# Seminarul 4

**1.** Produsele realizate printr-o tehnologie nouă se testează cu ajutorul a trei teste independente $T_1, T_2, T_3$. Fiecare dintre cele trei teste găseşte o posibilă defecţiune cu probabilitatea: 0,8 testul $T_1$, 0,7 testul $T_2$, 0,6 testul $T_3$. Care este probabilitatea ca pentru un produs ales aleator:
a) toate cele trei teste să detecteze o defecţiune?
b) cel puţin un test să detecteze o defecţiune?
c) exact două teste să detecteze o defecţiune?
R: $T_i$: "Testul $i$ detectează o defecţiune", $i \in \{1,2,3\} \Rightarrow P(T_1) = 0{,}8,\ P(T_2) = 0{,}7,\ P(T_3) = 0{,}6$.
a) $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3) = P(T_1)P(T_2)P(T_3) = 0{,}336$.
b) $P$("cel puţin un test să detecteze o defecţiune")$= 1 - P$("niciun test nu găseşte o defecţiune") $= 1 - P(\bar{T}_1 \cap \bar{T}_2 \cap \bar{T}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}976$.
c) $P\left((T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) \cup (T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) \cup (\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3)\right) = P(T_1 \cap T_2 \cap \bar{T}_3) + P(T_1 \cap \bar{T}_2 \cap T_3) + P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}224 + 0{,}144 + 0{,}084 = 0{,}452$.

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \le n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \le n_1$ şi $n - k \le n_2$; considerând o urnă care are iniţial $n_1$ bile albe şi $n_2$ bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albedin } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\phantom{=} \text{ în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

**2.** Dintr-un set de 52 de cărţi de joc se extrag aleator, pe rând, fără returnare, 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) $A$: nu s-a extras nicio treflă;
b) $B$: s-au obţinut 5 inimi;
c) $C$: s-a obţinut cel mult un as.
R: $P(A) = \dfrac{C_{39}^{13} \cdot C_{13}^0}{C_{52}^{13}}$; $P(B) = \dfrac{C_{13}^5 \cdot C_{39}^8}{C_{52}^{13}}$;
$P(C) = P(\text{nu s-a extras niciun as}) + P(\text{s-a extras exact un as}) = \dfrac{C_{48}^{13} \cdot C_4^0}{C_{52}^{13}} + \dfrac{C_{48}^{12} \cdot C_4^1}{C_{52}^{13}}$.

• **Modelul urnei cu $r$ culori şi bilă nereturnată:** fie $n_i$ =numărul iniţial de bile cu culoarea $i$ din urnă, $i = \overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ &\phantom{=} \text{ din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\phantom{=} \text{ în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^n}. \end{aligned}$$

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

**3.** O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?
R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

**4.** Un sistem electronic are 80 de componente care funcţionează independent unele de altele. Fiecare componentă funcţionează cu probabilitatea 0,75. Fie $X$ variabila aleatoare care indică numărul de componente funcţionale ale sistemului. Determinaţi distribuţia lui $X$ şi apoi calculaţi valoarea sa medie.

R: $X = X_1 + \cdots + X_{80} \sim \text{Bino}(80, 0{,}75)$, $X_i \sim \text{Bernoulli}(0{,}75)$ indică funcţionarea componentei $i$, $i = \overline{1, 80}$. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = 80 \cdot \frac{3}{4} = 60$.

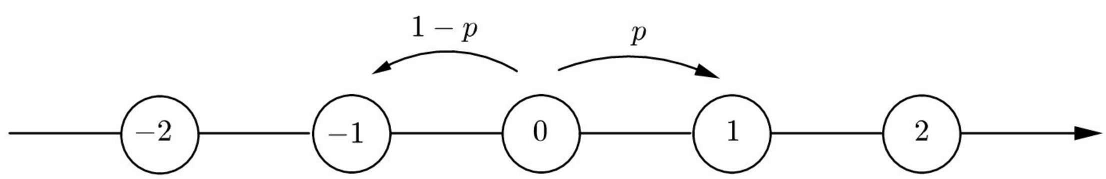
**5.** Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepţionat este 10%. Dacă mesajul nu este recepţionat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie $X$ variabila aleatoare care indică numărul de transmisii până la prima transmisie în care este recepţionat mesajul. Determinaţi valoarea medie a lui $X$.

