Algebră 1 12.09.2017 Ex O.D.

Subiectul 1 a) Dați exemplu de o relație de echivalență pe mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ce are exact 4 clase de echivalență

b) Pe mulțimea $\mathbb{R}$ definim relația binară

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ sau } x + y = 6$$

Să se arate că "$\sim$" este o relație de echivalență și să se determine un sistem complet și independent de reprezentanți pentru relația de echivalență $\sim$.

Subiectul 2 Subgrupuri (definiție, exemple).

Determinați subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$ și $(\mathbb{Z}_{11}, +)$

Subiectul 3

Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \right\}$ și

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Arătați că:

a) G este grup în raport cu înmulțirea uzuală a matricelor

b) H este un subgrup normal al lui G

c) Grupul factor G/H este izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$

Subiectul 4 Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

a) Descompuneți σ în produs de cicluri disjuncte și în produs de transpoziții

b) Aflați signatura lui σ și calculați σ^{2017}

c) Există permutări $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că

$$\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)\ ?$$