CURS 14

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LOGICA DE ORDINUL I

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 13.11

φ şi ψ sunt logic echivalente (notaţie $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \psi$) dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Definiţia 13.12

ψ este consecinţă semantică a lui φ (notaţie $\varphi \vDash \psi$) dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Propoziţia 13.13

Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabile x, y,

$$
\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\neg\varphi && (1)\\
\neg\forall x\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\neg\varphi && (2)\\
\forall x(\varphi \wedge \psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall x\varphi \wedge \forall x\psi && (3)\\
\forall x\varphi \vee \forall x\psi &\vDash \forall x(\varphi \vee \psi) && (4)\\
\exists x(\varphi \wedge \psi) &\vDash \exists x\varphi \wedge \exists x\psi && (5)\\
\exists x(\varphi \vee \psi) &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists x\varphi \vee \exists x\psi && (6)\\
\forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \forall x\varphi \to \forall x\psi && (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall x(\varphi \to \psi) &\vDash \exists x\varphi \to \exists x\psi && (8)\\
\forall x\varphi &\vDash \exists x\varphi && (9)\\
\varphi &\vDash \exists x\varphi && (10)\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi && (11)\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\forall x\varphi && (12)\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y\exists x\varphi && (13)\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. && (14)
\end{aligned}
$$

Propoziţia 13.14

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \to s = u$.

Definiţia 14.1

Fie φ o formulă a lui $\mathcal{L}$ şi x o variabilă.

- O apariţie a lui x în φ se numeşte legată în φ dacă x apare într-o subexpresie a lui φ de forma $\forall x \psi$ sau $\exists x \psi$, unde ψ este o formulă;
- O apariţie a lui x în φ se numeşte liberă în φ dacă nu este legată în φ.
- x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă x are cel puţin o apariţie legată în φ.
- x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă x are cel puţin o apariţie liberă în φ.

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Notaţie: $FV(\varphi) :=$ mulţimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiţie alternativă

Mulţimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită şi prin inducţie pe formule:

$$
\begin{array}{lcll}
FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\
FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\
FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\
FV(\forall x \varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. &
\end{array}
$$

Notaţie: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziţia 14.2

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ şi orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in Var(t), \text{ atunci } t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Propoziţia 14.3

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

$$\text{dacă } e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice variabilă } v \in FV(\varphi), \text{ atunci } \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Propoziţia 14.4

Pentru orice formule φ, ψ şi orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists x\varphi \tag{15}$$
$$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\varphi \tag{16}$$
$$\forall x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \land \forall x\psi \tag{17}$$
$$\forall x(\varphi \lor \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \lor \forall x\psi \tag{18}$$
$$\exists x(\varphi \land \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \land \exists x\psi \tag{19}$$
$$\exists x(\varphi \lor \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \lor \exists x\psi \tag{20}$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \to \forall x\psi \tag{21}$$
$$\exists x(\varphi \to \psi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi \to \exists x\psi \tag{22}$$
$$\forall x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \exists x\psi \to \varphi \tag{23}$$
$$\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\psi \to \varphi \tag{24}$$

Dem.: Exerciţiu.

Definiţia 14.5

O formulă φ se numeşte enunţ (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.

Notaţie: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulţimea enunţurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziţia 14.6

Fie φ un enunţ. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Definiţia 14.7

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al lui φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notaţie: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ şi u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 14.8

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u)$:= expresia obţinută din t prin înlocuirea tuturor apariţiilor lui x cu u.

Propoziţia 14.9

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

SUBSTITUŢIA

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obţinută din φ prin înlocuirea tuturor apariţiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăţi naturale ale substituţiei să fie adevărate:

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u) \quad \text{şi} \quad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme!

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ şi $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$. Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$ avem că $\mathcal{A} \models \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Fie x o variabilă, u un termen şi φ o formulă.

Definiţia 14.10

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conţine apariţii libere ale lui x.

Observaţie

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situaţii:

- u nu conţine variabile;
- φ nu conţine variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conţine apariţii libere ale lui x.

Fie x o variabilă, u termen şi φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiţia 14.11

$\varphi_x(u)$:= expresia obţinută din φ prin înlocuirea tuturor apariţiilor libere ale lui x cu u.

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituţie liberă.

