Curs 7

Funcții uniform continue.

Definiție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice. O funcție $f: X \to Y$ se numește uniform continuă dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, x' \in X$ cu proprietatea că $d_1(x, x') < \delta_\varepsilon$, avem $d_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Propoziție. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice și $f: X \to Y$ o funcție uniform continuă. Atunci f este continuă.

Observație. Reciproca propoziției precedente nu este, în general, adevărată.

Teoremă. Fie (X, d_1) și (Y, d_2) două spații metrice a.î. X este mulțime compactă (ne referim la topologia τ_{d_1}) și $f: X \to Y$ o funcție continuă.

Atunci f este uniform continuă.

Propoziție. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat (i.e. $I \neq \emptyset$ și I nu se reduce la un punct) și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f este uniform continuă.

Propoziție. Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (A nu este neapărat interval). Sunt echivalente:

1) f uniform continuă.

2) $\forall (x_n)_n \subset A$, $\forall (y_n)_n \subset A$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Propoziție. Fie $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f uniform continuă (pe A).

2) $\exists\, a \in A$ a.î. f este uniform continuă pe $A \cap (-\infty, a]$ (i.e. $f|_{A\cap(-\infty,a]}$ este uniform continuă) și f este uniform continuă pe $A \cap [a, \infty)$ (i.e. $f|_{A\cap[a,\infty)}$ este uniform continuă).

Propoziție. Fie $f:(a,b]\to\mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) f uniform continuă.

2) $\exists\ \tilde{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}$ continuă a.î. $\tilde{f}\big|_{(a,b]}=f$

($\tilde{f}$ prelungire continuă a lui f).

Definiție. Fie (X,d) un spațiu metric și $(x_n)_n\subset X$. Spunem că $(x_n)_n$ este șir Cauchy în raport cu metrica d dacă $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall\, m,n\in\mathbb{N}$, $m\geq n_\varepsilon$, $n\geq n_\varepsilon$, avem $d(x_m,x_n)<\varepsilon$.

Observație. Sintagma „în raport cu metrica d" poate fi înlocuită cu sintagma „în spațiul metric (X,d)".

Propoziție. Fie (X,d_1) și (Y,d_2) două spații metrice, $f:X\to Y$ o funcție uniform continuă și $(x_n)_n\subset X$ un șir Cauchy în raport cu metrica d_1. Atunci $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy în raport cu metrica d_2.