme de integrare pentru integrala Riemann multiplă.

Criteriul lui Cauchy pentru integrala Riemann multiplă. *O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ este integrabilă Riemann, pe D , dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există Q_ε , o partiție a lui I_f , astfel ca pentru orice partiții P și Q , care sunt rafinări ale lui Q_ε și orice sume Riemann $S(P; f)$ și $S(Q; f)$, corespunzătoare lui P , respectiv Q , avem*

$$\|S(P; f) - S(Q; f)\| < \varepsilon.$$

Rezultatul următor exprimă proprietatea de liniaritate a integralei Riemann multiple. El va fi folosit în cadrul demonstrației lemei 2 (vezi pagina 407), lemei 4 (vezi pagina 410), precum și a Teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 411).

Teoremă. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$ o mulțime compactă, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ două funcții integrabile Riemann pe D și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann pe D și

$$\int_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_D f + \beta \int_D g.$$

Demonstrație. Totul decurge din faptul că

$$S(P; \alpha f + \beta g) = \alpha S(P; f) + \beta S(P; g),$$

unde P este o partiție arbitrară a lui I_f , iar punctele intermediare folosite sunt aceleași pentru toate cele trei sume Riemann. \square

Lema următoare se va folosi în cadrul observației de la pagina 409-410.

Lema 1. *Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, o funcție mărginită, unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este o mulțime compactă de măsură Jordan nulă. Atunci f este integrabilă Riemann pe D și*

$$\int_D f = 0.$$

Demonstrație. Deoarece D este de măsură Jordan nulă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiție P_ε a lui I_f cu proprietatea că acele intervale ale sale care conțin puncte din D au suma măsurilor inferioară lui ε .

Dacă $M \in \mathbb{R}$ are proprietatea că

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$, atunci

$$\|S(P; f)\| \leq M\varepsilon,$$

pentru orice partiție P care constituie o rafinare a lui P_ε , ceea ce arată că f este integrabilă Riemann pe D și

$$\int_D f = 0. \quad \square$$

Observație. Raționamentul de mai sus ne arată de asemenea că *dacă* $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ *este o funcție mărginită cu proprietatea că* $\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}$ *este de măsură Jordan nulă, atunci* f *este integrabilă Riemann pe* D *și*

$$\int_D f = 0.$$

Următoarea leamnă se va folosi în cadrul Teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 437).

Lema 2. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}^p$ *o mulțime compactă,* $E \subseteq D$ *,* E *având măsură Jordan nulă și* $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ *două funcții mărginite, astfel încât* f *este integrabilă Riemann pe* D *și*

$$f(x) = g(x),$$

pentru orice $x \in D - E$.

Atunci g *este integrabilă Riemann pe* D *și*

$$\int_D f = \int_D g.$$

Demonstrație. Conform ipotezei, funcția $h = g - f$ este nulă pe $D - E$, deci, cum E este de măsură Jordan nulă, conform observației aferente lemei 1, h este integrabilă pe D și

$$\int_D h = 0.$$

Conform teoremei de la pagina 406, funcția $h + f$, i.e. funcția g este integrabilă și

$$\int_D g = \int_D h + f = \int_D h + \int_D f = \int_D f. \quad \square$$

Integrabilitatea Riemann a funcțiilor de mai multe variabile

Este de așteptat că dacă f este continuă pe un interval închis J din \mathbb{R}^p , atunci f este integrabilă pe J . Vom demonstra un rezultat mai puternic, care permite funcției să aibă discontinuități pe o mulțime de măsură Jordan nulă.

Prima teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă.

Fie $f : J \rightarrow \mathbb{R}^q$, o funcție mărginită, unde J este un interval închis din \mathbb{R}^p . Dacă f este continuă exceptând punctele unei mulțimi de măsură Jordan nulă, atunci f este integrabilă pe J .

Demonstrație. Fie $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in J$ și fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Fie E mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f (care este de măsură Jordan nulă).

Atunci există o partiție P_ε a lui J astfel ca intervalele sale care conțin puncte din E au suma măsurilor mai mică decât ε .

Reuniunea C a intervalelor lui P_ε , care nu conțin puncte din E , este o submulțime compactă a lui \mathbb{R}^p pe care f este continuă, deci uniform continuă (vezi Teorema continuității uniforme - pagina 227).

Prin urmare, înlocuind eventual pe P_ε cu o rafinare a sa, putem presupune că dacă J_k este un interval al lui P_ε , care este conținut în C și dacă x și y sunt puncte arbitrare ale lui J_k , atunci

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Fie acum P și Q rafinări ale lui P_ε .

$S'(P; f)$ și $S'(Q; f)$ fiind porțiunile din sumele Riemann corespunzătoare intervalelor din C , avem

$$\left\| S'(P; f) - S'(Q; f) \right\| < \varepsilon \mu(J).$$

$S''(P; f)$ și $S''(Q; f)$ fiind celelalte porțiuni din sumele Riemann, avem

$$\|S''(P; f) - S''(Q; f)\| \leq \|S''(P; f)\| + \|S''(Q; f)\| < 2M\varepsilon.$$

Prin urmare

$$\|S(P; f) - S(Q; f)\| < (2M + \mu(J))\varepsilon,$$

deci f este integrabilă. \square

Teorema de mai sus stabilește integrabilitatea unei funcții pe un interval J , în condițiile de continuitate menționate anterior. Este de dorit să obținem un rezultat care să stabilească integrabilitatea pe o mulțime mai generală decât un interval. El se va utiliza în cadrul demonstrației Corolarului de la pagina 414

A doua teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă.

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție continuă, unde D este o submulțime compactă a lui \mathbb{R}^p care are frontiera de măsură Jordan nulă. Atunci f este integrabilă pe D .

Demonstrație. Fie I_f un interval închis care conține pe D și să extindem pe f , pe \mathbb{R}^p , prin $f(x) = 0$, pentru $x \notin D$.

Atunci această extindere este continuă în orice punct al lui I_f , excepând eventual $Fr(D)$, care este de măsură Jordan nulă, de unde, conform primei teoreme de integrabilitate pentru integrala Riemann multiplă, f este integrabilă. \square

Definiție 2. *O submulțime mărginită D , a lui \mathbb{R}^p , care are frontiera de măsură Jordan nulă, se numește măsurabilă și definim măsura lui D , notată cu $A(D)$, ca fiind*

$$\int_{D \cup Fr(D)} 1 dx.$$

Următoarea leamă va fi folosită în demonstrația Lemei 4 (vezi pagina 410), precum și a Teoremei de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple (vezi pagina 411).

Lema 3. Dacă D este o submulțime măsurabilă a lui \mathbb{R}^p , atunci mulțimea compactă $D \cup Fr(D)$ este măsurabilă și

$$A(D) = A(D \cup Fr(D)).$$

Demonstrație. Deoarece, conform cu exercițiul 12 de la pagina 116, avem

$$Fr(D \cup Fr(D)) \subseteq Fr(D),$$

deducem că $Fr(D \cup Fr(D))$ este de măsură Jordan nulă, deci $D \cup Fr(D)$ este măsurabilă și

$$A(D \cup Fr(D)) = \int_{D \cup Fr(D) \cup Fr(D \cup Fr(D))} 1dx = \int_{D \cup Fr(D)} 1dx = A(D). \quad \square$$

Observație. Fie D o submulțime a lui \mathbb{R}^p , care este de măsură Jordan nulă (vezi Definiția 1). Prin urmare, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o familie finită $\{J_1, \dots, J_n\}$ de intervale închise astfel încât

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^n J_k$$

și

$$\mu(J_1) + \dots + \mu(J_n) < \varepsilon.$$

Atunci

$$Fr(D) \subseteq J_1 \cup \dots \cup J_n,$$

deci D și $Fr(D) \cup D$ sunt de măsură Jordan nulă și, prin urmare, D este măsurabilă în sensul Definiției 2, și, conform Lemei 1 (vezi pagina 406), avem

$$A(D) = \int_{D \cup Fr(D)} 1dx = 0.$$

Reciproc, să presupunem că D este măsurabilă în sensul Definiției 2, și că $A(D) = 0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există o partiție P_ε a unui interval care conține D , astfel încât pentru orice sumă Riemann corespunzătoare lui P_ε și funcției

$$f_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \cup Fr(D) \\ 0, & \text{altminteri} \end{cases},$$

avem

$$0 \leq S(P_\varepsilon; f_D) < \varepsilon.$$

Alegând punctele intermediare în $D \cup Fr(D)$, când este posibil, deducem că $D \cup Fr(D)$ este inclusă într-o colecție finită $\{J_1, \dots, J_n\}$ de intervale închise din P_ε cu $\mu(J_1) + \dots + \mu(J_n) < \varepsilon$, adică D este de măsură Jordan nulă.

Prin urmare, o submulțime D a lui \mathbb{R}^p este de măsură Jordan nulă dacă și numai dacă este măsurabilă în sensul Definiției 2 și $A(D) = 0$.

Lema 4. Dacă D_1 și D_2 sunt submulțimi mărginite, măsurabile a lui \mathbb{R}^p , atunci $D_1 \cap D_2$ și $D_1 \cup D_2$ sunt măsurabile și

$$A(D_1) + A(D_2) = A(D_1 \cup D_2) + A(D_1 \cap D_2).$$

În particular, dacă $A(D_1 \cap D_2) = 0$, atunci

$$A(D_1) + A(D_2) = A(D_1 \cup D_2).$$

Demonstrație. Deoarece, conform exercițiului 12 de la pagina 103, avem

$$Fr(D_1 \cup D_2) \subseteq Fr(D_1) \cup Fr(D_2)$$

și

$$Fr(D_1 \cap D_2) \subseteq Fr(D_1) \cup Fr(D_2),$$

deducem că mulțimile $Fr(D_1 \cup D_2)$ și $Fr(D_1 \cap D_2)$ sunt de măsură Jordan nulă, deci mulțimile $D_1 \cup D_2$ și $D_1 \cap D_2$ sunt măsurabile.

Folosind Lema 3 (vezi pagina 409), putem presupune că mulțimile D_1 și D_2 sunt închise.

Prin urmare $D_1 \cup D_2$ și $D_1 \cap D_2$ sunt închise.

Fie f_1, f_2, f_i și f_r funcțiile egale cu 1 pe $D_1, D_2, D_1 \cap D_2$ și respectiv $D_1 \cup D_2$ și prelungite cu 0 în afara acestora.

Aceste funcții sunt integrabile și

$$f_1 + f_2 = f_i + f_r.$$

Dacă J este un interval care conține pe $D_1 \cup D_2$, atunci conform Teoremei de la pagina 406,

$$A(D_1) + A(D_2) = \int_J f_1 + \int_J f_2 = \int_J (f_1 + f_2) =$$

$$= \int_J (f_i + f_r) = \int_J f_i + \int_J f_r = A(D_1 \cup D_2) + A(D_1 \cap D_2). \quad \square$$

Rezultatul următor exprimă faptul că integrala Riemann multiplă este aditivă în raport cu domeniul de integrare.

Teorema de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ integrabilă, unde D este o submulțime compactă și măsurabilă lui \mathbb{R}^p .

Fie D_1 și D_2 două submulțimi închise măsurabile ale lui D având următoarele proprietăți:

i)

$$D = D_1 \cup D_2$$

și

ii) $D_1 \cap D_2$ este de măsură nulă.

Atunci f este integrabilă pe D_1 și pe D_2 și

$$\int_D f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

Se poate justifica ușor următorul rezultat:

Teoremă. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ integrabilă pe D , unde D este o submulțime compactă și măsurabilă a lui \mathbb{R}^p .

Fie $M \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\|f(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$.

Atunci

$$\left\| \int_D f \right\| \leq M \cdot A(D).$$

În particular, dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și există $m, M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$m \leq f(x) \leq M,$$

pentru orice $x \in D$, atunci

$$m \cdot A(D) \leq \int_D f \leq M \cdot A(D).$$

Teorema următoare extinde Prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386).

Teorema de medie. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe D , unde $D \subseteq \mathbb{R}^p$ este compactă, conexă și măsurabilă.

Atunci există un punct p , aparținând lui D , astfel ca

$$\int_D f = f(p) \cdot A(D).$$

Integrala multiplă ca integrală iterată

Prezentăm în continuare modul în care putem reduce calculul integralei duble și triple la integrale de ordin inferior prin scrierea acestora ca integrale iterate.

Teorema de reducere a calculului unei integrale duble la o succesiune de integrale Riemann. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, unde există $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, atunci

$$\int_D \int f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Demonstrație. Conform teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 400), avem

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

deci este suficient să arătăm că

$$\int_D \int f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Fie $F : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, pentru orice $y \in [c, d]$.

Fie $c = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_r = d$ o partiție a lui $[c, d]$, $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_s = b$ o partiție a lui $[a, b]$, iar P partiția lui D obținută utilizând intervalele $[x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Pentru y_j^* un punct arbitrar din $[y_{j-1}, y_j]$, avem

$$F(y_j^*) = \int_a^b f(x, y_j^*) dx = \sum_{k=1}^s \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x, y_j^*) dx.$$

Conform primei teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 386), pentru orice j și k , există $x_{jk}^* \in [x_{k-1}, x_k]$, astfel ca

$$F(y_j^*) = \sum_{k=1}^s f(x_{jk}^*, y_j^*) (x_k - x_{k-1}).$$

Atunci

$$\sum_{j=1}^r F(y_j^*) (y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s f(x_{jk}^*, y_j^*) (x_k - x_{k-1}) (y_j - y_{j-1}),$$

de unde concluzia. \square

Mai general, are loc următorul rezultat:

Teoremă. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă, unde există $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2$, și pentru orice $y \in [c, d]$, integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ există, atunci F este integrabilă pe $[c, d]$ și

$$\int_D f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Corolar. *Fie*

$$A = \{(x, y) \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c \leq y \leq d\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

unde $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sunt funcții continue.

Dacă $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe A , atunci f este integrabilă pe A și

$$\int_A f = \int_c^d \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Demonstrație. Putem presupune că f este 0 în afara lui A .

Deoarece $Fr(A) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}^2$ are măsură Jordan nulă (vezi exemplul 6, de la pagina 404), conform celei de a doua Teoreme de integrare pentru integrala Riemann multiplă (vezi pagina 409), rezultă că f este integrabilă pe A .

Cum pentru un y fixat, $\int_a^b f(x, y) dx$ există și este egală cu $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$, concluzia decurge din teorema precedentă, unde $D = [a, b] \times [c, d]$. \square

Pentru integrala triplă funcționează rezultate similare.

Teoremă. *Fie $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue, unde D este o submulțime compactă și măsurabilă lui \mathbb{R}^2 , astfel încât $\alpha \leq \beta$ și*

$$M = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ și } \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Atunci, pentru orice funcție continuă $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, avem

$$\int_M f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left(\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

Observație. *Rezultate similare celor descrise mai sus (care poartă numele generic de formule Fubini), într-un cadru mult mai general, se vor studia la cursul de Teoria Măsurii.*

Notă istorică. *Guido Fubini* (1879-1943) a studiat la Veneția și la Scuola Normale Superiore di Pisa, unde i-a avut ca profesori pe Dini și pe Bianchi care l-au canalizat spre cercetări de geometrie. Își susține teza de doctorat în 1900. Predă la universitățile din Catania, Genova și Torino. A tratat teme din diverse ramuri ale matematicii, precum ecuații diferențiale, funcții analitice, funcții complexe de mai multe variabile, calculul variațional, ecuații integrale neliniare, teoria grupurilor, geometrie neeuclidiană și proiectivă. În timpul primului război mondial a studiat acuratețea tirurilor de artilerie, ceea ce l-a condus la studiul acusticii și electricității. Datorită circumstanțelor politice emigrează în 1939 în Statele Unite ale Americii.

Schimbarea de variabile pentru integrala Riemann a funcțiilor de mai multe variabile

Un instrument foarte util în calculul integralelor multiple este dat de următorul rezultat.

Teorema de schimbare de variabile la integrala Riemann multiplă. Fie $\varphi : G = \overset{\circ}{G} \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție de clasă C^1 pe G astfel ca

$$\det J_\varphi(x) \neq 0,$$

pentru orice $x \in G$.

Dacă D este o submulțime compactă și măsurabilă lui G , iar $f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(D)$ este măsurabilă și

$$\int_{\varphi(D)} f = \int_D (f \circ \varphi) |\det J_\varphi|.$$

Remarcă. Concluzia este adevărată, chiar și în cazul în care $\det J_\varphi$ se anulează pe o mulțime de măsură Jordan nulă.

Remarcă. Din punct de vedere practic, avem de calculat $\int_{\varphi(D)} f$. Formula de schimbare de variabile ne conduce la calculul integralei $\int_D (f \circ \varphi) |\det J_\varphi|$, în care structura "complicată" a lui $\varphi(D)$ este înlocuită cu structura mai "abordabilă" a lui D . Spre deosebire de cazul 1-dimensional, unde scopul

schimbării de variabile este acela de a "simplifica" funcția de integrat, în cazul multidimensional, accentul cade de "simplificarea" structurii domeniului pe care se integrează.

Remarcă. *Iată câteva schimbări de variabile standard:*

1. Trecerea la coordonate polare în plan

Fie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

pentru orice $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Avem

$$\det J_\varphi((\rho, \theta)) = \rho,$$

pentru orice $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ și, evident, φ este de clasă \mathcal{C}^1 .

Dacă D_p este o submulțime compactă și măsurabilă lui \mathbb{R}^2 , $D_p \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ are proprietatea că $\varphi(D_p) = D$, iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(D)$ este măsurabilă și

$$\int_{\varphi(D_p)=D} \int f(x, y) dx dy = \int_{D_p} \int \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho d\theta.$$

2. Trecerea la coordonate polare în spațiu

Fie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dată de

$$\varphi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi),$$

pentru orice $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$.

