Exerciţii temă recapitulative din PRELIMINARIILE ALGEBRICE şi LOGICA PROPOZIŢIONALĂ CLASICĂ, pe care le–am dat la examenele din ultimii ani la LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN
UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro, claudia.muresan@unibuc.ro

2020–2021, Semestrul I

1 Lista 1 de Subiecte

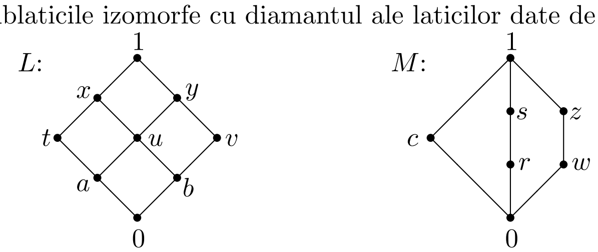
Exerciţiul 1.1. Fie A o mulţime cu exact 2 elemente (i. e. având $|A| = 2$). Desenaţi diagramele (date de reprezentările prin grafuri orientate ale) tuturor relaţiilor binare pe A şi indicaţi care dintre ele sunt:

- reflexive,
- simetrice,
- antisimetrice,
- tranzitive.

Pentru cele care sunt:

- relaţii de ordine, desenaţi–le şi diagramele Hasse,
- relaţii de echivalenţă, indicaţi şi partiţiile care le corespund.

Exerciţiul 1.2. Indicaţi sublaticile izomorfe cu diamantul ale laticilor date de următoarele diagrame Hasse:



Exerciţiul 1.3. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\varphi, \psi, \chi \in E$ şi $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$. Demonstraţi că au loc, în calculul propoziţional clasic:

① dacă $\varphi \vee \neg\,\varphi \notin \Delta$, atunci Δ nu e sistem deductiv;

② dacă $\varphi \to \psi,\ \psi \to \neg\,\chi,\ \neg\,\varphi \to \chi,\ \varphi \leftrightarrow \chi \in \Sigma$, atunci Σ e inconsistentă;

③ $\dfrac{\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi,\ \Delta \vdash \chi \to \neg\,\varphi,\ \Sigma \cap \Delta \vdash \psi}{\Sigma \cup \Delta \vdash \neg\,\varphi}$.

2 Lista 2 de Subiecte

Exerciţiul 2.1. Fie L o latice şi S o sublatice a lui L. Notăm:

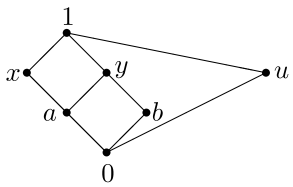
$$\rho_S = \mathcal{E}(< \cap S^2) \in \mathrm{Eq}(L) :$$

relaţia de echivalenţă pe L generată de restricţia la S a relaţiei de ordine strictă $<$ de pe L. Demonstraţi că:

① $\rho_S = \Delta_L \cup S^2$;

② dacă $\begin{cases} S \neq \emptyset \text{ sau} \\ |L| > 1 \end{cases}$ (i. e. fie S e nevidă, fie L e netrivială), atunci: $\rho_S = L^2 \Longleftrightarrow S = L$.

Exerciţiul 2.2. Determinaţi toate morfismele injective de latici mărginite (i. e. scufundările de latici mărginite) de la romb (i. e. $\mathcal{L}_2^2$: pătratul lanţului cu două elemente) la laticea L dată de următoarea diagramă Hasse:



Exerciţiul 2.3. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale, iar E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$, $\Sigma, \Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$ şi $M = \{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \neg\, \alpha\} \in \mathcal{P}(E)$.

Demonstraţi că au loc, în calculul propoziţional clasic:

1. dacă $\alpha, \beta, \gamma \in V$, atunci M e consistentă;
2. dacă $\alpha = \delta \vee \neg\, \delta$, atunci M e inconsistentă;
3. $\dfrac{\Gamma \vdash \gamma \rightarrow \alpha,\ \Delta \vdash \delta \rightarrow \beta,\ \Sigma \vdash \neg\, \alpha \wedge \neg\, \beta}{\Sigma \cup \Gamma \cup \Delta \vdash \neg\, \gamma \wedge \neg\, \delta}$.

