Noţiunea de vecinătate a unui punct din $\overline{\mathbb{R}}$

Definiţie. *Mulţimea* $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte vecinătate a lui* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *dacă:*
i) cazul $x_0 \in \mathbb{R}$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $(x_0 - \varepsilon, x_0 - +\varepsilon) \subseteq V$*;*
ii) cazul $x_0 = -\infty$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $[-\infty, -\varepsilon) \subseteq V$*;*
iii) cazul $x_0 = \infty$*: există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $(\varepsilon, \infty] \subseteq V$*.*

Notaţie. *Vom nota mulţimea vecinătăţilor lui* x_0 *cu* $\mathcal{V}_{x_0}$.

Exemple
1. Deoarece $(-1, 1) \subseteq (-2, \infty)$, deducem că $(-2, \infty) \in \mathcal{V}_0$.
2. Deoarece nu există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(-2 - \varepsilon, -2 + \varepsilon) \subseteq (-2, \infty)$, deducem că $(-2, \infty) \notin \mathcal{V}_{-2}$.
3. Deoarece $[-\infty, -1) \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, deducem că $\overline{\mathbb{R}} \in \mathcal{V}_{-\infty}$.

Temă
1. Să se determine valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:
a) $(-1, 1) \cup \{2\} \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$;
b) $(-1, 1) \in \mathcal{V}_0$;
c) $[0, 1) \in \mathcal{V}_0$;
d) $\mathbb{Z} \in \mathcal{V}_0$;
d) $(-1, \infty) \in \mathcal{V}_1$.
2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. Să se arate că există $U \in \mathcal{V}_a$ şi $V \in \mathcal{V}_b$ astfel încât $U \cap V = \emptyset$.

Şiruri de numere reale / monotonie şi mărginire

Definiţie. *O funcţie* $x : \mathbb{N} \to M$ *se numeşte şir de elemente din mulţimea* M*.*

Notaţii. *Funcţia* $x : \mathbb{N} \to M$ *se notează cu* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *având în vedere faptul că* $x(n) \overset{not}{=} x_n$*. Dacă dorim să subliniem faptul că funcţia* x *are codomeniul* M*, atunci vom scrie* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M$*. Domeniul* $\mathbb{N}$ *al funcţiei* x *se poate înlocui cu o mulţime de forma* $\{k, k+1, ...\}$*, unde* $k \in \mathbb{N}$*, caz în care vom scrie* $(x_n)_{n \geq k}$*.*

Definiţie. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte:*
- *crescător dacă*

$$x_n \leq x_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict crescător dacă*

$$x_n < x_{n+1},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *descrescător dacă*

$$x_{n+1} \leq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *strict descrescător dacă*

$$x_{n+1} < x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- *monoton dacă este crescător sau descrescător;*
- *strict monoton dacă este strict crescător sau strict descrescător.*

Exemple

1. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = n^2-3n+1$, este crescător deoarece $x_{n+1}-x_n = 2(n-1) \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_n = \frac{2^n}{n!}$, este descrescător deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, nu este monoton deoarece $x_1 < x_2 > x_3$.

Temă

Să se studieze monotonia şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde:
i) $x_n = \frac{2n+5}{n+3}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
ii) $x_n = \frac{n+1}{2n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
iii) $x_n = (-1)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
iv) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
v) $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiţie. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte:*
- *mărginit superior dacă* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este majorată, i.e. dacă există* $M \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$x_n \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

- *mărginit inferior dacă* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este minorată, i.e. dacă există* $m \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$m \leq x_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

- *mărginit dacă* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *este mărginită, i.e. există* $m, M \in \mathbb{R}$ *astfel încât*

$$m \leq x_n \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

1. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2}$, este mărginit deoarece $0 \leq x_n \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $x_n = \frac{n^2}{n+1}$, nu este mărginit superior deoarece $n-1 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar este mărginit inferior deoarece $0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Temă

Să se studieze mărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde:

i) $x_n = \frac{5n^2}{n^2+2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

ii) $x_n = \frac{n}{n+1} \sin n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

iii) $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

iv) $x_n = \frac{\sin 1}{3} + \frac{\sin 2}{3^2} + ... + \frac{\sin n}{3^n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

v) $x_n = \frac{n^3}{n^2+n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Limita unui şir de numere reale

Definiţie. *Un element* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *se numeşte o limită a şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *dacă în afara oricărei vecinătăţi* V *a lui* l *se află un număr finit de termeni ai şirului (deci, în interiorul lui* V *se găsesc toţi termenii şirului de la un rang încolo), i.e pentru orice* $V \in \mathcal{V}_l$ *există* $n_V \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n \in V$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_V$.

