Nechita Maria-Simca

anul I, seria 14

Examen Logica Matematică și Computațională

→ 079

① V = mulțimea variab propoziționale

E = mulțimea enunțurilor

T = mulțimea teoremelor formale ale logicii propoz clasice

$p, q, r \in V$

$\theta, \xi \in T$ $\quad \Sigma \subseteq E$ $\quad \alpha_i, \beta_j, \gamma_k \in E$ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$

$\Sigma \cup \{p \vee q \vee r\} \vdash \varphi$ $\quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha_i$

$i = 0 \Rightarrow \alpha_0 : [(\theta \to p) \leftrightarrow (\xi \to q)] \leftrightarrow r$

$j = 7 \Rightarrow \beta_7 : (p \wedge q) \to \alpha_1$

$k = 9 \Rightarrow \gamma_9 : [(p \wedge q) \to r] \longleftrightarrow (q \vee r)$

→ 1. $\vdash \alpha_0 \to (p \vee q \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \vee r$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Observăm că în orice caz mai puțin când $p = q = r = 0$ avem $(p \vee q \vee r) = 1$

$\Rightarrow \vdash \alpha_0 \to (p \vee q \vee r) = 1$ (1)

Dacă $p = q = r = 0$
Știm că $\theta = 1$ și $\xi = 1$ $\Big|$ $\Rightarrow \theta \to p = 0$
$\xi \to q = 0$

$(\theta \to p) \leftrightarrow (\xi \to q) = 1 \qquad r = 0$

$[(\theta \to p) \leftrightarrow (\xi \to q)] \leftrightarrow r = 0 \Rightarrow \vdash \alpha_0 = 0$

$\Rightarrow \vdash \alpha_0 \to (p \vee q \vee r) = 1 \ (2)$

(1)(2) $\Rightarrow \vdash \alpha_0 \to (p \vee q \vee r) = 1$ în orice caz

- $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha_0 \xRightarrow{\text{T. Deducției}} \Sigma \vdash \varphi \to \alpha_0$

$\Sigma \cup \{p \vee q \vee r\} \vdash \varphi \xRightarrow{\text{T.D}} \Sigma \vdash (p \vee q \vee r) \to \varphi$

Am demonstrat anterior că:

$\vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\} \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\}$

$\Sigma \vdash \{p \vee q \vee r\} \to \varphi$
$\Sigma \vdash \alpha_0 \to \{p \vee q \vee r\}$ $\Bigg|$ $\xRightarrow{\text{tranzitivitate}} \Sigma \vdash \alpha_0 \to \varphi$

$\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \alpha_0$ și $\Sigma \vdash \alpha_0 \to \varphi$

$\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha_0) \wedge (\alpha_0 \to \varphi) \Rightarrow \Sigma \vdash (\varphi \leftrightarrow \alpha_0)$

- $(\Sigma \vdash \alpha_i, \Sigma \vdash \alpha_i \to \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi)$

Presupunem că $\Sigma \vdash \alpha_0$

Știm că $\Sigma \vdash \alpha_0$
și
$\Sigma \vdash \alpha_0 \to \varphi$ $\Bigg|$ $\xRightarrow{\text{Modus Ponens}} \Sigma \vdash \varphi$ ceea ce e contradicție,

$\Sigma \nvdash \varphi$

$\Rightarrow$ Presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow$

$\Sigma \nvdash \alpha_0$

② $\alpha_0 = [(\theta \to p) \leftrightarrow (\xi \to q)] \leftrightarrow r$

$\beta_7 = (p \wedge q) \to \alpha_1 \quad \alpha_1 = \neg p \to [(\theta \wedge \neg q) \to (\xi \wedge r)]$

$\gamma_9 = [(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow (q \vee r)$

α_1:

p	q	r	① $(\theta \wedge \neg q)$	② $(\xi \wedge r)$	$1 \to 2$	$\neg p \xrightarrow{\alpha_1} (1 \to 2)$
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1

α_0:

p	q	r	① $\theta \to p$	② $\xi \to q$	$1 \Leftrightarrow 2$	α_0
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

nu are toate elementele → îl putem lua singur în sistemul

α_1	$p \wedge q$	β_7
0	0	1
1	0	1
1	0	1
1	0	1
1	0	1
1	0	1
1	1	1
1	1	1

are toate elementele 1 ⇒ nu îl putem lua singur în sistem

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \to r$ ①	$q \vee r$ ②	γ_9 (1↔2)
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

îl putem lua singur în subm.

