Тема 7 "Ряды".

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n!)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^2}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^2}$$

Раскрываем факториал и сокращаем его элементы:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)^2} \cdot \cancel{n^2} \cancel{(n-1)^2} \cancel{(n-2)^2} \cdot \ldots}{\cancel{(n+1)^2} \cdot \cancel{n^2} \cdot \cancel{(n-1)^2} \cdot \cancel{(n-2)^2} \cdot \ldots \cdot n^2}$$ = всё сокращается кроме $n^2$ в знаменателе

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 < 1$$ – ряд сходится.

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} > 1$$ – ряд расходится.

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = \frac{-1}{1+\ln 1} + \frac{1}{2+\ln 2} + \frac{-1}{3+\ln 3} + \ldots$$

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = \frac{\pm 1}{\infty} = 0$$

2. $$\left|\frac{-1}{1+\ln 1}\right| > \left|\frac{1}{2+\ln 2}\right| > \left|\frac{-1}{3+\ln 3}\right| > \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right| \Rightarrow \lim \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right| = 0$$ – ряд сходится

Следовательно $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$ – сходится абсолютно.

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n\left(\frac{3^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}}-1\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^n\cdot 2}{2^n\cdot 3^n\cdot 3}-1\right)\right)=\lim\left(n\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{3}n=-\infty<1$$ - ряд расходится.

5. Разложить функцию по Тейлору в еденице:

$$f(x)=\ln(16x^2)=\frac{\ln(16\cdot 1^2)}{0!}(x-1)^0+\frac{2}{1\cdot 1!}(x-1)^1-\frac{2}{1^2\cdot 2!}(x-1)^2+$$

$$+\frac{4}{1^3\cdot 3!}(x-1)^3-\frac{12}{x^4\cdot 4!}(x-1)^4+\ldots=\ln 16+2(x-1)-(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{1}{2}(x-1)^4+\ldots=$$

$$=\ln 16+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(x-1)^n.$$

$$(\ln(16x^2))'=\frac{1}{16x^2}(16x^2)'=\frac{32x}{16x^2}=\frac{2}{x}$$

$$\left(\frac{2}{x}\right)'=(2x^{-1})'=-\frac{2}{x^2}\qquad\left(-\frac{2}{x^2}\right)'=\frac{4}{x^3}\qquad\left(\frac{4}{x^3}\right)'=-\frac{12}{x^4}$$

Тема 8. "Понятие об интеграле".

1. $$\int(2x^2-2x-1+\sin x-\cos x+\ln x+e^x)dx=$$

$$=\int 2x^2dx-\int 2x\,dx-\int dx+\int\sin x\cdot dx-\int\cos x\,dx+\int\ln x\,dx+\int e^x dx=$$

$$=\frac{2x^3}{3}-x^2-x-\cos x-\sin x+\ln x\cdot x-x+e^x+C=$$

$$=\frac{2x^3}{3}-x^2-2x-\cos x-\sin x+\ln x\cdot x+e^x\cdot C$$

$$\int\ln x\,dx=\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=$$

$$U=\ln x \Rightarrow dU=\frac{dx}{x}$$

$$dV=dx \Rightarrow V=x$$

$$=\ln x\cdot x-\int dx=\ln x\cdot x-x.$$

2. $\int(2x+6xz^2-5x^2y-3\ln z)dx = \int 2x\,dx + \int 6xz^2dx - \int 5x^2y\,dx - \int 3\ln z\,dx =$

$= x^2+3x^2z^2-\frac{5x^3}{3}y-3\ln z\cdot x+C.$

3. $\int_0^{\pi} 3x^2\cdot\sin(2x)\,dx =$

$U=3x^2 \Rightarrow dU=6x\,dx$

$dV=\sin(2x)dx \Rightarrow V=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$=3x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot 6x\,dx = -\frac{3}{2}x^2\cos 2x+3\int_0^{\pi}\cos 2x\cdot x\cdot dx=$

$U=x \Rightarrow dU=dx$

$dV=\cos 2x\cdot dx \Rightarrow V=\frac{1}{2}\sin 2x$

$=-\frac{3}{2}x^2\cdot\cos 2x+x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\cdot 2x = -\frac{3}{2}x^2\cos 2x+\frac{x}{2}\cdot\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C=$

$=\left(-\frac{3}{2}\pi^2\cos 2\pi+\frac{\pi}{2}\sin 2\pi-\frac{1}{4}\cos 2\pi\right)-\left(-\frac{3}{2}\cdot 0^2\cos 0+\frac{0}{2}\sin 0-\frac{1}{4}\cos 2\cdot 0\right)=$

$=-\frac{3}{2}\pi^2\cdot 1+0-\frac{1}{4}\cdot 1+1=-\frac{3}{2}\pi^2+\frac{3}{4}$

4. Найти неопределённый интеграл

$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx\Big|_{t=x+1}=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x+1}+C.$