20.11.2021

Tutorial 5

Produs direct de grupuri. Generatori

Reamintire: 1) $(G,\cdot)$ grup, $H \subseteq G$, atunci $H \leq G$ (subgrup) dacă $(\Leftrightarrow)$

$\forall x, y \in H$, $xy^{-1} \in H$

2) Fie $f: G_1 \longrightarrow G_2$ morfism de grupuri

- $\operatorname{Ker} f$ = nucleul $= \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = \{f^{-1}(e_2)\} \leq G_1$
- $\operatorname{Im} f = f(G_1) \leq G_2$

Partea nouă

Def: Fie G grup, $X \subseteq G$ submulțime nevidă. Atunci

$$\langle X \rangle \overset{def}{=} \bigcap_{X \subseteq H \leq G} H \quad \text{s.n. subgrupul generat de } X$$

Prop: G grup, $X \subset G$. Atunci

$$\langle X \rangle = \{ x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} \cdots x_m^{\varepsilon_m} \mid m \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, \varepsilon_i \in \mathbb{Z} \}$$

Ex: 1) G grup, $X = \{g\}$, $g \in G$ $((G,\cdot))$

$$\langle X \rangle = \langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

2) $(\mathbb{Z}, +) = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$

$$\langle 1 \rangle = \{ 1 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \quad \text{Yey}$$

Produs direct de grupuri

Reamintire Tutoriat 1: A, B două mulțimi nevide. Atunci

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

Generalizare: $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ mulțimi nevide

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

Fie G, H două grupuri. Putem considera arătarea: $G \times H$ care devine grup cu „înmulțirea pe componente":

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2,\ h_1 h_2)$$

Ex: 1) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} = \{(\bar{x}, \hat{y}) \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_8,\ \hat{y} \in \mathbb{Z}_{10}\}$

$$(\bar{4}, \hat{3}) + (\bar{7}, \hat{7}) = (\underset{\mathbb{Z}_8}{\overline{11}}, \underset{\mathbb{Z}_{10}}{\widehat{10}}) = (\bar{3}, \hat{0})$$

PRECIZARE: $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ grup $\Leftrightarrow$ n = prim

2) $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7 = \{(\bar{x}, \hat{y}) \mid \bar{x} \in \mathbb{Z}_5,\ \hat{y} \in \mathbb{Z}_7\}$

$$(\bar{2}, \hat{4}) \cdot (\bar{3}, \hat{6}) = (\bar{6}, \widehat{24}) = (\bar{1}, \hat{3})$$

Subgrupuri normale

Def: Fie G grup, $H \leq G$. Atunci H s.n. SUBGRUP NORMAL al lui G (notație: $H \trianglelefteq G$) dacă $xHx^{-1} \subseteq H$, $\forall\, x \in G$, adică

$$xhx^{-1} \in H,\ \forall\, x \in G,\ \forall\, h \in H$$

$*$ $xH \overset{def}{=} \{xh \mid h \in H\}$

Proprietăți și exemple

1) Dacă G = grup abelian $\Rightarrow$ orice subgrup este normal

$H \leq G$ $\quad xhx^{-1} = xx^{-1}h = h \in H,\ \forall\, x \in G,\ h \in H$

2) $\{1\}$, $G \trianglelefteq G$

3) S_3 grupul permutărilor de 3 elemente

$$H = \left\{ e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\} \not\trianglelefteq S_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \notin H$$

Exerciții: Tema 4

1) Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in Q, a \neq 0, a \neq -b \right\}$.

(i) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup ;

(ii) Să se determine toate matricele $X \in M$ a.î. $X \cdot X^t = I_2$;

(iii) Ecuația $Y^t \cdot Y = I_2$ are soluții în M ?

