SEMINARUL 11

Transformări geometrice în plan (I)

Problema 11.1. Se consideră, în spaţiul $\mathbb{R}^3$, două sisteme de coordonate, $\mathcal{S} = \{O, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}\}$ şi $\mathcal{S}' = \{O, \{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}\}$, cu aceeaşi origine, astfel încât vectorii celor două baze sunt legaţi prin relaţiile:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Determinaţi matricea de schimbare a bazei şi determinaţi coordonatele (x, y, z) ale unui punct M faţă se sistemul de coordonate $\mathcal{S}$ şi coordonatele (x', y', z') ale aceluiaşi punct în sistemul de coordonate $\mathcal{S}'$, şi, invers, coordonatele (x', y', z') în funcţie de coordonatele (x, y, z).

Problema 11.2. Considerăm, în spaţiu, tetraedrul $ABCD$, unde vârfurile au, relativ la reperul afin $\mathcal{S} = \{O, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}\}$, coordonatele $A(3,3,4), B(1,7,0), C(4,5,0)$ şi $D(2,2,0)$. Determinaţi coordonatele mijlocului M al medianei care pleacă din vârful A al feţei ABC, atât în sistemul de coordonate original, cât şi în sistemul de coordonate $\mathcal{S}' = \left\{D, \left\{\mathbf{e}_1 \equiv \overrightarrow{DC}, \mathbf{e}_2 \equiv \overrightarrow{DA}, \mathbf{e}_3 \equiv \overrightarrow{DB}\right\}\right\}$. Determinaţi matricea extinsă a schimbării de coordonate.

Problema 11.3. Ce devine relaţia dintre coordonatele (x, y) ale punctelor M,

$$x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0,$$

relativ la sistemul de coordonate care se obţine printro rotaţie a axelor Ox şi Oy, care sunt aduse cu originea în punctul $I(-2, -3)$ şi apoi rotite în sens invers acelor de casornic cu un unghi de $45°$?

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$.

Problema 11.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi $30°$ în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.5. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $\mathbf{v}(2,-1)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.6. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2,1)$, relativ la punctul $Q(2,2)$., urmată de o rotaţie de unghi $60°$, relativ la acelaşi punct. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi -45° în jurul vârfului A, urmată de o scalare de factori $(2,1)$ relativ la vârful C. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.8. Se consideră pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$. Demonstraţi că patrulaterul $A'B.C'D'$, cu $A'(1,-2), B'(2,-3), C'(3,-2), D'(2,-1)$ este, de asemenea, un pătrat şi indicaţi o secvenţă de transformări geometrice care transformă primul pătrat în cel de-al doilea.

Indicaţie. Aplicaţi întâi o translaţie care să ducă centrul primului pătrat în centrul celui de-al doilea, apoi o scalare uniformă relativ la centrul celui de-al doilea pătrat, urmată de o rotaţi în jurul aceluiaşi centru. □

Problema 11.9. Se consideră pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$. Demonstraţi că patrulaterul $A'B.C'D'$, cu $A'\left(3-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right), B'\left(3+\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C'\left(3+\dfrac{\sqrt{2}}{2},-1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right), D'\left(3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un dreptunghi şi indicaţi o secvenţă de transformări geometrice care transformă pătratul în dreptunghi.

Indicaţie. Se utilizează acelaşi procedeu ca mai sus, dar scalarea este neuniformă. □

Important!

- La fiecare problemă de transformări reprezentaţi, pe acelaşi sistem de axe, figura iniţială şi cea finală.
- Pentru desene, utilizaţi Geogebra!
- La problemele de transformări, trebuie să găsiţi matricea de transformare. Dacă sunt mai multe transformări care se compun, matricea transformării este produsul matricilor transformărilor elementare. Întotdeauna, matricea ultimei transformări elementare care se execută se aşează cel mai în stânga (cu alte cuvinte, ordinea matricior este inversă ordinii aplicării transformărilor).