CURS 8

DIFERENTIABILITATEA DE ORDIN DOI

PUNCTE DE EXTREM LOCAL

A) NOTIUNI INTRODUCTIVE

Definitia 1. Spunem ca functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat f este diferentiabila pe $V \cap D$ si $df : V \cap D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferentiabila in x_0.

Notatie. $d^2 f(x_0) \stackrel{not}{=} d(df)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$d^2 f(x_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicatie biliniara si continua

Definitia 2. Functia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala de ordinul doi in raport cu variabilele x_i si $x_j, 1 \le i, j \le n$ in punctul $x_0 \in D \cap D'$ daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat f admite derivata partiala in raport cu variabila x_j pe $V \cap D$ si $\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \cap D \to \mathbb{R}^m$ admite derivata partiala in raport cu variabila x_i in punctul x_0.

Notatie. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \stackrel{not}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0) \in \mathbb{R}^m$

Teorema lui Schwarz. Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferentiabila de doua ori in punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci functia f admite toate derivatele partiale de ordinul doi in x_0 si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$ $\forall i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$. In plus,

$$d^2 f(x_0)((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)) =$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \ \ \forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Corolar. a) Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu admite toate derivatele partiale de ordinul doi in punctul x_0, atunci f nu este diferentiabila de doua ori in x_0.

b) Daca $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite toate derivatele partiale de ordinul doi in punctul x_0 si $\exists i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel incat $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, atunci f nu este diferentiabila de doua ori in x_0.

Teorema lui Young. Se considera functia $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $i \neq j \in \{1, 2, ..., n\}$ si $V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel ca $V \subseteq D$.Daca f admite derivatele partiale de ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ pe V si acestea sunt functii continue in punctul x_0, atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$. Daca, in plus, f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe V si acestea sunt functii continue in punctul x_0, atunci f este diferentiabila de doua ori in x_0.

Corolar. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o functie si $A = \overset{0}{A} \subseteq D$ o multime nevida. Daca f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe A si acestea sunt functii continue pe A, atunci f este functie diferentiabila de doua ori pe A.

Definitia 3. Spunem ca functia $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este de clasa C^2 pe multimea D daca f admite toate derivatele partiale de ordinul doi pe D si acestea sunt functii continue pe D.

Notatie. $C^2(D) \overset{not}{=} \{f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m | f \text{ functie de clasa } C^2 \text{ pe } D\}$

B) PUNCTE DE EXTREM LOCAL PENTRU FUNCTII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

Definitia 4. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D$.

a) Spunem ca x_0 este punct de minim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \geq f(x_0)\ \ \forall x \in V \cap D$.

b) Spunem ca x_0 este punct de maxim local al functiei f daca $\exists V \in V_{\tau_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel incat $f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall x \in V \cap D$.

c) Spunem ca x_0 este punct de extrem local al functiei f daca x_0 este punct de minim local sau punct de maxim local al functiei f.

Definitia 5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie si $x_0 \in D \cap D'$ astfel ca f este diferentiabila de doua ori in x_0.

Matricea $H_f(x_0) \overset{not}{=} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ se numeste hessiana functiei f in punctul x_0.

Criteriul lui Sylvester. Fie $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^2 pe multimea D si $x_0 \in D$ un punct critic al functiei f.

a) Daca $d^2 f(x_0)(\omega, \omega) > 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$, atunci x_0 este punct de minim local al functiei f.

b) Daca $d^2 f(x_0)(\omega, \omega) < 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$, atunci x_0 este punct de maxim local al functiei f.

c) Daca $\exists \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, ..., 0)\}$ astfel incat $d^2 f(x_0)(\omega_1, \omega_1) > 0$ si $d^2 f(x_0)(\omega_2, \omega_2) < 0$, atunci x_0 nu este punct de extrem local al functiei f.

Observatie. Notam $\Delta_k = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leq i,j \leq k}, k \in \{1, 2, ..., n\}$

a) Daca $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n > 0$, atunci x_0 este punct de minim local al functiei f.

b) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0$, atunci x_0 este punct de maxim local al functiei f.

c) Daca $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, ..., (-1)^n \Delta_n \geq 0$ si $\exists 1 \leq i \leq n$ astfel incat $\Delta_i = 0$, atunci nu ne putem pronunta asupra naturii punctului x_0 cu criteriul lui Sylvester.

d) In celelalte cazuri, x_0 nu este punct de extrem local al functiei f.

