Tutoriat 10 + 1

17.01.2021

Exerciții

Examen[1] la algebră, anul I, sem. I, informatică
(subiect de examen pentru studenţii din anii I şi II)
03.02.2021

Problema 1. Fie $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5) \in S_5$.
(1) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$, $x \in S_5$. **(5 pct.)**
(2) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^{2021} = \sigma$, $x \in S_5$. **(5 pct.)**
(3) Aflaţi numărul de elemente din $H = \langle\sigma\rangle$ (subgrupul generat de σ în S_5). **(5 pct.)**
(4) Aflaţi indicele lui H în S_5. **(5 pct.)**
(5) Arătaţi că H nu este subgrup normal în S_5. **(5 pct.)**
(6) Determinaţi cel mai mic subgrup normal al lui S_5 care-l conţine pe H. **(10 pct.)**

Problema 2. Fie idealele $I = (X^2 - 1)$ şi $J = (X^3 - 1)$ ale inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.
(1) Este adevărat că $X^4 - 1 \in I$? Dar că $X^4 - 1 \in J$? Justificaţi. **(10 p.)**
(2) Determinaţi un generator pentru fiecare din idealele $I \cap J$, respectiv $I + J$. **(5 p.)**
(3) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/I \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. **(5 p.)**
(4) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/J \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$. **(5 p.)**
(5) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/I \not\simeq \mathbb{R}[X]/J$. **(5 p.)**

Problema 3. Fie polinomul $P(X) = X^3 + n^2X^2 - 5$, $n \in \mathbb{Z}$. Studiaţi ireductibilitatea lui P, în funcţie de n, peste fiecare din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$, iar în cazurile în care polinomul este reductibil descompuneţi-l în factori ireductibili. Justificaţi răspunsurile. **(30 pct.)**

2. a) $X^4 - 1 \in I$?

$X^4 - 1 = (X^2-1)(X^2+1) \in I$

$X^4 - 1 \in J = (X^3 - 1)$?

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 1 & X^3 - 1 \\ -\ X^4 - X & X \\ \hline X - 1 & \end{array}$$

Deci $X^4 - 1 = X(X^3 - 1) + X - 1 \notin J$

b) $I \cap J = ?$

$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$

$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

$I = \{(X^2-1) \cdot f \mid f \in \mathbb{R}[X]\}$

$J = \{(X^3-1) \cdot g \mid \ \in \mathbb{R}[X]\}$

Solutie la finalul PDF-ului

c) $\dfrac{\mathbb{R}[X]}{I} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\dfrac{A[X]}{(X-a)} \simeq A \quad (*)$

$X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$

$\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$
$(m, n) = 1$

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X-1)(X+1)} \overset{?}{\simeq} \frac{\mathbb{R}[X]}{(X-1)} \times \frac{\mathbb{R}[X]}{(X+1)} \overset{(*)}{\simeq} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

? - Lema Chineză a Resturilor

$(X-1, X+1) = 1$

d) $\frac{\mathbb{R}[X]}{J} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$

$$\frac{\mathbb{R}[X]}{(X-1)(X^2+X+1)} \overset{LCR}{\simeq} \frac{\mathbb{R}[X]}{(X-1)} \times \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)} \overset{(*)}{\simeq} \mathbb{R} \times \frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$$

$(X^2+X+1, X-1) = 1$

$$\begin{array}{l|l} X^2+X+1 & X-1 \\ \hline - \; X^2 - X & X+2 \\ \quad 2X+1 & \\ \quad 2X-2 & \\ \hline \quad\quad 3 \neq 0 & \end{array}$$

$X^2+X+1 = (X-\varepsilon)(X-\bar{\varepsilon})$

$\Delta = -3 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$

Proprietatea de Universalitate a inelelor de polinoame (caz aplicat)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "i(a)=a"] \arrow[dr, bend right, "j(a)=a"'] & \mathbb{R}[X] \arrow[d, dashed] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$\varphi \circ i = j$

$\exists! \; \varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$

$\varphi(a) = a$

$\varphi(X) = \varepsilon$

φ morfism (3)

- φ surj $\Leftrightarrow$ j surj.
- φ inj $\Leftrightarrow$ $j_i = \operatorname{Ker}\varphi$?

