Subşir crescător de lungime maximă

Se consideră vectorul a = (a_1,..., a_n).

Să se determine lungimea maximă a unui subşir crescător din a şi un astfel de subşir de lungime maximă

<u>Exemplu</u>

Pentru

$$a = (8, 1, 7, 4, 6, 5, 11)$$

lungimea maximă este **4**, un subșir fiind

$$1, \quad 4, 6, \quad 11$$

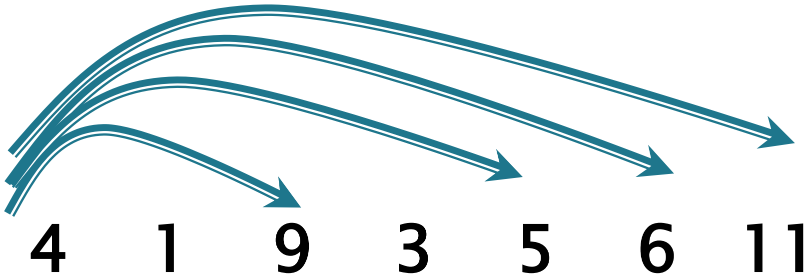
Subşir crescător de lungime maximă

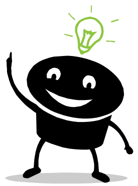
- Cu ce element putem continua un subșir crescător maxim care începe cu 4? Cu 9, 5, 6 sau 11?

4 1 9 3 5 6 11

Subşir crescător de lungime maximă

- Cu ce element putem continua un subșir crescător maxim care începe cu 4? Cu 9, 5, 6 sau 11?





Dacă am ști deja care este lungimea maximă a unui subșir crescător care începe cu 9, 5, 6, respectiv 11, am şti cu ce să continuăm

$\Rightarrow$ Subprobleme utile:

Lungime maximă a unui subșir crescător care începe cu elementul de pe poziția i – verifică principiu de optimalitate

Subşir crescător de lungime maximă

Principiu de optimalitate:

Dacă

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{ip},$$

este un subşir optim care începe pe poziția `i1`, atunci:

$$a_{i2},\ \dots,\ a_{ip}$$

este un subşir optim care începe pe poziția `i2`;

Mai general

$$a_{ik},\ \dots,\ a_{ip}$$

este un subşir optim care începe pe poziția `ik`.

Subşir crescător de lungime maximă

Principiu de optimalitate

↓

Subprobleme:

Calculăm pentru fiecare poziție i lungimea maximă a unui subşir crescător ce **<u>începe</u> pe poziția i** (cu elementul a_i)

↓

Subproblemele se suprapun
memorăm rezultatele într-un vector

Subşir crescător de lungime maximă

- **Subproblemă:**

  `lung[i]` = lungimea maximă a unui subşir crescător ce începe pe poziția i

- **Soluție problemă:**

  $$\texttt{lmax} = \max\{\texttt{lung[i]} \mid \texttt{i} = 1,2,\ldots,n\}$$

Subşir crescător de lungime maximă

- **Subproblemă:**

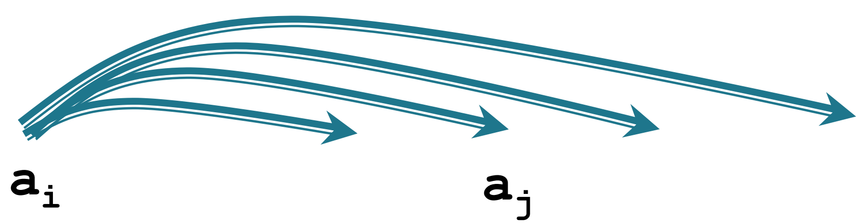
  `lung[i]` = lungimea maximă a unui subşir crescător ce începe pe poziția i