3 Lista 3 de Subiecte

Exerciţiul 3.1. Fie L o latice mărginită, $\mathcal{C}(L)$ mulţimea elementelor complementate ale lui L, şi γ o relaţie binară pe L definită astfel: pentru orice $a, b \in L$,

$$a\, \gamma\, b \iff \begin{cases} a \vee b = 1 \\ \text{şi} \\ a \wedge b = 0. \end{cases}$$

Notăm cu $\mathcal{E}(\gamma) \in \mathrm{Eq}(L)$ relaţia de echivalenţă pe L generată de γ. Demonstraţi că:

1. γ e simetrică;
2. γ e reflexivă $\iff$ γ e tranzitivă $\iff |L| = 1$;
3. dacă L e distributivă, atunci γ e relaţie funcţională (adică funcţie parţială) injectivă;
4. $\mathcal{E}(\gamma) \subseteq \Delta_L \cup \mathcal{C}(L)^2$;
5. $\mathcal{E}(\gamma) = L^2 \iff |L| \in \{1, 2\}$ (i. e. L este fie lanţul cu exact 1 element, fie lanţul cu exact 2 elemente);
6. γ e relaţie totală (în sensul definiţiei pentru relaţii binare între două mulţimi nu neapărat egale) $\iff$ γ e relaţie surjectivă $\iff$ L e complementată $\iff \begin{cases} |L| = 1 \text{ sau} \\ (\forall\, a \in L)\, (|a/_{\mathcal{E}(\gamma)}| > 1) \end{cases}$ (i. e. fie L e trivială, fie $\mathcal{E}(\gamma)$ nu are clase singleton);
7. dacă L e latice booleană, atunci γ este funcţie bijectivă.

Exerciţiul 3.2. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\varphi, \psi, \chi \in E$ şi $\Sigma \subseteq E$.

Demonstraţi că au loc, în calculul propoziţional clasic:

1. dacă $\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \neg\, \chi \in \Sigma$, iar $\chi \rightarrow \neg\, \varphi \notin \Sigma$, atunci Σ nu e sistem deductiv;
2. dacă $\varphi \wedge \psi,\ \psi \rightarrow \neg\, \chi,\ \neg\, \varphi \vee \chi \in \Sigma$, atunci Σ nu e mulţime consistentă;
3. $\dfrac{\vdash \varphi,\ \vdash \psi \rightarrow \chi,\ \Sigma \vdash \neg\, \psi \rightarrow \neg\, \varphi}{\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi \wedge \chi}$.

4 Lista 4 de subiecte

Exerciţiul 4.1. Pentru orice latice mărginită L, notăm cu $Sl(L)$ mulţimea sublaticilor mărginite ale lui L şi cu $\sigma_L = \{(S, T) \mid S, T \in Sl(L), S \in Sl(T)\}$.

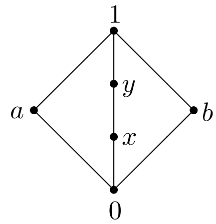
1. Demonstraţi că, pentru orice latice mărginită L, σ_L este o relaţie de ordine pe $Sl(L)$.
2. Daţi un exemplu de latice mărginită L pentru care σ_L este o relaţie de ordine totală pe $Sl(L)$.

③ Daţi un exemplu de latice mărginită L pentru care σ_L nu este o relaţie de ordine totală pe $Sl(L)$.

Exerciţiul 4.2. Enumeraţi, desenându–le diagramele Hasse, cu etichetarea nodurilor, sublaticile mărginite ale laticii mărginite date de următoarea diagramă Hasse care sunt:

① latici nedistributive;

② algebre Boole.

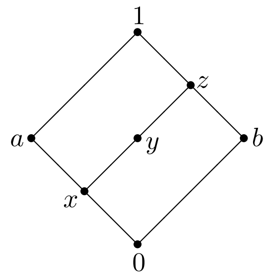


Exerciţiul 4.3. Demonstraţi că, pentru orice enunţuri α, β, γ, are loc, în calculul propoziţional clasic:

$$\vdash ((\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \wedge (\alpha \rightarrow \neg\,\beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$$

5 Lista 5 de subiecte

Exerciţiul 5.1. Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



① Determinaţi mulţimea elementelor complementate ale laticii L.

② Determinaţi un izomorfism de latici de la L la duala lui L.

Exerciţiul 5.2. Fie E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic, iar $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi, \psi, \chi, \xi \in E$, astfel încât:

$\varphi = \alpha \rightarrow \gamma$,
$\psi = \alpha \rightarrow (\gamma \vee \delta)$,
$\chi = (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma$,
$\xi = (\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\gamma \vee \delta)$.

Fie $\sim$ relaţia de echivalenţă logică pe E, iar $\leq$ relaţia de ordine a algebrei Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$. Amintesc definiţiile acestora: pentru orice $\mu, \nu \in E$:

$$\mu \sim \nu \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \vdash \mu \leftrightarrow \nu \qquad \text{şi} \qquad \mu/_{\sim} \leq \nu/_{\sim} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \vdash \mu \rightarrow \nu,$$

unde, pentru orice $\zeta \in E$, $\zeta/_{\sim} = \{\varepsilon \in E \mid \zeta \sim \varepsilon\}$.

