Noţiunea de serie de elemente din $\mathbb{R}$
Operaţii algebrice cu serii
Serii absolut convergente şi serii semiconvergente

Noţiunea de serie de elemente din $\mathbb{R}$

Conceptul de serie, care încearcă să dea sens "sumelor infinite", s-a dovedit util în definirea unor constante importante (ca, de exemplu, e sau π), precum şi în definirea riguroasă a funcţiilor elementare.

Definiţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}$, definim seria generată de ca fiind şirul $S=(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$. Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ se numeşte suma seriei şi se notează cu S. x_n-urile poartă numele de termenii seriei, iar S_n-urile de sume parţiale.*

Prin convenţie, simbolurile $\sum x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ sau $\sum\limits_{n\geq 1}x_n$ vor desemna atât seria generată de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cât şi suma sa, în cazul în care seria este convergentă.

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde ∞ la vom spune ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\infty$.

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tinde $-\infty$ la vom spune ca $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=-\infty$.

Observaţie.

1) *Deşi în general termenii unei serii sunt indexaţi cu numere naturale, există situaţii în care este de preferat să începem indexarea cu $n=0$ sau cu $n=k$, unde $k\in\mathbb{N}$.*

2) *Practic o serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este o pereche $((x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ unde S_n sunt sumele parţiale şi x_n sunt termenii seriei.*

Exemple.

1) Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Avem

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{(k+1)}=1-\dfrac{1}{(n+1)}\to 1.$

Deci $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

2) Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n\geq 0}a^n$, numită seria geometrică, pentru $a>-1$.

Pentru $|a|<1$ avem $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\to\frac{1}{1-a}$, deci $\sum\limits_{n\geq 0}a^n=\frac{1}{1-a}$.

Pentru $a=1$ avem $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}1=n-1$, deci $\sum\limits_{n\geq 0}a^n=\infty$.

Pentru $a > 1$ avem $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, deci $\sum\limits_{n \geq 0} a^n = \infty$.

Exerciţii.

1. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{4n^2 - 1}$.

2. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$.

3. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

4. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} n a^{n-1}$.

5. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

6. Să se afle suma seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$.

Următorul rezultat furnizează o condiţie necesară, însă nu şi suficientă, pentru convergenţa unei serii.

Lemă. *Dacă seria* $\sum x_n$, *cu termeni din* $\mathbb{R}$, *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. *Reciproca nu este adevărată.*

Demonstraţie. Într-adevăr, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ arată că reciproca nu este validă. □

Următoarele două rezultate decurg îndată din cele corespunzătoare din capitolul privind şirurile de elemente din $\mathbb{R}$.

Teoremă. *Fie* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $[0, \infty)$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\sum x_n$ *este convergentă;*

ii) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *este mărginit.*

În acest caz $\sum x_n = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Demonstraţie.

Avem $S_{n+1} - S_n = x_n \geq 0$. Deoerece şirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător rezultă că este convergent dacă şi numai dacă este mărginit. □

Criteriul lui Cauchy pentru serii din $\mathbb{R}$. *Fie* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $\mathbb{R}$. *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\sum x_n$ *este convergentă;*

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m| < \varepsilon$ *pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$.

Demonstraţie.

Avem $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_m| = |S_m - S_{n-1}|$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n \geq n_\varepsilon$. Rezultă că şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent (Cauchy) dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia ii). $\square$

Notaţie. Spunem că două serii $\sum x_n$ şi $\sum y_n$ sunt echivalente dacă sunt ambele convergente sau divergente şi notăm $\sum x_n \sim \sum y_n$.

Exemple standard de serii (seria geometrică şi seria armonică)

1. *Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum a^n$, numită seria geometrică, este convergentă dacă şi numai dacă $|a| < 1$.*
2. *Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum \frac{1}{n^a}$, numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă şi numai dacă $a > 1$.*

Remarcă. *Denumirea de serie armonică generalizată are drept temei faptul că, în cazul $a = 1$, orice termen al seriei, începând cu cel de al doilea, este media armonică a termenilor vecini. Pentru $a > 1$, suma seriei $\sum \frac{1}{n^a}$ se notează cu $\zeta(a)$. Funcţia astfel construită, numită funcţia ζ a lui Riemann, este un ingredient principal în studiul distribuţiei asimptotice a numerelor prime şi în celebra conjectură a lui Riemann rămasă fără răspuns până în acest moment.*

Operaţii algebrice cu serii din $\mathbb{R}$

Următorul rezultat (a cărui demonstraţie decurge imediat din Propoziţia privind comportamentul şirurilor convergente din $\mathbb{R}$ la operaţiile algebrice) arată că familia seriilor se comportă "bine" la operaţiile algebrice standard.

Propoziţia privind comportamentul seriilor la operaţiile algebrice
α) Dacă seriile $\sum x_n$ şi $\sum y_n$, cu elemente din $\mathbb{R}$, sunt convergente, atunci seriile $\sum(x_n + y_n)$ şi $\sum(x_n - y_n)$ sunt convergente şi sunt valabile relaţiile următoare: $\sum(x_n + y_n) = \sum x_n + \sum y_n$ şi $\sum(x_n - y_n) = \sum x_n - \sum y_n$.
β) Dacă seria $\sum x_n$, cu elemente din $\mathbb{R}$, este convergentă, $c \in \mathbb{R}$, atunci seria $\sum cx_n$ este convergentă şi este valabilă relaţia următoare: $\sum cx_n = c \sum x_n$.

