DERIVATE PARŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

Dacă f este o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, f poate avea p derivate parţiale (de prim ordin) notate cu f'_{x_i} sau cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Fiecare dintre aceste derivate parţiale constituie o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, deci poate avea la rândul ei p derivate parţiale, numite derivate parţiale de al doilea ordin, notate $f''_{x_i x_j}$ sau cu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, adică derivata parţială a lui $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ în raport cu x_j. Atunci când $i = j$, în loc de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ vom scrie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. În acelaşi mod se definesc derivatele parţiale de al treilea ordin,..., de al n-lea ordin. Aşadar, f are p^n derivatele parţiale de al n-lea ordin.

Exemplu. Pentru $f : \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$, să se arate că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Soluţie. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ şi } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0,$$

pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{(0,0,0)\}$.

Teorema lui Schwarz. *Fie* $(x_0, y_0) \in U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ *şi* $f : U \to \mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele două proprietăţi:*

i) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *există în orice punct din* U;

ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *este continuă în* (x_0, y_0).
Atunci:
α) *există* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$;
β)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Diferenţiale de ordin superior. Teorema lui Taylor-cazul multidimensional

Dacă f este o funcţie cu domeniul din $\mathbb{R}^p$ şi codomeniul din $\mathbb{R}$, atunci diferenţiala lui f într-un punct c din interiorul domeniului de definiţie este o aplicaţie liniară $Df(c) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ având proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(c+z) - f(c) - Df(c)(z)| < \varepsilon \|z\|$ pentru orice z cu proprietatea că $\|z\| < \delta_\varepsilon$. Cu alte cuvinte, $Df(c)$ este aplicaţia liniară care aproximează cel mai bine diferenţa $f(c+z) - f(c)$, pentru z "mic". Orice altă aplicaţie liniară constituie o aproximare mai puţin "bună". Am văzut că, dacă există, $Df(c)$ este dată de $Df(c)(z) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c) z_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) z_p$, unde $z = (z_1, ...z_p) \in \mathbb{R}^p$. Deşi aproximările cu aplicaţii liniare sunt simple şi suficiente pentru multe scopuri, uneori este necesar să obţinem aproximări mai exacte. Este natural să ne îndreptăm atenţia asupra funcţiilor pătratice etc. Întrucât nu vom intra în amănuntele studiului aplicaţiilor multiliniare, vom adopta următoarea:

Definiţie. *Pentru* $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al doilea ordin ale lui* f *pe o vecinătate a lui* c, *definim diferenţiala de ordin doi a lui* f *în* c, *ca fiind aplicaţia* $D^2 f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$D^2 f(c)(y, z) = \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j$$

pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p) \in \mathbb{R}^p$.

Similar, pentru $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al treilea ordin ale lui* f *pe o vecinătate a lui* c, *definim diferenţiala de ordin trei a lui* f *în* c, *ca fiind aplicaţia*

$D^3 f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *dată de*

$$D^3 f(c)(y,z,w) = \sum_{i,j,k=1}^{p} \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(c) y_i z_j w_k$$

pentru orice $y = (y_1, ..., y_p)$, $z = (z_1, ..., z_p), w = (w_1, ..., w_p) \in \mathbb{R}^p$.

Analog se defineşte diferenţiala de orice ordin într-un punct.

Observaţie. *Vom folosi următoarele notaţii:*

$$D^2 f(c)(w,w) \overset{not}{=} D^2 f(c)(w)^2$$

$$D^3 f(c)(w,w,w) \overset{not}{=} D^3 f(c)(w)^3$$

....

$$D^n f(c)(w,...,w) \overset{not}{=} D^n f(c)(w)^n.$$

Pentru $p = 2$ şi pentru $w = (h,k)$, avem:

$$Df(c)(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(c)h + \frac{\partial f}{\partial y}(c)k$$

$$D^2 f(c)(w)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(c)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(c)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(c)k^2,$$

$$D^3 f(c)(w)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(c)h^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(c)h^2 k + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(c)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(c)k^3,$$

...

$$D^n f(c)(w)^n = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(c)h^n + ... + C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i} \partial^i y}(c)h^{n-i}k^i + ... + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(c)k^n.$$

