FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen

1 Partea I. Logică propoziţională

(P1) [1 punct] Fie

$$Z = \{\varphi \in Form \mid Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}\}.$$

Să se demonstreze că Z este numărabilă.

Demonstraţie:

Din Propoziţia 1.5 avem că mulţimea $Form$ este numărabilă. Din definiţia mulţimii Z ştim că aceasta este infinită şi că este inclusă mulţimii $Form$. Atunci, cf. exerciţiului suplimentar (S1.1).(ii)[1], deoarece orice submulţime infinită a unei mulţimi numărabile este numărabilă, avem că Z este numărabilă.

$\square$

(P2) [1 punct] Arătaţi că pentru orice formule φ, ψ, χ, avem:

$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi).$$

Demonstraţie: Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

[1] Vezi: https://cs.unibuc.ro//~lleustean/Teaching/2018-LOGICINFO/Exercitii_suplimentare_solutii.pdf

(i) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= 0 \to e^+(\chi) = 1,\\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \wedge (0 \to e^+(\chi))\\ &= 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

(ii) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \vee 1) \to e^+(\chi)\\ &= 1 \to e^+(\chi) = e^+(\chi),\\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \wedge (1 \to e^+(\chi))\\ &= e^+(\chi) \wedge e^+(\chi) = e^+(\chi).\end{aligned}$$

(iii) $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\psi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}(e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (1 \vee 0) \to e^+(\chi)\\ &= 1 \to e^+(\chi) = e^+(\chi),\\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \wedge (0 \to e^+(\chi))\\ &= e^+(\chi) \wedge 1 = e^+(\chi).\end{aligned}$$

(iv) $e^+(\varphi) = 0$ şi $e^+(\psi) = 1$. Similar cu cazul precedent.

$\square$

(P3) [1,5 puncte] Fie $\varphi, \psi \in Form$. Să se arate sintactic :

$$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi.$$

Demonstraţie: Avem:

(1)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S8.3).(iii), P. 1.42.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Prop. 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\varphi$	Prop. 1.40.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(MP): (4), (3)
(6)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\psi \to \psi))$	(S8.3).(ii), P. 1.42.(ii)
(7)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \neg(\psi \to \psi)$	(MP): (6), (5)
(8)	$\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \psi)$	(MP): (7), (3)
(9)	$\{\varphi \to \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(S8.2): (8)
(10)		$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$	T.ded pentru (9)

$\square$

(P4) [2,5 puncte]

(i) Să se aducă formula $\varphi := (v_1 \leftrightarrow \neg v_2) \rightarrow v_1$ la FND şi FNC folosind transformări sintactice.

(ii) Să se aducă formula $\psi := (v_1 \wedge v_3) \leftrightarrow (\neg v_2 \vee v_3)$ la FND şi FNC folosind funcţia booleană asociată.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$
\begin{aligned}
(v_1 \leftrightarrow \neg v_2) \rightarrow v_1 &\sim ((v_1 \rightarrow \neg v_2) \wedge (\neg v_2 \rightarrow v_1)) \rightarrow v_1 && \text{(înlocuirea dublei implicaţii)}\\
&\sim \neg((\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg\neg v_2 \vee v_1)) \vee v_1 && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg((\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (v_2 \vee v_1)) \vee v_1 && \text{(dubla negaţie)}\\
&\sim (\neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \vee \neg(v_1 \vee v_2)) \vee v_1 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim ((v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2)) \vee v_1 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee v_1 && \text{(asociativitatea)}
\end{aligned}
$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$
\begin{aligned}
(v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee v_1 &\sim v_1 \vee (v_1 \wedge v_2) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2) && \text{(comutativitatea disjuncţiei)}\\
&\sim v_1 \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2) && \text{(absorbţia)}\\
&\sim (v_1 \vee \neg v_1) \wedge (v_1 \vee \neg v_2) && \text{(distributivitatea)}
\end{aligned}
$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_1 \vee \neg v_2,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Alcătuim tabelul de valori al funcţiei asociate $F_\psi : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, precum şi al funcţiei $\neg \circ F_\psi$.

x_0	x_1	x_2	$x_0 \wedge x_2$	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_2$	$F_\psi(x_0,x_1,x_2) := (x_0 \wedge x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \vee x_2)$	$\neg F_\psi(x_0,x_1,x_2)$
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1

Aplicând raţionamentul din demonstraţiile Teoremelor 1.75 şi 1.77, obţinem că forma normală disjunctivă a lui ψ este:

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3) \vee (v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3)$$

.

