Curs 1

Șiruri de numere reale

Definiție. Fie $A \subset \mathbb{N}$ o multime numărabilă (i.e. $\exists\, g: A \to \mathbb{N}$, g bijectivă).

O funcție $f: A \to \mathbb{R}$ se numește șir de numere reale.

Notații. 1) $f(n) \overset{\text{not.}}{=} x_n$ $\forall\, n \in A$.

2) Ținând cont de definiția de mai sus și de notația 1) obținem șirul de numere reale $(x_n)_{n \in A}$.

Observații. 1) Atunci când A se subînțelege vom scrie doar $(x_n)_n$.

2) În general $A = \mathbb{N}$ (sau $A = \mathbb{N}^*$) și vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_n$ (sau $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n \geq 1}$, $(x_n)_n$).

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $l \in \mathbb{R}$.

Definiție. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita l și scriem $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$,

$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$.

$$|x_n - l| < \varepsilon \iff x_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$$

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n > \varepsilon$.

3) Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ și scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$.

<u>Definiție</u>. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este convergent dacă $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este divergent dacă nu este convergent.

Șiruri de numere reale
- → cu limită
  - → cu limită finită (convergente)
  - → cu limită infinită (divergente)
- → fără limită (divergente)

Definiție. 1) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este crescător (respectiv descrescător) dacă $x_n \le x_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n \ge x_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$).

2) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este strict crescător (respectiv strict descrescător) dacă $x_n < x_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$).

3) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este monoton (respectiv strict monoton) dacă este crescător sau descrescător (respectiv strict crescător sau strict descrescător).

4) Spunem că șirul $(x_n)_n$ este mărginit dacă $\exists\, M > 0$ a.î. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, avem $|x_n| \le M$.

Teoremă (Criteriul Cleștelui). Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ și $(z_n)_n$ trei șiruri de numere reale a.î. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall\, n \ge n_0$, avem $x_n \le y_n \le z_n$.

Presupunem că $\exists\, l \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

<u>Teoremă (Teorema lui Weierstrass)</u>. Orice șir de numere reale monoton și mărginit este convergent.

<u>Observație</u>. Reciproca teoremei precedente nu este, în general, adevărată (există șiruri de numere reale convergente, care nu sunt monotone).

<u>Exercițiu</u>. Fie $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că $(x_n)_n$ nu este monoton.

b) Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

<u>Soluție</u>.

a) Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

$$x_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}.$$

$$x_{2k+1} = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}.$$

$$x_{2k+2} = \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2} = \frac{1}{2k+2}.$$

Avem $x_{2k} > x_{2k+1}$ și $x_{2k+1} < x_{2k+2}$.

Deci $(x_n)_n$ nu este monoton.

b) $-1 \le (-1)^n \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{(-1)^n}{n} \le \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$-\frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{(-1)^n}{n} \to 0, \quad \frac{1}{n} \to 0$$

Conform Criteriului Cleștelui $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$,

i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, i.e. $(x_n)_n$ este convergent. □

Propoziție. Orice șir de numere reale convergent este mărginit.

Propoziție (Operații cu șiruri convergente).

Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale, $a \in \mathbb{R}$ și $x, y \in \mathbb{R}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a \cdot x_n) = a \cdot x$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$ (cu presupunerea suplimentară $y \neq 0$).

Propoziție. Fie $(x_n)_n$ și $(y_n)_n$ două șiruri de numere reale și $x \in \mathbb{R}$. Atunci:

1) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\right) \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0\right)$.

2) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|\right)$.

3) Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ și $(y_n)_n$ e mărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$ („$0 \cdot$ mărginit $= 0$").

Definiție. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Spunem că $(x_n)_n$

este şir Cauchy dacă $\forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

<u>Propoziție.</u> Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$. Sunt echivalente:

1) $(x_n)_n$ este şir convergent.

2) $(x_n)_n$ este şir Cauchy.

<u>Terminologie.</u> Şirurile Cauchy se numesc şi şiruri fundamentale.

<u>Exercițiu.</u> Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $(x_n)_n$ nu este convergent.

<u>Soluție.</u> Arătăm că $(x_n)_n$ nu este şir Cauchy.

$(x_n)_n$ este şir Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

$(x_n)_n$ nu este şir Cauchy $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$ a.î. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists m_k, n_k \in \mathbb{N}$, $m_k \geq k$, $n_k \geq k$ cu proprietatea că $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$.

Avem $|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Luăm $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Avem:

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n_k = k+1 \geq k$ şi $\exists m_k = 2(k+1) \geq k$ a.î.

$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2(k+1)} - x_{k+1}| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$.

Din urmare, $(x_n)_n$ nu este şir Cauchy, deci nici convergent $\square$

Lemă (Lema lui Cesaro). Orice șir de numere reale mărginit are (măcar) un subșir convergent (i.e. $\forall (x_n)_n \subset \mathbb{R}$, $(x_n)_n$ mărginit, $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $(x_{n_k})_k$ convergent).

Limitele extreme ale unui șir de numere reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

Definiție. Fie $x \in \overline{\mathbb{R}} \stackrel{not.}{=} \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă $\exists (x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ a.î. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Notație. $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită al lui $(x_n)_n\}$.

Propoziție. Există un cel mai mare punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$ și un cel mai mic punct limită (finit sau infinit) al șirului $(x_n)_n$.

Definiție. 1. Cel mai mare punct limită al șirului

$(x_n)_n$ se numește limita superioară a sa și se notează $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim}\, x_n$.

2. Cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_n$ se numește limita inferioară a sa și se notează $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim}\, x_n$.

<u>Propoziție.</u> 1) $\underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n$.

2) Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$, caz în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$.

<u>Exercițiu.</u> Determinați $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, precizând dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \cdot \frac{n}{2n+1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

<u>Soluție.</u> $x_{2n} = \frac{1+(-1)^{2n}}{2} + (-1)^{2n} \cdot \frac{2n}{2(2n)+1} =$

$= \frac{1+1}{2} + \frac{2n}{4n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$x_{2n+1} = \frac{1+(-1)^{2n+1}}{2} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2(2n+1)+1} =$

$$= 0 - \frac{2n+1}{4n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{2}.$$

Cum $\mathbb{N} = 2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N}+1)$ rezultă că $\mathcal{L}((x_n)_n) =$

$$= \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}.$$

Prin urmare $\underline{\lim}\, x_n = -\frac{1}{2}$ și $\overline{\lim}\, x_n = \frac{3}{2}$.

Deoarece $\underline{\lim}\, x_n \neq \overline{\lim}\, x_n$ rezultă că nu

există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. $\square$