

Spații metrice

Definiție. Fie X o mulțime nevidă. O funcție $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ se numește distanța (sau metrică) dacă:

- i) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
 - ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$
 - iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ pentru orice $x, y \in X$.
- Perechea (X, d) se numește spațiu metric.

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric, un element $a \in X$ și $r > 0$.

- i) Mulțimea $\{x \in X : d(x, a) < r\}$ se numește bilă (sferă) de centru a și rază r și se notează cu $B(a, r)$.
- ii) O mulțime $A \subset X$ se numește mărginită dacă există o bilă $B(a, r)$ astfel încât $A \subset B(a, r)$.

Definiție. Fie un spațiu metric. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se numește convergent la un element $a \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, a) < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Observație. Condiția $d(x_n, a) < \varepsilon$ este echivalentă cu $x_n \in B(a, \varepsilon)$.

Observație. Intr-un spațiu metric (X, d) , un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ este convergent la un element $a \in X$ dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$.

Definiție. Fie (X, d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se numește Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$.

Exemplu. Perechea (\mathbb{R}, d) , unde $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ este o funcție dată de $d(x, y) = |x - y|$, este un spațiu metric.

Verificare:

- i) $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$
- ii) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$
- iii) $d(x, y) + d(y, z) = |x - y| + |y - z| \geq |x - z| = d(x, z)$ pentru orice $x, y \in X$.

Șirurile convergente în (\mathbb{R}, d) sunt cele convergente în \mathbb{R} după definiția clasică.

Remarcăm că $B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Observație. Distanța din exemplul anterior se numește distanța canonică (standard) pe \mathbb{R} .

Șiruri Cauchy în \mathbb{R} .

Definiție. Un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ se numește *Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$.

Exemplu. Perechea $(\overline{\mathbb{R}}, d_\phi)$, unde $\phi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ este o funcție dată de
$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } x = \infty \\ -1 & \text{dacă } x = -\infty \end{cases}$$
 și $d_\phi : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0, \infty)$ o funcție dată de $d_\phi(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)|$, este un spațiu metric. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ și $a \in \overline{\mathbb{R}}$ atunci $x_n \xrightarrow{d} a \iff x_n \xrightarrow{d_\phi} a$, unde $d(x, y) = |x - y|$.

Arătăm că ϕ este bijectivă.

Injectivitate. Dacă $x \in \mathbb{R}$ atunci $|\phi(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$, deci $\phi(x) \notin \{-\infty, \infty\}$.

Observăm că $\phi(x) = 0 \iff x = 0$, $\phi(x) > 0 \iff x > 0$ și $\phi(x) < 0 \iff x < 0$. Dacă $\phi(x) = \phi(y)$ și $x, y \in (0, \infty)$ rezultă că $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$, deci $x = y$.

Se verifică ușor că $\phi|_{\mathbb{R}}$ este continuă și crescătoare și că $\phi(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.

Proprietățile distanței:

- i) $d_\phi(x, y) = 0 \iff |\phi(x) - \phi(y)| = 0 \iff \phi(x) = \phi(y) \iff x = y$;
- ii) $d_\phi(x, y) = |\phi(x) - \phi(y)| = |\phi(y) - \phi(x)| = d_\phi(y, x)$ pentru orice $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$;
- iii) $d_\phi(x, y) + d_\phi(y, z) = |\phi(x) - \phi(y)| + |\phi(y) - \phi(z)| \geq |\phi(x) - \phi(z)| = d_\phi(x, z)$ pentru orice $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$.

O să arătăm că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff x_n \xrightarrow{d_\phi} a$ doar în cazul în care $a, x_n \in (0, \infty)$.

Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, atunci $d_\phi(x_n, a) = |\phi(x_n) - \phi(a)| = \left| \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{a}{1+a} \right| = \left| \frac{x_n - a}{(1+x_n)(1+a)} \right| \leq |x_n - a|$, deci $d_\phi(x_n, a) \rightarrow 0$.

Reciproc rezultă că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit de un M (în caz contrar există $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ astfel încât $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \infty \implies a = \infty$). Atunci $|x_n - a| = |(1+x_n)(1+a)| d_\phi(x_n, a) \leq (1+M)^2 d_\phi(x_n, a)$.

Temă:

1) Arătați că perechea (\mathbb{C}, d) , unde $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ este o funcție dată de $d(z, w) = |z - w|$, este un spațiu metric. Arătați că un șir $(z_n = x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ este convergent către $z = x + iy$ dacă și numai dacă $x_n \rightarrow x$ și $y_n \rightarrow y$.

