

CURS 8

Logică Matematică și Computațională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SEMANTICA LOGICII PROPOZIȚIONALE

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă dacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ dacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 7.13

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Lema 8.1

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Demonstrație. Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

- (1₀) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.
- (2₀) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0 , avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că P_0 este satisfăcută. În cazul (1₀) este evident. Să considerăm cazul (2₀). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ . Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e . Rezultă că $e \models \Delta$ și, din faptul că $e \models \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Demonstrație. (continuare)

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ a.î. P_n este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î.
 $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ și $e(v_{n+1}) = 0$.

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1} , avem

$e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ implică $e(v_{n+1}) = 1$.

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că P_{n+1} este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ . Prin urmare, conform P_n , există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Din (2_{n+1}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. □

Teorema 8.2 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule,

Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Demonstrație.

" \Rightarrow " Evident.

" \Leftarrow " Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\bar{e} : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad \bar{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că \bar{e} este model al lui Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $\text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ , putem aplica Proprietatea P_k pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Atunci $\bar{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(\varphi)$. Aplicând Propoziția 6.1, rezultă că $\bar{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\bar{e} \models \varphi$.

Prin urmare, \bar{e} este model al lui Γ , deci Γ este satisfiabilă.

SINTAXA LOGICII PROPOZIȚIONALE

Axiomele logice.

Mulțimea *Axm* a **axiomelor** lui *LP* constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție.

Pentru orice formule φ , ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de definiție inductivă.

Definiția 8.3

Γ -teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

- (T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.
- (T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.
- (T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.
- (T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ .

Notății.

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor
Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	\Leftrightarrow	φ este Γ -teoremă
$\vdash \varphi$	\Leftrightarrow	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	\Leftrightarrow	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 8.4

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația \vdash , obținem

Propoziția 8.5

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

O definiție alternativă a Γ -teoremelor:

Definiția 8.6

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

- (i) $Axm \subseteq \Sigma$;
- (ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;
- (iii) Σ este închisă la modus ponens:
dacă $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Versiunea 1.

Fie P o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface P astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P ;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P , atunci ψ are proprietatea P .

Versiunea 2.

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ ;
- (iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziția 8.7

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.
- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Delta \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstrație. Exercițiu ușor.

Definiția 8.8

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O \emptyset -demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 8.9

Dacă $\theta_1, \dots, \theta_n$ este o Γ -demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Definiția 8.10

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ -demonstrației.

Propoziția 8.11

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

Demonstrație. [Exercițiu suplimentar.](#)

Propoziția 8.12

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ , $\Gamma \vdash \varphi$ dacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Demonstrație. " \Leftarrow " Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 8.7 (i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

" \Rightarrow " Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 8.11, φ are o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \dots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \dots, \theta_n = \varphi$ este o Σ -demonstrație a lui φ , deci $\Sigma \vdash \varphi$. □

Propoziția 8.13

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 8.5.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 8.5.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 8.5.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 8.5.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4) □

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducției 8.14

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Propoziția 8.15

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (1)$$

Demonstrație. Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- | | | |
|-----|--|---------------------|
| (1) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ | Propoziția 8.5.(ii) |
| (2) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 8.5.(ii) |
| (3) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ | Propoziția 8.5.(ii) |
| (5) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ | (MP): (3), (4). |





IN CS, IT CAN BE HARD TO EXPLAIN
THE DIFFERENCE BETWEEN THE EASY
AND THE VIRTUALLY IMPOSSIBLE.

Pe data viitoare!

Conținutul tehnic al acestui curs se regăsește în cursul de *Logică Matematică și Computațională*
al prof. Laurențiu Leuștean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparține xkcd.