Teorema lui Taylor-cazul multidimensional. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $u, v \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încât pentru orice punct de pe segmentul de capete u şi v există o vecinătate a sa pe care există şi sunt continue derivatele parţiale de al $n-$lea ordin ale lui f. Atunci există ξ pe segmentul de capete u şi v cu proprietatea că*

$$f(v) = f(u) + \frac{1}{1!}Df(u)(v-u) + \frac{1}{2!}D^2f(u)(v-u)^2 + ...$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}D^{(n-1)}f(u)(v-u)^{n-1} + \frac{1}{n!}D^n f(\xi)(v-u)^n.$$

Definiţie. *În contextul teoremei anterioare, polinomul*

$$P(v) = f(u) + \frac{1}{1!}Df(u)(v-u) + ... + \frac{1}{(n-1)!}D^{(n-1)}f(u)(v-u)^{n-1}$$

poartă numele de polinomul Taylor de ordin $n-1$ asociat funcţiei f în u.

Exemplu. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y + 1 > 0\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = \ln(x + y + 1)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $x + y + 1 > 0$. Să se scrie polinomul Taylor de ordin 2 asociat lui f în $(0, 0)$.

Soluţie. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1.$$

Atunci polinomul cerut este

$$f(0,0) + \frac{1}{1!}Df(0,0)((x,y)-(0,0)) + \frac{1}{2!}D^2f(0,0)((x,y)-(0,0))^2 =$$

$$= f(0,0)+(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y)+\frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2) =$$

$$= x + y - \frac{1}{2}(x+y)^2.$$

Exerciţiu. Fie $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}$ pentru orice $x, y > 0$. Să se scrie polinomul Taylor de ordin 2 asociat lui f în $(1, 1)$.

PUNCTE DE EXTREM PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional

Prezentăm un analog al teoremei lui Fermat pentru funcţii de mai multe variabile.

Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $c \in D$. Punctul c se numeşte punct de maxim local (relativ) al funcţiei f dacă există $\delta > 0$ astfel încât $f(c) \geq f(x)$ pentru orice $x \in B(c, \delta) \cap D$. Punctul c se numeşte punct de minim local (relativ) al funcţiei f dacă există $\delta > 0$ astfel încât $f(c) \leq f(x)$ pentru orice $x \in B(c, \delta) \cap D$. Punctele de maxim local şi cele de minim local se numesc puncte de extrem local.*

Teorema lui Fermat-cazul multidimensional. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $c \in D$ cu următoarele proprietăţi:*
i) $c \in \overset{\circ}{D}$;
ii) c este punct de extrem local al lui f;
iii) f este diferenţiabilă în c.
Atunci $Df(c) = 0$.
Demonstraţie. Orice restricţie a lui f la o dreaptă care trece prin c are un punct de extrem în c. Prin urmare, Teorema lui Fermat ne asigură că derivata în c, după orice direcţie, este nulă. În particular, avem $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(c) = ... = \frac{\partial f}{\partial x_p}(c) = 0$, de unde $Df(c) = 0$. $\square$

Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ şi $c \in \overset{\circ}{D}$. Dacă $Df(c) = 0$, atunci c se numeşte punct critic al lui f.*

Observaţie. *Nu orice punct critic este punct de extrem*, aşa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = xy$, pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, şi $c = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. *Un astfel de punct, care este critic, dar nu este de extrem local, poartă numele de punct şa. În acest exemplu, f, restricţionată la anumite drepte ce trec prin origine, are un punct de minim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ şi restricţionată la anumite drepte ce trec prin origine, are un punct de maxim relativ în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Este posibil ca o funcţie restricţionată* *la orice dreaptă care trece printr-un punct şa al funcţiei să aibă puncte de minim relativ. Prin urmare, este util să dispunem de un criteriu pentru a stabili natura unui punct critic.*

Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile

Prezentăm acum o modalitate de a selecta dintre punctele critice pe acelea care sunt puncte de extrem local.

Teoremă (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru funcţii de mai multe variabile). *Fie* $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : D \to \mathbb{R}$ *şi* $c \in D$ *cu următoarele proprietăţi:*

i) f *are derivate parţiale de ordin doi continue;*

ii) c *este punct critic al lui* f.

