Seminar 2 – 13.10.2021.

* Fie $r, s \in \mathbb{N}^*$ a.î. $r+1 \le s$. Dacă $A_1, \dots, A_s$ sunt mulțimi finite având fiecare r elemente și intersecția oricăror $r+1$ dintre aceste mulțimi este nevidă, să se arate că $\bigcap_{i=1}^{s} A_i \neq \emptyset$.

Ex. 1: Fie $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \{na\}$. Arătați că f este injectivă.

Rez: Fie $m, n \in \mathbb{N}$ a.î. $f(m) = f(n)$.

$$\{ma\} = \{na\}$$

$$ma - [ma] = na - [na]$$

$$(m-n)a = \underbrace{[ma] - [na]}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (m-n)a \in \mathbb{Z} \\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow m-n = 0 \Rightarrow m = n.$$

$\Rightarrow f$ este injectivă.

Ex. 2: Fie M o mulțime și $A, B \subseteq M$. Definim $f: \mathcal{P}(M) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.
Arătați că:

a. f inj $\Leftrightarrow A \cup B = M$

b. f surj $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

c. f bij $\Leftrightarrow A = C_M B$. În acest caz, aflați f^{-1}!

Obs: $|\phi| = 0$

Dacă M este o mulțime finită, $|M| = m$, atunci
$|\mathcal{P}(M)| = 2^m \left(= C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^m\right)$
$\mathcal{P}(M)$ = mulțimea submulțimilor lui M.

$|\mathcal{P}(\phi)| = 2^0 = 1$, $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\} \overset{?}{\neq} \phi$
$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))| = 2$ $\quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$.

Rez: $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$.

a. „$\Rightarrow$" Pp. că f este injectivă. Trebuie să arătăm că $A \cup B = M$. Pp. că $A \cup B \neq M$ $(A \cup B \subsetneq M)$.

$\Rightarrow \exists\, x \in M$ a.î. $x \notin A \cup B$ $(x \notin A$ și $x \notin B)$.

$f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\phi, \phi)$
$f(\phi) = (\phi, \phi)$
$\left.\begin{array}{l} f(\phi) = f(\{x\}) \\ \phi \neq \{x\} \end{array}\right\}$ Abs. $\Rightarrow A \cup B = M$.
„contradicție"

„$\Leftarrow$" $A \cup B = M$. Pp. că f nu este injectivă

$\Rightarrow \exists\, X, Y \in \mathcal{P}(M)$ a.î. $f(X) = f(Y)$.
$X \neq Y$.

$\begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$

$X \neq Y \Rightarrow X \setminus Y \neq \phi$ sau $Y \setminus X \neq \phi$.

Putem presupune că $X \setminus Y \neq \phi \Rightarrow \exists\, x \in X \setminus Y$.

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} X \cap A = Y \cap A \\ x \in X \setminus Y \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin A \\ X \cap B = Y \cap B \Rightarrow x \notin B \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x \notin A \cup B = M \\ x \in X \subseteq M \end{array}$ Abs.

$$\left.\begin{aligned} X\cap A &= Y\cap A \\ x &\in X\setminus Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \notin A.$$

Explicație: Dacă $x\in A$, cum $x\in X$, atunci $x\in X\cap A$. Cum $x\notin Y$, atunci $x\notin Y\cap A$. Dar noi avem că $X\cap A = Y\cap A$.

b. f surj $\Leftrightarrow A\cap B=\phi$.

"$\Rightarrow$" Pp. că f este surjectivă. Arătăm că $A\cap B=\phi$.

Pp. că $A\cap B\neq\phi \Rightarrow \exists\, x\in A\cap B$.

$f(\{x\}) = (\{x\}\cap A, \{x\}\cap B) = (\{x\},\{x\})$

$(\phi,\{x\}) \overset{?}{=} f(X)$

Dacă da, $X\cap A=\phi$ și $\underline{X\cap B=\{x\}}$.

$\Rightarrow x\in X$ și $x\in B$.

$x\in A$, $x\in X \Rightarrow x\in A\cap X=\phi$ abs.

"$\Leftarrow$" $A\cap B=\phi$. Arătăm că f este surjectivă.

