Noţiunea de derivată

Problema tangentei la o curbă (care a fost considerată de Leibniz) şi problema vitezei instantanee a unui mobil (care a fost considerată de Newton) au condus la următoarea:

Definiţie. *Fie* $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ *şi* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Dacă există (în $\overline{\mathbb{R}}$*), limita* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *se numeşte derivata lui* f *în* x_0 *şi se notează* $f^{'}(x_0)$. *Spunem în acest caz că* f *are derivată în* x_0.

Dacă $f^{'}(x_0)$ *este finită, spunem că* f *este derivabilă în* x_0.

Dacă f *este derivabilă în toate punctele unei mulţimi* $E \subseteq (a, b)$, *atunci spunem că* f *este derivabilă pe* E.

Definiţie. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D^{'}$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$.

Dacă există (în $\overline{\mathbb{R}}$*), limita* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *se numeşte derivata lui* f *în* x_0 *şi se notează* $f^{'}(x_0)$. *Spunem în acest caz că* f *are derivată în* x_0.

Dacă $f^{'}(x_0)$ *este finită, spunem că* f *este derivabilă în* x_0.

Dacă f *este derivabilă în toate punctele unei mulţimi* $E \subseteq D \cap D^{'}$, *atunci spunem că* f *este derivabilă pe* E.

Exemplu. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \ln x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ şi $x_0 \in (0, \infty)$.

Avem

$$f^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\ln(1 + \frac{x - x_0}{x_0})}{\frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

În continuare vom prezenta derivatele câtorva funcţii uzuale.

1. $(x^n)^{'} = nx^{n-1}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *şi pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*;*
2. $(x^\alpha)^{'} = \alpha x^{\alpha-1}$ *pentru orice* $x \in (0, \infty)$ *şi pentru orice* $\alpha \in \mathbb{R}$*;*
3. $(\sin x)^{'} = \cos x$ *şi* $(\cos x)^{'} = -\sin x$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*
4. $(a^x)^{'} = a^x \ln a$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *şi pentru orice* $a \in (0, \infty)$*;*
5. $(\ln x)^{'} = \frac{1}{x}$ *pentru orice* $x \in (0, \infty)$*;*
6. $(tgx)^{'} = \frac{1}{\cos^2 x}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$*;*
7. $(ctgx)^{'} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$*;*
8. $(\arcsin x)^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pentru orice* $x \in (-1, 1)$*;*
9. $(arc \cos x)^{'} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *pentru orice* $x \in (-1, 1)$*;*
10. $(arctgx)^{'} = \frac{1}{1+x^2}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$*;*
11. $(arcctgx)^{'} = -\frac{1}{1+x^2}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$.

Legătura dintre derivabilitate şi continuitate

Legătura dintre derivabilitate şi continuitate este precizată de următorul rezultat:

Teorema privind relaţia dintre continuitate şi derivabilitate. *Fie* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$. *Dacă* f *este derivabilă în* x_0, *atunci* f *este continuă în* x_0.

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)) = f(x_0) + f^{'}(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

deci f este continuă în x_0. $\square$

Observaţie. *Reciproca teoremei anterioare nu este validă,* aşa cum ne arată funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, f este continuă în 0 deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (-x) = 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0),$$

dar nu este derivabilă în 0 deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{-x}{x} = -1$$

şi

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x}{x} = 1.$$

Derivate laterale

Definiţie. *Fie* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *şi* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. *Spunem în acest caz că* f *are derivată la stânga în* x_0 *dacă există (în* $\overline{\mathbb{R}}$*), limita* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *care se notează* $f_s^{'}(x_0)$ *şi care se numeşte derivata la stânga în* x_0 *a lui* f. *Dacă* $f_s^{'}(x_0)$ *este finită, spunem că* f *este derivabilă la stânga în* x_0.

Analog se defineşte derivata la dreapta în x_0 *a lui* f *care se notează* $f_d^{'}(x_0)$.

Derivatele la dreapta şi la stânga în x_0 *ale lui* f *se numesc derivatele laterale ale lui* f *în* x_0.

Propoziţie. *Fie* $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ *şi* $f : D \to \mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

α) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) f are derivată în x_0;

ii) f are derivată la stânga în x_0, f are derivată la drepata în x_0 şi $f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0)$.

β) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) f este derivabilă în x_0;

ii) f este derivabilă la stânga în x_0, f este derivabilă la drepata în x_0 şi $f_s^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0)$.

Exemplu. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x, & x \geq 1 \\ ax + b, & x < 1 \end{array} \right.$, unde a şi b sunt parametrii reali.

Avem

$$f^{'}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ a, & x < 1 \end{array} \right. .$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln x = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (ax + b) = a + b$$

şi

$$f(1) = a + b,$$

deducem că f este continuă în 1 dacă şi numai dacă $b = -a$, ceea ce reprezintă o condiţie necesară (dar nu şi suficientă) pentru derivabilitatea lui f în 1.

Avem

$$f_s^{'}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

şi

$$f_d^{'}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{ax - a}{x - 1} = a,$$

deci f este derivabilă în 1 dacă şi numai dacă $b = -a = -1$, caz în care $f^{'}(1) = 1$.

