Probleme recapitulative PS (pentru examenul scris) - soluţii

Pentru determinarea cuantilelor din problemele de statistică se foloseşte programul Octave!

1. Se consideră vectorul aleator discret (U, V) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$U \backslash V$	-1	1	b
1	0,25	0,05	a
3	0,3	a	0,1

a) Să se determine constantele reale a şi b, ştiind că $E(V) = 0{,}15$.
b) Sunt variabilele aleatoare U şi V independente?
c) Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare $(U-3)^2$.

2. a) Fie X variabila aleatoare care indică de câte ori a apărut numărul 1 la 3 aruncări ale unui zar. Să se calculeze $E(X)$. b) Dacă se aruncă de 432 ori trei zaruri, de câte ori apare *în medie* tripletul (1,1,1)?
3. Timpul de reacţie (în secunde) al unui proces chimic este o variabilă aleatoare, notată cu X, care are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3a^3}{x^4}, & x > a \\ 0, & x \leq a \end{cases} \quad \text{unde } a > 0 \text{ este parametru necunoscut.}$$

Să se calculeze $P(X \leq 2a)$ şi $E(X)$ în funcţie de a.

4. Fie variabilele aleatoare X, Y, care iau valori binare (0 şi 1), astfel încât $P(X = 1) = 0.4$, iar valoarea variabilei aleatoare Y depinde doar de valoarea variabilei aleatoare X, astfel: $P(Y = 1|X = 1) = 0.2$; $P(Y = 0|X = 0) = 0.3$. Determinaţi: a) $P(X = Y)$; b) $E(Y)$; c) $E(X \cdot Y)$; d) valoarea medie a numărului (aleator) binar $YX_{(2)}$ trecut în baza 10.

5. Fie X v.a. care indică timpul de restartare al unui anumit sistem şi are funcţia de densitate $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_X(t) = \begin{cases} c\,(3-t)^2, & 0 < t < 3 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

a) Determinaţi valoarea constantei c.

b) Determinaţi funcţia de repartiţie F_X.

c) Determinaţi $P(1 < X < 2)$ şi $P(X < 2|X > 1)$.

6. Într-o urnă sunt 4 bile verzi, 5 bile albastre, 6 bile roşii. Se extrag fără returnare 3 bile. Care este probabilitatea ca la extragerea a doua să se obţină o bilă verde şi la extragerea a treia o bilă roşie?

7. 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt aşezate orizontal în mod aleator. Determinaţi:
a) probabilitatea ca prima şi ultima bilă să aibe numere pare;
b) probabilitatea ca primele două bile să aibe numere impare;
c) probabilitatea ca bilele cu numere pare să fie alăturate;
d) probabilitatea să nu fie două bile cu numere de aceaşi paritate alăturate.

8. Un cod de 5 cifre este generat aleator. Care este probabilitatea ca
a) toate cifrele să fie distincte?
b) să conţină doar cifre pare distincte?
c) trei cifre să fie egale şi celelalte două cifre să fie egale (de exemplu: 12121, 35355, 44477, etc.)?
d) să conţină doar cele trei cifre 1, 2, 3 (de exemplu: 12131, 22113, 31312, etc.)?

9. Se dau două urne. Prima urnă conţine 2 bile negre şi 3 bile roşii. A doua urnă conţine 3 bile negre şi 2 bile roşii. Se aruncă un zar. Dacă se obţine un număr par, atunci se extrag două bile din prima urnă, cu repunerea bilei extrase în urnă. Dacă se obţine un număr impar, atunci se extrag două bile din a doua urnă, fără repunerea bilei extrase în urnă. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de bile roşii extrase. Determinaţi:
a) distribuţia lui X;
b) valoarea medie lui X;
c) funcţia de repartiţie a lui X;

d) valoarea medie a numărului de repetiţii independente ale experimentului descris mai sus până la prima repetiţie a experimentului în urma căreia se obţin două bile roşii.

10. Icsulescu face naveta cu microbusul. El ajunge în fiecare zi în autogară la ora 16:30 cu o întârziere T (în minute) care are funcţia de repartiţie $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t}{10}, & t \in [0, 10] \\ 1, & t > 10 \end{cases}$. Microbusul porneşte la ora 16:39. Determinaţi:
a) probabilitatea ca Icsulescu să piardă microbusul;
b) valoarea medie a întârzierii lui Icsulescu;
c) probabilitatea ca în 5 zile (cu întârzieri independente) Icsulescu să piardă microbuzul în cel puţin două zile.
d) Fie Y numărul de zile succesive (cu întârzieri independente) când Icsulescu prinde microbusul până la prima zi când pierde microbusul. Ce distribuţie are Y?

