CURS 10

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

LEGĂTURA DINTRE SINTAXĂ ŞI SEMANTICĂ

Teorema de corectitudine 9.4
Orice Γ-teoremă este consecinţă semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ şi $\Gamma \subseteq Form$.

Teorema de completitudine 9.6
Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Definiţia 10.1

Fie Γ o mulţime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observaţie.

Fie Γ, Δ mulţimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci şi Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci şi Δ este inconsistentă.

Propoziţia 10.2

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulţimea teoremelor este consistentă.

Demonstraţie.

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicţie. Aşadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziţia 8.7.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obţinem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$

Propoziţia 10.3

Pentru o mulţime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \perp$.

Demonstraţie. (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) şi (*i*) $\Rightarrow$ (*iv*) sunt evidente.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*) Fie φ o formulă. Conform Propoziţia 9.2,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) şi de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

(*iv*) $\Rightarrow$ (*iii*). Presupunem că $\Gamma \vdash \perp$. Avem că $\perp = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci şi $\Gamma \vdash \top$. $\square$

Propoziţia 10.4

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Demonstraţie.

(i) Avem

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\
 & & \text{P.10.3.(iv)} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\
 & & \text{Teorema Deducţiei} \\
 & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\
 & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ şi P.9.7.}
\end{array}
$$

(ii) Similar. □

Propoziţia 10.5

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 10.6

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulţime finită inconsistentă.

Demonstraţie. ”$\Leftarrow$” este evidentă.

”$\Rightarrow$” Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziţiei 10.3.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziţia 8.12, obţinem o submulţime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă. $\square$

Un rezultat echivalent:

Propoziţia 10.7

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulţime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 10.8
Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\{\varphi\} \text{ este inconsistentă } &\iff \vdash \neg\varphi \\
&\qquad \text{conform Propoziţiei 10.4.(ii)} \\
&\iff \models \neg\varphi \\
&\qquad \text{conform Teoremei de completitudine} \\
&\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
&\qquad \text{conform Propoziţiei 7.11.(ii).}
\end{aligned}$$

Aşadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 10.9 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)
Pentru orice mulţime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \bot$ şi, aplicând Teorema de corectitudine, rezultă că $\Gamma \vDash \bot$. Ca urmare, $e \vDash \bot$, ceea ce este o contradicţie.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă şi aplicăm apoi Teorema de compacitate pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulţime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziţiei 10.7. Din Propoziţia 10.5.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 10.8, obţinem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziţiei 7.12.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 10.10 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)
Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Demonstraţie.

$$\begin{array}{lll} \Gamma \vdash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ & & \text{conform Propoziţiei 10.4.(i)} \\ & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & & \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ & \iff & \Gamma \vDash \varphi \\ & & \text{conform Propoziţiei 7.11.(i).} \end{array}$$

$\square$

Observaţie
Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exerciţiu).

FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ/DISJUNCTIVĂ

Definiţia 10.11

Un literal este o

- variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau
- negaţia unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).

Exemplu.

- v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi
- $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiţia 10.12

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncţie de conjuncţii de literali.

$$\varphi \text{ este în FND ddacă } \varphi = \bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}\right), \text{ unde fiecare } L_{i,j} \text{ este literal.}$$

Definiţia 10.13

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncţie de disjuncţii de literali.

$$\varphi \text{ este în FNC ddacă } \varphi = \bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}\right), \text{ unde fiecare } L_{i,j} \text{ este literal.}$$

Exemple.

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât şi în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât şi în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

Notaţie. Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziţia 10.14

(i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.

(ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Demonstraţie.

(i) Aplicând Propoziţia 7.4, obţinem

$$\begin{aligned} \neg\varphi &= \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \neg \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\ &\sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right). \end{aligned}$$

(ii) Exerciţiu. $\square$

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicaţiile şi echivalenţele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{şi} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negaţii, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, şi se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{şi} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3.

Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ faţa de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{şi} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ faţa de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{şi} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu.