Serii absolut convergente şi serii semiconvergente

Definiţie. *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}$, spunem că seria $\sum x_n$ este absolut convergentă dacă seria $\sum |x_n|$ este convergentă.*

Definiţie. *O serie cu elemente din $\mathbb{R}$ se numeşte semiconvergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.*

Observaţie. *Pentru seriile care au drept termeni numere reale pozitive nu există distincţie între noţiunile de convergenţă şi convergenţă absolută.*

Folosind criteriul lui Cauchy, se poate demonstra următoarea:

Teorema privind convergenţa seriilor absolut convergente. *Dacă seria $\sum x_n$, cu elemente din $\mathbb{R}$, este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Demonstraţia decurge din faptul că $\sum\limits_{k=n}^{n+p} |x_k| \geq \left| \sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k \right|$ pentru orice $n, p \in \mathbb{N}$.

Teorema următoare arată că termenii seriilor absolut convergente pot fi manipulaţi precum termenii sumelor finite, adică nu este importantă ordinea în care se sumează.

Teorema privind comportamentul seriilor absolut convergente la permutări. *Fie $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o bijecţie şi $\sum x_n$ o serie absolut convergentă cu elemente din $\mathbb{R}$. Atunci:*

α) $\sum x_{\sigma(n)}$ este convergentă;

β) $\sum x_{\sigma(n)} = \sum x_n$.

Demonstraţie.

α) Notând $x_{\sigma(n)}$ cu y_m, avem $|y_1| + |y_2| + ... + |y_m| \leq \sum |x_n|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci seria $\sum x_{\sigma(n)}$ este absolut convergentă.

β) Fie S suma seriei $\sum x_n$, S' suma seriei $\sum x_{\sigma(n)}$ şi $\varepsilon > 0$ arbitrar dar fixat. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|S - (x_1 + x_2 ... + x_n)| < \varepsilon$ şi $|x_{n+1}| + ... + |x_m| < \varepsilon$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$ şi alegem r satisfăcând următoarele două proprietăţi:

a) $\left| S' - (y_1 + y_2 ... + y_r) \right| < \varepsilon$;

b) elementele $x_1, x_2, ..., x_n$ se află printre elementele $y_1, y_2, ..., y_r$.

În continuare alegem $m \geq n$ astfel încât elementele $y_1, y_2, ..., y_r$ să se afle printre elementele $x_1, x_2, ..., x_m$. În aceste condiţii, avem

$$\left| S' - S \right| \leq |S - (x_1 + ... + x_n)| + |(x_1 + ... + x_n) - (y_1 + ... + y_r)| +$$

$$+ \left| S' - (y_1 + ... + y_r) \right| \leq \varepsilon + (|x_{n+1}| + ... + |x_m|) + \varepsilon < 3\varepsilon,$$

deci, cum ε a fost ales arbitrar, concluzionăm că $S' = S$. □

Teorema următoare arată că, spre deosebire de seriile absolut convergente, seriile semiconvergente au un comportament total opus în privinţa sumei seriei obţinute în urma permutării termenilor.

Teorema privind comportamentul seriilor semiconvergente la permutări. *Pentru orice serie semiconvergentă de numere reale $\sum\limits_n x_n$ şi orice două elemente α, β din $\overline{\mathbb{R}}$ astfel încât $\alpha \leq \beta$, există o bijecţie $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\underline{\lim}\ S_n(\sigma) = \alpha$ şi $\overline{\lim}\ S_n(\sigma) = \beta$, unde $S_n(\sigma) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{\sigma(i)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Exerciţii

1. Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

2. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă, este convergentă seria $\sum x_n^2$? Dar dacă $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergentă seria $\sum \sqrt{x_n}$?

3. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Dacă seria $\sum x_n$ este convergentă şi $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, este convergentă seria $\sum \sqrt{x_n x_{n+1}}$?

4. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale pozitive. Să se arate că, dacă seria $\sum x_n$ este convergentă, atunci seria $\sum \frac{x_1+2x_2...+nx_n}{n(n+1)}$ este convergentă.

5. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir descrescător de elemente din $[0,\infty)$. Să se arate că, dacă seria $\sum x_n$ este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n = 0$. Este adevărată reciproca?

CRITERII DE CONVERGENŢĂ PENTRU SERII

Criteriile de comparaţie
Criteriul raportului, rădăcinii şi cel al lui Raabe-Duhamel
Criteriile lui Abel şi Dirichlet
Unele funcţii elementare ca sume de serii

Pentru stabilirea naturii unei serii dispunem de unele criterii de convergenţă.

Criteriile de comparaţie

Criteriile de comparaţie prezentate mai jos, aplicabile seriilor cu termeni pozitivi, sunt utile atunci când dispunem de nişte serii standard a căror natură este cunoscută (şi care de obicei sunt seria geometrică şi seria armonică) şi de inegalităţi şi limite adecvate.

Criteriul de comparaţie cu inegalităţi. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de elemente din $[0,\infty)$ astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $M > 0$ cu proprietatea că $x_n \leq My_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Atunci :*

i) Dacă seria $\sum x_n$ este divergentă rezultă că seria $\sum y_n$ este divergentă.

ii) Dacă seria $\sum y_n$ este convergentă rezultă că seria $\sum x_n$ este convergentă .

Atunci $\sum x_n$ este convergentă.

Demonstraţie.

Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că $n_0 = 1$. Cu notaţiile $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ şi $\mathcal{S}_n = y_1 + y_2 + ... + y_n$, avem $0 \leq S_n \leq M\mathcal{S}_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

i) Cum şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent rezultă că şirul $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

ii) Cum şirul $(\mathcal{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, deci mărginit, deducem că şi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Cum el este crescător, conform Teoremei convergenţei monotone, este convergent, deci seria $\sum x_n$ este convergentă. $\square$

Criteriul de comparaţie cu limita superioară şi inferioară. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două şiruri de elemente din $(0,\infty)$ astfel încât:*

i) Dacă $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} > 0$ *şi seria* $\sum y_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

ii) Dacă $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} < \infty$ *şi seria* $\sum y_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este convergentă.*

Criteriul de comparaţie cu limită. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $(0,\infty)$.

α) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \in (0,\infty)$, *atunci seriile* $\sum x_n$ *şi* $\sum y_n$ *au aceeaşi natură.*

β) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$ *şi seria* $\sum y_n$ *este convergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este convergentă.*

γ) Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$ *şi seria* $\sum y_n$ *este divergentă, atunci şi seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Rezultatul decurge din explicitarea ipotezelor şi utilizarea Criteriul de comparaţie cu inegalităţi. □

Criteriul condensării. *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir descrescator cu elemente din . Atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$ avem $a_{2^n} \geq a_k \geq a_{2^{n+1}}$, de unde rezultă că $2^n a_{2^n} \geq \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \geq 2^n a_{2^{n+1}}$. Notăm $b_n = \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k$. Din criteriul comparaţiei rezultă că seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k \right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ sunt echivalente. □

Exemplu. Pentru $a \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, numită seria armonică generalizată, este convergentă dacă şi numai dacă $a > 1$.

Avem $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } a > 0 \\ 1 \text{ dacă } a = 0 \\ \infty \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$. Rezultă că pentru $a \leq 0$ seria este divergentă. Pentru $a > 0$ şirul $\left(\frac{1}{n^a}\right)_{n\geq 1}$ este descrescător şi convergent la 0. Atunci

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a} \sim \sum_{n\geq 1} 2^n \frac{1}{(2^n)^a} = \sum_{n\geq 1} \left(2^{1-a}\right)^n$$

, care este convergentă dacă şi numai dacă $2^{1-a} < 1$ dacă şi numai dacă $a > 1$.

Exemplu (criteriul condensării). Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^a}$.

Se consideră funcţia $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x(\ln x)^a$. Deoarece f este crescătoare de la un anumit x_0 rezultă că $\frac{1}{n(\ln n)^a} \searrow 0$. Atunci

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^a} \sim \sum_{n\geq 2} \frac{2^n}{2^n(\ln 2^n)^a} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n \ln 2)^a} = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n)^a (\ln 2)^\alpha},$$

care este convergentă pentru $n > 1$ şi divergentă pentru $n \leq 1$.

Exemple (criteriul comparaţiei).

1. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

Fie $x_n = \frac{1}{n}$ şi $y_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}} = 1$. Deci $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

2. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$.

Fie $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+5}$ şi $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+5}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1$. Deci $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+5} \sim \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ care este convergentă.

3. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Fie $x_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ şi $y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$. Deci $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \sim \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ care este convergentă.

Criteriul raportului şi criteriul rădăcinii

Foarte utile pentru stabilirea convergenţei unei serii se dovedesc a fi următoarele două criterii.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $\mathbb{R}$.

α) Dacă există $r \in [0, 1)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

β) Dacă există $r \in [1, \infty)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n|^{\frac{1}{n}} \geq r$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie.

α) Seria $\sum r^n$ este convergentă pentru $r \in [0, 1)$. Deoarece $|x_n| \leq r^n$, din criteriul comparaţiei rezultă că $\sum x_n$ este absolut convergentă.

β) Seria $\sum r^n$ este divergentă pentru $r \in [0, 1)$. Deoarece $|x_n| \geq r^n \geq 1$, rezultă că $\sum x_n$ este divergentă ($|x_n| \nrightarrow 0$). $\square$

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $\mathbb{R}$.

α) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x_n|^{\frac{1}{n}} \in [0,1)$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

β) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |x_n|^{\frac{1}{n}} \in (1,\infty)$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Observaţie.

Pentru $r \in (0,1)$, notând cu S suma seriei $\sum x_n$, iar cu S_n sumele sale parţiale, avem $|S - S_n| \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Criteriul rădăcinii (al lui Cauchy). *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $[0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este convergentă pentru* $r \in [0,1)$ *şi divergentă pentru* $r \in (1,\infty)$.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} (a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n$, $a > 0$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}} = a$. Rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} (a^{\frac{n^2+n+1}{n^2}})^n$ este convergentă pentru $a \in [0,1)$ şi divergentă pentru $a \in (1,\infty)$. Pentru $a = 1$, deoarece $(\frac{n^2+n+1}{n^2})^n \geq 1$, seria este divergentă.

Criteriul raportului (al lui D'Alembert). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

α) Dacă există $r \in [0,1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq r$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

β) Dacă există $r \in [1,\infty)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$, *astfel încât* $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq r$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie.

α) Fie $n \geq n_0$. Atunci $\frac{|x_n|}{|x_{n_0}|} = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}...\frac{|x_{n_0+1}|}{|x_{n_0}|} \leq r^{n-n_0}$ şi $|x_n| \leq \frac{|x_{n_0}|}{r^{n_0}} r^n$. Din criteriul comparaţiei rezultă că $\sum x_n$ este absolut convergentă.

β) Fie $n \geq n_0$. Atunci $\frac{|x_n|}{|x_{n_0}|} = \frac{|x_n|}{|x_{n-1}|}\frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|}...\frac{|x_{n_0+1}|}{|x_{n_0}|} \geq 1$. Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu converge la 0. $\square$

Criteriul raportului (al lui D'Alembert). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

α) Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \in [0,1)$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

β) Dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \in (1,\infty)$ *atunci seria* $\sum x_n$ *este divergentă.*

Criteriul raportului (al lui D'Alembert). *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $(0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este convergentă pentru* $r \in [0,1)$ *şi divergentă pentru* $r \in (1,\infty)$.

Observaţii.