Temă. Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcţii $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{array} \right.$;

ii) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin x, & x < \frac{\pi}{4} \\ -\cos x, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$;

iii) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin x, & x < 0 \\ ax + b, & x \geq 0 \end{array} \right.$, unde a şi b sunt parametrii reali.

Reguli de derivare

Teorema privind derivabilitatea sumei, produsului şi câtului de funcţii derivabile. *Fie I este un interval nedegenerat al axei reale, $x_0 \in I$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabile în punctul x_0. Atunci:*

i) funcţia $f + g$ este derivabilă în x_0 şi

$$(f+g)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0);$$

ii) funcţia fg este derivabilă în x_0 şi

$$(fg)^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0);$$

iii) dacă, în plus, $g(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încât funcţia $\frac{f}{g}$, definită cel puţin pe $V \cap I$, este derivabilă în x_0 şi

$$(\frac{f}{g})^{'}(x_0) = \frac{f^{'}(x_0)g(x_0) - f(x_0)g^{'}(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Demonstraţie.

i) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)+g(x)-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f^{'}(x_0) + g^{'}(x_0)$.

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} f(x_0) = f^{'}(x_0)g(x_0) + f(x_0)g^{'}(x_0)$.

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x_0)}{g(x)g(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f^{'}(x_0)g(x_0)-f(x_0)g^{'}(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

$\square$

Teorema privind derivabilitatea compunerii de funcţii derivabile. *Fie I şi J intervale nedegenerate ale axei reale, $x_0 \in I$, $f : I \to J$ şi $g : J \to \mathbb{R}$ având următoarele proprietăţi:*

i) f este derivabilă în x_0;

ii) g este derivabilă în $f(x_0)$.

Atunci:

α) $g \circ f$ este derivabilă în x_0;

β)

$$(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0).$$

Demonstraţie.

Fie $A = \{x \in I \mid f(x) = f(x_0)\}$. Avem două cazuri $x_0 \in A'$ şi $x_0 \notin A'$.

Cazul 1. Dacă $x \in A'$ atunci avem $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0; x \in A} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$ 0, $\lim\limits_{x \to x_0; x \in A} \frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0; x \in A} \frac{(g \circ f)(x_0)-(g \circ f)(x_0)}{x-x_0} = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0; x \notin A} \frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(x_0)}{x-x_0} =$

$\lim_{x \to x_0; x \notin A} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0) = 0$. Rezultă că $(g \circ f)^{'}(x_0) = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0)$.

Cazul 2. Dacă $x \in A'$ atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Deci $\lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0; x \notin A} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0; x \notin A} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g^{'}(f(x_0))f^{'}(x_0)$. $\square$

Teorema privind derivabilitatea inversei unei funcţii. *Fie $f : I \to J = f(I)$ şi $x_0 \in I$ având următoarele proprietăţi:*

i) I şi J sunt intervale nedegenerate ale axei reale;

ii) f este o funcţie strict monotonă şi bijectivă (rezultă că f şi f^{-1} sunt continue);

iii) f este derivabilă în $x_0 \in I$;

iv) $f^{'}(x_0) \neq 0$.

Atunci:

α) funcţia $f^{-1} : J \to I$ este derivabilă în $f(x_0)$;

β)

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}.$$

Exemple

1. Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(x + \sqrt{x^2 + 1})^{'} =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se calculeze derivata funcţiei $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = (1 + x)^{\cos x}$ pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

Avem

$$f^{'}(x) = (e^{\ln((1+x)^{\cos x})})^{'} = (e^{\cos x \ln((1+x)})^{'} =$$

$$= e^{\cos x \ln((1+x)}(\cos x \ln(1 + x))^{'} =$$

$$= (1 + x)^{\cos x}(\sin x \ln(1 + x) + \frac{\cos x}{1 + x}),$$

pentru orice $x \in (-1, \infty)$.

3. Să se calculeze $(f^{-1})^{'}(2)$, unde $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ este dată $f(x) = 2^x + 3^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$(f^{-1})^{'}(f(0)) = \frac{1}{f^{'}(0)}, \text{ i.e. } (f^{-1})^{'}(2) = \frac{1}{\ln 6}.$$

Temă

1. Să se calculeze derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de:
i) $f(x) = \sin^2 2x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = e^{arctgx}(x^2 + 1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Să se calculeze derivata funcţiei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^{1+\sin x}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.
3. Să se calculeze $(f^{-1})^{'}(1)$, unde $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este dată $f(x) = x + \ln x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Interpretarea geometrică a derivatei

Propoziţie. *Fie I un interval nedegenarat al axei reale, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în x_0. Atunci:*
α) Panta tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 este $f^{'}(x_0)$.
β) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x_0 este