Avem

$$\det J_\varphi((\rho, \theta)) = \rho^2 \sin \varphi,$$

pentru orice $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ și, evident, φ este de clasă \mathcal{C}^1 .

Dacă D_s este o submulțime compactă și măsurabilă lui \mathbb{R}^3 , $D_s \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ are proprietatea că $\varphi(D_s) = D$, iar $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci $\varphi(D)$ este măsurabilă și

$$\begin{aligned}
& \int \int \int_{\varphi(D_s)=D} f(x, y, z) dx dy dz = \\
& = \int \int \int_{D_s} \rho^2 \sin \varphi f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) d\rho d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

Exerciții

1. Să se calculeze:

i) $\int_D (x - y) dx dy$, unde D este domeniul mărginit limitat de dreptele $y = -1$, $y = 1$, $y = x + 1$ și de parabola $x = y^2$.

ii) $\int_D (x^2 + y) dx dy$, unde D este domeniul mărginit limitat de parabolele $x = y^2$ și $y = x^2$.

iii) $\int_D xy dx dy$, unde D este domeniul mărginit limitat de axele de coordonate și de $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

iv) $\int_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, unde D este domeniul mărginit limitat de dreptele $x = 2$, $y = x$ și de $xy = 1$.

2. Să se calculeze:

i) $\int_D \arcsin \frac{1}{2\pi} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq (2\pi)^2\}$.

ii) $\int_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

iii) $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

iv) $\int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0\}$.

3. Să se calculeze:

i) $\int_D x dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x > 0\}$.

ii) $\int_D (x + y) dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x + y \leq 13, x \leq y \leq 5x\}$.

iii) $\int_D (x + y) dx dy$, unde $D = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

4. Să se calculeze:

i) $\int_V xyz dx dy dz$, unde V este domeniul descris de: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ și $0 \leq z \leq c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$;

- ii) $\int \int \int_V (x+y)z dx dy dz$, unde V este domeniul limitat de: $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ și $x+y+z \leq 1$;
- iii) $\int \int \int_V z dx dy dz$, unde V este domeniul limitat de: $z = 0, z = h$ și $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2), a, h \in \mathbb{R}, h > 0$;
- iv) $\int \int \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, unde V este domeniul descris de: $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, a \in \mathbb{R}$;
- v) $\int \int \int_V (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} dx dy dz$, unde V este domeniul descris de: $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.
2. *Tom M. Apostol, Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1957, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 36591

INTEGRALA IMPROPRIE

În secțiunea de față ne vom întoarce la integrarea funcțiilor de o variabilă reală și vom discuta despre integrale improprii, adică despre integrale care sunt definite ca limite de integrale Riemann.

Integrala improprie: cazul funcțiilor nemărginite **Integrala improprie (infinită): cazul domeniilor nemărginite**

În secțiunile anterioare am considerat funcții mărginite, care au domeniul de definiție o mulțime compactă. Dacă se renunță la una dintre aceste ipoteze, teoria prezentată nu mai este valabilă fără a se opera anumite schimbări. Întrucât în multe aplicații este de dorit să se opereze cu funcții care nu sunt mărginite sau care nu au domeniul de definiție o mulțime compactă, vom prezenta teoria integralei și în acest caz.

Integrala improprie: cazul funcțiilor nemărginite

Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ și f o funcție cu valori reale al cărei domeniu de definiție conține pe $(a, b]$.

Să presupunem că f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$ și să notăm

$$I_c = \int_c^b f.$$

Vom defini integrala improprie a lui f , pe $J = [a, b]$, ca fiind limita lui I_c , atunci când c tinde către a .

Definiție. Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ și f o funcție cu valori reale, al cărei domeniu de definiție conține pe $(a, b]$.

Să presupunem că f este integrabilă Riemann, pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$ și să notăm

$$I_c = \int_c^b f.$$

Dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $c \in (a, a + \delta_\varepsilon)$ să avem

$$|I_c - I| < \varepsilon,$$

spunem că I este integrala improprie a lui f pe $J = [a, b]$ și vom nota această valoare prin $\int_{a+}^b f$ sau prin $\int_{a+}^b f(x)dx$.

Observație. Așadar

$$\int_{a+}^b f = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ c > a}} \int_c^b f.$$

Observație. De multe ori semnul $+$ din limita inferioară de integrare este omis.

Exemple

1. Fie $J = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ și f o funcție mărginită cu valori reale al cărei domeniu de definiție conține pe $(a, b]$.

Dacă f este integrabilă Riemann pe orice interval $[c, b]$, unde $c \in (a, b]$, atunci există $\int_{a+}^b f$.

Spre exemplu, funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \sin \frac{1}{x},$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$.

2. Funcția

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

unde $x \in (0, 1]$, nu este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$.

3. Funcția

$$f(x) = x^\alpha,$$

unde $x \in (0, 1]$, este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$, pentru $\alpha \in (-1, 0)$ și nu este integrabilă impropriu pe $[0, 1]$, pentru $\alpha \in (-\infty, -1)$.

Discuția precedentă a tratat funcțiile care nu sunt definite sau nu sunt mărginite în capătul din stânga al intervalului. Este evident cum se tratează cazul în care funcția are un comportament similar în capătul din dreapta al intervalului. Mai interesant este cazul în care funcția nu este definită sau nu este mărginită într-un punct interior al intervalului.

Dacă p este un punct interior intervalului $[a, b]$, iar funcția f este definită în orice punct din $[a, b]$, exceptând eventual pe p , și dacă există integralele improprii $\int_a^{p-} f$ și $\int_{p+}^b f$, atunci definim integrala improprie a lui f , pe $[a, b]$, ca fiind suma celor două integrale improprii anterioare. Altfel spus, definim integrala improprie a lui f pe $[a, b]$ ca fiind

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{p-\varepsilon} f + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{p+\delta}^b f.$$

Este clar că, dacă există cele două limite de mai sus, atunci există și limita

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right)$$

și

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{p-\varepsilon} f + \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{p+\delta}^b f.$$

Să observăm că existența limitei $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right)$ nu implică existența

limitelor $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{p-\varepsilon} f$ și $\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \int_{p+\delta}^b f$.

Spre exemplu, pentru $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x \in [-1, 1] - \{0\}$, avem $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^3} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^3} dx = 0$, pentru orice $\varepsilon \in (0, 1)$, dar integralele improprii $\int_{-1}^{0-} \frac{1}{x^3} dx$ și $\int_{0+}^1 \frac{1}{x^3} dx$ nu există.

În cazul în care există, limita

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(\int_a^{p-\varepsilon} f + \int_{p+\varepsilon}^b f \right)$$

se va nota $(CPV) \int_a^b f$ și se va numi valoarea principală Cauchy a integralei.

În cazul în care funcția are un număr finit de puncte în care nu este definită sau nu este mărginită, putem împărți intervalul în subintervale care au ca extremități aceste puncte.

Integrala improprie (infinită): cazul domeniilor nemărginite

Este important să se extindă noțiunea de funcție integrabilă și în cazul funcțiilor care au drept domeniu de definiție o mulțime nemărginită. De exemplu, dacă f este definită pe $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$, ia valori în \mathbb{R} și este integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, folosind notația $I_c \stackrel{not}{=} \int_a^c f$, definim integrala improprie a lui f , pe $[a, \infty)$, ca fiind limita lui I_c , atunci când c tinde către ∞ .

Definiție. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$ și

$$I_c = \int_a^c f.$$

Un număr real I se numește integrala improprie a lui f , pe $[a, \infty)$, dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $M_\varepsilon \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $c \in \mathbb{R}$, $c > M_\varepsilon$ să avem

$$|I - I_\varepsilon| < \varepsilon.$$

În acest caz numărul real I se notează cu $\int_a^\infty f$ sau cu $\int_a^\infty f(x)dx$ și se mai numește integrala infinită a lui f pe $[a, \infty)$ (după terminologia introdusă de Geoffrey Hardy (1877-1947), profesor la Cambridge).

Observație. *Așadar*

$$\int_a^\infty f = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f.$$

Exemple

1. Fie

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

unde $x \in [a, \infty)$, $a > 0$.

Integrala infinită a lui f pe $[a, \infty)$ nu există.

2. Fie funcția

$$f(x) = x^\alpha,$$

unde $x \in [a, \infty)$, $a > 0$, iar $\alpha \neq -1$.

Atunci integrala infinită a lui f pe $[a, \infty)$ nu există pentru $\alpha > -1$ și există pentru $\alpha < -1$.

3. Fie funcția

$$f(x) = e^{-x},$$

unde $x \in \mathbb{R}$.

Atunci integrala infinită a lui f pe $[0, \infty)$ există și este 1.

Observație. *Putem considera de asemenea cazul funcțiilor definite pe \mathbb{R} . În acest caz cerem ca f să fie integrabilă Riemann pe orice interval din \mathbb{R} și considerăm limitele*

$$\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f \stackrel{\text{not}}{=} \int_{-\infty}^a f$$

și

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f \stackrel{\text{not}}{=} \int_a^\infty f.$$

Este ușor de demonstrat că dacă cele două limite de mai sus există pentru o anumite valoare a lui a , atunci ele există pentru orice valoare a lui a . În

acest caz definim integrala improprie a lui f pe \mathbb{R} (sau integrala infinită a lui f pe \mathbb{R}) ca fiind suma integralelor de mai sus, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f.$$

Este clar că dacă există cele două limite de mai sus, atunci există și limita

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\int_{-c}^a f + \int_a^c f \right)$$

și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\int_{-c}^a f + \int_a^c f \right).$$

Dacă există, $\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\int_{-c}^a f + \int_a^c f \right)$ se va numi valoarea principală Cauchy a integralei și se va nota cu

$$(CPV) \int_{-\infty}^{\infty} f.$$

Să observăm că existența $(CPV) \int_{-\infty}^{\infty} f$ nu implică existența $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Spre exemplu pentru $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, avem $\int_{-c}^c x dx = 0$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$, dar integralele improprii $\int_{-\infty}^0 x dx$ și $\int_0^{\infty} x dx$ nu există.

Prezentăm în continuare câteva criterii pentru existența integralei improprii a unei funcții f pe $[a, \infty)$.

Pentru început iată un criteriu general de tip Cauchy.

Criteriul lui Cauchy pentru integrale infinite. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$.

Atunci $\int_a^\infty f$ există dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel încât avem

$$\left| \int_c^b f \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $b \geq c \geq K_\varepsilon$.

Următoarele trei criterii vizează funcții care au valori pozitive.

Teorema de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei convergenței monotone pentru integrala infinită (vezi pagina 441), precum și a Teoremei de la pagina 445.

Teoremă. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$.

Atunci $\int_a^\infty f$ există dacă și numai dacă mulțimea $\{I_c \mid c \geq a\}$ este mărginită.

În acest caz

$$\int_a^\infty f = \sup_{c \geq a} \int_a^c f.$$

Rezultatul următor se va utiliza în cadrul demonstrației Teoremei de convergență dominată pentru integrala infinită (vezi pagina 441), precum și al Teoremei de la pagina 446.

Criteriu de comparație cu inegalități pentru integrale infinite.

Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, două funcții integrabile Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, astfel ca

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Atunci, dacă există $\int_a^\infty g$ există și $\int_a^\infty f$.

În plus,

$$0 \leq \int_a^\infty f \leq \int_a^\infty g.$$

Criteriu de comparație la limită pentru integrale infinite. Fie $f, g : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, unde $a \in \mathbb{R}$, două funcții integrabile Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$, astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0.$$

Atunci integralele $\int_a^\infty g$ și $\int_a^\infty f$ au aceeași natură; altfel spus ele există sau nu, simultan.

Un criteriu foarte util, care va fi folosit în cadrul observației de la pagina 430, este următorul:

Criteriu lui Dirichlet pentru integrale infinite. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcție continuă cu proprietatea că există $M \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\left| \int_a^c f \right| \leq M,$$

pentru orice $c \geq a$.

Fie $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție descrescătoare cu proprietatea că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Atunci există integrala $\int_a^\infty fg$.

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \geq K_\varepsilon$ să avem

$$0 \leq g(x) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dacă $b \geq c \geq K_\varepsilon$, conform celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes, punctul c) (vezi pagina 389), există $\zeta \in [c, b]$ astfel ca

$$\int_c^b fg = g(\zeta) \int_c^b f.$$

Deoarece

$$\left| \int_c^\zeta f \right| = \left| \int_a^\zeta f - \int_a^c f \right| \leq \left| \int_a^\zeta f \right| + \left| \int_a^c f \right| \leq 2M,$$

rezultă că, pentru $b \geq c \geq K_\varepsilon$, avem

$$\left| \int_c^b fg \right| \leq \varepsilon,$$

de unde, în conformitate cu criteriul lui Cauchy, există integrala $\int_a^\infty fg$. \square

Observație. Problema definirii integralei improprie pentru funcții având mai mult de o variabilă este mult mai complexă. Spre exemplu, dacă $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și dorim să definim $\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$, ideea cea mai la îndemână este aceea de a o defini ca fiind $\lim_{r \rightarrow \infty} \int \int_{S_r} f(x, y) dx dy$, unde $(S_r)_r$ constituie o familie de mulțimi măsurabile a căror reuniune acoperă \mathbb{R}^2 . Dificultatea constă în multitudinea posibilităților de a alege familiile $(S_r)_r$ și în neexistența unei garanții că diverse alegeri pentru familiile $(S_r)_r$ vor genera aceeași valoare a limitei. Lucrurile decurg "bine" atunci când $f \geq 0$ sau atunci când integrala converge absolut (i.e. atunci când integrala lui $|f|$ este convergentă). Amănunte privind această tematică se pot găsi în **Advanced Calculus**, Gerald B. Folland, Prentice Hall, 2002, paginile 202-206.

Exemple

1. Să se arate că există $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$.
2. Să se arate că există $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ și că valoarea ei este $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Observație. Funcția $x \rightarrow e^{-x^2}$ apare în multe contexte (ca de exemplu în teoria probabilităților sau în statistică). Primitiva acestei funcții nu se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare folosind un număr finit de

operații elementare (vezi Maxwell Rosenlicht, **Integration in finite terms**, American Mathematical Monthly 79, 1972, paginile 963-972, Joseph Fels Ritt, **Integration in finite terms: Liouville's theory of elementary methods**, New York: Colombia University Press; London: Oxford University Press IX, 1948 sau <http://www.sosmath.com/calculus/integration/fant/fant.html>). Formula de mai sus prezintă numărul π într-un nou context care nu are nimic în comun cu noțiunea de cerc.

3. Să se arate că pentru $p > 0$, există $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^p} dx$.

4. Să se arate că integrala $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$, numită integrala lui Fresnel (Augustin Fresnel (1788-1827), matematician și fizician francez), există.

Este de remarcat că $\sin(x^2)$ nu tinde către 0, atunci când x tinde către ∞ .

5. Să se arate că există integrala $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$, unde $\alpha \geq 1$. Să se comenteze cazul $\alpha \in (0, 1)$.

Bibliografie

1. Robert G. Bartle, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

CONVERGENȚA UNIFORMĂ ȘI ABSOLUTĂ

Noțiunea de convergență absolută Noțiunea de convergență uniformă Criterii de convergență uniformă

Ca și în cazul seriilor, putem discuta despre convergența absolută a unei integrale.

Noțiunea de convergență absolută

Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, o funcție integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$.

Atunci $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a, c]$, pentru orice $c > a$.

Deoarece

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

deducem, în baza Criteriului lui Cauchy (vezi pagina 425), că dacă există $\int_a^\infty |f|$, atunci există și $\int_a^\infty f$, și, mai mult, avem

$$\left| \int_a^\infty f \right| \leq \int_a^\infty |f|.$$

Definiție. Fie $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Dacă există $\int_a^\infty |f|$ spunem că f este absolut integrabilă pe $[a, \infty)$ sau că $\int_a^\infty f$ converge absolut.

Observație. $\int_\pi^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ există, dar nu este absolut convergentă.

Într-adevăr, existența acestei integrale este asigurată de criteriul lui Dirichlet (vezi pagina 427).

În plus, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există un interval J_k , de lungime $b > 0$, astfel ca:

$$J_k \subseteq [k\pi, (k+1)\pi]$$

și

$$|\sin x| \geq \frac{1}{2},$$

pentru orice $x \in J_k$.

Atunci

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx &\geq \int_{\pi}^{2\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx + \dots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx \geq \\ &\geq \frac{b}{2} \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{3\pi} + \dots + \frac{1}{k\pi} \right), \end{aligned}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Prin urmare $\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ nu este absolut convergentă.

Noțiunea de convergență uniformă

În multe aplicații este important să considerăm integrale infinite, în care integrantul depinde de un parametru. Pentru a manevara astfel de situații o importanță majoră o are noțiunea de convergență uniformă a integralei în raport cu parametrul.

Definiție. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Să presupunem că există

$$F(t) = \int_a^{\infty} f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$.

Vom spune că această convergență este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$) dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $M_{\varepsilon} \in \mathbb{R}$, astfel ca pentru orice $c \geq M_{\varepsilon}$ și orice $t \in [\alpha, \beta]$, avem

$$\left| F(t) - \int_a^c f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Definiții similare se pot enunța pentru $t \in [\alpha, \infty)$ sau $t \in \mathbb{N}$ (ori, mai general, pentru $t \in M$, unde M este o submulțime arbitrară a lui \mathbb{R}).

Criterii de convergență uniformă

Prezentăm în continuare câteva criterii pentru convergența uniformă.

Criteriul de tip Cauchy prezentat mai jos se va folosi în cadrul demonstrației criteriilor lui Weierstrass și Dirichlet (vezi pagina 432 și 433).