α_0	β_7	γ_9
0	1	0
1	1	1
1	1	1
0	1	1
1	1	1
0	1	1
0	1	0
1	1	1

Submulțimi consistente:

→ mulțime consistentă: dacă nu e inconsistentă → orice enunț e consecință sintactică a mulțimii

⇒ submulțimi: $\{\alpha_0\}$, $\{\gamma_9\}$, $\{\alpha_0, \beta_7\}$, $\{\alpha_0, \gamma_9\}$, $\{\beta_7, \gamma_9\}$, $\{\alpha_0, \beta_7, \gamma_9\}$, $\{\emptyset\}$

② $\tau = (\underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{f}, \underbrace{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}_{R}, \emptyset)$

$|A| = 3$

u	a	b	c
f_0^A	c	b	a
f_1^A	b	a	a
f_2^A	c	a	b
f_3^A	a	c	b
f_4^A	b	b	a
f_5^A	c	a	c
f_6^A	c	b	b
f_7^A	b	c	a
f_8^A	b	c	b
f_9^A	a	c	c

$R_0^A = \{(a,a), (a,b), (c,b)\}$

$R_1^A = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$

$R_2^A = \{(a,c), (c,b), (c,c)\}$

$R_3^A = \{(a,b), (b,b), (b,c)\}$

$R_4^A = \{(a,a), (b,b), (c,a)\}$

$R_5^A = \{(a,c), (b,a), (c,c)\}$

$R_6^A = \{(a,c), (c,a), (c,b)\}$

$R_7^A = \{(a,b), (b,c), (c,c)\}$

$R_8^A = \{(a,a), (b,a), (c,a)\}$

$R_9^A = \{(a,a), (a,c), (c,b)\}$

$+, w \in$ [illegible] $\Rightarrow$ [illegible]

$$A \models Q_i \, v \, Q_{N-i} \, w \, [(f_j(f_k(v)) = f_k(f_j(w))) \to R_j(v, f_k(w))]$$

$$Q_0 = \forall$$
$$Q_i = \exists$$

$i = 0$

$j = \neq$

$k = g$

$$\Rightarrow A \models \forall v \, \exists w \, [f_{\neq}(f_g(v)) = f_g(f_{\neq}(w))) \to R_{\neq}(v, f_k(w))]$$

(+) $v = a$

$$\exists w \, [\underbrace{f_{\neq}(f_g(a))}_{f_{\neq}(a) = b} = f_g(f_{\neq}(w))) \to R_{\neq}(a, f_g(w))]$$

$$\exists w \, [b = f_g(f_{\neq}(w))) \to \underbrace{R_{\neq}(a, f_g(w))}]$$

$$f_g(x) = b \ \cancel{de} \Rightarrow \cancel{\ } \ \forall x$$

$$b = f_g(f_{\neq}(w)) = 0 \ \forall w$$

Pentru ca $A = 1$ $R_{\neq}(a, f_g(w))$ poate lua orice val

(+) $v = b$

$$\exists w \, [f_{\neq}(\underbrace{f_g(b)}_{= c}) = f_g(f_{\neq}(w))) \to R_{\neq}(b, f_g(w))] \quad (1)$$