Notăm cu $M = \{\varphi/_{\sim}, \psi/_{\sim}, \chi/_{\sim}, \xi/_{\sim}\} \subseteq E/_{\sim}$.

Daţi demonstraţii complete pentru următoarele proprietăţi în logica propoziţională clasică (folosind rezultatele din curs, fără a le redemonstra):

① $\varphi/_{\sim} \leq \psi/_{\sim} \leq \xi/_{\sim}$ şi $\varphi/_{\sim} \leq \chi/_{\sim} \leq \xi/_{\sim}$;

② dacă $\alpha \sim \beta$ şi $\gamma \sim \delta$, atunci $|M| = 1$;

③ dacă $\alpha \sim \neg\,\beta$ şi $\gamma \sim \neg\,\delta$, atunci $|M| \in \{1, 2\}$;

dacă, în plus, $\begin{cases} \gamma \sim \psi, & \text{atunci } |M| = 1; \\ \delta \sim \psi, \text{ iar } \alpha \sim \chi, & \text{atunci } |M| = 2. \end{cases}$

6 Lista 6 de subiecte – subiect multiplu

Exerciţiul 6.1. Fie A o mulţime nevidă. Să se demonstreze că:

① pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, dacă $\mathcal{S}(\rho)$ e reflexivă, atunci ρ e reflexivă;

② dacă, pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, ori de câte ori $\mathcal{T}(\rho)$ e reflexivă, rezultă că ρ e reflexivă, atunci $|A| = 1$;

③ pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, dacă ρ e simetrică, atunci $\mathcal{T}(\rho)$ e simetrică;

④ dacă, pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, ori de câte ori $\mathcal{T}(\rho)$ e simetrică, rezultă că ρ e simetrică, atunci $|A| \in \{1, 2\}$;

⑤ pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, dacă $\mathcal{R}(\rho)$ e injectivă, atunci $\rho \subseteq \Delta_A$;

⑥ pentru orice $\rho \subseteq A \times A$, dacă $\mathcal{T}(\rho)$ e injectivă, atunci ρ e tranzitivă şi, dacă $a, b, c \in A$ sunt astfel încât $(a, b), (b, c) \in \rho$, atunci $b = c$.

Exerciţiul 6.2. Să se determine morfismele de latici mărginite:

① de la produsul direct între lanţul cu 2 elemente şi lanţul cu 3 elemente ($\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$) la lanţul cu 4 elemente ($\mathcal{L}_4$);

② de la produsul direct între lanţul cu 2 elemente şi lanţul cu 3 elemente ($\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$) la romb ($\mathcal{L}_2^2$);

③ de la produsul direct între lanţul cu 2 elemente şi lanţul cu 3 elemente ($\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$) la diamant ($\mathcal{M}_3$);

④ de la produsul direct între lanţul cu 2 elemente şi lanţul cu 3 elemente ($\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$) la pentagon ($\mathcal{N}_5$);

⑤ de la pentagon ($\mathcal{N}_5$) la produsul direct între lanţul cu 2 elemente şi lanţul cu 3 elemente ($\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$).

Exerciţiul 6.3. Fie E mulţimea enunţurilor şi T mulţimea teoremelor formale ale logicii propoziţionale clasice. Să se argumenteze, pe scurt, faptul că:

- $V \cap T = \emptyset$ (i.e. nicio variabilă nu este teoremă formală);
- dacă $\varphi \in E$ e satisfiabil (adică există $h : V \to \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \varphi$), atunci există o infinitate de interpretări care satisfac enunţul φ.

Fie $\alpha, \beta, \gamma \in E$. Să se demonstreze că:

① dacă $\alpha \to (\beta \vee \gamma) \in T$, dar $\beta \to \alpha \notin T$ şi $\gamma \to \alpha \notin T$, atunci: $\alpha \notin T$ şi $\neg \beta \wedge \neg \gamma \notin T$;

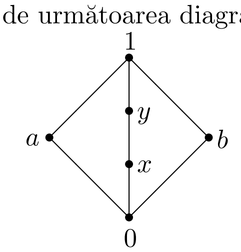
② dacă mulţimea $\{\alpha \to \neg (\beta \vee \gamma), \neg \beta \to \gamma, \neg \gamma \to \beta\}$ e satisfiabilă, atunci $\alpha \notin T$;

③ dacă mulţimea $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \gamma \to (\neg \alpha \vee \neg \beta), (\beta \wedge \gamma) \to \alpha\}$ e satisfiabilă, atunci şi mulţimea $\{\neg \alpha, \neg \beta \vee \neg \gamma\}$ e satisfiabilă;

④ dacă $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow [(\gamma \wedge \alpha) \to (\gamma \vee \alpha)] \in T$, iar β e nesatisfiabil, atunci $\alpha \in T$.

