Introdução à Complexidade

Análise de Algoritmos

- Não basta que um algoritmo resolva um problema; é necessário ter um desempenho aceitável na prática!
  - Um algoritmo simples e rápido para um conjunto pequeno de dados pode se tornar inviável para um conjunto com milhões de registros
- Analisar a **complexidade** de um algoritmo significa estimar os recursos necessários para que a tarefa seja completada

Medida mais comum

  - Complexidade de tempo → medida do tempo de execução
  - Complexidade de espaço → medida da quantidade de memória

Análise de Algoritmos

- Formas de computar:
  - **Análise empírica** (*benchmark*)
    - Implementar o algoritmo e realizar **experimentos** com diversos conjuntos de dados, de diferentes tamanhos e características, **medindo** o tempo de execução/consumo de memória;
    - Os resultados são dependentes da linguagem de programação utilizada, do compilador, da capacidade do hardware, da quantidade de processos sendo executados, etc;
    - Computa custos não aparentes (como alocação de memória);
    - Permite comparar computadores, linguagens, etc;
    - Depende da habilidade do programador;
    - Cenários de teste limitados.

Análise de Algoritmos

- Formas de computar:
  - **Análise matemática** (modelo teórico)
    - Estudo **formal** das propriedades do algoritmo;
    - Considera um computador idealizado onde cada operação executa em tempo constante e de forma sequencial;
      - Operações simples (comparações, atribuições, cálculos, incrementos, acesso a um elemento em um array) possuem mesmo custo
    - Realiza simplificações buscando considerar apenas o custo dominante;
    - Objetivo: **estimar como o algoritmo se comporta em função do tamanho do conjunto de dados** (entrada);
    - Independe de aspectos específicos de hardware, linguagem, compilador e ambiente de execução;

Complexidade

- Ao olhar para complexidade dos algoritmos, podemos:
  - predizer seu desempenho;
  - comparar diferentes algoritmos que resolvem o mesmo problema;
  - avaliar sua viabilidade, provendo algumas garantias de que sua execução será completada no tempo esperado.
- Ao invés de olhar para o tempo exato de execução (o qual depende de fatores relacionados ao ambiente de execução), a noção de complexidade possibilita analisar e entender o **comportamento** do algoritmo, isto é,
  - **como o tempo de execução cresce à medida que o tamanho da entrada cresce.**

Análise de Complexidade

Exemplo

```
int menor(int *A, int n) {
  int i, menor;
  menor = A[0];
  for(i = 1; i < n; i++) {
    if(A[i] < menor)
      menor = A[i];
  }
  return menor;
}
```

1

2+(n-1)+(n-1)

