6.12 Determinați ecuațiile perpendicularei comune a dreptelor

$\Delta_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$ și $\Delta_2: x=-1+3t,\ y=2+2t,\ z=1$

$\Delta_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ $\quad \Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + l_2 t \\ y = y_2 + m_2 t \\ z = z_2 + n_2 t \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2 \text{ necoplanare}$$

$$\begin{vmatrix} -1-2 & 2+1 & 1-0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 3\cdot(0+6+2+2-0+4) = 42 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ necoplanare

Fie $\vec{a}_1$ vectorul de direcție al dreptei Δ_1, $\vec{a}_2$ al dreptei Δ_2

$\vec{a}_1(l_1, m_1, n_1) = \vec{a}_1(3, -2, 2)$ $\qquad \vec{a}_2(l_2, m_2, n_2) = \vec{a}_2(3, 2, 0)$

$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}$ perpendicular pe Δ_1 și $\Delta_2 \Rightarrow \vec{a}$ vector director al perpendicularei comune

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-4, 6, 12)$$

$\beta_1 = -4,\ \beta_2 = 6,\ \beta_3 = 12$

Scriem ecuațiile perpendicularei comune ca intersecție de două plane: π_1 trece prin Δ_1 și $\pi_1 \perp \Delta_2$

π_2 trece prin Δ_2 și $\pi_2 \perp \Delta_1$

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -36x+72-44y-44+10z=0$$

$$\boxed{-36x-44y+10z+28=0}$$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 24x+24-36y+72+26z-26=0$$

$$\boxed{24x-36y+26z+70=0}$$

ecuația perpendicularei comune ca intersecție de două plane: $\begin{cases} -36x-44y+10z+28=0 \\ 24x-36y+26z+70=0 \end{cases}$

$\vec{a}(-4, 6, 12)$

pt. $z=0$: $\begin{cases} -9x-11y+7=0 \\ 12x-18y+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-11y+7}{9} \\ 12\cdot\left(\dfrac{-11y+7}{9}\right)-18y+35=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-11y+7}{9} \\ y=\dfrac{19}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-37}{42} \\ y=\dfrac{19}{14} \end{cases} \Rightarrow P\left(-\dfrac{37}{42}, \dfrac{19}{14}, 0\right) \in \pi_1 \cap \pi_2$

$\Rightarrow P \in \Delta$ (perpendiculara comună)

de direcție $\vec{a}(-4,6,12)$ ce trece prin $P\left(-\frac{37}{42}, \frac{19}{14}, 0\right)$

$$\Delta: \begin{cases} x=-\dfrac{37}{42}-4t \\ y=\dfrac{19}{14}+6t \\ z=12t \end{cases}$$