Remarcă. *Pentru un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *există cel mult un element* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ *care satisface cerinţele definiţiei de mai sus. În cazul existenţei acestuia, el se va nota cu* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Definiţie. *Un şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *se numeşte:*

- convergent dacă există $l \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$;

- divergent dacă nu este convergent (i.e. fie nu există există $l \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, *fie* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *fie* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$*).*

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l \in \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $|x_n - l| < \varepsilon$ $(\Longleftrightarrow l \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon))$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

(*pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* n_ε *astfel încât pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$ *să avem* $|x_n - l| < \varepsilon$)

($\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon$ *astfel încât* $\forall n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$)

Nota. Un sir este convergent daca termenii lui aproximeaza limita sirului oricat de bine de la un anumit rang.

Propoziţie. *Pentru* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n > \varepsilon$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Propoziţie. *Pentru* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $x_n < -\varepsilon$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$.

Exemplu

Folosind definiţia, vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$.

Trebuie să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $\left|\frac{n}{n-1} - 1\right| < \varepsilon$. Inegalitatea $\left|\frac{n}{n-1} - 1\right| < \varepsilon$ este echivalentă cu $\frac{1}{n-1} < \varepsilon$. i.e. cu $n > 1 + \frac{1}{\varepsilon}$. Prin urmare, putem alege $n_\varepsilon = [1 + \frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

Definiţie. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de elemente din* M, *iar* $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ *este un şir strict crescător de numere naturale, atunci şirul, din* M, *dat de* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, *se numeşte un subşir al său.*

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

α) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ *şi* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *este un subşir al lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *atunci* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

β) *Dacă există* $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $l_1 \neq l_2$ *şi subşirurile* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *şi* $(x_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ *ale lui* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *astfel încât* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l_1$ *şi* $\lim\limits_{l\to\infty} x_{n_l} = l_2$, *atunci* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu are limită.*

Propoziţie. *Orice şir convergent de numere reale este mărginit.*

Demonstraţie.

Considerăm un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la l. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Alegem $\varepsilon = 1$. Atunci pentru orice $n \geq n_1$ avem $|x_n| < |l| + 1$. Fie $d = 1 + \max\{|l| + 1, |x_0|, |x_1| .., |x_{n_1}|\}$. Atunci $|x_n| < d$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple fundamentale de şiruri care au limită

1. *Fie* $a \in \mathbb{R}$ *şi* $x_n = a^n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

α) *Dacă* $a \leq -1$, *atunci* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nu are limită.*

β) *Dacă* $-1 < a < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

γ) *Dacă* $a = 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

δ) *Dacă* $a > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2. *Fie* $a \in \mathbb{R}$ *şi* $x_n = n^a$ *pentru orice* $n \geq 1$.

α) *Dacă* $a < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

β) *Dacă* $a = 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

γ) *Dacă* $a > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Temă

1. Folosind definiţia, să se arate că:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+3} = 1$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty$.

2. Să se arate că următoarele şiruri nu au limită:

i) $(1 + (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$;

ii) $(\sin \frac{n\pi}{2})_{n\in\mathbb{N}}$;

iii) $(\{\frac{n}{3}\})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Să se arate că dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are proprietatea că există $l \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = l$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Operaţii cu şiruri care au limită

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$. *Atunci:*

α)

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = l_1 + l_2 = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

β)

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = l_1 l_2 = (\lim_{n\to\infty} x_n)(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

În particular, avem

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha l_1 = \alpha(\lim_{n\to\infty} x_n),$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = l_1 - l_2 = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Demonstraţie.

α) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'_\varepsilon$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n''_\varepsilon$.

Notam $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$, pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$|(x_n + y_n) - (l_1 + l_2)| = |x_n - l_1 + y_n - l_2| \leq |x_n - l_1| + |y_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

β) Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l_1| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n'_\varepsilon$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|y_n - l_2| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n''_\varepsilon$.