Propoziţia 14.12

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Noţiunea de substituţie liberă evită problemele menţionate anterior şi se comportă cum am aştepta.

Propoziţia 14.13

Pentru orice termeni u_1 şi u_2 şi orice variabilă x,

(i) pentru orice termen t,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 şi u_2 în φ,

$$\models u_1 = u_2 \rightarrow (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziţia 14.14

Fie φ o formulă şi x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(u), \qquad \models \varphi_x(u) \rightarrow \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi, \qquad \models \varphi \rightarrow \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c,

$$\models \forall x\varphi \rightarrow \varphi_x(c), \qquad \models \varphi_x(c) \rightarrow \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ şi $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4.$ Atunci

$$\mathcal{N} \vDash (x\dot{<}z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \nvDash (x\dot{<}z)_x(y)[e].$$

Totuşi, variabilele legate pot fi substituite, cu condiţia să se evite conflicte.

Propoziţia 14.15

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x şi y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ şi y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\text{⊨}\!\!\text{⫤}} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{şi} \quad \forall x\varphi \mathrel{\text{⊨}\!\!\text{⫤}} \forall y\varphi_x(y).$$

- O formulă φ este în formă rectificată dacă:
  (i) nici o variabilă nu apare şi liberă şi legată
  (ii) cuantificatori distincţi leagă variabile distincte
- Pentru orice formulă φ există o formulă φ^r în formă rectificată astfel încât $\varphi \vDash\!\!\!\dashv \varphi^r$.
- Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obţine prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

Example

$$\forall x\, P(x) \wedge \exists x\, \forall y\, R(x, y) \wedge S(x) \;\vDash\!\!\!\dashv\; \forall x\, P(x) \wedge \exists x_1\, \forall y\, R(x_1, y) \wedge S(x_2)$$

În continuare vom presupune că
toate formulele sunt în formă rectificată.

O formulă prenex este o formulă de forma

$$Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \dots Q_n x_n\, \varphi$$

unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_1, \dots, x_n$ sunt variabile distincte şi φ nu conţine cuantificatori.

Example

Fie R este un simbol de relaţie de aritate 2. Formula

$$\forall x\, \exists y\, \forall z((R(x, y) \vee \neg R(x, z)) \wedge R(x, x))$$

este în formă prenex.

- Se înlocuiesc $\to$ şi $\leftrightarrow$:

$$\varphi \to \psi \quad \boxminus\!\!\!\!\boxminus \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \text{⫤⊨} \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

- Se aplică următoarele echivalenţe:

$$\neg\exists x\,\neg\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\,\varphi \qquad\qquad \forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\,(\varphi \wedge \psi)$$

$$\neg\forall x\,\neg\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\,\varphi \qquad\qquad \exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\,(\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\exists x\,\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\,\neg\varphi \qquad\qquad \forall x\,\forall y\,\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall y\,\forall x\,\varphi$$

$$\neg\forall x\,\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\,\neg\varphi \qquad\qquad \exists x\,\exists y\,\varphi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists y\,\exists x\,\varphi$$

$$\forall x\,\varphi \vee \psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\,(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x\,\varphi \wedge \psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x\,\varphi \vee \psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\,(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x\,\varphi \wedge \psi \;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

Example

Fie R un simbol de relaţie de aritate 2.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall x \neg(\exists y\, R(x,y) \rightarrow \exists x\, R(x,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x \neg(\exists v\, R(x,v) \rightarrow \exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x \neg(\neg\exists v\, R(x,v) \vee \exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\, (\exists v\, R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \forall z\, \neg R(z,y)) \\
&\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \forall x\, \exists v\, \forall z\, (R(x,v) \wedge \neg R(z,y))
\end{aligned}
$$

Teorema de formă prenex 14.16

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă prenex astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi^*$ şi $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Demonstraţie

(opţională pentru examen)

Demonstrăm prin inducţie după structura formulei φ.

- φ este formulă atomică.
  Atunci φ este în formă prenex, deci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \forall x \psi$.
  Conform ipotezei de inducţie, există o formulă ψ^* în formă prenex astfel încât $\psi \mathrel{\text{⫤⊨}} \psi^*$ şi $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.
  Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$.

Demonstraţie (cont.)