2) Arătați că într-un spațiu metric (X, d) un șir constant de la un rang încolo este convergent.

3) Fie X o mulțime nevidă. Considerăm funcția $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dată de $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y \\ 1 & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$. Arătați că (X, d) este un spațiu metric și determinați șirurile convergente și bilele din (X, d) . Determinați $B(a, r)$ în (X, d) .

4) Fie X o mulțime nevidă dotată cu o relație de echivalență notată cu \sim și o funcție $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dată de $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y \\ 1 & \text{dacă } x \neq y \text{ și } x \sim y \\ 3 & \text{dacă } x \neq y \text{ și } x \not\sim y \end{cases}$.

Arătați că (X, d) este un spațiu metric și determinați șirurile convergente și bilele din (X, d) . Determinați $B(a, r)$ în (X, d) .

MULȚIMEA \mathbb{R}^n

Deoarece evoluția multor fenomene din lumea înconjurătoare depinde de mai mulți parametri, acestea sunt modelate prin intermediul funcțiilor de mai multe variabile, adică a funcțiilor care au drept domeniu de definiție o submulțime a lui \mathbb{R}^n . Din acest motiv este necesar un studiu atent al proprietăților mulțimii \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n ca spațiu vectorial peste \mathbb{R}

Vom lucra în cele ce urmează cu

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \underset{n \text{ ori}}{\mathbb{R}} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Observații.

1. Așa cum uneori ne referim la \mathbb{R}^1 ca fiind dreapta reală, la fel vom numi uneori \mathbb{R}^2 planul real sau \mathbb{R}^3 spațiul real.

2. Pentru simplificarea scrierii, vom nota $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, iar x_1, x_2, \dots, x_n se vor numi prima componentă, a doua componentă, ..., a n -a componentă a vectorului x . Elementul $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \dots, 0)$ se numește originea sau vectorul zero al lui \mathbb{R}^n . Pentru simplitate, de multe ori, vom nota $0_{\mathbb{R}^n}$ cu 0.

Vom introduce două operații algebrice pe \mathbb{R}^n .

Definiție.

Dacă $c \in \mathbb{R}$ și $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci definim $c \cdot x$ (notat pe scurt cu cx), numit produsul numărului real c cu vectorul x , astfel:

$$c \cdot x = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, atunci definim $x + y$, numit suma vectorilor x și y , prin

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Proprietăți. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ și $b, c \in \mathbb{R}$, avem:

1.

$$x + y = y + x;$$

2.

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

3.

$$0 + x = x + 0 = x;$$

4.

$$x + (-1)x = (-1)x + x = 0;$$

5.

$$1x = x;$$

6.

$$b(cx) = (bc)x;$$

7.

$$c(x + y) = cx + cy \text{ și } (b + c)x = bx + cx.$$

Observații

1. Prin urmare, \mathbb{R}^n , cu cele două operații descrise mai sus, este spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

2. Vom folosi următoarele notații: $(-1)x \stackrel{\text{not}}{=} -x$ și $x + (-y) \stackrel{\text{not}}{=} x - y$.

3. Sistemul $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, unde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$, formează o bază a spațiului vectorial real \mathbb{R}^n , orice vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ putând fi scris sub forma

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Exemplu

Considerăm funcția $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ dată de

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Atunci d_1 este o distanță care are următoarele proprietăți:

a) $d_1(x, y) = d_1(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_1(ax, ay) = |a| d_1(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ și $a \in \mathbb{R}$.

Verificări:

i) $d_1(x, y) = 0 \iff |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = 0 \iff$

$|x_1 - y_1| = |x_2 - y_2| = \dots = |x_n - y_n| = 0 \iff$

$x_i = y_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\} \iff x = y$

ii) $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \dots + |y_n - x_n| = d_1(y, x)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$

iii) $d_1(x, y) + d_1(y, z) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| = \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \geq$

$\sum_{i=1}^n |x_i - y_i + y_i - z_i| = d_1(x, z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

a) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i + z_i - (y_i + z_i)| = d_1(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_1(ax, ay) = \sum_{i=1}^n |ax_i - ay_i| = |a| \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = |a| d_1(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ și $a \in \mathbb{R}$.

Temă:

1) Arătați ca funcțiile $d_2, d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ date de

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

și

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

sunt distanțe în \mathbb{R}^n .

2) Pentru $n = 2$ determinați șirurile convergente și $B(0, r)$ în d_1, d_2 și d_∞ .

