Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de anul acesta de la Mincu
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Fie $A = \{ 3, 6, 7, 9 \}$. Definim funcția $f : A \to \mathscr{P}(A)$, unde $f(x) =$ complementul mulțimii $\{ x \}$. Scrieți explicit cât este $f(3), f(6), f(7), f(9)$.

Demonstrație.

$$\begin{aligned} f(3) &= C_A \{ 3 \} = \{ 6, 7, 9 \} \\ f(6) &= C_A \{ 6 \} = \{ 3, 7, 9 \} \\ f(7) &= C_A \{ 7 \} = \{ 3, 6, 9 \} \\ f(9) &= C_A \{ 9 \} = \{ 3, 6, 7 \} \end{aligned}$$

□

Exercițiul 2. Fie A o mulțime. Demonstrați că nu poate exista nicio funcție *surjectivă* de la A la $\mathscr{P}(A)$.

Demonstrație. Demonstrăm afirmația prin reducere la absurd.

Fie o mulțime A pentru care există o funcție surjectivă $f : A \to \mathscr{P}(A)$.

Din definiție, $f(x)$ este o submulțime a lui A. Atunci, pentru orice $x \in A$, avem două cazuri:

- fie $x \in f(x)$
- fie $x \notin f(x)$

Notăm cu $T = \{ x \in A \mid x \notin f(x) \}$.
Știm că T este o submulțime a lui A. Deci $T \in \mathscr{P}(A)$.
Deoarece f este surjectivă, există un $a \in A$ pentru care $f(a) = T$.
Acum ne punem întrebarea dacă $a \in T$:

- dacă $a \in T$, atunci din definiția lui T avem că $a \notin f(a)$, deci $a \notin T$
- dacă $a \notin T$, atunci din definiția lui T avem că $a \in f(a)$, deci $a \in T$

În ambele cazuri, ajungem la **contradicție**. Deci nu poate exista o astfel de funcție. □

Exercițiul 3. Fie $f : A \to B$ o funcție. Demonstrați că relația $a \, \rho_f \, b \iff f(a) = f(b)$ este de echivalență. Aceasta se numește *relația de echivalență asociată funcției f*.

Demonstrație. Pentru a arăta că ρ_f este relație de echivalență, arătăm că este:

- *reflexivă*: fie $a \in A$, avem că $f(a) = f(a)$, deci $a \, \rho_f \, a$.

- *simetrică*: fie $a, b \in A$ astfel încât $a \,\rho_f\, b$. Atunci $f(a) = f(b)$, de unde și $f(b) = f(a)$. Deci $b \,\rho_f\, a$.

- *tranzitivă*: fie $a, b, c \in A$ astfel încât $a \,\rho_f\, b$ și $b \,\rho_f\, c$. Atunci avem că $f(a) = f(b)$ și $f(b) = f(c)$. Deci și $f(a) = f(c)$, de unde rezultă că $a \,\rho_f\, c$.

□

Exercițiul 4. Fie $f : A \to B$. Demonstrați că f este injectivă dacă și numai dacă relația asociată ρ_f conține numai elemente de forma (x, x) (adică $x \,\rho_f\, y$ doar dacă x, y sunt egale).

Demonstrație. Mai întâi demonstrăm implicația directă.

Fie f o funcție injectivă. Vrem să arătăm că toate numerele care sunt în relație sunt egale, deci că nu există $x \,\rho_f\, y$ cu $x \neq y$. Să presupunem prin reducere la absurd că ar exista $x \neq y \in A$ pentru care $x \,\rho_f\, y$. Din definiția relației, avem că $f(x) = f(y)$. Din definiția injectivitățtii, trebuie ca $x = y$. Ajungem la o contradicție.

Acum demonstrăm implicația inversă.

Știm că relația este $\rho_f = \{ (x, x) \mid x \in A \}$. Fie $x, y \in A$ pentru care $f(x) = f(y)$. Atunci din definiția lui ρ_f avem că $x \,\rho_f\, y$. Toate elementele din relație sunt de forma (x, x), deci $x = y$. De aici rezultă că f este injectivă. □

Exercițiul 5. Fie $A = \{ 3, -2, 7, 15, 21 \}$.

Verificați care dintre următoarele sunt partiții ale lui A:

- $P_1 = \{ \{ 3, 21 \}, \{ -2, 7, 15 \} \}$
- $P_2 = \{ \{ -2, 3 \}, \varnothing, \{ 7 \}, \{ 15, 21 \} \}$
- $P_3 = \{ \{ -2, 15 \}, \{ 7, 21 \} \}$
- $P_4 = \{ \{ 15, 21 \}, \{ -2, 7 \}, \{ 3, -2 \} \}$

Demonstrație.

- Este partiție, avem o mulțime de submulțimi nevide, disjuncte două câte două, iar reuniunea lor este toată mulțimea.
- Nu este partiție pentru că partiția este formată doar din mulțimi nevide.
- Nu este partiție pentru că elementul 3 nu apare în nicio submulțime.
- Nu este partiție pentru că elementul -2 apare în două submulțimi.

□

Exercițiul 6. Fie relația de echivalență $x \,\rho\, y \iff x^2 = y^2$ pentru $x, y \in \mathbb{R}$. Scrieți cât este mulțimea factor $\frac{\mathbb{R}}{\rho}$.

Demonstrație. Observăm că pentru această relație de echivalență, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \,\rho (-x)$. O să notăm clasa de echivalență a lui x cu $\hat{x} = \{ x, -x \}$. Pentru 0 avem o clasă de echivalență cu un singur element: $\hat{0} = \{ 0 \}$. Reunind toate clasele de echivalență, obținem mulțimea factor:

$$\frac{\mathbb{R}}{\rho} = \{ \hat{x} \mid x \in [0, +\infty) \}$$

□

Exercițiul 7. Considerăm pe $\mathbb{R}$ relația $x \rho y \iff x^2 + 7x = y^2 + 7y$.