7 Lista 7 de subiecte – subiect extins

Exerciţiul 7.1. Considerăm laticea L dată de următoarea diagramă Hasse:



Fie $\rho = < \setminus \prec \subseteq L^2$: diferenţa dintre relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune asociate relaţiei de ordine a lui L, dată de diagrama Hasse de mai sus.

① Demonstraţi că laticea L este nedistributivă.

② Demonstraţi că laticea mărginită L este complementată.

③ Determinaţi $\mathcal{E}(\rho) \in \mathrm{Eq}(L)$: relaţia de echivalenţă pe L generată de ρ.

④ Demonstraţi că fiecare dintre clasele de echivalenţă ale lui $\mathcal{E}(\rho)$ este o sublatice a lui L.

⑤ Determinaţi sublaticile mărginite ale lui L care sunt latici booleene (i. e., cu operaţiile lor de complementare, sunt algebre Boole).

⑥ Determinaţi care dintre laticile booleene S de la punctul precedent au proprietatea că $\mathcal{E}(\rho) \cap S^2 \in \mathrm{Con}(S)$, i. e. relaţia de echivalenţă generată de ρ restricţionată la S este o congruenţă booleană a lui S.

Exerciţiul 7.2. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale, iar E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ şi $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$. Demonstraţi că, în logica propoziţională clasică, au loc:

① $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)]$;

② $\dfrac{\Gamma \vdash \gamma,\ \Delta \vdash \delta,\ \Gamma \cup \Delta \vdash (\gamma \rightarrow \alpha) \vee (\delta \rightarrow \beta)}{\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha \vee \beta}$;

③ mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e inconsistentă;

④ dacă $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e inconsistentă;

⑤ dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\alpha\}$ e consistentă.

8 Lista 8 de subiecte – subiect multiplu

Exerciţiul 8.1. Să se deseneze diagramele Hasse ale:

① tuturor laticilor distributive cu exact 6 elemente,

② tuturor laticilor nedistributive cu exact 7 elemente,

③ tuturor laticilor cu exact 8 elemente care au ca sublatice (dar nu neapărat ca sublatice mărginită) diamantul ($\mathcal{M}_3$),

④ tuturor laticilor cu exact 9 elemente care au ca sublatici (dar nu neapărat ca sublatici mărginite) atât cubul ($\mathcal{L}_2^3$), cât şi diamantul ($\mathcal{M}_3$),

fără a le eticheta nodurile (aşadar aceste latici vor fi identificate modulo izomorfism).

Pentru fiecare punct de mai sus, dintre aceste latici, să se aleagă o pereche (L, M) astfel încât laticea L nu este izomorfă cu M, dar există un morfism de latici (nu neapărat un morfism de latici mărginite) $f : L \rightarrow M$ a cărui imagine conţine cel puţin trei elemente distincte (două câte două), şi să se indice un astfel de morfism f.

Exerciţiul 8.2. Pentru orice latice mărginită A, vom considera următoarea relaţie binară pe A:

$$\gamma(A) = \{(x, y) \in A^2 \mid x \text{ este complement al lui } y \text{ în laticea mărginită } A\} \subseteq A^2.$$

Pentru orice mulţimi P, R, orice relaţii binare $\pi \subseteq P^2$, $\rho \subseteq R^2$ şi orice funcţie $h : P \rightarrow R$, vom considera următoarele relaţii binare:

$$h(\pi) = \{(h(a), h(b)) \mid (a, b) \in \pi\} \subseteq R^2;$$
$$h^{-1}(\rho) = \{(a, b) \in P^2 \mid (h(a), h(b)) \in \rho\} \subseteq P^2.$$

① Pentru fiecare punct de la Exerciţiul 8.1, dacă L şi M este perechea de latici şi $f : L \rightarrow M$ este morfismul de latici de la acel punct care au fost alese, să se enumere elementele lui $\gamma(L)$ şi cele ale lui $f(\gamma(L))$.

② Dacă L şi M sunt latici mărginite, iar $f : L \rightarrow M$ este un morfism de latici mărginite, să se demonstreze că:

- $f(\gamma(L)) \subseteq \gamma(M)$;
- $\gamma(L) \subseteq f^{-1}(\gamma(M))$;
- dacă f este injectivă, atunci $\gamma(L) = f^{-1}(\gamma(M))$.

