Examen[1] la algebră, anul I, sem. I, informatică
(subiect de examen pentru studenţii din anul I)
09.09.2020

Numele şi prenumele ....

Grupa ....

Problema 1. Fie $\sigma = (1\ 3)(2\ 4) \in S_4$.

(1) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^2 = \sigma$, $x \in S_4$. (**5 pct.**)

(2) Determinaţi soluţiile ecuaţiei $x^3 = \sigma$, $x \in S_4$. (**5 pct.**)

(3) Aflaţi numărul de elemente din $H = \langle \sigma \rangle$ (subgrupul generat de σ în S_4). (**5 pct.**)

(4) Aflaţi indicele lui H în S_4. (**5 pct.**)

(5) Arătaţi că H nu este subgrup normal în S_4. (**5 pct.**)

(6) Determinaţi cel mai mic subgrup normal al lui S_4 care-l conţine pe H. (**5 pct.**)

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $a \neq b$. Fie inelul $\mathbb{Z}[X]$ şi I submulţimea sa formată din toate polinoamele f cu proprietatea că $f(a) = f(b) = 0$.

(1) Demonstraţi că I este un ideal al lui $\mathbb{Z}[X]$. (**5 p.**)

(2) Este I ideal principal? Justificaţi. (**5 p.**)

(3) Determinaţi elementele nilpotente ale inelului $\mathbb{Z}[X]/I$. (**5 p.**)

(4) Arătaţi că inelul $\mathbb{Z}[X]/I$ are idempotenţi netriviali (adică diferiţi de 0 şi 1) dacă şi numai dacă $|a - b| = 1$. (**10 p.**)

(5) Arătaţi că $(X - a) + (X - b) = \mathbb{Z}[X]$ dacă şi numai dacă $|a - b| = 1$. (**5 p.**)

(6) Arătaţi că are loc izomorfismul de inele unitare $\mathbb{Z}[X]/I \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $|a - b| = 1$. (**5 p.**)

Problema 3. Fie polinomul $P(X) = X^3 + nX - 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Studiaţi ireductibilitatea lui P, în funcţie de n, peste fiecare din corpurile $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$, iar în cazurile în care polinomul este reductibil descompuneţi-l în factori ireductibili. Justificaţi răspunsurile. (**30 pct.**)

[1]**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 5 puncte din oficiu. Timp de lucru 3 ore. Succes!**