$\varphi(f(X)) = f(\varepsilon)$

$\forall f \in \mathbb{R}[X]$

$\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ morfism surjectiv

$\forall\, a+bi \in \mathbb{C}, \; \exists\, y \in \mathbb{R}[X]$ a.î. $\varphi(y) = a+bi$

$\varphi(a+bX) = \varphi(a) + \varphi(bX) = a + \varphi(b)\varphi(X) = a + b \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$= a - \frac{b}{2} + \frac{bi\sqrt{3}}{2}$

$\varphi\left(a + \frac{2b}{\sqrt{3}}X + \frac{b}{\sqrt{3}}\right) = a + \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$= a + \cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} - \cancel{\frac{b}{\sqrt{3}}} + bi = \underline{a+bi}$

Deci φ surjectivă (1)

Vrem $\operatorname{Ker}\varphi = (X^2+X+1)$

„$\supseteq$" Fie $f = (X^2+X+1)g$, $g \in \mathbb{R}[X]$

$\Downarrow$ aplicăm φ

$\varphi(f) = \underbrace{\varphi(X^2+X+1)}_{\varepsilon^2+\varepsilon+1=0} \cdot \varphi(g) = 0 \Rightarrow f \in \operatorname{Ker}\varphi$

„$\subseteq$" Fie $f \in \operatorname{Ker}\varphi$ ($\Leftrightarrow \varphi(f) = 0$)

Împart f la X^2+X+1 (avem asigurată din Teorema de împărțire cu Rest)

$\Leftrightarrow \exists\, g, r \in \mathbb{R}[X]$ a.î.

$f = (X^2+X+1)\cdot g + r$, $\deg(r) < \deg(X^2+X+1) = 2$

$\Downarrow$

$r = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$f = (X^2+X+1)g + ax + b$

$\Downarrow$ aplic φ

$\underbrace{\varphi(f)}_{0} = \underbrace{\varphi(X^2+X+1)}_{0} \cdot \varphi(g) + \varphi(ax+b) \Rightarrow a\varepsilon + b = 0$ (*)

$a\varepsilon = -b$

P.p. $a \neq 0$ $\Big| \Rightarrow \varepsilon = -\dfrac{b}{a} \in \mathbb{R}$ contradicție

$\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Rămâne $a = 0$

Revin în (*) : $0\varepsilon + b = 0 \Rightarrow b = 0$

Deci $f = (X^2+X+1)\cdot g \Rightarrow f \in (X^2+X+1)$

Deci $\ker\varphi = (X^2+X+1)$ (2)

(1), (2), (3) $\xRightarrow{TFI}$ $\boxed{\dfrac{\mathbb{R}[X]}{(X^2+X+1)} \simeq \mathbb{C}}$

e) **(5) Arătaţi că $\mathbb{R}[X]/I \not\simeq \mathbb{R}[X]/J$.**

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

$|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = c \cdot c = c$

$|\mathbb{R}\times\mathbb{C}| = c \cdot 2^c = 2^c$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0 = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}|$

$|\mathbb{R}| = c$ (puterea continuumului)

$c = 2^{\aleph_0}$

$|\mathcal{C}| = 2^c$

Problema 3. Fie polinomul $P(X) = X^3 + n^2X^2 - 5$, $n \in \mathbb{Z}$. Studiaţi ireductibilitatea lui P, în funcţie de n, peste fiecare din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$, iar în cazurile în care polinomul este reductibil descompuneţi-l în factori ireductibili. Justificaţi răspunsurile. **(30 pct.)**

Sol : $\boxed{\mathbb{Z}_2}$ Reducem mod 2 pe P

$P(X) = X^3 + \hat{m}^2 X^2 - \hat{1}$ $\qquad \hat{m}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$

· $\hat{m}^2 = \hat{0}$ ($\Leftrightarrow$ m par)

$P(X) = X^3 + \hat{1} = (X+\hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$ — singurul ired. de grad 2 în $\mathbb{Z}_2[X]$

$$\begin{array}{l|l} X^3 + \hat{1} & X + \hat{1} \\ \cline{2-2} -\ X^3 + X^2 & X^2 + X + \hat{1} \\ \hline X^2 + \hat{1} & \\ -\ X^2 + X & \\ \hline X + \hat{1} & \end{array}$$

$P(\hat{0}) = \hat{1}$
$P(\hat{1}) = \hat{0}$

Scrierea în factori ired. (când m par)

· $\hat{m}^2 = \hat{1}$ ($\Leftrightarrow$ m impar)

$P(X) = X^3 + X^2 + \hat{1}$ ired.

