Lista 1

1. Fie M și N două mulțimi, iar $f: M \to N$ o funcție. Între mulțimile $\mathcal{P}(M)$ și $\mathcal{P}(N)$ se definesc funcțiile $f_*: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(N)$, dată de $f_*(X) = f(X)$ (imaginea directă a lui X) și $f^*: \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$, dată de $f^*(Y) = f^{-1}(Y)$ (preimaginea lui Y prin f). Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
   - i) f este injectivă;
   - ii) f_* este injectivă;
   - iii) $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(M)}$;
   - iv) f^* este surjectivă;
   - v) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$, pentru orice $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(M)$;
   - vi) $f(\complement_M X) = \complement_N(f(X))$, pentru orice $X \in \mathcal{P}(M)$;
   - vii) Dacă $g, h: L \to M$ sunt funcții a.î. $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$.

2. Cu notațiile problemei precedente să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
   - i) f este surjectivă;
   - ii) f_* este surjectivă;
   - iii) $f_* \circ f^* = 1_{\mathcal{P}(N)}$;
   - iv) f^* este injectivă;
   - v) $\complement_N(f(X)) \subset f(\complement_M X)$, pentru orice $X \in \mathcal{P}(M)$;
   - vi) Dacă $g, h: N \to P$ sunt funcții a.î. $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

3. Să se studieze injectivitatea (surjectivitatea; bijectivitatea) funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în funcție de parametrul real m:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & x \le 0 \\ mx, & x \in (0,1) \\ m^2 - x, & x \ge 1 \end{cases}$$

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + m^2\{x\}$ este injectivă.

5. Să se arate că funcția $f: \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}$, $f(x+iy) = x + (-1)^{x+y}$ este surjectivă, unde $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi, a, b \in \mathbb{Z}\}$ și $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$.

6. Să se determine funcțiile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective și strict monotone cu proprietatea că $f(f(n)) \ge f(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

7. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4[x] + [2x]$ e bijectivă și să se afle funcția ei inversă f^{-1}.

8. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=az+b\bar{z}$, $a,b\in\mathbb{C}$.

a) Să se arate că f este bijectivă $\iff |a|\neq|b|$.

b) Să se calculeze f^{-1}.

9. Să se determine $p\in\mathbb{N}^*$ a.î. funcția $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$,

$$f(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n+1}{p}\right]+\left[\frac{n+2}{p}\right]$$ să fie bijectivă.

10. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcție cu următoarele proprietăți:

i) f este strict crescătoare;

ii) $f(2)=2$;

iii) $f(mn)=f(m)f(n)$ pentru orice $m,n\in\mathbb{N}$ prime între ele.

Să se arate că $f=1_{\mathbb{N}}$.

11. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi finite având fiecare r elemente, unde $r\in\mathbb{N}^*$. Dacă $n\geq r+1$ și intersecția oricăror $r+1$ dintre ele este nevidă, atunci $\bigcap_{i=1}^{n} A_i\neq\emptyset$.

12. Fie $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ a.î. $\max(f,g)$ este surjectivă și $\min(f,g)$ este injectivă. Să se arate că $f=g$.

13. Să se arate că funcția $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definită prin

$$f(m,n)=\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}+m$$ este o funcție bijectivă.

14. Fie $m,n\in\mathbb{N}$ cu proprietatea că $n\geq1$ și $m\leq 2n$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f:\{1,2,\dots,2n\}\to\{1,2,\dots,2n\}$ cu proprietatea că exact m dintre numerele $1+f(1), 2+f(2), \dots, 2n+f(2n)$ sunt impare.

15. Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(f(n))+f(n)=2n+3$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că f este injectivă.

b) Să se determine f.

16. Fie A și B 2 mulțimi finite cu $|A|=a$, $|B|=b$. Calculați:

i) Numărul funcțiilor strict crescătoare de la A la B.

ii) Numărul funcțiilor crescătoare de la A la B.

17. Fie $M=\{f \mid f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\},\ f \text{ injectivă și } f(i)\neq i\ (\forall) i=\overline{1,n}\}$.

Determinați $|M|$.