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0).$$

Exemplu. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată de $f(x) = e^{x^2-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Deoarece $f^{'}(x) = (2x - 1)e^{x^2-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $f^{'}(1) = 1$ şi deci ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 este

$$y = x - 1.$$

Temă. Să se scrie ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă 1 dacă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este dată de $f(x) = \ln \frac{x}{x^2+1}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Definiţie. *Fie I un interval nedegenarat al axei reale, $x_0 \in I$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în x_0 care nu este derivabilă în x_0 dar pentru care există derivatele laterale. Atunci:*
i) x_0 se numeşte punct unghiular dacă cel puţin una dintre derivatele laterale este finită;
ii) x_0 se numeşte punct de inflexiune dacă derivatele laterale sunt infinite şi egale;
iii) x_0 se numeşte punct de întoarcere dacă derivatele laterale sunt infinite şi distincte.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \{ \begin{array}{ll} -\sqrt[3]{x}, & x < 0 \\ \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{array}$. Deoarece

$$f_s^{'}(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$$

şi
$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty,$$
concluzionăm că 0 este punct de întoarcere.

Temă. Să se determine punctele unghiulare/de întoarcere pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de:
i) $f(x) = \sqrt{|x|}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
ii) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Derivate de ordin superior

Definiţie. *Fie $\subseteq \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a_1,b_1) \subset (a,b)$, $x_0 \in (a_1,b_1)$ şi $f' : (a_1,b_1) \to \mathbb{R}$. Dacă f' este derivabilă în x_0, atunci spunem că f este derivabilă de două ori în x_0 şi notăm $(f')'(x_0)$ cu $f''(x_0)$. Funcţia $f'' : D_2 \to \mathbb{R}$, unde $D_2 = \{x \in (a_1,b_1) \mid f'$ este derivabilă în $x\}$, se numeşte derivata de ordin doi (sau derivata a doua) a lui f.*

Analog se defineşte derivata de ordin n a unei funcţii f, unde $n \in N$, notată cu $f^{(n)}$.

Propoziţie. *Fie $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile de ordin n, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci,*
$$(\alpha f)^{(n)} = \alpha (f)^{(n)} ,$$
$$(f+g)^{(n)} = (f)^{(n)} + (g)^{(n)}$$
şi
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)},$$
unde $f^{(0)} = f$ şi $g^{(0)} = g$.

Exemple

1. Să se determine derivata de ordin n a funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

Deoarece $f(x) = \frac{1}{2}((x-1)^{-1} - (x+1)^{-1})$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, folosind metoda inducţiei matematice, deducem că
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(-1)^n n!((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1}),$$
pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Să se determine derivata de ordin n a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem $f = gh$, unde $g(x) = x^3$ şi $h(x) = e^{-x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare

$$f^{(n)} = (gh)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k g^{(n-k)} h^{(k)} =$$

$$= C_n^0 g^{(0)} h^{(n)} + C_n^1 g^{(1)} h^{(n-1)} + C_n^2 g^{(2)} h^{(n-2)},$$

deoarece $g^{(k)} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$. Prin urmare, avem

$$f^{(n)}(x) = e^{-x}((-1)^n x^3 + (-1)^{n-1} 3nx^2 + (-1)^{n-2} 3n(n-1)x + (-1)^{n-3} n(n-1)(n-2)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Temă

1. Să se determine derivata de ordin n a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = e^{2x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Puncte de extrem local. Teorema lui Fermat

Noţiunea de derivată este instrumentul principal care se foloseşte într-o problemă practică de o importanţă crucială, anume stabilirea punctelor de extrem ale funcţiilor reale de o variabilă reală. Prezentăm în continuare primul pas care contribuie la soluţionarea acestei probleme, anume teorema lui Fermat.

Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Punctul c se numeşte punct de maxim local (relativ) al funcţiei f dacă există $\delta > 0$ astfel încât $f(c) \geq f(x)$ pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$. Punctul c se numeşte punct de minim local (relativ) al funcţiei f dacă există $\delta > 0$ astfel încât $f(c) \leq f(x)$ pentru orice $x \in D \cap (c - \delta, c + \delta)$. Punctele de maxim local şi cele de minim local se numesc puncte de extrem local.*

Teorema lui Fermat. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat, c un punct din interiorul intervalului I şi $f : I \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:*

i) c este un punct de extrem local al funcţiei f;

ii) f este derivabilă în c.

Atunci $f^{'}(c) = 0$.

Demonstraţia. Fără pierderea generalităţii, putem presupune că c este un punct de maxim local. Prin urmare există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(c) \geq f(x),$$

pentru orice $x \in (c - \delta, c + \delta) \subseteq I$.

Aşadar

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$

pentru orice $x \in (c, c+\delta)$ şi

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$$

pentru orice $x \in (c-\delta, c)$.

În consecinţă, avem

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f^{'}(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$

deci

$$f^{'}(c) = 0. \ \square$$

Observaţii

1. *Condiţia ca c să fie un punct din interiorul intervalului I este esenţială*, aşa cum arată următorul exemplu: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$.

2. *Funcţia f poate avea puncte de extrem în care să nu fie derivabilă*, aşa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3. *Este posibil ca $f^{'}(c) = 0$ fără ca c să fie punct de extrem local*, aşa cum arată următorul exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x^3$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. *Interpretarea geometrică a Teoremei lui Fermat*: într-un punct de extrem din interiorul intervalului I în care f este derivabilă, tangenta la graficul funcţiei este paralelă cu axa Ox.