③ Pentru fiecare punct de la Exerciţiul 8.1, pentru laticea L aleasă de la acel punct, să se indice o latice mărginită M împreună cu un morfism surjectiv de latici $f : L \to M$ având proprietatea că $f(\gamma(L)) \neq \gamma(M)$, sau să se demonstreze că nu există M şi f cu această proprietate.

④ Pentru fiecare punct de la Exerciţiul 8.1, pentru laticea M aleasă de la acel punct, să se indice o latice mărginită L împreună cu un morfism neinjectiv de latici mărginite $f : L \to M$ având proprietatea că $\gamma(L) \neq f^{-1}(\gamma(M))$, sau să se demonstreze că nu există L şi f cu această proprietate.

Exerciţiul 8.3. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice.

① Să se demonstreze că, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$, are loc, în logica propoziţională clasică, regula de deducţie: $\dfrac{\{\alpha,\beta\} \vdash \gamma,\ \{\alpha,\gamma\} \vdash \beta}{\{\alpha\} \vdash \beta \leftrightarrow \gamma}$.

② Să se dea un exemplu de (triplet de) enunţuri $\alpha, \beta, \gamma \in E$ cu proprietatea că:$\{\alpha,\beta\} \vdash \gamma$, $\{\alpha,\gamma\} \vdash \beta$, dar $\{\beta,\gamma\} \nvdash \alpha$.

③ Să se demonstreze că, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$, măcar una dintre următoarele mulţimi de enunţuri este consistentă:

$\{\alpha \to \beta\}$, $\{\beta \to \alpha, \alpha \to \gamma\}$, $\{\gamma \to \alpha\}$.

$\{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma \to \alpha\}$.

$\{\alpha \to (\beta \wedge \gamma)\}$, $\{\gamma \to \beta\}$, $\{(\neg\,\alpha \vee \neg\,\gamma) \to \beta\}$.

④ Să se dea un exemplu de (triplet de) enunţuri $\alpha, \beta, \gamma \in E$ cu proprietatea că, dintre cele trei mulţimi de enunţuri de la punctul ③, exact două sunt consistente, sau să se demonstreze că nu există un astfel de triplet de enunţuri α, β, γ.

9 Lista 9 de subiecte – subiect multiplu

Exerciţiul 9.1. Pentru orice poset $(A, \leq)$ şi orice relaţie binară $\gamma \subseteq A^2$, considerăm următoarele proprietăţi (în ale căror notaţii posetul $(A, \leq)$ se consideră implicit), unde x şi y sunt elemente arbitrare ale lui A:

ⓐ$_\gamma$ dacă $(x, y) \in \gamma$, atunci x şi y sunt incomparabile în posetul $(A, \leq)$;

ⓑ$_\gamma$ dacă $(x, y) \in \rho$, atunci, pentru orice $u \in A$ cu $u \leq x$, are loc şi $(u, y) \in \rho$;

ⓒ$_\gamma$ dacă $(x, y) \in \rho$, atunci, pentru orice $v \in A$ cu $y \leq v$, are loc şi $(x, v) \in \rho$.

Fie $(M, \leq)$, $(P, \leq)$ şi $(Q, \leq)$ poseturi nevide, $f : M \to P$ şi $g : P \to Q$ funcţii izotone, iar $\rho \subseteq P^2$ o relaţie binară nevidă pe P având proprietăţile ⓐ$_\rho$, ⓑ$_\rho$ şi ⓒ$_\rho$.

Notăm cu:

$$f^{-1}(\rho) = \{(m, n) \in M^2 \mid (f(m), f(n)) \in \rho\} \subseteq M^2;$$

$$g(\rho) = \{(g(x), g(y)) \mid (x, y) \in \rho\} \subseteq Q^2.$$

Să se demonstreze că:

① ρ este ireflexivă;

② dacă $x, y \in P$ au proprietatea că $\{u \in P \mid (u, y) \in \rho\} = \{x\}$, atunci x este element minimal al posetului $(P, \leq)$; de asemenea, dacă $x, y \in P$ au proprietatea că $\{v \in P \mid (x, v) \in \rho\} = \{y\}$, atunci y este element maximal al posetului $(P, \leq)$;

③ dacă $x, y \in P$ sunt astfel încât $(x, y), (y, x) \in \rho$, atunci mulţimea elementelor comparabile cu a este disjunctă de mulţimea elementelor comparabile cu b în posetul $(P, \leq)$;

④ $(P, \leq)$ nu este poset mărginit şi nu este latice;

