Curs 5

Propoziție. Fie (X, d) un spațiu metric, $A \subset X$ și $x \in X$. Atunci:

1) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$.

2) $x \in A' \Leftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A \setminus \{x\}$ a.î. $\lim_{n\to\infty} x_n \overset{d}{=} x$.

Observație. $(\mathbb{R}, d)$ este spațiu metric, unde $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$.

Observație. Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$, $x \in \mathbb{R}$ și $r > 0$.

1) $B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(y,x) < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\} =$
$= \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x - r < y < x + r\} =$
$= (x-r, x+r)$.

2) $B[x,r] = \overline{B}(x,r) = [x-r, x+r]$.

Observație. În spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$:

1) Intervalele de forma $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, (a,b) sunt mulțimi deschise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

2) Intervalele de forma $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $[a, b]$

sunt mulțimi închise, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Exercițiu. Faceți analiza topologică a mulțimilor $A \subset \mathbb{R}$ (i.e. determinați $\mathring{A}$, $\overline{A}$, A', $\mathrm{Fr}(A)$ și $\mathrm{Izo}(A)$), unde:

a) $A = \mathbb{Q}$.

Soluție. 1) $\mathring{A} = ?$

$$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0 \text{ a.î. } \underbrace{B(x, r)}_{\substack{\| \\ (x-r,\, x+r)}} \subset \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Q}}}{A}$$

$$(x-r, x+r) \subset \mathbb{Q}.$$

Deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale rezultă că $\mathring{A} = \emptyset$.

2) $\overline{A} = ?$

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, r > 0, \text{ avem } \underset{\substack{\| \\ (x-r,\, x+r)}}{B(x, r)} \cap \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Q}}}{A} \neq \emptyset$$

$$(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

$\overline{A} \subset \mathbb{R}$ (din definiție)

Fie $x \in \mathbb{R}$. Fie $r > 0$. Avem $(x-r, x+r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

Deci $x\in\overline{A}=\overline{\mathbb{Q}}$, i.e. $\mathbb{R}\subset\overline{A}$.

Prin urmare $\overline{A}=\mathbb{R}$.

3) $A'=$?

$$x\in A' \Leftrightarrow \forall r>0,\ \text{avem } \underset{\substack{\parallel\\ (x-r,\,x+r)}}{B(x,r)} \cap \underset{\substack{\parallel\\ (\mathbb{Q}\setminus\{x\})}}{(A\setminus\{x\})}\neq\emptyset$$

$$(x-r,x+r)\cap(\mathbb{Q}\setminus\{x\})\neq\emptyset.$$

$A'\subset\overline{A}=\mathbb{R}$

Fie $x\in\mathbb{R}$. Fie $r>0$. Avem $(x-r,x+r)\cap(\mathbb{Q}\setminus\{x\})\neq\emptyset$, deoarece între orice două numere reale există o infinitate de numere raționale și o infinitate de numere iraționale.

Deci $\mathbb{R}\subset A'=\mathbb{Q}'$.

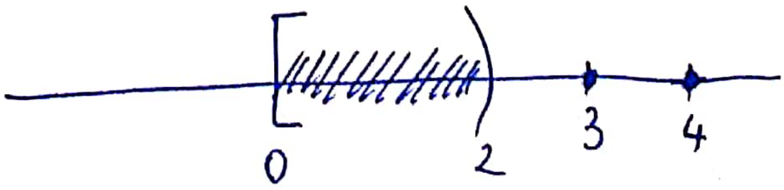
Prin urmare $A'=\mathbb{R}$.

4) $Fr(A)=\overline{A}\setminus\mathring{A}=\mathbb{R}\setminus\emptyset=\mathbb{R}$.

5) $Izo(A)=\overline{A}\setminus A'=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$. □

b) $A=[0,2)\cup\{3,4\}$.

<u>Soluție.</u>



1) $\mathring{A} = ?$

$x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(x-r, x+r) \subset A$.

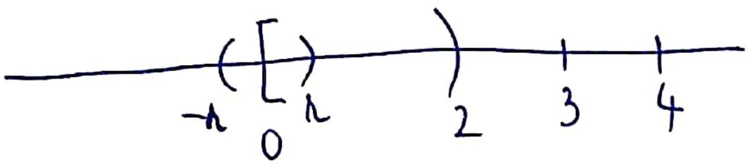
$\mathring{A} \subset A$

$$\left.\begin{array}{l}(0,2) \subset A \\ (0,2) \text{ deschisă}\end{array}\right\} \Rightarrow (0,2) \subset \mathring{A}.$$

Deci $(0,2) \subset \mathring{A} \subset A = [0,2) \cup \{3,4\}$.

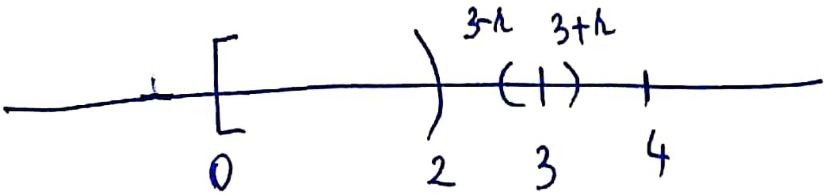
Studiem dacă $0 \in \mathring{A}$, $3 \in \mathring{A}$, $4 \in \mathring{A}$.

