CURS 1

SIRURI ÎN SPATII METRICE

A) Notiuni preliminarii depre spatii metrice

$X \neq \varnothing$

Definitia 1. Se numeste distantă pe$X$ o functie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăti:

i) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X$

ii) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in X$

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X$.

Definitia 2. Se numeste spatiu metric orice multime nevidă X pe care se defineste o distantă d.

Notatie:(X, d)

Exemple de spatii metrice

1) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y| \forall x, y \in \mathbb{R}$.

2) d_2: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} \ \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

Definitia 3. Fie (X, d) un spatiu metric, $x_0 \in X, r > 0$.

Multimea $B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ se numeste bila deschisă de centru x_0 si raza r ..

Multimea $B[x_0, r] = \{x \in X | \, d(x, x_0) \leq r\}$ se numeste bila închisă de centru x_0 si rază r.

B) Siruri în spatii metrice

(X, d) spatiu metric

Definitia 4. Se numeste sir de elemente din (X, d) orice functie $f : \mathbb{N} \to X$.

Notatie: $f(n) = x_n$

$f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Definitia 5. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$un sir cu elemente din (X, d) si $n_1 < n_2 < ..... < n_k < ....$ un sir strict crescător de numere naturale.

Sirul $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$se numeste subsir al sirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definitia 6. a) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X, d) se numeste convergent dacă $\exists x \in X$ astfel încât $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că

$d(x_n, x) < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$.

b) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X, d) se numeste sir Cauchy dacă $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $d(x_n, x_m) < \varepsilon \forall n, m \geq n_\varepsilon$.

c) Un sir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din (X, d) se numeste sir mărginit dacă $\exists a \in X, \exists r > 0$ astfel încât $d(x_n, a) < r \forall n \in \mathbb{N}$.

d) Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d). Elementul $x\in X$ se numeste punct limită al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists\,(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subsir al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k}=x$.

e) Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) se numeste divergent dacă nu este convergent.

Teorema 1. a) Orice sir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este sir Cauchy.

b) Orice sir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este sir mărginit.

c) Orice sir Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) care are cel putin un punct limită în X este sir convergent.

Definitia 7. Se numeste spatiu metric complet un spatiu metric (X,d) în care orice sir Cauchy este convergent.

C) Siruri din $\mathbb{R}^{\mathbf{k}}, \mathbf{k}\geq 2$

$\mathbb{R}^k=\{(x_1,x_2,....,x_k\ )\,|x_i\in\mathbb{R}\forall 1\leq i\leq k\}$

Lema 1. Oricare ar fi $x=(x_1,x_2,...,x_n), y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ sunt adevărate inegalitătile $|x_i-y_i|\leq d_2(x,y)\leq d_1(x,y)\forall 1\leq i\leq k$.

Teorema 2. Fie un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$, $x_n=(x_{1n},x_{2n},....,x_{kn})\,\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă si numai dacă sirurile $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente în $\mathbb{R}$.

În plus, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{1n}, \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}, ..., \lim\limits_{n\to\infty} x_{kn}\right)$.

b) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este sir Cauchy dacă si numai dacă sirurile $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt siruri Cauchy în $\mathbb{R}$.

D) Siruri de numere reale .

$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$

Definitia 8. a) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este mărginit dacă $\exists m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât $m\leq x_n\leq M\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) crescător dacă $(x_n<x_{n+1}\forall n\in\mathbb{N})\,x_n\leq x_{n+1}\forall n\in\mathbb{N}$.

c) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) descrescător dacă $(x_n>x_{n+1}\forall n\in\mathbb{N})\,x_n\geq x_{n+1}\forall n\in\mathbb{N}$.

d) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este (strict) monoton dacă este (strict) crescător sau (strict) descrescător.

e) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall\varepsilon>0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_n>\varepsilon\forall n\geq n_\varepsilon$.

f) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall\varepsilon<0\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $x_n<\varepsilon\forall n\geq n_\varepsilon$.

h) Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă este convergent sau are limita $+\infty$ sau are limita $-\infty$.

Lema lui Cesaro. Orice sir mărginit de numere reale are cel putin un subsir convergent.

Criteriul lui Cauchy pentru siruri de numere reale. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă si numai dacă este sir Cauchy.($\mathbb{R}$ este spatiu metric complet)

Demonstratie."" $\Rightarrow$ "" Implicatia este evidenta (a se vedea Teorema 1, pct.(a))

"" $\Leftarrow$ "" Conform Teoremei 1, pct.(b), sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit.

