Curs 9

Grupul $(S_n, \circ)$

Reamintesc că pt $A \neq \emptyset$ $\left(S_A = \{f : A \to A \mid f \text{ bijecție}\}, \circ\right) \to$ grup

op. de compunere uzuală a funcțiilor

Exc! Dacă A și B sunt 2 mulțimi echipotente atunci grupurile $(S_A, \circ)$ și $(S_B, \circ)$ sunt izomorfe.

Dacă $|A| = n \Rightarrow (S_A, \circ) \simeq (S_n, \circ)$ unde $S_n = \{f : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\} \mid f \text{ bijecție}\}$

grupul permutărilor de grad n

Proprietăți ale lui $(S_n, \circ)$

- $|S_n| = n!$
- S_n e grup neabelian $\Leftrightarrow n \geq 3$.

Teorema (Cayley) Orice grup cu n elemente este izomorf cu un subgrup al lui S_n.

Obs Teorema lui Cayley are loc în general pt orice grup G. (Orice grup G este izomorf cu un subgrup al lui S_G)

Dem (thm Cayley) Fie G un grup cu n elemente. Pt a arăta că G este izomorf cu un subgrup al lui S_n este suficient să construiesc un morfism injectiv de grupuri $\phi:(G,\cdot)\longrightarrow(S_n,\circ) \simeq S_G$

Pt. fiecare $g\in G$ considerăm aplicația $f_g: G\longrightarrow G$ $f_g(x)=gx$ $(\forall)x\in G$.

• f_g e inj, deci bijectivă

•• $(f_g\circ f_h)(x) = f_g(f_h(x)) = f_g(hx) = g(hx) = (gh)x = f_{gh}(x)$ $(\forall)x\in G \Rightarrow$

$\Rightarrow f_g\circ f_h = f_{gh}$; $f_{1_G}: G\longrightarrow G$ $f_{1_G}(x) = 1_G x = x$ $(\forall)x\in G$ (*) $\Rightarrow f_{1_G} = 1_G$

••• (3) $f_g\circ f_{g^{-1}} = f_{1_G} = 1_G = f_{g^{-1}}\circ f_g \Rightarrow f_g$ are inversa $f_{g^{-1}}$.

Definesc $\phi_1: G\longrightarrow S_G$ astfel $\phi_1(g) = f_g$ $(\forall)\, g\in G$.

ϕ_1 morfism de grupuri injectiv $\Leftrightarrow$ $\phi_1(g\cdot h) = f_{gh} \overset{(3)}{=} f_g\circ f_h = \phi_1(g)\circ\phi_1(h) \Rightarrow \phi_1$ morfism

$\mathrm{Ker}\,\phi_1 = \{g \mid \underbrace{\phi_1(g)}_{f_g} = 1_G\} \overset{(*)}{=} \{1_G\} \Rightarrow \phi_1$ este inj.

$\Rightarrow$ G este izomorf cu un subgrup al lui S_G, și prin urmare $((S_n,\circ)\simeq(S_G,\circ))$

cu un subgrup al lui $(S_n,\circ)$. $\blacksquare$

Descrierea lui S_n

Pt $\sigma \in S_n$ vom folosi notația $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$e \in S_n$ → reprezintă permutarea identică, i.e. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

$(e = 1_{\{1,\dots,n\}})$

Vom descrie elementele lui S_n folosindu-ne de "descompunerea în cicli disjuncți".

Def Un ciclu din S_n este notat printr-un șir de întregi distincți cuprinși între 1 și n și reprezintă elementul lui S_n care permută ciclic acești întregi și fixează restul întregilor. Concret, un ciclu se reprezintă astfel: fie $1 \le i_1 \ne \dots \ne i_k \ne i_1 \le n$; ciclul $(i_1\, i_2 \dots i_k)$ este permutarea din S_n definită prin: $i_1 \to i_2 \to i_3 \to \dots \to i_{k-1} \to i_k \to i_1$

și $x \mapsto x$ $(\forall)$ $x \ne i_j$ pt $j = \overline{1,k}$.

Numărul $\boxed{k}$ s.n. lungimea ciclului.

Exemple

① Ciclul $(1\,3\,2)$ din S_3 repr. permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

② Ciclul $(1\,3\,2) \in S_7$ repr. permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

3) Pt $n \geq 3$ $(1\,2\,3) = (1\,2) \circ (2\,3) \neq (2\,3) \circ (1\,2) = (1\,3\,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Def Ciclii de lungime 2 s.n. <u>transpoziții</u>.

Obs Există un singur ciclu de lungime 1, permutarea identică.

Def 2 cicli (din S_n) $(i_1\, i_2 \dots i_k)$ și $(j_1\, j_2 \dots j_l)$ s.n. <u>disjuncți</u> dacă $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$.

Obs 2 cicli disjuncți comută. (i.e $(i_1\, i_2 \dots i_k)$ și $(j_1\, j_2 \dots j_l)$ disjuncți $\Rightarrow (i_1\, i_2 \dots i_k) \circ (j_1\, j_2 \dots j_l) = (j_1\, j_2 \dots j_l) \circ (i_1\, i_2 \dots i_k)$)

Teoremă Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca <u>produs</u> de cicli disjuncți, scrierea fiind unică până la ordinea scrierii ciclilor.

Obs Prin abuz de notație (pentru simplificarea notației) vom scrie $(i_1 \dots i_k)(j_1 \dots j_l)$ în loc de $(i_1 \dots i_k) \circ (j_1 \dots j_l)$ și vom spune produs în loc de compunere.

