FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Model Examen

Nume: ______________________

Prenume: ____________________

Grupa: ______________________

Indicaţii:

• Bifaţi <u>doar</u> variantele pe care le consideraţi corecte! Spre exemplu, o varianta bifată poate arăta aşa: ☒. În cazul în care aţi greşit, scrieţi de mână, sub variante: "Răspuns(uri) corect(e): [lista răspunsurilor]". **Atenţie:** în acest caz, doar răpunsurile scrise de mână vor fi luate în considerare pentru acel subiect.
• În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma Skolem se vor lua în considerare următoarele:
Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
- un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
- trei simboluri de constante a, b, c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1,5 puncte] Să se arate sintactic că pentru orice formule φ şi ψ, avem

$$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(A1)
(2)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	
(3)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	MP: (2), (3)
(4)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	(A3)
(5)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	MP: (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	
(7)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	MP: (6), (5)
(8)	$\{\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	Teorema deducţiei

□

(P2) [1,5 puncte] Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare şi $\Gamma := \{\psi \in Form \mid e \vDash \psi\}$.

(i) Demonstraţi că:

(a) Γ este consistentă.

(b) Pentru orice formulă φ, avem $\varphi \in \Gamma$ sau $\neg\varphi \in \Gamma$.

(c) Pentru orice formulă φ, dacă $\Gamma \vDash \varphi$, atunci $\varphi \in \Gamma$.

(ii) Găsiţi toate modelele lui Γ.

Demonstraţie:

(i) (a) Deoarece e este model al lui Γ, rezultă că Γ este satisfiabilă, deci consistentă.

(b) Fie φ o formulă. Avem două cazuri:

(1) $e^+(\varphi) = 1$, adică $e \vDash \varphi$. Prin urmare, $\varphi \in \Gamma$.

(2) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\neg\varphi) = 1$, aşa că $e \vDash \neg\varphi$. Prin urmare, $\neg\varphi \in \Gamma$.

(c) Presupunem că $\Gamma \vDash \varphi$. Deoarece $e \vDash \Gamma$, rezultă că $e \vDash \varphi$, deci $\varphi \in \Gamma$.

(ii) Demonstrăm că e este unicul model al lui Γ. Fie $e^* : V \to \{0, 1\}$ un model arbitrar al lui Γ. Fie $v \in V$. Avem două cazuri:

- $e(v) = 1$, adică $v \in \Gamma$. Rezultă că $e^*(v) = 1$.
- $e(v) = 0$, deci $v \notin \Gamma$. Din punctul (b) de la (i) rezultă că $\neg v \in \Gamma$. Rezultă că $e^*(\neg v) = 1$, deci $e^*(v) = 0$.

Aşadar, $e = e^*$.

□

(P3) [1 punct] Să se demonstreze că pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in Var(t), \text{ atunci } t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Demonstraţie: Aplicăm inducţia pe termeni. Avem următoarele cazuri:

- $t = v \in V$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = e_1(v) = e_2(v) = t^{\mathcal{A}}(e_2)$.
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2) = c^{\mathcal{A}}$.
- $t = ft_1 \ldots t_m$, cu $f \in \mathcal{F}_m, m \geq 1$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni. Deoarece $Var(t_i) \subseteq Var(t)$, rezultă că pentru orice $i = 1, \ldots, m$, avem $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t_i)$. Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducţie pentru a concluziona că

$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m.$$

Atunci

$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

□

Partea II. Probleme de tip grilă

(P4) [1 răspuns corect] Reamintim că $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este mulţimea variabilelor din logica propoziţională. Fie $W := \{v_{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Care dintre afirmaţiile de mai jos sunt adevărate?
☐ A: $W \subseteq \mathbb{N}$.
☐ B: $W \subseteq \mathbb{N}$ şi $V \subseteq \mathbb{N}$.
☐ C: Există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to V$ şi nu există o bijecţie $g : \mathbb{N} \to W$.
☒ D: $W \subseteq V$ sau $W \subseteq \mathbb{N}$.
☐ E: Niciuna dintre celelalte afirmaţii nu este adevărată.

(P5) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: Dacă $e^+(\varphi) = 0$ şi $e^+(\psi) = 1$, atunci $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))) = 1 \to e^+(\chi)$.
☒ B: Formula este o tautologie dacă $\chi := \neg\neg\varphi \to \varphi$.
☐ C: Dacă $e^+(\varphi) = 1$, $e^+(\chi) = 0$ şi $e^+(\psi) = 1$, atunci $e^+(\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi) \to ((\varphi\vee\psi) \to \chi))) = 1$.
☐ D: Formula este o tautologie.
☐ E: Toate afirmaţiile de mai sus sunt false.

