① Să se studieze continuitatea funcției

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unde $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in A \\ x^3 & x \notin A \end{cases}$

în cazurile

1) $A = [0, 1)$ 2) $A = \mathbb{Q}$ 3) $A = \mathbb{Q} \cup (7, 8)$

(continuitate + derivabilitate)

4) $A = \{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \}$

② Să se studieze continuitatea + derivabilitatea

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 3x - 2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ x^4 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

③ Fie $g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) & x \notin A. \end{cases}$ Să se studieze continuitatea

și derivabilitatea lui f dacă

a) $A = \mathbb{Q}$ b) A este o mulțime oarecare $\subset \mathbb{R}$.

④ Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} x^5 & x \in \mathbb{Q} \quad x \leq 0 \\ x^2 & x \notin \mathbb{Q} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2 + \left[\frac{1}{x}\right]^2} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

⑤ Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x(x-1)[x]$$

⑥. Să se studieze continuitatea funcțiilor

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} x & x,y \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{y} & \text{rest} \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x,y \in \mathbb{Q} \\ 1 & x,y \notin \mathbb{Q} \\ x^2-y^2+1 & \text{rest} \end{cases}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f = (f_1, f_2)$ unde $f_1(x,y) = \begin{cases} x^2 & x,y \in \mathbb{Q} \\ 1-y^2 & \text{rest} \end{cases}$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 & x,y \notin \mathbb{Q} \\ 1-y^2 & \text{rest.} \end{cases}$$

6b).

$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ $\quad B = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ $\quad C = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$

$= (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q} \cup (\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$

$A' = B' = C' = \mathbb{R}^2$

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b \\ (x,y) \in A}} f(x, y) = a^2 + b^2$, $\quad \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,b) \\ (x,y) \in B}} f(x,y) = 1$

$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (a,b) \\ (x,y) \in C}} f(x,y) = a^2 - b^2 + 1$ $\quad f(a,b) \in \{a^2+b^2, 1, a^2 - b^2 + 1\}$

---

f este contin $(a, b) \Leftrightarrow$ $\quad a^2 + b^2 = 1 = a^2 - b^2 + 1 \Leftrightarrow$

$a^2 + b^2 = 1$ și $a^2 = b^2 \Leftrightarrow$ $\quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ sau $a = -b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

7) Să se calculeze limitele:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{tg(x^4+y^4)}{x^4+y^4}$ b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{arctg(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{arcsin(x^2+(y-1)^2)}{4x^2+4(y-1)^2}$

8) Să se studieze continuitatea funcțiilor

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ date de

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^6+y^6} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$ $n,m\in\mathbb{N}^*$

$(n,m)\in\{(5,1),(6,1),(5\ 2)\ (3,4)\ (3,3)\ (4,2)\}$

2.2 $A = \mathbb{Q}$. $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $A' = B' = \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} x^4 = a^4$$

$f(x) \in \{ a^2, a^4 \}$

f cont in a $\Leftrightarrow$

$a^2 = a^4$

$\Rightarrow$ f cont in a $\Leftrightarrow$ $a \in \{0, 1, -1\}$.

$a \notin \{0, 1, -1\} \Rightarrow$ f disc in a.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{Q}}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \notin \mathbb{Q}}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 1, x \notin \mathbb{Q}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = 4$$

$\neq \Rightarrow \nexists f'(1)$

$$\lim_{x \to 1, x \in \mathbb{Q}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

analog la -1.

7 a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(x^4+y^4)}{x^4+y^4} = \lim_{u\to 0} \frac{tg\, u}{u} = 1$$

$u = x^4+y^4$.

8) a) și b) f cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pentru că este raport de funcții continue (polinomiale).

b) $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| \le |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |x| \cdot \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le |x| \to 0$

$\le \frac{1}{2}$ inegalitatea $x^2+y^2 \geq 2xy$

a) V1 $x_n = y_n = \frac{1}{n}$ $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ f disc.

$x_n = \frac{1}{n}$ $y_n = 0$ $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \to 0$

V2 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y=ax}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, ax) =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{x^2(1+a^2)} = \frac{a}{1+a^2}$ dep de a $\Rightarrow$ disc (nu există limita).