CURS 2
SERII DE NUMERE REALE

A) NOTIUNI GENERALE

Sirului de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i se asociaza sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definitia 1. a) Perechea de siruri $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$, notata $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, se numeste seria de numere reale asociata sirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) x_n se numeste termenul general de rang n al seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

c) s_n se numeste suma partiala de rang n a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Definitia 2. a) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste convergenta daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste divergenta daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent.

c) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ are suma in $\overline{\mathbb{R}}$ daca sirul de numere reale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limita in $\overline{\mathbb{R}}$.

In acest caz, suma seriei este egala cu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Notatie. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty n} s_n$.

d) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergenta.

Teorema 1. Se considera seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ convergenta. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstratie. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta, rezulta ca sirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

$$\lim_{n\to\infty n} s_n = s \in \mathbb{R}.$$

$$x_n = s_n - s_{n-1} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Diferenta a doua siruri convergente este sir convergent. Obtinem ca sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

Corolar. Fie sirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel incat $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 1 este falsa.

Sirul $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ are limita 0, dar seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergenta.

Criteriul lui Cauchy pentru serii de numere reale. a) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\, astfel\ incat \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca si numai daca $\forall\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ astfel\ incat \sum\limits_{k=n}^{n+p} |x_k| < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. Orice serie de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ absolut convergenta este convergenta.

Observatie. Reciproca Teoremei 2 este falsa.

Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergenta, dar nu este absolut convergenta.

*Definitia 3.*Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se numeste semiconvergenta daca este serie convergenta, dar nu este serie absolut convergenta.

Criteriul lui Abel pentru serii de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu urmatoarele proprietati:

a) $x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

b) sirul de numere reale $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit.

Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergenta.

$$\frac{\cos n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos n$$

Notam $x_n = \frac{1}{n}$ si $y_n = \cos n$.

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescator cu limita 0.

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \cos 1 + \cos 2 + ... + n = \frac{\cos\frac{n+1}{2} \cdot \sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} y_k\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Sirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este marginit.

Conform criteriului lui Abel, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ este convergenta.

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de numere reale. Se considera sirurile de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu urmatoarele proprietati:

a) sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton si marginit

b) seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta.

Atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergenta.

Criteriul lui Leibniz pentru serii alternate de numere reale. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sir descrescator de numere reale pozitive pentru care

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seriile de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ sunt convergente.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergenta.

Alegem sirul $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$x_{n+1} < x_n \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Aplicam criteriul lui Leibniz si obtinem ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergenta.

B) Serii de numere reale cu termeni pozitivi

Se considera sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$.

Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergenta daca si numai daca este serie convergenta.

Teorema 3. Se considera o serie de numere reale pozitive $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Sunt adevarate urmatoarele afirmatii:

a) Sirul sumelor partiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescator si marginit inferior de 0.

b) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta daca si numai daca sirul sumelor partiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este marginit superior. In plus, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n$.

c) Seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ poate fi convergenta sau divergenta, cu suma $+\infty$.

Criteriul raportului pentru serii de numere reale. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este convergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este divergenta.

Criteriul radicalului pentru serii de numere reale. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel ca $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}=l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este convergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este divergenta.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Daca $l < 1$, atunci seria este divergenta.

Daca $l > 1$, atunci seria este convergenta.

Criteriul condensarii al lui Cauchy. Se considera un sir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescator cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seriile de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceiasi natura.

Exemplu. Seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ este divergenta.

Notam $x_n = \frac{1}{n\ln n}, n \in \mathbb{N}^*$.

Sirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescator cu limita 0.

Aplicam criteriul de condensare al lui Cauchy si rezulta ca seriile de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceiasi natura.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este caz particular al seriei armonice cu $\alpha = 1$, asadar aceasta este divergenta.

Rezulta ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu inegalitati. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ doua serii cu termeni pozitivi pentru care exista n_0 astfel incat $x_n \le y_n$ $\forall n \ge n_0$.

a) Daca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta.

b) Daca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergenta.

Criteriul de comparatie cu limite. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ doua serii cu termeni pozitivi pentru care exista $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) Daca $l \in (0, +\infty)$, atunci seriile au aceiasi natura.

b) Daca $l = 0$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergenta.

c) Daca $l = +\infty$ si seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergenta, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergenta.

EXEMPLE DE SERII DE NUMERE REALE REMARCABILE

1) Seria armonica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este convergenta daca si numai daca $\alpha > 1$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ este divergenta daca si numai daca $\alpha \leq 1$.

2) Seria putere $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n, a \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ este absolut convergenta daca si numai daca $a \in (-1, 1)$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ este divergenta daca si numai daca $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

3) Seria exponentiala $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ este absolut convergenta $\forall a \in \mathbb{R}$.