n-1

n-1

1

2 da inicialização do laço
n-1 comparações
n-1 incrementos

no pior caso

= 1 + 2 + n - 1 + n - 1 + n - 1 + n - 1 + 1
= 4n

4n = **n**

Comportamento assintótico

60	50	40	30	20	10
0	1	2	3	4	5

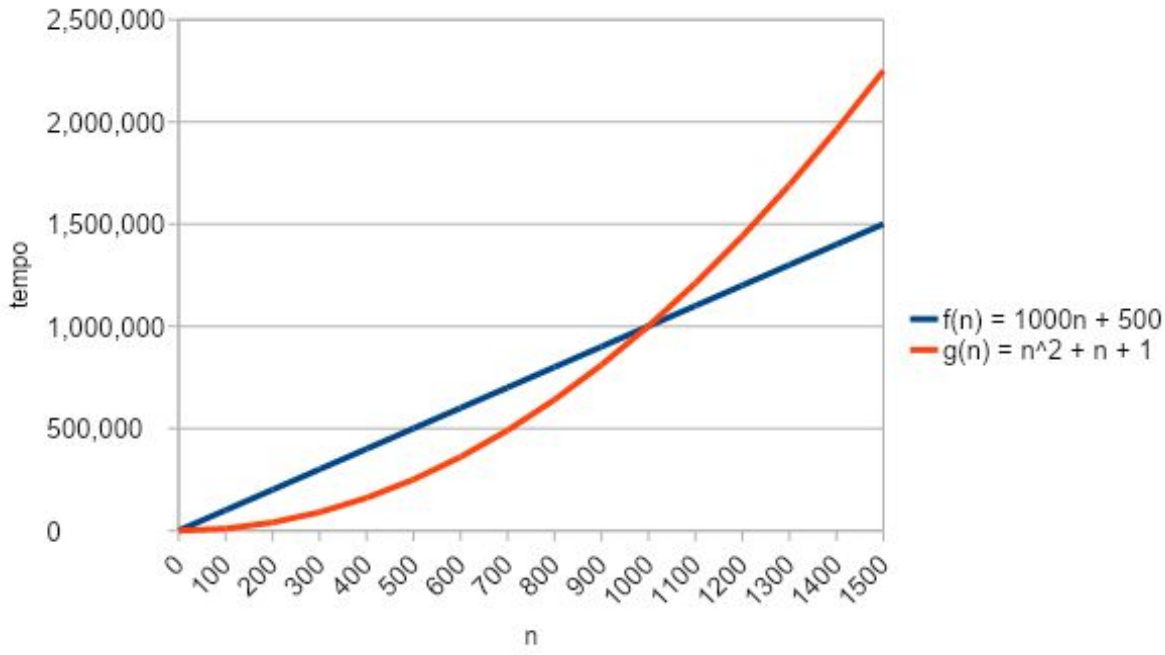
Notação Assintótica

- Quando trabalhamos com **N** objetos, algumas operações tomarão tempo proporcional a **N**
  - Para valores pequenos de **N**, até mesmo um algoritmo ruim pode ter desempenho aceitável
  - Nos interessa saber a ordem de crescimento do algoritmo para **valores grandes** de **N**
  - À medida que **N** cresce, as constantes aditivas e multiplicativas têm cada vez menos impacto, podendo até mesmo se tornar irrelevantes

- Por exemplo, para valores de **N** suficientemente grandes, as funções
  - n^2 $(3/2)n^2$ $9999n^2$ $n^2/1000$ n^2+100n
- têm todas a mesma taxa de crescimento e, portanto, são todas "equivalentes".

Notação Assintótica

- Ex: considere as funções
  - **f(n) = 1000n + 500**
  - **g(n) = n^2 + n + 1**



  - Existe um valor de n a partir do qual **g(n)** é sempre maior do que **f(n)**, tornando os demais termos e constantes pouco significativos.