11. Se alege uniform aleator un punct în dreptunghiul $[1, 2] \times [2, 4] \subset \mathbb{R}^2$. Să se calculeze:
a) probabilitatea ca punctul să fie în dreptunghiul $\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right] \times \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$;
b) valoarea medie a pătratului distanţei de la punctul ales la origine.
Fie (X, Y) coordonatele punctului ales. Atunci (X, Y) are distribuţia uniformă pe dreptunghiul $[1, 2] \times [2, 4]$, adică are funcţia de densitate: $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(2-1)(4-2)}, & (x, y) \in [1, 2] \times [2, 4] \\ 0, & (x, y) \notin [1, 2] \times [2, 4] \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in [1, 2] \times [2, 4] \\ 0, & (x, y) \notin [1, 2] \times [2, 4] \end{cases}.$$

12. Fie $N \sim Unid(5)$. Se generează apoi un cod binar cu N cifre, în care probabilitatea de apariţie a lui 0, respectiv 1, este egală cu 0,5 (de exemplu: $N = 2, X = 01; N = 3, X = 010; N = 1, X = 1$). Să se calculeze:
a) $P(X = 1011|N = 4)$;
b) probabilitatea ca suma S, a cifrelor lui X, să fie egală cu 3.

13. Departamentul de resurse umane al unei companii mari suspectează că angajaţii iau în medie pauza de prânz (care cf. contractului durează maxim 1 oră) mult mai lungă. Pe baza unui eşantion format din 36 de angajaţi s-a obţinut o medie de 70 minute şi o abatere standard de 15 minute pentru durata pauzei. Formulaţi ipoteza nulă şi ipoteza alternativă şi testaţi cu un nivelul de semnificaţie de 5% dacă în medie durata pauzei este respectată sau este depăşită. Construiţi un interval de încredere bilateral pentru abaterea standard a duratei pauzei de prânz. Se presupune că durata pauzei este o variabilă aleatoare normal distribuită.

14. Fie $x_1, \ldots, x_{10} \in (0, 1)$ date statistice pentru caracteristica X, a cărei funcţie de densitate este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x^{2\theta-1}, \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 0, \text{dacă } x \notin (0, 1] \end{cases},$$

unde $\theta > 0$ este parametru necunoscut. Să se estimeze θ cu ajutorul a) metodei verosimilităţii maxime; b) metodei momentelor.

15. Fie X_1,...,X_n, ... variabile aleatoare independente, care au aceeaşi distribuţie

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 1) = 0.5 \text{ pentru fiecare } i \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $Y_i = \max\{X_i, X_{i+1}\}$ pentru $1 \leq i \leq n - 1$.
(a) Să se determine distribuţia de probabilitate pentru Y_i, $1 \leq i \leq n - 1$.
(b) Să se calculeze valoarea medie şi varianţa pentru Y_i, $1 \leq i \leq n - 1$.
(c) Fie $Z_n = \frac{1}{n}(X_1^3 + X_2^3 + ... + X_n^3)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Spre ce valoare converge aproape sigur şirul $(Z_n)_n$?

16. Timpul de servire a unui client la un anumit ghişeu la o bancă durează în medie 10 minute şi poate fi descrisă de o variabilă aleatoare exponenţială.

(a) Cu ce probabilitate servirea unui client durează cel mult un sfert de oră?

(b) În medie cât ar trebui să dureze timpul de servire a unui client, dacă probabilitatea ca timpul de servire a unui client să fie mai mare decât un sfert de oră este egală cu 0.1?

Indicaţie: Funcţia de densitate a distribuţiei exponenţiale $X \sim Exp(\lambda)$ este

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

17. Se studiază caracteristica: timpul de producţie a unui anumit produs. Această caracteristică se presupune a fi normal distribuită şi s-a realizat un eşantion cu 25 de valori (în minute). Pe baza acestora s-a obţinut o valoare medie de 8.1 minute şi o abatere standard de 1.6 minute. Cu un nivel de semnificaţie $\alpha = 0.05$, testaţi dacă se poate afirma: a) abaterea standard a timpului de prelucrare este 1.5 minute ; b) media timpului de prelucrare este 7.8 minute.