CURS 12

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

REZOLUŢIE

Definiţia 11.21

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numeşte rezolvent al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$ şi

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluţiei

$$Rez \qquad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu $Res(C_1, C_2)$ mulţimea rezolvenţilor clauzelor C_1, C_2.

Teorema de corectitudine a rezoluţiei 11.25

Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de clauze. Dacă $\square$ se derivează prin rezoluţie din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Intrare: $\mathcal{S}$ mulţime nevidă de clauze netriviale.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$

Pasul i.1. Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 \quad := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 \quad := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pasul i.2. Dacă ($\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ şi $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset$) atunci

$$\mathcal{U}_i \quad := \quad \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

altfel $\mathcal{U}_i := \emptyset$.

Pasul i.3. Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} \quad &:= \quad \left(\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)\right) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} \quad &:= \quad \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pasul i.4. Dacă $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ atunci $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

altfel dacă $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **atunci** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

altfel $\{i := i + 1$; go to Pasul i.1$\}$.

Exemplu.

Fie $\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2' := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.
P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

Exemplu.

Fie $\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

Exemplu. (continuare)

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.

P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.

P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.

P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

Notăm cu

$$Var(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}, \quad Var(\mathcal{S}) := \bigcup_{C \in \mathcal{S}} Var(C).$$

Aşadar,

- $Var(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$
- $Var(\mathcal{S}) = \emptyset$ ddacă $\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S} = \{\square\}$.

Propoziţia 12.1
Fie $n := |Var(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n paşi.

Demonstraţie. Se observă imediat că pentru orice i,

$$Var(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq Var(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq Var(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |Var(\mathcal{S}_1)| > |Var(\mathcal{S}_2)| > |Var(\mathcal{S}_3)| > \ldots \geq 0.$ $\square$

Fie $N \leq n$ numărul de paşi după care se termină DP. Atunci $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{N+1}$.

Teorema 12.2
Algoritmul DP este corect şi complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă } \text{ ddacă } \square \in S_{N+1}.$$

LOGICA DE ORDINUL I

SINTAXA

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- o mulţime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectorii $\neg$ şi $\rightarrow$;
- paranteze: (,);
- simbolul de egalitate $=$;
- cuantificatorul universal $\forall$;
- o mulţime $\mathcal{R}$ de simboluri de relaţii;
- o mulţime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcţii;
- o mulţime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
- o funcţie aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, ari)$.
- τ se numeşte signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulţimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.
- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relaţii cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcţii cu $f, g, h, \ldots$ şi simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.
- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$	:=	mulţimea simbolurilor de funcţii de aritate m;
$\mathcal{R}_m$	:=	mulţimea simbolurilor de relaţii de aritate m.

Definiţia 12.3

Mulţimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulţimea tuturor şirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

Definiţia 12.4

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numeşte (i,j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ;
- Notăm cu $Var(\theta)$ mulţimea variabilelor care apar în θ.

Definiţia 12.5

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile lui $\mathcal{L}$ definite astfel:

(T0) Orice variabilă este termen.

(T1) Orice simbol de constantă este termen.

(T2) Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.

(T3) Numai expresiile obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.

Notaţii:

- Mulţimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- Notăm termenii cu $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulţimea variabilelor care apar în termenul t.

Definiţia 12.6

Un termen t se numeşte închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Definiţia 12.7

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.

Definiţia 12.8

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile lui $\mathcal{L}$ definite astfel:

(F0) Orice formulă atomică este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.

(F3) Dacă φ este formulă şi x este variabilă, atunci $(\forall x \varphi)$ este formulă.

(F4) Numai expresiile obţinute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.

Notaţii

- Mulţimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Propoziţia 12.9

Fie ***P*** o proprietate. Presupunem că:

(0) Orice formulă atomică are proprietatea ***P***.

(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea ***P***, atunci şi $(\neg\varphi)$ are proprietatea ***P***.

(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ şi ψ au proprietatea ***P***, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea ***P***.

(3) Pentru orice formulă φ şi orice variabilă x, dacă φ are proprietatea ***P***, atunci şi $(\forall x\varphi)$ are proprietatea ***P***.

Atunci orice formulă φ are proprietatea ***P***.

Conectori derivaţi

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ şi cuantificatorul existenţial $\exists$ sunt introduşi prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{aligned}
\varphi \vee \psi &:= ((\neg\varphi) \to \psi)\\
\varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \to (\neg\psi)))\\
\varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))\\
\exists x\varphi &:= (\neg\forall x(\neg\varphi)).
\end{aligned}
$$

- În practică, renunţăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $s = t$, $Rt_1 \dots t_m$, $\forall x\varphi$, $\neg\varphi$, $\varphi \to \psi$.
- Similar cu LP, $\neg$ are precedenţă mai mare decât $\to$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ şi $\wedge$, $\vee$ au precedenţă mai mare decât $\to$, $\leftrightarrow$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedenţă mai mare decât ceilalţi conectori.
- Aşadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ şi nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.
- Scriem de multe ori $f(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $ft_1 \dots t_m$ şi $R(t_1, \dots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \dots t_m$.
- Dacă $f \in \mathcal{F}_2$, scriem $t_1 f t_2$ în loc de ft_1t_2.
- Analog, dacă $R \in \mathcal{R}_2$, scriem $t_1 R t_2$ în loc de Rt_1t_2.

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulţimea simbolurilor sale non-logice şi scriem

$$\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}).$$

Vacanţă placută!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.