ANÁLISE E DESENVOLVIMENTO DE SISTEMAS

MATEMÁTICA DISCRETA

Prof. Ferrari

Unidade 01 – Lógica Formal

Introdução

Lógica é o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas.

Proposição:

Uma proposição é uma construção que se pode atribuir juízo, ou seja, que pode ser apenas verdadeira ou falsa.
São exemplos de proposições:
- Quatro é maior do que cinco.
- Ela é muito inteligente.
- São Paulo é uma cidade grande

Não são proposições:
1) frases interrogativas: “*Qual é o seu nome?”*
2) frases exclamativas: “Que linda é essa mulher!”
3) frases imperativas: “Estude mais.”
4) frases optativas: “Deus te acompanhe.”
5) frases *sem verbo: “O caderno de Maria.”*
6) *sentenças abertas (o valor lógico da sentença depende do valor (do nome) atribuído a variável): “x é maior que 2”; “x+y = 10”; “Z é a capital do Chile”.*

As proposições podem ser simples (atômicas) ou compotas e os conectivos têm a função de combinar sentenças simples para formar sentenças compostas.
Proposição Simples ou Atômica: são proposições que não podem ser decompostas em proposições mais simples.
Exemplo:
- A neve é branca;
- Juiz de Fora é a capital do Brasil.

Proposição Composta ou Molecular: são proposições mais complexas, compostas por proposições mais simples através dos conectivos lógicos (ou operadores lógicos).
Exemplo:
- A neve é branca **e** Juiz de Fora é a capital do Brasil;
- **Se** o céu é azul **então** João vai viajar.

Na estrutura correta do pensamento, é necessário obedecer as seguintes leis:
I) Princípio da identidade. Se qualquer proposição é verdadeira, então ela é verdadeira.
II) Princípio da não-contradição. Nenhuma proposição pode ser verdadeira e falsa.
III) Princípio do terceiro excluído. Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa.

Variáveis Proposicionais:

São letras latinas minúsculas ***p***, ***q***, ***r***, ... para indicar as proposições.
Exemplo:
p: A neve é branca
q: Matemática é uma ciência
r: 5 > 2

Negação

Uma proposição pode ser formada a partir de outra, pelo uso do modificador "não". Ao acrescentarmos o não em uma proposição, obtemos a sua **negação.**

Indicando uma proposição por ***p***, sua negação será representada por ***~p***.

Exemplos: **p** : A lua é quadrada

~p: A lua NÃO é quadrada.

Se uma proposição é verdadeira, sua negação será falsa. E se uma proposição é falsa, sua negação será verdadeira.

Tabela verdade da "negação"

p	**~ P**
V	F
F	V

Conectivos Lógicos

- ***Conjunção***

Uma conjunção é verdadeira se ***ambos*** seus valores lógicos são verdadeiros. Caso contrário, é falsa.

É denotada por:

$$p \wedge q \quad \text{(lê-se "}p\text{ e }q\text{")}$$

Sua tabela – verdade é:

p	**q**	***p ∧ q***
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ex.: A lua é quadrada **e** a neve é branca

- ***Disjunção Inclusiva***

Uma disjunção é verdadeira se ***pelo menos um*** dos seus valores lógicos for verdadeiro. Caso contrário, é falsa.

É denotada por:

$$p \vee q \quad \text{(lê-se "}p\text{ ou }q\text{")}$$

Sua tabela – verdade é:

p	**q**	***p ∨ q***
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex.: A lua é quadrada **ou** a neve é branca

- ***Disjunção Exclusiva***

Uma disjunção exclusiva é verdadeira se ***pelo menos um*** dos seus valores lógicos for verdadeiro **mas não ambos**. Caso contrário, é falsa.

É denotada por:

$$p \veebar q \quad \text{(lê-se "ou }p\text{ ou }q\text{")}$$

Sua tabela – verdade é:

p	q	$p \veebar q$
V	V	**F**
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex.: **Ou** a lua é quadrada **ou** a neve é branca

- ***Condicional (Implicação)***

A condicional é falsa se seu antecedente for verdadeiro e seu consequente for falso. Caso contrário, ela é verdadeira.