Exemplu. Fie $a, b > 0$. Atunci $a^x + b^x \geq 2$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $b = \frac{1}{a}$.

"$\Leftarrow$" Conform inegalităţii mediilor, avem

$$\frac{a^x + b^x}{2} \geq \sqrt{a^x b^x} = 1.$$

"$\Rightarrow$" Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = a^x + b^x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ipoteza se rescrie sub forma $f(x) \geq f(0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, i.e. 0 este punct de minim al funcţiei f. Conform teoremei lui Fermat, $f^{'}(0) = 0$, i.e. $\ln a + \ln b = 0$, de unde $ab = 1$.

Teorema lui Rolle

Teorema lui Rolle. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ având următoarele proprietăţi:*
i) f este continuă pe $[a, b]$;
ii) f este derivabilă pe (a, b);
iii) $f(a) = f(b)$.

Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f^{'}(c) = 0$.

Demonstraţie. Printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $f - f(a)$, putem presupune că $f(a) = f(b) = 0$. De asemenea, putem presupune că f nu este identic nulă (căci altfel concluzia este imediată) şi că ia şi valori strict pozitive (printr-o eventuală înlocuire a lui f cu $-f$). Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = \sup_{c\in[a,b]} f(x)$. Vom arăta că $c \in (a, b)$. Într-adevăr, dacă $c \in \{a, b\}$, atunci $0 = f(a) = f(b) = f(c) = \sup_{c\in[a,b]} f(x) \geq f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, ceea ce contrazice faptul că f ia şi valori strict pozitive. Deci $c \notin \{a, b\}$. Teorema lui Fermat ne asigură că $f^{'}(c) = 0$. $\square$

Observaţii

1. În general, *punctul c din concluzia Teoremei lui Rolle nu este unic*, aşa cum ne arată cazul funcţiilor constante.

2. *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde I este un interval nedegenerat al axei reale, o funcţie derivabilă. Atunci:*

α) Între două soluţii consecutive ale ecuaţiei $f(x) = 0$ se află cel puţin o soluţie a ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$.

β) Între două soluţii consecutive ale ecuaţiei $f^{'}(x) = 0$ se află cel mult o soluţie a ecuaţiei $f(x) = 0$.

3. *Interpretarea geometrică a Teoremei lui Rolle*: în ipotezele Teoremei lui Rolle, există cel puţin un punct al graficului lui f în care tangenta la graficul funcţiei f este orizontală.

Exemplu. Să se determine numărul şi poziţionarea rădăcinilor ecuaţiei $e^{2x} - 6e^x + 4x + 4 = 0$.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 4x + 4$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $f^{'}(x) = 2(e^x - 1)(e^x - 2)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci ecuaţia $f^{'}(x) = 0$ are rădăcinile 0 şi $\ln 2$. Cum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) < 0$, $f(\ln 2) < 0$ şi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deducem că ecuaţia $e^{2x} - 6e^x + 4x + 4 = 0$ are o unică rădăcină în intervalul $(\ln 2, \infty)$.

Temă. Să se determine numărul şi poziţionarea rădăcinilor ecuaţiei:
i) $x^3 - 12x + 1 = 0$;
ii) $x^2 = 2 \ln x + 10$;
iii) $3x^5 - 25x^3 + 60x + m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

Teorema lui Lagrange

Teorema următoare, cunoscută şi sub numele de Teorema creşterilor finite, este un instrument extrem de utilizat, care intervine în demonstraţia multor rezultate centrale din cadrul Analizei Matematice.

Teorema lui Lagrange. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *şi* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *având următoarele proprietăţi:*
i) f *este continuă pe* $[a, b]$*;*
ii) f *este derivabilă pe* (a, b)*.*
Atunci există $c \in (a, b)$ *astfel încât* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f^{'}(c)$*.*
Demonstraţie. Să considerăm funcţia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată de $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ pentru orice $x \in [a, b]$, care este diferenţa dintre f şi funcţia care are ca grafic segmentul de capete $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$. Observăm că $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, φ este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b). Prin aplicarea teoremei anterioare (teorema llui Rolle) funcţiei φ rezultă că există $c \in (a, b)$ astfel încât $\varphi^{'}(c) = 0$. Atunci $0 = \varphi^{'}(c) = f^{'}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, de unde se obţine concluzia. $\square$

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange: în ipotezele Teoremei lui Lagrange, există cel puţin un punct al graficului lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu segmentul de capete $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

Consecinţe ale Teoremei lui Lagrange

1. *În cadrul teoremei de mai sus, avem:*

α) Dacă $f^{'}(x) = 0$ *pentru orice* $x \in (a, b)$*, atunci* f *este constantă.*

β) Dacă $f^{'}(x) \geq 0$ $(f^{'}(x) > 0)$ *pentru orice* $x \in (a, b)$*, atunci* f *este crescătoare (strict crescătoare).*

γ) Dacă $f^{'}(x) \leq 0$ $(f^{'}(x) < 0)$ *pentru orice* $x \in (a, b)$*, atunci* f *este descrescătoare (strict descrescătoare).*

2. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obţine diverse aproximări.* De exemplu, pentru a aproxima pe $\sqrt{105}$, conform Teoremei lui Lagrange, există $c \in (100, 105)$ astfel încât $\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$, de unde obţinem $\frac{5}{2 \cdot 11} < \sqrt{105} - 10 < \frac{5}{2 \cdot 10}$, adică $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$.