Alternativ, ne putem uita pe liniile cu 1 de pe coloana valorilor lui $\neg \circ F_\psi = F_{\neg\psi}$ pentru a obţine (ca mai sus) următoarea formă normală disjunctivă a lui $\neg\psi$:

$$(v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3),$$

iar, pe urmă, aplicând Propoziţia 1.71.(ii), obţinem că o formă normală conjunctivă a lui $\neg\neg\psi$, şi deci a lui ψ, este:

$$(\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3) \wedge (v_1 \vee v_2 \vee v_3).$$

□

(P5) [2 puncte]

(i) Să se aplice algoritmul Davis-Putnam mulţimii de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\}.$$

(ii) Folosind primul subpunct şi eventual alte proprietăţi, să se arate că:

$$\{v_0, v_0 \to v_1, (v_1 \to v_2) \vee v_3, v_3 \to v_4\} \vDash \neg v_4 \to v_2.$$

Demonstraţie:

(i) Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ obţinem următoarea rulare:

$i := 1$

$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$

$P1.1.$ $x_1 := v_0$

$T_1^1 := \{\{v_0\}\}$

$T_1^0 := \{\{\neg v_0, v_1\}\}$

$P1.2.$ $U_1 := \{\{v_1\}\}$

$P1.3.$ $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_1\}\}$

$P1.4.$ $i := 2;$ goto $P2.1$

$P2.1.$ $x_2 := v_1$

$T_2^1 := \{\{v_1\}\}$

$T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$

$P2.2.$ $U_2 := \{\{v_2, v_3\}\}$

$P2.3.$ $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$

$P2.4.$ $i := 3;$ goto $P3.1$

$P3.1.$ $x_3 := v_2$

$T_3^1 := \{\{v_2, v_3\}\}$

$T_3^0 := \{\{\neg v_2\}\}$

$P3.2.$ $U_3 := \{\{v_3\}\}$

$P3.3.$ $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_4\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{v_3\}\}$

$P3.4.$ $i := 4;$ goto $P4.1$

$P4.1.$ $x_4 := v_3$

$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$

$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4\}\}$

$P4.2.$ $U_4 := \{\{v_4\}\}$

$P4.3.$ $\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_4\}, \{v_4\}\}$

$P4.4.$ $i := 4;$ goto $P5.1$

$P5.1.$ $x_5 := v_4$

$T_5^1 := \{\{v_4\}\}$

$T_5^0 := \{\{\neg v_4\}\}$

$P5.2.$ $U_5 := \{\square\}$

$P5.3.$ $\mathcal{S}_6 := \{\square\}$

$P5.4.$ $\square \in \mathcal{S}_6 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

(ii) Echivalent cu a arăta că următoarea mulţime de formule este nesatisfiabilă:

$$\{v_0, v_0 \to v_1, (v_1 \to v_2) \vee v_3, v_3 \to v_4, \neg(\neg v_4 \to v_2)\}$$

. Ceea ce revine la a arăta că următoarea formulă este nesatisfiabilă:

$$v_0 \wedge (v_0 \to v_1) \wedge ((v_1 \to v_2) \vee v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg(\neg v_4 \to v_2)$$

Aplicând transformări sintactice, obţinem că formula de mai sus este echivalentă, pe rând, cu:

$$v_0 \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \wedge ((\neg v_1 \vee v_2) \vee v_3)) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_4 \vee v_2)$$

$$v_0 \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(v_4 \vee v_2)$$

$$v_0 \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge (\neg v_4 \wedge \neg v_2)$$

$$v_0 \wedge (\neg v_0 \vee v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_4 \wedge \neg v_2$$

ultima formulă fiind în FNC şi corespunzându-i forma clauzală $\mathcal{S}$ de la (i).

□

2 Partea II. Logică de ordinul întâi

(P6) [3 puncte]

(i) Să se arate că pentru orice limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi orice formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$, avem:

(a) $\exists x\varphi \vee \exists x\psi \;\text{⊨⊣}\; \exists x(\varphi \vee \psi)$, pentru orice variabilă x.

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \;\text{⊨⊣}\; \exists x\psi \to \varphi$, pentru orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$.

