CURS 9

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

SINTAXA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Axiomele logice.

Mulţimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

Regula de deducţie.

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ şi $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Definiţia 8.3

Fie Γ o mulţime de formule. Γ-teoremele sunt formulele definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(T3) Numai formulele obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

$$
\begin{array}{lcl}
Thm(\Gamma) & := & \text{mulţimea } \Gamma\text{-teoremelor} \\
Thm & := & Thm(\emptyset) \\
\Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\vdash \varphi & \Leftrightarrow & \emptyset \vdash \varphi \\
\Gamma \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.
\end{array}
$$

Definiţia 8.4

O formulă φ se numeşte teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Definiţia Γ-teoremelor dă naştere la metoda de demonstraţie prin inducţie după Γ-teoreme.

Versiunea 1.
Fie P o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface P astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P;

(iii) demonstrăm că dacă φ şi $\varphi \to \psi$ au proprietatea P, atunci ψ are proprietatea P.

Versiunea 2.
Fie Σ o mulţime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ şi $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Teorema deducţiei este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducţiei 8.14

Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Demonstraţie. ”$\Leftarrow$” Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 8.7.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziţia 8.5.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

"$\Rightarrow$" Fie
$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

· Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziţia 8.5.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziţiei 8.13, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aşadar $\psi \in \Sigma$.

· Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ şi trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducţie
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducţie
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) şi P. 8.5.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Aşadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Recap. - Propoziţia 8.15

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{1}$$

Propoziţia 9.1

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi\ .$$

Demonstraţie.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 8.15 şi P. 8.7.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

Propoziţia 9.2

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned} \{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (2)\\ &\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (3)\\ &\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (4)\\ &\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (5)\\ \{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). && (6) \end{aligned}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 9.3

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ şi } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \tag{7}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

LEGĂTURA DINTRE SINTAXĂ ŞI SEMANTICĂ

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 9.4

Orice Γ-teoremă este consecinţă semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ şi $\Gamma \subseteq Form$.

Demonstraţie. Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exerciţiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziţiei 7.9.(i), obţinem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. $\square$

Notaţii.

Pentru orice variabilă $v \in V$ şi orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Aşadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulţime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziţia 9.5

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Demonstraţie. Prin inducţie după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ şi $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.

- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$. Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (Propoziţia 9.2), putem aplica (MP) pentru a obţine $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi$, deci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducţie pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducţie pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziţia 9.2
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziţia 8.7.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obţinem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducţie pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	din P.9.2 şi P.8.7.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i).

În al doilea caz, obţinem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducţie pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) şi Propoziţia 8.5.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ şi P.8.7.(i). $\square$

Demonstraţia propoziţiei anterioare ne dă o construcţie efectivă a unei demonstraţii a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 9.6 (Teorema de completitudine)
Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 9.4 pentru $\Gamma = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie şi $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducţie după k următoarea proprietate:

(*) pentru orice $k \leq n$, pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$, $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi$.

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziţia 9.5, obţinem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k şi fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Aşadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ şi

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$ şi

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e şi e', obţinem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ şi } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziţia 9.3 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ şi $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Propoziţia 9.7

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie. Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad & \Longleftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi \text{ şi } \models \psi \to \varphi \\ & \qquad\quad \text{(conform Propoziţiei 6.6)} \\ & \Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \vdash \psi \to \varphi \\ & \qquad\quad \text{(conform Teoremei de completitudine).} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziţia 8.7.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obţine că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

Notaţii.

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecinţă semantică a lui } \Gamma \\
\nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Definiţia 9.8

Fie Γ o mulţime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \not\vdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observaţie.

Fie Γ, Δ mulţimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci şi Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci şi Δ este inconsistentă.

Propoziţia 9.9

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulţimea teoremelor este consistentă.

Demonstraţie.

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicţie. Aşadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziţia 8.7.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obţinem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. □

Propoziţia 9.10
Pentru o mulţime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.
(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.
(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.
(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ şi $(i) \Rightarrow (iv)$ sunt evidente.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie φ o formulă. Conform Propoziţia 9.2,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) şi de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci şi $\Gamma \vdash \top$. $\square$

Propoziţia 9.11

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Demonstraţie.

(i) Avem

$$\begin{array}{lll} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\ & & \text{P.9.10.(iv)} \\ & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\ & & \text{Teorema Deducţiei} \\ & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\ & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ şi P.9.7.} \end{array}$$

(ii) Similar. $\square$

Propoziţia 9.12

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulţime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 9.13

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulţime finită inconsistentă.

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" este evidentă.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziţiei 9.10.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziţia 8.12, obţinem o submulţime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă. $\square$

Un rezultat echivalent:

Propoziţia 9.14

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulţime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 9.15
Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă } &\iff \vdash \neg\varphi \\ &\qquad \text{conform Propoziţiei 9.11.(ii)} \\ &\iff \vDash \neg\varphi \\ &\qquad \text{conform Teoremei de completitudine} \\ &\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ &\qquad \text{conform Propoziţiei 7.11.(ii).} \end{aligned}$$

Aşadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. □

Teorema 9.16 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)
Pentru orice mulţime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0, 1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \perp$ şi, aplicând Teorema de corectitudine, rezultă că $\Gamma \vDash \perp$. Ca urmare, $e \vDash \perp$, ceea ce este o contradicţie.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă şi aplicăm apoi Teorema de compacitate pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulţime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziţiei 9.14. Din Propoziţia 9.12.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 9.15, obţinem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziţiei 7.12.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. $\square$

Teorema 9.17 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)
Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Demonstraţie.

$$\begin{array}{lll} \Gamma \vdash \varphi & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ & & \text{conform Propoziţiei 9.11.(i)} \\ & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & & \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ & \iff & \Gamma \vDash \varphi \\ & & \text{conform Propoziţiei 7.11.(i).} \end{array}$$

□

Observaţie
Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exerciţiu).

Pe data viitoare!

All math is applied math... eventually.

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.