É denotado por:

$\boldsymbol{p \rightarrow q}$ (lê-se "Se *p então q*")

Sua tabela – verdade é:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ex.: **Se** a lua a lua é quadrada **então** a neve é branca

- ***Bicondicional***

A bicondicional é verdadeira se os valores lógicos de suas proposições simples são iguais. Caso contrário, é falsa.
É denotada por:

$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$ (lê-se " *p se e somente se q*")

Sua tabela – verdade é:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ex.: A lua é quadrada **se e somente se** a neve é branca

Exercícios

1) Sabendo que as proposições ***p*** e ***q*** são verdadeiras e que as proposições ***r*** e ***s*** são falsas, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $p \wedge q \rightarrow r$

b) $r \vee s \rightarrow q$

c) $q \leftrightarrow p \wedge s$

d) $p \rightarrow \sim (r \wedge s)$

e) $(q \rightarrow s) \rightarrow s$

f) $\sim r \rightarrow p \wedge q$

g) $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$

h) $(r \rightarrow s) \wedge (p \wedge q)$

i) $(p \wedge \sim q) \vee r$

j) $\sim ((r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q))$

2) Determinar P(VFV) em cada um dos seguintes casos

a) $P(p,q,r) = p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$

b) $P(p,q,r) = \sim p \wedge (q \vee \sim r)$

c) $P(p,q,r) = \sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim (p \vee \sim r)$

d) $P(p,q,r) = (p \vee q \rightarrow r) \rightarrow q \vee \sim r$

e) $P(p,q,r) = (p \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \leftrightarrow \sim q)$

3) Sejam as proposições ***p: Está frio*** e ***q: Está chovendo***. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $\sim p$

b) $p \wedge q$

c) $p \vee q$

d) $q \rightarrow p$

e) $p \rightarrow \sim q$

f) $p \vee \sim q$

g) $\sim p \wedge \sim q$

h) $p \leftrightarrow \sim q$

i) $p \wedge \sim q \rightarrow p$

4) Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições matemáticas:

a) $(x + y = 0 \ e \ z > 0) \ ou \ z = 0$

b) $Se \ x + y = 2 \ então \ z > 0$

c) $Se \ x < 2 \ então \ x = 1 \ ou \ x = 0$

d) $y = 4 \ e \ se \ x < y \ então \ x < 5$

e) $Se \ x \neq y \ então \ x + z > 5 \ e \ y + z < 5$

5) Construir as tabelas verdade das seguintes proposições:

a) $\sim (p \vee \sim q)$

b) $\sim (p \rightarrow \sim q)$

c) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

d) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$

e) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \wedge q$

f) $q \rightarrow \sim q \wedge p$

g) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$

h) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$

6) Ana é prima de Bia, ou Carlos é filho de Pedro. Se Jorge é irmão de Maria, então Breno não é neto de Beto. Se Carlos é filho de Pedro, então Breno é neto de Beto. Ora, Jorge é irmão de Maria. Logo:

a) Carlos é filho de Pedro ou Breno é neto de Beto;

b) Breno é neto de Beto e Ana é prima de Bia;

c) Ana não é prima de Bia e Carlos é filho de Pedro;

d) Jorge é irmão de Maria e Breno é neto de Beto;

e) Ana é prima de Bia e Carlos não é filho de Pedro.

R.: letra e

7) Considere o seguinte arranjo entre amigos:

Se Lucia almoça no restaurante, José almoça em casa. Se José almoça em casa, Carla almoça no restaurante. Se Carla almoça no restaurante, João almoça em casa. Dessa maneira, se João almoçou no restaurante, podemos afirmar que:

(A) José almoçou em casa.

(B) Carla almoçou no restaurante.

(C) Lucia e Carla almoçaram no restaurante.

(D) Lucia não almoçou no restaurante e Carla almoçou no restaurante.

(E) Lucia não almoçou no restaurante e José não almoçou em casa.

R.: letra e

8) Considere a afirmação P:

P: “A ou B”

Onde A e B, por sua vez, são as seguintes afirmações:

A: “Carlos é dentista”

B: “Se Enio é economista, então Juca é arquiteto”.

Ora, sabe-se que a afirmação P é falsa. Logo:

a) Carlos não é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto;

b) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto;
c) Carlos não é dentista; Enio é economista; Juca é arquiteto;
d) Carlos é dentista; Enio não é economista; Juca não é arquiteto;
e) Carlos é dentista; Enio é economista; Juca não é arquiteto.
R.: letra b

Equivalência e Negação de Proposições

- Duas sentenças são *logicamente equivalentes* se têm os mesmos valores lógicos V/F para todos os casos, ou seja, elas têm as mesmas tabelas verdade.
- Duas sentenças são *logicamente contraditórias* se têm valores lógicos V/F contrários para todos os casos, ou seja, elas têm as tabelas verdade contrárias em toda sua extensão.

