Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri $(m, n \in \mathbb{N})$ este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* $(n \in \mathbb{N})$: aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 4 persoane pe o bancă? R: $P_4 = 4!$.
Accesând `https://octave-online.net`, putem calcula:

```
>>asezari=perms([1,2,3,4])
>>size(asezari)
>>factorial(4)
```

4. *Combinări de n luate câte k* $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k)$: alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R: $C_9^7 = C_9^2$.

```
>>echipe=nchoosek(1:9,7)
>>size(echipe,1)
>>nchoosek(9,2)
```

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente este n^k $(k, n \in \mathbb{N}^*)$.
Observaţie: O funcţie poate fi identificată cu k alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcţiile* sunt *aranjamente cu repetiţii*.
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în $4^3 = 64$ moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri $(n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n)$. Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice, $\ldots$, al k-lea grup are n_k obiecte identice $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n)$. Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:$\frac{7!}{3!4!} = 35$.
2) Câte anagrame ale cuvântului "MISSISSIPPI" sunt posibile? R:$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: 1) În câte moduri se pot împărţi 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor ("o" reprezintă o *bilă*):

C1	C2	C3
oo		ooo
o	o	ooo
ooo	oo	
		ooooo

Identificăm configuraţiile mai sus cu şiruri de 5 biţi, unde 0 reprezină o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000
0101000
0001001
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 şi 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziţii? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

2) O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de îngheţată.) R: $\frac{9!}{3!6!} = 84$.

8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

2. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "se obţine o dublă".

b) B: "suma numerelor este un număr par."

c) C: "suma numerelor este cel mult egală cu 10."

3. În câte moduri se pot aşeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?

4. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete şi n băieţi ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$). X şi prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibă două vecine?

5. 7 căluşari, $c_1, c_2, \ldots, c_7$, se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

6. a) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

b) Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

7. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?