# FUNCTII DERIVABILE

## A) SPATII LINIARE NORMATE

$X$ spatiu liniare real

$0_X$ elementul neutru al lui $X$

*Definitia 1.* Se numeste norma pe $X$ o functie $p : X \to \mathbb{R}_+$ care are urmatoarele proprietati:

a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$

b) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X$

c) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.

*Notatie.* $p(x) \overset{not}{=} \|x\|$

$p \overset{not}{=} \| \ \|$

*Definitia 2.* Se numeste spatiu liniar normat un spatiu liniar $X$ pe care se defineste o norma $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_+$.

*Notatie.* $(X, \| \ \|)$

*Teorema 1.* Orice spatiu normat $(X, \| \ \|)$ este spatiu metric.

Normei $\| \ \| : X \to \mathbb{R}_+$ ii asociem distanta $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definita prin $d(x,y) = \|x - y\|$ $\forall x, y \in X$.

Distantei $d : X \times X \to \mathbb{R}$ i se asociaza topologia $\tau_d \overset{not}{=} \tau_{\| \ \|} \subseteq \wp(X)$.

*Definitia 3.* Topologia $\tau_{\| \ \|}$ se numeste topologia asociata normei $\| \ \|$.

*Notatie.* $\lambda \in \mathbb{R}^*, x \in X$

$$\tfrac{1}{\lambda} x \overset{not}{=} \tfrac{x}{\lambda}$$

*EXEMPLE DE SPATII NORMATE*

1) $(\mathbb{R}, | \ |)$.

2) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$ unde $\|(x_1, x_2, ...., x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ $\forall (x_1, x_2, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

3) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \ \|_1)$ unde $\|(x_1, x_2, ...., x_n)\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ $\forall (x_1, x_2, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4) $n \geq 2$

$(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ unde $\|(x_1, x_2, ...., x_n)\|_\infty = \max \{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$ $\forall (x_1, x_2, ...., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

## B) FUNCTII DERIVABILE

*Definitia 4.* Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca exista $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$.

*Notatie.* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0)$ derivata functiei $f$ in punctul $x_0$

*Definitia 5.* Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila pe multimea $A \in D \cap D'$ daca $f$ este derivabila in orice punct al multimii $A$.

*Teorema 2.* Daca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \|\|)$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci $f$ este continua in $x_0$.

*Observatie.* Reciproca Teoremei 2 este falsa.

In continuare vom considera cazul particular $(X, \|\|) = (\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ cu $n \geq 2$ si $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \ \forall x \in D.$

Functiile $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numesc componentele functiei $f$.

Notam $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

*Teorema 3.* Functia $f = (f_1, f_2, ..., f_n) : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca si numai daca functiille $f_1, f_2, ..., f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$. In plus $f'(x_0) = \left(\overset{'}{f_1}(x_0), ..., \overset{'}{f_n}(x_0)\right) \in \mathbb{R}^n$ .

# C) FUNCTII REALE DERIVABILE

Conform Teoremei 3, studierea derivabilitatii functiilor vectoriale se reduce la studierea derivabilitatii componentelor acestora. Componentele unei functii vectoriale fiind functii reale, se impune studierea derivabilitatii in cazul functiilor $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

*Teorema 4.* a) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci functiile $f + g, f - g, \alpha f, fg : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile in $x_0 \in D \cap D'$ si sunt adevarate relatiile $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$, $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$ si $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$.

b) Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile in punctul $x_0 \in D \cap D'$ cu $g(x) \neq 0 \forall x \in D$. Atunci functia $\frac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila in $x_0 \in D \cap D'$ si este adevarata relatia $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

c) Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to A$ o functie derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie derivabila in punctul $f(x_0) \in A \cap A'$. Atunci functia $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$si $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

d) Fie $I, J$ doua intervale din $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ o functie bijectiva si $x_0 \in I$ cu urmatoarele proprietati:

- $f$ este functie monotona
- $f$ este derivabila in punctul $x_0$
- $f'(x_0) \neq 0$.

Atunci $f^{-1} : J \to I$ este derivabila in punctul $f(x_0) = y_0$ si $\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

*Definitia 6.* Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D$.

a) $x_0$ se numeste punct de minim local al functiei $f$ daca $\exists V \in V_{\tau_\mathbb{R}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

b) $x_0$ se numeste punct de maxim local al functiei $f$ daca $\exists V \in V_{\tau_\mathbb{R}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in V \cap D$.

c) $x_0$ se numeste punct de extrem local al functiei $f$ daca $x_0$ este punct de maxim local al functiei $f$ sau $x_0$ este punct de minim local al functiei $f$.

