Seminar 10 - 143

Ex. 1: Fie $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$ descompunerea în cicli disjuncți. Atunci $ord(\sigma)$ = cmmmc al lungimilor ciclilor din descompunerea sa.

Ideea de dem:

$\tau_1, \dots, \tau_k$ disjuncți $\Rightarrow \tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$

obs: $(G, \cdot)$ grup, $a, b \in G$, $ab = ba \Rightarrow (ab)^n = a^n b^n$.

$\sigma^t = \tau_1^t \dots \tau_k^t$, $\forall t$.

$m = [l_1, \dots, l_k]$, l_i = lungimea τ_i.

$\sigma^m = e$ (OK).

$\tau_1, \dots, \tau_k$ disjuncte $\Rightarrow \tau_1^t, \dots, \tau_k^t$ disjuncte

Ex. 2: Fie p un nr. prim. O permutare $\sigma \in S_n$ $(n \geq p)$ are ordinul p $\Leftrightarrow$ în descompunerea sa în cicli disjuncți apar doar cicli de lungime p.
Contraexemplu (p nu e prim).

Rez:

"$\Leftarrow$" Este adev. pt. orice $p \in \mathbb{N}^*$.

"$\Rightarrow$" $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, $ord(\sigma) = p$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \tau_1^p \dots \tau_k^p = e \\ \tau_1, \dots, \tau_k \text{ disj.} \end{array}\right\} \Rightarrow \tau_i^p = e \Rightarrow ord(\tau_i) = p, \forall i$$

Contraexemplu:

$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6)$

$ord(\sigma) = [4, 2] = 4$.

Ex 3: Se dau permutările:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desc. în cicli disjuncți permutările: $\sigma, \tau, \sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma, \tau^2\sigma$.
și det. ordinele lor.

Rez:

$\sigma = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)$, $ord(\sigma) = 5$

$\tau = (1\ 5)(2\ 3\ 4)$., $ord(\tau) = 6$.

$\sigma = (1\ 3)(3\ 2)(2\ 4)(4\ 5)$

$\sigma^2 = (1\ 2\ 5\ 3\ 4)$, $ord(\sigma^2) = 5$

$ord(\sigma^2) = \frac{5}{(5,2)} = 5$.

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 5)$$

$\sigma\tau = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)(1\ 5)(2\ 3\ 4)$

$= (3\ 5)$, $ord(\sigma\tau) = 2$

$\tau\sigma = (1\ 4)$, $ord(\tau\sigma) = 2$

$ord(\tau^2\sigma) = 5$

$\tau^2\sigma = \tau\cdot(\tau\sigma) = (1\ 5)(2\ 3\ 4)(1\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\tau^2\sigma = (1\ 5)(2\ 3\ 4)(1\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

$= (1\ 5)(2\ 3\ 4)(4\ 1) = (1\ 5)(2\ 3\ 4\ 1) =$

$= (5\ 1)(1\ 2\ 3\ 4) = (5\ 1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$

Ex. 4: Fie $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_m)$ un m-ciclu. Arătați că pt. orice $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ avem că $\sigma^i(a_k) = a_{k+i}$ (unde $k+i$ e înlocuit cu restul modulo m dacă $k+i > m$).

Rez: Prin inducție:

$\sigma^1 = \sigma = (a_1 \ a_2 \dots a_m)$

$$\begin{cases} \sigma(a_i) = a_{i+1}, & 1 \le i \le m-1 \\ \sigma(a_m) = a_1 & (m+1 \equiv 1 \pmod m) \end{cases}$$

Pasul de ind.: $\sigma^i(a_k) = a_{k+i}$

$\sigma^{i+1}(a_k) = \sigma(\sigma^i(a_k)) = \sigma(a_{k+i}) = a_{k+i+1}$

Ex. 5: Fie $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8)$. Pentru ce valori ale lui i $(1 \le i \le 8)$, σ^i este 8-ciclu?

Rez: $\sigma^8 = e$ $(ord(\sigma) = 8)$

$\sigma^1 = \sigma$ 8-ciclu

$\sigma^2 = (1 \ 3 \ 5 \ 7)(2 \ 4 \ 6 \ 8)$

$\sigma^3 = (1 \ 4 \ 7 \ 2 \ 5 \ 8 \ 3 \ 6)$ 8-ciclu

$\sigma^4 = (1 \ 5)(2 \ 6)(3 \ 7)(4 \ 8)$

$\sigma^5 = (1 \ 6 \ 3 \ 8 \ 5 \ 2 \ 7 \ 4) = (\sigma^3)^{-1}$

Obs: $\sigma = (a_1 \dots a_m)$, $\sigma^{-1} = (a_m \ a_{m-1} \dots a_1)$
$= (a_1 \ a_m \ a_{m-1} \dots a_2)$

$\sigma^6 = (\sigma^2)^{-2} = (1 \ 7 \ 5 \ 3)(2 \ 8 \ 6 \ 4)$

$\sigma^7 = \sigma^{-1} = (1 \ 8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2)$

$\sigma^8 = e$

σ^i 8-ciclu $\Leftrightarrow i \in \{1, 3, 5, 7\}$ $[(i, 8) = 1]$

$ord(\sigma) = n$

$ord(\sigma^k) = \frac{n}{(n,k)}$

$ord(\sigma) = 8$

σ^i este 8-ciclu $\Leftrightarrow ord(\sigma^i) = 8 \Leftrightarrow (i,8) = 1$.

