Seminar 6 – 10.11.2021

Ex. 1: Pt. ce nr. nat. $m \geq 2$ este funcția $f: \mathbb{Z}_m \to \mathbb{C}$, $f(\hat{k}) = i^k$, bine definită?

Rez:

$\forall\, k, l \in \mathbb{Z}$ a.î. $\hat{k} = \hat{l} \Rightarrow f(\hat{k}) = f(\hat{l})$

$i^k = i^l \Leftrightarrow i^{k-l} = 1 \Rightarrow 4 \mid k-l$.

În $\mathbb{Z}_m$: $\hat{k} = \hat{l} \Leftrightarrow \widehat{k-l} = \hat{0} \Rightarrow m \mid k-l \Rightarrow k-l = m\cdot t$, $t \in \mathbb{Z}$.
(sau k și l au același rest la împ. cu m)

$4 \mid k-l \Rightarrow 4 \mid m\cdot t \Rightarrow 4 \mid m$
$t \in \mathbb{Z}$

$t \in \mathbb{Z}$ arbitrar

Afirm: f bine def $\Leftrightarrow 4 \mid m$

i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}, i^{4k+3}
$\quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel \quad \parallel$
1, i, -1, $-i$

Noi am arătat „$\Rightarrow$”

„$\Leftarrow$" $4 \mid m \Rightarrow m = 4t$, $t \in \mathbb{N}$

Fie $k, l \in \mathbb{Z}$ a.î. $\hat{k} = \hat{l} \Rightarrow m \mid k - l$ (sau au același rest la împ. la m)

$f(\hat{k}) = i^k = i^{mp} \cdot i^r = 1^{4tp} \cdot i^r = i^r$

$f(\hat{l}) = i^l = i^{ms} \cdot i^r = i^{4ts} \cdot i^r = i^r$ $\Rightarrow f$ bine def.

$m = 4t$ și k și l au același rest la împ la $m \Rightarrow \bar{k} = \bar{l}$ în $\mathbb{Z}_4$.

$k = m \cdot p + r$, $0 \le r < m$ $\Rightarrow \bar{k} = \underbrace{\overline{mp}}_{\bar{0}} + \bar{r} = \bar{r}$

$l = m \cdot s + r$, $0 \le r < m$ $\quad \bar{l} = \overline{ms} + \bar{r} = \bar{r}$

Exemplu: $m = 3$, $f(\hat{k}) = i^k$, $\hat{0} = \hat{3} = \hat{6} = \hat{9} = \widehat{12}$

$\hat{0} \to 1$, $\hat{3} \to i^3 = -i$, $\hat{6} \to i^6 = -1$, $\hat{9} \to i^9 = i$, $\widehat{12} \to 1$

Ex. 2: Pe $\mathbb{C}$ se def. rel de echiv. $z \sim w \Leftrightarrow |z| = |w|$.

Det. a și b pt. care funcția $f : \mathbb{C}/\sim \to \mathbb{C}$, $f(\hat{z}) = (z - a)(\bar{z} - b)$ este bine def.

Rez: $f(\hat{z}) = (z - a)(\bar{z} - b) = \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2} - a \cdot \bar{z} - b \cdot z + ab$

Fie $z, w \in \mathbb{C}$ a.î. $\hat{z} = \hat{w} \Leftrightarrow |z| = |w|$.

f bine def. $\Leftrightarrow f(\hat{z}) = f(\hat{w})$

$$\underline{|z|^2} - a\bar{z} - bz + \cancel{ab} = \underline{|w|^2} - a\bar{w} - bw + \cancel{ab}$$

$$a\bar{z} + bz = a\bar{w} + bw$$

$$a(\bar{z} - \bar{w}) + b(z - w) = 0$$

$$a \cdot \bar{v} + b \cdot v = 0 \Rightarrow v = z - w.$$

$v \in \mathbb{C} \Rightarrow v = x + iy$

$$a \cdot \bar{v} + b \cdot v = 0$$

$$a(x - iy) + b(x + iy) = 0 \Rightarrow (a+b)x + (b-a)iy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)x = 0 \\ (b-a)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$$

f bine def $\Leftrightarrow a = b = 0$.