⑤ $f^{-1}(\rho)$ este nevidă şi are proprietăţile ⓐ$_{f^{-1}(\rho)}$, ⓑ$_{f^{-1}(\rho)}$ şi ⓒ$_{f^{-1}(\rho)}$;

⑥ $g(\rho)$ este nevidă, dar g nu păstrează neapărat niciuna dintre trei proprietăţi de mai sus ale lui ρ, nici dacă e bijectivă, adică: daţi exemplu de poseturi nevide $(P, \leq)$ şi $(Q, \leq)$, funcţie izotonă bijectivă $g : P \to Q$ şi relaţie binară nevidă ρ pe P astfel încât $g(\rho)$ nu are niciuna dintre proprietăţile ⓐ$_{g(\rho)}$, ⓑ$_{g(\rho)}$ şi ⓒ$_{g(\rho)}$.

Exercițiul 9.2. Fie $(P, \leq)$ un poset nevid. Amintesc notația pentru relația binară de incomparabilitate pe P: $\| = \{(a,b) \in P^2 \mid a \nleq b$ şi $b \nleq a\}$. Considerăm următoarea relație binară pe P: $\rho = \leq \cup \|$.

Să se demonstreze că:

① ρ este reflexivă;

② închiderea simetrică a lui ρ este $\mathcal{S}(\rho) = P^2$; ρ e simetrică ddacă $|P| = 1$;

③ $\rho = \leq$ ddacă $(P, \leq)$ este lanț;

④ $\rho \neq \|$; $\rho = \Delta_P \cup \|$ ddacă $(P, \leq)$ este antilanț;

⑤ cardinalul relației $\|$ este par;

⑥ ρ e antisimetrică ddacă $(P, \leq)$ are cel mult două elemente incomparabile ddacă $\|$ este sau vidă, sau de cardinal 2.

Exercițiul 9.3. Fie A o mulțime nevidă, iar $\rho \subseteq \mathcal{P}(A^2) \times \mathcal{P}(A^2)$ relația binară pe mulțimea $\mathcal{P}(A^2)$ a relațiilor binare pe A definită astfel:

$$\rho = \{(\alpha, \mathcal{E}(\alpha)) \mid \alpha \subseteq A^2\}.$$

Să se demonstreze că:

① ρ e simetrică ddacă $|A| \in \{1, 2\}$;

② ρ e o relație de ordine pe $\mathcal{P}(A^2)$;

③ mulțimea elementelor maximale ale posetului $(\mathcal{P}(A^2), \rho)$ coincide cu mulțimea $\mathrm{Eq}(A)$ a relațiilor de echivalență pe A;

④ pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A^2) \setminus \mathrm{Eq}(A)$, dacă $\alpha \neq \beta$, atunci α şi β sunt incomparabile în posetul $(\mathcal{P}(A^2), \rho)$; de asemenea, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(A^2)$, dacă $\mathcal{E}(\alpha) \neq \mathcal{E}(\beta)$, atunci α şi β sunt incomparabile în posetul $(\mathcal{P}(A^2), \rho)$;

⑤ dacă $L \subseteq \mathcal{P}(A^2)$ are proprietatea că subposetul $(L, \rho \cap L^2)$ este lanț, atunci $|L| \leq 2$ (cu alte cuvinte, posetul $(\mathcal{P}(A^2), \rho)$ nu include lanțuri mai lungi decât lanțul cu două elemente);

⑥ mulțimea factor a mulțimii relațiilor binare pe A prin relația de echivalență generată de ρ este formată din următoarele clase de echivalență: $\mathcal{P}(A^2)/\mathcal{E}(\rho) = \{\varepsilon/\mathcal{E}(\rho) \mid \varepsilon \in \mathrm{Eq}(A)\}$.

Exercițiul 9.4. Să se demonstreze că închiderea reflexivă păstrează intersecțiile şi reuniunile arbitrare, precum şi inversarea, iar închiderile simetrică şi tranzitivă păstrează reuniunile arbitrare şi inversarea, dar nu păstrează intersecția. Adică: să considerăm două mulțimi nevide A şi I, o relație binară ρ pe A şi o familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relații binare pe A; să se demonstreze că:

① $\mathcal{R}(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{R}(\rho_i)$, $\mathcal{R}(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i) = \bigcap\limits_{i \in I} \mathcal{R}(\rho_i)$ şi $\mathcal{R}(\rho^{-1}) = (\mathcal{R}(\rho))^{-1}$;

