Pași de rezolvare
1. Raza *!! $R = \frac{1}{\lim}$
2. Mul de conv.

$f_n(x)$ - șir de f.
$\sum f_n(x)$ - serie de f.

## Serii de puteri

Def: Seria de puteri = Serie de funcții de forma $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

Noțiuni 1. Raza de convergență $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

2. Interval de convergență $(-R, R)$

3. Mulțimea de convergență $A = \{x \in \mathbb{R} \mid$ seria de puteri e convergentă$\}$

$(-R, R) \subseteq A \subseteq [-R, R]$ $\quad [-2, 2]$ $\quad (-2, 2]$

4. Suma seriei $s: A \to \mathbb{R},\ s(x) = \sum_{n=0}^{n} f_n(x)$

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}} \cdot (x+2)^n$

$\sum f_n(x) = \sum a_n \cdot x^n$

Pași de rezolvare.
1. Raza $R = \frac{1}{\lim}$
2. Mul. de conv.

fie $a_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}}$, fie $y = x+2$, $B$ mulțimea de conv. a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$

$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+2)^2 \cdot \sqrt{3^{n+1}}} \cdot \frac{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3^n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Așadar $R = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Avem $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \subseteq B \subseteq \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Studiem dacă $-\frac{\sqrt{3}}{2} \in B$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \in B$

1 dacă $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avem $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \sum_n (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$

$n^2 < (n+1)^2$

$\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ $\Bigg| \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \searrow$ $\xRightarrow{\text{C. Leibniz}} \sum_n (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}$ convergentă $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \in B$

2. dacă $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, avem $\sum_{n} \cancel{(-1)^n} \frac{\cancel{2^n}}{(n+1)^2 \cdot \cancel{\sqrt{3}^n}} \cdot \left(-\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\right)^n = \sum_{n} \frac{1}{(n+1)^2}$

$\frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \leq 1$ div. $\alpha > 1$ con.

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n} \frac{1}{n^2}$ convergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha > 1$) $\xrightarrow{\text{C. Comparație cu inegalități}} \sum_{n} \frac{1}{(n+1)^2}$ conv.

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \in B$

Așadar $B = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow x+2 \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2, \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right]$

Așadar $A = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2, \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\right]$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = f_n(x)$ [redacted]

R, A, S = ?

Notez: $a_n = n+1$

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n+1|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$$

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

$(-1,1) \subseteq A \subseteq [-1,1]$ (1)

$f_n(1), f_n(-1) \in A$?

$x = -1$

$\sum_n (n+1)\cdot(-1)^n$ /* Împărțim în subșiruri și dem că cele 2 subșiruri au lim diferită */

Fie $n = 2k$

$\lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

Fie $n = 2k+1$

$\lim_{n\to\infty} -(n+1) = -\infty$

Cum șirul admite două subșiruri cu limite diferite seria $\boxed{\text{nu}}$ e convergentă. $\Rightarrow -1 \notin A$

(2)

$x = 1$

$\sum_n (n+1)$

$(S')'$

$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \neq 0 \Rightarrow$, din criteriul suficient de divergență, avem $\sum_n (n+1)$ divergentă $\Rightarrow 1 \notin A$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow A = (-1, 1)$

$\sum a_n (x - x_0)^n$ ; (1) $\boxed{s(x_0) = a_0}$ ;
(2) $s$ e indefinit derivabilă, $\int s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n$

② $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = f_n(x)$ $R=1$, $A=(-1,1)$

$R, A, s=?$

$s:(-1,1) \to \mathbb{R}$

① $s(0)=1$

② $s$ e indefinit derivabilă pe $(-1,1)$

$\int s(x)\,dx = \sum_n \int (n+1)x^n\,dx = \sum (x^{n+1} + C) \overset{m=n+1}{=}$

$= \sum (x^m + C) = \frac{1}{1-x} + C$

$s(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{-1}{(1-x)^2}$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right)' = \left(\frac{2}{(x-1)^3}\right)'$

$\int f(x) = g(x)$

$f(x) = g'(x)$

S = 1 + x + x^2 +...

xS= x + x^2 + x^3 +...

(1-x)S=1

S = 1/(1-x)

# Dezvoltări în serii Taylor

Def. Seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în jurul punctului $x_0$

Definim funcția $T_{f,n,x_0}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

ca fiind polinomul Taylor de rang n asociat lui f și $x_0$

$R_{f,n,x_0}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $R_{f,n,x_0}(x) = f(x) - T_{f,n,x_0}(x)$

ca fiind restul Taylor de rang n asociat fct. f și punctului $x_0$.

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + R_{f,n,x_0}(x)$$

T. lui Taylor. Seria Taylor asociată lui f în $x_0$ este convergentă $\forall x \in I$, $x \neq x_0$ dacă $\lim_{n \to \infty} R_{f,n,x_0}(x) = 0$

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x$ $\quad \forall x_0 = 0$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$$

$I=\mathbb{R}$ $\quad x_0=0$

$f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x)=\cos x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f'''(0)=0$

$f^{IV}(x)=\cos x\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f^{IV}(0)=1$

* $\sin x=\sum\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}$

$\sin 0=0$

$\Sigma = 0$ $\quad , \forall \in\mathbb{R}$

Construim T lui Taylor cu Rest Lagrange.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\exists c$ între $0$ și $x$ cu $R_{f,n,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$

$$0\le |R_{f,n,x_0}|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right|\overset{(*)}{\le}\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}$$

$\searrow 0 \swarrow$

(*) din faptul că $f^{(n)}$ mărginite sunt max $-1$ ... 1

deci $\lim_{n\to\infty}|R_{f,n,x_0}(x)|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}R_{f,n,x_0}(x)=0$

$$\cos x=\frac{1}{0!}\cdot x^0+\cancel{\frac{0}{1!}x^1}+\frac{-1}{2!}\cdot x^2+\cancel{\frac{0}{3!}x^3}+\frac{1}{4!}\cdot x^4\ldots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$$

$x=0\Rightarrow$ $\cos 0=1$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 0=0$