$a = b = 0 \Rightarrow f(\hat{z}) = z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Obs: $|z| = |w| = r$, $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $w = r(\cos\beta + i\sin\beta)$

Ex. 3: Pe $\mathbb{C}^*$ se def. rel. binară $z \sim w \Leftrightarrow z, w$ și 0 sunt coliniare (în planul complex). Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv., det. clasele de echivalență și un SCR.

Rez:

1. refl. 2. sim. 3. tranzit.

① z, z și 0 sunt coliniare $\Rightarrow z \sim z$

② z, w și 0 sunt coliniare $\Rightarrow w, z$ și 0 colin $\Rightarrow w \sim z$

③ Fie $z, w, t \in \mathbb{C}^*$ a.î. $z \sim w$ și $w \sim t$.

z, w și 0 sunt colin.

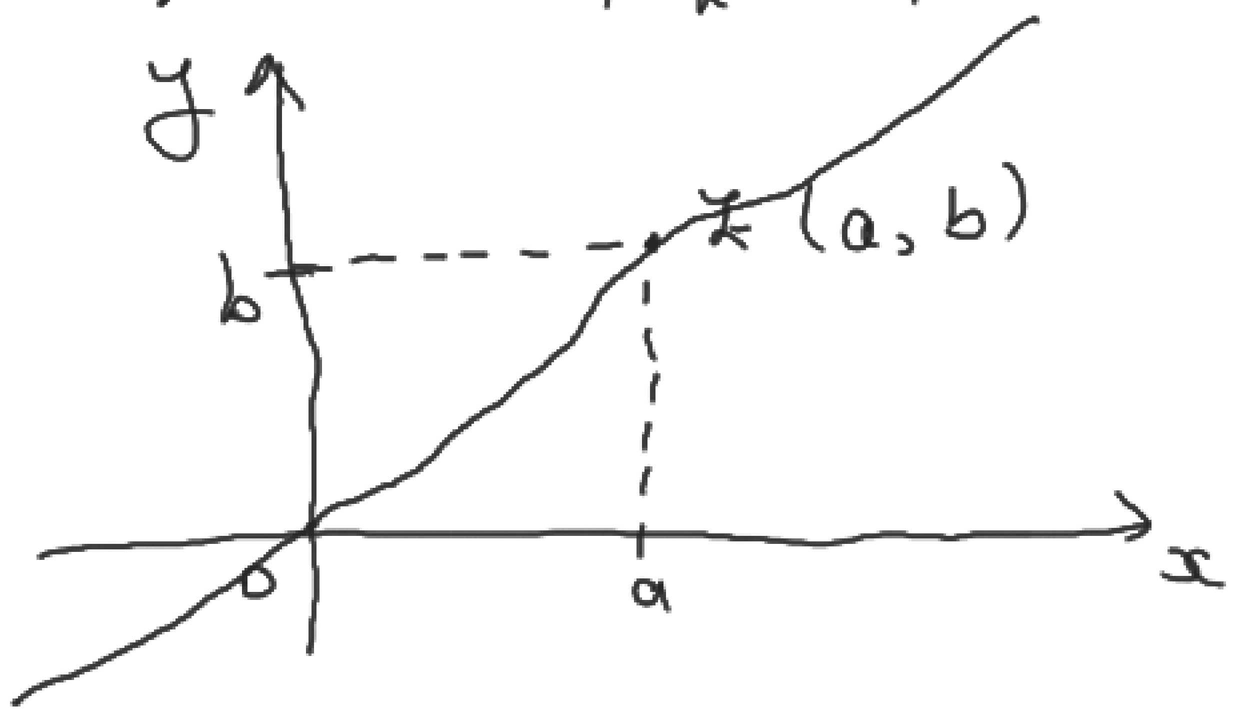
w, t și 0 sunt colin.

w și 0 det. dreapta $d \Rightarrow z, w, t, 0 \in d$

$\Rightarrow z, t$ și 0 sunt colin. $\Rightarrow z \sim t$.