Criteriul lui Cauchy pentru convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Să presupunem că există

$$F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$.

Atunci convergența este uniformă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $b \geq c \geq K_\varepsilon$ și orice $t \in [\alpha, \beta]$ să avem

$$\left| \int_c^b f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Criteriul de mai jos se va folosi în cadrul demonstrației teoremei de la pagina 446.

Criteriul lui Weierstrass privind convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Să presupunem că, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ și orice $c \geq a$, funcția $f(., t)$ este integrabilă pe $[a, c]$ și că există o funcție $M : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel ca

$$|f(x, t)| \leq M(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$ și orice $t \in [\alpha, \beta]$, și că, în plus, există

$$\int_a^\infty M.$$

Atunci, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, integrala $F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$ este (absolut) convergentă, iar convergența este uniformă în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Demonstrație. Evident $\int_a^\infty |f(x, t)| dx$ este convergentă, deci integrala

$$F(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$$

este absolut convergentă, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$.

Pe de altă parte, inegalitatea

$$\left| \int_c^b f(x, t) dx \right| \leq \int_c^b |f(x, t)| dx \leq \int_c^b M(x) dx,$$

împreună cu Criteriul lui Cauchy, implică convergența uniformă în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$. \square

Remarcă. Criteriul lui Weierstrass este util atunci când convergența este absolută și uniformă, dar nu este instrumentul potrivit atunci când convergența este neabsolută și uniformă. În acest caz se apelează la următorul:

Criteriul lui Dirichlet privind convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă.

Să presupunem că există $A \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$\left| \int_a^c f(x, t) dx \right| \leq A$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ și orice $c \geq a$.

În plus, să considerăm funcția $\varphi : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

i) funcția $x \rightarrow \varphi(x, t)$ este descrescătoare, pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$

și

ii) funcția $x \rightarrow \varphi(x, t)$ converge către 0, atunci când x tinde către ∞ , uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$ (adică pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există

$K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \in [K_\varepsilon, \infty)$ și orice $t \in [\alpha, \beta]$ să avem $0 \leq \varphi(x, t) \leq \varepsilon$.

În aceste condiții, integrala

$$F(t) = \int_a^\infty f(x, t) \varphi(x, t) dx$$

converge uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $K_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \in [K_\varepsilon, \infty)$ și orice $t \in [\alpha, \beta]$ să avem

$$0 \leq \varphi(x, t) \leq \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Dacă $b \geq c \geq K_\varepsilon$, conform celei de a doua teoreme de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes (vezi pagina 389), pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$, există $\xi_t \in [c, b]$ astfel ca

$$\int_c^b \varphi(x, t) f(x, t) dx = \varphi(c, t) \int_c^{\xi_t} f(x, t) dx.$$

Prin urmare, pentru $b \geq c \geq K_\varepsilon$ și $t \in [\alpha, \beta]$, avem

$$\left| \int_c^b f(x, t) \varphi(x, t) dx \right| \leq \varphi(c, t) 2A < \varepsilon,$$

de unde, conform Criteriului lui Cauchy, convergența este uniformă. \square

Exemple-Exerciții

1. Integrala $\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+x^2} dx$ converge uniform în raport cu $t \in \mathbb{R}$.
2. Integrala $\int_0^\infty e^{-x} x^t dx$ converge uniform în raport cu $t \in [0, \beta]$, pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, dar nu converge uniform în raport cu $t \in [0, \infty)$.
3. Integrala $\int_0^\infty e^{-tx} \sin(x) dx$ converge uniform în raport cu $t \in [\gamma, \infty)$, pentru orice $\gamma \in (0, \infty)$.

4. Integrala $\int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x} dx$, unde funcția de sub integrală se consideră a lua valoarea 1 pentru $x = 0$, converge uniform în raport cu $t \in [0, \infty)$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRALA IMPROPRIE (INFINITĂ) CU PARAMETRU

Continuitatea în raport cu parametrul Teorema de inversare a ordinii de integrare Derivabilitatea în raport cu parametrul

Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă.
Se presupune că există

$$F(t) = \int_a^{\infty} f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$.

Vom arăta că dacă această convergență este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$), atunci F este continuă, iar integrala sa poate fi calculată schimbând ordinea de integrare. Un rezultat similar va fi demonstrat pentru derivată.

Continuitatea în raport cu parametrul

Teorema de continuitate în raport cu parametrul pentru integrale infinite. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă astfel ca pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$ există $F(t) = \int_a^{\infty} f(x, t) dx$, iar această convergență este uniformă (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$).

Atunci F este continuă.

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $F_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t) dx.$$

Conform Teoremei de continuitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann cu parametru (vezi pagina 396), pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcția F_n este continuă.

Cum șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către F , deducem, folosind teorema de la pagina 220, că funcția F este continuă. \square

Rezultatul de mai jos se va dovedi util în cadrul demonstrației Teoremelor de la paginile 446 și 448.

Teorema de inversare a ordinii de integrare

Teoremă. În ipotezele anterioare, avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt = \int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right) dx,$$

adică

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt = \int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right) dx.$$

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $F_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t) dx.$$

Atunci, conform Teoremei de inversare a ordinii de integrare a ordinii de integrare pentru integrala Riemann (vezi pagina 400), avem

$$\int_{\alpha}^{\beta} F_n(t) dt = \int_{\alpha}^{a+n} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right) dx.$$

Cum șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către F , deducem, folosind teorema de permutare a limitei cu integrala de la pagina 366, că

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt = \int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right) dx. \quad \square$$

Derivabilitatea în raport cu parametrul

Teorema de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrale infinite. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă având următoarele proprietăți:

- i) $\frac{\partial f}{\partial t}$ este continuă;
- ii) există

$$F(t) = \int_a^{\infty} f(x, t) dx,$$

pentru orice $t \in [\alpha, \beta]$;

- iii) $G(t) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$ converge uniform (în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$).

Atunci F este derivabilă și

$$F' = G.$$

Altfel spus, avem

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) = \int_a^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, fie $F_n : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$F_n(t) = \int_a^{a+n} f(x, t) dx.$$

Atunci, conform Teoremei de derivabilitate în raport cu parametrul pentru integrala Riemann cu parametru (vezi pagina 397), F_n este derivabilă și

$$F'_n(t) = \int_a^{a+n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Cum șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge către F , iar șirul $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către G , deducem, folosind Teorema de permutare a limitei cu derivata (vezi pagina 291), că

$$F' = G. \quad \square$$

Exemple

1. Pentru $0 < \alpha < \beta$ avem

$$\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx.$$

- 2.

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Funcția Γ este continuă pe $(1, \infty)$.

4. Pentru $t \geq 0$ și $u \geq 0$,

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin(ux)}{x} dx = \arctg\left(\frac{u}{t}\right).$$

În particular, avem

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin(ux)}{x} dx,$$

unde $u > 0$.

Observație. Problema calculului valorilor unor integrale improprii precum cea de mai sus și cea a integralei lui Fresnel (vezi pagina 428), dar nu numai, se va relua în cadrul cursului de Analiză Complexă ca o aplicație a teoremei reziduurilor (vezi P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, **Analiză Matematică (Funcții Complexe)**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982, paginile 121-133).

Bibliografie

1. Robert G. Bartle, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

ȘIRURI DE INTEGRALE IMPROPRII (INFINITE)

Teorema de convergență dominată a lui Lebesgue pentru integrale infinite

Teorema de convergență monotonă pentru integrale infinite

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Presupunem că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $\int_a^\infty f_n$ și că există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Am dori să vedem în ce condiții există $\int_a^\infty f$ și are loc relația

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n = \int_a^\infty f.$$

Să observăm că dacă definim

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1, n] \\ 0, & x \in (n, \infty) \end{cases},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, atunci există $\int_1^\infty f_n$, șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit, crescător și converge uniform către o funcție continuă, care nu este integrabilă pe $[1, \infty)$.

Așadar, în general, nu există $\int_a^\infty f$.

Mai mult, dacă definim

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, n^2] \\ 0, & x \in (n^2, \infty) \end{cases},$$

unde $n \in \mathbb{N}$, atunci există $\int_0^\infty g_n$, șirul $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit și converge uniform către o funcție g pentru care există $\int_0^\infty g$, dar egalitatea $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n = \int_0^\infty g$ nu este valabilă.

Așadar, în general

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} f_n \neq \int_a^{\infty} f.$$

Prezentăm mai jos două rezultate care furnizează condiții suficiente pentru existența $\int_a^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ și pentru asigurarea egalității $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} f_n = \int_a^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Primul dintre ele se dovedește util în cadrul rezolvării exercițiilor 3 și 4 de la pagina 450.

Teorema de convergență dominată pentru integrale infinite

Teorema de convergență dominată pentru integrale infinite. *Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Să presupunem că pentru orice $c \in (a, \infty)$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, f și f_n sunt integrabile Riemann pe $[a, c]$ și că există o funcție $M : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ având următoarele proprietăți:

$$i) \text{ există } \int_a^{\infty} M;$$

ii)

$$|f_n(x)| \leq M(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci există $\int_a^{\infty} f$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} f_n = \int_a^{\infty} f = \int_a^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Demonstrație. Utilizând Criteriul de comparație cu inegalități (vezi pagina 426) și ipoteza, rezultă, conform considerațiilor de la pagina 418, că există $\int_a^{\infty} f$ și $\int_a^{\infty} f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Existența $\int_a^\infty M$, ne asigură că pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $K \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\int_K^\infty M < \varepsilon,$$

deci

$$\int_K^\infty f_n < \varepsilon,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și

$$\int_K^\infty f < \varepsilon.$$

În conformitate cu Teorema de convergență dominată pentru integrala Riemann (vezi pagina 368), avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^K f_n = \int_a^K f,$$

deci pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\left| \int_a^K f_n - \int_a^K f \right| < \varepsilon.$$

Prin urmare, pentru un astfel de n , avem

$$\begin{aligned} \left| \int_a^\infty f - \int_a^\infty f_n \right| &\leq \left| \int_a^K f - \int_a^K f_n \right| + \left| \int_K^\infty f - \int_K^\infty f_n \right| \leq \\ &\leq \left| \int_a^K f - \int_a^K f_n \right| + \left| \int_K^\infty f \right| + \left| \int_K^\infty f_n \right| < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\left| \int_a^\infty f - \int_a^\infty f_n \right| \leq 3\varepsilon$$

i.e.

$$\int_a^\infty f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n. \quad \square$$

Teorema de convergență monotonă pentru integrale infinite

Teorema convergenței monotone pentru integrale infinite. *Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit și crescător de funcții $f_n : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $a \in \mathbb{R}$.*

Să presupunem că există $\int_a^\infty f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și fie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(x),$$

pentru orice $x \in [a, \infty)$,

Atunci există $\int_a^\infty f$ dacă și numai dacă mulțimea $\{\int_a^\infty f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită.

În acest caz

$$\int_a^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \int_a^\infty f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^\infty f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n.$$

Demonstrație. Fără pierderea generalității, putem presupune că

$$f_n(x) \geq 0,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și pentru orice $x \in [a, \infty)$.

Șirul $(\int_a^\infty f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător.

Dacă există $\int_a^\infty f$, conform Teoremei de convergență dominată pentru integrale infinite (vezi pagina 441), avem

$$\int_a^\infty f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^\infty f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n.$$

Reciproc, presupunem că mulțimea $\{\int_a^\infty f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mărginită și fie

$$S = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^\infty f_n.$$

Pentru $c > a$, avem, conform cu Teorema de convergență monotonă pentru integrala Riemann (vezi pagina 371),

$$\int_a^c f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^c f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c f_n. \quad (*)$$

Deoarece $f_n \geq 0$, deducem că pentru orice $c > a$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$\int_a^c f_n \leq \int_a^\infty f_n \leq S,$$

de unde, folosind (*), prin trecere la limită după n tinzând la ∞ , ducem că

$$\int_a^c f \leq S.$$

Atunci, în conformitate cu Teorema de la pagina 426, $\int_a^\infty f$ există și

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f &= \sup_c \int_a^c f = \sup_c \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^c f_n \right\} = \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_c \int_a^c f_n \right\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_a^\infty f_n. \quad \square \end{aligned}$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

INTEGRALE IMPROPRII (INFINITE) ITERATE

În Teorema de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 437) am obținut un rezultat care permite permutarea ordinii de integrare pe o mulțime de tipul $\{(x, t) \mid x \in [a, \infty), t \in [\alpha, \beta]\}$. Este de dorit să putem schimba ordinea de integrare și pentru integrale infinite iterate, adică să stabilim în ce ipoteze avem egalitatea

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt = \int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt \right) dx.$$

Teoremă. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, unde $a, \alpha \in \mathbb{R}$. Să presupunem că

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt \right) dx, \quad (*)$$

pentru orice $b \geq a$ și că

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt = \int_a^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt \right) dx, \quad (**)$$

pentru orice $\beta \geq \alpha$.

În aceste condiții, dacă una dintre integralele iterate

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt,$$

$$\int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt \right) dx$$

există, atunci există și cealaltă și ele sunt egale.

Demonstrație. Să presupunem că există $\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt$.

Deoarece f este pozitivă avem

$$\int_a^b f(x, t) dx \leq \int_a^\infty f(x, t) dx,$$

pentru orice $b \geq a$ și orice $t \in [\alpha, \infty)$.

Prin urmare

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt \leq \int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt,$$

de unde folosind (*), avem

$$\int_a^b \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx \leq \int_\alpha^\infty \left\{ \int_a^\infty f(x, t) dx \right\} dt,$$

pentru orice $b \geq a$.

Folosind Teorema de la pagina 426, deducem că există $\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx$ și
că

$$\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx \leq \int_\alpha^\infty \left\{ \int_a^\infty f(x, t) dx \right\} dt.$$

Similar se obține inegalitatea inversă, de unde concluzia. \square

Teoremă. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă.

Să presupunem că funcțiile $M : [a, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ și $N : [\alpha, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ au proprietatea că există $\int_a^\infty M$ și $\int_\alpha^\infty N$.

Dacă, pentru orice $(x, t) \in [a, \infty) \times [\alpha, \infty)$, avem

$$|f(x, t)| \leq M(x)N(t),$$

atunci integralele iterate

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt$$

și

$$\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx$$

există și sunt egale.

Demonstrație. Deoarece N este mărginită pe orice interval $[\alpha, \beta]$, folosind Criteriul lui Weierstrass (vezi pagina 432), deducem că integrala

$$\int_a^\infty f(x, t) dx$$

converge uniform în raport cu $t \in [\alpha, \beta]$.

Atunci, conform Teoremei de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 437), avem

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt = \int_a^\infty \left(\int_\alpha^\beta f(x, t) dt \right) dx,$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$,

Similar

$$\int_\alpha^\infty \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx,$$

pentru orice $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Pentru a încheia demonstrația se apelează la Criteriul de comparație cu inegalități (vezi pagina 426) pentru a justifica existența integralelor $\int_\alpha^\infty \left(\int_a^\infty f(x, t) dx \right) dt$

și $\int_a^\infty \left(\int_\alpha^\infty f(x, t) dt \right) dx$ și la teorema anterioară pentru a justifica egalitatea lor.

□

Rezultatele precedente au vizat cazul în care integralele iterate sunt absolut convergente, în timp ce următorul tratează cazul convergenței neabsolute. El este util în rezolvarea exercițiilor 1 și 2 din acest capitol.

Teoremă. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o funcție continuă.

Să presupunem că integralele infinite $\int_a^\infty f(x, t)dx$ și $\int_\alpha^\infty f(x, t)dt$ converg uniform în raport cu $t \in [\alpha, \infty)$, respectiv $x \in [a, \infty)$.

În plus, dacă definim, pentru orice $x \in [a, \infty)$ și $t \in [\alpha, \infty)$,

$$F(x, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x, t)dt,$$

să presupunem că integrala

$$\int_a^\infty F(x, \beta)dx$$

converge uniform în raport cu $\beta \in [\alpha, \infty)$.

Atunci integralele $\int_\alpha^\infty (\int_a^\infty f(x, t)dx)dt$ și $\int_a^\infty (\int_\alpha^\infty f(x, t)dt)dx$ există, și

$$\int_\alpha^\infty (\int_a^\infty f(x, t)dx)dt = \int_a^\infty (\int_\alpha^\infty f(x, t)dt)dx.$$

Demonstrație. Deoarece integrala

$$\int_a^\infty F(x, \beta)dx$$

converge uniform în raport cu $\beta \in [\alpha, \infty)$, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $A_\varepsilon \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru $A \geq A_\varepsilon$ să avem

$$\left| \int_a^A F(x, \beta)dx - \int_a^\infty F(x, \beta)dx \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

pentru orice $\beta \geq \alpha$.

Să observăm că

$$\int_a^A F(x, \beta)dx = \int_a^A (\int_\alpha^\beta f(x, t)dt)dx = \int_\alpha^\beta (\int_a^A f(x, t)dt)dx.$$

Atunci, din convergența uniformă a integralei $\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt$ în raport cu $x \in [a, \infty)$, deducem că

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^A F(x, \beta) dx = \int_a^A \left(\int_{\alpha}^{\infty} f(x, t) dt \right) dx.$$

Drept urmare, există $B \geq \alpha$ astfel ca pentru $\beta_1 \geq \beta_2 \geq B$ să avem

$$\left| \int_a^A F(x, \beta_2) dx - \int_a^A F(x, \beta_1) dx \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Din (1) și (2), deducem că, pentru $\beta_1 \geq \beta_2 \geq B$, avem

$$\left| \int_a^{\infty} F(x, \beta_2) dx - \int_a^{\infty} F(x, \beta_1) dx \right| < 3\varepsilon,$$

deci există $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} F(x, \beta) dx$.