(P6) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☒ A: $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)) = e^+((\neg\neg\varphi \to \varphi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)))$.
☐ B: $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)) = e^+(\neg\varphi \to \varphi)$.
☐ C: $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)) = e^+(\varphi \to \neg\varphi)$.
☐ D: $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)) = e^+(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
☒ E: $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)) = e^+(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \to (\varphi \wedge \psi))$.

(P7) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to (\varphi \vee \psi)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: Dacă $e^+(\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) = 1$, atunci $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$.
☐ B: Dacă $e^+(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 0$, atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\psi) = 0$.
☐ C: $e^+(\varphi) = 0$ şi $e^+(\psi) = 1$, dacă $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$.
☒ D: $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\psi) = 0$ numai dacă $e^+(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 0$.
☐ E: $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\psi) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(\varphi \vee \psi) = 1$.

(P8) [1 răspuns corect] Fie următoarea demonstraţie formală:

(1)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi\}$	$\vdash \varphi$	?
(2)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	?
(3)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	?
(4)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi\}$	$\vdash \psi$	?
(5)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi, \varphi\}$	$\vdash \chi$	?
(6)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi), \psi\}$	$\vdash \varphi \to \chi$	?
(7)	$\{\varphi \to (\psi \to \chi)\}$	$\vdash \psi \to (\varphi \to \chi)$	?
(8)		$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$	?

Aşa cum se vede, am eliminat regulile de deducţie folosite. Care dintre următoarele este şirul corect şi complet de reguli care ar face demonstraţia corectă?
☒ A: P1.37(ii), P1.37(ii), MP(1,2), P1.37(ii), MP(3,4), TD, TD, TD.
☐ B: TD, TD, MP(1,2), TD, MP(3,4), P1.37(ii), P1.37(ii), P1.37(ii).
☐ C: P1.37(ii), P1.37(ii), MP(1,2), P1.37(ii), MP(3), TD, TD, TD.
☐ D: P1.37(ii), P1.37(ii), MP(1), P1.37(ii), MP(3), TD, TD, TD.
☐ E: TD, TD, MP(1,2), TD, MP(3), P1.37(ii), P1.37(ii), P1.37(ii).

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea demonstraţie formală:

(1)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg\varphi$	Propoziţia 1.37(ii)
(2)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \mathbf{X}$	Propoziţia 1.37(ii)
(3)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \neg\psi)$	(S7.3) Reciproca axiomei 3
(4)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (3)
(5)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \mathbf{Y}$	(S7.2).(iv)
(6)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Propoziţia 1.48 pentru (5), (4)
(7)	$\{\psi \to \neg\varphi, \varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (2), (6)
(8)	$\mathbf{Z}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(9)		$\vdash (\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	Teorema deducţiei
(10)		$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg(\psi \to \neg\varphi)$	(S7.3)
(11)		$\vdash \mathbf{Q}$	Definiţia lui "$\wedge$".

Cu ce formule sau mulţimi de formule ar trebui înlocuite $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ pentru a obţine o demonstraţie corectă?
☒ A: $\mathbf{X} = \varphi$, $\mathbf{Y} = \varphi \to \neg\neg\varphi$, $\mathbf{Z} = \{\psi \to \neg\varphi\}$, $\mathbf{Q} = (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$.
☐ B: $\mathbf{X} = \psi$, $\mathbf{Y} = \neg\neg\varphi \to \varphi$, $\mathbf{Z} = \{\psi \to \neg\varphi\}$, $\mathbf{Q} = (\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$.
☐ C: $\mathbf{X} = \varphi$, $\mathbf{Y} = \varphi \to \neg\neg\varphi$, $\mathbf{Z} = \{\psi \to \neg\varphi\}$, $\mathbf{Q} = (\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$.
☐ D: $\mathbf{X} = \varphi$, $\mathbf{Y} = \varphi \to \neg\varphi$, $\mathbf{Z} = \{\psi \to \neg\varphi\}$, $\mathbf{Q} = (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$.
☐ E: $\mathbf{X} = \psi$, $\mathbf{Y} = \neg\neg\varphi \to \neg\varphi$, $\mathbf{Z} = \{\psi \to \neg\varphi\}$, $\mathbf{Q} = (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$.

(P10) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \to \neg(v_2 \to v_1)) \to (\neg v_2 \wedge v_1)$$

Care dintre următoarele sunt echivalente cu φ?
☒ A: $\neg(\neg v_1 \vee (v_2 \wedge \neg v_1)) \vee \neg(v_2 \vee \neg v_1)$.
☐ B: $\neg(\neg v_1 \vee (v_2 \wedge \neg v_1)) \vee \neg(v_2 \wedge \neg v_1)$.
☐ C: $\neg(\neg v_1 \vee \neg(v_2 \vee \neg v_1)) \vee \neg(v_2 \vee \neg v_1)$.
☐ D: $(v_1 \to (\neg v_1 \to \neg v_2)) \to (\neg v_2 \wedge v_1)$.
☒ E: $(v_1 \to v_2) \to \neg(v_1 \to \neg(v_2 \to v_1))$.

