Lab 12

Monday, May 16, 2022 2:58 PM

Ecuații neliniare: $f(x)=0 \Rightarrow x=?$ rădăcină pt. f

(în Octave: • fzero → ec. nelin.
• fsolve → sist. ec. nelin.)

Met. bisecției: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont.

și $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists\, x\in(a,b)$ a.î. $f(x)=0$.

Met. poziției false: $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$

$$d: \frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$Ox: y=0$

$$Ox\cap d=\{C(c,0)\} \Rightarrow \frac{c-a}{b-a}=\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c=\frac{a f(b)-b f(a)}{f(b)-f(a)}}$$

Met. secantei: x_{n-1}, x_n obț.

$$\boxed{x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}}$$

Met. Newton $X_n(x_n, f(x_n))\in d$,

d este tg. la G_f în X_n

$\Rightarrow$ panta dr. d este $f'(x_n)$

$$d: y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

$Ox: y=0$

$$Ox\cap d=\{X_{n+1}(x_{n+1},0)\}$$

$$0-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Obs.: $f\in C^2(I)$ și f'' nu se anulează pe I

(f este fie convexă, fie concavă).

At.: $\forall x_0\in I$ cu $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ este

[illegible] pt. Newton

At.: $\forall x_0 \in I$ cu $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$ este un pct. bun de pornire pt. Newton.

<u>Met. aprox. succesive</u> (ec. nelin. $\varphi(x) = x$)

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in I, \quad \varphi: I \to I$$

Dacă $x_{n+1} = \varphi(x_n) \to \alpha = \varphi(\alpha)$, $n \to \infty$, $\varphi \in C^p(I)$,

$\varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = \dots = \varphi^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $\varphi^{(p)}(\alpha) \neq 0$,

atunci
- ordin de convergență este p.
- eroare asimptotică este $\dfrac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

Ex.: <u>Met. Newton</u> ($f(x) = 0$)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \to \alpha, \quad f(\alpha) = 0, \; f'(\alpha) \neq 0$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}; \quad \varphi(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = f(x)\cdot \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$x = \alpha \xRightarrow{f(\alpha)=0} \varphi'(\alpha) = 0$$

$$\varphi''(x) = f'(x)\cdot \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} + f(x)\cdot \left(\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}\right)'$$

$$x = \alpha \xRightarrow{f(\alpha)=0} \varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Dacă $\varphi''(\alpha) \neq 0$ ($\Leftrightarrow f''(\alpha) \neq 0$), at.:
- ord. conv.: 2
- er. as.: $\dfrac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$.

Dacă $\varphi''(\alpha) = 0$, at. $\varphi'''(x) = \dots$

<u>Pb.</u>: Aprox. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ ($a > 0$) fără a fol. „/" (e defect),

Pb.: Aprox. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a>0)$ fără a fol. "/" (e defect), ci fol. doar "+", "−", "*".

Sol.: $f(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

$f(x)=\frac{1}{x^2}-a$, $x>0$ $\Rightarrow f(x)=0$ $\qquad f'(x)=-\frac{2}{x^3}$, $x>0$

Met. Newton: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$=x_n-\frac{\frac{1}{x_n^2}-a}{-\frac{2}{x_n^3}}$$

$$=\frac{3}{2}x_n-\frac{1}{2}a\,x_n^3$$

$$\boxed{x_{n+1}=1.5\cdot x_n-0.5\cdot a\cdot x_n^3}$$

$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$; $f(x_0)\cdot\underbrace{f''(x_0)}_{>0}>0 \Leftrightarrow f(x_0)>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0^2}-a>0$

$\Leftrightarrow x_0\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$.