3. *Teorema lui Lagrange poate fi folosită pentru a obţine diverse inegalităţi.* De exemplu, este cunoscută inegalitatea lui Bernoulli, anume că pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $1 + x > 0$, avem $(1 + x)^n > 1 + nx$. Vom arăta că această inegalitate este valabilă pentru orice exponent $r \in [1, \infty)$. În acest scop putem considera funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = (1 + x)^r$, pentru orice

$x \in (-1, \infty)$. Aplicând teorema lui Lagrange pe intervalul de capete x şi 0, se obţine inegalitatea de mai sus.

4. Corolarul Teoremei lui Lagrange privind existenţa derivatei unei funcţii într-un punct. *Fie I un interval nedegenerat al axei reale, $f : I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$ astfel încât:*

i) f este continuă;

ii) f este derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$;

iii) există $\lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$.

Atunci:

α) Există $f^{'}(x_0)$.

β) $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$ pentru orice şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \setminus \{x_0\}$ astfel încât $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Aplicând Teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalul de capete x_0 şi x_n, există ζ_n între x_0 şi x_n astfel încât $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = f^{'}(\zeta_n)$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} \zeta_n = x_0$, deducem că $\lim\limits_{n \to \infty} f^{'}(\zeta_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$, i.e. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} f^{'}(x)$. $\square$

Exemple.

1. Să se arate că $e^x \geq x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = e^x - x - 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $f^{'}(x) = e^x - 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $f^{'}(x) \geq 0$ pentru orice $x \geq 0$ şi $f^{'}(x) \leq 0$ pentru orice $x \geq 0$. Prin urmare, f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi crescătoare pe $[0, \infty)$. Prin urmare 0 este punct de minim global, i.e. $f(x) \geq f(0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, i.e. $e^x \geq x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Avem

$$f^{'}(x) = \{ \begin{array}{cc} -\frac{2}{x^2+1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \frac{2}{x^2+1}, & x \in (-1, 1) \end{array} .$$

Este uşor de văzut că f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f^{'}(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} -\frac{2}{x^2+1} = -1$, deducem că $f^{'}_s(-1) = -1$. Similar obţinem $f^{'}_d(-1) = 1$, $f^{'}_s(1) = 1$ şi $f^{'}_d(1) = -1$. Aşadar f nu este derivabilă în -1 şi 1

3. Să se demonstreze că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Funcţia $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ pentru orice $x \in (-1, 1)$, este derivabilă şi $f^{'}(x) = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Prin urmare există $C \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = C$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Cum $C = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, decucem că $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Cum egalitatea precedentă este adevărată şi pentru $x \in \{-1.1\}$, concluzionăm că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in [-1, 1]$.

Temă

1. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de:

i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x) = e^{x^3-3x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se studieze derivabilitatea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

3. Să se demonstreze că $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Teorema lui Darboux

Deşi derivata unei funcţii nu este în mod necesar continuă, este valabil următorul rezultat:

Teorema lui Darboux. *Fie I un interval nedegenerat al axei reale şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Atunci, pentru orice interval J inclus în I, $f^{'}(J)$ este interval* (i.e. $f^{'}$ are proprietatea lui Darboux).

Demonstraţie. Fie $a, b \in J$, $a < b$. Putem presupune, fără pierderea generalităţii, că $f^{'}(a) < f^{'}(b)$. Pentru $\lambda \in (f^{'}(a), f^{'}(b))$ arbitrar, considerăm funcţia continuă $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dată de $\varphi(x) = f(x) - \lambda x$ pentru orice $x \in I$. Atunci există $c \in [a, b]$ astfel încât $\varphi(c) = \inf\limits_{x \in [a,b]} \varphi(x)$. Vom arăta că $c \in (a, b)$. Într-adevăr, avem $\varphi^{'}(a) < 0$ şi $\varphi^{'}(b) > 0$, i.e. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} = \varphi^{'}(a) < 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x-b} = \varphi^{'}(b) > 0$. Prin urmare, există $u, v \in (a, b)$, $u < v$ astfel încât $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} < 0$ pentru orice $x \in (a, u)$ şi $\frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{x-b} > 0$ pentru orice $x \in (v, b)$. Ca atare $\varphi(x) < \varphi(a)$ pentru orice $x \in (a, u)$ (deci $a \neq c$) şi $\varphi(x) < \varphi(b)$ pentru orice $x \in (v, b)$ (deci $b \neq c$). Prin urmare, conform Teoremei lui Fermat, găsim că $\varphi^{'}(c) = 0$, i.e. $f^{'}(c) = \lambda$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Regula lui l'Hospital

De o mare utilitate pentru calculul limitelor de funcţii este următorul două rezultat.