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \to \neg(v_2 \to v_1)) \to (\neg v_2 \wedge v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte:
☒ A: $v_1 \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.
☒ B: v_1 este FND a formulei.
☐ C: $(v_1 \wedge \neg v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.
☐ D: $\neg v_2 \wedge v_1$ este FNC şi FND a formulei.
☐ E: $\neg v_1 \vee (v_2 \wedge v_1) \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \to \neg(v_2 \to v_1)) \to (\neg v_2 \wedge v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt corecte:
☒ A: $v_1 \wedge (\neg v_2 \vee v_1)$ este FNC a formulei.
☐ B: $v_1 \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FNC a formulei.
☐ C: $(v_1 \wedge \neg v_2) \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.
☐ D: $(v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_1) \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.
☐ E: $(v_1 \wedge v_2) \vee v_1 \vee (\neg v_2 \wedge v_1)$ este FND a formulei.

(P13) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := v_3 \to (\neg v_1 \leftrightarrow v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate: (Hint: Folosiţi funcţia booleană asociată formulei ψ)
☒ A: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a formulei.
☐ B: $(v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a formulei.
☐ C: $(\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3)$ este FNC a formulei.
☐ D: $(v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a formulei.
☐ E: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3)$ este FNC a formulei.

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_2, v_3\},\ \{v_1, v_2, \neg v_4\},\ \{v_1, \neg v_2, \neg v_3, \neg v_4\},\ \{v_1, v_4\},\ \{\neg v_1\}\}$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☒ A: $\{v_4 \to (v_1 \vee v_2), (v_2 \wedge v_3 \wedge v_4) \to v_1, v_1 \vee v_4\} \vDash (v_2 \to v_3) \to v_1$.
☐ B: $\{v_4 \to (v_1 \vee v_2), (v_2 \wedge v_3 \wedge v_4) \to v_1, v_1 \vee v_4\} \vDash (v_2 \to v_3) \wedge \neg v_1$.
☒ C: $\mathcal{S}$ este inconsistentă.
☐ D: $\mathcal{S}$ este consistentă.
☐ E: $\mathcal{S}$ nu este nici inconsistentă, nici consistentă.

(P15) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_0, v_4\}, C_2 = \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, C_3 = \{\neg v_4, v_0, v_1\}, C_4 = \{\neg v_0, v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezolutie?
☒ A: $C_5 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_4), $C_6 = \{v_0, v_1, v_3\}$ (rezolvent al C_3, C_5).
☒ B: $C_5 = \{v_0, v_1\}$(rezolvent al C_1, C_3).
☐ C: $C_5 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al $C_1, C4$), $C_6 = \{v_0, v_3\}$ (rezolvent al C_5, C_1).

☐ D: $C_5 = \{v_0, v_1, v_4, \neg v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_3).
☐ E: $C_5 = \{v_0, \neg v_2, \neg v_4\}$ (rezolvent al C_2, C_3)), $C_6 = \{\neg v_3, \neg v_2, \neg v_4\}$ (rezolvent al C_5, C_4).

(P16) [1 răspuns corect] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_2, v_3\},\ \{v_1, v_2, \neg v_4\},\ \{v_1, \neg v_2, \neg v_3, \neg v_4\},\ \{v_1, v_4\},\ \{\neg v_1\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_2$, obţinem:
☒ A: $\mathcal{S}_3 = \{\{v_4\}, \{\neg v_4, v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}\}$.
☐ B: $\mathcal{S}_3 = \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.
☐ C: $\mathcal{S}_3 = \{\{\neg v_4\}, \{\neg v_4, v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}\}$.
☐ D: $\mathcal{S}_3 = \{\{v_4\}, \{\neg v_4, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}\}$.
☐ E: $\mathcal{S}_3 = \{\square\}$.

(P17) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_2, v_3\},\ \{v_1, v_2, \neg v_4\},\ \{v_1, \neg v_2, \neg v_3, \neg v_4\},\ \{v_1, v_4\},\ \{\neg v_1\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_1$, $x_2 := v_2$, $x_3 := v_3$ obţinem:
☒ A: $U_3 = \{\{\neg v_4\}\}$.
☐ B: $U_3 = \{\{v_4\}\}$.
☐ C: $U_3 = \{\{\neg v_4, v_3\}\}$.
☐ D: $U_3 = \{\square\}$.
☒ E: $\mathcal{S}_4 = \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.

