Exerciţii suplimentare

(S.1) Fie A, B mulţimi a.î. există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă. În particular, orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin absurd că A este finită. Atunci există n astfel încât A are n elemente. Vom demonstra că există m astfel încât B are m elemente, ceea ce va contrazice ipoteza noastră.

Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 0$, avem $A = \emptyset$. Dacă am avea un $x \in B$, atunci $f(x) \in A = \emptyset$, contradicţie. Rămâne că $B = \emptyset$. Prin urmare B are 0 elemente, deci putem lua $m := 0$.

Presupunem că am arătat propoziţia pentru mulţimi cu n elemente şi considerăm acum că A are $n+1$ elemente. Luăm $g : \{1, ..., n+1\} \to A$ bijecţie. Notăm $C := g(\{1, ..., n\})$ şi $D := \{x \in B \mid f(x) \in C\}$.

Cum $f(D) \subseteq C$, putem atât restricţiona cât şi corestricţiona pe f la o funcţie $f' : D \to C$ ce ia aceleaşi valori ca f şi este deci tot injectivă. Facem acelaşi lucru pornind de la $g(\{1, ..., n\}) = C$ şi obţinem o bijecţie $g' : \{1, ..., n\} \to C$. Rezultă că C are n elemente. Aplicând ipoteza de inducţie pentru f', obţinem că există p astfel încât D are p elemente şi deci există o bijecţie $h : \{1, ..., p\} \to D$.

Distingem două cazuri. Dacă nu există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, atunci $B = D$ şi deci B are p elemente. Luăm aşadar $m := p$. În celălalt caz, dacă există $a \in B$ cu $f(a) = g(n + 1)$, avem că $B = D \cup \{a\}$, iar reuniunea este disjunctă. Luăm acum funcţia $h' : \{1, 2, ..., p + 1\} \to B$, definită, pentru orice j, prin:

$$h'(j) := \begin{cases} h(j), & \text{dacă } j \leq p \\ a, & \text{dacă } j = p + 1. \end{cases}$$

Cum h' este bijectivă, B are $p + 1$ elemente. Luăm, aşadar, în acest caz, $m := p + 1$.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

unde pentru orice n avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie b_0 cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, B fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem b_1 ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum b_0 este minimul lui B, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe b_{n+1}, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că b_n fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n + 1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m + 1 > m$. Cum b_{m+1} este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$. Am arătat aşadar că g este surjectivă.

Demonstrăm acum enunţul principal. Fie $h : A \to \mathbb{N}$ o bijecţie. Atunci $B \sim g(B) \sim h(g(B))$, deci $h(g(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi B este numărabilă.

$\square$

(S.2) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Dacă I este o mulţime numărabilă şi $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulţimi numărabile, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Oferim mai întâi demonstraţia pentru $I = \mathbb{N}$.

Fie $A'_n := \{n\} \times A_n$. Atunci, conform (S2.5), $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este o familie disjunctă de mulţimi numărabile. Aplicăm (S4.2), (ii), pentru a concluziona că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ este numărabilă. Definim

$$f : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n, \quad f(a) = (n_a, a),$$

unde $n_a = \min\{n \in \mathbb{N} \mid a \in A_n\}$. Este evident că f este bine definită (din faptul că $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, rezultă că există $n \in \mathbb{N}$ cu $a \in A_n$, deci mulţimea căreia îi căutăm minimul este nevidă) şi injectivă. De asemenea, din (S.1),(i), $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este infinită, deoarece A_0 este infinită şi incluziunea

$$j : A_0 \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad j(a) = a$$

este injecţie. În sfârşit, putem aplica (S.1),(ii) pentru a conchide că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ este numărabilă.

Considerăm acum cazul general, când I este o mulţime numărabilă arbitrară şi fie $F : \mathbb{N} \to I$ o bijecţie. Considerăm familia $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definită, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, prin:

$$B_n := A_{F(n)}$$

Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ şi deci $\bigcup_{i\in I} A_i \sim \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \sim \mathbb{N}$.

(ii) Notăm, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $A_n := \{\frac{m}{n+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Arătăm că mulţimile ce compun această familie numărabilă sunt şi ele numărabile. Luăm pentru orice $n \in \mathbb{N}$, bijecţia $f_n : \mathbb{Z} \to A_n$, definită, pentru orice m, prin $f_n(m) = \frac{m}{n+1}$. Observăm acum că $\mathbb{Q}$ este reuniunea familiei, deci este şi ea numărabilă, aplicând (**??**).

$\square$