

Exercitii

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 9^{ax} - 4 \cdot 3^{ax+1} + 12 & ; x < 1 \\ -15x^2 - ax + a & ; x \geq 1. \end{cases}$

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă.

2. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue în x_0 și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că h este continuă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ ($= h(x_0)$).

3. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile în x_0 și $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Arătați că h este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x_0) = g'(x_0)$.

4. Studiați uniform continuitatea funcțiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$

b) $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

c) $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

5. Fie $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții uniform continue.

a) Arătați că $f+g$ este funcție uniform continuă, unde $f+g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

b) Dați exemplu de două funcții f și g ca în enunț, astfel încât $f \cdot g$ nu este funcție uniform continuă, unde $f \cdot g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

c) Presupunem, în plus, că funcțiile f și g sunt mărginite. Arătați că funcția $f \cdot g$ este uniform continuă.

6. Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulțime mărginită și $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât, $\forall (x_n)_n \subset A$, $(x_n)_n$ șir Cauchy, avem că $(f(x_n))_n$ este șir Cauchy. Arătați că f este funcție uniform continuă.

7. Studiați convergența simplă și uniformă pentru următoarele serii de funcții:

$$a) f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$b) f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$c) f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = e^{-nx^2} \sin nx \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$d) f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x+n}{x+n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$e) f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$f) f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^n}{e^x + x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$g) f_n: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{e^x \cdot x^n}{1+x^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$h) f_n: [3, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(x+n)^3}{n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$i) f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n (1-x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$j) f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n (1-x)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$k) f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x^3}{n^3+x^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

8) $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

8. Arătați că următoarele serii de funcții converg uniform:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^8 x^2}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg nx}{n(n+1)}$.

9. Determinați mulțimea de convergență pentru următoarele serii de puteri:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \sqrt{n+1}} x^n$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1) \cdot 2^n}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^2 \sqrt{3^n}} (x+2)^n$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)\sqrt{n}}$.

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} \sqrt[5]{n+1}} \cdot x^n.$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} \sqrt[4]{n+2}} \cdot (x-2)^n.$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} \cdot x^n.$$

10. Dați exemplu de o serie de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu raza de convergență $R=5$. Justificați alegerea făcută.

11. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x următoarele funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x.$

b) $f: (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x).$

c) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(1+x^2).$