1. *Pentru* $r \in [0, 1)$, *notând cu* S *suma seriei* $\sum x_n$, *iar cu* S_n *sumele sale parţiale, avem* $|S - S_n| \leq \frac{r}{1-r} |x_n|$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

2. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r \in [0, 1)$ *şi divergentă pentru* $r \in (1, \infty)$.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^b}$,unde $a > 0$ şi $b \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^n}{(2n)!}$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{n^n}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{(n+1)^n}{n^n} = 0$. Rezultă că pentru seria este convergentă.

Deşi criteriul rădăcinii este mai "puternic" decât cel al raportului ($\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}$), el este mai uşor de aplicat, de cele mai multe ori. Dacă $r = 1$, ambele criterii sunt inutilizabile. În acest caz, următorul criteriu poate decide natura seriei.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

α) Dacă există $r \in (1, \infty)$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leq 1 - \frac{r}{n}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă.*

β) Dacă există $r \in (-\infty, 1)$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \geq 1 - \frac{r}{n}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, *atunci seria* $\sum x_n$ *nu este absolut convergentă.*

Demonstraţie.

α) Din ipoteză obţinem că

$$0 < (r - 1) |x_n| \leq (n - 1) |x_n| - n |x_{n+1}|, \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Prin urmare, şirul $(n |x_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător, începând cu rangul n_0, deci mărginit. Prin adunarea inegalităţilor de tip (1), obţinem $(r - 1)(|x_{n_0}| + ... + |x_n|) \leq (n_0 - 1) |x_{n_0}| - n |x_{n+1}|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ceea ce arată că şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum |x_n|$ este mărginit, i.e. seria $\sum x_n$ este absolut convergentă.

β) Din ipoteză obţinem că $n |x_{n+1}| \geq (n - r) |x_n| \geq (n - 1) |x_n|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Prin urmare, şirul $(n |x_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător începând cu rangul n_0, deci există un număr real strict pozitiv c astfel încât $|x_{n+1}| \geq \frac{c}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ şi cum seria armonică $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă, deducem că seria $\sum x_n$ nu este absolut convergentă. $\square$

Corolar. *Pentru* $r \in (1, \infty)$, *notând cu* S *suma seriei* $\sum x_n$, *iar cu* S_n *sumele sale parţiale, avem* $|S - S_n| \leq \frac{n}{r-1} |x_{n+1}|$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Corolar. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}) \overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r\in(1,\infty)$ *şi nu este absolut convergentă pentru* $r\in(-\infty,1)$.

Notă. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}) \overset{not}{=} r$, *atunci dacă* $r<0$ *seria este divergentă, dacă* $0=r$ *seria poate fi divergentă sau semiconvergentă, dacă* $0<r<1$ *seria este semiconvergentă şi dacă* $r=1$ *seria poate fi convergentă sau semiconvergentă.*

Dacă $r\leq 0$ avem $n(1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|})\leq 0$. Rezultă că $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\geq 1$ şi $|x_n|\nrightarrow 0$. Deci seria este divergentă.

Dacă $0<r\leq 1$ rezultă că există $\varepsilon>0$ şi n_0 astfel încât $n(1-\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|})\geq\varepsilon$ pentru orice $n\geq n_0$. Obţinem că $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}\leq 1$, $\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}\geq\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{n}}\geq 1+\frac{\frac{\varepsilon}{n}}{1-\frac{\varepsilon}{n}}\geq 1+\frac{\delta}{n}$ pentru un $\delta>0$ şi $\frac{|x_n|}{|x_{n+p}|}\geq\frac{|x_{n+p-1}|}{|x_{n+p}|}\dots\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}\geq\left(1+\frac{\delta}{n+p-1}\right)\dots\left(1+\frac{\delta}{n}\right)\geq 1+\delta\left(\frac{1}{n+p-1}+\dots+\frac{\delta}{n}\right)\to 0$ când $p\to\infty$. Din criteriul pentru serii alternate obţinem concluziile căutate.

Exemplu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$.

Fie $x_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=1.$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{x_{n+1}}{x_n})=\lim_{n\to\infty}n(1-\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2})=$$
$$=\lim_{n\to\infty}n\frac{4n^2+6n+2-4n^2-8n-2}{4(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}n\frac{-2n}{4(n+1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

Rezultă că seria este conergentă.

Exerciţiu. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1}a^{\sqrt{n}}$, $a>0$.

Notă. Se foloseşte şi următoarea variantă a criteriului lui Raabe-Duhamel. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|}-1)\overset{not}{=} r$, *atunci seria* $\sum x_n$ *este absolut convergentă pentru* $r\in(-\infty,1)$ *şi nu este absolut convergentă pentru* $r\in(1,\infty)$.

Criteriile lui Abel şi Dirichlet

Criteriile anterioare prezintă condiţii în care o serie este absolut convergentă. Deoarece, aşa cum am menţionat, există serii care sunt convergente fără a fi absolut convergente, este util să dispunem de criterii care să garanteze convergenţa acestor tipuri de serii.

Următoarea lemă se dovedeşte a fi utilă în cadrul demonstraţiilor citeriilor lui Dirichlet şi Abel.

Lema lui Abel. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $\mathbb{R}$. *Atunci* $\sum\limits_{j=n}^{m} x_j y_j = (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum\limits_{j=n}^{m}(x_j - x_{j+1})s_j$ *pentru orice* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, *unde* $(s_k)_k$ *şirul sumelor parţiale ale seriei* $\sum y_n$.

Demonstraţie.