3) Arătați că:

a) $d_2(x, y) = d_2(x + z, y + z)$ și $d_\infty(x, y) = d_\infty(x + z, y + z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

b) $d_2(ax, ay) = |a| d_2(x, y)$ și $d_\infty(ax, ay) = |a| d_\infty(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$ și $a \in \mathbb{R}$

c) $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

4) Folosind punctul anterior arătați că, pentru că un șir $(x_m)_{m \geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ și $x \in \mathbb{R}^n$ avem:

$$x_m \xrightarrow{d_1} x \iff x_m \xrightarrow{d_2} x \iff x_m \xrightarrow{d_\infty} x.$$

Proprietățile șirurilor Cauchy și șirurilor convergente

Propoziție. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci:

i) Orice șir convergent este Cauchy.

ii) Orice șir Cauchy este mărginit.

iii) Orice șir convergent este mărginit.

iv) Orice șir Cauchy care are un subșir convergent este mărginit.

Demonstrație.

i) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un șir convergent la $a \in X$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Dacă $n, m \geq n_\varepsilon$ avem

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ este Cauchy.

ii) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un șir Cauchy. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$. Luăm $\varepsilon = 1$. Atunci pentru orice $n \geq n_1$ avem $d(x_n, x_{n_1}) < 1 \iff x_n \in B(x_{n_1}, 1)$. Fie $r = 1 + \max\{d(x_1, x_{n_1}), d(x_2, x_{n_1}), \dots, d(x_{n_1}, x_{n_1})\}$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $x_n \in B(x_{n_1}, r)$.

i)+ii) \implies iii)

iv) Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ un șir Cauchy și $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subșir al lui convergent la $a \in X$.

Deoarece șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este Cauchy rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq n_\varepsilon$.

Deoarece şirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent la $a \in X$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $n_{k_\varepsilon} > n_\varepsilon$ şi $d(x_{n_{k_\varepsilon}}, a) < \varepsilon$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_\varepsilon$.

Atunci pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_{k_\varepsilon}}) + d(x_{n_{k_\varepsilon}}, a) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Rezultă că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent la a .

Definiţie. *Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte spaţiu metric complet.*

Exemplu. Spaţiul metric $((0, 1), d)$, unde $d : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ este o funcţie dată de $d(x, y) = |x - y|$, nu este complet.

Şirul $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ este Cauchy dar nu este convergent.

Temă:

1) Fie X o multime nevidă. Arătaţi că spaţiul metric (X, d) , unde funcţia $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ este dată de $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y \\ 1 & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$, este complet.

2) Arătaţi că spaţiul metric (\mathbb{Q}, d) , unde $d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow [0, \infty)$ este o funcţie dată de $d(x, y) = |x - y|$, nu este complet.

LIMITA SUPERIOARĂ ŞI INFERIOARĂ A UNUI ŞIR

Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale

Caracterizarea convergenţei şirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară şi inferioară

În această secţiune vom introduce noţiunile de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale care sunt utile pentru "clasificarea" şirurilor divergente.

Noţiunea de limită superioară şi limită inferioară pentru un şir mărginit de numere reale

Supremumul unei submulţimi S a lui \mathbb{R} poate fi descris ca fiind infimumul mulţimii acelor numere reale ce sunt mai mari decât orice element al lui S . Este util să se relaxeze această condiţie şi să se considere infimumul mulţimii acelor numere reale pentru care există numai un număr finit de elemente ale lui S mai mari decât ele. Din mai multe motive, în cazul şirurilor de numere reale este important să se considere o uşoară modificare a acestui concept. Într-adevăr, un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de numere reale, furnizează o submulţime a lui \mathbb{R} , dar şirul

posedă o structură suplimentară prin faptul că elementele sale sunt indexate după \mathbb{N} , deci avem aici o ordonare, care nu este prezentă în cazul unei mulțimi arbitrare de numere reale. Ca urmare, același număr poate să apară de mai multe ori în mulțimea termenilor șirului, fenomen ce nu este prezent pentru mulțimi arbitrare de numere reale. Suntem conduși astfel la următoarea:

Definiție. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit de numere reale. Atunci limita superioară a sa, notată $\limsup x_n$ sau $\overline{\lim} x_n$, este infimumul mulțimii numerelor reale v cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât $v < x_n$. Altfel spus

$$\begin{aligned} \overline{\lim} x_n &= \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\} = \\ &= \inf\{v \in \mathbb{R} \mid \text{există } n_v \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } x_n \leq v \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq n_v\}. \end{aligned}$$

Similar, fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit de numere reale. Atunci limita inferioară a sa, notată $\liminf x_n$ sau $\underline{\lim} x_n$, este supremumul mulțimii numerelor reale v , cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât $v > x_n$.

