Curs 11

Exemplu $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$

$\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(3)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$

(*) $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$

$\underset{\text{grup}}{(S_n, \circ)} \ni \sigma$ se descompune în produs de cicli disjuncți și scrierea e unică până la ordinea în care sînt scriși ciclii.

- Fie ciclul $(i_1\, i_2 \ldots i_k)$. Atunci $(i_1\, i_2 \ldots i_k) = (i_2 \ldots i_k\, i_1) = \ldots = (i_k\, i_1 \ldots i_{k-1})$

(Un ciclu de lungime k poate fi scris în k moduri)

•• $(i_1\, i_2 \ldots i_k)^{-1} = (i_k\, i_{k-1} \ldots i_1)$; $(i\,j)^{-1} = (j\,i) = (i\,j)$

(*) $\sigma^{-1} = (4\ 10\ 8\ 12\ 1)(13\ 2)(7\ 11\ 5)(9\ 6) = (1\ 4\ 10\ 8\ 12)(2\ 13)(5\ 7\ 11)(6\ 9)$

(! $\sigma^{-1} = \left((1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)\right)^{-1} = (6\ 9)^{-1}(5\ 11\ 7)^{-1}(2\ 13)^{-1}(1\ 12\ 8\ 10\ 4)^{-1}$

$\frac{\text{cicli disjuncți}}{\text{comută}}$ $(1\ 12\ 8\ 10\ 4)^{-1}(2\ 13)^{-1}(5\ 11\ 7)^{-1}(6\ 9)^{-1} =$)

Proprietăți 1) ordinul unui ciclu este lungimea ciclului

2) ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este c.m.m.m.c. al lungimii ciclilor care apar în descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncți.

3) orice permutare se scrie ca produs de transpoziții

($(i_1 \ldots i_k) = (i_1 i_2) \cdot (i_2 i_3) \cdot \ldots \cdot (i_{k-1} i_k)$; orice ciclu de lungime $k \geq 2$ se scrie ca produs de $k-1$ transpoziții) Atenție! scrierea nu e unică!!

Exemple 1) $\text{ord}((i_1 \ldots i_k)) = k$

2) (*) $\text{ord}(\sigma) = \text{c.m.m.m.c.}(5, 2, 3, 2) = 30$

3) (*) $\sigma = \underbrace{(1\ 12)(12\ 8)(8\ 10)(10\ 4)}_{(1\ 12\ 8\ 10\ 4)}(2\ 13)\underbrace{(5\ 11)(11\ 7)}_{(5\ 11\ 7)}(6\ 9)$

Def Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Definim signatura lui σ prin

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

O pereche (i,j), $1 \leq i < j \leq n$ cu $\sigma(i) > \sigma(j)$ s.n. inversiune a lui σ.

Notăm cu $m(\sigma)$ nr. de inversiuni ale lui σ. Atunci

Prop $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

Ex 1) (*) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$

$$m(\sigma) = \underset{(1,\dots)}{11} + \underset{(2,\dots)}{11} + 2 + 0 + 8 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 50$$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{50} = 1$.

2) $\operatorname{sgn}((i\,j)) = -1$ (Exc!)

3) $\operatorname{sgn}((i_1 \dots i_k)) = (-1)^{k-1}$ (Exc!) 4) $\operatorname{sgn}(e) = 1$

Def O permutare $\sigma \in S_n$ este pară dacă $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ și impară dacă $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.
Mulțimea permutărilor pare se notează cu A_n. (O altă notație pt $\operatorname{sgn}(\sigma)$ este $\varepsilon(\sigma)$)

Teoremă $\operatorname{sgn}: S_n \to (\{-1,1\}, \cdot)$ este un morfism de grupuri, surj. cu $\operatorname{Ker}(\operatorname{sgn}) = A_n$. În particular, A_n este un subgrup normal al lui S_n și (via T.F.I $\rightsquigarrow S_n/A_n \simeq \{-1,1\}$) $|S_n| : |A_n| = 2 \Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}$.

Obs $\operatorname{sgn}(\sigma_1 \dots \sigma_j) = \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_j)$. Signatura unei permutări este egală cu produsul signaturilor ciclilor disjuncți din descompunerea lui σ; $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$, unde k este nr. de transpoziții din descompunerea lui σ în produs de transpoziții.

Ex (*) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((1\ 12\ 8\ 10\ 4))\operatorname{sgn}((2\ 13))\operatorname{sgn}((5\ 11\ 7)) \cdot \operatorname{sgn}((6\ 9))$

$= (-1)^{5-1} \cdot (-1)^{2-1} \cdot (-1)^{3-1} \cdot (-1)^{2-1} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma \in A_n$.

Inele