Link-uri utile

- Grup tutoriat
- Cursurile de la Băețica
- Cursurile de anul acesta de la Mincu
- Cursurile de an trecut de la Mincu

Exerciții

Exercițiul 1. Arătați că orice grup de 4 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$ sau cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Demonstrație. Fie $(G, +)$ un grup cu $|G| = 4$.

O consecință a teoremei lui Lagrange este că ordinul unui element dintr-un grup trebuie să dividă ordinul (cardinalul) grupului. Deci elementele lui G trebuie să aibă ordinele $\operatorname{ord} x \in \{ 1, 2, 4 \}$.

Avem mai multe cazuri posibile:

1. Există cel puțin un element de ordin 4. Fie $a \in G$, cu $\operatorname{ord} a = 4$. Atunci observăm că a generează tot grupul, deci G este ciclic. Din *teorema de structură a grupurilor ciclice*, acesta este izomorf cu $\mathbb{Z}_4$.

2. Toate elementele au ordin cel mult 2. Să le notăm cu $0, a, b, c$. Atunci

$$0 + 0 = a + a = b + b = c + c = 0$$

   Dacă $a + b = a$ sau $a + b = b$, ar rezulta că $a = 0$ sau că $b = 0$, ceea ce nu se poate. Deci $a + b = c$.

   Analog obținem că $a + c = c + a = b$ și că $b + c = c + b = a$.

   Tabelul pentru acest grup ar fi:

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

   Dacă realizăm corespondența $0 \to (\hat{0}, \hat{0})$, $a \to (\hat{0}, \hat{1})$, $b \to (\hat{1}, \hat{0})$ și $c \to (\hat{1}, \hat{1})$ observăm că tabelul se potrivește cu adunarea pe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

□

Exercițiul 2. Arătați că orice grup de 6 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_6$ sau S_3.

Demonstrație. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| = 4$.

1. Dacă grupul are un element de ordin 6, atunci este ciclic, deci este izomorf cu $\mathbb{Z}_6$.

2. Grupul are cel puțin un element de ordin 3. Să-l notăm pe acesta a. Știm că a și a^2 sunt distincte, iar $a^3 = 1$.

   Să notăm cu b un alt element din grup, diferit de 1, a, sau a^2. Acesta trebuie să aibă ordin 2, altfel am obține distincte elementele ab, a^2b, ab^2, a^2b^2 și am depăși cardinalul lui G.

   Mai facem observația că $ab \neq ba$, altfel completând tabelul am obține că $\operatorname{ord} a = 6$, și G izomorf cu $\mathbb{Z}_6$.

   Completăm tabelul:

	1	a	a^2	b	ab	a^2b
1	1	a	a^2	b	ab	a^2b
a	a	a^2	1	ab	a^2b	b
a^2	a^2	1	a	a^2b	b	ab
b	b	a^2b	ab	1	a^2	a
ab	ab	b	a^2b	a	1	a^2
a^2b	a^2b	ab	b	a^2	a	1

   Acesta se potrivește cu cel al lui S_3.

3. Cazul în care are doar elemente de ordin cel mult 2 ar implica că grupul este comutativ, deoarece

$$\left.\begin{array}{l} (xy)^2 = 1 \implies xy = (xy)^{-1} \\ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx \end{array}\right\} \implies xy = yx$$

□

Exercițiul 3. Arătați că orice grup de 8 elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2^3$, D_4, sau cu Q (grupul cuaternionilor).

Demonstrație. Fie $(G, \cdot)$ un grup cu $|G| = 8$.

1. Dacă are cel puțin un element de ordin 8, atunci G este ciclic, deci izomorf cu $\mathbb{Z}_8$.

2. Dacă toate elementele au ordin cel mult 2, atunci G este izomorf cu $\mathbb{Z}_2^3$.

3. Fie $a \in G$ un element de ordin 4. Acesta va genera subgrupul $\langle a \rangle = \{\, 1, a, a^2, a^3 \,\}$.

   Trebuie să mai existe cel puțin un element, pe care îl notăm b, care să nu aparțină lui $\langle a \rangle$. Elementele grupului sunt

$$G = \{\, 1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b \,\}$$

Știm că b^2 trebuie să fie egal cu unul din primele patru elemente scrise mai sus:

(a) Dacă $b^2 = 1$, atunci $\operatorname{ord} b = 2$. Trebuie să vedem cu cât este egal ba:

   i. Dacă $ba = ab$ atunci G este comutativ și izomorf cu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

   ii. Dacă $ba = a^2 b$, înmulțind cu inversul obținem $a = b^{-1}a^2 b$. Ridicând la pătrat ajungem la contradicția $a^2 = (b^{-1}a^2 b)(b^{-1}a^2 b) = 1$.

   iii. Dacă $ba = a^3 b$, regăsim grupul diedral D4.

(b) Dacă $b^2 = a^2$, atunci $\operatorname{ord} b = 4$.

   i. Dacă $ba = ab$ regăsim $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

   ii. Dacă $ba = a^2 b$ ajungem la contradicția $ba = b^3 \iff a = b^2 = a^2$.

   iii. Dacă $ba = a^3 b$ obținem un grup care se numește *grupul cuaternionilor*. Cuaternionii se notează de obicei cu

$$Q = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$$

   cu proprietatea că $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

(c) $b^2 = a$ și $b^2 = a^3$ duc la contradicția că $\operatorname{ord} b \notin \{ 2, 4 \}$

$\square$