*Teorema lui Fermat.* Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in \overset{0}{D}$ un punct de extrem local al functiei $f$. Daca $f$ este derivabila in punctul $x_0$, atunci

$f'(x_0) = 0.$

*Demonstratie.* $x_0 \in \overset{0}{D} \Rightarrow \exists r_1 > 0$ astfel incat $(x_0 - r_1, x_0 + r_1) \subset D$

Presupunem ca $x_0$ este punct de minim local al functiei $f \Rightarrow \exists r_2 > 0$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0) \, \forall x \in (x_0 - r_2, x_0 + r_2) \cap D$

Alegem $r = \min\{r_1, r_2\}$ si obtinem ca

$$f(x) \geq f(x_0) \, \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Sunt adevarate inegalitatile

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$$

(1)

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0) \ (2)$$

Trecem la limita in relatiile (1) si (2) si obtinem ca $f'_s(x_0) \leq 0$ si $f'_d(x_0) \geq 0$.

Tinand cont ca functia este derivabila in punctul $x_0$, rezulta ca $f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = 0$.

*Teorema lui Rolle.* Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe $(a, b)$ cu $f(a) = f(b)$. Atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = 0$.

*Demonstratie.* Multimea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ este compacta si functia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua pe $[a, b]$. Atunci $f$ este marginita si isi atinge marginile pe $[a, b]$.

$$\exists u, v \in [a, b] \text{ astfel incat } f(u) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ si } f(v) = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Se dinsting mai multe cazuri, si anume:

Cazul 1. $u, v \in \{a, b\}$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(u) = f(v) \Rightarrow f \text{ functie constanta} \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$$

Cazul 2. $u \in \{a, b\}, v \in (a, b)$

$v \in (a, b) = \overset{0}{[a, b]}$ punct de extrem local al functiei $f$ si $f$ este derivabila in punctu

$l$

v $\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(v) = 0$

Cazul 3. $v \in \{a, b\}, u \in (a, b)$

$u \in (a, b) = \overset{0}{[a, b]}$ punct de extrem local al functiei $f$ si $f$ este derivabila in punctul

u $\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(u) = 0$

Cazul 4. $u, v \in (a, b)$

$u, v \in (a, b) = \overset{0}{[a, b]}$ puncte de extrem local ale functiei $f$ si $f$ este derivabila in punctele

u ,v$\overset{th.Fermat}{\Rightarrow} f'(u) = f'(v) = 0$.

*Teorema lui Cauchy.* Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ doua functii continue pe $[a, b]$, derivabile pe $(a, b)$ cu $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

*Teorema lui Lagrange.* Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $[a, b]$, derivabila pe $(a, b)$. Exista $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

*Demonstratie.* Alegem functia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita prin $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x \ \forall x \in [a, b]$.

Functia $g$ are urrmatoarele proprietati:

- $g$ este continua pe $[a, b]$
- $g$ este derivabila pe $(a, b)$
- $g(a) = g(b)$
- $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \forall x \in (a, b)$.

Aplicam Teorema lui Rolle si obtinem ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $g'(c) = 0$.

Rezulta ca $\exists c \in (a, b)$ astfel incat $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b)\ astfel\ incat\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

*Corolare la Teorema lui Lagrange.* Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie.

a) Daca $f$ este derivabila pe $I$ si $f'(x) = 0 \forall x \in I$, atunci $f$ este functie constanta pe $I$.

b) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie continua pe $I$ si $\exists x_0 \in I$ astfel ca $f$ este derivabila pe $I \setminus \{x_0\}$ ... Daca $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$, atunci $f$ este derivabila in punctul $x_0$ si $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

c) Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila pe $I$.

Daca $f'(x) \geq 0 \forall x \in I$, atunci $f$ este functie crescatoare pe $I$.

Daca $f'(x) \leq 0 \forall x \in I$, atunci $f$ este functie descrescatoare pe $I$.

Daca $f'(x) > 0 \forall x \in I$, atunci $f$ este functie strict crescatoare pe $I$.

Daca $f'(x) < 0 \forall x \in I$, atunci $f$ este functie strict descrescatoare pe $I$.

*Definitia 7.* Un interval $I \subseteq \mathbb{R}$ se numeste nedegenerat daca $I$ are cel putin doua elemente distincte.

*Teorema lui Darboux.* Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila. Atunci $f' : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

*Corolar.* Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila. Daca $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, atunci $f'(x) > 0 \forall x \in I$ sau $f'(x) < 0 \forall x \in I$.