$0 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(0-r, 0+r) = (-r, r) \subset A$.



Deci $0 \notin \mathring{A}$.

$3 \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $(3-r, 3+r) \subset A$.



Deci $3 \notin \mathring{A}$.

Analog $4 \notin \mathring{A}$.

Prin urmare $\mathring{A} = (0,2)$.

2) $\bar{A} = ?$

$x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall\, r > 0$, avem $(x-r, x+r) \cap A \neq \emptyset$.

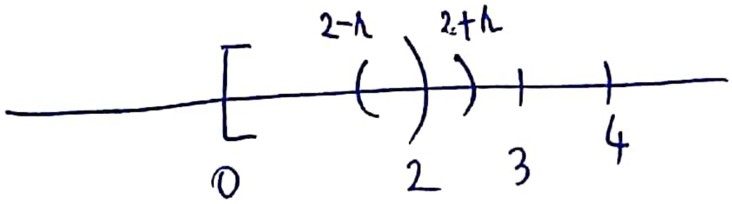
$A \subset \overline{A}$

$\left.\begin{array}{l}[0,2] \cup \{3,4\} \text{ închisă} \\ A \subset [0,2] \cup \{3,4\}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}.$

Deci $[0,2) \cup \{3,4\} \subset \overline{A} \subset [0,2] \cup \{3,4\}$.

Studiem dacă $2 \in \overline{A}$.

$2 \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(2-r, 2+r) \cap A \neq \emptyset$.



Deci $2 \in \overline{A}$.

Prin urmare $\overline{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$.

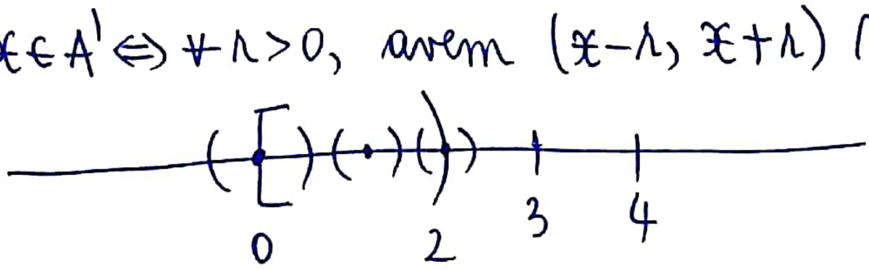
3) $A' = ?$

$x \in A' \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

$A' \subset \overline{A} = [0,2] \cup \{3,4\}$.

Fie $x \in [0,2]$.

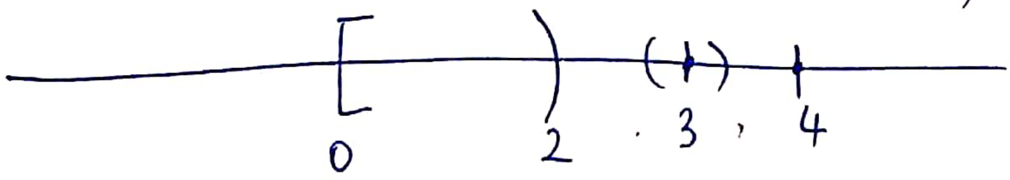
$x \in A' \Leftrightarrow \forall\, r>0$, avem $(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.



Deci $x \in A'$, i.e. $[0,2] \subset A'$.

Studiem dacă $3 \in A'$ și $4 \in A'$.

$3 \in A' \iff \forall r>0$, avem $(3-r, 3+r) \cap (A \setminus \{3\}) \neq \emptyset$.



Deci $3 \notin A'$.

Analog $4 \notin A'$.

Prin urmare $A' = [0,2]$.

4) $Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, 2, 3, 4\}$.

5) $Izo(A) = \bar{A} \setminus A' = \{3, 4\}$. $\square$

Considerăm spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d_2)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, unde

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad d_2(\underset{(x_1,\dots,x_n)}{\underset{\parallel}{x}}, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{\underset{\parallel}{y}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

[Observație. Dacă $n=1$, atunci $d_2(x,y) = |x-y|$.

[Definiție. Metrica d_2 se numește distanța euclidiană a lui $\mathbb{R}^n$.

[Notație. Atunci când nu este pericol de confuzie, $d_2 \overset{not}{=} d$.

<u>Definiție.</u> O mulțime $A \subset \mathbb{R}^n$ se numește mărginită dacă există $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ și $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ a.î. $A \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

<u>Teoremă (Teorema Heine-Borel).</u> În spațiul metric $(\mathbb{R}^n, d)$, o mulțime $K \subset \mathbb{R}^n$ este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

<u>Exercițiu.</u> Studiați dacă mulțimile $K \subset \mathbb{R}$ de mai jos sunt compacte (în spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$).

a) $K = \mathbb{N}$.

<u>Soluție.</u> K nu e mărginită $\Rightarrow$ K nu e compactă. $\square$

b) $K = (0, 1)$.

<u>Soluție.</u> $\overline{K} = [0, 1] \supsetneq K \Rightarrow K$ nu e închisă $\Rightarrow K$ nu e compactă. $\square$

c) $K = [0, 1] \cup \{2\}$.

<u>Soluție.</u> $K \subset [0, 2] \Rightarrow K$ mărginită.

$\overline{K} = [0, 1] \cup \{2\} = K \Rightarrow K$ închisă.

Deci K este compactă. $\square$