

Proiect la Probabilități și Statistică

-partea aIIa-

Important!

- 1) Fiecare problemă este obligatorie și are asociată un punctaj de 5 puncte.
- 2) Rezolvările vor fi realizate în limbajul R
- 3) Respectați restricțiile din cerințe, dar acolo unde nu sunt precizări făcute aveți libertatea de a face orice alegere considerați potrivită
- 4) Trimiteți până la data de **12.06.2024 ora 22:00** la adresa simona.cojoclea@fmi.unibuc.ro o singură arhivă per echipă care conține codul sursa R împreună cu documentația asociată, pentru ambele părți ale proiectului.
- 5) Documentația va conține, în mod obligatoriu, numele membrilor echipei, prezentarea soluției, comentarii legate de rezultatele obținute sau de dificultățile întâmpinate, grafice și tabele și respectiv codul sursa comentat la fiecare cerință în parte.

Cerințe

1) Folosiți metoda de simulare Monte Carlo(cu 10^6 valori) și comparați cu valoarea teoretică pentru a aproxima următoarele:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{x^5(1-x)}} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$

d) $\int_1^{\infty} e^{-x^2+2x-4} dx$

e) $\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$

f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

g) $\int_0^{\infty} \int_0^x e^{-(x+y)} dy dx$

h) $cor(U, \sqrt{1-U^2}), U \sim Unif(0,1)$

i) $cor(U^2, \sqrt{1-U^2}), U \sim Unif(0,1)$, unde $cor(X,Y)$ reprezintă coeficientul de corelație dintre variabilele aleatoare X și Y .

2) Pentru v.a. X definită prin densitatea/funcția de masă de mai jos estimați parametrul teta prin metoda verosimilității maxime și prin metoda momentelor(pe foaie!), apoi construiți o funcție în R care preia eșantionul dat și întoarce estimațiile realizate în baza celor 2 estimatori. Comparați estimația dată de metoda verosimilității maxime cu valoarea lui teta dată de o metodă numerică.

a) $f_{\theta}(x) = e^{-2\theta} \cdot \frac{(2\theta)^x}{x!}, x \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$

Eșantion:

8 12 6 14 9 12 15 7 15 7 10 10 14 9 12 15 11 6 8 6 8 8 9 12 13 10 11 11 13 15 10 8 7
8 13 9 9 13 12 9 10 6 10 8 10 11 12 11 9 10 7 8 8 16 7 15 10 10 8 14 13 4 11 13 6 9
13 10 10 12 11 5 6 4 9 6 9 7 13 9 11 5 5 9 15 10 11 10 14 7 11 9 14 10 5 10 8 12 13
11

b) $f_{\theta}(x) = C_n^x \cdot \theta^x (1-\theta)^{1-x}, x \in \{1,2,3...n\}, \theta \in (0,1), n \text{ fixat}$

Eșantion pentru $n=14$:

3 2 1 4 2 3 4 1 3 2 2 4 2 1 7 5 4 5 5 2 3 4 3 1 2 4 1 1 2 3 1 3 1 4 1 3 1 6 1 3 3 4 3 1 3 2 2 3 2 4
1 1 2 6 3 1 3 6 1 2 3 6 3 2 2 2 4 2 1 3 3 4 2 3 4 1 4 4 6 3 3 5 2 2 2 3 1 3 1 3 3 5 3 4 3 2 4 2 3 3

c) $f_{\theta}(x) = e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^{\alpha}}, x \in (0, \infty), \theta \in (0, \infty), \alpha \in (0, \infty) \text{ fixat}$

Eșantion pentru $\alpha = 7$:

6.269128 25.204245 13.994878 13.391437 11.458827 10.565065 11.706398 10.625808
7.485952 16.353358 9.277565 8.566438 14.788638 6.830955 9.542004 20.272463
36.562137 12.244005 16.084879 11.454008 15.592298 6.332908 13.106441 6.198981
15.726780 7.883712 35.124934 11.856011 13.766200 16.534869 16.803648 11.196542
19.785629 26.300717 21.270154 7.192149 5.882948 15.812796 10.963237 24.963600
13.802383 15.281262 10.310398 20.940469 23.992540 15.869985 12.041726 12.521264
10.869006 15.386514 14.636832 18.104562 17.029779 4.506616 20.941222 12.050877
9.757833 20.070802 12.472900 6.474476 15.059776 13.157344 9.124414 13.768482
24.354934 12.363936 11.110749 9.092514 17.856801 14.757801 13.898665 9.119410
11.430184 11.958829 13.516191 10.701083 14.713596 10.121266 16.945351 13.524070

14.742403 19.165805 10.338392 12.327837 19.619227 7.328246 14.894399 19.631003
 7.622796 12.343832 13.138183 10.061520 17.674638 9.675168 12.115561 15.182861
 13.292479 17.888244 16.695139 2.952334

d) $f_{\theta}(x) = \frac{\theta^x}{(1+\theta)^{1+x}}, x \in \mathbb{N}, \theta \in (0, \infty)$

Eșantion:

6 3 24 24 4 56 10 13 2 28 24 2 22 11 2 8 118 2 14 19 7 9 8 189 2 9 21 6
 6 2 3 2 3 18 3 2 21 1 5 9 11 13 19 76 1 5 9 4 57 1 2 16 5 2 20 8 1
 40 6 4 19 6 3 2 4 9 1 5 10 12 6 525 19 6 17 2 5 159 5 62 6 3 45 21 23
 3 17 2 1 1 474 15 3 3 7 7 13 4 38 4

e) $f_{\theta}(x) = \frac{\alpha}{\theta} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, x \in (0, \infty), \theta \in (0, \infty), \alpha \in (0, \infty) \text{ fixat}$

Eșantion pentru $\alpha = 3$:

3.5930579 2.1027540 1.7820777 9.6550388 6.8803846 0.7388358 2.9194654 3.1178660
 1.2323236 2.9776820 1.1172078 2.4184586 3.3258971 1.9498871 2.6088612 3.9535062
 3.0389107 4.4226628 3.9366318 2.4551569 5.2814487 5.6778622 4.7683935 1.1581498
 3.1270783 4.1473311 7.4830426 1.1342893 1.7773392 7.7510826 1.3919927 2.3613291
 2.6234826 1.6562602 1.4992235 2.3455062 3.8458809 5.8333841 3.3834034 1.5202546
 3.1248186 5.3029567 3.6225571 4.8309931 3.1579595 3.2640258 3.9538891 4.0796841
 4.0991772 3.2779944 2.5002127 3.0654695 1.6996010 3.2175175 1.9033087 4.4052061
 2.3158379 2.4778345 5.4382190 4.9141207 6.0978745 1.1428936 3.5639106 7.4541937
 7.7778289 3.2859563 0.7432908 1.4442696 3.6619932 2.8361371 4.3180773 1.6763585
 4.4464154 2.5049617 0.4448735 5.0518839 3.4151834 1.6823650 5.4517583 2.8212788
 2.1566837 2.9893287 1.6925123 6.5197938 4.2165408 1.6728425 2.7650830 2.6742755
 2.9622047 0.7809781 1.3913415 5.3430751 2.4859925 3.7329465 6.3129236 0.6635228
 3.7640343 2.1850174 4.3773328 5.0931544

3) Construiți câte o funcție în \mathbb{R} care calculează media și varianța pentru v.a. X definită de:

a) $f(x) = cx^4, x \in (0, 2), c \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = ax + bx^2, 0 < x < 1, a, b \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \frac{4}{x(x+1)(x+2)}, x \in \mathbb{N}^*$

$$\text{d) } f(x) = \lg\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+x)e^{-\theta x}, \quad x > 0, \quad \theta > 0$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}e^{-(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$