R: Observăm că $X \sim \text{Geo}(p)$, $p = \frac{1}{10}$. Pe baza criteriului raportului, seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k$ este convergentă.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&\overset{k=j+1}{=\!=} (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)p(1-p)^j = (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j + (1-p)\sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j \\
&= (1-p)E(X) + (1-p) \implies E(X) = \frac{1-p}{p}
\end{aligned}
$$

$\implies E(X) = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{1}{10}} = 9$, deci vor fi în medie 9 transmisii eşuate până la recepţionarea mesajului.

**4.** Un punct material se deplasează pe axa reală dintr-un nod spre un nod vecin, la fiecare pas, cu probabilitatea $p \in (0, 1)$ la dreapta şi cu probabilitea $1 - p$ la stânga. Nodurile sunt centrate în numerele întregi:




Fie $X$ variabila aleatoare care indică poziţia finală a punctului material după $n \in \mathbb{N}$ paşi ai unei deplasări ce porneşte din nodul 0. Determinaţi distribuţia şi valoarea medie lui $X$.

R: Dacă $Y_i$ reprezintă pasul $i$, atunci $Y_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \implies Y_i = 2X_i - 1$ cu $X_i \sim Bernoulli(p)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. $X = Y_1 + \ldots + Y_n = (2X_1 - 1) + \ldots + (2X_n - 1)$, $X_1 + \ldots + X_n \sim Bino(n, p) \implies X \sim \begin{pmatrix} 2k - n \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$ şi $E(X) = 2np - n$.

**5.** Considerăm vectorul aleatoar discret $(X, Y)$ cu distribuţia dată sub formă tabelară:

| $X$ \ $Y$ | $-2$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,1 | 0,3 |

a) Să se determine distribuţiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $X$ şi $Y$.
b) Calculaţi probabilitatea ca $|X - Y| = 1$, ştiind că $Y > 0$.

c) Sunt evenimentele $X = 2$ şi $Y = 1$ independente?
d) Sunt variabilele aleatoare $X$ şi $Y$ independente?
e) Sunt evenimentele $X = 1$ şi $Y = 1$ condiţional independente, cunoscând $X + Y = 2$?
f) Este variabila aleatoare $X$ condiţional independentă de $Y$, cunoscând $X + Y$?
g) Calculaţi valoarea medie a variabilei aleatoare $2X + Y^2$.

R: a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.
b) $P(|X - Y| = 1 \big| Y > 0) = \frac{P(|X-Y|=1, Y>0)}{P(Y>0)} = \frac{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}{P(Y>0)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$.
c) $P(X = 2, Y = 1) = 0{,}1 = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = P(X = 2) \cdot P(Y = 1) \implies X = 2$ şi $Y = 1$ sunt independente.
d) $P(X = 2, Y = 2) = 0{,}3 \neq 0{,}25 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = P(X = 2) \cdot P(Y = 2) \implies X$ şi $Y$ nu sunt independente.
e) $P(X = 1, Y = 1|X + Y = 2) = 1 = P(X = 1|X + Y = 2) \cdot P(Y = 1|X + Y = 2) \implies X = 1$ şi $Y = 1$ sunt condiţional independente, cunoscând $X + Y = 2$.
f) $P(X = 1, Y = 2|X + Y = 3) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X+Y=3)} = \frac{0{,}2}{0{,}3} \neq \frac{0{,}2}{0{,}3} \cdot \frac{0{,}2}{0{,}3} = P(X = 1|X + Y = 3) \cdot P(Y = 2|X + Y = 3) \implies X$ şi $Y$ nu sunt condiţional independente, cunoscând $X + Y$.
g) $E(2X + Y^2) = 2E(X) + E(Y^2) = 2(1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}5) + (-2)^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}5 = 6{,}4$.

**6.** O monedă este aruncată de 10 ori. Fie $X$ variabila aleatoare care indică diferenţa dintre numărul de capete şi numărul de pajuri obţinute. Determinaţi:
i) distribuţia de probabilitate a lui $X$;
ii) valoarea medie a lui $X$.
R: i) Dacă $C$ şi $P$ indică numărul de capete, respectiv de pajuri, atunci $C, P \sim \text{Bino}(10, \frac{1}{2})$, $P = 10 - C$ şi $X = C - P = 2C - 10 \implies X \sim \begin{pmatrix} 2k - 10 \\ C_{10}^{k} \frac{1}{2^{10}} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,10}}$.
ii) $E(X) = E(C - P) = E(C) - E(P) = 0$, deoarece $C$ şi $P$ au aceeaşi distribuţie.

**7.** Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte $N$ din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".
R: a) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 C_N^1 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^3 C_N^2 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2} \cdot \frac{C_N^3 C_N^1 C_N^1 C_N^0}{C_{4N}^5}$.