Seminarul 4

1. Produsele realizate printr-o tehnologie nouă se testează cu ajutorul a trei teste independente T_1, T_2, T_3. Fiecare dintre cele trei teste găseşte o posibilă defecţiune cu probabilitatea: 0,8 testul T_1, 0,7 testul T_2, 0,6 testul T_3. Care este probabilitatea ca pentru un produs ales aleator:
a) toate cele trei teste să detecteze o defecţiune?
b) cel puţin un test să detecteze o defecţiune?
c) exact două teste să detecteze o defecţiune?

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ şi $n - k \leq n_2$; considerând o urnă care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad\ \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

2. Dintr-un set de 52 de cărţi de joc se extrag aleator, pe rând, fără returnare, 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: nu s-a extras nicio treflă;
b) B: s-au obţinut 5 inimi;
c) C: s-a obţinut cel mult un as.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1,\ldots,k_r;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i=\overline{1,r}, \\ &\quad\ \text{din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad\ \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}. \end{aligned}$$

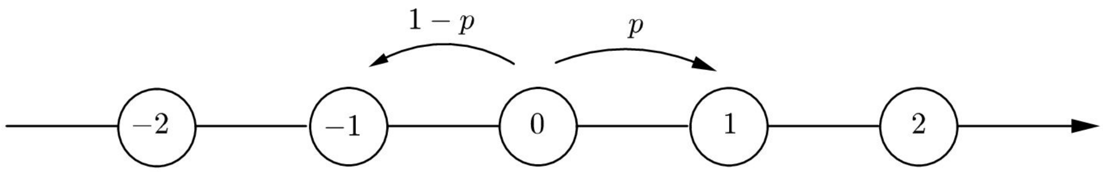
▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

3. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

4. Un sistem electronic are 80 de componente care funcţionează independent unele de altele. Fiecare componentă funcţionează cu probabilitatea 0,75. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente funcţionale ale sistemului. Determinaţi distribuţia lui X şi apoi calculaţi valoarea sa medie.

5. Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepţionat este 10%. Dacă mesajul nu este recepţionat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de transmisii până la prima transmisie în care este recepţionat mesajul. Determinaţi valoarea medie a lui X.

6. Un punct material se deplasează pe axa reală dintr-un nod spre un nod vecin, la fiecare pas, cu probabilitatea $p \in (0,1)$ la dreapta şi cu probabilitea $1 - p$ la stânga. Nodurile sunt centrate în numerele întregi:



Fie X variabila aleatoare care indică poziţia finală a punctului material după $n \in \mathbb{N}$ paşi ai unei deplasări ce porneşte din nodul 0. Determinaţi distribuţia şi valoarea medie lui X.

7. Considerăm vectorul aleatoar discret (X, Y) cu distribuţia dată sub formă tabelară:

$X \backslash Y$	-2	1	2
1	0,2	0,1	0,2
2	0,1	0,1	0,3

a) Să se determine distribuţiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X şi Y.
b) Calculaţi probabilitatea ca $|X - Y| = 1$, ştiind că $Y > 0$.
c) Sunt evenimentele $X = 2$ şi $Y = 1$ independente?
d) Sunt variabilele aleatoare X şi Y independente?
e) Sunt evenimentele $X = 1$ şi $Y = 1$ condiţional independente, cunoscând $X + Y = 2$?
f) Este variabila aleatoare X condiţional independentă de Y, cunoscând $X + Y$?
g) Calculaţi valoarea medie a variabilei aleatoare $2X + Y^2$.

8. O monedă este aruncată de 10 ori. Fie X variabila aleatoare care indică diferenţa dintre numărul de capete şi numărul de pajuri obţinute. Determinaţi:
i) distribuţia de probabilitate a lui X;
ii) valoarea medie a lui X.

9. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".