Deoarece şirurile şi sunt convergente rezultă că există $M > 0$ astfel încât $|x_n| < M$ şi $|y_n| < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Notăm $n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$, pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$|x_n y_n - l_1 l_2| = |x_n y_n - x_n l_2 + x_n l_2 - l_1 l_2| \leq |x_n y_n - x_n l_2| + |x_n l_2 - l_1 l_2| \leq$
$\leq |x_n|\,|y_n - l_2| + |l_2|\,|x_n - l_1| \leq M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon.$

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, $l_2 \neq 0$ *şi* $y_n \neq 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Demonstraţie.

Folosind propoziţia anterioară este suficient să facem demonstraţia în cazul $x_n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Fie $a = \inf\{|y_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Evident $a \geq 0$. Dacă $a = 0$ atunci rezulta ca există un subşir $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = 0$, deci $l_2 = 0$ în contradicţie cu ipoteza. În concluzie $a > 0$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|y_n - l_2| < \varepsilon$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{l_2}\right| = \left|\frac{l_2 - y_n}{y_n l_2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{a^2}.$$

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, $l_1 > 0$ *şi* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{y_n} = l_1^{l_2} = (\lim_{n\to\infty} x_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, $l_1, l_2 > 0$ & $l_1 \neq 1$ *şi* $x_n, y_n > 0$ & $x_n \neq 1$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \log_{x_n}(y_n) = \log_{l_1}(l_2) = \log_{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}(\lim_{n\to\infty} y_n).$$

Remarcă. *Propoziţiile anterioare se extind în cazul în care $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, ţinând cont de următoarele relaţii:*

-

$$\infty + a = a + \infty = \infty,$$

pentru orice $a \in (-\infty, \infty]$

-

$$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty,$$

pentru orice $a \in [-\infty, \infty)$

-

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty,$$

pentru orice $a \in (0, \infty]$

-

$$\infty \cdot a = a \cdot \infty = -\infty,$$

pentru orice $a \in [-\infty, 0)$

-

$$(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = -\infty,$$

pentru orice $a \in (0, \infty]$

-

$$(-\infty) \cdot a = a \cdot (-\infty) = \infty,$$

pentru orice $a \in [-\infty, 0)$

-

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$

-

$$a^{\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in (-1, 1)$

-

$$a^{\infty} = \infty,$$

pentru orice $a \in (1, \infty]$

-

$$a^{-\infty} = 0,$$

pentru orice $a \in (1, \infty]$

-

$$\infty^a = \infty,$$

pentru orice $a \in (0, \infty]$

-

$$\infty^a = 0,$$

pentru orice $a \in [-\infty, 0)$

NU SUNT DEFINITE următoarele operaţii:

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0.$$

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

Avem

$$\sqrt{n^2+2n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{n^2+2n}+n)} =$$

$$= \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1},$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1$$

Temă. Să se calculeze:
i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{4}{3^n}+10)$
ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+1}{6n^3+n+4}$
iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2}$
iv) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{n})$
v) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)})$
vi) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{n}{(n+1)!})$
vii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$
viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n^3+6n}{n^3+n^2+n+1}$
ix) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2+n21)}{\ln(n^2+n+1)}$
x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$.

Limita şirurilor monotone

Propoziţie.
α) Orice şir de numere reale care este crescător şi nemărginit are limita ∞.
β) Orice şir de numere reale care este descrescător şi nemărginit are limita $-\infty$.

Teorema convergenţei monotone (Weierstrass)
α) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ *un şir crescător şi mărginit. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}.$$

β) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{R}$ *un şir descrescător şi mărginit. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\inf\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\in\mathbb{R}.$$

Temă
1. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n})=\infty$.
Indicaţie. Cu notaţia $x_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, se poate arăta că $x_{2^n}>\frac{n}{2}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ceea ce implică nemărginirea şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Să se arate că şirului $(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Trecerea la limită în inegalităţi

Propoziţie

α) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ convergente astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

β) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ care au limită astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Avem:

$\beta 1$) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;

$\beta 2$) dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Lema cleştelui. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ astfel încât $x_n \leq y_n \leq z_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \overset{not}{=} l \in \overline{\mathbb{R}}$.* Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

Exemplu. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\pi]}{n}$.

