

Seminar 1

(S1.1) Fie T o mulțime și $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ și $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.

Demonstrație: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$.
Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. \square

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ și $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relație binară pe A . Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R ? Care dintre relațiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relația subiacentă unei funcții de la A la A ?

Demonstrație: Obținem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relațiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu poate descrie o funcție de la A la A , deoarece

- (i) $(a, b) \in R$ și $(a, c) \in R$;
- (ii) $(a, a) \in R^{-1}$ și $(a, b) \in R^{-1}$;
- (iii) nu există y astfel încât $(d, y) \in R \circ R$.

De asemenea, se observă că o relație “validă” ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relațiile de mai sus. \square

(S1.3) Fie X o mulțime. Să se arate că nu există o funcție surjectivă cu domeniul X și codomeniul $\mathcal{P}(X)$.

Demonstrație: Presupunem că ar exista, și fie $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulțimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicție. \square

(S1.4)

- (i) Demonstrați că orice intervale deschise (a, b) , (c, d) ale lui \mathbb{R} sunt echipotente.
- (ii) Demonstrați că $(0, 1)$, $(0, 1]$, $[0, 1)$, $[0, 1]$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Demonstrație:

- (i) Fie funcția

$$f : (a, b) \rightarrow (c, d), \quad f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{pentru orice } x \in (a, b).$$

Dacă $a < x < b$, avem că $0 < x - a < b - a$ și $0 < \frac{d-c}{b-a}(x-a) < d-c$. Adăugând c , rezultă că funcția noastră este bine definită, i.e. valoarea dată de noi pentru $f(x)$ se află într-adevăr în (c, d) . Definim funcția

$$g : (c, d) \rightarrow (a, b), \quad g(x) = \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a \quad \text{pentru orice } x \in (c, d).$$

Se observă ușor că f și g sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, (a, b) și (c, d) sunt echipotente.

- (ii) Știm că $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ este bijectivă, iar din punctul anterior avem că $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ este echipotent cu $(0, 1)$.

O soluție directă este: se ia funcția $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definită, pentru orice $x \in (0, 1)$, prin:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{x}, & \text{dacă } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-x} - 2, & \text{altminteri} \end{cases}$$

ce are inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, prin:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2-y}, & \text{dacă } y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2+y}, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și \mathbb{R} sunt echipotente.

Se ia apoi funcția $h : (0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in (0, 1]$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $h^{-1} : (0, 1) \rightarrow (0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$h^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-1}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1]$ și $(0, 1)$ sunt echipotente.

Considerăm apoi funcția $j : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$, definită, pentru orice $x \in [0, 1]$, prin:

$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{dacă } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Inversa sa $j^{-1} : (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ este definită, pentru orice $y \in (0, 1)$, prin:

$$j^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{n-2}, & \text{dacă există } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\} \text{ a.î. } y = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{dacă } y = \frac{1}{2} \\ y, & \text{altminteri} \end{cases}$$

Prin urmare, $(0, 1)$ și $[0, 1]$ sunt echipotente.

În sfârșit, se observă ușor că funcția $F : (0, 1] \rightarrow [0, 1)$, $F(x) = 1 - x$ este bijectivă (inversa lui F fiind tot F). Prin urmare, $(0, 1]$ și $[0, 1)$ sunt echipotente.

□