Exemplu. Sa se determine punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita prin $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Algoritmul de determinare al punctelor de extrem local prezentat pentru acest exemplu se aplica functiilor care au domeniul de definitie o multime deschisa inclusa in $\mathbb{R}^n$.

- $D = \mathbb{R}^2$ multime deschisa
- Se studiaza continuitatea functiei si se descrie multimea punctelor de discontinuitate D_f.

f functie continua pe $\mathbb{R}^2 \Rightarrow D_f = \varnothing$

- Se studiaza diferentiabilitatea functiei si se descrie D_1 multimea punctelor in care aceasta nu este diferentiabila.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ functii continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ multime deschisa
Rezulta ca f este functie de clasa C^1 pe $\mathbb{R}^2$ si $D_1 = \varnothing$
• Se determina punctele critice ale functiei f, rezolvand sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0,0),(1,1)\} = C$
• Se studiaza diferentiabilitatea de ordinul doi a functiei si se descrie D_2 multimea punctelor in care aceasta nu este diferentiabila de doua ori.
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = 6x \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -3 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 6y \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. functii continue pe $\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$ multime deschisa
Rezulta ca f este functie de clasa C^2 pe $\mathbb{R}^2$ si $D_2 = \varnothing$
• Se aplica criteriului lui Sylvester in punctele critice in care functia este diferentiabila de doua ori si se descriu D_3 multimea punctelor critice in care criteriul se poate aplica si D_4 multimea punctelor critice in care criteriul nu se poate aplica.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
$\Delta_1 = 0$
$\Delta_2 = -9 < 0$
Ne incadram la subpunctul (d) al observatiei criteriului lui Sylvester, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local al functiei f.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$
$\Delta_1 = 6 > 0$
$\Delta_2 = 27 > 0$
Ne incadram la subpunctul (a) al observatiei criteriului lui Sylvester, deci $(1,1)$ este punct de minim local al functiei f.
$D_3 = \{(0,0),(1,1)\}$
$D_4 = \varnothing$
Concluzie: $(1,1)$ este singurul punct de extrem local al functiei f.
In cazul in care una dintre multimile D_f, D_1, D_2, D_4 este nevida, elementele respective sunt posibile puncte de extrem local ale functiei. Se verifica daca sunt puncte de extrem local folosind doar definitia, criteriul lui Syvester in cazul acestor puncte nu se poate aplica.

C) TEOREMA FUNCTIILOR IMPLICITE

Pentru simplitatea scrierii, se foloseste notatia $(x_0, y_0) = ((a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema functiilor implicite. Fie $f : D = \overset{0}{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o functie de clasa C^1 pe multimea D si $(x_0, y_0) \in D$ astfel incat:

i) $f(x_0, y_0) = 0$

ii) $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$.

Exista $r_1, r_2 > 0$ astfel incat $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D, \exists! \varphi : B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ o functie de clasa C^1 cu urmatoarele proprietati:

a) $\varphi(x_0) = y_0$

b) $f(x, \varphi(x)) = 0 \; \forall x \in B(x_0, r_1)$.

In plus, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0)} \; \forall 1 \leq i \leq n$.

Exemplu. Sa se arate ca ecuatia $e^z + x^2 y + z - 1 = 0$ are o infinitate de solutii definite implicit sub forma $z = \varphi(x, y)$ in vecinatatea punctului $(1, 0, 0)$. Sa se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0)$ si $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0)$.

Se alege functia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^z + x^2 y + z - 1$

$\mathbb{R}^3$ multime deschisa

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy \; \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 \; \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = e^z + 1 \; \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ functii continue pe $\mathbb{R}^3$

Deducem ca f este functie de clasa C^1 pe $\mathbb{R}^3$.

$f(1, 0, 0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = 2 \neq 0$

Sunt verificate ipotezele teoremei functiilor implicite si obtinem ca exista $r_1, r_2 > 0$ astfel incat $B((1, 0), r_1) \times B(0, r_2) \subseteq \mathbb{R}^3, \exists! \varphi : B((1, 0), r_1) \to B(0, r_2)$ o functie de clasa C^1 cu urmatoarele proprietati:

a) $\varphi(1, 0) = 0$

b) $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \; \forall (x, y) \in B((1, 0), r_1)$.

Relatia (b) este echivalenta cu afirmatia ca ecuatia are o infinitate de solutii de forma $z = \varphi(x, y)$ cu $(x, y) \in B((1, 0), r_1)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0.$