Avem, folosind Teorema de inversare a ordinii de integrare (vezi pagina 437), obținem

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^{\beta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dt \right) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^{\infty} F(x, \beta) dx,$$

deci există

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt.$$

Trecând la limită după β tinzând către ∞ , în (1), deducem că

$$\left| \int_{\alpha}^A \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dt \right) dx - \int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} f(x, t) dx \right) dt \right| \leq \varepsilon,$$

de unde, prin trecere la limită după A tinzând către ∞ , se deduce concluzia.

□

Exerciții

1. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+t)} \sin(xt) dx \right) dt = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+t)} \sin(xt) dt \right) dx.$$

2. Să se arate că, pentru $a > 0$ și $\alpha > 0$,

$$\int_{\alpha}^{\infty} \left(\int_a^{\infty} e^{-xt} dx \right) dt = \int_a^{\infty} \left(\int_{\alpha}^{\infty} e^{-xt} dt \right) dx.$$

3. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

FUNCȚIILE GAMA ȘI BETA

Funcția Gama

Funcția Beta

Legătura dintre funcțiile Gama și Beta

Funcția Gama (introdusă și studiată de către Euler în anii 1730) reprezintă o generalizare a conceptului de factorial la numere reale (și, așa cum se poate constata după parcurgerea cursului de funcții complexe, la numere complexe). Ea constituie o prezență consistentă în cadrul teoriei probabilităților, statisticii și combinatoricii. În strânsă legătură cu funcția Gama este funcția Beta.

Funcția Gama

Funcția $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dată de

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$, se numește funcția Gama.

Această funcție are următoarele proprietăți:

a)

$$\Gamma(1) = 1;$$

b)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

c)

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$; în particular, avem

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

d)

$$\Gamma(2x) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2});$$

e)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \Gamma(x) = 1;$$

prin urmare, funcția Γ nu este mărginită;

f)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+a)}{x^a \Gamma(x)} = 1,$$

pentru orice $a \in (0, \infty)$;

g) Γ este o funcție convexă de clasă \mathcal{C}^∞ .

Funcția Beta

Funcția $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ dată de

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$, se numește funcția Beta.

Această funcție are următoarele proprietăți:

a)

$$B(x, y) = B(y, x),$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$;

b)

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt,$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$;

c)

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du,$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Legătura dintre funcțiile Gama și Beta

Legătura dintre cele două funcții este dată de formula

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$.

Observație. Cititorul interesat poate afla detalii privind cele două funcții consultând următoarele lucrări:

E. Artin, **The Gamma Function**, New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1964.

Philip J. Davis, **Leonhard Euler's integral: A historical profile of the Gamma function**, The American Mathematical Monthly, 66 (10), 1959, 849-869.

O. Stănășilă, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29626

G.E. Șilov, **Analiză Matematică**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32958

Exerciții

1. Să se arate că

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right),$$

unde $a \in (0, \infty)$ și $m \in (-1, \infty)$.

2. Să se arate că

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

pentru orice $x \in (0, 1)$.

3. Să se arate că

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \frac{\ln 2\pi}{2}.$$

4. Să se arate că

$$2^{2x} \frac{\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = 2\sqrt{\pi},$$

pentru orice $x \in (0, \infty)$.

5. Să se arate că:

i)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t g^a(x) dx = \frac{\pi}{2 \cos(\pi \frac{a}{2})},$$

unde $a \in (-1, 1)$;

ii)

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{3 - \cos x}} dx = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} (\Gamma(\frac{1}{4}))^2;$$

iii)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}(x) dx = 2^{a-2} B(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}),$$

unde $a \in (0, \infty)$.

6. Să se arate că

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty} (e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^a}) \frac{1}{x} dx.$$

7. Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a B(a, x) = \Gamma(a),$$

unde $a \in (0, \infty)$.

FORMULA LUI de MOIVRE-STIRLING

When Newton said "If I have seen a little farther than others it is because I have stood on the shoulders of giants", one of those giants was John Wallis. ... His Arithmetica Infinitorum, published in 1655, derives the rule (found also by Fermat) for the integral of a fractional power of x : $\int_0^1 x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{n+m}$. Our interest lies in one of the applications he makes of this rule, an infinite process that yields a value for π . It does not involve an infinite series but rather an infinite product. It is included because it demonstrates an audacious use of the infinite, it motivated Newton's calculation of π , and it yields a useful formula that will play an important role in estimating the size of $n!$.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, pagina 271

An accurate approximation of $n!$ was discovered in 1730 in a collaboration between Abraham de Moivre (1667-1754) and James Stirling (1692-1770). ... One of the first things one observes about $n!$ is that it grows very fast. ... we can say with confidence that ... $n! \approx n^n e^{-n}$. To refine this approximation any further, we need to turn to infinite series. We shall follow de Moivre's original argument which he published in 1730. The reader is forewarned that it is intricate. de Moivre did not simply sit down and write this out, it is product of nine years of work, the last five of which involved the frequent sharing of ideas with James Stirling.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 294, 296 și 297

Formula lui Wallis Formula lui de Moivre-Stirling

Formula lui Wallis

Se poate constata ușor că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{2\Gamma(n + 1)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \frac{\pi}{2}$$

și că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{2\Gamma(n+\frac{3}{2})} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Prin integrarea inegalităților

$$(\sin x)^{2n+1} \leq (\sin x)^{2n} \leq (\sin x)^{2n-1},$$

valabile pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, folosind relațiile de mai sus, se constată validitatea următoarei relații care este cunoscută sub numele de formula lui Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

Notă istorică. *John Wallis* (1616 - 1703), matematician englez, a studiat la James Movat's grammar school din Tenterden, Kent, la Martin Holbeach's school din Felsted, Essex (unde învață latină și greacă), la Emmanuel College și Queen's College din Cambridge. În 1649, având în vedere ajutorul acordat (prin decodarea mesajelor "regaliștilor") de către Wallis, în cadrul războiului civil, taberei susținătorilor ideii de Parlament în detrimentul susținătorilor Regalității, a fost numit, chiar de către Cromwell (care-l aprecia, nu numai datorită vederilor sale politice, ci și datorită cunoștințelor sale), titular al Savilian Chair of Geometry de la Oxford, în locul titularului anterior care avea simpatii "regaliste". A fost titularul acestei catedre până la sfârșitul vieții, adică peste 50 de ani. Wallis, considerat ca fiind cel mai important matematician englez de până la Newton, a contribuit, în mod substanțial, la elaborarea bazelor analizei matematice. Cea mai cunoscută lucrare a lui Wallis (apărută în 1656), care conține și formula de mai sus (descoperită datorită încercărilor de a calcula $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$, și deci de a determina aria unui cerc de rază 1), se intitulează *Arithmetica infinitorum*. Sunt prezentate aici metode, utilizate ulterior de către Newton, pentru calculul integralelor. Wallis a fost primul care a utilizat simbolul ∞ (ales pentru că semnifică o curbă ce poate fi parcursă de o infinitate de ori).

Formula lui de Moivre-Stirling

Formula lui Stirling ne furnizează o aproximare simplă și utilă a lui $n!$ pentru valori mari ale lui n . Ea ne precizează comportarea asimptotică, la ∞ , a lui $n!$.

Teoremă (formula lui de Moivre-Stirling)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Notă istorică. *Abraham de Moivre* (1667 - 1754), matematician francez, a studiat la Academia Protestantă din Sedan unde a studiat limba greacă, precum și la Collège de Harcourt din Paris. de Moivre fiind protestant, din cauza persecuțiilor religioase existente în Franța la aceea vreme, va petrece o perioadă în închisoare pentru ca apoi să emigreze în Anglia în 1688. Aici se împrietenește cu Halley și Newton. Face o primă comunicare cu titlul "Method of fluxions" la Royal Society, al cărei membru devine în 1697. În 1710 de Moivre este numit ca membru al comisiei numite de Royal Society pentru a judeca disputa dintre Newton și Leibniz cu privire la prioritatea inventării bazelor calculului diferențial și integral. de Moivre a contribuit la dezvoltarea geometriei analitice, teoriei probabilităților (a publicat, în 1718, o lucrare de referință în acest domeniu, intitulată "The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play", reeditată în 1738 și 1756) și a statisticii (a publicat, în 1724, o lucrare cu titlul "Annuities on lives"). În lucrarea sa "Miscellanea Analytica", apărută în 1730, se găsește așa numita formulă a lui Stirling (atribuită în mod eronat lui Stirling). În cea de a doua ediție a acestei cărți, apărută în 1738, de Moivre menționează contribuția lui Stirling la îmbunătățirea formulei. A avut contribuții însemnate la dezvoltarea teoriei numerelor complexe. A fost ales membru al Academiei de Științe din Paris, în 1754. Deși, având în vedere meritele sale științifice incontestabile, de Moivre a primit sprijin din partea lui Leibniz, Newton și Halley pentru a obține o catedră universitară, acest lucru nu s-a realizat, venitul său principal provenind din lecții particulare și murind în sărăcie.

Notă istorică. *James Stirling* (1692 - 1770), matematician scoțian, a studiat la Oxford, Padova și Veneția și a condus Compania Minieră Scoțiană. Opera sa principală o constituie tratatul (publicat în 1730) intitulat *Methodus Differentialis*, tratat care conține și celebra formulă care-i poartă numele,

precum și chestiuni legate de funcția Gama. O altă contribuție însemnată a lui Stirling o constituie memoriul intitulat "Twelve propositions concerning the figure of the Earth", susținut în anul 1735 la Royal Society și a cărui variantă extinsă a apărut sub numele "Of the figure of the Earth, and the variation of gravity on the surface", în anul 1735. A purtat corespondențe cu mari matematicieni ai vremii, precum Newton, De Moivre, Maclaurin și Euler. La propunerea prietenului său Newton, a fost ales membru al Royal Society of London. A fost de asemenea membru al Academiei Regale din Berlin.

Vom începe prin a demonstra următoarele două leme.

Lema 1. *Pentru orice $p, x \in (0, \infty)$, are loc inegalitatea*

$$e^x < \left(1 + \frac{x}{p}\right)^{p+\frac{x}{2}}.$$

În particular, pentru $x = 1$, obținem că

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrație. Inegalitatea considerată este echivalentă cu

$$0 < \left(p + \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{p}\right) - x.$$

Pentru $x \in (0, \infty)$, să considerăm funcția $f_x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f_x(p) = \left(p + \frac{x}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{x}{p}\right) - x,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$.

Inegalitatea considerată se scrie sub forma

$$0 < f_x(p),$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$.

Deoarece

$$f'_x(p) = \ln\left(\frac{p+x}{p}\right) - \frac{x}{p} \frac{p+\frac{x}{2}}{p+x}$$

și

$$f_x''(p) = \frac{x^3}{2p^2(p+x)^2} > 0,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$, deducem că f_x' este crescătoare, deci

$$f_x'(p) < \lim_{p \rightarrow \infty} f_x'(p) = 0,$$

ceea ce arată că f_x este descrescătoare și ca atare avem

$$f_x(p) > \lim_{p \rightarrow \infty} f_x(p) = 0,$$

pentru orice $p \in (0, \infty)$, i.e. concluzia.

Lema 2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc inegalitatea

$$\frac{2}{2n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

Demonstrație. Să considerăm funcțiile $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ date de

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{2}{2x+1}$$

și

$$g(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{2x+1}{2x(x+1)},$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Se constată ușor că

$$f'(x) = -\frac{1}{4x(x+1)(2x+1)^2} < 0$$

și

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2(x+1)^2} < 0,$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Așadar f și g sunt descrescătoare pe $[1, \infty)$ și prin urmare

$$f(x) \leq f(1) = \ln 2 - \frac{2}{3} < 0$$

și

$$g(x) > \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

pentru orice $x \in [1, \infty)$.

Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem

$$f(n) < 0 < g(n),$$

ceea ce echivalează cu concluzia.

Observație. *Anterior, în cadrul prezentului curs (vezi pagina 167), am stabilit că inegalitatea*

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Lema 2 este o întărire a acestui rezultat deoarece media armonică a numerelor $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n+1}$ este $\frac{2}{2n+1}$, iar media aritmetică a lor este $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

Acum putem începe demonstrația formulei lui Stirling.

Cu notația

$$x_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}},$$

avem, conform lemei 1,

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e} > 1, \quad (*)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce arată că șirul $(x_n)_n$ este descrescător.

Cum el este minorat de 0, deducem că, în conformitate cu Teorema convergenței monotone (vezi pagina 138), este convergent, deci există $l \in [0, \infty)$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l.$$

Vom arăta că

$$l > 0.$$

Prin logaritmare, folosind (*), obținem

$$\ln x_n - \ln x_{n+1} = (n + \frac{1}{2})[\ln(n+1) - \ln n] - 1,$$

de unde, conform lemei 2, avem

$$0 < \ln x_n - \ln x_{n+1} < (n + \frac{1}{2}) \frac{2n+1}{2n(n+1)} - 1 = \frac{1}{4} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}),$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Atunci, pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, prin adunarea inegalităților de tipul celei de mai sus scrise succesiv pentru indicii $n, n+1, \dots, n+k-1$, obținem

$$0 < \ln x_n - \ln x_{n+k} < \frac{1}{4} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}),$$

i.e.

$$1 < \frac{x_n}{x_{n+k}} < e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k})},$$

adică

$$e^{\frac{1}{4}(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n})} < \frac{x_{n+k}}{x_n} < 1.$$

Prin trecere la limită, după k tinzând la ∞ , în inegalitatea anterioară, obținem

$$e^{-\frac{1}{4n}} \leq \frac{l}{x_n},$$

deci

$$l \neq 0.$$

Acum să observăm că

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \sqrt{\frac{2}{n}},$$

de unde

$$\frac{x_n^2}{x_{2n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prin trecere la limită în relația de mai sus, având în vedere formula lui Wallis, deducem că

$$l = \sqrt{2\pi},$$

i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi}.$$

Observație. Formula lui Stirling se poate generaliza sub următoarea formă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}} = \sqrt{2\pi}.$$

Detalii se pot găsi în *Gerald B. Folland, Advanced Calculus*, Prentice Hall, 2002, paginile 350-353.

Exerciții

1. Să se arate că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \Gamma(x + \frac{1}{2})}{\Gamma(x + 1)} = 1.$$

Bibliografie

1. *Gerald B. Folland, Advanced Calculus*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 2002.
2. *Andrei Vernescu, Numărul e și Matematica Exponențială*, Editura Universității din București, 2004 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București

FUNCTȚII CU VARIAȚIE MĂRGINITĂ

O funcție reală $f(t)$, definită pe $[a, b]$, este cu variație mărginită pe $[a, b]$, dacă există un număr K , astfel încât, oricare ar fi diviziunea $\Delta = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$, avem $v(\Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq K$ (*). Pentru a înțelege sensul intuitiv al acestei noțiuni, este suficient să observăm semnificația expresiei lui $v(\Delta)$. Numărul $v(\Delta)$ însumează toate modificările pe care le suferă funcția pe parcursul de la a la b , dacă se face abstracție de valorile pe care le ia în interiorul intervalelor care alcătuiesc diviziunea Δ . Este clar atunci că pentru a avea o măsură cât mai bună a modificărilor pe care valorile funcției le suferă între a și b este indicat să îndesim cât mai mult punctele diviziunii Δ . Cum numărul $v(\Delta)$ nu scade atunci când adăugăm noi puncte diviziunii Δ , este natural să se îndrepte atenția asupra celui mai mic număr K cu proprietatea (*). Acest număr va da cea mai bună măsură a modificărilor pe care funcția $f(t)$ le suferă pe segmentul $[a, b]$.

Solomon Marcus, Noțiuni de analiză matematică, Editura Științifică, București, 1967, paginile 83 și 84

Noțiunea de funcție cu variație mărginită

Clase de funcții cu variație mărginită

Caracterizarea alternativă a funcțiilor cu variație mărginită

Calculul variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă

Noțiunea de funcție cu variație mărginită

Definiție. Pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ și $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ o partiție a lui $[a, b]$, definim variația lui f corespunzătoare lui P , notată cu $V_P(f)$, ca fiind

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|.$$

Dacă mulțimea $\{V_P(f) \mid P \text{ este o partiție a lui } [a, b]\}$ este mărginită, atunci spunem că f este cu variație mărginită și în acest caz numărul real pozitiv

$$\sup\{V_P(f) \mid P \text{ este o partiție a lui } [a, b]\}$$

se notează cu $\overset{b}{V}_a(f)$ și se numește variația totală a lui f pe $[a, b]$.

Observație. O funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ se numește drum, iar imaginea sa se numește suportul drumului considerat. Deoarece $V_P(f)$ reprezintă lungimea liniei poligonale determinate de punctele $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, este natural să spunem că suportul drumului $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ are lungime (este rectificabil) dacă $\sup\{V_P(f) \mid P \text{ este o partiție a lui } [a, b]\}$ este finit și să-l numim lungimea suportului drumului f . Așadar suportul drumului f are lungime (este rectificabil) dacă și numai dacă f este cu variație mărginită și în acest caz lungimea suportului drumului f este egală cu $\overset{b}{V}_a(f)$.

Pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dată de $F(x) = (x, f(x))$, pentru orice $x \in [a, b]$, este cu variație mărginită, vom numi lungimea graficului lui f variația totală a funcției F .

Rezultatul următor arată că studiul funcțiilor cu variație mărginită se poate reduce la studiul cazului în care funcția este cu valori în \mathbb{R} .

Propoziție. O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$, având componentele f_1, \dots, f_p , este cu variație mărginită dacă și numai dacă funcțiile f_1, \dots, f_p sunt cu variație mărginită.

