Exerciții 1

1) Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

2) Arătați că

a) $\sup(x+A)=x+\sup A$; $\inf(x+A)=x+\inf A$

b) $\sup(-A)=-\inf(A)$

c) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

d) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

e) $\sup(xA)=\begin{cases} x\sup A & x\geq 0\\ x\inf A & x\leq 0\end{cases}$

3) Arătați că:

a) $\overline{\lim}(-x_n)=-\underline{\lim}\, x_n$

b) $\overline{\lim}(x_n+y_n)\leq\overline{\lim}\, x_n+\overline{\lim}\, y_n$

c) $\overline{\lim}(x_n+y_n)\geq\overline{\lim}\, x_n+\underline{\lim}\, y_n$

d) $\underline{\lim}(x_n+y_n)\geq\underline{\lim}\, x_n+\underline{\lim}\, y_n$

f) $\underline{\lim}(x_n+y_n)\leq\overline{\lim}\, x_n+\underline{\lim}\, y_n$

e) inegalitățile pot fi stricte

f) $x_n>0$ $\quad\overline{\lim}\,\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$

4) Arătați că dacă $x_n > 0$ atunci: 2

$$\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

5) Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. A.U.A.S.E.

1) f este continuă și crescătoare

2) $f(\sup A) = \sup f(A)$ și $f(\inf A) = \inf f(A)$

$\forall A$ a.î. $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $A \subset (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.

3) $f(\overline{\lim}\, x_n) = \overline{\lim}\, f(x_n)$ și $f(\underline{\lim}\, x_n) = \underline{\lim}\, f(x_n)$ $\forall (x_n)_n$ a.î. $\exists \varepsilon > 0$ cu $(x_n)_n \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

6) Fie $(x_n)_{n \ge 1}$ a.î. $x_{n+m} \le x_n + x_m$ $\forall m, n \ge 1$.

Arătați că șirul $(x_n)_{n\ge 1}$ are limită

7) Notăm cu $\mathcal{C} = C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ continuă $\}$

$d_1, d_2, d_\infty : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ date de

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt$$

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt}$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)-g(t)|.$$

Arătați:

1) d_1, d_2, d_∞ distanțe

2) $d_1(f+h, g+h) = d_1(f,g) \quad \forall f,g,h$

3) $d_1(\alpha f, \alpha g) = |\alpha|\, d_1(f,g)$

4) $(\mathcal{C}, d_1)$ nu este complet.

8) $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ este spațiu metric și d_∞ este definită în curs.

$$d_\infty(x+y, z+y) = d(x,z)$$

9) X și $\sim$ a relație de echivalență

$d : X \times X \to [0,\infty) \qquad d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \text{ și } x \sim y \\ 3 & x \not\sim y. \end{cases}$

a) (X,d) spațiu metric

b) $x_n \to a \iff \exists\, n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n = a$

c) $B(a,r) = ?$

3a EXEMPLE (4)

$a = \sup A \iff$ 1) $a \geq x \quad \forall x \in A$

2) $\forall b$ a.î. $(b \geq x \ \forall x \in A) \Rightarrow b \geq a \iff$

$\iff$ 1) $a \geq x \quad \forall x \in A$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in A$ a.î. $a - \varepsilon < x \quad (\leq a)$.

$\iff$ 1) $a \geq x \quad \forall x \in A$

2) $\exists \ (x_n) \subset A$ a.î. $x_n \to a$.

$\sup(-A) = -\inf(A)$ $\qquad -A, \ A+B, \ a+A$ def în primul curs.

$a = \inf(A) \Rightarrow$ 1) $a \leq x \quad \forall x \in A$

2) $\exists \ (x_n)_n \subset A$ a.î. $x_n \to a$ $\Rightarrow$

1) $-a \geq -x \quad \forall x \in A$

$\iff -a = \sup(-A)$.

2) $-x_n \to -a$

Exercițiul 1 pp că f e continuă și apoi încercați să slăbiți ipoteza de continuitate

3a) $\overline{\lim}\, x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k = \inf\limits_{n} \sup\limits_{k\geq n} x_k$

$$\overline{\lim}\,(-x_n) = \inf_n \Big(\sup_{k\geq n} -x_k \Big) =$$

$$= \inf_n \Big(- \inf_{k\geq n} x_k \Big) = - \sup_n \inf_{k\geq n} x_k =$$

$$= -\underline{\lim}\, x_n$$

3b) $x_k \leq \sup\limits_{l\geq n} x_l \quad \forall\, k \geq n$

$$y_k \leq \sup_{l\geq n} x_l \quad \forall\, k\geq n \Rightarrow$$

$$x_k + y_k \leq \sup_{l\geq n} x_l + \sup_{l\geq n} x_l \quad \forall\, k\geq n \Rightarrow$$

$$\sup_{k\geq n} (x_k + y_k) \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} x_k .$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} (x_k + y_k)}_{=\ \overline{\lim}\,(x_n+y_n)} \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k}_{=\ \overline{\lim}\, x_n} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k}_{=\ \overline{\lim}\, y_n .}$$