Din Lema lui Cesaro obtinem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are cel putin un subsir convergent, adica are cel putin un punct limita in $\mathbb{R}$.

Utilizand Teorema 1, pct.(c), deducem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Corolar. Un sir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă si numai dacă este sir Cauchy.($\mathbb{R}^k$ este spatiu metric complet)

Teorema lui Weierstass pentru siruri de numere reale. Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton si mărginit este convergent.

Observatie. Reciproca teoremei lui Weierstrass este falsa. Sirul $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$ este convergent, dar nu este monoton.

Exemplu. Sa se demonstreze ca sirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n, n \in \mathbb{N}^*$ este convergent.

Studiem monotonia sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$

Sunt adevarate inegalitatile

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k} \ \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Din prima inegalitate rezulta ca

$$x_{n+1} - x_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

Fiind sirul strict descrescator, se studiaza marginirea inferioara a acestuia.

Utilizam a doua inegalitate succesiv pentru $k = 1, k = 2, ..., k = n$. Adunam inegalitatile respective si obtinem ca

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} > \ln(n+1) \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > \ln(n+1) - \ln n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{3}$$

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton si marginit. Conform Teoremei lui Weierstrass, sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Notatie.

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n = c \in (0, 1) \tag{4}$$

Numarul real c se numeste constanta lui Euler.

Criteriul clestelui pentru siruri de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifica

urmatoarele ipoteze:

a) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat $x_n \le y_n \le z_n \forall n \ge n_0$

b) sirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Atunci sirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Criteriul raportului pentru siruri cu termeni pozitivi. Se considera un sir de numere reale pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Daca $l < 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

b) Daca $l > 1$, atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Exemplu. Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$, unde $a, \alpha > 0$.

Notam $x_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = a$.

Daca $a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Daca $a \in (0,1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Daca $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Criteriul radicalului pentru siruri cu termeni pozitivi. Se considera un sir de numere reale pozitive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}{=}l$.

Exemplu. Sa se calculeze $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$

Notam $x_n = \frac{n!}{n^n}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

Aplicam criteriul radicalului pentru siruri cu termeni pozitivi si obtinem ca $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}{=}l$.

Lema lui STOLZ-CESARO (cazul $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$). Fie sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict crescator sau $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescator

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

Lema lui STOLZ-CESARO (cazul $\frac{0}{0}$). Fie sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict monoton

b) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$.

E) Limita inferioara si superioara a unui sir de numere reale

Pentru intelegerea cat mai eficienta a noilor notiuni introduse in aceasta sectiune sunt necesare cateva rezultate preliminarii.

Teorema 3. a) Orice sir monoton de numere reale are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Orice sir de numere reale are cel putin un subsir care are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

Oricarui sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\overline{\mathbb{R}}$ definite in felul urmator

$$u_n = \sup_{k\geq n} x_k \forall n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

$$v_n = \inf_{k \geq n} x_k \forall n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Sirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au urmatoarele proprietati:
1) $u_{n+1} \leq u_n \forall n \in \mathbb{N}$
2) $v_{n+1 \geq} v_n \forall n \in \mathbb{N}$
3) $v_n \leq u_m \forall n, m \in \mathbb{N}$
4) $\exists u = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$
5) $\exists v = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$
6) $v \leq u$

Definitia 9. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\mathbb{R}$.

a) Numarul $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup\limits_{k\geq n} x_k \right)$ se numeste limita superioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Numarul $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf\limits_{k\geq n} x_k \right)$ se numeste limita inferioara a sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notatii:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} u_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k \right) = \limsup x_n \tag{7}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k \right) = \liminf x_n \tag{8}$$

Observatie. $\liminf x_n \leq \limsup x_n$

Definitia 10. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir din $\mathbb{R}$. Numarul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeste punct limita al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daca exista $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subsir al sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

Notatie. $L\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left\{ l \in \overline{\mathbb{R}} \middle| \, l \textit{ este punct } \lim \textit{ita al sirului } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\}.$

Teorema 4. Pentru orice sir de numere reale sunt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adevarate afirmatiile

$$\liminf x_n = \inf_{\overline{\mathbb{R}}} L\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \tag{9}$$

$$\limsup x_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} L\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \tag{10}$$

Corolar. a) Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita in $\overline{\mathbb{R}}$ daca si numai daca $\liminf x_n = \limsup x_n$. In plus, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n$.

b) Un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit daca si numai daca $\liminf x_n, \limsup x_n \in \mathbb{R}$.