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1+b_1 \end{pmatrix}}_{A_1}\underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & a_2+b_2 \end{pmatrix}}_{A_2} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 \\ 0 & a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + b_1b_2 \end{pmatrix} \in M$

$\in M$ $\Rightarrow$ parte stabilă

- asociativitate - DA: înmulțirea matricilor e asoc
- I_2 element neutru
- $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ $\quad \det X = \underset{\neq 0}{a}\underset{\neq 0}{(a+b)} \neq 0 \Rightarrow X$ inversabilă

b) $X X^t = I_2 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & (a+b)b \\ b(a+b) & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ (a+b)b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ (a+b)^2 = 1 \end{cases}$$

Deci $X = I_2$ sau $X = -I_2$

c) Felicitări, voi o faceți

2) G grup a.î. $x^2=1$. Atunci G abelian.

Sol: Fie $x, y \in G \Rightarrow xy \in G \Rightarrow (xy)^2 = 1$

$xyxy = 1 \quad | \cdot y \quad (y^2=1, \forall y \in G)$

$x \cdot / \; xyx = y$

$\boxed{yx = xy} \; \forall x, y$

---

3) Se consideră $(G,\circ)$ şi $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ unde $G = (3,\infty)$ şi $x \circ y = xy-3x-3y+12$, oricare ar fi $x,y \in G$.

Să se arate că :

(i) $(G, \circ)$ este un grup abelian ;

(ii) Să se determine $a,b \in \mathbb{R}$ a.î. $f : \mathbb{R}_+^* \to (3,\infty)$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism de grupuri ;

(iii) Să se calculeze x^n, unde $x \in G$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Recomandare

$axy + bx + by + c = a\left(xy + \frac{b}{a}x + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\right)$

$= a\left(x\left(y+\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}\left(y + \frac{b}{a}\right) - \frac{b^2}{a^2} + \frac{c}{a}\right)$

$= a\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(y+\frac{b}{a}\right) + c - \frac{b^2}{a}$

Conex: $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$

$= x(y-3) - 3(y-3) + 12 - 9$

$\boxed{x \circ y = (x-3)(y-3) + 3}$

$x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$

$y > 3 \Rightarrow y - 3 > 0$

$\Big| \Rightarrow (x-3)(y-3) > 0 \Rightarrow (x-3)(y-3) + 3 > 0$

G Parte stabilă în raport cu „$\circ$"

- asoc - Voi
- comut - $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3 = (y-3)(x-3) + 3 = y \circ x$
- el. neu

$\exists e \in (3,\infty)$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x, \forall x$

$x \circ e = x \Leftrightarrow (x-3)(e-3)+3 = x \Leftrightarrow (x-3)(e-3) - (x-3) = 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(e-4) = 0, \forall x \Rightarrow \boxed{e = 4}$

- $U(G) = G$

$\forall x \in G, \exists y$ a.î. $x \circ y = y \circ x = 4$

$(x-3)(y-3) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-3} + 3$ ✓

$(G, \circ)$ grup

b) $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (G, \circ)$, $f(x) = ax + b$ izo, $a \neq 0$

(Dacă $a = 0 \Rightarrow f(x) = b$ nu e bij.)

f morfism: $f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \quad (1)$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^* \quad f(xy) = f(x) \circ f(y) \Leftrightarrow axy + b = (ax+b) \circ (ay+b)$

$axy + b = (ax+b-3)(ay+b-3) + 3$

$axy + b - 3 = (ax+b-3)(ay+b-3)$ (Folosim $b = 4-a$)

$axy + \cancel{1-a} = (ax+1-a)(ay+1-a)$

$= a^2xy + ax - a^2x + ay + \cancel{1-a} - a^2y - a + a^2$

$axy = a^2(xy - x - y + 1) + ax + ay - a \,|:a, \; \forall x, y$

$xy = a(xy - x - y + 1) + x + y - 1$

$\to x = y = 4$

$16 = a(16 - 4 - 4 + 1) + 7$

$9a = 9 \Rightarrow a = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 3$

Deci $f(x) = x + 3$ izo

c) $x^n = ?$ $\quad x^n = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}}$

$x \circ x = (x-3)^2 + 3$

$x \circ x \circ x = x \circ (x \circ x) = x \circ ((x-3)^2+3) = (x-3)((x-3)^2 \cancel{+3} \cancel{-3}) + 3 = (x-3)^3 + 3$

Intuim $x^n = (x-3)^n + 3$

Inducție după $n \geq 2$

$n = 2$ ✓

$n \to n+1$

$x^{n+1} = x \circ x^n = x \circ ((x-3)^n + 3) = (x-3)((x-3)^n + 3 - 3) + 3 = (x-3)^{n+1} + 3$

4) $G = (5,\infty)$ şi legea "$\circ$" definită prin

$x \circ y = xy - 5x - 5y + 30$, oricare ar fi $x,y \in G$.

