Curs 6

10.11.2020

Reamintesc:

$(\mathcal{P}(A), \cup)$ și $(\mathcal{P}(A), \cap) \to$ monoizi com.

• $(\{f : A \to A \mid f \text{ funcție}\}, \circ) \to$ monoid

$(M, \cdot) \to$ monoid $\Rightarrow (U(M), \cdot) \to$ grup.

Notație

Vom folosi de acum înainte (în afara situațiilor clar precizate) notația multiplicativă pt. un monoid/grup. și îl vom nota elem. neutru cu 1.

Def ① Fie M_1, M_2 2 monoizi. O funcție $f : M_1 \to M_2$ s.n. morfism de monoizi dacă sunt îndeplinite simultan $\Leftrightarrow \begin{cases} f(xy) = f(x) f(y) \quad (\forall)\, x, y \in M_1. & ① \\ f(1_{M_1}) = 1_{M_2}. & ② \end{cases}$

② Un morfism de monoizi bijectiv s.n. izomorfism de monoizi.

Proprietățile morfismelor de monoizi

① Compunerea a 2 morfisme de monoizi este tot un morfism de monoizi.

② Inversul unui izomorfism de monoizi este tot un izomorfism !!

③ Dacă $f : M_1 \to M_2$ este un morfism de monoizi și $a \in M_1$ atunci:

(i) $f(a^n) = (f(a))^n \quad (\forall)\, n \geq 1$

(ii) Dc. $a \in U(M_1)$ atunci $f(a) \in U(M_2)$ și $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$; $f(a^n) = f(a)^n \quad (\forall)\, n \in \mathbb{Z}$

Exemple ① $(M,\cdot)$ monoid $1_M : M \to M$ este un izomorfism.

② Să se arate că $(\mathcal{P}(B), \cup)$ și $(\mathcal{P}(B), \cap)$ sunt 2 monoizi izomorfi.

cu $f : (\mathcal{P}(B), \cup) \to (\mathcal{P}(B), \cap)$ $f(X) = \complement_B X$.

② $f(\emptyset) = \complement_B \emptyset (= B \setminus \emptyset) = B \Rightarrow f$ satisface ②

① Fie $X, Y \subseteq B$. $f(X \cup Y) = \complement_B (X \cup Y) = \complement_B X \cap \complement_B Y = f(X) \cap f(Y)$

$\Rightarrow f$ satisface ①, deci f e morfism de monoizi.

Fie $X, Y \subseteq B$ $f(X) = f(Y) \Rightarrow \complement_B X = \complement_B Y \Rightarrow X = Y \Rightarrow f$ este injectivă

Fie $D \subseteq B$ $f(B \setminus D) = f(\complement_B D) = \complement_B (\complement_B D) = D \Rightarrow f$ este surjectivă

$\Rightarrow f$ este bijectivă, prin urmare f este un izom. de monoizi.

③ Sunt monoizii $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{N}^*, \cdot)$ izomorfi? $\boxed{NU}$

Pp abs. că $(\exists)$ $f : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}^*, \cdot)$ un izom. de monoizi.

$\underline{n \geq 1}$ $f(n) = f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}}) \overset{\text{Propr 3i)}}{=} \underbrace{f(1) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(1)}_{n \text{ ori}} = f(1)^n$; $f(1) \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (\forall) n \geq 1$ $f(n) = f(1)^n$ ✗ ($\exists$ prime p, $p \nmid f(1)$).

cf. Euclid (șirul nr. prime e infinit)

Grupuri. Morfisme de grupuri. Subgrupuri

Exemple ① $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ $\to$ grupuri com. (sau abeliene)

② $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ $\to$ grupuri com.

③ $(\mathbb{Z}_n,+)$ $\to$ grup abelian

④ $U(\{f:A\to A \mid f\text{-funcție}\},\circ) = \{f:A\to A \mid f \text{ bijectivă}\}$ $\leadsto$ grupul permutărilor mulțimii A,

Dacă $A=\{1,2,\dots,n\}$ atunci s.n. cu S_n. ($\to$ s.n. grupul permutărilor de grad n)

⑤ $U_n = (\{z\in\mathbb{C} \mid z^n=1\},\cdot)$ $\to$ grup abelian.

$n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$

⑥ $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\} \Rightarrow (U,\cdot)$ $\to$ grup abelian

⑦ **Def** Fie $(G_1,*)$ și $(G_2,\bullet)$ 2 grupuri. Definim produsul direct al celor 2 grupuri ca fiind: $(G_1\times G_2,\square)$ $\to$ grup (Exc!)

$G_1\times G_2 = \{(a,b) \mid a\in G_1, b\in G_2\}$ $\quad (a,b)\,\square\,(c,d) = (a*c, b\bullet d)$.

Def Fie G_1 și G_2 2 grupuri. O funcție $f:G_1\to G_2$ s.n. morfism de grupuri dacă $\boxed{f(xy)=f(x)f(y)}$ $(\forall)\, x,y\in G_1$. Un morfism de grupuri bijectiv s.n. izomorfism de grupuri.

