Buboi Oana-Andreea

212

# Temă de seminar

## Seminarul 11

### 11.7

Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi $-45°$ în jurul vârfului A, urmată de o scalare de factori $(2,1)$ relativ la vârful C. Aplicați apoi tranformările în ordine inversă.

Triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$.

Matricea de rotație se scrie, în forma generală, ca

$$Rot(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

În cazul nostru avem

$$Rot(1,1,-45°)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Pe de altă parte, matricea unei scalări neuniforme, de factori de scală $(s_x, s_y)$, relativ la punctul $Q(q_1, q_2)$ este

$$Scale(Q, s_x, s_y)=\begin{bmatrix}s_x & 0 & (1-s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

adică, în cazul nostru,

$$Scale(2,3,2,1)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor triunghiului dat este

$$[ABC]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dacă aplicăm mai întâi rotația, urmată de scalare, obținem matricea de transformare

$$T_1 = Scale(2,3,2,1)\cdot Rot(1,1,-45^\circ)=$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imaginea triunghiului prin această transformare este triunghiul $A_1B_1C_1$, cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_1B_1C_1]=T_1\cdot[ABC]=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 1 & \frac{2-3\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prin urmare, vârfurile triunghiului transformat vor fi $A_1(0,1)$, $B_1\left(3\sqrt{2}, \frac{2-3\sqrt{2}}{2}\right)$, $C_1\left(3\sqrt{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Dacă acum aplicăm transformările în ordine inversă, matricea transformării compuse va fi

$$T_2 = Rot(1,1,-45^\circ) \cdot Scale(2,3,2,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imaginea triunghiului prin această transformare este triunghiul $A_2B_2C_2$, cu matricea coordonatelor omogene ale vârfurilor sale dată de

$$[A_2 B_2 C_2] = T_2 \cdot [ABC] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1-2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1+\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{2+5\sqrt{2}}{2} & \frac{2+3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} & \frac{2-5\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci vârfurile acestui triunghi sunt $A_2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{2+5\sqrt{2}}{2}, \frac{2-5\sqrt{2}}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{2+3\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.