FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 3

(S3.1) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele.

(iii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

(iv) Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

p = Merg în parc. q = Îmi termin treaba. r = Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \rightarrow p$.

(ii) Fie ψ = Este necesar să nu plouă ca să putem observa stelele. Considerăm propoziţiile atomice:

s = Plouă. t = Putem observa stelele.

Atunci $\psi = t \rightarrow \neg s$.

(iii) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

w = Treci examenul la logică. z = Înţelegi subiectul.

Atunci $\theta = w \rightarrow z$.

(iv) Fie χ = Treci examenul la logică dacă faci o prezentare de calitate. Considerăm propoziţiile atomice:

u = Treci examenul la logică. v = Faci o prezentare de calitate.

Atunci $\chi = v \to u$.

□

(S3.2) Să se arate că dacă A este finită şi B este numărabilă, atunci $A \cup B$ este numărabilă.
Demonstraţie: Fie $n \in \mathbb{N}$ numărul elementelor lui A. Demonstrăm că $A \cup B$ este numărabilă prin inducţie după n.
Dacă $n = 0$, atunci $A = \emptyset$ şi $A \cup B = B$ este numărabilă.
Presupunem acum adevărată pentru un n şi demonstrăm pentru $n + 1$. Putem deci scrie $A = \{a\} \cup A'$ unde $|A'| = n$ şi $a \notin A'$. Atunci $A' \cup B$ e numărabilă, din ipoteza de inducţie – în particular, $A' \cup B \sim \mathbb{N}^*$. Avem că $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B$. Dacă $a \in B$, atunci $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B = A' \cup B$. Dacă $a \notin B$, atunci $A \cup B = \{a\} \cup A' \cup B \sim \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.
În ambele cazuri obţinem că $A \cup B$ este numărabilă. □

(S3.3) Fie A, B mulţimi astfel încât există $f : B \to A$ injectivă. Arătaţi următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Presupunem prin absurd că A este finită. Atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât A are n elemente. Vom demonstra că există m astfel încât B are m elemente, ceea ce contrazice faptul că B este infinită.

Demonstrăm prin inducţie după n.

Pentru $n = 0$, avem $A = \emptyset$. Dacă am avea un $x \in B$, atunci $f(x) \in A = \emptyset$, contradicţie. Rămâne că $B = \emptyset$. Prin urmare B are 0 elemente, deci putem lua $m := 0$.

Presupunem că am arătat propoziţia pentru mulţimi cu n elemente şi considerăm acum că A are $n+1$ elemente. Luăm $g : \{1, ..., n+1\} \to A$ bijecţie. Notăm $C := g(\{1, ..., n\})$ şi $D := \{x \in B \mid f(x) \in C\}$.

Cum $f(D) \subseteq C$, putem atât restricţiona cât şi corestricţiona pe f la o funcţie $f' : D \to C$ ce ia aceleaşi valori ca f şi este deci tot injectivă. Facem acelaşi lucru pornind de la $g(\{1,...,n\}) = C$ şi obţinem o bijecţie $g' : \{1,...,n\} \to C$. Rezultă că C are n elemente. Aplicând ipoteza de inducţie pentru f', obţinem că există p astfel încât D are p elemente şi deci există o bijecţie $h : \{1,...,p\} \to D$.

Distingem două cazuri. Dacă nu există $a \in B$ cu $f(a) = g(n+1)$, atunci $B = D$ şi deci B are p elemente. Luăm aşadar $m := p$. În celălalt caz, dacă există $a \in B$ cu $f(a) = g(n+1)$, avem că $B = D \cup \{a\}$, iar reuniunea este disjunctă. Luăm acum funcţia $h' : \{1,2,...,p+1\} \to B$, definită, pentru orice j, prin:

$$h'(j) := \begin{cases} h(j), & \text{dacă } j \leq p \\ a, & \text{dacă } j = p+1. \end{cases}$$

Cum h' este bijectivă, B are $p+1$ elemente. Luăm, aşadar, în acest caz, $m := p+1$.

