

# FISA 1

## SIRURI DE NUMERE REALE. SPATII METRICE MULTIMI MĂRGINITE ÎN $\mathbb{R}$

EXERCITIUL 1. Se consideră sirul mărginit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  care verifică inegalitatea  $x_{n+1} \geq x_n - \frac{1}{2^n} \forall n \in \mathbb{N}$ . Să se arate că sirul este convergent.

EXERCITIUL 2. Se consideră sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin relația de recurență  $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1 \forall n \in \mathbb{N}$  cu  $x_0 \in (0, 1)$ . Să se arate că sirul este convergent și să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$ .

EXERCITIUL 3. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \right)$ , unde  $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ .

EXERCITIUL 4. Să se calculeze limita inferioară și limita superioară a sirului de numere reale  $x_n = \left[ (-1)^n \sqrt{n+1} - (-1)^{n+1} \sqrt{n} \right] + \sin \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$ . Sirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  are limită?

EXERCITIUL 5. a) Să se descrie și să se reprezinte grafic  $B((0, 0), r)$  cu  $r > 0$  în spațiul metric  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ .

b) Să se descrie și să se reprezinte grafic  $B((0, 0), r)$  cu  $r > 0$  în spațiul metric  $(\mathbb{R}^2, d_1)$ .

c) Să se descrie și să se reprezinte grafic  $B((0, 0), r)$  cu  $r > 0$  în spațiul metric  $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ .

EXERCITIUL 6. Se consideră multimile mărginite  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  și multimile  $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}$ . Să se demonstreze următoarele afirmații:

- a)  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \inf(A + B) = \inf A + \inf B$ ;
- b)  $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A, \inf(\alpha A) = \alpha \inf A \forall \alpha > 0$   
 $\sup(\alpha A) = \alpha \inf A, \inf(\alpha A) = \alpha \sup A \forall \alpha < 0$ ;
- c)  $\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ .

EXERCITIUL 7. Fie mulțimea  $A = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, m < 3n \right\}$ . Să se demonstreze că mulțimea  $A$  este mărginită și să se calculeze  $\sup A$  și  $\inf A$ .