Observații:

1. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere reale mărginit, atunci limita superioară și limita inferioară există și sunt unice.
2. Unii autori folosesc notația $\limsup x_n = \infty$ pentru a marca faptul că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit superior, respectiv notația $\liminf x_n = -\infty$ pentru a marca faptul că șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este nemărginit inferior.

Definiție. Pentru un șir mărginit de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mulțimea $\{x \in \mathbb{R} \mid \text{există un subșir } (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ al lui } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ astfel încât } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x\}$, notată cu $\mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, poartă numele de mulțimea punctelor limită ale șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exemplu. Considerăm șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $x_n = \frac{1}{1+n} + \cos \frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci

- 1) $x_{4k} = \frac{1}{1+4k} + \cos 2k\pi = \frac{1}{1+4k} + 1$, deci $x_{4k} \rightarrow 1$.
- 2) $x_{4k+2} = \frac{1}{1+4k+2} + \cos(\pi + 2k\pi) = \frac{1}{1+4k+2} - 1$, deci $x_{4k+2} \rightarrow -1$.
- 3) $x_{2k+1} = \frac{1}{2+2k} + \cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2+2k}$, deci $x_{2k+1} \rightarrow 0$.

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are 3 puncte limită -1 , 0 și 1 . Limita superioară este 1 și limita inferioară este -1 .

Observație. Pentru un șir mărginit de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avem:

1)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \geq \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m+p} x_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m+p} x_n \geq \inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$$

pentru orice $m, p \in \mathbb{N}$;

2)

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \geq l^*$$

și

$$l_* \geq \inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$;

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \geq l^* \text{ pentru c\^a exist\^a un num\^ar finit de termeni ai \^sirului } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

care s\^a fie mai mari dec\^at $\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$.

3)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \right) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \right) \geq l^*$$

4) $l^* \geq l_*$;

Presupunem prin reducere la absurd c\^a $l^* < l_*$. Avem $l^* < \frac{2l^* + l_*}{3} < \frac{l^* + 2l_*}{3} < l_*$. Rezult\^a c\^a \^sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are un num\^ar finit de termeni mai mari dec\^at $\frac{2l^* + l_*}{3}$ și un num\^ar finit de termeni mai mici dec\^at $\frac{l^* + 2l_*}{3}$. Cu alte cuvinte rezult\^a c\^a \^sirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are un num\^ar finit de termeni (absurd).

5) Din punctele anterioare avem

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \right) \geq l^* \geq$$

$$\geq l_* \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \right) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n.$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$.

Propoziție. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir mărginit de numere reale și l^* limita lui superioară. Atunci există un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent la l^* .

Demonstrație.

Vom ar\^ata mai int\^ai c\^a pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $n \in \mathbb{N}$ exist\^a $m \in \mathbb{N}$ astfel inc\^at $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$ și $m > n$. Deoarece $l^* < l^* + \varepsilon$ exist\^a n_0 astfel inc\^at $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Putem presupune ca $n_0 \geq n$. Deoarece $l^* - \varepsilon < l^*$ exist\^a o infinitate de termeni ai șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strict mai mari dec\^at $l^* - \varepsilon$, deci exist\^a $m \in \mathbb{N}$ astfel inc\^at $m > n_0 \geq n$ și $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$.

Prin inducție obținem un șir $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ astfel inc\^at $n_k < n_{k+1}$ și $l^* - \frac{1}{k+1} < x_{n_k} < l^* + \frac{1}{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Deci l^* este un punct limit\^a al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema (lema lui Cesaro). Orice șir mărginit are un subșir convergent.

Teorema. Mulțimea numerelor reale împreună cu distanța canonică formează un spațiu metric complet.

Observație. Orice șir de numere reale conține un subșir care are limit\^a.

Propoziția următoare ne furnizează modalități alternative pentru caracterizarea limitei superioare a unui șir mărginit de numere reale.