În aceste condiţii:

α*) dacă*

$$D^2 f(c)(w)^2 > 0,$$

pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, *atunci* c *este un punct de minim relativ al lui* f;

β*) dacă*

$$D^2 f(c)(w)^2 < 0,$$

pentru orice $w \neq 0_{\mathbb{R}^p}$, *atunci* c *este un punct de maxim relativ al lui* f;

γ*) dacă există* $w_1, w_2 \neq 0_{\mathbb{R}^p}$ *astfel încât*

$$D^2 f(c)(w_1)^2 > 0 \text{ şi } D^2 f(c)(w_2)^2 < 0,$$

atunci c *este un punct şa pentru* f.

Observaţie. *Rezultatul precedent arată că natura punctului critic* c *este determinată de forma pătratică* $D^2 f(c)(w)^2$. *În particular, este important de stabilit dacă această funcţie ia valori de semne contrare sau dacă valorile ei au acelaşi semn. Cu notaţia*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(c) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(c) \end{vmatrix},$$

unde $j \in \{1, 2, ..., p\}$, *avem:*

a) Dacă

$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p > 0,$$

atunci c este un punct de minim relativ al lui f.

b) Dacă

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^p \Delta_p > 0,$$

atunci c este un punct de maxim relativ al lui f.

c) Dacă

$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_p \geq 0 \text{ (sau } \Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, ..., (-1)^p \Delta_p \geq 0)$$

şi există $j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât

$$\Delta_j = 0,$$

atunci nu se poate trage nicio concluzie.

d) În celelate cazuri c este un punct şa al lui f.

Observaţie. *Aşa cum am văzut, matricea* $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(c) & ... & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(c) \end{pmatrix}$, *numită Hessiana funcţiei f în punctul c, este cea care permite selectarea punctelor de extrem dintre punctele critice. O altă modalitate de a realiza acest lucru, se bazează pe Teorema lui Schwarz care ne asigură că această matrice este simetrică, deci valorile sale proprii, notate cu $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, sunt reale. În aceste condiţii:*

α) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p > 0$, atunci c este un punct de minim relativ al lui f.

β) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p < 0$, atunci c este un punct de maxim relativ al lui f.

γ) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \geq 0$ (sau $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \leq 0$) şi există $j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $\lambda_j = 0$, atunci nu se poate trage nicio concluzie.

δ) Dacă există $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $\lambda_i \lambda_j < 0$, atunci c este un punct şa al lui f.

Exemplu

Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Soluţie. Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y+1, \frac{\partial f}{\partial y}=2y-x, \frac{\partial f}{\partial z}=2z-2$$

şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-1, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0 \text{ şi } \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=0.$$

Sistemul

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}=0 \end{array}\right. ,$$

i.e.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x-y+1=0 \\ 2y-x=0 \\ 2z-2=0 \end{array}\right. ,$$

are soluţia $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$.

În continuare vom prezenta patru modalităţi (notate cu A, B, C şi D) de a stabili dacă punctul critic $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ este punct de extrem.

A (metoda lui Sylvester). Hessiana a lui f în $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ este

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Deoarece $\Delta_1=2$, $\Delta_2=3$ şi $\Delta_3=6$, deducem că $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ este un minim local.

B (metoda valorilor proprii). Valorile proprii ale matricii

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

sunt $1,2,3$ care sunt strict pozitive.

Prin urmare $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ este un minim local.

C ($D^2f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)$ este pozitiv definită). Avem

$$D^2f(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1)(w)^2=2w_1^2+2w_2^2+2w_3^2-2w_1w_2=$$

$$= 2(w_1 - \frac{w_2}{2})^2 + \frac{3}{2}w_2^2 + 2w_3^2 = \Delta_1(w_1 - \frac{w_2}{2})^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}w_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2}w_3^2,$$

deci

$$D^2f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)(w)^2 > 0,$$

pentru orice $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Aşadar $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ este un minim local.

D (verificarea directă a faptului că $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ este un minim global). Avem

$$f(x, y, z) - f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = (z-1)^2 + (\frac{x}{2} - y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 \geq 0,$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Deci $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ este un minim global.