	EQUIVALÊNCIA	**NEGAÇÃO**
$p \wedge q$	$q \wedge p$	$\sim p \vee \sim q$
$p \vee q$	**1)** $\sim p \rightarrow q$ **2)** $\sim q \rightarrow p$	$\sim p \wedge \sim q$
$p \rightarrow q$	**1)** $\sim q \rightarrow \sim p$ **2)** $\sim p \vee q$	$p \wedge \sim q$
$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q \;\wedge\; q \rightarrow p$	$p \wedge \sim q \;\vee\; q \wedge \sim p$

Exercícios

1) Demonstrar por tabelas verdade as seguintes equivalências:

a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

c) $p \leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

d) $q \leftrightarrow p \vee q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

e) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$

f) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

2) Assinale a alternativa que apresenta a negação da proposição: **“Mauro gosta de rock ou João gosta de samba”.**
(A) Mauro gosta de rock ou João não gosta de rock.
(B) Mauro gosta de rock se João não gosta de samba.
(C) Mauro não gosta de rock ou João não gosta de samba.
(D) Mauro não gosta de rock se, e somente se João não gosta de samba.
(E) Mauro não gosta de rock e João não gosta de samba.
R.: letra e

3) Qual das sentenças abaixo pode ser uma negação da proposição: **“Se corro, então fico cansado”**?
a) Não corro ou não fico cansado.
b) Corro e não fico cansado.
c) Não corro, e fico cansado.
d) Não fico cansado, se corro.
e) Não corro e fico cansado.
R.: letra b

4) Verdadeiro ou falso:
A negação de $\sim p \rightarrow q$ **é** $\sim p \wedge \sim q$.
R.: Verdadeiro

Tautologia e Contradição

Uma fórmula que assume **sempre o valor lógico V** é denominada uma ***tautologia***. Uma tautologia é intrinsecamente verdadeira pela sua própria estrutura, ou seja, é verdadeira independentemente dos valores lógicos atribuídos as suas letras sentenciais.

Por outro lado, uma fórmula que assume **sempre o valor lógico F** é denominada uma ***contradição***. Uma contradição é intrinsecamente falsa pela sua própria estrutura, ou seja, é falsa independentemente dos valores lógicos atribuídos as suas letras sentenciais.

Caso uma fórmula não verifique nenhuma condição acima então é dita ***contingência***.

Exercícios

1) Determinar quais das seguintes proposições são ***tautológicas***, ***contra válidas*** ou ***contingentes***.

a) $p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

b) $p \rightarrow (q \rightarrow (q \rightarrow p))$

c) $\sim p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$

d) $((p \rightarrow q) \leftrightarrow q) \rightarrow p$

e) $p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$

f) $\sim p \vee \sim q \rightarrow (p \rightarrow q)$

g) $p \rightarrow (p \vee q) \vee r$

h) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q \vee r)$

2) A frase **"Se João é alto então João é alto ou Guilherme é gordo"** é uma tautologia, contradição ou contingência?

Quantificadores – Lógica de Predicados

Quantificadores são frases do tipo ***para todo***, ***para cada*** ou ***para algum***, isto é, frases que dizem "quantos objetos" apresentam determinada propriedade.

Quantificador Universal: é simbolizado por $\forall$ e lê-se *para todo*, *para qualquer* ou *para cada*.

Ex.:

"Para todo x, x > 0"

Assim, a sentença acima pode ser simbolizada por:

$$(\forall x)(x > 0)$$

O valor lógico da expressão $(\forall x)(x > 0)$ depende do domínio dos objetos sobre os quais estamos nos referindo, que chamamos de ***conjunto universo***. Qual seria o valor lógico da expressão $(\forall x)P(x)$ em cada uma das seguintes interpretações?

- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todos os botões de ouro.
- P(x) é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todas as flores.
- P(x) é a propriedade que x é positivo ou negativo e o conjunto universo é conjunto de todos os inteiros.

Quantificador Existencial: é simbolizado por $ e lê-se *existe*, *existe algum*, *para pelo menos um*, *para algum*. Assim, a expressão

$$(\exists x)(x > 0)$$

pode ser lida como "existe um x tal que x é maior do que zero".

A expressão $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$ é lida como "para todo x existe um y tal que Q(x, y)".

Considerando que o conjunto universo é conjuntos dos números inteiros e que Q(x, y) é a propriedade x < y, a expressão diz que para todo inteiro x existe um inteiro maior. Esta expressão é verdadeira. Entretanto, se invertermos a ordem dos quantificadores escrevendo $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$, a mesma interpretação diz que existe um inteiro y que é maior que qualquer outro inteiro x. Neste caso, o valor lógico da expressão é falso. Isto ressalta o fato de que a ordem dos quantificadores é importante!

Exercícios

1) No domínio de todos os pinguins, seja D(x) o predicado **"x é perigoso"**. Traduza as seguintes sentenças quantificadas para o português cotidiano:

a) $(\forall x)D(x)$

b) $(\exists x)D(x)$

c) $\neg(\exists x)D(x)$

d) $(\exists x)\neg D(x)$

2) No domínio de todos os filmes, seja V(x) o predicado **"x é violento"**. Escreva as sentenças seguintes usando os símbolos de lógica de predicados:

a) alguns filmes são violentos.
b) Alguns filmes não são violentos.
c) Nenhum filme á violento.
d) Todos os filmes são violentos.