Obs ① Dc $f: G_1 \to G_2$ este morfism de grupuri atunci $f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

(**Dem**: Fie $a = f(1_{G_1})$. $1_{G_1} \cdot 1_{G_1} = 1_{G_1} \Rightarrow f(1_{G_1}^2) = f(1_{G_1}) \Rightarrow a = a^2 \Rightarrow a = a \cdot a \mid \cdot a^{-1}$

$a \in G_2$

$f(1_{G_1}^2) \overset{f \text{ morfism}}{=} f(1_{G_1})^2$

$\underbrace{a \cdot a^{-1}}_{1_{G_2}} = \underbrace{a \cdot (a \cdot a^{-1})}_{a}$

$\Rightarrow f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$)

② Propr 1-3 de la morfisme de monoizi au loc și pentru morfisme de grupuri.

Exemple ① Fie $f: (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ $f(n) = 10n$ $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$ este un morfism de monoizi care nu e izomorfism.

② Fie $g: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ $g(x) = e^x$ g este un izomorfism de grupuri.

③ Fie $h: (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_4, +)$ funcția definită astfel $h(\hat{0}) = \bar{0}$ și $h(\hat{1}) = \bar{1}$. Este h morfism de grupuri?

Pp. că h e morfism de grupuri.

$h(\hat{1} + \hat{1}) = h(\hat{0}) = \bar{0}$

$h(\hat{1}) + h(\hat{1}) = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2} \neq \bar{0}$ în $\mathbb{Z}_4$ ✗ $\Rightarrow$ Pp. e falsă $\Rightarrow$ h nu e morfism de grupuri.

④ Să se arate că $h : (\mathbb{Z}_2, +) \to (\mathbb{Z}_4, +)$ $h(\hat{0}) = \bar{0}$ și $h(\hat{1}) = \bar{2}$ este un morfism de grupuri. (Exc!)

Subgrupuri

Def Fie G un grup. O submulțime nevidă H a lui G s.n. subgrup, și notăm $H \leq G$, dacă H este parte stabilă a lui G închisă la luarea inversului, i.e. $(\forall)\ x, y \in H$ avem $x \cdot y \in H$ și $x^{-1} \in H$.

ECHIVALENT

Prop Fie G un grup. O submulțime nevidă H a lui G este subgrup $\Longleftrightarrow$ $(\forall)\ x, y \in H$ avem $xy^{-1} \in H$ (în notație aditivă, adică pt $(G, +)$, scriem $(\forall)\ x, y \in H$ avem $x - y \in H$)

Exemple ① Subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt submulțimile de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{N}$. ($2\mathbb{Z} = (-2)\cdot\mathbb{Z} \rightsquigarrow$ mulțimea nr. pare) (Exc! Seminar)

② Dacă $(G, \cdot)$ un grup atunci G are 2 subgrupuri (dacă $|G| > 1$) $\{1_G\}$ și G.

③ $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$.

④ Fie G un grup. Dacă H_1 și H_2 sunt subgrupuri ale lui G atunci și $H_1 \cap H_2 \leq G$. (Dem: Fie $x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x, y \in H_1$ și $x, y \in H_2 \xRightarrow[H_2 \leq G]{H_1 \leq G}$ $xy^{-1} \in H_1$ și $xy^{-1} \in H_2 \Rightarrow xy^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Deci $H_1 \cap H_2 \leq G$). (Se poate extinde de la 2 subgrupuri la orice intersecție de subgrupuri)

(Exc! $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} \underset{\supseteq}{\overset{\subseteq}{=}} 12\mathbb{Z}$)

Teoremă Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri.

a) Dacă $H \leq G \rightsquigarrow f(H) \leq G'$.

b) Dacă $H' \leq G' \rightsquigarrow f^{-1}(H') = \{a \in G \mid f(a) \in H'\} \leq G$.

Obs În particular $\mathrm{Im} f = f(G) \leq G'$ și $f^{-1}(\{1_{G'}\}) \leq G$.

Def $f^{-1}(\{1_{G'}\})$ s.n. cu $\mathrm{Ker}(f)$ și s.n. nucleul morfismului f.

Propr Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci f este injectiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{1_G\}$.

(f morf. de grupuri $\Downarrow$ $f(1_G) = 1_{G'} \Rightarrow 1_G \in \mathrm{Ker} f$

$\mathrm{Ker} f = \{a \in G \mid f(a) = 1_{G'}\}$

$\Downarrow$

1_G

Exemple

① $f : (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}, +)$ $f(x,y) = x - y$ → morfism de grupuri

produsul direct al lui $(\mathbb{Z},+)$ cu $(\mathbb{Z},+)$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y) \mid \underbrace{f(x,y)}_{x-y} = 0\} = \{(x,x) \mid x\in\mathbb{Z}\}.$$

② $f : (U_4, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ $f(z) = z^2$ $U_4 = \{z\in\mathbb{C} \mid z^4 = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$

→ morf. de grupuri nu e inj

$$\operatorname{Ker} f = \{z\in U_4 \mid f(z) = 1\} = \{-1, 1\}$$