# Tutoriat 3 - Rezolvări
## Grupuri. Teorema lui Lagrange

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 17 noiembrie 2020 -

## Exercițiul 1

Demonstrați că următoarele grupuri (cu adunarea) nu sunt izomorfe:

- $Z_2 \times Z_2$ și $Z_4$.
- **Z** și **Q**
- **Q** și **R**

### Rezolvare:

*Referință: Gabriel Majeri, "Rezolvări Tutoriat 6", 2019, exercițiul 1*

Pentru a demonstra că două grupuri nu sunt izomorfe, putem folosi procedeul reducerii la absurd. Presupunem că ar exista un izomorfism f și ajungem la o contradicție.

- În unele cazuri ne putem gândi la ordinele elementelor. Reamintim că ordinul elementului x este cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}} = 0$. Un izomorfism păstrează ordinul unui element: $f(\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{k \text{ ori}}$.
  - În $Z_2 \times Z_2$ toate elementele au ordin cel mult 2.
  - În $Z_4$ avem și un element de ordin 4 (și anume $\hat{1}$. Pentru elementul de ordin 4 nu am avea corespondent.
- O altă proprietate care trebuie păstrată de izomorfisme este cea de a fi grup ciclic. **Z** este un grup ciclic, în timp ce **Q** nu este.

  Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că **Q** ar fi ciclic. Fie a $\in$ **Q** un generator al său. Scriem a sub formă de fracție rațională ireductibilă: a = $\frac{p}{q}$, cu p, q $\in$ **Z**.

Observăm că fracția $\frac{p}{q+1}$ nu poate fi obținută din $\frac{p}{q}$. Oricum am aduna sau scădea fracțiile care sunt multiplu de $\frac{p}{q}$, nu putem ajunge la o fracție cu numitor mai mare.

- Dacă ar exista un izomorfism f, acesta ar fi funcție bijectivă. Asta ar însemna că **Q** și **R** ar avea același cardinal. Dar **Q** este mulțime numărabilă, iar **R** este nenumărabilă.

# Exercițiul 2

Arătați că un grup cu 4 elemente este izomorf cu $Z_4$ sau cu grupul lui Klein $Z_2 \times Z_2$.

## Rezolvare:

*Referință: Tiberiu Dumitrescu, "Algebra 1", București, 2006, capitolul 10, exercițiul 49*

| $(Z_4, +)$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\hat{0}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ |
| $\hat{1}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ |
| $\hat{2}$ | $\hat{2}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ |
| $\hat{3}$ | $\hat{3}$ | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | $\hat{2}$ |

| $(Z_2 \times Z_2, +)$ | $(\hat{0}, \hat{0})$ | $(\hat{0}, \hat{1})$ | $(\hat{1}, \hat{0})$ | $(\hat{1}, \hat{1})$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\hat{0}, \hat{0})$ | $(\hat{0}, \hat{0})$ | $(\hat{0}, \hat{1})$ | $(\hat{1}, \hat{0})$ | $(\hat{1}, \hat{1})$ |
| $(\hat{0}, \hat{1})$ | $(\hat{0}, \hat{1})$ | $(\hat{0}, \hat{0})$ | $(\hat{1}, \hat{1})$ | $(\hat{1}, \hat{0})$ |
| $(\hat{1}, \hat{0})$ | $(\hat{1}, \hat{0})$ | $(\hat{1}, \hat{1})$ | $(\hat{0}, \hat{0})$ | $(\hat{0}, \hat{1})$ |
| $(\hat{1}, \hat{1})$ | $(\hat{1}, \hat{1})$ | $(\hat{1}, \hat{0})$ | $(\hat{0}, \hat{1})$ | $(\hat{0}, \hat{0})$ |

Fie G un grup cu 4 elemente. Elementele lui G au ordinul divizor al lui 4. Dacă G conține un element x de ordin 4, atunci x, $x^2$, $x^3$ și e = $x^4$ aparțin lui G, deci G este ciclic generat de x. Astfel G $\simeq Z_4$.
Dacă G nu conține elemente de ordin 4, atunci putem presupunem că G = $\{1, a, b, c\}$ cu $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ Dacă ab = 1 (respectiv, ab = a, ab = b), atunci a = b (respectiv, b = 1, a = 1), contradicție. Deci ab = c, si analog ba = c, ac = ca = b, bc = cb = a. Comparând tablele de înmulțire, vedem că G $\simeq Z_2 \times Z_2$.

