18.11.2020

Wednesday, November 18, 2020 1:21 PM

Continuitate → Funcții cu mai multe variabile

Algoritm

1) Identif. unde e sigur continuă
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = ?$
3) Identificăm 2/3 funcții care să convină (pe $\mathbb{R}^2$) ($y=-x$, $y=x$, $y=x^2$, ...)
4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,-x)$ sau $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,x)$ ...

<u>Caz I</u> Nu sunt egale $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Rightarrow f$ nu este continuă în (x_0,y_0)

<u>Caz II</u> Sunt egale $= L$

Demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Se evaluează $|f(x,y)-L|$ pentru a aplica criteriul cleștelui:

$$0 \le |f(x,y)-L| \le g(x,y)$$

$(x,y)\to(x_0,y_0)$ $\qquad$ $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \\ f(x_0,y_0) = L \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ este continuă în } (x_0,y_0)$$

Ex 1. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

• $y = x$

Observație:

$(x,y) \le (0,0) \Leftrightarrow x \le 0$ și $y \le 0$

$(x,y) \ge (0,0) \Leftrightarrow x \ge 0$ și $y \ge 0$

$(-1,1) \ngeq (0,0)$

$(x,y)\to(0,0)$ $\qquad$ $(x,y)\to(0,0)$ $\qquad 0$

$(-1,1) \not\geq (0,0)$

$(-1,1) \not\leq (0,0)$

• $y=x$

$$L_1=\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

• $y=-x$

$$L_2=\lim_{x\to 0} f(x,-x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(-x)}{x^2+(-x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2x^2}=-\frac{1}{2}$$

Observăm că $L_1\neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \Rightarrow f$ nu e continuă în $(0,0)$

$\Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Ex 2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

• $y=x$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2}=0$

• $y=-x$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x,-x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^5}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{2}=0$

• $y=x^2$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot x^6}{x^2+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^8}{x^2+x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^6}{1+x^2}=\dfrac{0}{1+0}=0$

Demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

Evaluăm $|f(x,y)-0|=|f(x,y)|$

$$0\leq|f(x,y)|=\left|\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2\cdot|y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{\cancel{x^2}\cdot|y|^3}{\cancel{x^2}}=|y|^3$$

$$y^2\geq 0 \underset{/+x^2\geq 0}{\Rightarrow} \frac{x^2+y^2}{1}\geq\frac{x^2}{1}\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0\leq|f(x,y)|\leq|y|^3$$

$(x,y)\to(0,0)$: $0 \to 0$, $|y|^3 \to 0$, $|f(x,y)| \to 0$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\\ f(0,0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f$ continuă în $(0,0)$

f continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Ex 3. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x,y)=\begin{cases}x^3\cdot y^2\cdot\sin\dfrac{1}{x^4y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=y=0\end{cases}$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- $y = x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \left(x^3 \cdot x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^4+x^4} \right) = \lim_{x\to 0} x^5 \cdot \sin \frac{1}{2x^4} = 0$$

$$-1 \le \sin \frac{1}{2x^4} \le 1 \quad / \cdot |x^5|$$

$$-|x^5| \le \sin \frac{1}{2x^4} \cdot |x^5| \le |x^5|$$

$$\to 0$$

- $y = -x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0} x^3 \cdot x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^4+x^4} = 0$$

- $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} x^3 \cdot x^4 \cdot \sin \frac{1}{x^4+x^8} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x^4+x^8} \cdot x^7 = 0$$

Demonstrăm că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Evaluăm $|f(x,y) - 0| = |f(x,y)|$

$$0 \le |f(x,y)| = \left| x^3 y^2 \sin\left(\frac{1}{x^4+y^4}\right) \right| = |x|^3 \cdot y^2 \cdot \left| \sin \frac{1}{x^4+y^4} \right| \le$$

$$\le |x|^3 \cdot y^2 \cdot \left| \frac{1}{x^4+y^4} \right| = |x| \cdot x^2 y^2 \cdot \frac{1}{x^4+y^4} \overset{(*)}{\le} |x| \cdot \cancel{(x^4+y^4)} \cdot \frac{1}{\cancel{x^4+y^4}} = |x|$$

$$0 \le |f(x,y)| \le |x|$$

$$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \text{ continuă în } (0,0) \\ f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$(*)$ $\quad x^2y^2 \le 2x^2y^2 \le x^4+y^4 \quad (x^4+y^4-2x^2y^2 = (x^2-y^2)^2 \ge 0)$

Ex 4. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & x^2+y^2+z^2 \ne 0 \\ 0, & x=y=z=0 \end{cases}$

Rezolvare:

f continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

- $y=x$ și $z=x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^5}{3x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{3} = 0$
- $y=x$ și $z=-x$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x,-x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^5}{3x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x}{3} = 0$
- $y=x$ și $z=x^2$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^4+x^8} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2+x^4} = \frac{0}{2+0} = 0$

Demonstrăm $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$

Evaluăm $|f(x,y,z)|$

$$0 \le |f(x,y,z)| = \left| \frac{x^2y^2\cdot z}{x^4+y^4+z^4} \right| = \frac{x^2\cdot y^2\cdot |z|}{x^4+y^4+z^4} \le \frac{x^2\cdot y^2\cdot |z|}{x^4+y^4} \le \frac{\cancel{x^2}\cancel{y^2}\cdot |z|}{2\cancel{x^2}\cancel{y^2}} = \frac{|z|}{2}$$

$$x^4+y^4+\underset{\ge 0}{z^4} \ge x^4+y^4 \ge 2x^2y^2 \quad [\,x^2+y^2 \ge 2xy \iff x^2+y^2-2xy \ge 0\,]$$

$$0 \le |f(x,y,z)| \le \frac{|z|}{2}$$

$\xrightarrow{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 \xleftarrow{(x,y,z)\to(0,0,0)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0 \\ f(0,0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}^3$

Definiție!

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $m \ge 2$ și $x_0 \in D \cap D'$

Spunem că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i ($1 \le i \le m$) în punctul x_0 dacă f este derivabilă după direcția vectorului e_i în punctul x_0.

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R}$$

Ex. 5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2\cdot e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ $\quad$ puncte de extrem

Rezolvare:

$*$ f continuă pe $\mathbb{R}^*$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} -x = 0 \\ \lim f(x) = \lim x^2\cdot e^{-x} = 0\cdot 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ continuă în $x=0$

$\Big\} \Rightarrow f$ continuă pe $\mathbb{R}$

$x<0$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \cdot e^{-x} = 0\cdot 1 = 0$

$f(0) = 0$

* f derivabilă pe $\mathbb{R}^*$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1 = f'_s(0)$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2\cdot e^{-x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\cdot e^{-x} = 0 = f'_d(0)$

$\Rightarrow f$ nu e derivabilă în 0

$\Rightarrow f$ derivabilă pe $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ x\cdot e^{-x}(2-x), & x>0 \end{cases}$

$(x^2\cdot e^{-x})' = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x}) = x\cdot e^{x}(2-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 0 \text{ Fals} \\ x\cdot e^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ sau } x = 2 \end{cases}$

$x=0 \Downarrow$ Fals

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$- - -$	|	$+ + +$	0	$- - -$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0

$f'(1) = 1\cdot e^{-1}\cdot(2-1) = e^{-1} > 0$

$f'(-1) = -1$

$f'(3) = 3\cdot e^{-3}\cdot(2-3) = -3\cdot e^{-3} < 0$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} -x = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2\cdot e^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{LH}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$f(0) = 0$

$f(2) = 2^2\cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2}$

$x_1 = 0$ punct de minim local

$x_2 = 2$ punct de maxim local.