S_{10}

17.12.2020

Exc1 Calculați nr. de permutări din S_4, respectiv S_5, care se scriu ca produs de 2-cicli disjuncți.

Exc2 Determinați nr. n a.î. S_7 conține un element de ordin n.

Exc 1 $\sigma_1 = (1\,2)(3\,4)$ $\sigma_2 = (1\,3)(2\,4)$ $\sigma_3 = (1\,4)(2\,3) \in S_4$. În S_4 avem 9 astfel de permutări.

$\sigma_4 = (1\,2)$ $\sigma_5 = (1\,3)$ $\sigma_6 = (1\,4)$

$\sigma_7 = (2\,3)$ $\sigma_8 = (2\,4)$ $\sigma_9 = (3\,4)$

$S_5 \ni \sigma = (i\,j)(k\,l)$ $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$.

sau

$\sigma = (i\,j)$

Avem $10 = C_5^2$ transpoziții în S_5.

$$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15$$

Avem 25 de permutări în S_5.

Deci, avem 25 de permutări în S_5.

Exc 2 $ord(\sigma) = c.m.m.m.c$ al lungimilor ciclilor care apar în descomp lui σ.

Dc $\sigma = k$-ciclu $k = 1, \dots, 7$ $\Rightarrow$ $\underline{ord(\sigma) = k}$

$ord(\sigma) \neq 8 = 2^3 = c.m.m.m.c(\dots) \Rightarrow$ unul din numere trebuie să fie 8 ~~și~~ $\sigma \in S_7$

$ord(\sigma) \neq 9 = 3^2$ —— || ——

$\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6\,7)$ $\underline{ord(\sigma) = 10}$

$ord(\sigma) \neq p$ – prim cu $p > 7$. (În particular $ord(\sigma) \neq 11, 13, 17, 19, 23, \dots$)

$\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7) \Rightarrow ord(\sigma) = 12$

Afirmatie Multimea ordinelor elementelor din S_7 este $\{1,2,3,4,5,6,7,10,12\}$.

Dacă $\sigma \in S_7 \Rightarrow ord(\sigma) \mid 7! = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$

$|S_7| = 7!$

$S_7 \ni \sigma = c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ desc. în produs de cicli disjuncti de lungimi $i_1, \dots, i_k > 1$

$\sigma \neq e$

$i_1 + \dots + i_k \leq 7$

$1 < i_1, \dots, i_k \Rightarrow 2k \leq i_1 + \dots + i_k \Bigg| \Rightarrow$

Pot presupune că $i_1 \leq \dots \leq i_k$.

$2k \leq i_1 + \dots + i_k \leq 7 \Rightarrow$ în particular $\boxed{k \leq 3}$

Dc. $k = 1 \Rightarrow \sigma$ este un i_1-ciclu și $ord(\sigma) = i_1 \in \boxed{\{2, 3, \dots, 7\}}$

Dc. $k = 2 \Rightarrow ord(\sigma) = cmmmc(i_1, i_2)$ $\quad i_1 + i_2 \leq 7 \quad 2 \leq i_1 \leq i_2$

$(i_1, i_2) \in \{(2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4)\} \Rightarrow$

$ord(\sigma) \in \boxed{\{2, 6, 4, 10, 3, 12\}}$

Dc. $k = 3 \Rightarrow ord(\sigma) = cmmmc(i_1, i_2, i_3)$ $\quad i_1 + i_2 + i_3 \leq 7 \quad 2 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3$

$(i_1, i_2, i_3) \in \{(2,2,2), (2,2,3)\} \Rightarrow ord(\sigma) \in \boxed{\{2, 6\}}$.

Dim • $\Rightarrow$ ■

- $e \in S_n$ $\quad e = (12)(12)$

S_n e generat de transpoziții. Care este numărul minim de transpoziții cu care pot genera S_n! $\quad (n-1)$

Exc Arătați că S_n este generat de:

S_n e ciclic $\Leftrightarrow n = 2$

S_n e necomutativ $(\forall)\ n \geq 3$.