Avem

$$\sum_{j=n}^{m} x_j y_j = \sum_{j=n}^{m} x_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{j=n}^{m} x_j s_j - \sum_{j=n}^{m} x_j s_{j-1} =$$

$$= \sum_{j=n}^{m} x_j s_j - \sum_{j=n-1}^{m-1} x_{j+1} s_j =$$

$$= (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m-1} x_j s_j - \sum_{j=n}^{m-1} x_{j+1} s_j =$$

$$= (x_m s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m-1} x_j s_j - \sum_{j=n}^{m-1} x_{j+1} s_j =$$

$$= (x_{m+1} s_m - x_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m} (x_j - x_{j+1}) s_j. \ \square$$

Criteriul lui Dirichlet. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *două şiruri de elemente din* $\mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele trei proprietăţi:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge către* 0;

ii) $\sum |x_n - x_{n+1}|$ *este convergentă;*

iii) $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este mărginit,*

unde $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este şirul sumelor parţiale ale seriei* $\sum y_n$.

Atunci seria $\sum x_n y_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. În conformitate cu iii), există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât $|s_k| \leq M$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Atunci, utilizând Lema lui Abel, obţinem că $\left|\sum\limits_{j=n}^{m} x_j y_j\right| \leq M(|x_m| + |x_n| + \sum\limits_{j=n}^{m} |x_j - x_{j+1}|)$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Ipotezele i) şi ii), împreună cu Criteriul lui Cauchy pentru serii cu elemente din $\mathbb{R}$, încheie demonstraţia. $\square$

Observaţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir descrescător de numere reale pozitive care converge către* 0, *atunci ipotezele i) şi ii) sunt îndeplinite.*

Corolar. *În condiţiile de mai sus, cu ipoteza suplimentară că* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir descrescător de numere reale pozitive care converge către* 0, *avem* $\left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq 2M\,|x_{n-1}|$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Criteriul lui Abel. *Fie* $\sum y_n$ *o serie de elemente din* $\mathbb{R}$ *şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $\mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele proprietăţi:*

i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este monoton şi convergent;*
ii) $\sum y_n$ *este convergentă.*
Atunci seria $\sum x_n y_n$ *este convergentă.*
Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_m s_m - x_n s_{n-1}| < \varepsilon, \tag{1}$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$, unde $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reprezintă şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum y_n$. Conform ipotezei ii), există $M \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|s_k| \leq M$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, de unde

$$\left|\sum_{j=n}^{m}(x_j - x_{j+1})s_j\right| \leq |x_n - x_m|\, M, \tag{2}$$

pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n \geq n_\varepsilon$. Din (1), (2), Lema lui Abel şi Criteriul lui Cauchy pentru serii din $\mathbb{R}^p$ se deduce concluzia. □

Corolar. *În condiţiile rezultatului anterior, este valabilă inegalitatea* $\left|\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_j - \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq |x|\,|s - s_n| + 2M\,|x - x_{n+1}|$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Există o clasă importantă de serii, anume acelea care au termenii numere reale cu semnele alternând.

Definiţie. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de elemente din* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *se numeşte alternat dacă elementele mulţimii* $\{(-1)^n x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *sunt toate pozitive sau toate negative. O serie generată de un şir alternat se numeşte alternată.*

Criteriul lui Leibniz (criteriul privind convergenţa seriilor alternate). *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de elemente din* $[0, \infty)$ *satisfăcând următoarele două proprietăţi:*
i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este descrescător;*
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
Atunci seria alternată $\sum(-1)^n x_n$ *este convergentă.*
Mai mult, avem $|S - S_n| \leq x_{n+1}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *unde* S *reprezintă suma seriei* $\sum(-1)^n x_n$, *iar* S_n *sumele sale parţiale.*

Produsul a două serii

Următoarea definiţie este motivată de modul în care se înmulţesc două polinoame şi este utilă în demonstrarea proprietăţilor uzuale ale funcţiilor elementare.

Definiţie. *Pentru seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, *cu elemente din* $\mathbb{R}$, *se defineşte produsul Cauchy al lor ca fiind seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, *unde* $c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Observaţie. *Produsul Cauchy a două serii convergente nu este, în general, o serie convergentă.* Spre exemplu, produsul Cauchy al seriei convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ cu ea însăşi nu este o serie convergentă. Într-adevăr, termenul general c_n al produsului seriei menţionate cu ea însăşi este dat de $(-1)^n \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$. Cum $\sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq \frac{n+2}{2}$ pentru orice $k \in \{0, 1, ..., n\}$, deducem că $|c_n| = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Această ultimă inegalitate arată că afirmaţia $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ este falsă, deci seria produs $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă.

Următoarele două teoreme furnizează condiţii suficiente pentru ca produsul a două serii să fie o serie convergentă şi pentru ca suma seriei produs să fie produsul sumelor celor două serii.

Teorema lui Mertens. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ două serii, de elemente din $\mathbb{R}$, satisfăcând următoarele două proprietăţi:*

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolut către A;

ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ converge către B.

Atunci produsul Cauchy al celor două serii este o serie convergentă, cu suma AB.

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ converge absolut către B, atunci produsul Cauchy al celor două serii este o serie absolut convergentă.

Noţiunea de serie de puteri

Definiţie. *O serie de funcţii de tipul $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-c)^n$, unde $a_n, c \in \mathbb{R}$, se numeşte serie de puteri în jurul lui c.*

Raza unei serii de puteri. Teorema Cauchy-Hadamard

Definiţie. *Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n} a_n x^n$, definim raza de convergenţă ca fiind $R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases}$, unde $\rho = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi $\rho = \infty$ dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.*

Observaţie. Fără a pierde din generalitate, *putem presupune că* $c = 0$ (căci translaţia $x' = x - c$ reduce o serie de puteri în jurul lui c la o serie de puteri în jurul lui 0).

Rezultatul de mai jos justifică terminologia de rază de convergenţă.

Teorema Cauchy-Hadamard. *Dacă R este raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, atunci:*

α) Seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$.

β) Seria este divergentă pentru $|x| > R$.