② $\mathcal{S}(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{S}(\rho_i)$ şi $\mathcal{S}(\rho^{-1}) = (\mathcal{S}(\rho))^{-1}$; să se dea un exemplu de mulțime A şi relații binare ρ, σ pe A astfel încât $\mathcal{S}(\rho \cap \sigma) \neq \mathcal{S}(\rho) \cap \mathcal{S}(\sigma)$, de exemplu având $\rho \cap \sigma = \emptyset$, dar $\mathcal{S}(\rho) \cap \mathcal{S}(\sigma) \neq \emptyset$;

③ $\mathcal{T}(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{T}(\rho_i)$ şi $\mathcal{T}(\rho^{-1}) = (\mathcal{T}(\rho))^{-1}$; să se dea un exemplu de mulțime A şi relații binare ρ, σ pe A astfel încât $\mathcal{T}(\rho \cap \sigma) \neq \mathcal{T}(\rho) \cap \mathcal{T}(\sigma)$, de exemplu având $\rho \cap \sigma = \emptyset$, dar $\mathcal{T}(\rho) \cap \mathcal{T}(\sigma) \neq \emptyset$.

Exercițiul 9.5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi A o mulțime cu $|A| = n$. Considerăm o relație binară pe A: $\rho \subseteq A^2$. Să se demonstreze că:

① dacă ρ e reflexivă, atunci $|\rho| \geq n$;

② dacă ρ e asimetrică, atunci $|\rho| \leq n(n-1)/2$;

③ dacă ρ e reflexivă şi simetrică, atunci $|\rho|$ are aceeaşi paritate ca şi n.

Exercițiul 9.6. Fie I o mulțime nevidă și $((P_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie de poseturi nevide. Să se demonstreze că:

① posetul produs $\prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ este mărginit ddacă $(P_i, \leq_i)$ este mărginit pentru fiecare $i \in I$;

② $\prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ este latice ddacă $(P_i, \leq_i)$ este latice pentru fiecare $i \in I$;

③ $\prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ este latice distributivă ddacă $(P_i, \leq_i)$ este latice distributivă pentru fiecare $i \in I$;

④ $\prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ este latice mărginită complementată ddacă $(P_i, \leq_i)$ este latice mărginită complementată pentru fiecare $i \in I$;

⑤ $\prod_{i \in I}(P_i, \leq_i)$ este latice booleană ddacă $(P_i, \leq_i)$ este latice booleană pentru fiecare $i \in I$.

Exercițiul 9.7. Pentru orice latice L, considerăm următoarele proprietăți:
ⓓ$_L$ există un morfism injectiv de latici de la L la diamant $f : L \to \mathcal{M}_3$;
ⓟ$_L$ există un morfism injectiv de latici de la L la pentagon $g : L \to \mathcal{N}_5$;
ⓒ$_L$ există un morfism injectiv de latici de la L la cub $h : L \to \mathcal{L}_3$.
Fie L o latice arbitrară. Să se demonstreze că, dacă L are două dintre proprietățile ⓓ$_L$, ⓟ$_L$ și ⓒ$_L$, atunci L are și cea de–a treia dintre aceste proprietăți.

Exercițiul 9.8. Să se determine:

① toate morfismele injective de latici mărginite de la produsul cartezian de lanțuri $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ la cub $\mathcal{L}_2^3$;

② toate morfismele surjective de latici mărginite de la cub ($\mathcal{L}_2^3$) la pentagon ($\mathcal{N}_5$);

③ toate morfismele de latici mărginite de la cub ($\mathcal{L}_2^3$) la pentagon ($\mathcal{N}_5$).

Exercițiul 9.9. Fie E mulțimea enunțurilor logicii propoziționale clasice. Să se demonstreze că, în logica propozițională clasică, pentru orice $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$ și orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

① dacă mulțimile $\{\alpha \to \beta\}$ și $\{\alpha, \gamma \to \beta\}$ sunt nesatisfiabile, atunci $\vdash \alpha \wedge \neg\,\beta \wedge \gamma$;

② dacă mulțimile $\Gamma \cup \{\alpha \to \beta\}$ și $\Delta \cup \{\alpha, \gamma \to \beta\}$ sunt nesatisfiabile, atunci $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha \wedge \neg\,\beta \wedge \gamma$;

③ are loc regula de deducție: $\dfrac{\Gamma \cap \Delta \vdash \alpha \to (\beta \vee \gamma),\ \Delta \vdash \beta \to (\alpha \wedge \gamma)}{\Delta \vdash \alpha \to \gamma}$.