Demonstrație. Deoarece pentru orice partiție $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a, b]$, avem

$$|f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})| \leq \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{i=1}^p |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})|,$$

pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ și $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, deducem că

$$\sum_{k=1}^n |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p |f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})|,$$

i.e.

$$V_P(f_i) \leq V_P(f) \leq \sum_{i=1}^p V_P(f_i),$$

ceea ce încheie demonstrația.

Rezultatul următor dovedește că proprietatea de a fi cu variație mărginită se păstrează prin restricționarea funcției la un subinterval al intervalului inițial.

Propoziție. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție cu variație mărginită și $[c, d] \subseteq [a, b]$. Atunci $f|_{[c, d]}$ este cu variație mărginită și*

$$V_c^d(f) \leq V_a^b(f).$$

Demonstrație. Dacă $P = (c = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = d)$ este o partiție arbitrară a lui $[c, d]$, atunci $Q = (a = x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = b)$ este o partiție a lui $[a, b]$ și avem

$$V_P(f) = \sum_{k=2}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n+1} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| = V_Q(f) \leq V_a^b(f),$$

de unde $f|_{[c, d]}$ este cu variație mărginită și

$$V_c^d(f) \leq V_a^b(f).$$

Corolar. *Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție cu variație mărginită. Atunci funcția $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de*

$$f_1(x) = V_a^x(f),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ este crescătoare.

Rezultatul de mai jos arată că familia funcțiilor cu variație mărginită constituie o subclasă a funcțiilor mărginite.

Propoziție. *O funcție cu variație mărginită $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ este mărginită.*

Demonstrație. Pentru $x \in [a, b]$, P_x fiind partiția lui $[a, x]$ formată numai din capetele acestui interval, avem

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &\leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(a)\| = V_{P_x}(f) + \|f(a)\| \leq \\ &\leq V_a^x(f) + \|f(a)\| \leq V_a^b(f) + \|f(a)\|, \end{aligned}$$

ceea ce arată că f este mărginită.

Rezultatul de mai jos, care se va dovedi util în cadrul demonstrației Teoremei lui Jordan (vezi pagina 468), semnalează aditivitatea de domeniu a variației totale.

Propoziție. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție cu variație mărginită și $c \in [a, b]$. Atunci

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Demonstrație. Fie $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ o partiție arbitrară a lui $[a, b]$.

Atunci există $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât

$$c \in [x_{j-1}, x_j].$$

Să considerăm $P_c = (a = x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, c, x_j, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ partiție a lui $[a, b]$, $P' = (a = x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, c)$ partiție a lui $[a, c]$ și $P'' = (c, x_j, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ partiție a lui $[c, b]$.

Avem

$$\begin{aligned} V_P(f) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(x_j) - f(x_{j-1})\| \leq \\ &\leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(x_j) - f(c)\| + \|f(c) - f(x_{j-1})\| = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{j-1} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| + \|f(c) - f(x_{j-1})\| \right] + \\ &+ [\|f(x_j) - f(c)\| + \sum_{k=j+1}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\|] = \\ &= V_{P'}(f) + V_{P''}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f), \end{aligned}$$

de unde

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f). \quad (*)$$

Să considerăm $P_1 = (a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = c)$ o partiție arbitrară a lui $[a, c]$ și $P_2 = (c = s_0, s_1, \dots, s_{m-1}, s_m = b)$ o partiție arbitrară a lui $[c, b]$.

Fie $P^* = (a = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n, s_1, \dots, s_{m-1}, s_m = b)$ partiția lui $[a, b]$ formată din puntele lui P_1 și P_2 .

Atunci

$$V_{P_1}(f) + V_{P_2}(f) = V_{P^*}(f) \leq \overset{b}{V}_a(f),$$

de unde

$$\overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f) \leq \overset{b}{V}_a(f). \quad (**)$$

Din (*) și (**) rezultă că

$$\overset{c}{V}_a(f) + \overset{b}{V}_c(f) = \overset{b}{V}_a(f).$$

Clase de funcții cu variație mărginită

Propoziție. *O funcție monotonă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este cu variație mărginită și*

$$\overset{b}{V}_a(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Demonstrație. Fără pierderea generalității, putem presupune că f este crescătoare.

Atunci, pentru orice partiție $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a, b]$, avem

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = f(b) - f(a),$$

de unde deducem că f este cu variație mărginită și

$$\overset{b}{V}_a(f) = |f(b) - f(a)|.$$

Propoziție. *O funcție Lipschitz $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ este cu variație mărginită.*

Demonstrație. Deoarece f este Lipschitz, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M |x - y|,$$

pentru orice $x, y \in [a, b]$.

Atunci, pentru orice partiție $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b)$ a lui $[a, b]$, avem

$$V_P(f) = \sum_{k=1}^n \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^n M |x_k - x_{k-1}| = M(b - a),$$

de unde deducem că f este cu variație mărginită.

Corolar. *O funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă și cu derivata mărginită este cu variație mărginită.*

Propoziție. *Pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) f este constantă;

ii) f este cu variație mărginită și $V_a^b(f) = 0$.

Demonstrație. Implicația $i) \Rightarrow ii)$ este imediată.

Pentru implicația $ii) \Rightarrow i)$ să considerăm, pentru $x \in [a, b]$, P_x partiția lui $[a, b]$ dată de punctele a, x și b .

Avem

$$0 \leq \|f(x) - f(a)\| + \|f(b) - f(x)\| = V_{P_x}(f) \leq V_a^b(f) = 0,$$

de unde

$$f(x) = f(a),$$

pentru orice $x \in [a, b]$, deci f este constantă.

Caracterizarea alternativă a funcțiilor cu variație mărginită

Rezultatul următor precizează structura funcțiilor cu variație mărginită.

Teorema lui Jordan. *Pentru o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:*

i) f este cu variație mărginită;

ii) există două funcții crescătoare $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât

$$f = f_1 - f_2.$$

Demonstrație.

$i) \Rightarrow ii)$ Conform Propoziției de la pagina 466, funcția $f_1 : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$, dată de

$$f_1(x) = \overset{x}{V}_a(f),$$

pentru orice $x \in [a, b]$ este crescătoare.

Fie

$$f_2 = f_1 - f.$$

Vom arăta că f_2 este crescătoare.

Într-adevăr, pentru $a \leq x < y \leq b$, avem

$$f(y) - f(x) \leq |f(y) - f(x)| \leq \overset{y}{V}_x(f) = \overset{y}{V}_a(f) - \overset{x}{V}_a(f) = f_1(y) - f_1(x),$$

de unde

$$f_1(x) - f(x) \leq f_1(y) - f(y),$$

i.e.

$$f_2(x) \leq f_2(y).$$

Înlocuind pe f_1 și f_2 cu $f_1 + \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f_2(x)|$, respectiv cu $f_2 + \sup_{x \in [a, b]} |f_1(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f_2(x)|$, demonstrația acestei implicații este încheiată.

Implicația $i) \Rightarrow ii)$ decurge imediat din faptul că funcțiile f_1 și f_2 , fiind monotone, sunt cu variație mărginită.

Corolar. *Eventualele discontinuități ale unei funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ care este cu variație mărginită sunt de prima speță.*

Corolar. *Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă și g este cu variație mărginită, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g . Dacă f este cu variație mărginită și g este continuă, atunci f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g .*

Observație. În cadrul cursului de funcții complexe se va utiliza integrala complexă (sau integrala Cauchy) care este o integrală Riemann-Stieltjes a unei funcții continue în raport cu o funcție cu variație mărginită (a se vedea P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, **Analiză Matematică (Funcții complexe)**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982, pagina 50).

Calculul variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă

În cele ce urmează vom prezenta o exprimare integrală a variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă.

Lemă. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție cu variație mărginită. Atunci există un șir $(P_n)_n$ de partiții ale lui $[a, b]$ astfel ca:

i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0;$$

ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{P_n}(f) = V_a^b(f).$$

Demonstrație. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există o partiție P'_n a lui $[a, b]$ astfel ca

$$V_a^b(f) - \frac{1}{n} < V_{P'_n}(f).$$

Dacă vom considera o partiție P_n a lui $[a, b]$ care să constituie o rafinare a lui P'_n și care să aibă norma mai mică decât $\frac{1}{n}$, atunci

$$V_a^b(f) - \frac{1}{n} < V_{P'_n}(f) \leq V_{P_n}(f) \leq V_a^b(f)$$

și

$$\|P_n\| < \frac{1}{n},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde obținem concluzia.

Teorema privind calculul variației totale a unei funcții derivabile cu derivata continuă. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție derivabilă și cu derivata continuă.

Atunci

$$V_a^b(f) = \int_a^b \|f'\| = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^p (f'_i)^2},$$

unde $f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Deoarece f este derivabilă, ea este integrabilă, deci există $\delta_\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice partiție P a lui $[a, b]$ cu norma inferioară lui δ_ε să avem

$$\left| S(P, \|f'\|) - \int_a^b \|f'\| \right| < \varepsilon.$$

Deoarece funcțiile f'_1, f'_2, \dots, f'_p sunt continue, iar $[a, b]$ este un interval compact, conform Teoremei continuității uniforme (vezi pagina 227), ele sunt uniform continue, deci există $\delta'_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice $x, y \in [a, b]$ astfel ca $|x - y| < \delta'_\varepsilon$ și orice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, avem

$$|f'_j(x) - f'_j(y)| < \varepsilon. \quad (0)$$

Având în vedere lema de mai sus, există $n \in \mathbb{N}$ și o partiție

$$P_n = (a = x_0^n, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n = b)$$

a lui $[a, b]$, astfel ca

$$\left| \int_a^b f - V_{P_n}(f) \right| < \varepsilon, \quad (1)$$

și

$$\|P_n\| < \min\{\delta'_\varepsilon, \delta_\varepsilon\}, \quad (*)$$

de unde

$$\left| S(P_n, \|f'\|) - \int_a^b \|f'\| \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Conform teoremei lui Lagrange (vezi pagina 278), pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, $n \in \mathbb{N}$ și $k \in \{1, 2, \dots, m_n\}$, există $\xi_{j,n,k} \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$ astfel încât

$$f_j(x_k^n) - f_j(x_{k-1}^n) = (x_k^n - x_{k-1}^n) f'_j(\xi_{j,n,k}),$$

deci

$$V_{P_n}(f) = \sum_{k=1}^{m_n} \|f(x_k^n) - f(x_{k-1}^n)\| = \sum_{k=1}^{m_n} \sqrt{\sum_{j=1}^p (f_j(x_k^n) - f_j(x_{k-1}^n))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \sqrt{\sum_{j=1}^p (x_k^n - x_{k-1}^n)^2 (f'_j(\xi_{j,n,k}))^2} = \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{j,n,k}))^2},$$

de unde

$$\begin{aligned} & \left| V_{P_n}(f) - S(P_n, \|f'\|) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{j,n,k}))^2} - \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{n,k}))^2} \right| = \\ & = \left| \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \left[\sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{j,n,k}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{n,k}))^2} \right] \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \left| \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{j,n,k}))^2} - \sqrt{\sum_{j=1}^p (f'_j(\xi_{n,k}))^2} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{m_n} (x_k^n - x_{k-1}^n) \left[\sum_{j=1}^p \left| f'_j(\xi_{j,n,k}) - f'_j(\xi_{n,k}) \right| \right]. \quad (**) \end{aligned}$$

unde $\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,m_n}$ constituie un sistem de puncte intermediare arbitrare pentru partiția P_n .

Am folosit mai sus inegalitatea

$$|||u| - |v||| \leq \|u - v\| \leq \sum_{j=1}^p |u_j - v_j|,$$

valabilă pentru orice $u = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ și $v = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ vectori din \mathbb{R}^p .

Să remarcăm că $\xi_{n,k} \in [x_{k-1}^n, x_k^n]$, ceea ce ne asigură că

$$|\xi_{j,n,k} - \xi_{n,k}| \leq \|P_n\| < \delta'_\varepsilon,$$

de unde, folosind (0), avem

$$\left| f'_j(\xi_{j,n,k}) - f'_j(\xi_{n,k}) \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, deci, folosind (**), obținem

$$\left| V_{P_n}(f) - S(P_n, \|f'\|) \right| \leq p(b-a)\varepsilon. \quad (3)$$

Atunci, din (1), (2) și (3), deducem că

$$\begin{aligned} & \left| \overset{b}{V}_a(f) - \int_a^b \|f'\| \right| \leq \\ & \leq \left| \overset{b}{V}_a(f) - V_{P_n}(f) \right| + \left| V_{P_n}(f) - S(P_n, \|f'\|) \right| + \left| S(P_n, \|f'\|) - \int_a^b \|f'\| \right| < \\ & < \varepsilon(2 + p(b-a)), \end{aligned}$$

pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

În concluzie

$$\overset{b}{V}_a(f) = \int_a^b \|f'\|.$$

Corolar. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și cu derivata continuă. Atunci lungimea graficului lui f este egală cu

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Exerciții

1. Să se arate că funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \text{ sau } x = 0 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{dacă } x = r_n \end{cases},$$

unde $1 = r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ reprezintă șirul numerelor raționale din $[0, 1]$, este cu variație mărginită.

Să se arate că funcția $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

este mărginită, dar nu este cu variație mărginită.

Să se arate că funcția $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este cu variație mărginită.

Să se arate că funcția $h \circ f$ nu este cu variație mărginită.

2. Să se arate că funcția $f : [0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

este continuă, nu este derivabilă și nu este cu variație mărginită.

3. Să se arate că funcția $f : [0, \frac{2}{\pi}] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

este derivabilă și nu este cu variație mărginită.

4. Să se stabilească dacă funcțiile de mai jos sunt cu variație mărginită și, în caz afirmativ, să se calculeze variația totală:

i) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ x^2, & \text{dacă } x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases};$$

ii) $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in [0, 3) \\ 7, & \text{dacă } x = 3 \\ x^2 + 3, & \text{dacă } x \in (3, 6] \end{cases};$$

iii) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 3x, & \text{dacă } x \in [1, 2] \end{cases};$$

iv) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = x \cos x - \sin x,$$

pentru orice $x \in [0, \pi]$.

5. Să se arate că șirul de funcții cu variație mărginită $(f_n)_n$, $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

converge uniform către funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \\ x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$$

care nu este cu variație mărginită.

6. Să se arate că dacă $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și $(g_n)_n$, unde $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, este un șir de funcții cu variație egal mărginită (i.e. $\sup_n \sup_a^b V(g_n)$ este finit) care converge către funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg = \int_a^b f d(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n).$$

Bibliografie

1. *Ion Colojoară, Analiză Matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 32023

2. *Gh. Siretchi, Capitole de Analiză Matematică, Funcții cu variație mărginită; Integrala Riemann-Stieltjes*, Editura Universității din București, 2001, cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II32924

SERII DE FUNCȚII

GENERALIȚI PRIVIND SERIILE DE FUNCȚII

Few mathematical feats have been as surprising as the exhibition of a function that is continuous at every value and differentiable at none. It illustrates that confusion between continuity and differentiability is indeed confusion. While differentiability implies continuity, continuity guarantees nothing about differentiability.

Until well into the 1880's, there was a basic belief that all functions have derivatives, except possibly at a few isolated points such as one finds with the absolute value function, $|x|$, at $x = 0$. In 1806, Ampère tried to provide the general existence of derivatives. His proof is difficult to evaluate because it is not clear what implicit assumptions he was making about what constitutes a function. In 1839 with the publication of J. L. Raabe's calculus text, *Die Differential- und Integralrechnung*, the "theorem" that any continuous function is differentiable - with the possibility of at most finitely many exceptions - started making its way into the standard textbooks.

Bolzano, Weierstrass and Riemann knew it was wrong. By 1861 Riemann had introduced into lectures the function $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$, claiming that it is continuous at every x but not differentiable for infinitely many values of x . The convergence of this series is uniform (by the Weierstrass M -test with $M_n = \frac{1}{n^2}$), and so it is continuous at every x . Nondifferentiability is harder to prove. It was not until 1916 that G. H. Hardy showed that in any finite interval, no matter how short, there will be infinitely many values of x for which the derivative does not exist. It was demonstrated in 1970 that there are also infinitely many values at which derivative does exist. Riemann's example - while remarkable - does not go as far as nondifferentiability for all x .

The faith in the existence of derivatives is illustrated by the reaction to Hermann Hankel's paper "Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Functionen" in which, among other things, he described a general method for creating continuous functions with infinitely many points of nondifferentiability. J. Hoüel applauded this result and expressed hope that it would change the current attitude in which "there is no mathematician today who would believe in the existence of continuous functions without derivatives" (as quoted in Medvedev, *Scenes from the History of Real Functions*). Phillipe Gilbert pounced upon errors and omissions in Hankel's work and displayed them "so as to leave no doubt ... about the inanity of the conclusions".

But the tide had turned. Hankel responded with the observation that Riemann's example of an integrable function with infinitely many discontinuities implies that its integral, $F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((nt))}{n^2} \right) dt$, is necessarily continuous at every x but cannot be differentiable at any of the infinitely many points where the integrand is not continuous. The real surprise came in 1872 when Karl Weierstrass showed the Berlin Academy the trigonometric series mentioned at the end of chapter 1: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, where a is an odd integer, b lies strictly between 0 and 1, and ab is strictly larger than $1 + \frac{3\pi}{2}$. It is continuous at every value of x and differentiable at none. A flood of examples followed.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 259-260.

Noțiunea de serie de funcții

Teoreme privind transportul de proprietăți pentru seriile de funcții

Criterii de convergență pentru serii de funcții

Un exemplu de funcție continuă pe întreaga axa reală care nu este derivabilă în nici un punct

Noțiunea de serie de funcții

Definiție. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, iar șirul sumelor sale parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $S_n = f_1 + \dots + f_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, converge, pe D , către o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, spunem că seria $\sum f_n$ converge, pe D , către f .

