Тема 6 Понятие о производной.

1. Найти производную выражения

а) $(\sin x\cdot\cos x)' = \sin x'\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos x' = \cos^2 x - \sin^2 x$

б) $\ln(2x+1)^3 = \frac{1}{(2x+1)^3}\cdot\left((2x+1)^3\right)' = \frac{1}{(2x+1)^3}\cdot 3(2x+1)^2(2x+1)' = \frac{3}{2x+1}\cdot 2 = \frac{6}{2x+1}$

c) $\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = \left|(\sin(\ln(x^3)))'\right| = \left|\cos(\ln(x^3))\cdot(\ln(x^3))'\right| = \cos(\ln(x^3))\cdot\frac{1}{x}\cdot 2x \overset{2}{=} \left|\frac{2\cos\ln x^3}{x}\right|$

d) $\frac{x^4}{\ln(x)} = \frac{(x^4)'\ln x - x^4(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{4x^3\ln x - \frac{x^4}{x}}{\ln^2 x} = \frac{4x^3\ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}$

2. Найти выражение производной функции и её значение в точке:

$f(x) = \cos(x^2+3x),\ x_0 = \sqrt{\pi}$

$f'(x) = -\sin(x^2+3x)(2x+3)$

$f'(x_0) = -\sin(\pi+3\sqrt{\pi})\cdot(2\sqrt{\pi}+3) = (-2\sqrt{\pi}-3)\cdot\sin(\pi+3\sqrt{\pi}) =$

$= (-2\sqrt{\pi}-3)\cdot(\sin\pi\cdot\cos 3\sqrt{\pi} + \cos\pi\cdot\sin 3\sqrt{\pi}) = (-2\sqrt{\pi}-3)(0\cdot\cos 3\sqrt{\pi} - 1\cdot\sin 3\sqrt{\pi}) = (2\pi+3)\sin 3\sqrt{\pi}$

3. Найти значение производной в точке.

$f(x) = \frac{x^3-x^2-x-1}{1+2x+3x^2-4x^3},\ x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{(x^3-x^2-x-1)'(1+2x+3x^2-4x^3) - (x^3-x^2-x-1)(1+2x+3x^2-4x^3)'}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2} =$

$= \frac{(3x^2-2x-1)(1+2x+3x^2-4x^3) - (x^3-x^2-x-1)(2+6x-12x^2)}{(1+2x+3x^2-4x^3)^2}$

$f'(x_0) = \frac{-1\cdot 1 - (-1)\cdot 2}{1^2} = \frac{-1+2}{1} = 1.$

4. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$f(x) = \sqrt{3x}\cdot\ln x,\ x_0 = 1.$

т.к. $tg\,\alpha = f'(x)$, найдём производную:

$f'(x) = (\sqrt{3x}\cdot\ln x)' = \left((3x)^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot\ln x + \sqrt{3x}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\ln x + \frac{\sqrt{3x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{3x}} + \frac{\sqrt{3x}}{x} =$

$= \frac{\ln x}{2\sqrt{3x}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}};\ f'(1) = \frac{\ln 1}{2\sqrt{3\cdot 1}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\ln 1}{2\sqrt{3}} + 1 = \frac{0}{2\sqrt{3}} + 1 = 1.$

$tg\,\alpha = 1;\ \alpha = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}.$