Demonstraţie. Vom trata numai cazul $R \in (0, \infty)$, celelalte, anume $R = 0$ şi $R = \infty$, rămânând în seama cititorului. Pentru $0 < |x| < R$, există $c \in [0, 1)$ astfel încât $|x| < cR$, deci $\rho < \frac{c}{|x|}$, de unde deducem existenţa unui $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c}{|x|}$, i.e. $|a_n x^n| \leq c^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Din inegalitatea anterioară, deoarece $c \in [0, 1)$, conform Criteriului de comparaţie cu inegalităţi, se obţine convergenţa absolută a serie de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$. Dacă $|x| > R = \frac{1}{\rho}$, avem $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{|x|}$, adică $|a_n x^n| > 1$ pentru o infinitate de n, de unde deducem că şirul $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu converge la 0, ceea ce implică faptul că seria de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$ este divergentă. □

Observaţie.

1. Deşi funcţiile $x \to a_n x^n$ sunt definite pe $\mathbb{R}$, nu este de aşteptat ca seria $\sum\limits_n a_n x^n$ să conveargă pe $\mathbb{R}$. De exemplu, seriile $\sum\limits_n n! x^n$, $\sum\limits_n x^n$ şi $\sum\limits_n \frac{x^n}{n!}$ converg pentru x aparţinând mulţimilor $\{0\}$, $(-1, 1)$, respectiv $\mathbb{R}$. Prin urmare, mulţimea punctelor în care converge o serie de puteri poate fi "mică", "medie" sau "mare". Aşa cum vom vedea, mulţimea punctelor de convergenţă ale unei serii de puteri are o structură specială.

2. *Raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, în cazul în care există $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, este dată, de asemenea, de $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

3. Produsul a două serii de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} a_n x^n$ şi $\sum\limits_{n \geq 0} b_n x^n$ cu razele de convergenţă $R_a > 0, R_b > 0$ este o seria de puteri $\sum\limits_{n \geq 0} x^n \sum\limits_{k+l=n} a_k b_{n-k}$ cu raza de convergenţă $R \geq \min(R_a, R_b) > 0$.

Aplicaţii.

1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este absolut convergentă, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ şi, folosind Teorema lui Cauchy, avem $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Justificare.

a) Reamintim că $e = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$.

b) $e^x \cdot e^y = \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!} \right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum\limits_{i+j=n} \frac{n!}{i! j!} x^i y^j \right) =$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum\limits_{i+j=n} C_n^i x^i y^j \right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = e^{x+y}$

c) Se vede că $e^x \geq 1$ pentru. Deci, pentru orice $x \geq y$, $e^x = e^y e^{x-y}$. Cu alte cuvinte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ este crescătoare. Pornind de aici se poate arăta că este şi continuă.

2. Pentru orice $x, \alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x| < 1$, seria $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ este absolut convergentă şi $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha$.

3. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\sin x$. Aşadar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$.

4. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ este absolut convergentă şi suma sa se notează cu $\cos x$. Aşadar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$.

5. Au loc relaţiile: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$ şi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Există un unic număr real, notat cu π, astfel încât:

- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$;
- $\cos x > 0$ pentru orice $x \in [0, \frac{\pi}{2})$;
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ şi $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ şi $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

6. Definim funcţiile $tg : \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ şi $ctg : \mathbb{R} - \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ prin $tg(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ şi $ctg(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Observaţie. Pentru a studia convergenţa unei serii putem să aplicăm urmatorul algoritm:

PAS 1. Studiem absolut convergenţa seriei.

Pas 1.1. Încercăm să aplicăm criteriul raportului sau al radicalului.

Pas 1.2. Dacă criteriile de la pasul 1.1 nu decid încercăm să aplicăm criteriul comparaţiei sau Raabe-Duhamel.

PAS 2. Vedem dacă termenul general tinde la 0. Dacă nu seria este divergentă.

PAS 3. Încercăm să aplicăm criteriul Dirichlet sau Abel (în particular criteriul lui Leibniz).

Notă. 1. Unele dintre criteriile de la pasul 1 ne asigură că termenul general nu tinde la 0 deci seria este divergentă.

2. Dacă seria este cu termeni pozitivi pasul 3 nu mai foloseste.

Exemplu. Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{n^\alpha}$.

Rezolvare.

PAS 1. Studiem absolut convergenţa seriei. Considerăm seria $\sum\limits_{n\geq 1}\left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right|$ şi notăm $a_n = \left|\frac{x^n}{n^\alpha}\right|$.

Ca să putem aplica criteriul raportului punem condiţia ca $a_n \neq 0$. Dacă $a_n = 0$ rezultă că $x = 0$. În acest caz seria este $\sum\limits_{n\geq 1} 0 = 0$ deci este absolut convergentă.

Cazul $x \neq 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha}}{\frac{|x|^n}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}|x| = |x|$.

Dacă $|x| < 1$ seria este absolut convergentă iar dacă $|x| > 1$ seria este divergentă ($a_n \to \infty$).

Dacă $|x| = 1$ seria este seria armonică $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ care este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Acesta ne rezolvă cazul $x = 1$. Pentru $x = -1$ seria devine $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Stim că este absolut convergentă pentru $\alpha > 1$.

Trecem la pasul 2 şi calculăm $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } \alpha > 0 \\ 1 \text{ dacă } \alpha = 0 \\ \infty \text{ dacă } \alpha < 0 \end{cases}$. Dacă $\alpha \leq 0$ seria este divergentă. Dacă $0 < \alpha \leq 1$ seria este semiconvergentă deoarece $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$ (criteriul lui Leibniz).

Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ şi norma unui vector din $\mathbb{R}^n$

Deoarece evoluţia multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulţi parametri, acestea sunt modelate prin intermediul funcţiilor de mai multe variabile, adică a funcţiilor care au drept domeniu de definiţie o submulţime a lui $\mathbb{R}^n$. Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăţilor mulţimii $\mathbb{R}^n$. Reamintim că $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times ... \times\mathbb{R}}_{\text{n } ori} = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

Definiţie. *Pentru* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *şi* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *definim:*

- $x \cdot y$ (notat pe scurt xy), numit produsul scalar al vectorilor x şi y, prin

$$x \cdot y = < x, y > = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n;$$

- norma (euclidiană a) lui x, notată $\|x\|$ (sau $\|x\|_2$)*, prin*

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Vom prezenta acum principalele proprietăţi ale normei (sau lungimii) unui vector.

Observaţie. Produsul acalar se msi notează cu $<,>$ şi are urmatoarele propritâţi:

i) $<\alpha x+\beta y,z>=<\alpha x,z>+<\beta y,z>$ *pentru orice* $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ *şi orice* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

ii) $<x,y>=<y,x>$ *pentru orice* $x,y\in\mathbb{R}^n$;

iii) $<x,x>\geq 0$ *pentru orice* $x\in\mathbb{R}^n$;

iv) $<x,x>=0\Leftrightarrow x=0$ *pentru orice* $x\in\mathbb{R}^n$.

Proprietăţi. *Pentru* $x,y\in\mathbb{R}^n$ *şi* $c\in\mathbb{R}$, *avem:*

1.
$$\|x\|\geq 0;$$

2.
$$\|x\|=0\Leftrightarrow x=0;$$

3.
$$\|cx\|=|c|\,\|x\|\,;$$

4.
$$|\|x\|-\|y\||\leq\left\|x\overset{+}{-}y\right\|\leq\|x\|+\|y\|\,.$$

Observaţie. *Numărul real* $\|x\|$ *poate fi gândit ca fiind lungimea lui* x *sau ca fiind distanţa de la* 0 *la* x.

Prezentăm acum un rezultat care arată relaţiile dintre lungimea unui vector şi valorile absolute ale componentelor sale.

Propoziţie. *Pentru* $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *avem*

$$|x_i|\leq\|x\|\leq\sqrt{n}\max\{|x_1|\,,|x_2|\,,...,|x_n|\},$$

pentru orice $i\in\{1,2,...,n\}$.

Observaţie. *Inegalitatea de mai sus arată că dacă lungimea lui* x *este mică, atunci lungimile componentelor lui* x *sunt mici şi reciproc.*

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz. *Dacă* $x,y\in\mathbb{R}^n$, *atunci*

$$|x\cdot y|\leq\|x\|\,\|y\|\,.$$

Demonstraţie. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}(x_kt-y_k)^2=(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)t^2-2\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\sum_{k=1}^{n}y_k^2\geq 0,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Prin urmare

$$(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k)^2 \leq (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)(\sum_{k=1}^{n} y_k^2),$$

i.e.

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\| . \ \square$$

Observaţie. *Dacă* $\|x\| = \|y\| = 1$, *atunci* $|x \cdot y| \leq 1$, *iar în acest caz* $x \cdot y$ *poate fi intepretat geometric ca fiind cosinusul unghiului dintre* x *şi* y. *În* $\mathbb{R}^2$ *sau* $\mathbb{R}^3$, *unde se poate defini unghiul* φ *dintre* x *şi* y, *se arată că* $x \cdot y = \|x\| \, \|y\| \cos \varphi$, *această formulă fiind folosită adesea pentru a defini produsul scalar* $x \cdot y$. *În prezenţa unui produs scalar geometria spaţiului este mult mai bogată deoarece se poate defini noţiunea de unghi dintre doi vectori.*

Exemple.

1. Să se calculeze norma următorilor vectori: $(-1, 3) \in \mathbb{R}^2$, $(2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$ şi $(0, 3, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$.

2. Să se calculeze produsul scalar $x \cdot y$ dacă $x = (3, 4, 5, -4)$ şi $y = (3, 0, 3, 3)$.

Demonstraţia faptului că $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului).

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \Longleftrightarrow \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + ... + (x_n + y_n)^2} \leq$

$\leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} \Longleftrightarrow$

$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + ... + (x_n + y_n)^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} \Longleftrightarrow$

$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$

Ultima inegalitate este inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

SPAŢIUL METRIC $(\mathbb{R}^n, d_2)$

Reamintim că distanţa d_2 este definită prin $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ dată de $d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \|x - y\|_2$ şi că d_2 are următoarele proprităţi:

i) $d_2(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$d_2(x, y) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = 0 \Longleftrightarrow |x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = ... = |x_n - y_n| = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x_i = y_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., n\} \Longleftrightarrow x = y$

ii) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$

$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} =$

$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} = d_2(y, x)$

iii) $d_2(x,y) + d_2(y,z) \geq d_2(x,z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$d_2(x,y) + d_2(y,z) = \|x-y\|_2 + \|y-z\|_2 \geq \|x-y+y-z\|_2 = \|x-z\|_2 = d_2(x,z)$

(proprităţile distanţei)

iv) $d_2(x,y) = d_2(x+z, y+z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (invariantă la translaţii)

$d_2(x+z, y+z) = \|(x+z)-(y+z)\|_2 = \|x-y\|_2 = d_2(y,z)$

v) $d_2(ax, ay) = |a|\, d_2(x,y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}$.

$d_2(ax, ay) = \|ax - ay\|_2 = \|a(x-y)\|_2 = |a|\,\|x-y\|_2 = d_2(x,y)$

Notă. Distanţa d_2 se mai numeşte distanţa euclidiană.

Notă. $d_2(x,y) = d_2(x-y, 0) = \|x-y\|_2$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema de reducere a studiului convergenţei unui şir din $\mathbb{R}^n$ la convergenţa a n şiruri din $\mathbb{R}$. *Convergenţa în spaţiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este convergenţa pe componente. Mai precis, dacă $(x_m = (x_{m,1}, ..., x_{m,n}))_{m\in\mathbb{N}}$ este un şir de elemente din $\mathbb{R}^n$ şi $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ atunci $x_m \overset{d_2}{\to} x$ dacă şi numai dacă $x_{m,i} \to x_i$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$.*

Demonstraţie.