Dacă pentru orice $x \in D$, seria $\sum \|f_n(x)\|$ converge, spunem că seria $\sum f_n$ converge absolut pe D .

Dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniform către o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, spunem că seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D , către f .

Teoreme privind transportul de proprietăți pentru seriile de funcții

Folosind rezultatele privind transportul de proprietăți pentru șirurile de funcții se pot deduce rezultate similare pentru serii de funcții.

Teoremă. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții continue, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, iar seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D , către $f : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, atunci f este continuă.

Teoremă. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții, $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, Riemann-Stieltjes integrabile în raport cu $g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar seria $\sum f_n$ converge uniform către $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g și

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \sum f_n dg = \sum \int_a^b f_n dg.$$

Teoremă. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții, $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, integrabile Riemann, iar seria $\sum f_n$ este convergentă către funcția integrabilă Riemann $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, atunci

$$\int_a^b f dg = \int_a^b \sum f_n dg = \sum \int_a^b f_n dg.$$

Teoremă. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții derivabile, $f_n : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pentru care există $x_0 \in [a, b]$ astfel încât seria $\sum f_n(x_0)$ este convergentă, iar seria $\sum f_n'$ converge uniform, atunci există $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât seria $\sum f_n$ converge uniform către f , și, mai mult,

$$f' = (\sum f_n)' = \sum f_n'.$$

Criterii de convergență pentru serii de funcții

După cum am văzut, convergența uniformă este esențială în rezultatele de mai sus, deci este util să dispunem de criterii care să asigure acest tip de convergență.

Criteriul lui Cauchy privind seriile de funcții. Dacă $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, atunci seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D , dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\|f_n(x) + f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)\| < \varepsilon,$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$ și orice $x \in D$.

Rezultatul de mai jos, care se poate demonstra cu ajutorul Criteriului lui Cauchy de mai sus, se va folosi în cadrul demonstrației Teoremei privind convergența uniformă a seriilor de puteri pe mulțimile compacte conținute în interiorul intervalului de convergență (vezi pagina 487), precum și în cadrul exemplului de funcție continuă pe întreaga axă reală, care nu este derivabilă în nici un punct al acesteia (vezi pagina 481).

Criteriul lui Weierstrass privind seriile de funcții. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru care există un șir de numere reale $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, astfel ca

$$\|f_n(x)\| \leq M_n,$$

pentru orice $x \in D$ și orice $n \in \mathbb{N}$.

Dacă seria $\sum M_n$ este convergentă, atunci seria $\sum f_n$ converge uniform, pe D .

Criteriile următoare sunt utile în stabilirea convergenței uniforme, când aceasta nu este absolută.

Criteriul lui Dirichlet privind seriile de funcții. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, unde $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, iar $(S_k)_k$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum f_n$.

Presupunem că există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\|S_k(x)\| \leq M,$$

pentru orice $x \in D$ și orice $k \in \mathbb{N}$

Presupunem că șirul de funcții $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $\varphi_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, este descrescător și că el converge uniform, pe D , către 0.

Atunci seria $\sum \varphi_n f_n$ converge uniform pe D .

Rezultatul de mai jos se va utiliza în cadrul demonstrației Teoremei lui Abel (vezi pagina 491).

Criteriul lui Abel privind seriile de funcții. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții, $f_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, pentru care seria $\sum f_n$ converge uniform.

Fie $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $\varphi_n : D \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, un șir de funcții monoton și mărginit.

Atunci seria $\sum \varphi_n f_n$ converge uniform pe D .

Un exemplu de funcție continuă pe întreaga axă reală care nu este derivabilă în nici un punct

Fie $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția continuă, periodică, de perioadă 2, definită pe $[0, 2]$ prin

$$\theta(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}.$$

Atunci funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \sum \left(\frac{3}{4}\right)^n \theta(4^n x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este bine definită, continuă pe \mathbb{R} și nederivabilă în orice punct.

Într-adevăr, deoarece

$$\left| \left(\frac{3}{4}\right)^n \theta(4^n x) \right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și deoarece seria $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$ este convergentă, conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcții $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n \theta(4^n x)$ converge uniform. Cum θ este continuă, deducem că și f este continuă.

Vom arăta acum că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, f nu este derivabilă în x .

În acest scop vom fixa $x \in \mathbb{R}$.

Pentru $m \in \mathbb{N}$, fie $k \in \mathbb{Z}$ astfel ca

$$k \leq 4^m x \leq k + 1.$$

Cu notațiile

$$\alpha_m = \frac{k}{4^m}$$

și

$$\beta_m = \frac{k + 1}{4^m},$$

să observăm că:

- i) $4^n \beta_m - 4^n \alpha_m$ este par, dacă $n > m$;
- ii) $4^n \beta_m - 4^n \alpha_m = 1$, dacă $n = m$;

iii) între $4^n \alpha_m$ și $4^n \beta_m$ nu există nici un întreg, dacă $n < m$.

Prin urmare

$$|\theta(4^n \beta_m) - \theta(4^n \alpha_m)| = \begin{cases} 0, & n > m \\ 4^{n-m}, & n \leq m \end{cases},$$

de unde

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=0}^m \left(\frac{3}{4}\right)^n [\theta(4^n \beta_m) - \theta(4^n \alpha_m)],$$

ceea ce implică

$$|f(\beta_m) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^{n-m} = \frac{1}{4^m} \cdot \frac{3^m + 1}{2} > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^m,$$

i.e.

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

adică

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \cdot \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} + \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \cdot \frac{x - \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

de unde

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \cdot \frac{\beta_m - x}{\beta_m - \alpha_m} \right| + \left| \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \cdot \frac{x - \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m,$$

deci

$$\left| \frac{f(\beta_m) - f(x)}{\beta_m - x} \right| + \left| \frac{f(x) - f(\alpha_m)}{x - \alpha_m} \right| > \frac{1}{2} \cdot 3^m, \quad (*)$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Deoarece

$$\alpha_m \leq x \leq \alpha_m + \frac{1}{m} = \beta_m,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, deducem că

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = x. \quad (**)$$

Presupunând, prin reducere la absurd că f este derivabilă în x , folosind relațiile (*) și (**), obținem, prin trecere la limită atunci când m tinde la ∞ , contradicția

$$2f'(x) \geq \infty.$$

Observație. Amănunte privind tematica funcțiilor continue care nu sunt derivabile în nici un punct al axei reale se găsesc în *John C. Oxtoby, Measure and Category*, Springer-Verlag, 1971, paginile 45-46 și *Masaya Yamaguti, Masayoshi Hata, Jun Kigami, Mathematics of fractals*, Translation of Mathematical Monographs, volume 167, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1993, paginile 11-14.

Exerciții

1. Seria $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge uniform pe $[-1, 1]$.
2. Seria $\sum x(1-x)^n$ nu converge uniform pe $[0, 1]$.
3. Seria $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}$ converge uniform, dar nu absolut pe \mathbb{R} .
4. Seria $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniform pe \mathbb{R} .
5. Seria $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniform pe $[a, b] \subseteq (0, 2\pi)$.
6. Seria $\sum \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ converge uniform pe $[0, 1]$.
7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția continuă, periodică de perioadă 2, definită pe $[-1, 1]$ prin

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, -\frac{2}{3}] \\ -3x - 1, & x \in (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}] \\ 0, & x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}] \\ 3x - 1, & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ 1, & x \in (\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

Fie funcțiile $F, G : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, date de

$$F(x) = \sum \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n}x)$$

și

$$G(x) = \sum \frac{1}{2^{n+1}} f(3^{2n+1}x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Fie $H = (F, G) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Să se arate că F și G sunt continue și că

$$\text{Im } H = [0, 1] \times [0, 1].$$

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle*, **The Elements of Real Analysis**, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

SERII DE PUTERI

Noțiunea de serie de puteri

Raza unei serii de puteri

Teorema Cauchy-Hadamard

Teorema de unicitate a seriilor de puteri

Teorema lui Bernstein

Teorema lui Abel și teorema lui Tauber

Seriile de puteri constituie o generalizare naturală a polinoamelor. Ele permit definirea riguroasă a funcțiilor elementare atât în cazul real (vezi paginile 193-195), cât și în cazul complex (așa cum se va vedea în cadrul cursului de Funcții Complexe; în acest sens, se poate consulta *P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, Analiză Matematică (Funcții Complexe)*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982, paginile 92-95).

Noțiunea de serie de puteri

Definiție. O serie de funcții $\sum f_n$, unde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se numește serie de puteri, în jurul lui c , dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $a_n \in \mathbb{R}$, astfel ca

$$f_n(x) = a_n(x - c)^n,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Remarcă. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $c = 0$ (căci translația $x \mapsto x - c$ reduce o serie de puteri în jurul lui c la o serie de puteri în jurul lui 0).

Deși funcțiile $x \mapsto a_n x^n$ sunt definite pe \mathbb{R} , nu este de așteptat ca seria $\sum a_n x^n$ să convergă pe \mathbb{R} .

De exemplu, seriile $\sum n! x^n$, $\sum x^n$ și $\sum \frac{x^n}{n!}$ converg pentru x aparținând mulțimilor $\{0\}$, $(-1, 1)$, respectiv \mathbb{R} .

Prin urmare, mulțimea punctelor în care converge o serie de puteri poate fi "mică", "medie" sau "mare".

Așa cum vom vedea, o submulțime arbitrară a lui \mathbb{R} nu poate fi mulțimea punctelor de convergență ale unei serii de puteri.

Raza unei serii de puteri. Teorema Cauchy-Hadamard

Definiție. Fie $\sum a_n x^n$ o serie de puteri.

Dacă șirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit, considerăm $\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Dacă șirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit, considerăm $\rho = \infty$.

Definim raza de convergență a seriei de puteri $\sum a_n x^n$ ca fiind

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}.$$

Intervalul $(-R, R)$ se numește intervalul de convergență al seriei de puteri $\sum a_n x^n$, iar mulțimea punctelor în care seria de puteri este convergentă se numește mulțimea de convergență a seriei de puteri.

Rezultatul de mai jos justifică terminologia de rază de convergență.

Teorema Cauchy-Hadamard. Dacă R este raza de convergență a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, atunci seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$ și divergentă pentru $|x| > R$.

Notă istorică. Jacques Salomon Hadamard s-a născut în 1865 în Franța. A studiat la Lycée Charlemagne, unde conform propriilor spuse, excela la Latină și Greacă, iar la aritmetică, până în clasa a V-a, era ultimul din clasă. Între 1875 și 1876 urmează cursurile liceului Louis-le-Grand. Între 1884 și 1888 Hadamard frecventează École Normale Supérieure. A predat la liceele din Saint-Louis și la Lycée Buffon, avându-l ca student pe Fréchet. În 1892 obține titlul de doctor în matematici. În același an primește Grand Prix des Sciences Mathématiques. În 1896 este numit profesor de astronomie și mecanică rațională la Universitatea din Bordeaux. În decursul celor patru ani petrecuți aici a obținut însemnate rezultate din mai multe ramuri ale matematicii, anume teoria numerelor (a arătat, folosind tehnici din analiza complexă, că numărul numerelor prime mai mici sau egale cu n tinde la infinit la fel de repede ca și $\frac{n}{\ln n}$), geometrie, algebră liniară, ecuații integrale, teoria codurilor etc. În 1897 este numit profesor la Facultatea de Științe de la Sorbona și la Collège de France. În același an publică vestita carte intitulată *Leçons de Géométrie Élémentaire*. Obține multe rezultate importante privind ecuațiile cu derivate parțiale, optica, hidrodinamica, elasticitatea și probabilitățile (lanțuri Markov) etc. În 1912 este numit profesor de Analiză

Matematică la École Polytechnique. În același an este ales ca membru al Academiei de Științe. Doi dintre fiii lui au murit în luptă în primul război mondial, iar un al treilea în cel de al doilea război mondial. În timpul celui de al doilea război mondial a fost profesor vizitator la Columbia University. A murit în 1963 la Paris.

Demonstrație. Vom trata numai cazul $R \in (0, \infty)$, celelalte, anume $R = 0$ și $R = \infty$, rămânând în seama cititorului.

Pentru $0 < |x| < R$, există $c \in [0, 1)$ astfel ca

$$|x| < cR.$$

Prin urmare

$$\rho < \frac{c}{|x|},$$

de unde deducem existența unui $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, să avem

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{|x|},$$

ceea ce echivalează cu

$$|a_n x^n| \leq c^n,$$

ceea ce, deoarece $c \in [0, 1)$, implică, conform Criteriului de comparație (vezi pagina 186), convergența absolută a serie de puteri $\sum a_n x^n$.

Dacă $|x| > R = \frac{1}{\rho}$, atunci, pentru o infinitate de n , avem

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x|},$$

adică

$$|a_n x^n| > 1,$$

de unde deducem că șirul $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge la 0, ceea ce implică faptul că seria de puteri $\sum a_n x^n$ este divergentă. \square

Observație. *Teorema Cauchy-Hadamard nu menționează nimic despre ce se întâmplă în extremitățile intervalului de convergență. În fapt, orice situație este cu putință. Spre exemplu, pentru seriile $\sum x^n$, $\sum \frac{1}{n} x^n$ și $\sum \frac{1}{n^2} x^n$ raza de convergență este 1, dar prima serie nu converge nici în 1, nici în -1 , cea de a doua converge în -1 , dar nu converge în 1, iar cea de a treia converge atât în 1, cât și în -1 .*

Observație. Raza de convergență a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, în cazul în care există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, este dată, de asemenea, de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Rezultatul de mai jos afirmă convergența uniformă a seriilor de puteri pe mulțimile compacte conținute în interiorul intervalului de convergență

Teorema privind convergența uniformă a seriilor de puteri pe mulțimile compacte conținute în interiorul intervalului de convergență. Fie R raza de convergență a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, iar K o submulțime compactă a intervalului $(-R, R)$.

Atunci seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge uniform pe K .

Demonstrație. Faptul că mulțimea K este compactă implică existența unei constante $c \in [0, 1)$, astfel ca

$$|x| < cR,$$

i.e.

$$\rho < \frac{c}{|x|}$$

pentru orice $x \in K - \{0\}$.

Prin urmare, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca, pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, avem

$$|a_n x^n| \leq c^n,$$

pentru orice $x \in K$.

Criteriul lui Weierstrass (vezi pagina 480) încheie demonstrația. \square

Rezultatul de mai jos arată că în interiorul intervalului de convergență al unei serii de puteri putem integra și deriva termen cu termen.

Teorema de derivare și integrare termen cu termen a seriilor de puteri. Fie R raza de convergență a seriei de puteri $\sum a_n x^n$, iar $S : (-R, R) \rightarrow \mathbb{R}$ suma seriei de puteri (i.e.

$$S(x) = \sum a_n x^n,$$

pentru orice $x \in (-R, R)$).

Atunci funcția S este continuă și

$$\int_a^b S(t) dt = \int_a^b \sum a_n t^n dt = \sum a_n \int_a^b t^n dt,$$

pentru orice $a, b \in (-R, R)$.

Mai mult, seria de puteri $\sum (a_n x^n)'$ are raza de convergență R și

$$S'(x) = (\sum a_n x^n)' = \sum (a_n x^n)' = \sum n a_n x^{n-1},$$

pentru orice $x \in (-R, R)$.

Observație. Teorema anterioară nu menționează situația capetelor intervalului de convergență.

Dacă seria este convergentă în unul dintre capetele intervalului de convergență, atunci seria "derivată" poate sau nu să fie convergentă în acest punct. De exemplu, seria $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge în 1 și în -1 , dar seria $\sum \frac{x^n}{n}$ este convergentă în -1 și divergentă în 1.

Corolar. În condițiile de mai sus, avem

$$S^{(n)}(0) = n! a_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema de unicitate a seriilor de puteri. Dacă seriile de puteri $\sum a_n x^n$ și $\sum b_n x^n$ converg, pe un interval $(-r, r)$, către o aceeași funcție, atunci

$$a_n = b_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observație. Seriile de puteri au avantajul că sunt facil de manipulat (sume lor parțiale fiind polinoame) și că au suma o funcție derivabilă de o infinitate de ori, însă prezintă dezavantajul că (în general) o funcție nu se reprezintă printr-o serie de puteri pe întreg domeniul de definiție (spre exemplu, pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, relația $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$, este valabilă numai pentru $|x| < 1$).

Teorema lui Bernstein

Am văzut că o condiție necesară ca o funcție să fie suma, pe un interval $(-r, r)$, a unei serii de puteri, este ca funcția să aibă derivate de orice ordin.

Această condiție nu este și suficientă.

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases},$$

are în origine derivate de orice ordin, egale cu 0, dar nu există nici un interval $(-r, r)$ pe care ea să fie este suma unei serii de puteri.

Există câteva condiții suficiente pentru ca o funcție să poate fi scrisă ca o serie de puteri.

Spre exemplu, folosind teorema lui Taylor (vezi pagina 284), se poate arăta că dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$|f^{(n)}(x)| \leq M,$$

pentru orice $x \in (-r, r)$ și orice $n \in \mathbb{N}$, atunci seria de puteri $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, pe $(-r, r)$, către $f(x)$.

Teorema lui Bernstein. *Fie $f : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are derivate de orice ordin.*

Dacă f și derivatele sale de orice ordin sunt pozitive, atunci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

pentru orice $x \in [0, r)$.

Demonstrație. Conform teoremei lui Taylor cu restul sub forma integrală (vezi pagina 391), avem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

pentru orice $x \in [0, r)$ și $n \in \mathbb{N}$, unde

$$R_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sx) ds.$$

Prin urmare

$$f(r) \geq \frac{r^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds,$$

de unde, cum $f^{(n)}$ este crescătoare, avem

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(sr) ds \leq f(r) \left(\frac{x}{r}\right)^{n-1},$$

pentru orice $x \in [0, r)$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$$

ceea ce ne asigură valabilitatea concluziei. \square

Teorema lui Abel și teorema lui Tauber

Am văzut că o serie de puteri converge uniform pe orice mulțime compactă din intervalul său de convergență.