$$f_{\neq}(c) = a$$

Pentru (1) $= 1$: $f_g(f_{\neq}(w)) = a \Rightarrow f_{\neq}(w) = a$

$$w = c$$

$$R_{\neq}(b, \underbrace{f_g(a)}_{a}) = 0 \Rightarrow 1 \to 0 = 0$$

$$\Rightarrow w \neq c$$

(1) $= 0$ $\quad w \in \{a, b\}$ $\quad f_g(f_{\neq}(w)) = a \to 0$

$R_7(b, \underbrace{f_g(b)}_{c}) = 1$ $\Leftrightarrow$ $0 \to 1 = 1$

$R_7(b, \underbrace{f_g(a)}_{a}) = 0$ $\Rightarrow A = 1$

(III) $v = c$

$\exists w\, [f_7(\underbrace{f_g(c)}_{c}) = f_g(f_7(w)) \to R_7(c, f_g(w))]$

$f_7(c) = a$

Pentru ca $f_g(f_7(w)) = a \Rightarrow f_7(w) = a$

$w = c$

Analog cazului (II), avem pentru ca $A = 1$

$R_7(c, \underbrace{f_g(c)}_{c}) = 1$ e adev

$\Rightarrow \exists w$ a.î. implicația să fie adevărată

Din (I), (II), (III) $\Rightarrow A \models \forall v \exists w\, [f_7(f_g(v)) = f_g(f_7(w))$
$\to R_7(v, f_g(w))]$

1.3 $\varepsilon \in \{\alpha_0, \beta_7, \gamma_g\}$ satisface

$\{\alpha_0, \beta_7, \gamma_g\} \setminus \{\varepsilon\} \vdash \varepsilon$

α_0	β_7	γ_g	$(\alpha_0 \to \beta_7)$
0	1	0	
1	1	1	ε_1
1	1	1	ε_2
0	1	1	ε_3
1	1	1	ε_4
0	1	1	ε_5
0	1	0	
1	1	1	ε_6

$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_6$ enunțuri din γ_g care se deduc din α_0, β_7

β_7	γ_9	δ_{10}	
1	0	0	$\to \varepsilon_1$
1	1	1	$\to \varepsilon_2$
1	1	1	ε_3
1	1	0	
1	1	1	ε_4
1	1	0	ε_5
1	0	0	
1	1	1	ε_6

$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_6$ enunțuri din δ_{10} care se deduc din β_7, γ_9

δ_{10}	γ_9	β_7	
0	0	1	$\to \varepsilon_1$
1	1	1	$\to \varepsilon_2$
1	1	1	⋮
0	1	1	⋮
1	1	1	⋮
0	1	1	⋮
0	0	1	⋮
1	1	1	$\to \varepsilon_8$

$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_8$ — u — β_7

— u — δ_{10} și γ_9

γ_9	δ_{10}	β_7	
0	0	1	$\to \varepsilon_1$
1	1	1	$\to \varepsilon_2$
1	1	1	$\to \varepsilon_3$
1	0	1	
1	1	1	$\to \varepsilon_4$
1	0	1	
0	0	1	$\to \varepsilon_5$
1	1	1	$\to \varepsilon_6$

enunțuri din β_7 care se deduc din γ_9 și δ_{10}

γ_9	β_7	δ_{10}	
0	1	0	$\to \varepsilon_1$
1	1	1	
1	1	1	$\to \varepsilon_2$
1	1	0	
1	1	1	$\to \varepsilon_3$
1	1	0	
0	1	0	
1	1	1	$\to \varepsilon_4$

enunțuri din δ_{10} care se deduc din γ_9 și β_7

β_7	α_0	γ_9	
1	0	0	$\to \varepsilon_1$
1	1	1	$\to \varepsilon_2$
1	1	1	$\to \varepsilon_3$
1	0	1	
1	1	1	$\to \varepsilon_4$
1	0	1	
1	0	0	$\to \varepsilon_5$
1	1	1	$\to \varepsilon_6$
1			

↳ enunțuri din γ_9 care se deduc din β_7, α_0

1.4. $\delta, \varepsilon \in \{\alpha_0, \beta_7, \gamma_9\}$

$\Rightarrow \{\alpha_0, \beta_7, \gamma_9\} \setminus \{\delta, \varepsilon\} \vdash \delta \to \varepsilon$

↳

β_7	γ_9	α_0	β_7		
1	0	0	1	$-\varepsilon_1$	
1	1	1	1	$-\varepsilon_2$	δ_1
1	1	1	1	$-\varepsilon_3$	δ_2
1	1	0	1	$-\varepsilon_4$	
1	1	1	1	$-\varepsilon_5$	δ_3
1	1	0	1	$-\varepsilon_6$	δ_4
1	0	0	1		
1	1	1			
1					

$\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_6$ enunțuri — se deduc din β_7, γ_9 și $\in \alpha_0$

↳ $\in \gamma_9$

$\delta_1 \ldots \delta_4$