- **Știm direct** `lung[n] = 1`

- **Relație de recurență**

$$\texttt{lung[i]} = 1 + \max\{\texttt{lung[j]} \mid j>i,\ a_i<a_j\}$$

cu convenția $\max \emptyset = 0$



Subşir crescător de lungime maximă

- **Subproblemă:**

  `lung[i]` = lungimea maximă a unui subşir crescător ce începe pe poziția i

- **Știm direct** `lung[n] = 1`

- **Relație de recurență**

  $\texttt{lung[i]} = 1 + \max\{\texttt{lung[j]} \mid j>i,\ a_i<a_j\}$

- **Ordinea de calcul**

  `i = n, n-1, … , 1`

Subşir crescător de lungime maximă

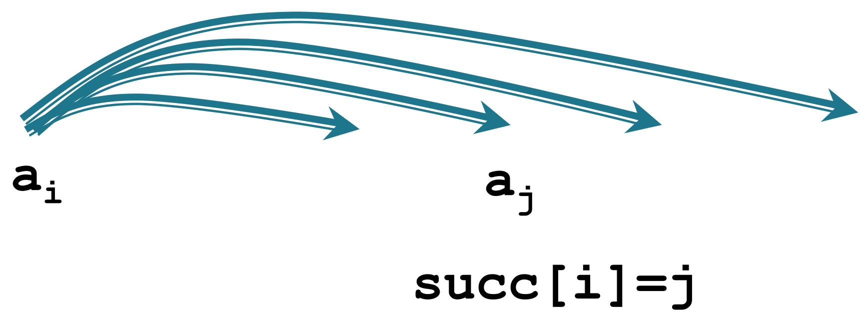
Cum determinăm un subşir maxim?

Subşir crescător de lungime maximă

- Pentru a determina și **un subșir optim** putem memora în plus

`succ[i]` = indicele următorului element dintr-un subșir optim care începe pe poziția i (**n+1** dacă nu există)

= **indicele pentru care se realizează maximul în relaţia de recurenţă**



Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :							
succ :							

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :							1
succ :							8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :							1
succ :							8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :						2	1
succ :						7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :						2	1
succ :						7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :					2	2	1
succ :					7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :					2	2	1
succ :					7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :				3	2	2	1
succ :				5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :				3	2	2	1
succ :				5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :			2	3	2	2	1
succ :			7	5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :			2	3	2	2	1
succ :			7	5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :		4	2	3	2	2	1
succ :		4	7	5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :		4	2	3	2	2	1
succ :		4	7	5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	**4**	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Soluţie: lung = 4

Subşir crescător de lungime maximă

	1	2	3	4	5	6	7
a:	8	1	7	4	6	5	11
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir: 1,

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir: 1,

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir: 1, 4,

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	**4**	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir: 1, 4, 6

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	**4**	2	3	2	2	1
succ :	7	4	7	5	7	7	8

Subşir: 1, 4, 6, 11

Altă soluție

Principiu de optimalitate:

Dacă

$$a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{ip},$$

este un subșir optim care se termină pe poziția `ip`, atunci

$$a_{i1},\ \dots,\ a_{ik}$$

este un subșir optim care se termină pe poziția `ik`.

Subproblemă:

Calculăm pentru fiecare poziție i lungimea maximă a unui subşir crescător ce **se termină pe poziția i**

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :							
pred :							

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1						
pred :	0						

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1					
pred :	0	0					

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1	2				
pred :	0	0	2				

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1	2	2			
pred :	0	0	2	2			

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1	2	2	3		
pred :	0	0	2	2	4		

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1	2	2	3	3	
pred :	0	0	2	2	4	4	

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	1	7	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	1	1	2	2	3	3	4
pred :	0	0	2	2	4	4	6

