9.4. Să se scrie ecuația planelor tangente la

a) paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z$ paralele cu planul $x-3+2z-1=0$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z \;/\cdot 2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{5}{2}} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 2z \Rightarrow p = \frac{5}{2}$$

Fie Δ planul căutat $\qquad q = \frac{3}{2}$

Ecuația planului tangent, obținută prin dedublare

$$\frac{x \cdot x_0}{p} + \frac{y y_0}{q} = z + z_0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot x_0}{\frac{5}{2}} + \frac{y y_0}{\frac{3}{2}} = z + z_0 \qquad \begin{aligned} x^2 &= x x_0 \\ y^2 &= y y_0 \\ x &= \tfrac{1}{2}(z+z_0) \end{aligned}$$

unde $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct al paraboloidului eliptic

$$\frac{x \cdot x_0}{\frac{5}{2}} + \frac{y y_0}{\frac{3}{2}} = z + z_0 \Leftrightarrow \Delta: 6 x x_0 + 10 y y_0 - 15 z - 15 z_0 = 0$$

planul este paralel cu $\Delta_2: x - 3y + 2z - 1 = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ vectorii lor normali sunt paraleli $\Leftrightarrow \frac{6x_0}{1} = \frac{10y_0}{-3} = \frac{-15}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x_0 = \frac{-15}{2} \\ 20 y_0 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{-5}{4} \\ y_0 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$M(x_0, y_0, z_0) \in$ paraboloidului eliptic

$$\Rightarrow \left(\frac{-5}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = 2z_0 \Rightarrow \frac{25}{16} \cdot \frac{2}{5} + \frac{81}{16} \cdot \frac{2}{3} = 2z_0$$

$$\Rightarrow \frac{32}{8} = 2z_0 \Rightarrow z_0 = 2 \Rightarrow M\left(-\frac{5}{4}, \frac{9}{4}, 2\right)$$

Înlocuim în ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot \left(\frac{-5}{4}\right) \cdot x}{5} + \frac{2 \cdot \frac{9}{4} \cdot y}{3} = z + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - z - 2 = 0$$

b) paraboloidul hiperbolic $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$, paralel cu $x - 3y + 2z - 1 = 0$

$x^2 - \frac{y^2}{4} = z \,/\cdot 2 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{2} = 2z \Rightarrow p = \frac{1}{2} \quad q = 2$

fie Δ planul căutat

Ecuația planului tangent $\frac{x \cdot x_0}{p} - \frac{y \cdot y_0}{q} = z + z_0$ $\Rightarrow$

fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in$ paraboloidului heperbolic

$\Rightarrow \Delta : \frac{x \cdot x_0}{\frac{1}{2}} - \frac{y \cdot y_0}{2} = z + z_0 \Leftrightarrow 4x \cdot x_0 - y y_0 - 2z - 2z_0 = 0$

$\Delta \parallel$ cu planul $x - 3y + 2z - 1 = 0$ al cărui vector normal este $\vec{n}(1, -3, 2)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4x_0}{1} = \frac{-y_0}{-3} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 = -1 \\ \frac{y_0}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{4} \\ y_0 = -3 \end{cases}$

$M(-\frac{1}{4}, -3, z_0) \in$ paraboloidului hiperbolic $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{16} - \frac{9}{4} = z_0 \Rightarrow 16z_0 = 1 - 36 \Rightarrow z_0 = \frac{-35}{16}$

Înlocuim în ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \frac{-1}{4} x - y \cdot (-3) \cdot \frac{1}{2} = z - \frac{35}{16}$

$\Rightarrow -8x + 24y - 16z - 35 = 0$