$P(\hat{0}) = P(\hat{1}) = \hat{1} \Rightarrow$ nu are factori liniari (deg = 1)

$\boxed{\mathbb{Z}_3}$ Reducem mod 3

x	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
x^2	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{1}$

$P(X) = X^3 + \hat{m}^2 X - \hat{2} = X^3 + \hat{m}^2 X + \hat{1}$

$\hat{m}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}\}$

· $\hat{m}^2 = \hat{0}$ ($\Leftrightarrow$ $3 \mid m$)

$P(X) = X^3 + \hat{1} = (X - \hat{2})(X^2 + 2X + \hat{1}) = (X+\hat{1})(X+\hat{1})^2 = (X+\hat{1})^3$

$P(\hat{0}) = \hat{1}$
$P(\hat{1}) = \hat{2}$
$P(\hat{2}) = \hat{0}$

$$\begin{array}{l|l} X^3 - \hat{1} & X - \hat{2} \\ \cline{2-2} -\ X^3 - \hat{2}X^2 & X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \\ \hline 2X^2 - \hat{1} & \\ -\ 2X^2 - X & \\ \hline X - \hat{1} & \\ -\ X - \hat{2} & \\ \hline \hat{0} & \end{array}$$

· $\hat{m}^2 = \hat{1}$ ($\Leftrightarrow$ $3 \nmid m$)

$P(X) = X^3 + X^2 + \hat{1} = (X - \hat{1})\underline{(X^2 + \hat{2}X + \hat{2})}$ ired.

$P(\hat{1}) = \hat{0}$
$P(\hat{2}) = P(-\hat{1}) = \hat{1}$

$$\begin{array}{l|l} X^3 + X^2 + \hat{1} & X - \hat{1} \\ \cline{2-2} -\ X^3 - X^2 & X^2 + \hat{2}X + \hat{2} \\ \hline 2X^2 + \hat{1} & \\ -\ 2X^2 - 2X & \\ \hline 2X + \hat{1} & \\ -\ 2X ~~+~~ \hat{2} & \\ \hline \hat{0} & \end{array}$$

[Q] $P(X) = X^3 + n^2X^2 - 5,\ n \in \mathbb{Z}.$

$a, b \in \mathbb{Z}$

De la curs, posibilele rădăcini sunt $\frac{a}{b}$, unde $a \mid 5$, $b \mid 1$

$\pm 5, \pm 1$

$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

Rădăcinile POT FI: $\frac{a}{b}$, $a \mid a_0$, $b \mid a_n$

$P(1) = 1 + m^2 - 5 = m^2 - 4 \Rightarrow m = \pm 2$, atunci P reductibil

$P(X) = X^3 + 4X - 5$

$P(X) = (X-1)\underbrace{(X^2+X+5)}_{ired}$

$$\begin{array}{l|l} X^3+4X-5 & X-1 \\ \hline -\ X^3-X^2 & X^2+X+5 \\ \quad X^2+4X-5 & \\ -\ X^2-X & \\ \quad 5X-5 & \end{array}$$

Deci pt $m = \pm 2$, P reductibil

În continuare, $m \neq \pm 2$

$P(-1) = -1 + m^2 - 5 = m^2 - 6 \Rightarrow -1$ NU E rădăcină, $\forall m \in \mathbb{Z}$

$P(5) = 125 + 25m^2 - 5 = 25m^2 + 120 \Rightarrow 5$ NU E rădăcină, $\forall m \in \mathbb{Z}$

$P(-5) = -125 + 25m^2 - 5 = 25m^2 - 130 \Rightarrow -5$ NU E rădăcină, $\forall m$

Cazul $m \neq \pm 2$

P nu are factori de grad 1, $\deg P = 3$ $\Rightarrow P$ ired.

$m = \pm 2 \Rightarrow P(X) = (X-1)(X^2+X+5)$

3. Fie Q[X] inelul de polinoame cu coeficienți raționali și J=(x^3 + 1). Aflați nilpotenții și idempotenții lui Q[X]/J.

Sol: $I = \frac{\mathbb{Q}[X]}{(X^3+1)} = \{\widehat{aX^2+bX+c} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$ cu prop. că $\hat{X}^3 = \widehat{-1}$

$\hat{f} = \widehat{X^7+X^4+X^3+X+X^2+2} = \widehat{X^4(X^3+1) + X^3+1 + X^2+1}$ „anulăm” $\frac{}{X^3+1}$ $\widehat{X^4 \cdot 0 + 0 + X^2 + 1} = \widehat{X^2+1}$

$\in I$

$\underline{Idem(\mathbb{I}) = \{\hat{0}, \hat{1}\}}$

$f \in Idem\, \mathbb{I},\ f = \widehat{ax^2 + bx + c} \Rightarrow f^2 = f \iff \widehat{(ax^2 + bx + c)^2} = \widehat{ax^2 + bx + c}$

$\iff \widehat{a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx} = \widehat{ax^2 + bx + c}$

$\hat{x}^3 = -\hat{1}$

$\iff -\hat{a}\hat{x} + \hat{b}^2\hat{x}^2 + \hat{c}^2 - 2\hat{a}\hat{b} + 2\hat{a}\hat{c}\hat{x}^2 + 2\hat{b}\hat{c}\hat{x} = \hat{a}\hat{x}^2 + \hat{b}\hat{x} + \hat{c}$

$$\iff \begin{cases} b^2 + 2ac = a \Rightarrow a(1-2c) = b^2 = \dfrac{b^2}{1-2c} \\ -a^2 + 2bc = b \Rightarrow b = \dfrac{-a^2}{1-2c} \\ c^2 - 2ab = c \end{cases}$$