Propoziție. Pentru orice șir mărginit de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- i) $l^* = \overline{\lim} x_n$.
- ii) Sunt îndeplinite următoarele două condiții:
 - α) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr finit de numere naturale n astfel încât $l^* + \varepsilon < x_n$.
 - β) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr infinit de numere naturale n astfel încât $l^* - \varepsilon < x_n$.
- iii) $l^* = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$.
- iv) $l^* = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$.
- v) $l^* = \sup \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \max \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

Demonstrație.

i) \Rightarrow ii)

α) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* < l^* + \varepsilon$, i.e. $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\} < l^* + \varepsilon$, deci există $v_0 \in \mathbb{R}$ cu următoarele două proprietăți: a) Există un număr finit de numere naturale n astfel încât $v_0 < x_n$; b) $v_0 < l^* + \varepsilon$. Prin urmare există un număr finit de numere naturale n astfel încât $l^* + \varepsilon < x_n$, i.e. condiția α) este satisfăcută.

β) Să presupunem, prin reducere la absurd, că β) nu este satisfăcută. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că există un număr finit de numere naturale n astfel încât $l^* - \varepsilon_0 < x_n$. Drept urmare $l^* - \varepsilon_0 \in \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\}$, deci $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\} = l^* \leq l^* - \varepsilon_0$, i.e. $\varepsilon_0 \leq 0$. Contradicția obținută arată că β) este validă.

ii) \Rightarrow i) Condiția α) arată că $l^* + \varepsilon \in \{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\}$, deci $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\} < l^* + \varepsilon$, i.e. $\overline{\lim} x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Prin urmare $\overline{\lim} x_n \leq l^*$. Vom arăta că inegalitatea de mai sus nu poate fi strictă. Să presupunem, prin reducere la absurd, că $\overline{\lim} x_n < l^*$. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că $\overline{\lim} x_n < l^* - \varepsilon_0$, i.e. $\inf\{v \in \mathbb{R} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid v < x_n\} \text{ este finită}\} < l^* - \varepsilon_0$, deci există $v_0 \in \mathbb{R}$ cu următoarele două proprietăți: a) există un număr finit de numere naturale n astfel încât $v_0 < x_n$; b) $v_0 < l^* - \varepsilon_0$. Prin urmare există un număr finit de numere naturale n astfel încât $l^* - \varepsilon_0 < x_n$, ceea ce contrazice condiția β). Concluzionăm că $l^* = \overline{\lim} x_n$.

ii) \Rightarrow iii) Cu notația $\xi = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$, avem:

a) Conform cu α), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$, deci $\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon} x_n \leq l^* + \varepsilon$. Prin urmare

$$\xi = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \leq l^* + \varepsilon \text{ pentru orice } \varepsilon > 0, \text{ deci}$$

$$\xi \leq l^*. \quad (1)$$

b) Conform cu β), pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $m \in \mathbb{N}$ există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$. Așadar $l^* - \varepsilon < \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, de unde $l^* - \varepsilon \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n = \xi$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Concluzionăm că

$$l^* \leq \xi. \quad (2)$$

Din (1) și (2) deducem că $l^* = \xi$, i.e. $l^* = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$.

iii) \Rightarrow ii)

α) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* < l^* + \varepsilon$, i.e. $\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n < l^* + \varepsilon$, deci

există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0} x_n < l^* + \varepsilon$, de unde $x_n < l^* + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, adică α) este validă.

β) Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* - \varepsilon < l^*$, i.e. $l^* - \varepsilon < \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n \leq$

$\sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m+1} x_n$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$. Așadar pentru orice $m \in \mathbb{N}$ există $k_m \in \mathbb{N}$,

$k_m > m$ astfel încât $l^* - \varepsilon < x_{k_m}$, deci există un șir $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ strict crescător cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Prin urmare și β) este validă.

iii) \Leftrightarrow iv) Având în vedere faptul că șirul $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, unde $y_m = \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq m} x_n$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$, este descrescător, precum și Teorema convergenței monotone, această echivalență decurge imediat.

ii) \Rightarrow v)

Vom arăta mai întâi ca pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $n \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $l^* - \varepsilon < x_m < l^* + \varepsilon$ și $m > n$. Din condiția β) implică faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că

$$l^* - \varepsilon < x_{n_k}, \quad (3)$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Din condiția α) există cel mult un număr finit de numere naturale l_1, \dots, l_p astfel încât $x_{l_1} > l^* + \frac{\varepsilon}{2}, \dots, x_{l_p} > l^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Alegem $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $m = n_k > \max\{n, l_1, \dots, l_p\}$. Atunci $l^* - \varepsilon < x_m \leq l^* + \frac{\varepsilon}{2} < l^* + \varepsilon$.

Prin inducție obținem un șir $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât $n_k < n_{k+1}$ și $l^* - \frac{1}{k+1} < x_{n_k} < l^* + \frac{1}{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Deci l^* este un punct limită.

