Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de anul acesta de la Mincu
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Demonstrați că următoarele grupuri (cu adunarea) nu sunt izomorfe:

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ și $\mathbb{Z}_4$.
- $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$

Demonstrație. Pentru a demonstra că două grupuri nu sunt izomorfe, putem folosi procedeul reducerii la absurd. Presupunem că ar exista un izomorfism f și ajungem la o contradicție.

- În unele cazuri ne putem gândi la ordinele elementelor. Reamintim că ordinul elementului x este cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}} = 0$.

  Un izomorfism păstrează ordinul unui element: $f(\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{k \text{ ori}}$.

  - În $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ toate elementele au ordin cel mult 2.
  - În $\mathbb{Z}_4$ avem și un element de ordin 4 (și anume $\hat{1}$). Pentru elementul de ordin 4 nu am avea corespondent.

- O altă proprietate care trebuie păstrată de izomorfisme este cea de a fi grup ciclic. $\mathbb{Z}$ este un grup ciclic, în timp ce $\mathbb{Q}$ nu este (am demonstrat acest lucru în tutoriatul anterior).

- Dacă ar exista un izomorfism f, acesta ar fi funcție bijectivă. Asta ar însemna că $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ ar avea același cardinal. Dar $\mathbb{Q}$ este mulțime numărabilă, iar $\mathbb{R}$ este nenumărabilă.

$\square$

Exercițiul 2. Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^*$, definită prin

$$f(\frac{m}{n}) = \cos 2\pi \frac{m}{n} + i \sin 2\pi \frac{m}{n}$$

și notăm cu U mulțimea $U = \left\{ z \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^*, z^n = 1 \right\}$

1. Arătați că f este morfism de grupuri.
2. Determinați $\ker f$ și $\operatorname{im} f$.
3. Arătați că $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong U$.

Demonstrație. Facem observația că în acest caz, grupurile sunt $\mathbb{Q}$ cu adunarea (elementul neutru este 0) și $\mathbb{C}$ cu înmulțirea (elementul neutru este 1).

De asemenea, dacă luăm formula din definiția lui U și aplicăm modulul obținem:

$$\begin{aligned} z^n &= 1 \\ \implies |z^n| &= 1 \\ \implies |z|^n &= 1 \\ \implies |z| &= 1 \end{aligned}$$

Deci U este mulțimea punctelor aflate la distanță 1 de origine, sau cu alte cuvinte este cercul de centru 0 și rază 1.

1. Condiția ca f să fie morfism este ca

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \iff$$
$$\cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) = (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x) \cdot (\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y)$$

Ultima egalitate este adevărată din formulele lui de Moivre.

2. Ne bazăm pe definițiile acestor mulțimi:

$$\begin{aligned} \ker f &= \{ x \in \mathbb{Q} \mid f(x) = 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{Q} \mid \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{im} f &= \left\{ y \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{Q}, f(x) = y \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{Q}, \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = y \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{C}^* \;\middle|\; |y| = 1 \right\} = U \end{aligned}$$

3. Putem demonstra că grupul factor $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ este izomorf cu U foarte ușor folosindu-ne de **teorema fundamentală de izomorfism**.

Pe cazul general, teorema spune că, dacă $f : G \to H$ este un morfism de grupuri, avem că

$$\frac{G}{\ker f} \cong \operatorname{im} f$$

Aplicând teorema pe cazul nostru avem că:

$$\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \cong U$$

□

Exercițiul 3. Scrieți subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{12}$ și grupurile factor ale lui $\mathbb{Z}_{12}$.

Demonstrație. Putem găsi subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{12}$ generând subgrupul corespunzător fiecărui element:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{0} \rangle &= \{ \hat{0} \} \\
\langle \hat{1} \rangle &= \left\{ \hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{11} \right\} \\
&= \langle \hat{5} \rangle = \langle \hat{7} \rangle = \widehat{\langle 11 \rangle} \\
\langle \hat{2} \rangle &= \left\{ \hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \ldots, \widehat{10} \right\} = \left\langle \widehat{10} \right\rangle \\
\langle \hat{3} \rangle &= \{ \hat{0}, \hat{3}, \ldots, \hat{9} \} = \langle \hat{9} \rangle \\
\langle \hat{4} \rangle &= \{ \hat{0}, \hat{4}, \hat{8} \} = \langle \hat{8} \rangle \\
\langle \hat{6} \rangle &= \{ \hat{0}, \hat{6} \}
\end{aligned}$$

Nu mai există alte subgrupuri în afară de acestea. Dacă luăm două numere $\hat{a}, \hat{b}$ și încercăm să vedem ce subgrup generează, fie au un factor în comun și generează subgrupul generat de c.m.m.d.c.-ul lor $\langle \hat{a}, \hat{b} \rangle = \left\langle \widehat{(a, b)} \right\rangle$.