Regula lui l'Hospital. *Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, I un interval din $\mathbb{R}$, astfel încât $(a, b) \subseteq I \subseteq [a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ şi $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăţi:*

i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ *(respectiv* $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$*);*

ii) f şi g sunt derivabile şi $g^{'}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$;

iii) există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci:

α) $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I \setminus \{x_0\}$ (respectiv există V o vecinătate a lui x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (I \cap V) \setminus \{x_0\}$).

β) Există $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Exemple

1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{xe^x+\sin x}$.

Deoarece

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(xe^x+\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{e^x+xe^x+\cos x} = \frac{1}{2},$$

concluzionăm că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{xe^x+\sin x} = \frac{1}{2}.$$

2. Să se calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x$.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (-x) = 0,$$

concluzionăm că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0.$$

Temă

Să se calculeze:

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$;

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$;

iii) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}$;

iv) $\lim\limits_{x\to \infty} x(\pi - 4arctg\frac{x}{x+1})$;

v) $\lim\limits_{x\to \infty} (\frac{\pi}{2} - arctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

Teorema lui Taylor

O generalizare a teoremei lui Lagrange, extrem de utilă din punct de vedere practic, atât pentru calculul limitelor, cât şi pentru determinarea punctelor de extrem, este dată de Teorema lui Taylor.

Teorema lui Taylor. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:*

i) există f', f'', ..., $f^{(n-1)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi sunt continue;

ii) există $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in [a,b]$ există γ, între α şi β, astfel încât

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1} +$$

$$+\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n.$$

Demonstraţie. Fie P numărul real definit de relaţia

$$\frac{(\beta-\alpha)^n}{n!}P = f(\beta) - [f(\alpha) + \frac{f^{'}(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f^{''}(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^{n-1}].$$

Funcţia $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$\varphi(x) = f(\beta) - [f(x) + \frac{f^{'}(x)}{1!}(\beta-x) + \frac{f^{''}(x)}{2!}(\beta-x)^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1} + \frac{P}{n!}(\beta-x)^n],$$

pentru orice $x \in [a,b]$, are următoarele două proprietăţi:
i) $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$;
ii) $\varphi^{'}(x) = \frac{P - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(\beta-x)^{n-1}$ pentru orice $x \in [a,b]$.
Atunci, utilizând Teorema lui Rolle, se deduce concluzia. $\square$

Observaţie. *Cantitatea $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!}(\beta-\alpha)^n$ se notează cu R_n şi se numeşte restul sub forma lui Lagrange. Acest rest se poate prezenta şi în alte forme. Menţionăm aici doar forma lui Cauchy, anume afirmăm că există $\theta \in (0,1)$ astfel încât $R_n = (1-\theta)^{n-1}\frac{f^{(n)}((1-\theta)\alpha+\theta\beta)}{(n-1)!}(\beta-\alpha)^n$.*

Exemple
1. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
Conform Teoremei lui Taylor, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există astfel încât

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \cos c_x,$$

deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cos c_x = \frac{1}{2}.$$

Temă
Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - arctgx}{x^2\ln(1+x)}$.

Teorema de permutare a limitei cu derivata. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, unde $f_n : I \to \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăţi:*

i) I este un interval nedegenerat şi mărginit din $\mathbb{R}$;
ii) există $x_0 \in I$ astfel încât şirul $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent;
iii) f_n este derivabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
iv) şirul $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către o funcţie $g : I \to \mathbb{R}$.
Atunci:
α) Există o funcţie derivabilă $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încât şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f;
β) $f^{'} = g$, i.e. $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))^{'} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{'}(x)$.

SERII DE FUNCŢII

Noţiunea de serie de funcţii

Definiţie. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n, f : D \to \mathbb{R}$, $S_n = f_1 + ... + f_n$, unde $n \in \mathbb{N}$. Spunem că:*
i) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ converge către f dacă şirul de funcţii $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge către f;
ii) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ converge uniform către f dacă şirul de funcţii $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către f;
iii) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ converge absolut dacă seria $\sum\limits_n |f_n(x)|$ este convergentă pentru orice $x \in D$.

Teoreme privind transportul de proprietăţi pentru seriile de funcţii

Folosind rezultatele privind transportul de proprietăţi pentru şirurile de funcţii se pot deduce rezultate similare pentru serii de funcţii.

Teoremă. *Fie $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n, f : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:*
i) f_n este continuă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
ii) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ converge uniform către f.
Atunci f este continuă.

Teoremă. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f_n, f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât:*
i) f_n este integrabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
ii) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ converge uniform către f.
Atunci:
α) f este integrabilă;
β) $\int_a^b f = \int_a^b \sum\limits_n f_n = \sum\limits_n \int_a^b f_n$.

