Termeni

Definiția 2.4

Termenii lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(T0) *Orice variabilă este termen.*

(T1) *Orice simbol de constantă este termen.*

(T2) *Dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $ft_1 \ldots t_m$ este termen.*

(T3) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt termeni.*

Notații:

- Mulțimea termenilor se notează $Term_{\mathcal{L}}$.
- Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t.

Definiția 2.5

Un termen t se numește închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Formule

Definiția 2.6

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- *$(s = t)$, unde s, t sunt termeni;*
- *$(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.*

Definiția 2.7

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile definite astfel:

(F0) *Orice formulă atomică este formulă.*

(F1) *Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.*

(F2) *Daca φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.*

(F3) *Dacă φ este formulă, atunci $(\forall x\varphi)$ este formulă pentru orice variabilă x.*

(F4) *Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2), (F3) sunt formule.*

Formule

Notații

- Mulțimea formulelor se notează $Form_{\mathcal{L}}$.
- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ.

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\forall x\varphi$ în loc de $(\forall x\varphi)$, etc..

Formule

Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- *Γ conține toate formulele atomice;*
- *Γ este închisă la $\neg, \to$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).*

Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Formule

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$\begin{array}{lcl} \varphi \vee \psi & := & ((\neg\varphi) \to \psi) \\ \varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\ \varphi \leftrightarrow \psi & := & ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ \exists x\varphi & := & (\neg\forall x(\neg\varphi)). \end{array}$$

Formule

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.

Notații

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $ft_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $Rt_1 t_2$.

$\mathcal{L}$-structura

Definiția 2.9

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- *A este o mulțime nevidă;*
- *$\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;*
- *$\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;*
- *$\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.*
- *A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$*
- *$f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.*

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{^{-1}}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 2.10

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a termenului t sub evaluarea e:

- *dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;*
- *dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;*
- *dacă $t = ft_1 \ldots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.*

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei φ sub evaluarea e.*

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\to : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \to \{0, 1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$ sau $\psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Interpretarea formulelor

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- *e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$.* Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.
- *e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.* Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

Corolar 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *implică* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x \varphi)[e] \iff$ *pentru orice* $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Relația de satisfacere

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \textit{dacă există } a \in A \textit{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \textit{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

$$\begin{aligned} (\exists x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg \forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x \neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg \varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\ &\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1. \end{aligned}$$

Relația de satisfacere

Corolar 2.15

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *și* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *sau* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ *ddacă* $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x \varphi)[e] \iff$ *există* $a \in A$ *a.î.* $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Semantică

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.16

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Semantică

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.17

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.

Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 2.18

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Semantică

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.19

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \psi$

Definiția 2.20

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \,\text{⫤}\!\vDash \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Echivalențe și consecințe logice

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\neg\exists x\varphi \;\text{⫤}\!\vDash\; \forall x\neg\varphi \qquad (1)$$
$$\neg\forall x\varphi \;\text{⫤}\!\vDash\; \exists x\neg\varphi \qquad (2)$$
$$\forall x(\varphi \wedge \psi) \;\text{⫤}\!\vDash\; \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \qquad (3)$$
$$\forall x\varphi \vee \forall x\psi \;\vDash\; \forall x(\varphi \vee \psi) \qquad (4)$$
$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \;\vDash\; \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \qquad (5)$$
$$\exists x(\varphi \vee \psi) \;\text{⫤}\!\vDash\; \exists x\varphi \vee \exists x\psi \qquad (6)$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\vDash\; \forall x\varphi \to \forall x\psi \qquad (7)$$
$$\forall x(\varphi \to \psi) \;\vDash\; \exists x\varphi \to \exists x\psi \qquad (8)$$
$$\forall x\varphi \;\vDash\; \exists x\varphi \qquad (9)$$

$$
\begin{align}
\varphi &\vDash \exists x\varphi \tag{10}\\
\forall x\varphi &\vDash \varphi \tag{11}\\
\forall x\forall y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \forall y\forall x\varphi \tag{12}\\
\exists x\exists y\varphi &\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} \exists y\exists x\varphi \tag{13}\\
\exists y\forall x\varphi &\vDash \forall x\exists y\varphi. \tag{14}
\end{align}
$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.21

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \land t = u \to s = u$.

Dem.: *Exercițiu ușor.*