Exerciţii

1. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x, y, z > 0$.

2. Pentru funcţia $f : D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ pentru orice $(x, y) \in D$, să se determine punctele critice şi să se stabilească natura lor (de minim, de maxim, şa).

3. Să se determine punctele de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

Extreme cu legături. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Până în prezent am discutat situaţia în care punctele de extrem ale unei funcţii cu valori reale se află în interiorul domeniului de definiţie $D \subseteq \mathbb{R}^p$. Nici una dintre consideraţiile anterioare nu se aplică în cazul în care punctele de extrem se află pe frontiera domeniului de definiţie al funcţiei. Dacă aceasta poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcţii φ, atunci problema se reduce la studiul extremelor funcţiei $f \circ \varphi$. Dacă S este o suprafaţă conţinută în domeniul D de definiţie al funcţiei f cu valori reale, suntem nevoiţi, de multe ori, să determinăm extremele funcţiei $f_{|S}$. Spre pildă, pentru $D = \mathbb{R}^p$ şi $f(x) = \|x\|$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, problema de mai sus revine la a determina punctele, de pe S, care sunt cele mai depărtate sau apropiate de origine.

Dacă S poate fi parametrizată cu ajutorul unei funcţii φ, atunci problema, ca mai sus, se reduce la studiul extremelor funcţiei $f \circ \varphi$. De multe ori însă, această abordare nu este cea mai nimerită. Ca atare, vom prezenta o altă procedură pentru rezolvarea acestei probleme.

Teorema multiplicatorilor lui Lagrange. *Fie* $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $f, g_1, ..., g_q : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y), g_1(x,y), ..., g_q(x,y)$, $x = (x_1, ..., x_p)$, $y = (y_1, ..., y_q)$ *şi* $(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in D \mid g_1(x,y) = ... = g_q(x,y) = 0\} \overset{not}{=} S$ *satisfăcând următoarele proprietăţi:*

i) $f, g_1, ..., g_q$ *sunt de clasă* $\mathcal{C}^1$ *(i.e. admit derivate parţiale continue);*

ii) (x_0, y_0) *este punct de extrem local pentru* $f_{|S}$ *(i.e. există* $V \in \mathcal{V}_{(x_0,y_0)}$, $V \subseteq D$, *astfel încât* $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ *are semn constant pe* $V \cap S$*);*

iii) $\frac{\partial(g_1,...,g_q)}{\partial(y_1,...,y_q)}(x_0,y_0) \overset{not}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(x_0,y_0) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial y_q}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(x_0,y_0) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial y_q}(x_0,y_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_r}{\partial y_2}(x_0,y_0) & ... & \frac{\partial g_r}{\partial y_q}(x_0,y_0) \end{vmatrix} \neq 0.$

Atunci există $\lambda_1, ..., \lambda_q \in \mathbb{R}$ *(numere numite multiplicatori Lagrange) astfel încât*

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0,y_0) = ... = \frac{\partial F}{\partial x_p}(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial y_1}(x_0,y_0) = ... = \frac{\partial F}{\partial y_q}(x_0,y_0) =$$

$$= g_1(x_0,y_0) = ... = g_q(x_0,y_0) = 0,$$

unde

$$F = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_q g_q.$$

Observaţii.

1. *Modul practic de utilizare al teoremei de mai sus este următorul: fiind date funcţiile* $f, g_1, ..., g_q$, *se consideră funcţia* $F = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_q g_q$ *şi se rezolvă sistemul* $\frac{\partial F}{\partial x_1} = ... = \frac{\partial F}{\partial x_p} = \frac{\partial F}{\partial y_1} = ... = \frac{\partial F}{\partial y_q} = g_1 = ... = g_q = 0$ *care are* $2p+q$ *ecuaţii şi* $2p+q$ *necunoscute, anume* $x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q, \lambda_1, ..., \lambda_q$*; astfel se determină punctele* $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ *care sunt posibile puncte de extrem pentru funcţia* f *ale cărei variabile sunt supuse la "legăturile"* $g_1, ..., g_q$.