Ex. 6: Ce ordin poate avea o permutare $\sigma \in S_5$?

Rez: $ord(\sigma) \mid 5! \Rightarrow ord(\sigma) \mid 120$.

$\sigma \in S_5$.

Cum putem scrie σ ca produs de cicli disjuncți? (după lungimile ciclilor)

$$\underbrace{5}_{\text{5-cicli}} = \underbrace{4+1}_{\text{4-cicli}} = \underbrace{3+2}_{\text{produs 3-ciclu · transpoziție}} = \underbrace{3+1+1}_{\text{3-cicli}} = \underbrace{2+2+1}_{\text{produs de 2 transpoziții}} = \underbrace{2+1+1+1}_{\text{transpoziție}} = \underbrace{1+1+\dots+1}_{e}$$

- $ord(\sigma) = 5$
- $ord(\sigma) = 4$
- $ord(\sigma) = [3,2] = 6$
- $ord(\sigma) = 3$
- $ord(\sigma) = [2,2] = 2$
- $ord(\sigma) = 2$
- $ord(e) = 1$

$ord(\sigma) \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ex. 7: Să se rezolve ecuațiile:

a. $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b. $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

d. $x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rez: $x^2 = \sigma$ descompunem σ în cicli disjuncți

a. $x^2 = (1\ 3\ 2) := \sigma$

$ord(\sigma) = 3$

$\varepsilon(\sigma) = 1$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$m(\sigma) =$ nr. inversiunilor $= 2$

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1.$

σ ciclu de lungime m $\Rightarrow$ $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m-1}$

σ permutare pară

x^2 permutare pară

$(\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau))$.

$ord(\sigma) = 3$

$ord(x^2) = 3 = \dfrac{ord(x)}{(ord(x), 2)}$

$ord(x) = 3$

x ciclu de $l = 3$

$x = (1\ 2\ 3)$

$x = (1\ 2\ 3)$

b. $x^2 = \sigma$, $\sigma = (1\ 4)(2\ 3)$.

$ord(\sigma) = [2, 2] = 2$ $\Rightarrow ord(x^2) = 2$

$\varepsilon(\sigma) = 1$

$\varepsilon(x^2) = 1$

$ord(x) = m \mid 4!$ $(m \in \{1, 2, 3, 4\})$

$ord(x^2) = \dfrac{m}{(m, 2)} = 2$ $\Rightarrow 2 \mid m \Rightarrow m \in \{2, 4\}$
$m = 2$ nu conv. $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow m = 4.$

x = ciclu de $l = 4$.

$x^2 = (1\ 4)(2\ 3)$

$x = (1\ 2\ 4\ 3)$ sau $x = (1\ 3\ 4\ 2)$.

$x = (1\ \_\ 4\ \_)$

c. $x^2 = \sigma$, $\sigma = (1\ 5\ 4\ 3\ 6\ 2)$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(\sigma) = -1 \\ \varepsilon(x^2) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu avem sol.

d. $x^2 = \sigma$, $\sigma = (1\ 7)(2\ 8)(3\ 6\ 4\ 5)$

$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(\sigma) = -1 \\ \varepsilon(x^2) = +1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ nu avem sol.

e. $x^2 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6\ 7) = \sigma$.

$\varepsilon(\sigma) = 1$ $\quad$ $ord(\sigma) = [2, 2, 3] = 6 = ord(x^2)$

$\varepsilon(x^2) = 1$ $\quad$ $ord(x) = m$

$ord(x^2) = \frac{m}{(m, 2)} = 6 \Rightarrow 6 \mid m \Rightarrow m \in \{6, 12\}$.

$m = 6$ nu conv.

$m = 12$, x este produs de 4-ciclu cu 3-ciclu

$y^2 = (1\ 2)(3\ 4) \overset{(b)}{\Rightarrow} y = (1\ 3\ 2\ 4)$ sau $y = (1\ 4\ 2\ 3)$

$z^2 = (5\ 6\ 7) \overset{(a)}{\Rightarrow} z = (5\ 7\ 6)$

$\left.\begin{array}{l} z^3 = e \\ z^2 = (5\ 6\ 7) \end{array}\right\} \Rightarrow z = (z^2)^{-1} = (5\ 7\ 6)$

$x = yz$

$\tau = (1\ 2)(5\ 6\ 7)$

$ord(\tau) = 6$

Ex. 8: Det. dacă există un m-ciclu σ astfel încât $\sigma^k = \tau$ pt. un nr. întreg k, unde:

a. $\tau = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$, $m \geq 10$ ✓ $\sigma^5 = \tau$

b. $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$, $m \geq 5$.