Determinați $\frac{2}{\rho}$, $\frac{\mathbb{R}}{\rho}$, și găsiți un sistem complet și independent de reprezentanți pentru relația ρ.

Demonstrație.

1. Pentru a găsi clasa de echivalență a elementului 2 trebuie să găsim toate elementele care sunt echivalente cu el:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\rho} &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \rho 2 \,\}\\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + 7x = 2^2 + 7 \cdot 2 \,\right\}\\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + 7x - 18 = 0 \,\right\}\\ &= \{\, 2, -9 \,\} = \hat{2}\end{aligned}$$

2. Fie $y \in \mathbb{R}$ fixat. Atunci

$$\begin{aligned}\frac{y}{\rho} &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \rho y \,\}\\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + 7x = y^2 + 7y \,\right\}\\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + 7x - (y^2 + 7y) = 0 \,\right\}\\ &= \{\, y, -y - 7 \,\} = \hat{y}\end{aligned}$$

   Deci $\frac{\mathbb{R}}{\rho} = \left\{\, \frac{y}{\rho} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \,\right\} = \{\, \{\, y, -y - 7 \,\} \mid y \in \mathbb{R} \,\}$.

3. Pentru a construi un sistem de reprezentanți, trebuie să alegem un element din fiecare clasă de echivalență.

   Am putea să luăm ca sistem de reprezentanți tot $\mathbb{R}$: $S = \{\, \hat{x} \mid x \in \mathbb{R} \,\}$. Acest sistem este complet, dar nu independent. De exemplu, $\hat{2} = \widehat{-9}$.

   Dacă încercăm să luăm câteva câteva clase de echivalențe găsim că:

$$\begin{aligned}\hat{5} &= \widehat{-5 - 7} = \widehat{-12}\\ \widehat{-4} &= -\widehat{(-4) - 7} = \widehat{-3}\\ \hat{1} &= \widehat{-1 - 7} = \widehat{-8}\\ \widehat{-2} &= -\widehat{(-2) - 7} = \widehat{-5}\end{aligned}$$

   Observăm că -3.5 este singur în clasa lui de echivalență, $\widehat{-3.5} = \{\, -3.5 \,\}$, deoarece $-3.5 = -(-3.5) - 7$.

   Bănuim că un sistem complet și independent de reprezentanți ar fi $S = [-3.5, \infty)$. Trebuie să și demonstrăm asta:

   - S este *complet*: fie $x \in \mathbb{R}$. Dacă $x \geq -3.5$ atunci reprezentantul lui x este $\hat{x}$. Dacă $x < -3.5$, atunci $-x - 7 > -3.5$, deci reprezentantul o să fie $\widehat{-x - 7}$.
   - S este *independent*: să presupunem că există două clase de echivalență $\hat{x}, \hat{y} \in S$ astfel încât $\hat{x} = \hat{y}$ cu $x \neq y$. Singura posibilitate este ca $x = -y - 7$ (sau viceversa). Dar $y > 3.5$, deci $-y - 7 < -3.5$.

$\square$

Exercițiul 8. Demonstrați că pentru orice partiție $\boldsymbol{P}$ a unei mulțimi $\boldsymbol{A}$ există o unică relație de echivalență ρ astfel încât $\frac{A}{\rho} = \boldsymbol{P}$.

Demonstrație. Fie $\boldsymbol{P}$ o partiție a mulțimii $\boldsymbol{A}$.

Definim relația ρ în felul următor: $a \,\rho\, b \iff \exists U \in P$ astfel încât $a, b \in U$ (adică a, b se află în aceeași mulțime în partiție). Se poate arăta ușor că această relație este de echivalență:

- *reflexivă*: fie $x \in A$. Deoarece $\boldsymbol{P}$ este o partiție, trebuie să existe o submulțime $\boldsymbol{U}$ în care apare x. Deci putem spune că $x, x \in U$, deci $x \,\rho\, x$.
- *simetrică*: fie $x, y \in A$ astfel încât $x \,\rho\, y$. Din definiția lui ρ avem că $x, y \in U$. Atunci și $y, x \in U$. Deci $y \,\rho\, x$.
- *tranzitivă*: fie $x, y, z \in A$ astfel încât $x \,\rho\, y$ și $y \,\rho\, z$. Deci $x, y \in U$ și $y, z \in V$. Avem că $U \cap V = \{ y \}$. $\boldsymbol{P}$ fiind partiție, trebuie ca $U = V$. Deci $x, z \in U \iff x \,\rho\, z$.

Trebuie să mai arătăm că $\frac{A}{\rho} = \boldsymbol{P}$. Avem că

$$\begin{aligned} \frac{A}{\rho} &= \{ \{ y \in A \mid x \,\rho\, y \} \mid x \in A \} \\ &= \{ \{ y \in A \mid y \in U \} \mid U \in P \} \\ &= \{ U \in P \} = P \end{aligned}$$

Pentru unicitate: să presupunem că ar exista o altă relație ρ', diferită de ρ, astfel încât $\frac{A}{\rho} = \frac{A}{\rho'} = \boldsymbol{P}$. Dacă relațiile diferă, trebuie să existe cel puțin o pereche (x, y) astfel încât $(x, y) \in \rho$ și $(x, y) \notin \rho'$ (sau vice versa). Dar asta ar însemna că x și y se află în aceeași mulțime în $\frac{A}{\rho}$ și în mulțimi diferite în $\frac{A}{\rho'}$. Însă asta înseamnă că ρ și ρ' definesc partiții diferite. $\square$