Fie $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ un subșir al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea că $x_{n_k} \rightarrow a$. Din α) rezultă că $a \leq l^* + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, deci $a \leq l^*$.

v) \Rightarrow ii)

α) Să presupunem, prin reducere la absurd, că α) nu este validă. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că inegalitatea $l^* + \varepsilon_0 < x_n$ este valabilă pentru o infinitate de numere naturale n . Prin urmare, există un subșir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ astfel încât

$$l^* + \varepsilon_0 < x_{n_k}, \quad (4)$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Conform lemei lui Cesaro, există un subșir $(x_{n_{k_p}})_{p \in \mathbb{N}}$ al lui $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, deci și al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, și un element $l \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n_{k_p}} = l$, deci $l \in \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Având în vedere (4), deducem că $l^* + \varepsilon_0 \leq l \leq l^*$, deci am obținut contradicția $\varepsilon_0 \leq 0$. Așadar condiția α) este satisfăcută.

$\beta)$ Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $l^* - \varepsilon < l^*$, i.e. $l^* - \varepsilon < \sup \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, de unde deducem că există $y \in \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < y$. Cum $y \in \mathcal{L}((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$, există un subsir $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către y , deci există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că $l^* - \varepsilon < x_n$, adică este satisfăcută și condiția β). \square

Caracterizarea convergenței șirurilor mărginite cu ajutorul limitelor superioară și inferioară

Rezultatul următor ne oferă posibilitatea de a caracteriza șirurile convergente de numere reale cu ajutorul limitei inferioare și a limitei superioare.

Teorema de caracterizare a șirurilor convergente cu ajutorul limitelor inferioară și superioară. Pentru orice șir de numere reale mărginit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ următoarele afirmații sunt echivalente:

i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent;

ii) $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

În acest caz, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$.

Demonstrație.

i) \Rightarrow ii) Cu notația $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Ultima inegalitate arată că $\overline{\lim} x_n \leq l + \varepsilon$, iar prima că $l - \varepsilon \leq \underline{\lim} x_n$. Prin urmare $\overline{\lim} x_n - \underline{\lim} x_n \leq 2\varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, de unde concluzionăm că $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

ii) \Rightarrow i) Cu notația $l = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n$, avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^1$ și există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel încât $l - \varepsilon \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon^2$. Atunci $l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2\}$, de unde concluzionăm că $l = \underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. \square

Observație. Teorema de mai sus subliniază modul în care noțiunile de limită superioară și inferioară contribuie la clasificarea șirurilor divergente prin evaluarea distanței dintre limita inferioară și cea superioară, anume cu cât distanța dintre $\underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$ este mai mare, cu atât șirul în cauză este "mai divergent".

Exerciții

1. Să se determine punctele limită, $\underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$ pentru șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, în următoarele situații:

- $x_n = \frac{2+(-1)^n}{1+(-1)^n} + \sin \frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n [\frac{1}{2} + (-1)^n] + \cos \frac{n\pi}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

- e) $x_n = \frac{1}{n} + \{\frac{n}{k}\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ unde $k \in \mathbb{N}^*$.
f) $\{na\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ unde a este un număr irațional.

2. Proprietățile limitei superioare și inferioare.

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale mărginite. Să se arate că:

- $\underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n$;
- dacă $c \geq 0$, atunci $\underline{\lim} cx_n = c \underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} cx_n = c \overline{\lim} x_n$;
- dacă $c \leq 0$, atunci $\underline{\lim} cx_n = c \overline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} cx_n = c \underline{\lim} x_n$;
- $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \leq \underline{\lim} (x_n + y_n)$;
- $\overline{\lim} (x_n + y_n) \geq \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$;
- $\overline{\lim} (x_n + y_n) \geq \overline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$;
- $\underline{\lim} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n$;
- dacă $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent atunci $\overline{\lim} (x_n + y_n) = \overline{\lim} x_n + \lim y_n$ și $\underline{\lim} (x_n + y_n) = \underline{\lim} x_n + \lim y_n$;
- dacă $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{\lim} x_n \leq \underline{\lim} y_n$ și $\overline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} y_n$.

Observație. În general, inegalitățile de mai sus sunt stricte. Pentru a justifica acest fapt se poate studia cazurile în care $x_n = (-1)^n$ și $y_n = (-1)^{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ sau $x_n = y_n = (-1)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale strict pozitive. Să se arate că $\underline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n}$. În particular, dacă șirul $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, atunci și șirul $(\sqrt[n]{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.