Fie $z \in \mathbb{C}^*$, $z = a + bi$

$[z] = \{ w \in \mathbb{C}^* \mid z, w$ și 0 sunt coliniare$\}$



z fixat, 0 fixat

$w \in [z] \iff w \in d$

d dreapta det. de z și 0

$z(a,b)$, $O(0,0)$

$$d: \frac{x - x_0}{x_z - x_0} = \frac{y - y_0}{y_z - y_0} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a} x \\ a = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$[z] = [a + bi] = \{ w \in \mathbb{C}^* / z, w$ și 0 colin$\}$

$a \neq 0$

$= \{ x + iy \in \mathbb{C}^* / \ y = \frac{b}{a} x \}$

$= \{ x + i\frac{b}{a} x \mid x \in \mathbb{R}^* \} = \{ x(1 + i\frac{b}{a}) / x \in \mathbb{R}^* \}$

$$[z] = [bi] = \{w \in \mathbb{C}^* \mid z, w, 0 \text{ colin}\}$$
$b \neq 0$
$$= \{w \in \mathbb{C}^* \mid Re(w) = 0\}$$
$$= \{ci \mid c \in \mathbb{R}^*\}.$$

SCR: $\{i\} \cup \{1 + \frac{b}{a} i \mid \frac{b}{a} \in \mathbb{R}\} = \{i\} \cup \{1 + ci \mid c \in \mathbb{R}\}$

Ex. 4: Fie A o mulțime nevidă și $\emptyset \neq B \subseteq A$. Pe $\mathcal{P}(A)$ definim rel. $X \rho Y \Leftrightarrow X \cap B = Y \cap B$. Arătați că ρ este rel. de echiv. și că $\mathcal{P}(A)/_\sim$ este în bijecție cu $\mathcal{P}(B)$.

Ref.: $X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$.

1. refl. 2. sim. 3. tranzit.

(1) Fie $X \subseteq A \Rightarrow X \cap B = X \cap B \Rightarrow X \rho X \Rightarrow$ refl.

(2) Fie $X, Y \subseteq A$ a.î. $X \rho Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow Y \cap B = X \cap B$
$\Rightarrow Y \rho X \Rightarrow$ sim.

(3) Fie $X, Y, Z \subseteq A$ a.î. $X \rho Y$ și $Y \rho Z \Rightarrow X \cap B = Y \cap B$ și
$Y \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \rho Z \Rightarrow$ tranzit.

Exemplu: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,4\}$.

$X \subseteq A$, $X = \{1,4,5\}$.

$X \cap B = \{1,4\}$

$[X] = \{Y \subseteq A \mid X \cap B = Y \cap B\} = \{Y \subseteq A \mid Y \cap B = \{1,4\}\}$

$= \{\{1,4\}, \{1,2,4\}, \{1,4,5\}, \{1,2,4,5\}\}$

$A \setminus B = \{2,5\}$.

Obs: $X \sim Y \iff X \cap B \subseteq Y \subseteq (X \cap B) \cup (A \setminus B)$

$[X] = \{Y \subseteq A \mid X \cap B = Y \cap B\} = [X \cap B]$

$(X \cap B) \cap B = X \cap B$, $X \cap B \subseteq B$.

$[A \setminus B] = [(A \setminus B) \cap B] = [\emptyset]$

$[A] = [B]$

$\mathcal{P}(A)/_\sim = \{ [X] \mid X \in \mathcal{P}(A) \} = \{ [X] \mid X \in SCR \}$.

$\mathcal{P}(A)/_\sim$ este în bijecție cu $\mathcal{P}(B)$.

Fie $f : \mathcal{P}(A)/_\sim \to \mathcal{P}(B)$, $f([X]) = X \cap B \in \mathcal{P}(B)$

Arătăm că f este bij.

- f bine def!!! Fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $[X] = [Y]$

$\Rightarrow X \rho Y \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow f([X]) = f([Y]) \Rightarrow f$ bine def.

- f inj: Fie $[X], [Y] \in \mathcal{P}(A)/_\sim$ a.î. $f([X]) = f([Y])$

$\Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Rightarrow X \rho Y \Rightarrow [X] = [Y]$

- f surj: Fie $Z \in \mathcal{P}(B)$. Vrem $X \in \mathcal{P}(A)$ a.î.

$f([X]) = Z$. $\Rightarrow X \cap B = Z$. Luăm $X = Z \subseteq A$

$Z \subseteq B \subseteq A$.

$Z \cap B = Z$

$Z \subseteq B$, $B \cup Z = B$
$B \cap Z = Z$

$\mathcal{P}(B)$ este un SCR pt. ρ.