CURS 4

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019

PRELIMINARII - CONTINUARE

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiţie.

Un element $e \in S$ se numeşte

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq$ a implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

Propoziţie.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

- Atât minimul, cât şi maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Orice minim (maxim) este element minimal (maximal).
  Reciproca nu este adevărată.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiţie.

Un element $e \in A$ se numeşte

- majorant al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremumul lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- infimumul lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăţi.

- Atât mulţimea majoranţilor, cât şi mulţimea minoranţilor lui S pot fi vide.
- Atât supremumul, cât şi infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

Definiţie.

Spunem că $(A, \leq)$ este mulţime bine ordonată dacă orice submulţime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numeşte relaţie de bună ordonare pe A.

Exemple.

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observaţie.

Orice mulţime bine ordonată este total ordonată.

Definiţie.

$(A, \leq)$ se numeşte inductiv ordonată dacă orice submulţime total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma alegerii (în engleză *Axiom of Choice*) (AC).
Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulţimi nevide, atunci există o funcţie f_C care asociază fiecărui $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- formulată de Zermelo în 1904
- a provocat discuţii aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcţia alegere f_C.

Reformulare.
Următoarea afirmaţie este echivalentă cu Axioma alegerii:

Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de mulţimi nevide, atunci $\prod_{i\in I} A_i$ este o mulţime nevidă.

Teoremă.
Următoarele afirmaţii sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn: Orice mulţime inductiv ordonată are un element maximal.
- Principiul bunei ordonări: Orice mulţime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relaţie binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulţime bine ordonată).

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negaţia axiomei alegerii este consistentă cu ZF.
- Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF.
- Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

LOGICĂ PROPOZIŢIONALĂ

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIONALE

Limbajul logicii propoziţionale este bazat pe propoziţii sau enunţuri declarative.

Propoziţii declarative

- Suma numerelor 2 şi 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacţionat violent la acuzaţiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deştept.
- Marţienilor le place pizza.

Propoziţii care nu sunt declarative

- Poţi să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

LITERELE GRECEŞTI

Αα **ALPHA** [a] *ἄλφα*	Ββ **BETA** [b] *βῆτα*	Γγ **GAMMA** [g] *γάμμα*	Δδ **DELTA** [d] *δέλτα*	Εε **EPSILON** [e] *ἒ ψιλόν*	Ζζ **ZETA** [dz] *ζῆτα*
Ηη **ETA** [ɛː] *ἦτα*	Θθ **THETA** [t^h] *θῆτα*	Ιι **IOTA** [i] *ἰῶτα*	Κκ **KAPPA** [k] *κάππα*	Λλ **LAMBDA** [l] *λάμβδα*	Μμ **MU** [m] *μῦ*
Νν **NU** [n] *νῦ*	Ξξ **XI** [ks] *ξεῖ*	Οο **OMICRON** [o] *ὂ μικρόν*	Ππ **PI** [p] *πεῖ*	Ρρ **RHO** [r] *ῥῶ*	Σσς **SIGMA** [s] *σῖγμα*
Ττ **TAU** [t] *ταῦ*	Υυ **UPSILON** [ʉ] *ὖ ψιλόν*	Φφ **PHI** [p^h] *φεῖ*	Χχ **CHI** [k^h] *χεῖ*	Ψψ **PSI** [ps] *ψεῖ*	Ωω **OMEGA** [ɔː] *ὦ μέγα*

Considerăm anumite propoziţii ca fiind atomice şi le notăm cu $p, q, r, \ldots$ sau cu $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

Exemplu.

- p = Numărul 2 este par.
- q = Mâine plouă.
- r = Sunt obosit.

Pornind de la propoziţiile atomice, putem crea propoziţii complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici:

- $\neg$ (negaţia),
- $\rightarrow$ (implicaţia),
- $\vee$ (disjuncţia),
- $\wedge$ (conjuncţia),
- $\leftrightarrow$ (echivalenţa).

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$	=	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	=	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	=	Numărul 2 este par şi mâine plouă.
$p \to q$	=	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	=	Numărul 2 este par dacă şi numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obţine propoziţii şi mai complexe. Pentru a elimina ambiguităţile, folosim parantezele (,).

Exemplu.

$\varphi = (p \wedge q) \to ((\neg r) \vee q)$

Exemplu.
Fie propoziţia:

φ = *Azi este miercuri, deci avem curs de logică.*

Considerăm propoziţiile atomice

- p = *Azi este miercuri.*
- q = *Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \to q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = *Azi este miercuri şi nu avem curs de logică.*

Exemplu.

Fie propoziţia:

φ = *Dacă trenul întârzie şi nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propoziţiile atomice

- p = *Trenul întârzie.*
- q = *Sunt taxiuri la gară.*
- r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \to r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate şi r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Definiţie 4.1

Limbajul logicii propoziţionale (LP) este format din:

- o mulţime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile
- conectori logici: $\neg$ (se citeşte non), $\rightarrow$ (se citeşte implică)
- paranteze: (,).

Mulţimea Sim a simbolurilor lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

Notăm variabilele cu $v, u, w, x, y, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Definiţia 4.2
Mulţimea *Expr* a expresiilor lui *LP* este mulţimea tuturor şirurilor finite de simboluri ale lui *LP*.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.
- Sim^n este mulţimea şirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n.
- Prin convenţie, $Sim^0 = \{\lambda\}$.
- Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemplu.
$((((v_7, \quad v_1\neg \to (v_2), \quad \neg v_1 v_2, \quad ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1)), \quad (\neg(v_1 \to v_2))$

Definiţia 4.3

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numeşte (i, j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i, j)-subexpresia lui θ.

Definiţia 4.4

Formulele lui *LP* sunt expresiile lui *LP* definite astfel:

(F0) Orice variabilă propoziţională este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.

(F3) Numai expresiile obţinute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Mulţimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Observaţii.

- Definiţia formulelor este un exemplu de definiţie inductivă.
- Orice formulă se obţine aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile ”bine formate”.

Exemplu.

- $v_1 \neg \to (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule.
- $((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \to v_2))$ sunt formule.

Citire unică (*Unique readability*)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziţia 4.5

Mulţimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Conectorii derivaţi $\vee$ (se citeşte sau), $\wedge$ (se citeşte şi), $\leftrightarrow$ (se citeşte dacă şi numai dacă) sunt introduşi prin abrevierile:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &:= ((\neg\varphi) \to \psi)\\
(\varphi \wedge \psi) &:= (\neg(\varphi \to (\neg\psi)))\\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &:= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)).
\end{aligned}$$

Convenţii.

- În practică, renunţăm la parantezele exterioare; le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedenţa mai mare decât ceilalţi conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedenţă mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziţia 4.6 (Principiul inducţiei pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

(0) Orice variabilă are proprietatea P.

(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea P, atunci şi $(\neg\varphi)$ are proprietatea P.

(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ şi ψ au proprietatea P, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P.

Atunci orice formulă φ are proprietatea P.

Demonstraţie. Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P.

Demonstrăm prin inducţie că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pasul iniţial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ şi, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducţie. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ şi χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Aşadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. $\square$

Propoziţia 4.7 **(Principiul inducţiei pe formule - variantă alternativă)**
Fie Γ o mulţime de formule care are următoarele proprietăţi:

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Form$.

Demonstraţie. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$:

pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiţiei lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducţiei pe formule (Propoziţia 4.6), deci îl putem aplica pentru a obţine că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Aşadar, $\Gamma = Form$. $\square$

Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparţine xkcd.