# Exercițiul 3

Arătați că un grup cu 6 elemente este izomorf cu $Z_6$ sau cu $S_3$.

### Rezolvare:

*Referință: Tiberiu Dumitrescu, ”Algebra 1”, București, 2006, capitolul 10, exercițiul 49*

Fie G un grup cu 6 elemente. G poate conține un element a de ordin 3 si un element b de ordin 2, conform teoremei lui Cauchy. Deci G = {1, a, $a^2$, b, ab, $a^2$b}.

Dacă ba = 1 (respectiv, ba = b, ba = $b^2$, ba = a), atunci a = b (respectiv, a = 1, a = b, b = 1), contradicție. Deci ba = ab sau ba = $a^2$b. Dacă ba = ab, atunci ab are ordinul 6, deci G este ciclic generat de ab, așadar G $\simeq Z_6$. Dacă ba = $a^2$b, atunci comparând tabelele, se vede că G $\simeq S_3$.

## Exercițiul 4

Determinați dacă grupurile $Z_{28} \times Z_{29}$, $Z_{28} \times Z_{30}$, respectiv **R** sunt sau nu ciclice.

### Rezolvare:

*Referință: Gabriel Majeri, ”Rezolvări Tutoriat 5”, 2019, exercițiul 3*

Pentru a simplifica demonstrațiile în problemele în care apar $Z_n \times Z_m$, ne folosim de o teoremă care ne spune că $Z_n \times Z_m$ este izomorf cu $Z_{n\times m}$ dacă și numai dacă n este prim față de m. În acest fel, se poate arăta că $Z_{n\times m}$ este ciclic dacă și numai dacă (n, m) = 1.

- Pentru $Z_{28} \times Z_{29}$, (28, 29) = 1.
- Pentru $Z_{28} \times Z_{30}$, numerele nu sunt prime între ele, deci grupul nu este izomorf cu $Z_{28\times 30}$.
- Să presupunem că **R** ar fi ciclic, și a $\in$ **R** ar fi un generator. Elementul a poate genera doar multiplii de a. Asta înseamnă că toate numerele din **R** sunt de forma na, pentru un n $\in$ **Z**. Dar **R** este o mulțime infinită nenumărabilă, deci există elemente care nu sunt generate de a.

Teorema de structură a grupurilor ciclice ne spune că orice grup ciclic este izomorf cu $Z_n$, dacă este finit, respectiv **Z** dacă este infinit. Deci, la un astfel de exercițiu putem arăta că un grup este/nu este izomorf cu unul dintre grupurile $Z_n$ sau **Z**.

## Exercițiul 5

Arătați că singurul morfism de grupuri (Q, +) → (Z, +) este cel nul.

## Rezolvare

Considerăm un morfism $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Fie un număr rațional de forma $\frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$. Din proprietățiile morfismelor obținem următoarele două relații:

$f(0) = 0$.

$f(\underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{b \text{ ori}}) = f(1) = b * f(\frac{1}{b}) \implies f(\frac{1}{b}) = \frac{f(1)}{b}$

Cum $f(x) \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $\frac{f(1)}{b} \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z}$. Dacă $f(1) \neq 0$, atunci alegem $b = |f(1)| + 1$ si astfel fracția $\frac{f(1)}{b} \notin \mathbb{Z}$ deoarece $f(1)$ și $b$ sunt prime între ele. Prin urmare $f(1) = 0$.

Din relația de mai sus avem că $f(\frac{1}{b}) = 0$, iar din relația $f(\frac{a}{b}) = f(\underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{a \text{ ori}}) =$

$a * f(\frac{1}{b})$ rezultă că $f(\frac{a}{b}) = 0\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$.