Să se calculeze derivatele în raport cu un vector $u \neq 0$ pentru funcțiile: -1-

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 y^4$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(t,y) = e^{2t} \cdot \sin 3y$

3) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z$

4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^3 e^y + x$

5) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^3 y^2 e^{2z}$

1) $u = (m, n)$ cu $m^2 + n^2 \neq 0$ $\quad c = (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(c+tu) - f(c)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(a+tm)^2 (b+tn)^4 - a^2 b^4}{t} \overset{\frac{0}{0}\, l'H}{=}$$

$$= \lim_{t \to 0} 2m(a+tm)(b+tn)^4 + 4n(a+tm)^2(b+tn)^3$$

$$= m \cdot 2ab^4 + n \cdot 4a^2b^3 = m \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + n \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = f'(a,b)\, u^t$$

$$u^t = \langle f'(a,b), u \rangle$$

1) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

Se cere: a) cont lui f

b) $\exists$ + cont derivatelor parțiale

c) derivabilitatea lui f

a) f este cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pentru că se obține prin operații de funcții continue (sau este raport de funcții continue (polinomiale)).

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot y^2 \leq y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2(x^2+y^2) - x^2y^2 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ este cont pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (la fel ca la a).

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{2|xy^4|}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2}_{\le 1}\cdot 2|xy|\le 2|x|\xrightarrow[(x,y)\to 0]{}0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ - simetric

c) Dacă $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ și sunt cont în $(0,0)$

atunci $\exists\ f'(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=(0,0)$

Cu definiția.

f este derivabilă în $(0,0)\Leftrightarrow\exists T\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ a.î.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}-T(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$T(x,y)=ax+by$ cu $a=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ și

$b=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\le 1}\cdot|y|\le|y|\xrightarrow[\substack{x\to 0\\ y\to 0}]{}0$$

Să se studieze a) cont în (0,0)

b) ∃ + cont derivatelor parțiale și

c) derivabilitatea lui f în (0,0) pentru

1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^8+y^8} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

unde $(m,n)\in\{(8,2),(8,1),(7,3),(7,2),(7,1),$
$(6,4),(6,3),(6,2)\ (5,5)\ (5,4)\ (5,3)\}$.

3) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^{2p}+y^{2p}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

unde $m, n, p\in\mathbb{N}^*$

4) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^n y^m}{x^4+y^{10}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

$(n,m)\in\{(3,5),(2,5),(1,6)\ (1,5)\ (1,8)\ (3,6)\}$

5) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\quad f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^4+y^4} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x=y=0\end{cases}$

6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y^m}{x^{2p}+y^{2p}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

$n, m p \in \mathbb{N} \quad p \geq 1$

7) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y^m}{x^{2p}+y^{2q}} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=0 \end{cases}$

$n, m, p, q \in \mathbb{N} \quad p \geq 1 \quad q \geq 1$

8) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2 z^2}{x^4+y^4+z^4} & x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=z=0 \end{cases}$

9) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y z^2}{x^4+y^4+z^4} & x^2+y^2+z^2 \neq 0 \\ 0 & x=y=z=0 \end{cases}$

Să se calculeze direct și cu ajutorul formulei de derivare a funcțiilor compuse derivate funcțiilor:

1) $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ unde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=\begin{pmatrix} \overset{f_1}{\overset{\shortparallel}{x+y}} \\ \underset{f_2}{\underset{\shortparallel}{x}} \end{pmatrix}$

și $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ $\quad g(u,v)=\begin{pmatrix} u+v \\ uv \\ u-v \end{pmatrix}$

2) $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ unde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=x^2y$

și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $\quad g(u,v)=\begin{pmatrix} uv+1 \\ u^2v \end{pmatrix}$

3) $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ $f(x,y)=\begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3y \end{pmatrix}$

și $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ $\quad g(u,v,w)=\begin{pmatrix} u \\ u-v \\ u+2v \end{pmatrix}$

Să se calculeze direct şi cu ajutorul formulei inversei $(f^{-1})'$ pentru

a) $f : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2}{y} , \frac{y^2}{x} \right)$$

b) $f : (0,\infty)^2 \to (0,\infty)^2$

$$f(x,y) = \left(\frac{x^3}{y} , \frac{y}{x} \right)$$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$

d)