Tutoriat 4
Grup factor. Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 25 noiembrie 2020 -

Exercițiul 1

Scrieți subgrupurile lui $\mathbf{Z}_{12}$ și grupurile factor ale lui $\mathbf{Z}_{12}$.

Rezolvare:

Știm din curs că orice subgrup al lui Z_n este de forma dZ_n, unde $d|n$. Această proprietate apare doarece subgrupul generat de $< a, b > = < (a, b) >$ si deci $< a_1, a_2, ..., a_k > = < (a_1, a_2, ..., a_k) >$. Cum $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ subgrupurile lui Z_{12} sunt: $Z_{12}, 2Z_{12}, 3Z_{12}, 4Z_{12}, 6Z_{12}, 12Z_{12}$, unde spre ex. $4Z_{12} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$.
Pentru grupul factor, vom lua ca exemplu $H = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$. Grupul factor este definit ca:
$\frac{G}{H} = \{\{\overline{y}|\overline{y} - \overline{x} \in H, \overline{y} \in Z_{12}\}, \overline{x} \in Z_{12}\}$
Un element din grupul factor arata de forma :$\overline{x} + H$.
Prin urmare, $\frac{Z_{12}}{H} = \{$
$\overline{\overline{0}} = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$,
$\overline{\overline{1}} = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{9}\}$,
$\overline{\overline{2}} = \{\overline{2}, \overline{6}, \overline{10}\}$,
$\overline{\overline{3}} = \{\overline{3}, \overline{7}, \overline{11}\}$
$\}$
În mod analog se rezolvă și pentru restul de grupuri factor.

Exercițiul 2

Fie $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{C}^*$, definită prin $f(\frac{m}{n}) = \cos(2\pi)\frac{m}{n} + i \sin 2\pi\frac{m}{n}$ și notăm cu U mulțimea $U = \{z \in \mathbf{C}^* | \ \exists n \in \mathbf{N}, \ z^n = 1\}$

1. Arătați că f este morfism de grupuri.
2. Determinați Ker$f$ și Imf.

3. Arătați că $\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong U$.

Observație: Grupurile sunt $(\mathbf{Q}, +)$ și $(\mathbf{C}, \cdot)$.

Rezolvare:

1. Condiția ca f să fie morfism este ca

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \iff$$
$$\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) = (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x) \cdot (\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y)$$

   Ultima egalitate este adevărată din formulele lui de Moivre.

2. Observăm că mulțimea U este mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității, adică $U = \{\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k \in \overline{(1, n-1)}\}$.
   $z^n = 1 \Rightarrow |z^n| = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$.
   Ker $f = \{x \in \mathbf{Q} | f(x) = 1\} = \{x \in \mathbf{Q} | \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1\} = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$
   Im $f = \{y \in \mathbf{C}^* | \ \exists x \in \mathbf{Q}$, astfel incat $f(x) = y\} = \{y \in \mathbf{C}^* | \ \exists x \in \mathbf{Q}$, astfel incat $\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = y\} = \{y \in \mathbf{C} \mid |y| = 1\} = U$

3. Putem demonstra că grupul factor $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. este izomorf cu U folosindu-ne de **teorema fundamentală de izomorfism**.

   (Teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri) Fie $f : G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci există un izomorfism de grupuri $\overline{f} : G/Kerf \to Imf$.

   Aplicând teorema pe cazul nostru obținem că există izomorfismul $\overline{f} : \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to U$. Deci,

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \cong U$$

Exercițiul 3

Folosind teorema de izomorfism pentru grupuri să se arate că grupul factor $(\mathbf{C}/\mathbf{R}, +)$ este izomorf cu grupul $(\mathbf{R}, +)$.

(Examen algebră, 04.06.2020, seria 13)

Rezolvare:

Fie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{R}$, $f(a+bi) = b$. Vom demonstra că f este morfism. Fie $a+bi,\ c+di \in \mathbf{C}$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$.
$f(a+bi+c+di) = f(a+c+(b+d)i) = b+d = f(a+bi)+f(c+di)\ \forall a+bi,\ c+di \in \mathbf{C} \Rightarrow f$ morfism.
Im$f = \mathbf{R}$ întrucât $f(x) \in \mathbf{R}\ \forall x \in \mathbf{C}$ și $\forall\ y \in \mathbf{R}\ \exists x$ astfel încât $f(x) = y, y = z + yi, z \in \mathbf{R}$.

Ker $f = \{x \in \mathbf{C} \mid f(x) = 0\}$, $f(x) = 0 \iff f(a+bi) = 0$, unde $a+bi = x \iff b = 0 \iff x \in \mathbf{R}$. Astfel Ker $f = \mathbf{R}$.
Conform teoremei de izomorfism pentru grupuri, există un izomorfism de grupuri $\overline{f} : G/Kerf \to Imf$. $\overline{f} : \mathbf{C}/\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. În concluzie, $(\mathbf{C}/\mathbf{R}, +) \cong (\mathbf{R}, +)$.

Exercițiul 4

Fie G grupul factor $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}, +)$. Arătați că:

1. dacă $a, b \in \mathbf{N}^*$ sunt prime între ele, atunci ord$\left(\widehat{\frac{a}{b}}\right) = b$
2. orice subgrup finit generat este ciclic
3. G nu este finit generat

Rezolvare:

1. În mod asemănător Exercițiului 1, putem scrie elementele grupului factor ca fiind : $\widehat{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b} + \mathbf{Z} = \{\frac{a}{b} + n | n \in \mathbf{Z}\}$. Astfel, observăm că pentru $k \in \mathbf{Z}$, $\widehat{k} = \mathbf{Z}$ și $\widehat{0} = \mathbf{Z}$. Prin urmare, pentru a determina ordinul lui $\widehat{\frac{a}{b}}$ trebuie să vedem cel mai mic număr natural o pentru care $\frac{a}{b} * o \in \mathbf{Z}$. Cum a și b sunt prime între ele avem că o = b, deci $ord(\widehat{\frac{a}{b}}) = b$.

2. Un subgrup generat de 2 elemente este de forma $< \widehat{\frac{a}{b}}, \widehat{\frac{c}{d}} >= \{\frac{\widehat{abx+bcy}}{\widehat{bd}} | x, y \in \mathbf{Z}\}$. Se poate demonstra faptul că elementele mulțimii sunt de forma $k * \frac{cmmdc\widehat{(a,c)}}{cmmmc\widehat{(b,d)}}, k \in \mathbf{Z}$ și deci $< \widehat{\frac{a}{b}}, \widehat{\frac{c}{d}} >=< \frac{cmmdc\widehat{(a,c)}}{cmmmc\widehat{(b,d)}} >$ (această egalitate putând fi demonstrată folosind dubla incluziune). Aplicând inductiv pentru un numar arbitrar de numere relația de mai sus obținem că $< \widehat{\frac{a_1}{b_1}}, \widehat{\frac{a_2}{b_2}}, ..., \widehat{\frac{a_n}{b_n}} >=< \frac{cmmdc(a_1,\widehat{a_2,...,}a_n)}{cmmmc(b_1,\widehat{b_2,...,}b_n)} >$. Astfel, orice subgrup finit generat este ciclic.

3. Presupunem că G este finit generat. Conform subpunctului anterior, G este ciclic generat de un element de forma $\frac{a}{b}, a, b, \in \mathbf{Z}$. Fracția poate fi adusă la forma ireductibilă și conform subpunctului 1, ordinul lui G este un numar natural și deci G are un numar finit de elmente, însă G are o infinitate de elemente, contradicție. Deci G nu este finit generat.