- transpozițiile $(12), (13), \dots, (1n)$
- transpozițiile $(12), (23), \dots, (n-1\ n)$
- (12) și $(12\dots n)$ (orice transpoziție și orice ciclu de lungime n)

- E suficient să arăt că orice transpoziție (ij) aparține subgrupului generat de $\{(12), (13), \dots, (1n)\}$.

(23)

$$(12)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$$

$$(1i)(1j) = \begin{pmatrix} 1 & i & j \\ j & 1 & i \end{pmatrix} = (1\,j\,i)$$

$$\boxed{(13)(12)} = (1\,2\,3) = \boxed{(12)(23)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{(12)}{(12)^{-1}}(13)(12) = (23).$$

$$(*)\ (ij) = (1i)(1j)(1i) \Rightarrow \underset{(\forall)\, i \neq j}{(ij)} \in \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle \ \square$$

(••) E suficient ca $(\forall)\, 1\neq j$ $\quad (1\, j) \in \langle (1\,2), (2\,3), \dots, (n-1\; n)\rangle$. (din (•))

Dim $(1\,3)(1\,2) = (1\,2)(2\,3) \Rightarrow (1\,3) = (1\,2)(2\,3)\underbrace{(1\,2)^{-1}}_{=(1\,2)} = (1\,2)(2\,3)(1\,2)$.

Dim (*) $\Rightarrow$ $(i\; i+1) = (1\, i)(1\; i+1)(1\, i)$ $\Rightarrow$ prin inducție mat. $\blacksquare$

$(1\; i+1) = (1\, i)(i\; i+1)(1\, i)$

$(1\, j) \in \langle (1\,2), (1\,2 \dots n)\rangle$ (din (•))

(•••) E suficient să arăt că $(\forall)\, 1\neq j$ $\quad (1\, j) \in \langle (1\,2), (1\,2\dots n)\rangle$ (din (••))

$\Rightarrow (\forall)\, j = 1, \dots, n-1 \quad (j\; j+1) \in \langle (1\,2), (1\,2\dots n)\rangle$

Pot pp $n \geq 4$ ($n = 3$ iese din (•))

$(1\,2) \in \langle (1\,2), (1\,2 \dots n)\rangle$

$(1\,2\dots n) = (1\,2)(2\,3)\dots(n-1\; n)$

$(1\,2\dots n)^{-1} = (n-1\; n)(n-2\; n-1)\cdot \dots \cdot (1\,2)$

$(1\,2\dots n)^{-1} = (n-1\; n)(n-2\; n-1)\dots(1\,2)$

$(1\,2\dots n)(1\,2)(1\,2\dots n)^{-1} = (1\,2)(2\,3)\dots(n-1\; n)\underbrace{(1\,2)}(n-1\; n)(n-2\; n-1)\dots(1\,2)$

$\underset{n\geq 4}{=} (1\,2)(2\,3)\dots(n-2\; n-1)(1\,2)\underbrace{(n-1\; n)(n-1\; n)}_{e}(n-2\; n-1)\dots(1\,2)$

$= (1\,2)(2\,3)\dots(n-2\; n-1)(1\,2)(n-2\; n-1)\dots(1\,2)$

$= (1\,2)(2\,3)(3\,4)(1\,2)(3\,4)(2\,3)(1\,2)$

$= \dots = (1\,2)(2\,3)(3\,4)(1\,2)(3\,4)(2\,3)(1\,2) = (1\,2)(2\,3)(1\,2)(2\,3)(1\,2)$

$= (1\,2)(2\,3)(1\,2)\underbrace{(3\,4)(3\,4)}_{e}(2\,3)(1\,2)$

$= (1\,2\,3)(1\,2)(3\,2\,1) = (2\,3)$

$(1\,2\,3)(1\,2)(3\,2\,1) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\,3)$

Temă

$(1\,2\,\ldots\,n)(2\,3)(1\,2\,\ldots\,n)^{-1} = (3\,4)$! şi apoi

$(1\,2\,\ldots\,n)(j\;j+1)(1\,2\,\ldots\,n)^{-1} = (j+1\;\;j+2)$ $\boxed{1 \leq j \leq n-2}$.