Conform inegalităţii părţii întregi avem $n\pi - 1 < [n\pi] \leq n\pi$, de unde

$$\pi - \frac{1}{n} < \frac{[n\pi]}{n} \leq \pi, \tag{*}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(\pi - \frac{1}{n}) = \pi$, conform lemei cleştelui, având în vedere $(*)$, concluzionăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[n\pi]}{n} = \pi$.

Temă

1. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(n - arctg\ n)$.

3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+n}\}$.

Numărul e

Propoziţie. *Şirul $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător şi mărginit, iar limita sa se notează cu e.*

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Observaţie. *Pentru orice şir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *astfel încât* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, *avem:*

i)

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e;$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1;$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a,$$

pentru orice $a > 0$;

iv)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^{\alpha}-1}{x_n} = \alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple

1. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$.

Avem

$$(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = [(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}]^{-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} =$$

$$= [(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}]^{-\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

găsim că

$$\lim_{n\to\infty}[(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}] = e.$$

Cum

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2},$$

conchidem că

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$.

Deoarece

$$n(\sqrt[n]{2}-1) = \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, concluzionăm că

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \ln 2.$$

Temă

1. Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n^2+n+1}{n^2+1})^n$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}}{2})^n$.

2. Să se arate că:

a) $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

c) şirul $(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent (limita sa se numeşte constanta lui Euler);

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}) = \ln 2$.

Propoziţie. *Şirurile* $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *şi* $(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ *sunt convergente şi au aceeaşi limită (notată cu* e*).*

Demonstraţie.

Afirmaţia 1. *Şirul* $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este strict crescător.*

Justificarea afirmaţiei 1. Conform inegalităţii mediilor, avem $((1+\frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$, i.e. $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Afirmaţia 2. *Şirul* $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este mărginit superior.*

Justificarea afirmaţiei 2. Să observăm că $C_n^k \frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ şi orice $k \in \{1, ..., n\}$. Prin urmare, avem $(1 + \frac{1}{n})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} < \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \frac{1}{1!} + (\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)\cdot n}) = 2 + (1 - \frac{1}{n}) = 3 - \frac{1}{n} < 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Atunci, având în vedere cele două afirmaţii, conform Teoremei convergenţei monotone, şirul $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Afirmaţia 3. *Notând cu e limita şirului $((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avem $(1+\frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < e$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.*

Justificarea afirmaţiei 3. Pe de o parte, după cum am observat mai sus, avem

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}, \tag{1}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$.

Pe de altă parte, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 2$, avem $(1 + \frac{1}{m})^m = 1 + C_m^1 \frac{1}{m} + ... + C_m^n \frac{1}{m^n} + C_m^{n+1} \frac{1}{m^{n+1}} + ... + C_m^m \frac{1}{m^m}$, deci $1 + C_m^1 \frac{1}{m} + ... + C_m^n \frac{1}{m^n} < (1 + \frac{1}{m})^m$, de unde, prin trecere la limită după m, având în vedere că $\lim\limits_{m\to\infty} C_m^k \frac{1}{m^k} = \frac{1}{k!}$ pentru un k fixat în mulţimea $\{1, 2, ..., n\}$, obţinem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < e. \tag{2}$$

Atunci, din (1) şi (2), obţinem inegalitatea din concluzia afirmaţiei.

Bazându-ne pe Afirmaţia 3, deducem că şirul $(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}) = e$. $\square$

Propoziţie. e este iraţional.

Metode complementare de aflare a limitei unui şir

Propoziţie. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
α) Dacă $l < 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
β) Dacă $l > 1$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exemplu. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, unde $\alpha > 0$ şi $a > 1$.

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \frac{1}{a} < 1$, conform propoziţiei de mai sus, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

Lema lui Stolz-Cesàro. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *astfel încât:*
i) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este strict crescător;*
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$;
iii) există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci:
α) există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$;
β)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Corolar. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,\infty)$ *astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Atunci:*
α) există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$;
β)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Exemple
1. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})-(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}((n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n})}{3n^2+3n+1} = \frac{2}{3},$$

conform lemei lui Stolz-Cesàro, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

2. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e,$$

conform corolarului lemei lui Stolz-Cesàro, deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Temă

1. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

2. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}...\sin\frac{\pi}{n}}$.

3. Să calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, unde $a > 0$ şi $a \neq e$.