2. *Metoda lui Lagrange prezentată mai sus furnizează o condiţie necesară pentru ca punctul considerat să fie punct de extrem. Punctele astfel obţinute pot fi maxime relative, minime relative sau să nu fie extreme relative. În* *aplicaţii, stabilirea naturii acestor puncte se poate baza pe considerente geometrice sau fizice; în alte cazuri acest studiu poate conduce la analize foarte subtile.*

Exemplu

1. Folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, să se arate că distanţa de la punctul (x_0, y_0) la dreapta de ecuaţie $ax+by+c=0$ (unde $a^2+b^2 \neq 0$) este $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Soluţie. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date de

$$f(x,y) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

şi

$$g(x,y) = ax + by + c,$$

pentru orice $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Să considerăm

$$F = f + \lambda g.$$

Sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = g = 0,$$

care are forma

$$2(x-x_0) + \lambda a = 2(y-y_0) + \lambda b = ax + by + c = 0,$$

are soluţia

$$\lambda = \frac{2(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}, x = x_0 - \frac{a}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c), y = y_0 - \frac{b}{a^2+b^2}(ax_0+by_0+c).$$

Atunci, având în vedere considerente geometrice,

$$f(x,y) = \frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

reprezintă pătratul distanţei de la punctul (x_0, y_0) la dreapta considerată.

În concluzie distanţa de la punctul (x_0, y_0) la dreapta de ecuaţie

$$ax + by + c = 0$$

este

$$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

COMPLETĂRI

Definiţie. *Fie* $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in D$, $u, v \in \mathbb{R}^p - \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *astfel încât există* $\frac{\partial f}{\partial v}$ pe D. Dacă funcţia $\frac{\partial f}{\partial v}$ este derivabilă în raport cu vectorul u notăm $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial f}{\partial v})$.

Teorema lui Schwarz. *Fie* $c \in U = \overset{\circ}{U} \subseteq \mathbb{R}^p$, $u, v \in \mathbb{R}^p - \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ *şi* $f : U \to \mathbb{R}$ *satisfăcând următoarele două proprietăţi:*
i) $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ *şi* $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$ *există în orice punct din* U;
ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v}$ *este continuă în* c.
Atunci:
α) *există* $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(c)$;
β)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(c).$$

Aplicaţii multiliniare.

Definiţie. *O funcţie* $T : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, *se numeşte aplicaţie biliniară dacă:*

1) $T(ax + by, z) = aT(x, z) + bT(y, z)$ *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi orice* $x, y, z \in \mathbb{R}^p$

2) $T(x, ay + bz) = aT(x, y) + bT(x, z)$ *pentru orice* $a, b \in \mathbb{R}$ *şi orice* $x, y, z \in \mathbb{R}^p$.

Dacă $T(x, y) = T(y, x)$ *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}^p$ *atunci se numeşte aplicaţie biliniară simetrică.*

Vom nota cu $U : L_2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p; \mathbb{R}^q)$ *mulţimea aplicaţiilor biliniare definite pe* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ *cu valori în* $\mathbb{R}^q$.

Exemple.

1) Produsul scalar $<,>: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este o aplicaţie biliniară simetrică.

2) Dacă $A \in M_{p,p}(\mathbb{R})$ funcţia $T_A(x, y) =< xA, y >$ este o aplicaţie biliniară. Dacă $A = A^t$ atunci T_A este simetrică.

3) Fie $D \subseteq \mathbb{R}^p$, $c \in \overset{\circ}{D}$, $f : D \to \mathbb{R}$ astfel încât există şi sunt continue derivatele parţiale de al doilea ordin ale lui f pe o vecinătate a lui c şi $D^2 f(c) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ diferenţiala de ordin doi a lui f în c. Atunci $D^2 f(c)$ este o aplicaţie biliniară simetrică.

Remarcă. Fie $T:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ o aplicaţie biliniară simetrică. Atunci $T(x,y)=T(x_i\sum\limits_{i=1}^{p}=\sum\limits_{i=1}^{p}x_iT(e_i,y_i\sum\limits_{j=1}^{p}e_j)=\sum\limits_{i=1}^{p}(\sum\limits_{j=1}^{p}T(e_i,e_j)x_i)y_j=\sum\limits_{i,j=1}^{p}T(e_i,e_j)x_iy_j$.

