Seminar 5

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 9^{ax}-4\cdot 3^{ax+1}+12; & x<1 \\ -15x^2-ax+a & ; x\geq 1. \end{cases}$

Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă.

<u>Soluție.</u> f continuă pe $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$ (operații cu funcții elementare).

f continuă în $1 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=9^a-4\cdot 3^{a+1}+12=9^a-12\cdot 3^a+12.$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=-15-a+a=-15.$$

$f(1)=-15.$

f continuă în $1 \Leftrightarrow 9^a-12\cdot 3^a+12=-15 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3^a)^2-12\cdot 3^a+27=0.$

Notăm $3^a=y$.

$y^2-12y+27=0.$

$\Delta = 144 - 108 = 36.$

$\sqrt{\Delta} = 6.$

$$y_1 = \frac{12+6}{2} = 9$$

$$y_2 = \frac{12-6}{2} = 3.$$

$3^a = 9 \Leftrightarrow a = 2$

$3^a = 3 \Leftrightarrow a = 1.$

Deci, f este continuă în 1 dacă și numai dacă $a \in \{1; 2\}$.

Așadar, f este continuă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a \in \{1; 2\}$. $\square$

2. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcții continue în x_0 și $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x); & x \in \mathbb{Q} \\ g(x); & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că h este continuă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ $(= h(x_0))$.

Soluție. „$\Rightarrow$"

Presupunem că h e continuă în x_0. Arătăm că $f(x_0)=g(x_0)$.

$\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, (x_n)_n \subset \mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}=\mathbb{R} \Rightarrow \exists\, (y_n)_n \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

h continuă în $x_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} h(x_n) &= h(x_0) \\ \| \quad & \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) &\underset{\uparrow}{=} f(x_0). \end{aligned}$$

f continuă în x_0

Deci $h(x_0)=f(x_0)$.

h continuă în $x_0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} h(y_n) &= h(x_0) \\ \| \quad & \\ \lim_{n\to\infty} g(y_n) &\underset{\uparrow}{=} g(x_0). \end{aligned}$$

g continuă în x_0

Deci $h(x_0)=g(x_0)$.

Prin urmare $f(x_0)=g(x_0)\ \left(=h(x_0)\right)$.

"$\Leftarrow$"

Presupunem că $f(x_0)=g(x_0)\ \left(=h(x_0)\right)$. Arătăm că

h e continuă în x_0.

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

$$|h(x_n)-h(x_0)| = \begin{cases} |f(x_n)-f(x_0)| \ ; & x_n \in \mathbb{Q} \\ |g(x_n)-g(x_0)| \ ; & x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Avem $|h(x_n)-h(x_0)| \le \underbrace{|f(x_n)-f(x_0)|}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}} + \underbrace{|g(x_n)-g(x_0)|}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}$

0 (deoarece f e continuă în x_0)

0 (deoarece g e continuă în x_0).

Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = h(x_0)$, i.e. h e continuă în x_0. □

3. Studiați continuitatea funcțiilor $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \ ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ ; & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

<u>Soluție</u>. f continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= |x|\cdot\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} \leq |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

≤ 1 (Explicație: $\sqrt{x^2+y^2}\geq\sqrt{y^2}=|y|$)

Deci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, i.e. f este continuă în $(0,0)$. $\square$

b) $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

<u>Soluție</u>. f continuă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ (operații cu funcții elementare).

Studiem continuitatea lui f în $(0,0)$.

Fie $(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cancel{n^2}}\cdot\frac{\cancel{n^2}}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

Deci f nu este continuă în $(0,0)$. $\square$