Тема "Предел функции"

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях

Классический пример функции не имеющей предела в нуле: $y = \sin\frac{1}{x}$,

в бесконечности: $y = \frac{\sin(2x)}{3x}$; $y = \frac{x^2-1}{x}$

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определённого в ней:

$y = \sin\frac{1}{x}$

3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$:

a) область задания: $dom(f) = \mathbb{R}$

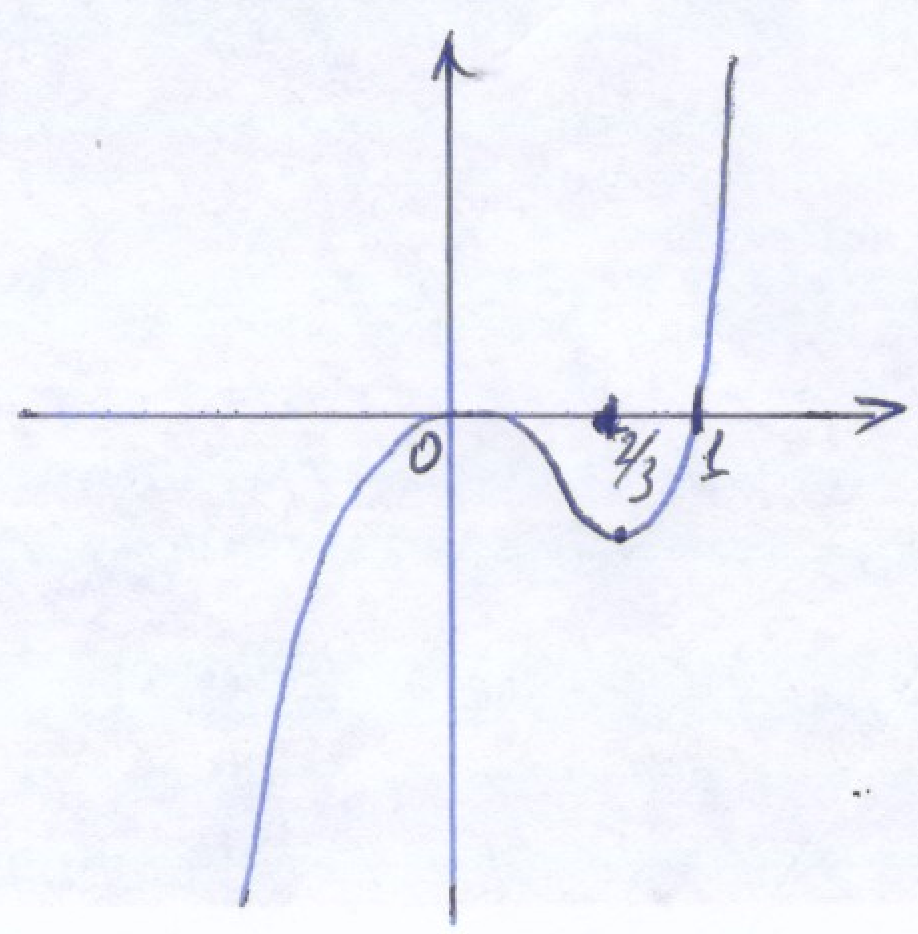
область значений: $ran(f) = \mathbb{R}$

Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

b) $x^3 - x^2 = 0$

корни: $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 1$

$x(x-1)^2 = 0$, следовательно 1 – это корень 2-й кратности



c) Отрезки знакопостоянства

$f(x) > 0$, если $x \in (1; +\infty)$

$f(x) < 0$, если $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

d) Интервалы монотонности:

Функция монотонно возрастает на интервале: $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$

Монотонно убывает на $\left(0; \frac{2}{3}\right)$

e) Функция общего вида, не является ни чётной, ни нечётной.

f) Функция не ограничена сверху и не ограничена снизу.

g) Функция не является переодической.

4. Найти предел:

a) $$\lim_{x\to0}\frac{3x^3-2x^2}{4x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(3x-2)}{4x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{(\sqrt{1+x}-1)\left((\sqrt{1+x})^2+\sqrt{1+x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2+0+1}=\frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x\left(4+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=e^{3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}\right)}=e^{3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(4+0)}=e^{12}$$

Тема "Теоремы о пределах".

1. a) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\cos x}{x\cdot2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\cos x=\frac{1}{2}$$

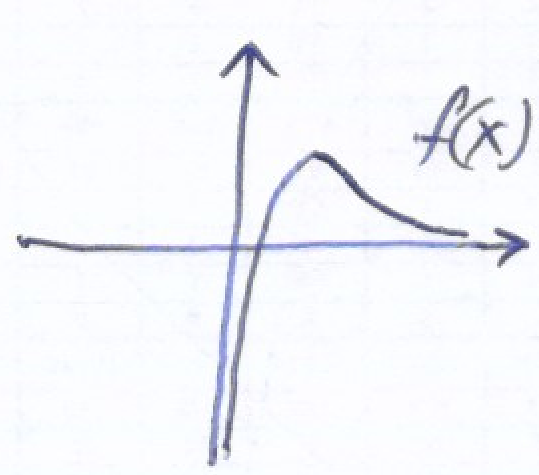
в) $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{x}{\arcsin(x)}=\frac{1}{\lim\frac{\arcsin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3+6}{4x-3}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x-3}+\frac{6}{4x-3}\right)^{6x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{4x-3}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{4x-3}\right)^{\frac{6x(4x-3)}{4x-3}}=e^{6\cdot\frac{6x}{4x-3}}=e^{\frac{36x}{4x-3}}=e^{\frac{36}{4}}=e^{9}$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x+\ln x}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=1+0=1.$$



$f(x)=\frac{\ln x}{x}$

f) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\ln x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+\lim\frac{\ln x}{x}=1-\infty=-\infty$$