(P18) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară şi $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := x \dot{<} \dot{2}$ şi $\psi := \neg(x \dot{<} \dot{2})$.
Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☐ A: $\mathcal{N} \vDash \forall x \varphi[e]$.
☒ B: $\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \vee \psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \vDash (\forall x \varphi \vee \forall x \neg \varphi)[e]$.
☒ D: $\mathcal{N} \vDash \forall x(\perp \to \varphi)[e]$.
☐ E: $\mathcal{N} \vDash (\exists x \varphi \wedge \neg \exists x \psi)[e]$

(P19) [2 răspunsuri corecte] Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate (pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$):
☒ A: $\exists x(\varphi \wedge \psi) \vDash \exists x \varphi \vee \exists x \psi$, pentru orice variabilă x.
☒ B: $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \wedge \exists x \psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.
☐ C: $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \wedge \exists x \psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\psi)$.
☐ D: $\exists x(\varphi \wedge \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x \varphi \wedge \exists x \psi$, pentru orice variabilă x
☐ E: $\exists x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \varphi \to \exists \psi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\psi)$.

(P20) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
- un simbol de operaţie unară f şi un simbol de operaţie binară g;
- trei simboluri de constante a, b, c.

Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi_1 = \neg\forall y(g(y,t) = b) \wedge \neg\exists x(f(x) = a)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☒ A: $\forall x\exists y\big(\neg(g(y,t) = b) \wedge \neg(f(x) = a)\big)$ este formă prenex a φ_1.
☒ B: $\exists y\forall x\big(\neg(g(y,t) = b) \wedge \neg(f(x) = a)\big)$ este formă prenex a φ_1.
☐ C: $\exists x\forall y\big(\neg(g(y,t) = b) \wedge \neg(f(x) = a)\big)$ este formă prenex a φ_1.
☐ D: $\forall x\forall y\big(\neg(g(y,t) = b) \wedge \neg(f(x) = a)\big)$ este formă prenex a φ_1.
☐ E: $\exists x\exists y\big(\neg(g(y,t) = b) \wedge \neg(f(x) = a)\big)$ este formă prenex a φ_1.

(P21) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi_2 = (\exists u S(u) \to \neg\exists z\neg T(z)) \to \exists v(R(c,v) \to R(z,v))$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☒ A: $\exists v\exists u\exists y\big((S(u) \to \neg\neg T(y)) \to (R(c,v) \to R(z,v))\big)$ este formă prenex a φ_2.
☒ B: $\exists k\exists v\exists u\big((S(u) \to \neg\neg T(k)) \to (R(c,v) \to R(z,v))\big)$ este formă prenex a φ_2.
☐ C: $\exists v\exists u\exists y\big((R(c,v) \wedge \neg R(z,v)) \to (S(u) \wedge T(y))\big)$ este formă prenex a φ_2.
☐ D: $\exists v\forall u\forall y\big((S(u) \to \neg\neg T(y)) \to (R(c,v) \to R(z,v))\big)$ este formă prenex a φ_2.
☐ E: $\forall u\forall z\exists vy\big((S(u) \to \neg\neg T(z)) \to (R(c,v) \to R(z,v))\big)$ este formă prenex a φ_2.

(P22) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi_3 = \neg\exists z(f(z) = c) \vee \neg\forall x(g(x,b) = a)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☒ A: $\forall z\exists x((\neg(f(z) = c) \vee \neg(g(x,b) = a))$ este formă prenex a φ_3.
☒ B: $\exists x\forall z((\neg(f(z) = c) \vee \neg(g(x,b) = a))$ este formă prenex a φ_3.
☐ C: $\forall z\exists x\neg((f(z) = c) \vee \neg(g(x,b) = a))$ este formă prenex a φ_3.
☐ D: $\forall z\exists x\neg((f(z) = c) \vee (g(x,b) = a))$ este formă prenex a φ_3.
☐ E: $\exists x\forall z\neg((f(z) = c) \vee (g(x,b) = a))$ este formă prenex a φ_3.

(P23) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi_4 = (\forall x R(x,u) \vee \forall x S(x)) \to \neg(\exists z T(z) \to \neg\exists y\neg R(y))$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:
☒ A: $\exists v\exists x\exists z\exists y((R(v,u) \vee S(x)) \to \neg(T(z) \to R(y)))$ este formă prenex a φ_4.
☐ B: $\forall v\forall x\exists z\exists y((R(v,u) \vee S(x)) \to \neg(T(z) \to R(y)))$ este formă prenex a φ_4.
☐ C: $\exists v\exists x\forall z\exists y((R(v,u) \vee S(x)) \to \neg(T(z) \to R(y)))$ este formă prenex a φ_4.
☐ D: $\exists v\exists x\forall z\forall y((R(v,u) \vee S(x)) \to \neg(T(z) \to R(y)))$ este formă prenex a φ_4
☐ E: $\exists v\exists x\exists z\exists y((R(v,u) \vee S(x)) \to (\neg T(z) \to R(y)))$ este formă prenex a φ_4.