# Temă

$\boxed{2.2.37.}$ toate subinelele lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

fie $S \subseteq \mathbb{Z}$ o submulțime

$S \leq \mathbb{Z} \Leftrightarrow (S, +)$ grup $\Rightarrow (S, +)$ subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$

din 2.1.57 $\Rightarrow S = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

fie $x, y \in S \Rightarrow \begin{matrix} x = na \\ y = nb \end{matrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \cdot y = na \cdot nb = n(abn) \in n\mathbb{Z} \Rightarrow n\mathbb{Z}$ parte stabilă în rap. cu $\cdot$

$\Rightarrow$ toate subinelele lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sunt de forma $n\mathbb{Z}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{2.2.40.}$ $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ subinel al lui $\mathbb{C}$

I el. neutru: $0+0\cdot i = 0 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

II p. stabilă în rap. cu $+$: fie $x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = a+bi \\ y = a'+b'i \end{array} \Rightarrow x+y = (a+a')+(b+b')\cdot i \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

III elem. invers.: $x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x = a+bi$

$$-x = -(a+bi) = -a+(-b)\cdot i \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \quad \forall x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

IV p. stabilă în rap cu $\cdot$: fie $x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = a+bi \\ y = a'+b'i \end{array}\right\} \Rightarrow xy = (a+bi)(a'+b'i) =$$

$$= aa'+ab'i+ba'i-bb' =$$

$$= (aa'-bb')+(ab'+ba')\cdot i \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \leq \mathbb{C}$

$$R = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{Z}\right\}, \quad R \leq \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{Z}), \quad R \cong \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$$

I el neutru: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \in R$

II p. stabilă în rap cu $+$: fie $R_1, R_2 \in R$

$$R_1+R_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{pmatrix} \in R$$

III elem invers.: fie $R_1 \in R$

$$\Rightarrow R_1' = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -(-b_1) & -a_1 \end{pmatrix} \in R, \quad R_1+R_1' = O_2$$

IV p. stabilă în rap. cu $\cdot$: fie $R_1, R_2 \in R$

$$\Rightarrow R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_1b_2+b_1a_2 \\ -a_1b_2-b_1a_2 & a_1a_2-b_1b_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow R_1 \cdot R_2 \in R \quad \Rightarrow \quad R \leq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

Domeniu de integritate: inel comutativ, unitar, fără divizori ai lui 0

$\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ e comutativ: • e com. pe $\mathbb{C}$

$1 = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ elem neutru pt. $\cdot$

$\Rightarrow \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ e unitar

divizori ai lui 0: fie $x, y \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $x, y \neq 0$ și $x \cdot y = 0$

dar $\mathbb{C}$ nu are divizori ai lui 0 $\Rightarrow \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ nu are div. ai lui 0

$\Rightarrow \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ e domeniu de integritate

$1 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

$x, y \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow xy \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ (am demonstrat deja)

fie $x \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = (aa' - bb') + (ab' + ba')i = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab' + ba' = 0 & \Rightarrow ab' = -ba' \\ aa' - bb' = 1 & \Rightarrow aa' = 1 + bb' \end{cases}$$

fie $a = b \Rightarrow a' = -b' \Rightarrow aa' = 1 - aa'$ - contradicție ($aa' \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ pentru $x = a + ai$ $\nexists x^{-1} \Rightarrow \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ nu e corp

$R \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

Domeniu de integritate :

$$R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -a_1b_2 - b_1a_2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix} \quad \text{(am arătat)}$$

$$R_2 \cdot R_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 - b_2b_1 & a_2b_1 + b_2a_1 \\ -b_2a_1 - b_1a_2 & -b_2b_1 + a_2a_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow R_1 \cdot R_2 = R_2 \cdot R_1 \Rightarrow$ comutativ

$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R \Rightarrow R$ unitar

fie $R_1, R_2 \in R$ a.î. $R_1 \cdot R_2 = O_2$, $R_1, R_2 \neq O_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1a_2 - b_1b_2 = 0 \\ a_1b_2 + b_1a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1a_2 = b_1b_2 \\ a_1b_2 = -b_1a_2 \end{matrix}$$

$R_1, R_2 \neq O_2 \Rightarrow$ cel puțin una dintre $a_1, b_1$ resp. $a_2, b_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ pres. $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{b_2}{a_2} \\[2ex] \dfrac{a_1}{b_1} \cdot b_2 = -a_2 \end{cases}$$

I $b_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \Rightarrow R_2 = O_2$ contradicție

II $b_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{b_2}{a_2} \\[2ex] \dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{b_2}{a_2} = -\dfrac{a_2}{b_2}$

$\Rightarrow b_2^2 = -a_2^2 \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 0$ dar $a_2, b_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 = b_2 = 0$

$\Rightarrow R_2 = O_2$ contradicție

$\Rightarrow R$ nu are div ai lui $0 \Rightarrow R$ dom. de integritate

$(R, +, \cdot)$ e corp?

fie $R_1 \in R$ $\quad R_1 \cdot R_1^{-1} = I_2$

$R_1$ inv. $\Rightarrow \det R_1 \neq 0 \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ Adevărat $\forall R_1 \neq O_2$

$$R_1^t = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1^* = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$\det R_1 = a_1^2 + b_1^2 \Rightarrow R_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2} \\ \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} \end{pmatrix}$$

dar $R_1^{-1} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{matrix} a_1^2 + b_1^2 \mid a_1 \\ a_1^2 + b_1^2 \mid b_1 \end{matrix}$ $\quad$ dar $\begin{matrix} a_1^2 + b_1^2 > a_1 \\ a_1^2 + b_1^2 > b_1 \end{matrix}$ $\quad \forall a_1, b_1 > 1$

$\Rightarrow$ nu toate elem sunt inv.

$\Rightarrow (R, +, \cdot)$ nu e corp

$R \cong \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ $\quad$ fie $g: R \to \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

$\det R = |X|^2$