Să se arate că :

(i) $(G, \circ)$ este un grup abelian;

(ii) $(G, \circ) \approx (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$;

(iii) $(G, \circ) \approx (\mathbb{R},+)$;

(iv) Să se calculeze x^n, unde $x \in G$ şi $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru voi

(i) Pentru voi

$x \circ y = (x-5)(y-5) + 5$ $\quad$ el. neu $= 6$

(ii) Putem încerca să găsim izo de forma $f : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (G, \circ)$

$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$

f morf $\to$ 1) $f(1) = 6 \Rightarrow a + b = 6 \quad (1) \Rightarrow b = 6 - a$

2) $\forall x, y > 0$, $f(xy) = f(x) \circ f(y)$

$axy + b = (ax + b - 5)(ay + b - 5) + 5$

$axy + 1 \cancel{-a} = (ax + 1 - a)(ay + 1 - a)$

$= a^2xy + ax - a^2x + ay + 1 \cancel{-a} - a^2y - a + a^2$

$\cancel{a}xy = a^{\cancel{2}}(xy - x - y + 1) + \cancel{a}x + \cancel{a}y - \cancel{a} \quad | : a$

$\forall x, y > 0$

$x = 2$
$y = 2$

$\cancel{4} = a + \cancel{4} - 1$

$\boxed{a = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} b = 5}$

$g : G \to \mathbb{R}_+^*$

$\boxed{g(x) = x - 5}$

$\boxed{f(x) = x + 5 \quad \text{izo}}$

(iii) Știm $\boxed{(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)}$ (prin g)

Vrem $(G, \circ) \simeq (\mathbb{R}, +)$

Căutăm f izo $f : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$, $\begin{cases} f(xy) = f(x) + f(y) \\ f(1) = 0 \end{cases}$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $f^{-1}(x) = e^x$

Avem $f(x) = \ln x$ care salvează situația

Deci $(G, \circ) \overset{\text{ii}}{\simeq} (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \simeq (\mathbb{R}, +)$ ✓

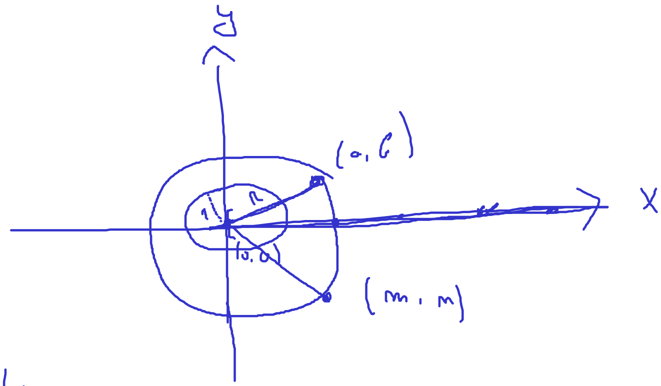
$h : \mathbb{R} \to G$, $h(x) = e^{x-5}$ izo

Extra : Pe $\mathbb{C}$: $x \sim y \iff |x| = |y|$.

i) $\sim$ rel. de ech.

ii) sist. de reprez. pt. $\sim$

SOL i) Trivial



ii) $x \in \mathbb{C}$; $|x| = \sqrt{a^2+b^2} = r \in [0, \infty)$

$x = a + bi$

$\hat{x} = \{ y \in \mathbb{C} \mid y \sim x \} =$

= toate punctele egal depărtate de origine având același modul

$\hat{x} = \mathcal{C}(O(0,0), |x|)$

($\mathcal{C}(A(a,b), r)$ = cercul de centru A și rază r)

$\hat{1} = \mathcal{C}(O(0,0), 1) = \{ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i ; \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ etc} \}$

Practic, un sistem de reprez. e semidreapta Ox