$f: \mathcal{P}(M)\to\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$, $f(X)=(X\cap A, X\cap B)$

$\operatorname{Im} f=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$

"$\subseteq$" $\operatorname{Im} f\subseteq\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$ evidentă

"$\supseteq$" $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\subseteq\operatorname{Im} f$.

Fie $(C,D)\in\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. Vrem $X\in\mathcal{P}(M)$ a.î.

$f(X)=(X\cap A, X\cap B)=(C,D)$.

$C\subseteq A$

$D\subseteq B$

$$\left.\begin{aligned} X\cap A=C &\Rightarrow C\subseteq X \\ X\cap B=D &\Rightarrow D\subseteq X \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{C\cup D\subseteq X}.$$

Luăm

$X=C\cup D$.

$f(C\cup D)=?$

$A\cap B=\phi$

$C\subseteq A \quad C\cap B=\phi \; (C\cap B\subseteq A\cap B=\phi)$

$D\subseteq B \quad D\cap A=\phi \quad D\cap A \; \cup\!|$

$f(C\cup D)=((C\cup D)\cap A,\ (C\cup D)\cap B)=$

$=(\underbrace{(C\cap A)}_{C}\cup\underbrace{(D\cap A)}_{\phi},\ \underbrace{(C\cap B)}_{\phi}\cup\underbrace{(D\cap B)}_{D})=$

$=(C,D)\in \operatorname{Im} f$

Exemplu: $M=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{1,2,3\},\ B=\{5,6\},\ A\cap B=\phi,\ A\cup B\subsetneq M.$

$(\{1,3\},\{6\})\in \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$

$f(\underbrace{\{1,3,6\}}_{=X})=f(X\cap A,\ X\cap B)=(\{1,3\},\{6\})$

$f(\{1,3,\underline{\underline{4}},6\})=(\{1,3\},\{6\})$

Obs. pt. b: Dacă $M\setminus(A\cup B)=K\neq\phi$

$f(C\cup D\cup L)=f(C,D),\ \forall\, L\subseteq K.$

$f(C\cup D\cup K)=(C,D)$

$A'=\{1,2\},\ B'=\{5\},\ K=\{3,4,6\}.$

$C'=\{1\},\ D'=\{5\}$

$f(C'\cup D')=(C',D')$

$f(C'\cup D'\cup K)=f(\{1,3,4,5,6\})=(\{1\},\{5\})$

T: Fie M, N mulțimi finite, $|M| = m$, $|N| = n$.

Se cere:

a. nr. funcțiilor $f: M \to N$. (n^m)

b. nr. funcțiilor injective $f: M \to N$ $(m \le n, A_n^m)$

c. nr. funcțiilor bijective $f: M \to N$ $(m = n, A_m^m = P_m)$

d. nr. funcțiilor surjective $f: M \to N$ $(m \ge n)$

e. nr. funcțiilor (<u>strict</u>) crescătoare $f: M \to N$. (C_n^m)

Hint d: Este mai ușor să numărăm fct. care NU sunt surjective, $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ (P.I.E.)

unde $A_i = \{f: M \to N \mid i \notin \operatorname{Im} f\}$, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$|A_i| = (n-1)^m$

Răspuns: $n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot 1^m$

Ex. 3: Fie M o mulțime finită, $f: M \to M$.

Atunci f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij.

Rez: $|M| = m$.

<u>f inj $\Leftrightarrow$ f surj</u>

"$\Rightarrow$" Pp. că f este injectivă.

Obs: $\operatorname{Im} f \subseteq M$.

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ domeniu}, |M| = m, f \text{ inj} \Rightarrow |\operatorname{Im} f| = m \\ \operatorname{Im} f \subseteq M, |M| = m \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = M$.

"$\Leftarrow$" Pp. că f este surj. Pp. că f nu este inj.

$\Rightarrow \exists\ x, y \in M,\ x \neq y$ a.î. $f(x) = f(y)$.

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Im} f| \leq n-1. \\ \text{Dar } |\operatorname{Im} f| = |M| = n \end{array}\right\} \text{Ⓧ}.$$