*Regula lui L'Hospital (varianta $\frac{0}{0}$)*

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \backslash I$ si $f, g : I \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe $I$ care verifica urmatoarele ipoteze:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

*Regula lui L'Hospital (varianta $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)*

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $x_0 \in I' \backslash I$ si $f, g : I \to \mathbb{R}$ doua functii derivabile pe $I$ care verifica urmatoarele ipoteze:

a) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}$

b) $g'(x) \neq 0 \forall x \in I$

c) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel incat $g(x) \neq 0 \forall x \in I \cap V$ si $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

*Observatie.* Ipoteza $(c)$ din Regula lui L'Hospital este esentiala pentru ca limitele sa fie egale.

Alegem functiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $g(x) = \sin x \forall x \in (0, +\infty)$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu exista.}$$

Limitele nu pot fi egale pentru ca $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nu exista.

# D) DERIVATE DE ORDIN SUPERIOR

*Definitia 8.* a) Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia $f$ sa fie derivabila pe multimea $V \cap D$ si $f' : D \cap V \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

b) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de $n$ ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}}}(x_0)$ astfel ca functia $f$ sa fie derivabila de $n-1$ ori pe multimea $V \cap D$ si $f^{(n-1)} : D \cap V \to \mathbb{R}$ este derivabila in punctul $x_0 \in D \cap D'$.

c) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabila de $n$ ori pe multimea $A \subseteq D \cap D'$ daca $f$ este derivabila de $n$ ori in orice punct al multimii $A$.

*Notatii.* a) $f''(x_0) \overset{not}{=} (f')'(x_0)$.

b) $f^{(n)}(x_0) \overset{not}{=} \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$.

*Definitia 9.* Se considera functia $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in D \cap D'$ si $n \in \mathbb{N}^*$ astfel incat $f$ este derivabila de $n$ ori in punctul $x_0$.

a) Functia $T_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $T_{f,n,x_0}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ se numeste polinomul Taylor de rang $n$ asociat functiei $f$ si punctului $x_0$.

b) Functia $R_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita prin $R_{f,n,x_0}(x) = f(x) - T_{f,n,x_0}(x)$ se numeste restul lui Taylor de rang $n$ asociat functiei $f$ si punctului $x_0$.

*Observatie.* $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

*Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange.* Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $n \in \mathbb{N}^*$, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de $n+1$ ori pe multimea $I$ si $x_0 \in I$. Oricare ar fi $x \in I$ *cu* $x \neq x_0$ exista $c \in I$ situat intre $x$ *si* $x_0$ astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

*Exemplu.* Functia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}$ este indefinit derivabila pe $\mathbb{R}$ si $f^{(k)}(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Alegem $n \in \mathbb{N}^*, x_0 = 0$.

Aplicam Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange si obtinem ca oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ *cu* $x \neq 0$ exista $c \in \mathbb{R}$ situat intre $x$ *si* $0$ astfel incat

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \tfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{x^n}{n!} + \tfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

*Definitia 10.* Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie.

a) $f$ se numeste functie convexa daca $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)\ \forall x, y \in I, \forall t \in [0,1]$.

b) $f$ se numeste functie concava daca $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)\ \forall x, y \in I, \forall t \in [0,1]$.

*Inegalitatea lui Jensen.* a) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie convexa. Oricare ar fi $x_1, x_2, ...., x_n \in I$ si $t_1, t_2, ...., t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + .... + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + .... + t_nf(x_n).$$

b) Se considera $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie concava. Oricare ar fi $x_1, x_2, ...., x_n \in I$ si $t_1, t_2, ...., t_n \in [0, +\infty]$ cu $t_1 + t_2 + .... + t_n = 1$ este adevarata inegalitatea

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + .... + t_nf(x_n).$$

*Teorema 10.* Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat si $f : I \to \mathbb{R}$ o functie derivabila de doua ori pe multimea $I$.

a) $f$ este functie convexa daca si numai daca $f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$.

b) $f$ este functie concava daca si numai daca $f''(x) \leq 0\ \forall x \in I$.

*Definitia 11.* Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, $f : I \to \mathbb{R}$ o functie si $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Spunem ca functia $f$ este de clasa $C^n$ pe $I$ daca $f$ este derivabila de $n$ ori pe $I$ si $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ este functie continua pe $I$.

b) Spunem ca functia $f$ este de clasa $C^{\infty}$ pe $I$ daca $f$ este derivabila de $m$ ori pe $I$ $\forall m \in \mathbb{N}^{*}$.

*Notatii.* $C^{n}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \ .f \ functie \ de \ clasa \ C^{n} \ pe \ I\}$

$C^{\infty}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \ .f \ functie \ de \ clasa \ C^{\infty} \ pe \ I\}$.