- $\varphi = \neg\psi$.
  Conform ipotezei de inducţie, există o formulă $\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \psi_0$ în formă prenex astfel încât $\psi \vDash\!\!\!\Dashv \psi^*$ şi $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Notăm $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$ şi definim
  $$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n \, \neg\psi_0.$$
  Atunci φ^* este în formă prenex, $\varphi^* \vDash\!\!\!\Dashv \neg\psi^* \vDash\!\!\!\Dashv \neg\psi = \varphi$ şi $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Demonstraţie (cont.)

- $\varphi = \psi \vee \chi$ şi, conform ipotezei de inducţie, există formulele în formă prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \ldots S_m z_m \chi_0$$

astfel încât $\psi \mathrel{\text{H}} \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \mathrel{\text{H}} \chi^*$ şi $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Definim

$$\varphi^* := Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n S_1 z_1 \ldots S_m z_m \, \psi_0 \vee \chi_0.$$

Atunci φ^* este în formă prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ şi

$$\varphi^* \mathrel{\text{H}} \psi^* \vee \chi^* \mathrel{\text{H}} \psi \vee \chi = \varphi.$$

Deoarece φ a fost în formă rectificată, echivalenţa $\mathrel{\text{H}}$ este justificată de următoarele proprietăţi:

$$\forall x \varphi \vee \psi \mathrel{\text{H}} \forall x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$
$$\exists x \varphi \vee \psi \mathrel{\text{H}} \exists x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$\square$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine

- două simboluri de relaţii unare R, S şi două simboluri de relaţii binare P, Q;
- un simbol de funcţie unară f şi un simbol de funcţie binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y(g(y,z) = c) \wedge \neg \exists x(f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi &\mathrel{\text{╡╞}} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \neg \exists x(f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{╡╞}} \exists y\big(g(y,z) = c \wedge \forall x \neg (f(x) = d)\big) \\ &\mathrel{\text{╡╞}} \exists y \forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg (f(x) = d)\big) \end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x\big(g(y,z) = c \wedge \neg(f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Exemplu

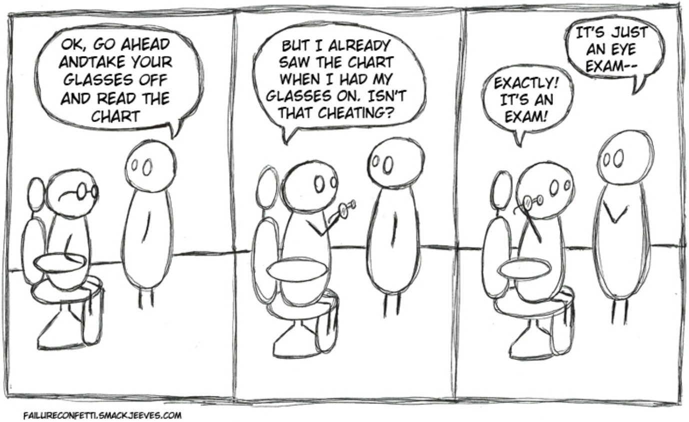
Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg\forall y(S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall y P(x,y) \rightarrow f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned}
\varphi \quad & \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \neg\forall y(S(y) \rightarrow \exists z R(z)) \wedge \forall x(\forall v P(x,v) \rightarrow f(x) = d) \\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \exists y \neg(\neg S(y) \vee \exists z R(z)) \wedge \forall x(\neg\forall v P(x,v) \vee f(x) = d) \\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \exists y(S(y) \wedge \neg\exists z R(z)) \wedge \forall x(\exists v \neg P(x,v) \vee f(x) = d) \\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \exists y(S(y) \wedge \forall z \neg R(z)) \wedge \forall x(\exists v \neg P(x,v) \vee f(x) = d) \\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \exists y \forall z(S(y) \wedge \neg R(z)) \wedge \forall x \exists v(\neg P(x,v) \vee f(x) = d) \\
& \mathrel{\text{⫤}\!\!\!\vDash} \quad \exists y \forall z \forall x \exists v(S(y) \wedge \neg R(z) \wedge (\neg P(x,v) \vee f(x) = d))
\end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v(S(y) \wedge \neg R(z) \wedge (\neg P(x,v) \vee f(x) = d))$ este o formă normală prenex pentru φ.



Baftă la examen!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.