Temă

Determinați și numărul de subșiruri crescătoare de lungime maximă

Subşir crescător de lungime maximă

- **`nr[i]`** = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

Subşir crescător de lungime maximă

- **`nr[i]`** = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

- În calculul lui **`nr[i]`** intervin doar acei indici j pentru cu proprietatea că a_j este **succesor** al lui a_i **într-un subșir de lungime maximă** care începe cu a_i:
  - **j>i, a_i<a_j** pentru care **`lung[i] = lung[j] + 1`**

(adică acei j pentru care se atinge max în relaţia de recurenţă

lung[i] = 1 + max{lung[j] | j>i, a_i<a_j})

Subşir crescător de lungime maximă

- **Subprobleme**

  `nr[i]` = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

- **Soluție problema inițială**

- **Ştim să rezolvăm direct**

- **Relații de recurență**

- **Ordinea de rezolvare a recurenţelor** `i=n,…,1`

Subşir crescător de lungime maximă

- **Subprobleme**

  `nr[i]` = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

- **Soluție problema inițială**

  $$\sum_{\substack{poz=1,\ldots,n \\ lung[poz]=\mathrm{lmax}}} nr[poz]$$

- **Ştim să rezolvăm direct**
- **Relații de recurență**

- **Ordinea de rezolvare a recurenţelor** `i=n,…,1`

Subşir crescător de lungime maximă

- **Subprobleme**

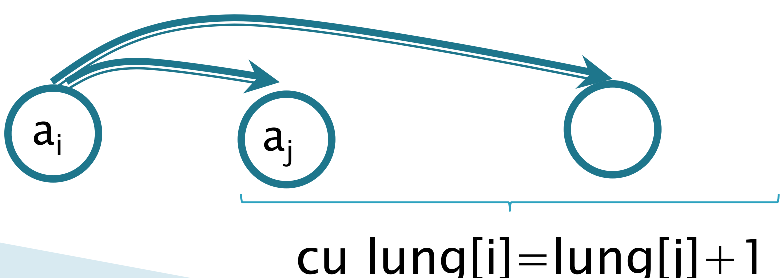
  `nr[i]` = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

- **Soluție problema inițială** $\displaystyle\sum_{\substack{poz=1,\dots,n\\ lung[poz]=\mathrm{lmax}}} nr[poz]$

- **Ştim să rezolvăm direct** `nr[n]` $= 1$

- **Relații de recurență**

$$nr[i]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{i<j,\ a_j>a_i\\ lung[i]=lung[j]+1}} nr[j], & \text{dacă există } j>i \text{ cu } a_j>a_i\\ 1, & \text{altfel}\end{cases}$$



Subşir crescător de lungime maximă

- **Subprobleme**

  `nr[i]` = numărul de subşiruri crescătoare de lungime maximă care încep pe poziţia i

- **Soluție problema inițială** $\displaystyle\sum_{\substack{poz=1,\dots,n \\ lung[poz]=\text{lmax}}} nr[poz]$

- **Ştim să rezolvăm direct** `nr[n]` $= 1$

- **Relații de recurență**

$$nr[i] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{i<j,\, a_j>a_i \\ lung[i]=lung[j]+1}} nr[j], & \text{dacă există j>i cu } a_j>a_i \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

- **Ordinea de rezolvare a recurenţelor** `i=n,…,1`

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:							1

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:						1	1

```
nr[6] = nr[7]
```

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:					1	1	1

```
nr[5] = nr[7]
```

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:				2	1	1	1

```
nr[4] = nr[5] + nr[6]
```

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:			2	2	1	1	1

`nr[3] = nr[4]`

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:		2	2	2	1	1	1

```
nr[2] = nr[4]
```

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

```
nr[1] = nr[7]
```

Subşir crescător de lungime maximă

	1	2	3	4	5	6	7
a:	8	3	1	4	6	5	11
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

Subşir crescător de lungime maximă

a:	8	3	1	4	6	5	11
	1	2	3	4	5	6	7
lung :	2	4	4	3	2	2	1
nr:	1	2	2	2	1	1	1

Soluție: nr[2]+nr[3]=4