<u>Algoritm de descompunere al unei permutări $\sigma \in S_n$ în produs de cicli disjuncți</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

(*) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$.

<u>Algoritm</u> <u>Pasul 1</u>: pentru a începe un nou ciclu alegem cel mai mic element al lui $\{1, 2, \dots, n\}$ care nu a apărut într-un ciclu anterior - îl notăm cu a (dacă este primul ciclu $a = 1$); începem noul ciclu: $(a$. În exemplul de mai sus avem la început $(1$.

<u>Pasul 2</u> Scriem $\sigma(a)$ din definiția permutării σ - îl notăm cu b, i.e. $b = \sigma(a)$. Dacă $b = a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă (fără a-l scrie pe b); astfel am scris un ciclu - ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $b \neq a$, scriem b lângă a în acest ciclu: $(a\ b$. În exemplul considerat $\sigma(1) = 12 = b$, $12 \neq 1$ deci scriem: $(1\ 12$.

<u>Pasul 3</u>: Scriem $\sigma(b)$ din definiția permutării σ - îl notăm cu c. Dacă $c = a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă și ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $c \neq a$, scriem c după b în acest ciclu: $(a\ b\ c$. Repetăm acest pas folosind c ca noua valoare a lui b până se încheie ciclul. În exemplul nostru $\sigma(12) = 8$, $8 \neq 1$ deci continuăm ciclul: $(1\ 12\ 8$.

(*) $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(3)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$.

Obs În general, în scrierea de produs de cicli disjuncți a unei permutări se omit cicli de lungime 1. În particular,

(*) $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$.

$\sigma \in S_9$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 9 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 8\ 9\ 7\ 2\ 4)(3\ 6)$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 6 & 2 & 5 & 3 & 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 7\ 9\ 8)(3\ 6)$$

Exc Fie ciclul $(i_1\ i_2 \ldots i_k)$. Atunci $(i_1\ i_2 \ldots i_k) = (i_2\ i_3 \ldots i_k\ i_1) = \ldots = (i_k\ i_1\ i_2 \ldots i_{k-1})$. (Un ciclu de lungime k poate fi scris în k moduri)

Exemplu $(1\,2\,3) \in S_4$

$1 \to 2 \to 3 \to 1$, $4 \to 4$

$2 \to 3 \to 1 \to 2$, $4 \to 4$

$3 \to 1 \to 2 \to 3$, $4 \to 4$

$$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$$

$$(1\,2\,3)^{-1} = (3\,2\,1) \neq (3\,1\,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,2) = (3\,2\,1) = (2\,1\,3)$$

Obs $(i_1\ i_2 \ldots i_k)^{-1} = (i_k\ i_{k-1} \ldots i_2\ i_1)$; $(i\ j)^{-1} = (j\ i) = (i\ j)$

(*) $\sigma^{-1} = (4\ 10\ 8\ 12\ 1)(13\ 2)(7\ 11\ 5)(9\ 6)$

Proprietăți 1) ordinul unui ciclu este lungimea ciclului

2) ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este c.m.m.m.c. al lungimii ciclilor care apar în descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncți.

3) orice permutare se scrie ca produs de transpoziții; orice ciclu de lungime k ($(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \dots (i_{k-1} i_k)$) se scrie ca produs de $k-1$ transpoziții). (Atenție! scrierea nu e unică!)

Exemple 1) $\operatorname{ord}(i_1 \dots i_k) = k$

2) (*) $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{cmmmc}(5,2,3,2) = 30$

3) (*) $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(7\ 11\ 5)(9\ 6) =$

$= (1\ 12)(12\ 8)(8\ 10)(10\ 4)(2\ 13)(7\ 11)(11\ 5)(9\ 6)$

$= (1\ 12)(12\ 8)(8\ 10)(4\ 10)(2\ 13)(7\ 11)(5\ 11)(6\ 9)$

$(i\,j) = (j\,i)$ $= (1\ 12)(8\ 12)(8\ 10) \dots$

Def Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. Definim signatura lui σ prin

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

O pereche (i,j), $1 \leq i < j \leq n$ cu $\sigma(i) > \sigma(j)$ s.n. inversiune a lui σ.

Dacă $m(\sigma)$ repr. nr. de inversiuni ale lui σ atunci:

Propr $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$.

Exemplu 1) (*) $m(\sigma) = 11+11+2+0+8+6+2+5+2+1+1+1+0 = 50$,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{50} = 1.$$

2) $\operatorname{sgn}((i\ j)) = -1$ Exc!

3) $\operatorname{sgn}((i_1 \dots i_k)) = (-1)^{k-1}$ Exc!

Def O permutare $\sigma \in S_n$ este pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$ și impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$. Mulțimea permutărilor pare o notăm cu A_n.

Teoremă $\operatorname{sgn} : S_n \to (\{-1,1\},\cdot)$ este un morfism surjectiv de grupuri cu $\operatorname{Ker}(\operatorname{sgn}) = A_n$. În particular, A_n este un subgrup normal al lui S_n și (via T.F.I.) $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

Obs Signatura unei permutări σ este egală cu produsul signaturilor ciclilor disjuncți din descompunerea lui σ.

Ex (*) $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((1\ 12\ 8\ 10\ 4))\operatorname{sgn}((2\ 13))\operatorname{sgn}((5\ 11\ 7))\operatorname{sgn}((6\ 9))$

$$= (-1)^{5-1}\cdot(-1)\cdot(-1)^{3-1}\cdot(-1) = 1$$