

## Тема "Предел функции".

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях

Классический пример функции не имеющей предела в нуле:  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,

в бесконечности:  $y = \frac{\sin(2x)}{3x}$ ;  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определённого в ней:

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

3. Исследовать функцию  $f(x) = x^3 - x^2$ :

a) область задания:  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$

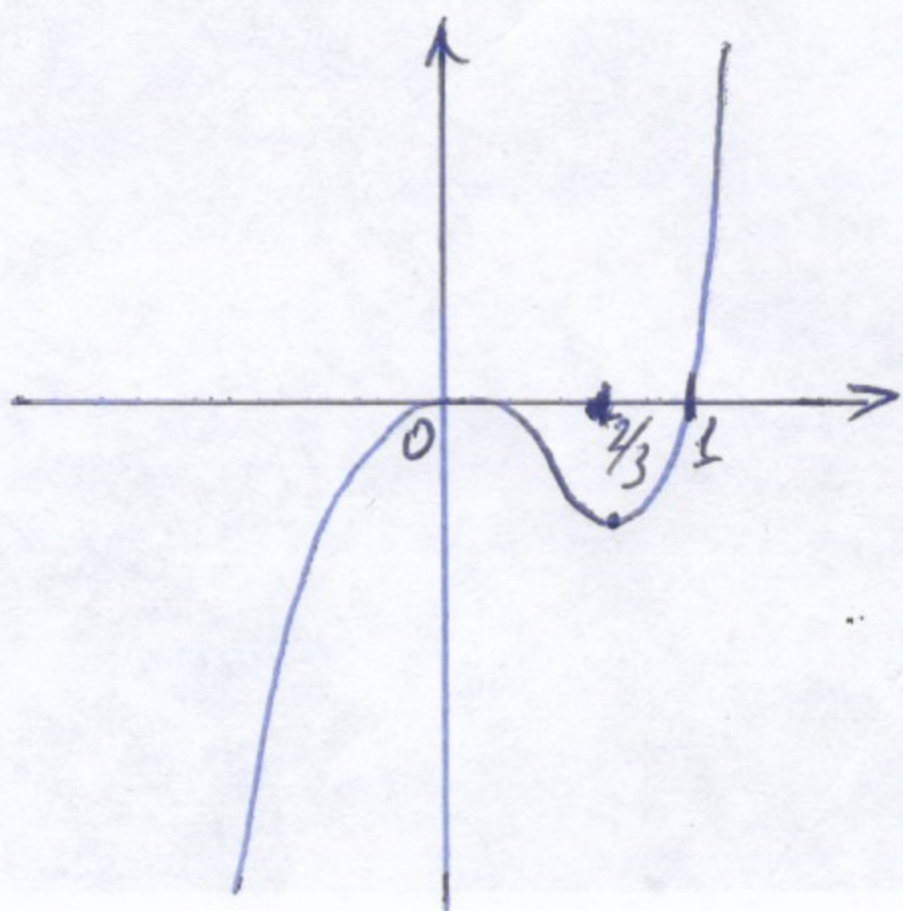
область значений:  $\text{ran}(f) = \mathbb{R}$

функция определена и непрерывна на всей числовой прямой.

b)  $x^3 - x^2 = 0$

корни:  $x_{1,2} = 0$ ,  $x_3 = 1$

$x(x-1)^2 = 0$ , следовательно 1 — это корень 2-й кратности.



c) Отрезки знакопостоянства

$f(x) > 0$ , если  $x \in (1; +\infty)$

$f(x) < 0$ , если  $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

d) Интервалы монотонности:

функция монотонно возрастает

на интервале:  $(-\infty; 0) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$

монотонно убывает на  $(0; \frac{2}{3})$

e) функция общего вида, не является ни чётной, ни нечётной.



4. Найти предел:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x}^2 + \sqrt{1+x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x+\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2+0+1} = \frac{1}{3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{4x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^{x \left( 4 + \frac{1}{x} \right)} =$$

$$= e^{3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 4 + \frac{1}{x} \right)} = e^{3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (4+0)} = e^{12}$$

Тема "Теорема о пределах".

$$1. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \frac{1}{2}$$

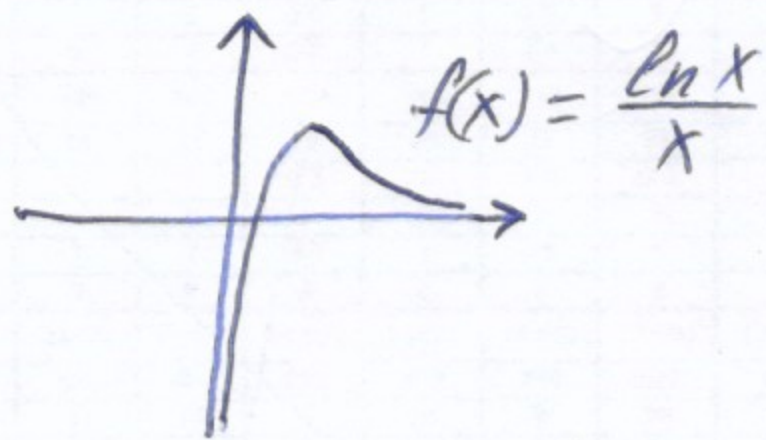
$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x+3}{4x-3} \right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-3+6}{4x-3} \right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-3}{4x-3} + \frac{6}{4x-3} \right)^{6x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{4x-3} \right)^{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{4x-3} \right)^{\frac{6x(4x-3)}{4x-3}} = e^{6 \cdot \frac{6x}{4x-3}} = e^{\frac{36x}{4x-3}} = e^{\frac{36}{4}} = e^9$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \ln x}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 1 + 0 = 1.$$



$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = 1 - \infty = -\infty$$