Notação Assintótica

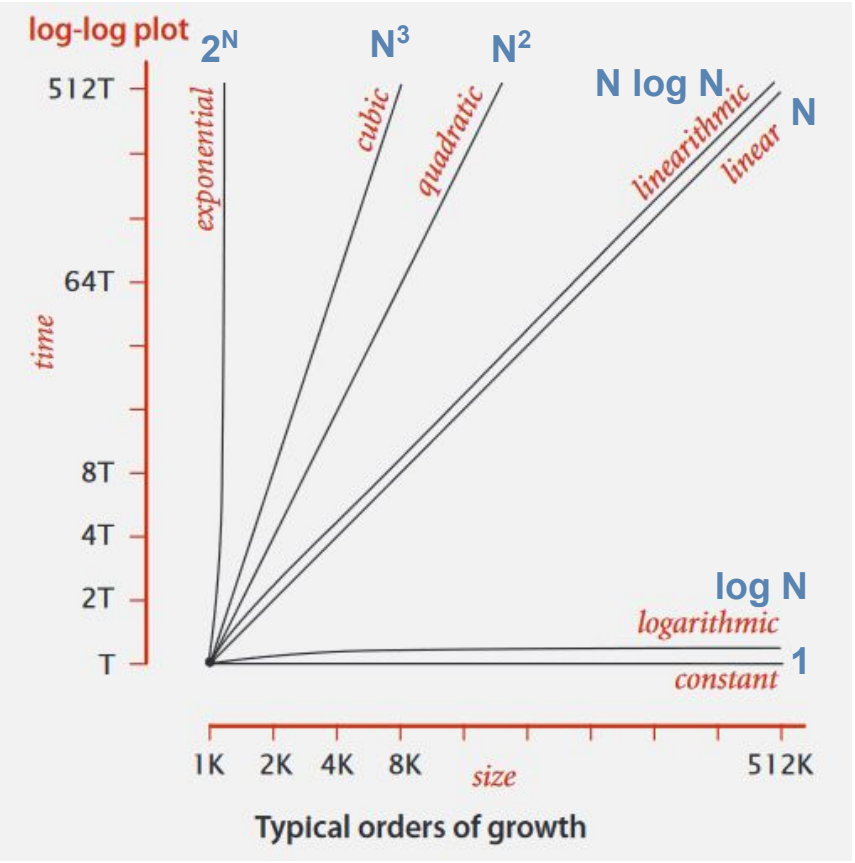
- Na notação assintótica, considera-se apenas o **termo dominante** da equação (ou seja, o termo de maior grau). Os termos de grau menor e as constantes aditivas e multiplicativas são desconsiderados.

quando função não possui n, então o comportamento assintótico é 1 (constante)

- Ex:

$f(n) = 75$	=	$f(n) = 1$
$f(n) = 2n + 1$	=	$f(n) = n$
$f(n) = n^2 + n$	=	$f(n) = n^2$
$f(n)=10n^3 + 4n - 1$	=	$f(n) = n^3$

Classes de Complexidade (*Order of growth*)



Fonte: (SEDGEWICK, 2016)

order of growth	name	typical code framework	description	example	T(2N) / T(N)
1	constant	`a = b + c;`	statement	add two numbers	1
log N	logarithmic	`while (N > 1) { N = N / 2; ... }`	divide in half	binary search	~ 1
N	linear	`for (int i = 0; i < N; i++) { ... }`	loop	find the maximum	2
N log N	linearithmic	[see mergesort lecture]	divide and conquer	mergesort	~ 2
N^2	quadratic	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) { ... }`	double loop	check all pairs	4
N^3	cubic	`for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) for (int k = 0; k < N; k++) { ... }`	triple loop	check all triples	8
2^N	exponential	[see combinatorial search lecture]	exhaustive search	check all subsets	T(N)

Fonte: (SEDGEWICK, 2016)

Complexidade

- **Melhor caso** (*best case*)
  - Representado pela letra grega **Ω** (ômega)
  - Consiste na entrada mais "fácil" (e a que deve preferencialmente ser buscada)
  - Constitui o limite inferior de custo (não pode ser mais rápido)
- **Pior caso** (*worst case*)
  - Representado pela letra **O** (ômicron), também chamada de "**Big O**"
  - Representa a entrada mais difícil (a que faz o algoritmo executar o maior número de operações)
  - Constitui o limite superior de custo, servindo como uma garantia para as demais entradas (não pode ser mais lento)

Notação "Big O": a mais utilizada para expressar a complexidade do algoritmo

Complexidade

- **Caso médio** (*average case*)
  - Representado pela letra grega θ (theta)
  - Custo esperado para uma entrada aleatória
  - Difícil de determinar na maioria dos casos

Exemplo

Busca sequencial em um vetor de tamanho n

- Melhor caso: **Ω(1)**
  - O valor procurado é o primeiro do vetor
- Pior caso: **O(n)**
  - O valor procurado é o último ou não faz parte do vetor
  - Será necessário visitar todos os **n** elementos do vetor até encontrar o valor procurado
- Caso médio: **θ(n)**
  - Será necessário visitar na média **n/2** elementos do vetor até encontrar o valor procurado

Dizemos que o algoritmo é O(n), ou seja, linear