Nu există motive pentru a crede, a priori, că acest fapt este valabil și atunci când se consideră mulțimi compacte din mulțimea de convergență. Totuși acest rezultat este valid, așa cum arată următoarea:

Teorema lui Abel. *Dacă seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge, pe $(-R, R)$, către $f(x)$, iar seria $\sum a_n R^n$ converge către A , atunci seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge uniform pe $[0, R]$ și*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow R \\ x < R}} f(x) = A.$$

Demonstrație. Putem presupune, fără pierderea generalității, că $R = 1$. Criteriul lui Abel (vezi pagina 480), cu

$$f_n \equiv a_n$$

și

$$\varphi_n(x) = x^n,$$

pentru orice $x \in [0, 1]$, asigură convergența uniformă pe $[0, 1]$.

Prin urmare, limita seriei de puteri pe $[0, 1)$, care este f , este continuă, deci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = A. \quad \square$$

Remarcă. Acest rezultat sugerează un mod de a ataşa o limită unei serii care nu este convergentă.

Spre exemplu, seriei $\sum b_n$ îi putem asocia seria de puteri $\sum b_n x^n$.

Dacă şirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "nu creşte prea rapid", atunci seria de puteri $\sum b_n x^n$ converge către o funcţie $B : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} B(x) = \beta$, spunem că seria $\sum b_n$ este Abel convergentă către β .

Teorema lui Abel afirmă că dacă o serie este convergentă, atunci ea este Abel convergentă, iar sumele, cea obişnuită şi cea Abel, coincid.

Reciproca nu este valabilă, aşa cum arată seria $\sum (-1)^n$; seria de puteri $\sum (-1)^n x^n$ are suma $\frac{1}{x+1}$, deci seria $\sum (-1)^n$ este divergentă, dar este Abel convergentă către $\frac{1}{2}$.

Teoremele care furnizează condiţii suficiente pentru ca o serie Abel convergentă să fie convergentă se numesc teoreme Tauberiene.

Teorema lui Tauber. Dacă seria de puteri $\sum a_n x^n$ converge, pe $(-1, 1)$, către $f(x)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$$

şi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = A,$$

atunci seria $\sum a_n$ converge către A .

Notă istorică. Alfred Tauber (1866-1947) a studiat la Universitatea din Viena, unde a şi profesat. A fost şeful diviziei matematice a companiei de asigurări Phönix din Viena.

Demonstraţie. Pentru $x \in [0, 1)$, avem

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n - A &= \left(\sum_{n=1}^N a_n - f(x) \right) + (f(x) - A) = \\ &= \sum_{n=1}^N a_n (1 - x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n + (f(x) - A). \end{aligned}$$

Deoarece pentru $x \in [0, 1)$, avem

$$1 - x^n = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) < (n + 1)(1 - x),$$

obținem

$$\sum_{n=1}^N |a_n| (1 - x^n) \leq (1 - x) \sum_{n=1}^N (n + 1) |a_n|.$$

Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1) |a_n| = 0,$$

utilizând Teorema de la pagina 159, avem

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m + 1} \sum_{n=1}^m (n + 1) |a_n| = 0.$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru orice $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_\varepsilon$ să avem:

$$\sum_{n=1}^N (n + 1) |a_n| < (N + 1)\varepsilon,$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{N + 1},$$

și

$$|f(x_0) - A| < \varepsilon,$$

unde

$$x_0 = 1 - \frac{1}{N + 1}.$$

Prin urmare, pentru un astfel de N , obținem

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N a_n - A \right| &\leq (1 - x_0) \sum_{n=1}^N n |a_n| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x_0^n \right| + |f(x_0) - A| \leq \\ &\leq (1 - x_0)(N + 1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{N + 1} \frac{x_0^{N+1}}{1 - x_0} + \varepsilon < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

de unde concluzia. \square

Exerciții

1. Găsiți razele de convergență și mulțimile de convergență pentru seriile de puteri: $\sum x^n$, $\sum \frac{x^n}{n2^n}$, $\sum (\frac{n}{2n+1})^{2n-1} x^n$, $\sum \frac{n!}{n^n+1} x^n$.

2. Dezvoltați funcția $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ca sumă a unei serii de puteri ale lui $x - 1$.

3. Dezvoltați funcțiile $f(x) = e^x$, $g(x) = \arctg(x)$, $h(x) = \arcsin(x)$, $s(x) = (1+x)\ln(1+x)$, ca sumă a unei serii de puteri ale lui x .

4. Să se afle suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Bibliografie

1. *Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1964.

SERII TRIGONOMETRICE

Crisis in Mathematics: Fourier's Series

The crisis struck four days before Christmas 1807. The edifice of calculus was shaken to its foundations. In retrospect, the difficulties had been building for decades. Yet while most scientists realized that something had happened, it would take fifty years before the full impact of the event was understood. The nineteenth century would see ever expanding investigations into the assumptions of calculus, an inspection and refitting of the structure from the footings to the pinnacle, so thorough a reconstruction that calculus was given a new name: Analysis. Few of those who witnessed the incident of 1807 would have recognized mathematics as it stood one hundred years later. The twentieth century was to open with a redefinition of the integral by Henri Lebesgue and an examination of the logical underpinnings of arithmetic by Bertrand Russell and Alfred North Whitehead, both direct consequences of the events set in motion in that critical year. The crisis was precipitated by the deposition at the Institute de France in Paris of a manuscript, *Theory of the Propagation of Heat in Solid Bodies*, by the 39-year old prefect of the department of Isère, Joseph Fourier. Fourier began his investigations with the problem of describing the flow of heat in a very long and thin rectangular plate or lamina. ... Fourier had reduced his problem to that of taking an even function and expressing it as a possibly infinite sum of cosines, what we today call a Fourier series. His next step was to demonstrate how to accomplish this. Here was the crux of the crisis. Infinite sums of trigonometric functions had appeared before. Daniel Bernoulli (1700-1782) proposed such sums in 1753 as solutions to the problem of modeling the vibrating string. They had been summarily dismissed by the greatest mathematician of the time, Leonhard Euler (1707-1783). Perhaps Euler scented the danger they presented to his understanding of calculus. The committee that reviewed Fourier's manuscript: Laplace, Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Sylvestre François Lacroix (1756-1843), and Gaspard Monge (1746-1818), echoed Euler's dismissal in an unenthusiastic summary written by Siméon Denis Poisson (1781-1840). Lagrange was later to make his objections explicit. Well into the 1820s, Fourier series would remain suspect because they contradicted the established wisdom about the nature of functions. Fourier did more than suggest that the solution to the heat equation lay in his trigonometric series. He gave a simple and practical means of finding those coefficients. In so doing, he produced a vast array of verifiable solutions to specific problems. Bernoulli's proposition could be debated endlessly with little effect for it was only theoretical.

Fourier's method could actually be implemented. It could not be rejected without forcing the question of why it seemed to work. There are problems with Fourier series, but they are subtler than anyone realized in that winter of 1807-08. It was not until the 1850s that Bernhard Riemann (1826-1866) and Karl Weierstrass (1815-1897) would sort out the confusion that had greeted Fourier and clearly delineate the real questions.

A Radical Approach to Real Analysis, David Bressoud, The Mathematical Association of America, 1994, paginile 1,3 și 4.

Noțiunea de serie trigonometrică Noțiunea de serie Fourier Teoreme de reprezentare (Dirichlet, Fejér)

Noțiunea de serie trigonometrică

Seriile trigonometrice își dovedesc utilitatea în multe domenii (electrotehnica, mecanica undelor, reprezentarea semnalelor periodice etc).

Definiție. Pentru $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale, vom considera:

· funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

· funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, date de

$$f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Se numește serie trigonometrică cu coeficienții a_n și b_m , unde $n \in \mathbb{N}$ și $m \in \mathbb{N}$, seria de funcții $\sum_n f_n$.

Sumele parțiale ale unei astfel de serii se numesc polinoame trigonometrice.

Observație. Este suficient să studiem convergența unei serii trigonometrice pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Rezultatul de mai jos ne arată modul în care putem exprima coeficienții a_n și b_m ai unei serii trigonometrice punctual convergente, în funcție de suma sa.

Teoremă. *Dacă seria trigonometrică $\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este punctual convergentă pe $[-\pi, \pi]$ (deci pe \mathbb{R}), iar $S(x)$ este suma acestei serii, atunci:*

i) Funcția $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este periodică, de perioadă 2π .

ii) Dacă, în plus, seria trigonometrică $\frac{a_0}{2} + \sum_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ este uniform convergentă pe $[-\pi, \pi]$, atunci S este continuă pe porțiuni pe orice interval compact din \mathbb{R} și

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx dx$$

și

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin mx dx,$$

pentru orice n și m .

Noțiunea de serie Fourier

Definiție. *Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe porțiuni pe orice interval compact din \mathbb{R} și periodică, de perioadă 2π . Fie șirurile de numere reale $(a_n)_n$ și $(b_m)_m$, unde*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

și

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

Atunci seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

se numește seria Fourier a lui f , iar a_n și b_m , se numesc coeficienții Fourier ai lui f .

Notă istorică. *Jean Baptiste Joseph Fourier* s-a născut în 1768 la Auxerre, în Franța. Din 1870 frecventează École Royale Militaire din Auxerre. În 1783 primește primul său premiu pentru un studiu de mecanică. În 1787 Fourier se dedică vieții monahale, mergând la mănăstirea benedictină din St. Benoit-sur-Loire. Interesul său pentru matematică este însă prezent și în această perioadă. În 1790 devine profesor la École Royale Militaire din Auxerre. Conflictului său interior referitor la calea pe care o va urma (matematică sau teologie) i se adaugă un nou element, în 1793, când se implică în politică, alăturându-se Comitetului Revoluționar local. Deși datorită terorii generate de revoluția Franceză dorește să se retragă din astfel de activități, acest lucru este imposibil. Mai mult, pe motive politice este arestat. Din 1794 studiază la École Normale din Paris unde sunt profesori Lagrange, Laplace și Monge. Predă la Collège de France și la École Centrale des Travaux Publiques condusă de către Lazare Carnot și Gaspard Monge, care curând își schimbă numele în École Polytechnique. În 1797 îi succede lui Lagrange la catedra de analiză și mecanică. În 1798 se alătură armatei lui Napoleon în invazia Egiptului unde ocupă diverse poziții administrative până în 1801 când se întoarce la postul de profesor de analiză de la École Polytechnique. La cererea lui Napoleon preia postul de prefect la Isère. Aceasta (1804-1807) este perioada în care lucrează la teoria propagării căldurii, rezultatul fiind memoriul intitulat "Despre propagarea căldurii în corpuri solide", memoriu de o importanță capitală, dar care la vremea respectivă a fost foarte controversat. Lagrange și Laplace au avut obiecții asupra dezvoltării funcțiilor în serii trigonometrice. Din 1817 devine membru al Académie des Sciences. A murit în 1830.

Teoreme de reprezentare (Dirichlet, Fejér)

Observație. *Este posibil ca seria Fourier a unei funcții f să fie divergentă. De asemenea, este posibil ca seria Fourier a unei funcții f să fie punctual convergentă pe \mathbb{R} , dar suma ei să nu fie f .*

Vom prezenta în continuare un rezultat, anume teorema lui Dirichlet de reprezentare, care precizează condiții suficiente pentru ca seria Fourier a unei funcții f să convergă punctual către f .

Pentru început vom introduce noțiunea de convoluție a două funcții.

Definiție. Pentru $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcții continue pe orice interval compact din \mathbb{R} și periodice, de perioadă 2π , funcția $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se numește produsul de convoluție al funcțiilor f și g .

În continuare vom prezenta două leme.

Lemă. Pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ și pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, fie

$$D_n(x) = \frac{\sin(nx + \frac{x}{2})}{2\pi \sin \frac{x}{2}}$$

(numit nucleul lui Dirichlet).

Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni pe orice interval compact din \mathbb{R} și periodică, de perioadă 2π , și dacă S_n reprezintă a n -a sumă parțială a seriei Fourier asociată lui f , atunci

$$S_n = f * D_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstrație. Se poate constata ușor că

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos kx \right), \quad (*)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ și pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Atunci

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right] dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = (f * D_n)(x), \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$ și pentru orice $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, unde pentru justificarea penultimei egalități am folosit relația (*).

Lema lui Riemann. Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nxdx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nxdx = 0.$$

Demonstrație. După cum este binecunoscut (vezi Teorema de la pagina 241), pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ există o funcție în scară $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Avem

$$\int_a^b f(x) \cos nxdx = \int_a^b \varphi(x) \cos nxdx + \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos nxdx,$$

de unde

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos nxdx \right| &\leq \left| \int_a^b \varphi(x) \cos nxdx \right| + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| |\cos nx| dx < \\ &< \left| \int_a^b \varphi(x) \cos nxdx \right| + \int_a^b \|f - \varphi\| dx < \left| \int_a^b \varphi(x) \cos nxdx \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Prin urmare, este suficient să demonstrăm lema pentru funcții în scară.

Așadar, putem presupune că există o diviziune $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$ și constantele c_0, c_1, \dots, c_{m-1} astfel încât

$$f(x) = c_i,$$

pentru orice $x \in (x_{i-1}, x_i)$ și orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Atunci

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cos nxdx &= \sum_{i=1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos nxdx = \\ &= \sum_{i=1}^m c_i \frac{\sin nx_i - \sin nx_{i-1}}{n}, \end{aligned}$$

de unde

$$\left| \int_a^b f(x) \cos nx dx \right| \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m |c_i|,$$

inegalitate care implică faptul că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos nx dx = 0.$$

Analog se arată că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0.$$

Observație. Prin urmare, șirurile coeficienților Fourier ai unei funcții f converg către 0.

Teorema de reprezentare a lui Dirichlet. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică, de perioadă 2π , cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune f are derivate laterale finite.

Atunci seria Fourier a lui f este punctual convergentă pe \mathbb{R} .

Mai precis,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u < x}} f(u) + \lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u > x}} f(u)}{2}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

și

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx,$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ și $m \in \mathbb{N}$.

Schiță de demonstrație. Pentru $x \in \mathbb{R}$, fie

$$m = \frac{\lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u < x}} f(u) + \lim_{\substack{u \rightarrow x \\ u > x}} f(u)}{2}.$$

Pentru $\delta \in (0, \pi)$ și $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, avem

$$\begin{aligned} & [D_n * (f - m)](x) = \\ &= \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - m) D_n(t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - m) D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - m) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

Folosind cele două leme obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{-\delta} (f(x-t) - m) D_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} (f(x-t) - m) D_n(t) dt = 0.$$

Există o constantă $C \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - m) D_n(t) dt \right| \leq \frac{C \delta \sup_{|t| \leq \delta} \left| \frac{|t|}{\sin \frac{t}{2}} \right|}{\pi}.$$

Atunci, folosind această evaluare, deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [D_n * (f - m)](x) = 0.$$

Dar, conform primei leme, avem

$$[D_n * (f - m)](x) = (D_n * f)(x) - m = S_n(x) - m,$$

de unde concluzia.

Corolar. Dacă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică, de perioadă 2π , cu proprietatea că este continuă și cu proprietatea că pentru orice interval compact al axei reale există o diviziune a acestui interval pe ale cărei intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune f are derivate laterale finite, atunci seria Fourier a lui f este punctual convergentă pe \mathbb{R} către f .

Un alt rezultat important privind seriile Fourier este următorul (pentru detalii vezi **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București*, paginile 132-134):

Teoremă. *Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție periodică, de perioadă 2π , derivabilă, cu derivata continuă. Atunci seria Fourier a funcției f converge absolut și uniform pe \mathbb{R} , suma sa fiind f .*

Un alt rezultat fundamental pentru teoria seriilor Fourier, rezultat care pune în evidență utilitatea conceptului de Cesàro sumabilitate (vezi paginile 158-161), este datorat lui Fejér (pentru demonstrație se poate consulta O. Stănășilă, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981 - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29626, paginile 453-454).

Teorema lui Fejér. *Pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcție continuă, periodică, de perioadă 2π , vom considera*

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1}}{n},$$

unde S_n reprezintă a n -a sumă parțială a seriei Fourier asociată lui f , $n \in \mathbb{N}$. Atunci șirul de funcții $(\sigma_n)_n$, converge uniform, pe \mathbb{R} , către f .

Notă istorică. *Lipót Fejér* (numele său real este Leopold Weiss) s-a născut la Pécs, Ungaria, în 1880. Între 1897 și 1902 a studiat matematica și fizica la Budapesta și Berlin unde a fost studentul lui Schwarz. Teorema referitoare la teoria seriilor Fourier care-i poartă numele, publicată în 1900, constituie baza tezei sale de doctorat pe care a susținut-o în 1902 la Budapesta. Între 1902 și 1905 predă la Universitatea din Budapesta, apoi, între 1905 și 1911 la Kolozsvár (Cluj), iar din 1911 până la moartea sa, în 1959, din nou la Budapesta. Principalul său domeniu de studiu a fost analiza armonică, dar a publicat de asemenea un articol important despre funcții întregi (împreună cu Carathéodory, în 1907) și unul despre transformări conforme (împreună cu Riesz, în 1922).

Corolar. *Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică, de perioadă 2π , cu proprietatea că toți coeficienții săi Fourier sunt nuli.*

Atunci

$$f = 0.$$

Observație. În cadrul cursului de Analiză Funcțională se vor studia seriile Fourier într-un cadru mai general, anume în contextul spațiilor Hilbert (a se vedea Liliana Pavel, **An Introduction to Functional Analysis**, Editura Universității din București, 2000, paginile 94-104). Teoria seriilor Fourier constituie punctul de plecare al unei ramuri importante a Analizei Matematice, anume Analiza Armonică.