3) No domínio de todos os livros, considere os predicados seguintes:

H(x) = x é pesado
C(x) = x é confuso

Traduza as sentenças seguintes de lógica de predicados para o português cotidiano:

a) $(\forall x)(H(x) \to C(x))$

b) $(\exists x)(C(x) \wedge H(x))$

c) $(\forall x)(C(x) \vee H(x))$

d) $(\exists x)(H(x) \wedge \sim C(x))$

4) Considere os seguintes predicados no domínio de todas as plantas:

P(x) = "x é venenosa"
Q(x) = "Jacinto comeu x"

Traduza as sentenças seguintes para a lógica de predicados:

a) Algumas plantas são venenosas.
b) Jacinto nunca comeu uma planta venenosa.
c) Existem algumas plantas não venenosas que Jacinto nunca comeu.

Negação dos Quantificadores

Proposição	Negação
Todo A é B	Algum A não é B Pelo menos um A não é B Existe A que não é B
Nenhum A é B	Algum A é B Pelo menos um A é B Existe A que é B

Exercícios

1) Dar a negação as seguintes proposições considerando A um conjunto universo:

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$

b) $(\exists x \in A)(x + 3 < 10)$

c) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$

d) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$

e) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$

f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$

2) Sendo R o conjunto dos números reais, dê a negação das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in R)(|x| = x)$

b) $(\exists x \in R)(x^2 = x)$

c) $(\exists x \in R)(|x| = 0)$

d) $(\exists x \in R)(x+2=x)$

e) $(\forall x \in R)(x+1>x)$

f) $(\forall x \in R)(x^2=x)$

3) Qual é a negação da frase **“Todas as pessoas gostam de assistir televisão”**?
(A) Existem pessoas que não gostam de assistir televisão.
(B) Existe apenas uma pessoa que não gosta de assistir televisão.
(C) Existe apenas uma pessoa que gosta de assistir televisão.
(D) Nenhuma pessoa gosta de assistir televisão.
(E) Nenhuma pessoa assiste televisão.
R.: letra a

4) A negação de **“Todas as mesas são para quatro pessoas”** é:
(A) pelo menos uma mesa é para quatro pessoas.
(B) nenhuma mesa é para quatro pessoas.
(C) existem mesas que são para quatro pessoas.
(D) existem mesas que não são para quatro pessoas.
(E) apenas uma mesa não é para quatro pessoas.
R.: letra d

5) Considere a proposição **“não há criança que não ame animais”**. Sua negação é:
a) há crianças que não amam animais.
b) há crianças que amam animais.
c) todas as crianças amam animais.
d) todas as crianças não amam animais.
e) não há criança que ame animais.
R.: letra a

6) Considerando **"todo livro é instrutivo"** uma proposição verdadeira, é correto inferir que
(A) "nenhum livro é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira.
(B) "algum livro não é instrutivo" é uma proposição verdadeira ou falsa.
(C) "algum livro é instrutivo" é uma proposição verdadeira ou falsa.
(D) "algum livro é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira.
(E) "algum livro não é instrutivo" é uma proposição necessariamente verdadeira.
R.: letra d

7) Se não é verdade que todos os cariocas sejam flamenguistas, é correto concluir que:
a) o conjunto dos cariocas contém o conjunto dos flamenguistas.
b) o conjunto dos flamenguistas contém o conjunto dos cariocas.
c) todos os flamenguistas são cariocas.
d) algum carioca não é flamenguista.
e) nenhum carioca é flamenguista.
R.: letra d

8) Sabe-se que existem pessoas desonestas e que existem corruptos. Admitindo-se verdadeira a frase **“Todos os corruptos são desonestos”**, é correto concluir que:
a) quem não é corrupto é honesto;
b) existem corruptos honestos;
c) alguns honestos podem ser corruptos;
d) existem mais corruptos do que desonestos;
e) existem desonestos que são corruptos.
R.: letra e

9) Ao contrário dos políticos, não mais existem jogadores honestos. Se, em uma cidade, esta afirmação é verdadeira, podemos então afirmar que nesta cidade:
a) todos os políticos são honestos;
b) nenhum político é jogador;
c) algum jogador é político;
d) existe político honesto.
R.: letra d

10) Assinale a alternativa que apresenta a negação de: **“Todos os gatos gostam de brincar”.**
(A) Existem gatos que não gostam de brincar.
(B) Apenas um gato gosta de brincar.
(C) Pelo menos um gato gosta de brincar.
(D) Nenhum gato gosta de brincar.
(E) Nenhuma das alternativas anteriores.
R.: letra a

* * * * *