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \to \neg v_2) \to (v_0 \to v_2)$.

$$
\begin{array}{lll}
\varphi & \sim & \neg(\neg v_0 \to \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
& \sim & (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
& \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 & \text{Pasul 2.}
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obţine FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\
& \sim & (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotenţa şi comutativitatea lui $\vee$, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

Exemplu.

Arătaţi că $\vDash v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$.

v_1	v_2	$v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel defineşte o funcţie $F : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fie φ o formulă şi $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} : Var(\varphi) \to \{0,1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definim $e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \in \{0,1\}$ astfel:

$$e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \to \{0,1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Conform Propoziţiei 1.14, definiţia nu este ambiguă.

Definiţia 10.15

Funcţia asociată lui φ este $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Aşadar, F_φ este funcţia definită de tabela de adevăr pentru φ.

Propoziţia 10.16

(i) Fie φ o formulă. Atunci
   (a) $\vDash \varphi$ ddacă F_φ este funcţia constantă 1.
   (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcţia constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule. Atunci
   (a) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.
   (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $F_\varphi = F_\psi$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 10.17

O funcţie booleană este o funcţie $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este numărul variabilelor lui F.

Exemplu.

Pentru orice formulă φ, F_φ este funcţie Booleană cu n variabile, unde $n = |Var(\varphi)|$.

Teorema 10.18

Fie $n \geq 1$ şi $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcţie booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Demonstraţie. Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, luăm $\varphi := \bigvee_{i=0}^{n-1}(v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $Var(\varphi) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, aşadar, $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i, rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este de asemenea funcţia constantă 0.

Altfel, mulţimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.

Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in T} \left(\bigwedge_{\varepsilon_i = 1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i = 0} \neg v_i \right).$$

Deoarece $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, avem că $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Demonstrăm că pentru orice $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$, avem că

$$F_\varphi(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1 \iff H(\delta_1, \ldots, \delta_n) = 1,$$

de unde va rezulta imediat că $H = F_\varphi$.

Fie $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$. Atunci

$$\begin{aligned}
e^+(\varphi) = 1 \quad & \iff \quad \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\Big(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} e(v_i) \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg e(v_i)\Big) = 1 \\
& \iff \quad \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\Big(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i\Big) = 1 \\
& \iff \quad \text{există } (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i = 1 \\
& \qquad\quad \text{şi } \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg\delta_i = 1 \\
& \iff \quad \text{există } (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \delta_i = \varepsilon_i \\
& \qquad\quad \text{pentru orice } i \in \{1,\ldots,n\} \\
& \iff \quad (\delta_1,\ldots,\delta_n) \in T \\
& \iff \quad H(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1.
\end{aligned}$$

Prin urmare, $F_\varphi(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1 \iff e^+_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(\varphi) = 1$ $\iff e^+(\varphi) = 1$ pentru orice $e : V \to \{0,1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\} \iff H(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1.$ $\square$

Teorema 10.19
Fie $n \geq 1$ şi $H : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcţie booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Demonstraţie. Dacă $H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=0}^{n-1} (v_i \vee \neg v_i).$$

Altfel, mulţimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in F} \left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i \right).$

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (exerciţiu!). $\square$

Exemplu.

Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

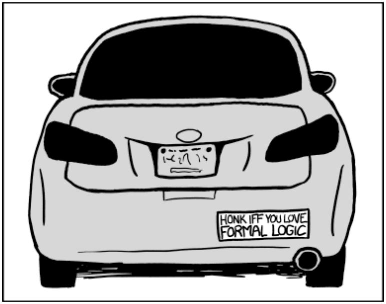
$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Teorema 10.20
Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND şi cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Demonstraţie. Fie $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ şi $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funcţia booleană asociată. Aplicând Teorema 1.75 cu $H := F_\varphi$, obţinem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Aşadar, conform Propoziţiei 1.73.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.
Similar, aplicând Teorema 1.76 cu $H := F_\varphi$, obţinem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. $\square$

Pe data viitoare!



Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.