Notă istorică. David Hilbert s-a născut în ianuarie 1862 la Königsberg, unde a urmat gimnaziul și facultatea, obținând titlul de doctor în 1885. Minkowski a fost unul dintre bunii lui prieteni. În 1885 se mută la Universitatea din Göttingen, unde rămâne până la sfârșitul carierei. La început Hilbert a lucrat în teoria invariantilor, descoperind celebra teoremă a bazei. Apoi atenția lui s-a îndreptat către geometrie. Un studiu sistematic al axiomelor lui Euclid l-a condus la prezentarea geometriei sub formă axiomatică, abordare care a avut o imensă influență asupra acestui domeniu. La cel de al doilea congres al matematicienilor de la Paris a propus o listă de 23 de probleme, unele nerezolvate până astăzi. Studiile sale în domeniul ecuațiilor diferențiale au condus la noțiunea de spațiu Hilbert. Printre studenții săi amintim pe Weil și Zermelo. A murit în februarie 1943, ca cetățean de onoare al orașului Königsberg.

Observație. Seriile trigonometrice au avantajul că reprezentarea unei funcții printr-o astfel de serie are loc pe orice interval, însă prezintă dezavantajul că sunt mai greu de manevrat (derivarea și integrarea termen cu termen trebuie să se facă cu precauții suplimentare).

Exerciții

1. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x,$$

pentru orice $x \in (-\pi, \pi)$, și să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = x^2,$$

pentru orice $x \in (0, 2\pi)$, și să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$.

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = 1,$$

pentru orice $x \in (0, 2\pi)$, și să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

Bibliografie

1. **Analiză Matematică**, Vol. II, Ediția a V-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, *Lucrare elaborată de un colectiv al catedrei de analiză matematică a Universității București*.

2. O. Stănășilă, **Analiză Matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981, - cota la biblioteca Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea din București II 29626

INDEX

A

a doua teoremă de medie pentru integrala Riemann - Stieltjes	389
a doua teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă	409
Abel, Niels Henrik - notă istorică	191
adevăr	3
adunarea pe mulțimea numerelor întregi	37
adunarea pe mulțimea numerelor naturale	30
adunarea pe mulțimea numerelor raționale	43
adunarea pe mulțimea numerelor reale	53
adunarea pe sistemul extins al numerelor reale	77
aderența (înciderea) unei mulțimi	101
d'Alembert, Jean Le Rond - notă istorică	187
Arhimede - notă istorică	62
Arzelà, Cesare - notă istorică	254
Ascoli, Guido - notă istorică	255
axiomele lui Peano	29-30

B

Baire, Rene Louis - notă istorică	122
Banach, Stefan - notă istorică	232
bază a unui spațiu vectorial	23-24
Bernstein, Serge - notă istorică	242
bilă închisă din \mathbb{R}^n	89
bilă deschisă din \mathbb{R}^n	89
Bolzano, Bernard - notă istorică	100
Borel, Emile - notă istorică	115
Brouwer, L. E. J. - notă istorică	237
Buniakovski, Victor - notă istorică	86

C

Caccioppoli, Renato - notă istorică	235
Cantor, Georg - notă istorică	10
Cauchy, Augustin Louis - notă istorică	85

Cesàro, Ernesto - notă istorică	157
coeficienți Fourier	497,498
complementara unei mulțimi în raport cu o altă mulțime	13
compunerea a doua funcții	18
condiție suficientă	4
condiție necesară	4
condiție necesară și suficientă	4
conjunctie	3
convergența simplă a șirurilor de funcții	144
convergența uniformă a șirurilor de funcții	145-146
convergența (integrabilitatea) absolută pentru integrale infinite	430
convergența uniformă a integralei infinite în raport cu parametrul	431
contractie	227, 236
corp	23
criteriul lui Abel	190
criteriul lui Abel privind seriile de funcții	480-481
criteriul lui Cauchy	140
criteriul lui Cauchy pentru convergența uniformă	147-148
criteriul lui Cauchy pentru convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite	432
criteriul lui Cauchy pentru integrabilitatea Riemann-Stieltjes	360
criteriul lui Cauchy pentru integrala Riemann multiplă	406
criteriul lui Cauchy pentru integrale infinite	425-426
criteriul lui Cauchy privind seriile de funcții	479
criteriul de comparație cu inegalități	185
criteriul de comparație cu inegalități pentru integrale infinite	426
criteriul de comparație la limită	185
criteriul de comparație la limită pentru integrale infinite	427
criteriul de condensare al lui Cauchy	194
criteriul de diferențiabilitate	302
criteriul de discontinuitate	203
criteriul lui Dirichlet	189
criteriul lui Dirichlet pentru integrale infinite	427
criteriul lui Dirichlet privind convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite	433
criteriul lui Dirichlet privind seriile de funcții	480
criteriul lui Gauss	195
criteriul de integrabilitate Riemann al lui Darboux	382

criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann	383
criteriul lui Leibniz	192
criteriul lui Raabe	187
criteriul raportului	186
criteriul rădăcinii	186
criteriul de stabilire a punctelor de extrem pentru funcții de mai multe variabile	342
criteriul lui Weierstrass privind convergența uniformă în raport cu parametrul a integralelor infinite	432
criteriul lui Weierstrass privind seriile de funcții	480
cuantificatorul existențial	6
cuantificatorul universal	6

D

Darboux, Jean Gaston - notă istorică	282
Dedekind, Richard - notă istorică	50
derivata unei funcții într-un punct	272
derivata de ordin superior	283
derivata după o direcție	297
derivata parțială	297
Descartes, René - notă istorică	14
diametrul unei mulțimi	121
diferența a două mulțimi	13
diferențiala de ordin superior	312
Dini, Ulisse - notă istorică	221
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune - notă istorică	189
disjuncție	3

E

e	162
Euler, Leonard - notă istorică	317

F

fals	3
familie uniform mărginită de funcții continue	252
familie de funcții echicontinuă	253

Fejér, Lipót - notă istorică	503
Fermat, Pierre - notă istorică	276
formula lui Leibniz	398-399
formula Leibniz-Newton	381
formula lui de Moivre-Stirling	457
formula lui Wallis	456
Fourier, Jean Baptiste Joseph - notă istorică	498
frontiera unei mulțimi	103
Fubini, Guido - notă istorică	416
funcție	17-18
funcție absolut integrabilă	430
funcția Beta	452
funcție care admite primitive	380
funcție continuă într-un punct	200
funcție cu proprietatea lui Darboux	217
funcție cu variație mărginită	463-464
funcție de clasă C^1	320
funcție derivabilă	272
funcție diferențiabilă	298
funcția exponențială	74
funcția Gama	451
funcție injectivă, surjectivă, bijectivă	18,19
funcție integrabilă Riemann	359
funcție integrabilă Riemann-Stieltjes	359
funcție în scară	240
funcție liniară	205
funcțională liniară mărginită	373
funcțională liniară pozitivă	373
funcție liniară pe porțiuni	241
funcție Lipschitz	227
funcția logaritmică	74
funcția modul	71
funcția putere	74
funcție (strict) crescătoare	73
funcție (strict) descrescătoare	73
funcție (strict) monotonă	73
funcție uniform continuă	225

G

Gauss, Johann Karl Friedrich - notă istorică 195
grup 21
 γ 166

H

Hadamard, Jacques Salomon - notă istorică 486
Heine, Heinrich Eduard - notă istorică 115
Hesse, Otto - notă istorică 346
Hessiana unei funcții într-un punct 345
Hilbert, David - notă istorică 504
l'Hospital, Guillaume François - notă istorică 281

I

identitatea paralelogramului 85
imaginea unei mulțimi printr-o funcție 20
implicație 3
inducție matematică 30
inel 22
inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz 86
integrala Riemann improprie 420-421,423
interiorul unei mulțimi 101
intersecția mulțimilor 12
intervalul de convergență al unei serii de puteri 486
inversa unei funcții 19
împărțirea pe sistemul extins al numerelor reale 79
înmulțirea pe mulțimea numerelor întregi 37
înmulțirea pe mulțimea numerelor naturale 31
înmulțirea pe mulțimea numerelor raționale 43
înmulțirea pe mulțimea numerelor reale 56
înmulțirea pe sistemul extins al numerelor reale 78

J

Jordan, Camille - notă istorică 404

L

Lagrange, Joseph-Louis - notă istorică	278
Lebesgue, Henri Léon - notă istorică	120
legile lui De Morgan	5,14
Leibniz, Gottfried - notă istorică	192
lema lui Abel	189
lema de aproximare	321
lema lui Cesàro	139
lema lui Riemann	500
lema lui Stolz-Cesàro	170
limita inferioară a unei funcții într-un punct	262
limita inferioară a unui șir	151
limita la dreapta a unei funcții într-un punct	264
limita la stânga a unei funcții într-un punct	263
limita superioară a unei funcții într-un punct	262
limita superioară a unui șir	151
limita unei funcții într-un punct	259,260
limita unui șir	129
Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund - notă istorică	227

M

majorant	25
margină inferioară a unei mulțimi	26
margină superioară a unei mulțimi	25,26
maximul unei mulțimi	25
Mertens, Franz - notă istorică	183
metrică	235-236
minimul unei mulțimi	25
minorant	25
de Moivre, Abraham - notă istorică	457
de Morgan, Augustus - notă istorică	14
mulțime	10
mulțime bine ordonată	26
mulțime cât generată de o relație de echivalență	24
mulțime (cel mult) numărabilă	34
mulțime compactă	114

mulțime complet ordonată	26
mulțime conexă	111
mulțimea de convergență a unei serii de puteri	486
mulțime de măsură Jordan nulă	403
mulțime deschisă	93
mulțimi disjuncte	12
mulțimi egale	11
mulțime finită	34
mulțime închisă	94
mulțime majorată	25
mulțime mărginită	25
mulțime măsurabilă	409
mulțime minorată	25
mulțimea numerelor iraționale	58
mulțimea numerelor întregi	37
mulțimea numerelor raționale	43
mulțimea numerelor reale	52
mulțimea numerelor reale (abordare abstractă)	60
mulțime ordonată	25
mulțimea punctelor limită a unui șir	152
mulțime total ordonată	25
mulțimea vidă	12

N

negația	3
Newton, Isaac - notă istorică	287
normă	88,89
norma unei funcții mărginite	147
norma unui vector din \mathbb{R}^n	83

O

oscilația unei funcții pe o mulțime	262
oscilația unei funcții într-un punct	263

P

Peano, Giuseppe - notă istorică	34
---------------------------------	----

Picard, Charles Emile - notă istorică	232
polinoamele Bernstein	241
polinoame trigonometrice	496
predicat	6
preimaginea unei mulțimi printr-o funcție	20
prima teoremă de integrare pentru integrala Riemann multiplă	408
prima teoremă de medie pentru integrala Riemann	389
prima teoremă de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes	386
principiul contracțiilor al lui Picard-Banach-Caccioppoli	237
principiul dublei negații	5
principiul intervalelor închise incluse al lui Cantor	69
produsul Cauchy a două serii	183
produs cartezian de mulțimi	14
produs scalar	88
produsul scalar a doi vectori din \mathbb{R}^n	83
propoziție	3
punct de acumulare	95
punct de discontinuitate de prima speță	264
punct de discontinuitate de a doua speță	264
punct de extrem local al unei funcții	276, 341
punct de maxim local al unei funcții	275, 341
punct de minim local al unei funcții	275, 341
puterea de exponent natural a unui număr real	71
puterea de exponent rațional a unui număr real pozitiv	72, 73

R

Raabe, Joseph - notă istorică	188
regula lui l'Hospital	281
regula modus-ponens	5
Riemann, Bernhard - notă istorică	355
Riesz, Frigyes - notă istorică	378
relație (reflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, de echivalență)	24
relație de ordine	25
relație de ordine completă	26
relația de ordine pe mulțimea numerelor întregi	39
relația de ordine pe mulțimea numerelor naturale	32
relația de ordine pe mulțimea numerelor raționale	44

relația de ordine pe mulțimea numerelor reale	54
relația de ordine pe sistemul extins al numerelor reale	76
reuniunea mulțimilor	12
Rolle, Michell - notă istorică	277

S

scăderea pe sistemul extins al numerelor reale	77
Schwarz, Hermann Amandus - notă istorică	86
serie	179
serie absolut convergentă	181
serie alternată	191
seria armonică	180
serie Fourier	497-498
serie de funcții	478
serie de puteri	485
sfera din \mathbb{R}^n	89
seria geometrică	180
serie semiconvergentă	181
serie trigonometrică	496
sistemul extins al numerelor reale	76
spațiu metric	236
spațiu metric complet	236
spațiu normat	88-89
spațiu topologic	108
spațiu vectorial	23
spațiul vectorial \mathbb{R}^n	81
Stieltjes, Thomas Jan - notă istorică	357
Stirling, James - notă istorică	457
Stolz, Otto - notă istorică	170
Stone, Marshall - notă istorică	246
submulțime	11
subșir	131
surjecție canonică generată de o relație de echivalență	25

S

șir 128
șir Cauchy 140, 236
șir Cesàro sumabil 157
șir convergent 129, 236

T

Taylor, Brook - notă istorică 284
Tauber, Alfred - notă istorică 492
tautologie 4
tăietură (în mulțimea numerelor raționale) 49
tăietură de prima speță 51
tăietură de a doua speță 51
teorema Arzelà-Ascoli 254
teorema aplicației deschise 329
teorema Bolzano-Weierstrass 98
teorema Cauchy-Hadamard 486
teorema continuității uniforme 226
teorema convergenței mărginite pentru integrala Riemann 368
teorema convergenței monotone 137
teorema convergenței monotone pentru integrale infinite 443
teorema convergenței monotone pentru integrala Riemann 371
teorema de acoperire a lui Lebesgue 120
teorema de aditivitate de domeniu a integralei Riemann multiple 412
teorema de aditivitate de domeniu
pentru integrala Riemann-Stieltjes 361
teorema de aproximare a lui Bernstein 244
teorema de caracterizare cu ε a marginilor unei mulțimi 66
teorema de continuitate globală 208
teorema de continuitate a inversei pentru funcții continue 216
teorema de continuitate în raport cu parametrul
pentru integrala infinită 436
teorema de continuitate în raport cu parametrul
pentru integrala Riemann 396
teorema de convergență dominată pentru integrale infinite 441

teorema de derivare pentru integrala Riemann-Stieltjes	387
teorema de derivabilitate în raport cu parametrul	
pentru integrala infinită	438
teorema de derivabilitate în raport cu parametrul	
pentru integrala Riemann	397
teorema de derivare și integrare termen cu termen	
a seriilor de puteri	488
teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse	304
teorema de existență a părții întregi	64
teorema de injectivitate locală	322
teorema de integrabilitate Riemann-Stieltjes a funcțiilor continue	364
teorema de integrare prin părți pentru integrala Riemann	389
teorema de integrare prin părți	
pentru integrala Riemann-Stieltjes	362
teorema de inversare a ordinii de integrare	
pentru integrala Riemann	400
teorema de inversiune locală	329
teorema de inversiune locală (forma slabă)	323
teorema de permanență a compacității	
pentru funcții continue	212
teorema de permanență a conexității	
pentru funcții continue	210
teorema de permutare a limitei cu derivata	291
teorema de permutare a limitei cu integrala	366
teorema de punct fix al lui Brouwer	237
teorema de reducere a calculului unei integrale duble	
la o succesiune de integrale Riemann	413
teorema de reducere a integralei Riemann-Stieltjes	
la integrala Riemann	388
teorema de reprezentare a lui Dirichlet	501
teorema de reprezentare a lui Riesz	373
teorema de schimbare de variabilă	390
teorema de schimbare de variabile	
pentru integrala Riemann multiplă	416
teorema de structură a mulțimilor deschise	104
teorema de surjectivitate locală	327
teorema de unicitate a limitei	129
teorema de unicitate a seriilor de puteri	489

teorema funcțiilor implicite	336
teorema fundamentală a calculului integral	387
teorema Heine-Borel	115
teorema intervalelor nevide incluse	98
teorema lui Abel	491
teorema lui Baire	121
teorema lui Bernstein	490
teorema lui Bolzano a valorilor intermediare	211
teorema lui Cantor	118
teorema lui Cauchy	280
teorema lui Cesàro	183
teorema lui Darboux	282
teorema lui Dini	220
teorema lui Fejér	503
teorema lui Fermat	276
teorema lui Fermat - cazul multidimensional	341
teorema lui Jordan	468
teorema lui Lagrange	278
teorema lui Lagrange - cazul multidimensional	307
teorema lui Mertens	183
teorema lui Rolle	277
teorema lui Schwarz	310
teorema lui Taylor	284
teorema lui Taylor - cazul multidimensional	313
teorema lui Taylor cu restul sub forma integrală	391
teorema lui Tietze	249
teorema lui Tauber	492
teorema multiplicatorilor lui Lagrange	347
teorema privind calculul variației totale	
a unei funcții derivabile cu derivata continuă	470
teorema privind convergența uniformă a seriilor de puteri pe mulțimile compacte conținute în interiorul intervalului de convergență	488
teorema punctelor fixe pentru contracții	229
teorema valorii minime și maxime pentru funcții continue	213
teorema Stone-Weierstrass	246
Tietze, Heinrich - notă istorică	249
topologie	108

V

variația unei funcții corespunzătoare unei partiții	463
variația totală a unei funcții	463
vecinătate	95

W

Wallis, John - notă istorică	456
Weierstrass, Karl - notă istorică	100