Exercițiul 9.10. Fie E mulțimea enunțurilor, iar T mulțimea teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice. Să se demonstreze că, în logica propozițională clasică, pentru orice $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$ și orice $\alpha, \beta \in E$:

① dacă Δ e sistem deductiv, dar $\Delta \cup \{\alpha\}$ nu e sistem deductiv, atunci $\Delta \nvdash \alpha$;

② dacă Δ nu e sistem deductiv, atunci $\Delta \cup \{\alpha\}$ nu e sistem deductiv;

③ dacă Γ și Δ nu sunt sisteme deductive, dar $\Gamma \cup \Delta$ e sistem deductiv, atunci există $\gamma \in \Gamma$ și $\delta \in \Delta$ astfel încât $\Gamma \vdash \delta$ și $\Delta \vdash \gamma$.

Exercițiul 9.11. Fie E mulțimea enunțurilor, iar T mulțimea teoremelor formale ale logicii propoziționale clasice, iar ρ și σ următoarele relații binare pe mulțimea părților lui E:

$$\rho = \{(\Gamma, \Delta) \mid \Gamma \subseteq E,\ \Delta \subseteq E,\ (\forall\, \delta \in \Delta)\,(\Gamma \vdash \delta)\} \subseteq (\mathcal{P}(E))^2;$$

$$\sigma = \{(\Gamma, \Delta) \mid \Gamma \subseteq E,\ \Delta = \{\delta \in E \mid \Gamma \vdash \delta\}\} \subseteq (\mathcal{P}(E))^2.$$

Să se demonstreze că:

① ρ este o relație de preordine pe $\mathcal{P}(E)$ care include relația $\supsetneq$, precum și relația σ;

② $\mathcal{R}(\sigma)$ este o relaţie de ordine pe $\mathcal{P}(E)$;

③ posetul $(\mathcal{P}(E), \sigma)$ nu este latice, iar elementele sale maximale sunt exact sistemele deductive;

④ oricare două submulţimi ale lui E care nu sunt sisteme deductive şi nu sunt egale sunt incomparabile în posetul $(\mathcal{P}(E), \sigma)$;

⑤ pentru orice $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$, dacă $\{\alpha \in E \mid \Gamma \vdash \alpha\} \neq \{\beta \in E \mid \Delta \vdash \beta\}$, atunci Γ şi Δ sunt incomparabile în posetul $(\mathcal{P}(E), \sigma)$;

⑥ orice lanţ care este subposet al lui $(\mathcal{P}(E), \sigma)$ are cardinalul mai mic sau egal cu 2.

10 Lista 10 de subiecte

Exerciţiul 10.1. Fie $(A, \leq)$ un poset cu $|A| = 3$, având maxim, dar nu şi minim. Să se determine toate relaţiile binare antisimetrice pe A care includ relaţia de ordine $\leq$ a acestui poset.

Exerciţiul 10.2. Să se determine toate morfismele de latici mărginite de la pentagon, $\mathcal{N}_5$, la cub, $\mathcal{L}_2^3$.

Exerciţiul 10.3. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice. Considerăm următoarea relaţie binară pe mulţimea $\mathcal{P}(E)$ a submulţimilor lui E:

$$\rho = \{(\Gamma, \Delta) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid \text{dacă } \Gamma \text{ e consistentă, atunci } \Delta \text{ e consistentă}\}.$$

Să se demonstreze că:

① pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

$$\{\alpha \to (\beta \vee \gamma),\ \beta \to \gamma\}\ \rho\ \{(\alpha \vee \beta) \to \gamma\};$$

② ρ este o preordine şi include relaţia $\supseteq$;

③ ρ nu este nici simetrică, nici antisimetrică.

11 Lista 11 de subiecte

Exerciţiul 11.1. Să se deseneze diagramele Hasse (distincte, adică de poseturi două câte două neizomorfe) ale tuturor poseturilor $(P, \leq)$ cu $|P| = 4$ având proprietatea că nu există $S \subseteq P$ astfel încât $|S| \geq 3$ şi $(S, \leq)$ să fie latice.

Exerciţiul 11.2. Considerăm laticea de cardinal 6: $\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ (suma ordinală dintre lanţul cu două elemente, rombul şi încă o copie a lanţului cu două elemente: rombul cu un segment dedesubt şi unul deasupra). Să se determine toate morfismele de latici mărginite de la $\mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_2^2 \oplus \mathcal{L}_2$ la pentagon, $\mathcal{N}_5$.

Exerciţiul 11.3. Fie E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, iar $\alpha, \beta, \gamma \in E$. Să se demonstreze că, în logica propoziţională clasică, au loc regulile de deducţie:

① $\dfrac{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma)}{\alpha \to (\beta \wedge \gamma),\ (\beta \vee \gamma) \to \alpha}$;

② $\dfrac{\alpha \to (\beta \wedge \gamma),\ (\beta \vee \gamma) \to \alpha}{(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma)}$.