(ii) Să se dea exemplu de limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I şi de formule φ, ψ ale lui $\mathcal{L}$ astfel încât:

$$\exists x\varphi \to \exists x\psi \not\models \forall x(\varphi \to \psi).$$

Demonstraţie:

(i) Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$.

(a) Presupunem $\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e_{x\leftarrow a}] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $(\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}]) \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}]$ sau există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x\leftarrow a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \vee (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)[e]$

(b) $\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\psi \to \varphi$:
$\mathcal{A} \vDash \forall x(\psi \to \varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\psi \to \varphi)[e_{x\leftarrow a}] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x\leftarrow a}] \iff$ (aplicând Propoziţia 2.25) pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x\leftarrow a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \exists x\psi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ $\iff \mathcal{A} \vDash (\exists x\psi \to \varphi)[e]$.

(ii) Considerăm $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Fie $\dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}$, $\varphi := \neg(x\dot{<}\dot{0} \vee x = \dot{0})$ şi $\psi := \neg(x\dot{<}\dot{2})$.

$\mathcal{N} \vDash (\exists x\varphi \to \exists x\psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{N} \nvDash (\exists x\varphi)[e]$ sau $\mathcal{N} \vDash (\exists x\psi)[e] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $n \leq 0$ sau există $n \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq 2$.

Dar $\mathcal{N} \nvDash \forall x(\varphi \to \psi)[e]$.

Presupunem că $\mathcal{N} \vDash \forall x(\varphi \to \psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \forall x(\neg\varphi \vee \psi)[e] \Leftrightarrow$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem ($n \leq 0$ sau $n \geq 2$), ceea ce nu este adevărat (luăm $n := 1$, de exemplu).

□

(P7) [1 punct] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I ce conţine cel puţin un simbol de relaţie unară P şi un simbol de constantă c. Să se arate:

$$\vDash P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)).$$

Demonstraţie: Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură şi $e : V \to A$ o evaluare. Vrem să arătăm că $\mathcal{A} \vDash (P(c) \to (\exists v_0 P(v_0)))[e]$, i.e. că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) \to (\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Presupunem că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$ şi cercetăm dacă şi $(\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Din faptul că $(P(c))^{\mathcal{A}}(e) = 1$, avem că $c^{\mathcal{A}}(e) \in P^{\mathcal{A}}$, deci că $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. Cu scopul unei *reductio ad absurdum*, să presupunem că $(\exists v_0 P(v_0))^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Despachetând semantic, aceasta înseamnă că nu există $a \in A$ astfel încât $(P(v_0))^{\mathcal{A}}(e_{v_0\leftarrow a}) = 1$, i.e. $a \in P^{\mathcal{A}}$. Dar aceasta contrazice faptul descoperit anterior, că $c^{\mathcal{A}} \in P^{\mathcal{A}}$. □

(P8) [2 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de operaţie unară f;
- un simbol de constantă c.

Să se găsească forme normale prenex pentru următoarele formule ale lui $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \exists x P(x,y) \rightarrow (\neg \exists z (f(z) = c) \wedge \forall v R(v)) \\
\varphi_2 &= \exists x (\forall y S(y) \wedge \neg \exists y Q(x,y)) \rightarrow \neg (\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \neg \exists x R(x)).
\end{aligned}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\mathrel{\exists\!\models} \forall x (P(x,y) \rightarrow (\forall z \neg (f(z) = c) \wedge \forall v R(v))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x (P(x,y) \rightarrow \forall z \forall v (\neg (f(z) = c) \wedge R(v))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x \forall z \forall v (P(x,y) \rightarrow (\neg (f(z) = c) \wedge R(v)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\mathrel{\exists\!\models} \exists x (\forall y S(y) \wedge \forall y \neg Q(x,y)) \rightarrow (\exists x \forall y \neg Q(x,y) \vee \exists x R(x)) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \exists x \forall y (S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \rightarrow \exists x (\forall y \neg Q(x,y) \vee R(x))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x \exists y ((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \rightarrow \exists x (\forall y \neg Q(x,y) \vee R(x))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x \exists y ((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \rightarrow \exists x \forall y (\neg Q(x,y) \vee R(x))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x \exists y ((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \rightarrow \exists u \forall v (\neg Q(u,v) \vee R(u))) \\
&\mathrel{\exists\!\models} \forall x \exists y \exists u \forall v ((S(y) \wedge \neg Q(x,y)) \rightarrow (\neg Q(u,v) \vee R(u)))
\end{aligned}$$

$\square$