Seminar 2

1. Determinați suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ și precizați dacă este convergentă.

__Soluție.__ $x_n = \frac{n}{(n+1)!}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$s_n = x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\frac{\cancel{k+1}}{\cancel{(k+1)!}}}_{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \left(\frac{1}{1!} - \cancel{\frac{1}{2!}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}} \right) + \cancel{\ldots} +$$

$$+ \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1, \text{ i.e. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ este convergentă. $\square$

2. Studiați convergența (natura) seriilor:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{2^n}$.

<u>Soluție.</u> $x_n = \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n)}\cdot\frac{1}{2^n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}(3(n+1)-2)}{\cancel{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n)}(3(n+1))}\cdot\frac{1}{\cancel{2^{n+1}}\,2}$$

$$\cdot\frac{\cancel{3\cdot 6\cdot 9\cdot\ldots\cdot(3n)}}{\cancel{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}}\cdot\cancel{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n+3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Conform criteriului raportului, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. □

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{n^2}$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n = \frac{\sqrt{n-1}}{n^2}\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $x_n \le y_n\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = \frac{3}{2}$).

Conform criteriului de comparație cu inegalități, seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. □

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$, $a>0$.

<u>Soluție.</u> $x_n = \left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n \; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1} = \frac{a}{2}.$$

Conform criteriului radicalului avem:

1) Dacă $\frac{a}{2} < 1$ (i.e. $a \in (0,2)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2) Dacă $\frac{a}{2} > 1$ (i.e. $a \in (2,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3) Dacă $\frac{a}{2} = 1$ (i.e. $a=2$), atunci criteriul radicalului nu decide.

Dacă $a=2$ seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$.

$$x_n = \left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+n+1}-1\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cancel{2n^2}+3n+4-\cancel{2n^2}-n-1}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{2n+3}}\right]}_{\xrightarrow{n\to\infty} e}{}^{\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n^2+n+1}\cdot n} = e \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ este}$$

divergentă.

Am obținut : $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an^2+3n+4}{2n^2+n+1}\right)^n$ → convergentă, dacă $a\in(0,2)$; → divergentă, dacă $a\in[2,\infty)$. $\square$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{\sqrt[n]{n}}$, $a>0$.

<u>Soluție.</u> $x_n=\frac{a^n}{\sqrt[n]{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{a}{\cancel{a^{n+1}}}}{\sqrt[n+1]{n+1}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{\cancel{a^n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n+1]{n+1}}=a\cdot\frac{1}{1}=a \text{ (Vezi Seminar 1).}$$

Conform Criteriului raportului avem:

1) Dacă $a<1$ (i.e. $a\in(0,1)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este convergentă.

2) Dacă $a>1$ (i.e. $a\in(1,\infty)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ este divergentă.

3) Dacă $a=1$, atunci Criteriul raportului nu decide.

Dacă $a=1$, seria devine $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt[n]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ divergentă. □

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

<u>Soluție</u>. Fie $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și

$y_n = \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+1}} \right) = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, \infty).$$

Conform Criteriului de comparație cu limită, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ (seriile au aceeași natură).

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{2}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}} =$$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = \frac{1}{2}$).

Deci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă. $\square$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$.

<u>Soluție.</u> Fie $x_n = \frac{1}{2^n+3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $y_n = \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergentă (serie geometrică cu $q = \frac{1}{2}$).

Conform Criteriului de comparație cu inegalități rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă. $\square$

g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluție. $x_n = \frac{1}{n \ln n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

$\ln n < \ln(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow (x_n)_n$ este strict descrescător.

Aplicăm Criteriul condensării. Deci $\sum_{n=2}^{\infty} x_n \sim \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n}$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \cancel{2^n} \cdot \frac{1}{\cancel{2^n} \cdot \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}.$$

Cum $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n \ln 2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln 2} \in (0, \infty)$, rezultă, conform Criteriului de comparație cu limită, că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha = 1$).

Prin urmare $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă. $\square$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\cdot x^n$, $x>0$.

Soluție. $x_n = \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ldots\cdot(6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot\ldots\cdot(5n+3)}\, x^n \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{7\cdot 13\cdot 19\cdots(6n+1)}(6n+7)}{\cancel{8\cdot 13\cdot 18\cdots(5n+3)}(5n+8)}\cdot \cancel{x^{n+1}}^{\,x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\cancel{8\cdot 13\cdot 18\cdots(5n+3)}}{\cancel{7\cdot 13\cdot 19\cdots(6n+1)}}\cdot\frac{1}{\cancel{x^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+7}{5n+8}\cdot x =$$

$$= \frac{6}{5}x.$$

Conform Criteriului raportului avem:

1) Dacă $\frac{6}{5}x<1$ (i.e. $x\in\left(0,\frac{5}{6}\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2) Dacă $\frac{6}{5}x>1$ (i.e. $x\in\left(\frac{5}{6},\infty\right)$), atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3) Dacă $\frac{6}{5}x=1$ (i.e. $x=\frac{5}{6}$), atunci Criteriul

raportului nu decide.

Dacă $x = \frac{5}{6}$, seria devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot \ldots \cdot (6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots \cdot (5n+3)} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

$$x_n = \frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot \ldots \cdot (6n+1)}{8\cdot 13\cdot 18\cdot \ldots \cdot (5n+3)} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{5n+8}{6n+7}\cdot\frac{6}{5} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\cancel{30n}+48-\cancel{30n}-35}{30n+35} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{13n}{30n+35} = \frac{13}{30} < 1.$$

Conform criteriului Raabe-Duhamel rezultă

că $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă. $\square$