Teoremă. *Fie* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ *şi* $x_0 \in [a, b]$ *astfel încât:*

i) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n(x_0)$ *este convergentă;*

ii) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n^{'}$ *converge uniform.*

Atunci există $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *având următoarele două proprietăţi:*

a) seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ *converge uniform către* f.

b) $(\sum\limits_n f_n)^{'} = f^{'} = \sum\limits_n f_n^{'}$.

Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii

Criteriul lui Weierstrass privind seriile de funcţii. *Fie* $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *astfel încât există un şir de numere reale* $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *având următoarele două proprietăţi:*

i) $|f_n(x)| \leq M_n$ *pentru orice* $x \in D$ *şi orice* $n \in \mathbb{N}$;

ii) seria $\sum\limits_n M_n$ *este convergentă.*

Atunci seria de funcţii $\sum\limits_n f_n$ *converge absolut şi uniform.*

Exemplu. Să se arate că seria $\sum\limits_n \frac{x^n}{n^2}$ converge uniform pe $[-1, 1]$.

Exerciţiu. Să se arate că seria $\sum\limits_n \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$.

SERII DE PUTERI

Seriile de puteri constituie o generalizare naturală a polinoamelor. Ele permit definirea riguroasă a funcţiilor elementare atât în cazul real, cât şi în cazul complex.

Noţiunea de serie de puteri

Definiţie. *O serie de funcţii de tipul* $\sum\limits_n a_n(x - c)^n$, *unde* $a_n, c \in \mathbb{R}$, *se numeşte serie de puteri în jurul lui* c.

Observaţii

1. Fără a pierde din generalitate, *putem presupune că* $c = 0$ (căci translaţia $x^{'} = x - c$ reduce o serie de puteri în jurul lui c la o serie de puteri în jurul lui 0).

2. Deşi funcţiile $x \to a_n x^n$ sunt definite pe $\mathbb{R}$, *nu este de aşteptat ca seria* $\sum\limits_n a_n x^n$ *să conveargă pe* $\mathbb{R}$. De exemplu, seriile $\sum\limits_n n! x^n$, $\sum\limits_n x^n$ şi $\sum\limits_n \frac{x^n}{n!}$ converg pentru x aparţinând mulţimilor $\{0\}$, $(-1, 1)$, respectiv $\mathbb{R}$. Prin urmare, mulţimea punctelor în care converge o serie de puteri poate fi "mică", "medie" sau "mare". Aşa cum vom vedea, mulţimea punctelor de convergenţă ale unei serii de puteri are o structură specială.

Raza unei serii de puteri. Teorema Cauchy-Hadamard

Definiţie. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir mărginit de numere reale. Definim limita sa superioară, notată cu $\overline{\lim} x_n$, ca fiind*

$$\max\{x \in \mathbb{R} \mid \textit{există } (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \textit{ subşir al lui } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ astfel încât } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x\}.$$

Observaţie. *Dacă şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim} x_n$.*

Definiţie. *Pentru seria de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, definim raza de convergenţă ca fiind*

$$R = \begin{cases} 0, & \rho = \infty \\ \frac{1}{\rho}, & 0 < \rho < \infty \\ \infty, & \rho = 0 \end{cases},$$

unde $\rho = \overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit şi $\rho = \infty$ dacă şirul $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit.

Rezultatul de mai jos justifică terminologia de rază de convergenţă.

Teorema Cauchy-Hadamard. *Dacă R este raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, atunci:*

α) *Seria este absolut convergentă pentru $|x| < R$.*

β) *Seria este divergentă pentru $|x| > R$.*

Observaţii

1. Intervalul $(-R, R)$ se numeşte *intervalul de convergenţă* al seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, iar mulţimea punctelor în care seria de puteri este convergentă se numeşte *mulţimea de convergenţă* a seriei de puteri.

2. *Teorema Cauchy-Hadamard nu menţionează nimic despre ce se întâmplă în extremităţile intervalului de convergenţă.* În fapt, orice situaţie este cu putinţă. Spre exemplu, pentru seriile $\sum\limits_n x^n$, $\sum\limits_n \frac{1}{n} x^n$ şi $\sum\limits_n \frac{1}{n^2} x^n$ raza de convergenţă este 1, dar prima serie nu converge nici în 1, nici în -1, cea de a doua converge în -1, dar nu converge în 1, iar cea de a treia converge atât în 1, cât şi în -1.

3. *Raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, în cazul în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, este dată, de asemenea, de $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

Exemplu. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru seria de puteri $\sum\limits_n \frac{x^n}{n2^n}$.

Exerciţii. Să se determine razele de convergenţă şi mulţimile de convergenţă pentru următoarele serii de puteri: $\sum\limits_n x^n$, $\sum\limits_n (\frac{n}{2n+1})^{2n-1} x^n$, $\sum\limits_n \frac{n!}{n^n+1} x^n$.

Rezultatul de mai jos arată că în interiorul intervalului de convergenţă al unei serii de puteri putem integra şi deriva termen cu termen.

Teorema de derivare şi integrare termen cu termen a seriilor de puteri. *Fie R raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$, iar $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$ suma seriei de puteri (i.e.-*

$$S(x) = \sum_n a_n x^n,$$

pentru orice $x \in (-R, R)$). Atunci:

α) Funcţia S este continuă.