Soluții: $a = b = c = 0$ sau $a = 0 = b,\ c = 1$

$f = \hat{0}$ $\qquad f = \hat{1}$

$\underline{N(\mathbb{I}) = \{\hat{0}\}}$

$f \in N(\mathbb{I}) \iff \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $f^n = 0$

Fie $f = \widehat{ax^2 + bx + c} \in N(\mathbb{I}) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $(ax^2 + bx + c)^n = 0$

Dezvoltând, vom avea $c^n = 0 \Rightarrow c = 0$

$(ax^2 + bx)^n = 0$

$x^n(ax + b)^n = 0$

Similar, $b^n = 0 \Rightarrow b = 0$

$(ax^2)^n = 0 \Rightarrow a = 0$

Exercițiul 3. Se dă polinomul $f = X^4 \overset{+0X^3}{+} X^2 \overset{+0X}{+} 1$. Notăm cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ rădăcinile complexe ale polinomului. Scrieți un polinom care să aibă rădăcinile $2\underset{X}{\alpha_1} + 1, 2\alpha_2 + 1, 2\alpha_3 + 1, 2\alpha_4 + 1$.

Sol I Căutăm un polinom g cu acele rădăcini.

Luăm $Y = 2X + 1 \Rightarrow X = \dfrac{Y-1}{2}$

$f\left(\dfrac{Y-1}{2}\right) = g(Y) = \dfrac{(Y-1)^4}{16} + \dfrac{(Y-1)^2}{4} + 1$

II Viète : $S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = -\frac{0}{1} = 0$

$S_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = 1$

$S_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 0$

$S_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{1}{1} = 1$

$2\alpha_1 + 1 + 2\alpha_2 + 1 + 2\alpha_3 + 1 + 2\alpha_4 + 1 = 2S_1 + 4 = 4$

$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1) + \ldots = a$ (calcule)

$(2\alpha_1+1)(2\alpha_2+1)(2\alpha_3+1) + \ldots = b$ (calcule)

$\prod_{i=1}^{4} (2\alpha_i + 1) = \ldots = c$

$y = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c$

$f(x) = y$

$f(x) = z$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[dr] & y \\ & z \end{tikzcd}$$

Asta nu e o funcție bine definită

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] & z \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

---

* Pe $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

(reamintire)

Vrem: $\mathbb{R}/_\sim \simeq [0,1)$

$\widehat{0{,}13} = \{x \in \mathbb{R} \mid \{x\} = 0{,}13\}$

$\hat{x} = \{x\}$

$h : \mathbb{R}/_\sim \to [0,1)$, $h(\hat{x}) = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$

nu depinde de reprezentanți

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi(x)=\hat{x}"] \arrow[dr, "f(x)=\{x\}"'] & \mathbb{R}/_\sim \arrow[d, dashed] \\ & {[0,1)} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow h = f \circ \pi = f(\pi(x)) = f(\hat{x})$

$\exists!\, h : \mathbb{R}/_\sim \to [0,1)$, $h(\hat{x}) = \{x\}$

h — surj $\iff \pi$ surj

— inj $\iff \sim = \rho_f$

Revin la punctul b)

Problema 2. Fie idealele $I = (X^2 - 1)$ şi $J = (X^3 - 1)$ ale inelului de polinoame $\mathbb{R}[X]$.

(1) Este adevărat că $X^4 - 1 \in I$? Dar că $X^4 - 1 \in J$? Justificaţi. **(10 p.)**

(2) Determinaţi un generator pentru fiecare din idealele $I \cap J$, respectiv $I + J$. **(5 p.)**

b) Teorie: În inelul $K[X]$, K - corp, $(f), (g)$ ideale, $f, g \in \mathbb{R}[X]$

$$(f) + (g) = (d) \Leftrightarrow d = (f, g) \quad (= \text{cmmdc } f, g)$$

$$(f) \cap (g) = (m) \Leftrightarrow m = [f, g] \quad (= \text{cmmmc } f, g)$$

Avem deci

$$(X^2 - 1) + (X^3 - 1) = \underline{(X - 1)} = d$$

Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 1 & X^2 - 1 \\ - \ X^3 - X & X \\ \hline X - 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} X^2 - 1 & X - 1 \\ - \ X^2 - X & X + 1 \\ \hline X - 1 & \\ X - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$[X^2 - 1, X^3 - 1] = \frac{(X^2 - 1)(X^3 - 1)}{d} = (X + 1)(X^3 - 1) = m$$