Dacă notam cu A matricea $(T(e_i,e_j))_{i,j=\overline{1,p}}=\begin{pmatrix} T(e_1,e_1) & ... & T(e_1,e_p)\\ ... & ... & ...\\ T(e_p,e_1) & ... & T(e_p,e_p)\end{pmatrix}$

atunci $T(x,y)=<xA,y>=xAy^t$.

Remarcă. Fie $T:\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ o aplicaţie biliniară simetrică. Notăm cu $T_x:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ o aplicaţa dată de $T_x(y)=T(x,y)$ pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$. Se observă că T_x este o aplicaţie liniară şi că aplicaţia $\widehat{T}:\mathbb{R}^p\to L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ dată de $\widehat{T}(x)=T_x$ este o aplicaţie liniară. În acest fel am găsit o bijecţie $U:L_2(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p;\mathbb{R}^q)\to L(\mathbb{R}^p,L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}))$. Acest lucru ne permite să identificăm spaţiile vectoriale $L_2(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$ şi $L(\mathbb{R}^p,L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}))$.

Definiţie. *Pentru $D=\overset{\circ}{D}\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in D$ şi $f:D\to\mathbb{R}$ astfel încât există $f'\in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ pe D definim derivata de de ordin doi a lui f în c, ca fiind aplicaţia $(f')'\in L(\mathbb{R}^p,L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}))$ pe care o vom privi ca o aplicaţie biliniară $f''(c)(=U^{-1}((f')'))\in L_2(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p;\mathbb{R})$.*

Teoremă (Young). *Fie $D=\overset{\circ}{D}\subseteq\mathbb{R}^p$, $c\in D$ şi $f:D\to\mathbb{R}$ astfel încât există f' pe D şi $f''(c)$.* Dacă $u,v\in\mathbb{R}^p-\{0_{\mathbb{R}^p}\}$ atunci există $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(c)$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(c)$ şi avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(c)=\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(c)=f''(c)(u,v)=f''(c)(v,u).$$

Teorema funcţiilor implicite. Fie $D=\overset{\circ}{D}\subseteq\mathbb{R}^{p+q}$, *$f:D\to\mathbb{R}^q$ şi $(a,b)\in D$ ($a\in\mathbb{R}^p$ şi $b\in\mathbb{R}^q$) astfel încât există f' pe D, f' este continuă pe D, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ este inversabilă ($z\in\mathbb{R}^{p+q}$ este scris sub forma $z=(x,y)$ cu $x\in\mathbb{R}^p$ şi $y\in\mathbb{R}^q$). Atunci există $D_1=\overset{\circ}{D}_1\subseteq\mathbb{R}^p$ şi $D_2=\overset{\circ}{D}_2\subseteq\mathbb{R}^q$ astfel încât $(a,b)\in D_1\times D_2\subseteq D$ şi$D_1\to D_2$ cu proprietatea că $f(x,\phi(x))=0$. Mulţimile D_1 şi D_2 pot fi alese astfel încât funcţia ϕ să fie de clasă C^1 (C^k dacă f este de clasă C^k).*

Notă. Ecuaţia $f(x,y)=0$ *reprezintă un sistem format din q ecuatii în $\mathbb{R}$ cu $p+q$ necunoscute reale. Teorema funcţiilor implicite conţine condiţii suficiente ca mulţimea soluţiilor acestei ecuaţii să fie local graficul unei funcţii.*

Exemple.

1) Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ o funcţie dată de $f(x,y)=x^2+y^2-5$ şi $c=(1,2)$.

Avem $f'(x,y)=(2x,2y)$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=4\neq 0$.

Atunci există $\varepsilon>0$ şi $\delta>0$ astfel încât să existe o unică funcţie $\phi:(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\to(2-\delta,2+\delta)$ astfel încât $x^2+\phi(x)^2=0$. Rezultă că $\phi(1)=2$, $2x+2\phi'(x)\phi(x)=0$, $\phi'(x)=-\frac{x}{\phi(x)}$ şi $\phi'(1)=-\frac{1}{\phi(1)}=-\frac{1}{2}$.