În ceea ce privește grupurile factor, să luăm de exemplu subgrupul normal $H = \{ \hat{0}, \hat{6} \}$. Atunci avem

$$\frac{\mathbb{Z}_{12}}{H} = \{ \{ \hat{y} \in \mathbb{Z}_{12} \mid \hat{x} - \hat{y} \in \mathbb{Z}_{12} \} \mid \hat{x} \in \mathbb{Z}_{12} \}$$

Pentru a determina clasele de echivalență din grupul factor, ne folosim de definiția că două clase de resturi $\hat{x}, \hat{y}$ sunt echivalente dacă $\hat{x} - \hat{y} \in \{ \hat{0}, \hat{6} \}$.

Obținem clasele de echivalență:

$$\begin{aligned}
\hat{0} + H &= \{ \hat{0}, \hat{6} \} \\
\hat{1} + H &= \{ \hat{1}, \hat{7} \} \\
&\ldots \\
\hat{5} + H &= \left\{ \hat{5}, \widehat{11} \right\}
\end{aligned}$$

Adunarea pe aceste șase clase de echivalență funcționează ca în $\mathbb{Z}_6$. Dacă notăm cu $\overline{x} = \hat{x} + H$ avem, de exemplu:

$$\begin{aligned}
\overline{1} + \overline{3} &= \overline{4} \\
\overline{5} + \overline{4} &= \overline{3} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

De fapt, un rezultat mai general ne spune că, pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$ și pentru orice d divizor al lui n, avem:

$$\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_d$$

□

Exercițiul 4. Fie G grupul factor $(\mathbb{Q},+)/\mathbb{Z}$. Arătați că:

1. dacă $a, b \in \mathbb{N}^*$ sunt prime între ele, atunci $\operatorname{ord}\left(\widehat{\frac{a}{b}}\right) = b$
2. orice subgrup finit generat este ciclic
3. G nu este finit generat

Demonstrație. Să încercăm mai întâi să înțelegem din ce este format grupul factor $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$. În primul rând, observăm că toate numerele întregi se află în clasa lui 0, deoarece

$$\hat{0} = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x - 0 \in \mathbb{Z} \} \iff \hat{0} = \mathbb{Z}$$

1. Observăm că dacă adunăm o fracție $\widehat{\frac{a}{b}}$ cu ea însăși de b ori, obținem un număr întreg, care este în $\hat{0}$:

   $$\underbrace{\widehat{\frac{a}{b}} + \cdots + \widehat{\frac{a}{b}}}_{b \text{ ori}} = \widehat{b \cdot \frac{a}{b}} = \hat{a} = \hat{0}$$

   Pentru a justifica că b este chiar ordinul lui $\widehat{\frac{a}{b}}$, trebuie să arătăm că nu poate exista un $c < b, c \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\widehat{c\frac{a}{b}} = \hat{0}$. Ca să se întâmple așa ceva, ar trebui ca $b \mid c \cdot a$. Însă știm că $(a, b) = 1$ și că $c < b$, ajungem la o contradicție.

2. Fie un subgrup $H \leq G$ care este generat de $\widehat{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots, \widehat{\frac{a_n}{b_n}}$. Orice element din H se obține ca o combinație liniară dintre acești generatori:

   $$\forall x \in H, x = k_1 \widehat{\frac{a_1}{b_1}} + \cdots + k_n \widehat{\frac{a_n}{b_n}}$$

   Să zicem că q ar fi numitorul comun al $\widehat{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots, \widehat{\frac{a_n}{b_n}}$. Atunci putem rescrie relația de mai sus ca

   $$\begin{aligned} x &= k_1' \widehat{\frac{1}{q}} + \cdots + k_n' \widehat{\frac{1}{q}} \\ &= (k_1' + \cdots + k_n') \widehat{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

   Deci H este ciclic, fiind generat de un singur element, $\widehat{\frac{1}{q}}$.

3. Presupunem că ar exista un sistem de generatori finit pentru $G = \left\langle \widehat{\frac{a_1}{b_1}}, \ldots \widehat{\frac{a_n}{b_n}} \right\rangle$. Analog cu ce am făcut la subpunctul anterior, am ajunge la concluzia că acest sistem de generatori poate fi înlocuit de un singur $\widehat{\frac{1}{q}}$. Dar nu avem cum să generăm, de exemplu, fracția $\widehat{\frac{1}{q+1}}$.

□