

Seminar 9

Problema 9.2.13.2: Utilizând metoda tabelor semantice (construind arborele binar), demonstrați distributivitatea cuantificatorului "∀" față de "∧":

$$\vdash (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$$

Rezolvare:

$$U = (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$$

$$\neg U = \neg ((\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)))$$

$$\neg U = \neg (((\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \rightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))) \wedge ((\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x))) - (1)$$

/

\

$\beta(1)$

$$\neg ((\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \rightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))) (2)$$

$\alpha(2)$

$$\neg ((\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)) (3)$$

$\alpha(3)$

$(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x)$ (4)

|

$\neg (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$ (5)

|

$\alpha(4)$

$(\forall x) P(x)$ (6)

|

$(\forall x) Q(x)$ (7)

|

$\delta(5) - a$

constantă nouă

$\neg (P(a) \wedge Q(a))$ (8)

|

|

$\beta(8)$

$(\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$ (9)

|

$\neg ((\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x))$ (10)

|

|

$\beta(10)$

$\neg (\forall x) P(x)$ (11)

$\neg (\forall x) Q(x)$ (12)

|

$\delta(11) - a$

ct. nouă

|

$\delta(12) - a$

ct. nouă

$\neg P(a)$

$\neg Q(a)$

|

$\gamma(9) - a$

ct. exist.

|

$\gamma(9) - a$

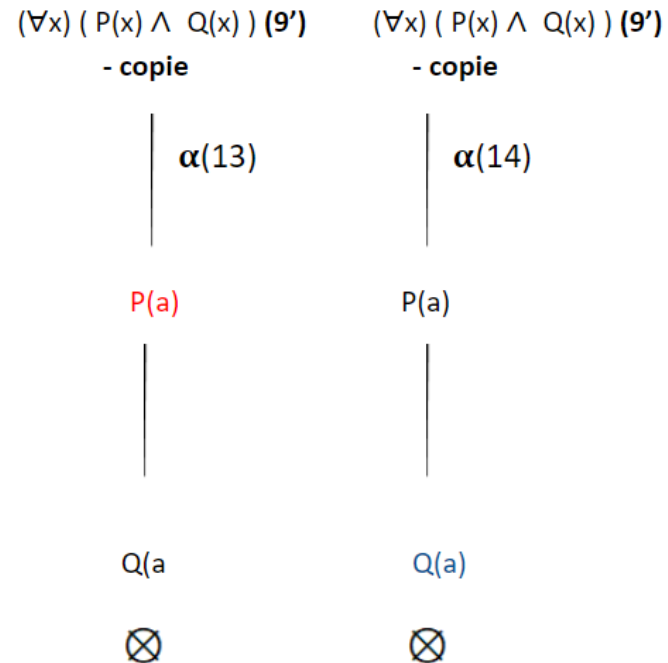
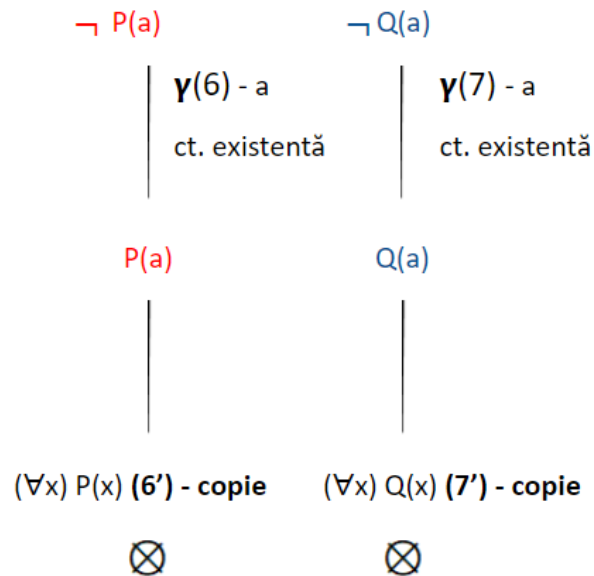
ct. exist.

$(P(a) \wedge Q(a))$ (13)

|

$(P(a) \wedge Q(a))$ (14)

|



Concluzie:

Pornind de la negația ($\neg U$) a formulei inițiale (U), am obținut o tabelă semantică închisă (cu toate ramurile închise). Din TCC rezultă că formula inițială e este tautologie (distributivitatea cuantificatorului " \forall " față de " \wedge ").