β)

$$\int_a^b S(t)dt = \int_a^b \sum_n a_n t^n dt = \sum_n a_n \int_a^b t^n dt,$$

pentru orice $a, b \in (-R, R)$.

γ) Seria de puteri $\sum\limits_n (a_n x^n)^{'}$ are raza de convergenţă R.

δ)

$$S^{'}(x) = (\sum_n a_n x^n)^{'} = \sum_n (a_n x^n)^{'} = \sum_n n a_n x^{n-1},$$

pentru orice $x \in (-R, R)$.

Observaţie. *Teorema anterioară nu menţionează situaţia capetelor intervalului de convergenţă.* Dacă seria este convergentă în unul dintre capetele intervalului de convergenţă, atunci seria "derivată" poate sau nu să fie convergentă în acest punct. De exemplu, seria $\sum\limits_n \frac{x^n}{n^2}$ converge în 1 şi în -1, dar seria $\sum\limits_n \frac{x^n}{n}$ este convergentă în -1 şi divergentă în 1.

Corolar. *În condiţiile de mai sus, avem $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Observaţie. Am văzut că o condiţie necesară ca o funcţie să fie suma, pe un interval $(-r, r)$, a unei serii de puteri, este ca funcţia să aibă derivate de orice ordin. Această condiţie nu este şi suficientă. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \{ \begin{array}{ll} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{array}$, are în origine derivate de orice ordin, egale cu

0, dar nu există nici un interval $(-r,r)$ pe care ea să fie este suma unei serii de puteri.

Există câteva condiţii suficiente pentru ca o funcţie să poate fi scrisă ca o serie de puteri. Spre exemplu, folosind teorema lui Taylor, se poate arăta că *dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq M,$$

pentru orice $x \in (-r,r)$ şi orice $n \in \mathbb{N}$, atunci seria de puteri $\sum\limits_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge, pe $(-r,r)$, către $f(x)$.

Observaţie. *Seriile de puteri au avantajul că sunt facil de manipulat* (sumele lor parţiale fiind polinoame) *şi că au suma o funcţie derivabilă de o infinitate de ori, însă prezintă dezavantajul că* (în general) *o funcţie nu se reprezintă printr-o serie de puteri pe întreg domeniul de definiţie* (spre exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, relaţia $f(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ...$ este valabilă numai pentru $|x| < 1$).

Teorema lui Abel. *Fie R raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$ şi $S : (-R,R) \to \mathbb{R}$ suma seriei de puteri (i.e. $S(x) = \sum\limits_n a_n x^n$, pentru orice $x \in (-R,R)$). Dacă seria $\sum\limits_n a_n R^n$ este convergentă şi A este suma sa, atunci:*

α) *Seria de puteri $\sum\limits_n a_n x^n$ converge uniform pe $[0,R]$.*

β)

$$\lim_{\substack{x \to R \\ x < R}} S(x) = A = \sum_n a_n R^n.$$

Exerciţiu. Să se arate că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Dezvoltările în serie de puteri ale funcţiilor uzuale

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)....(\alpha-n+1)}{n!} x^n = (1+x)^\alpha,$$

pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$.

Pentru $x = -1$ seria converge absolut pentru $\alpha \geq 0$ şi diverge pentru $\alpha < 0$.

Pentru $x = 1$ seria converge absolut pentru $\alpha \geq 0$, este semiconvergentă pentru $\alpha \in (-1, 0)$ şi diverge pentru $\alpha \leq -1$.

5. Pentru $\alpha = -1$ şi $-x$ în loc de x în 4, obţinem

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x},$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.

6. Prin integrarea relaţiei anterioare, obţinem

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... = -\ln(1-x),$$

pentru orice $x \in [-1, 1)$.

7. Punând $-x$ în loc de x în 6, obţinem

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ... = \ln(1+x),$$

pentru orice $x \in (-1, 1]$.

8. Punând $-x^2$ în loc de x în 5, obţinem

$$1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + ... = \frac{1}{1+x^2},$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.

9. Prin integrarea relaţiei anterioare, obţinem

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ... = arctgx,$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$.

10. Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ în 4, obţinem

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} x - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} x^3 + ... + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n + ... = \sqrt{1+x},$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$.

11. Pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$ în 4, obţinem

$$1 - \frac{1}{2 \cdot 1!} x + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!} x^3 + ... + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n + ... = \frac{1}{\sqrt{1+x}},$$

pentru orice $x \in (-1, 1]$.

12. Punând $-x^2$ în loc de x în 11, obţinem

$$1+\frac{1}{2 \cdot 1!}x^2+\frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^4+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^6+....+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n}+... = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

pentru orice $x \in (-1, 1)$.

13. Prin integrarea relaţiei anterioare, obţinem

$$x+\frac{1}{2 \cdot 1! \cdot 3}x^3+\frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2! \cdot 5}x^5+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3! \cdot 7}x^7+....+\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)}x^{2n+1}+... = \arcsin x,$$

pentru orice $x \in [-1, 1]$.