

Exerciții

1. Determinați punctele de extrem local ale funcțiilor de mai jos și precizați natura lor:

a) $f: \underset{(0,0) \times (0,0)}{(0,\infty)^2} \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy.$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - xy + yz + 2xz.$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$

2. Arătați că ecuația $(x^2 + y^2) - 3(x^2 + y^2) - 2 = 0$ definește într-o vecinătate a punctului $(1, -1)$ funcția implicită $y = y(x)$ și determinați $y'(1)$.

3. Arătați că ecuația $xz + ye^z = 1$ definește într-o vecinătate a punctului $(1, 0, 1)$ funcția implicită $z = z(x, y)$ și determinați $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$ și $dz(1, 0)$.

4. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $x + y = 1$.

5. Fie $f: (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = xy^2z^3$. Determinați punctele de extrem local ale lui f cu legătura $x + 2y + 3z = 1$.

6. Determinați valorile extreme ale funcției $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x + 3y + z$ atunci când variabilele sale sunt supuse restricției $x^2 + y^2 + z^2 = 11$.

7. Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = y + z$. Determinați punctele de extrem global ale funcției $f|_{\overline{B}(\underset{(0,0,0)}{0}, 3)}$.

8. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$. Determinați valorile extreme ale funcției $f|_{\overline{B}(\underset{(0,0)}{0}, 1)}$.

9. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} dx$.

10. Determinați:

a) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}} dx$.

b) $\int_1^\infty \frac{e^x}{e^x - 1} dx$.

c) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx$.

d) $\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2} dx$.

e) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx$.

$$f) \int_1^2 \frac{1}{4-x^2} dx.$$

11. Folosind eventual funcțiile Γ și B determinați:

$$a) \int_0^{\infty} x^3 e^{-3x} dx.$$

$$b) \int_0^{\infty} x e^{-x^4} dx.$$

$$c) \int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx.$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} dx.$$

12. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de două ori a.i., integrala improprie $\int_a^{\infty} f(x) f''(x) dx$ este convergentă și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) f'(x))$ este finită.

Arătați că integrala improprie $\int_a^{\infty} (f'(x))^2 dx$ este convergentă.