Presupunem că $x_m \overset{d_2}{\to} x$. Atunci $d_2(x_m, x) = \sqrt{(x_{m,1} - x_1)^2 + ... + (x_{m,n} - x_n)^2}$. Deoarece $|x_{m,i} - x_i| \leq d_2(x_m, x)$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$, din criteriul cleştelui, rezultă că $x_{m,i} \to x_i$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$.

Reciproc, presupunem că $x_{m,i} \to x_i$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$. Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există m_ε astfel încât $|x_{m,i} - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$ şi $m \geq m_\varepsilon$. Atunci pentru un $m \geq m_\varepsilon$ avem $d_2(x_m, x) = \sqrt{(x_{m,1} - x_1)^2 + (x_{m,2} - x_2)^2 + ... + (x_{m,n} - x_n)^2} \leq \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{n} < \varepsilon$. Deci $x_m \overset{d_2}{\to} x$.

Exerciţii.

1) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2+2}{3n^2-n+1}, e^{\frac{1}{n}}, n\ln(1+\sin\frac{1}{n}))$.

2) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2n}{3n-1}, (1+\frac{1}{n})^{-2n}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}))$.

Raspuns.

1) $\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$.

2) $\left(\frac{2}{3}, e^{-2}, 1\right)$.

Propoziţie. *Un şir din spaţiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ dacă şi numai dacă este Cauchy pe componente. (Şirul $(x_m = (x_{m,1}, ..., x_{m,n}))_{m\in\mathbb{N}}$ este un şir Cauchy dacă şi numai dacă şirurile $(x_m)_{m,i\in\mathbb{N}}$ sunt Cauchy pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$).*

Teoremă. *Un şir mărginit din spaţiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ are un subşir convergent.*

Demonstraţie (în cazul $n = 2$).

Fie şirul $(z_m = (x_m, y_m))_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$. Rezultă că şirul $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ este mărginit, deci are un subşir convergent $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ la un $x \in \mathbb{R}$. Şirul $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este mărginit pentru că este un subşir al şirului mărginit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Deci şirul $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ are un subşir convergent $\left(y_{m_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ la un $y \in \mathbb{R}$. Rezultă că $\left(z_{m_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ converge la $z = (x, y)$.

Teoremă. *Spaţiul metric* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *este complet.*

Demonstraţie.

Fie $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ un şir Cauchy din $\mathbb{R}^n$. Rezultă că este mărginit deci are un subşir convergent. Orice şir Cauchy cu un subşir convergent este convergent.

Norme

Definiţie. *O funcţie* $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte normă pe* $\mathbb{R}^n$ *dacă satisface următoarele proprietăţi:*

i) $\|x\| \geq 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$*;*

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}^n$ *şi orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}^n$*.*

Perechea $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *se numeşte spaţiu normat.*

Definiţie. *Fie* V *un spaţiu vectorial real. O funcţie* $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ *se numeşte normă pe* V *dacă satisface următoarele proprietăţi:*

i) $\|x\| \geq 0$ *pentru orice* $x \in V$*;*

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *pentru orice* $x \in V$*;*

iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ *pentru orice* $x \in V$ *şi orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pentru orice* $x, y \in V$*.*

Perechea $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *se numeşte spaţiu normat.*

Definiţie. *Unei norme* $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *i se asociază o distanţă* $d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$.

Temă. Verificaţi că $d_{\|.\|}$ este o distanţă.

Exemple.

$\|.\|_1, \|.\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite de

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

şi

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$$

cu distanţele asociate

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

şi

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, ..., |x_n - y_n|\}.$$

1) $\|.\|_1, \|.\|_2$ şi $\|.\|_\infty$ verifică relaţia
$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$
pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

2) Pentru un şir $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ şi $x \in \mathbb{R}^n$ avem

i) $x_m \overset{\|.\|_1}{\to} x \Leftrightarrow x_m \overset{\|.\|_2}{\to} x \Leftrightarrow x_m \overset{\|.\|_\infty}{\to} x$

ii) Şirul $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ este Cauchy în $\|.\|_1$ dacă şi numai dacă este Cauchy în $\|.\|_2$ dacă şi numai dacă este Cauchy în $\|.\|_\infty$.

iii) Şirul $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ este mărginit în $\|.\|_1$ dacă şi numai dacă este mărginit în $\|.\|_2$ dacă şi numai dacă este mărginit în $\|.\|_\infty$.

Definiţie. Două norme $\|.\|, \|.\|' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numesc echivalente daca există $0 < \alpha < \beta$ stfel încât $\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Observaţii.

1) Dacă două norme sunt echivalente atunci şirurile convergente, Cauchy şi mărginite în cele două norme coincid.

2) Dacă $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o normă şi $x = (x_1, ..., x_n) = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in \mathbb{R}^n$ atunci

$\|x\| \le \|x_1e_1 + ... + x_ne_n\| \le \|x_1e_1\| + ... + \|x_ne_n\| = |x_1|\|e_1\| + ... + |x_n|\|e_n\| \le$
$\le (|x_1| + ... + |x_n|)\max\{\|e_1\|, ..., \|e_n\|\} = \max\{\|e_1\|, ..., \|e_n\|\}\|x\|_1$.

Teoremă. *În* $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *orice două norme sunt echivalente.*

Teorema (lema lui Cesaro). *În* $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *orice şir mărginit are un subşir convergent.*

Teorema. $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *formează un spaţiu normat complet.*

Teorema. *Convergenţa în* $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ *este convergenţa pe componete.*