(ii) Demonstrăm prima dată că orice submulţime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

Fie $B \subseteq \mathbb{N}$ infinită, deci nevidă. Construim inductiv o enumerare a sa

$$B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

unde pentru orice n avem $b_n < b_{n+1}$ şi $b_n \geq n$.

Fie b_0 cel mai mic element al ei. Clar, $b_0 \geq 0$. Atunci, B fiind infinită, $B \setminus \{b_0\}$ rămâne infinită şi deci nevidă. Punem b_1 ca fiind minimul acelei mulţimi. Clar, $b_1 \neq b_0$ şi cum b_0 este minimul lui B, avem că $b_0 < b_1$. Rezultă şi că $b_1 > b_0 \geq 0$, deci $b_1 \geq 1$.

Presupunem că am fixat pe $b_0, \ldots, b_n$ (pentru un $n \geq 1$) şi vrem să îl alegem pe b_{n+1}, Îl punem ca fiind minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_n\}$ şi deci $b_{n+1} \neq b_n$. Dat fiind că b_n fusese ales ca minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$, avem că $b_n < b_{n+1}$ şi deci $b_{n+1} \geq n+1$.

Luăm funcţia $g : \mathbb{N} \to B$, $g(n) = b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Funcţia fiind strict crescătoare, este injectivă. Fie acum $m \in B$. Atunci $b_{m+1} \geq m+1 > m$. Cum b_{m+1} este minimul lui $B \setminus \{b_0, \ldots, b_m\}$, rezultă că $m \in \{b_0, \ldots, b_m\}$. Deci există $i \in \mathbb{N}$, $i \leq m$ cu $m = b_i = g(i)$. Am arătat aşadar că g este şi surjectivă, deci este bijectivă.

Demonstrăm acum enunţul principal. Deoarece A este numărabilă, există o bijecţie $h : A \to \mathbb{N}$. Atunci $B \sim f(B) \sim h(f(B))$, deci $h(f(B)$ e infinită şi este submulţime a lui $\mathbb{N}$, deci numărabilă, din cele anterioare. Rezultă că şi B este numărabilă.

□

(S3.4) Fie A, B două mulţimi astfel încât $B \subseteq A$. Să se demonstreze următoarele:

(i) Dacă B este infinită, atunci şi A este infinită.

(ii) Dacă B este infinită şi A este numărabilă, atunci B este numărabilă.

Demonstraţie: Fie

$$\iota : B \subseteq A, \quad \iota(b) = b \text{ pentru orice } b \in B.$$

Este evident ca ι este injectivă.

(i) Se aplică (S3.3).(i) cu $f := \iota$.

(ii) Se aplică (S3.3).(ii) cu $f := \iota$.

$\square$

Propoziţia 1. *Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulţimi numărabile este numărabilă.*

Demonstraţie: Exerciţiu suplimentar. $\square$

(S3.5) Fie LP logica propoziţională. Să se arate următoarele:

(i) Mulţimea $Expr$ a expresiilor lui LP este numărabilă.

(ii) Mulţimea $Form$ a formulelor lui LP este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Avem că $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n = \{\lambda\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$. Deoarece $Sim = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}$ şi V este numărabilă, obţinem, din (S3.2), că Sim este numărabilă. Conform (S2.5).(ii), Sim^n este numărabilă pentru orice $n \geq 2$. Aplicând Propoziţia 1, obţinem că $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} Sim^n$ este numărabilă. Aplicăm încă o dată (S3.2) pentru a conclude că $Expr$ este numărabilă.

(ii) Deoarece $V \subseteq Form$ şi V este infinită, putem aplica (S3.4).(i) cu $B := V$ şi $A := Form$ pentru a obţine că $Form$ este infinită. Cum $Form \subseteq Expr$, $Form$ este infinită şi $Expr$ este numărabilă (conform (i)), putem aplica (S3.4).(ii) cu $B := Form$ şi $A := Expr$ pentru a conclude că $Form$ este numărabilă.

$\square$