10.6 Să se scrie ecuația cilindrului circumscris sferei $x^2+y^2+z^2=1$, știind că generatoarele sale fac unghiuri egale cu cele 3 axe de coordonate.

Din ultima informație $\Rightarrow$ $x=y=z$ este dreapta directoare a generatoarelor (Δ). Alternativ,

$$(\Delta): \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

Pentru a găsi curba directoare a suprafeței, care este un cerc mare al sferei, scriem ecuația planului perpendicular pe generatoare, ce conține centrul sferei $(0,0,0)$:

$$(P): \ 1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+1\cdot(z-0)=0$$

$$(P): \ x+y+z=0$$

Așadar, curba directoare e dată de sistemul:

$$(C): \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Iar ecuațiile generatoarelor sunt:

$$(G): \begin{cases} x-y=\lambda \\ y-z=\mu \end{cases}$$

Metoda I - utilizăm ecuația curbei directoare

Condiția ca generatoarele să intersecteze curba este dată de sistemul:

$$\begin{cases} x-y=\lambda \\ y-z=\mu \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} x-y=\lambda \\ y-z=\mu \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad (+)$$

$$2x+y=\lambda+\mu$$
$$x-y=\lambda \quad (+)$$

$$3x=2\lambda+\mu \Rightarrow x=\frac{2\lambda+\mu}{3} \Rightarrow y=\frac{\mu-\lambda}{3},\ z=-\frac{\lambda+2\mu}{3}$$

Impunem ca soluția să verifice ultima ecuație:

$$\left(\frac{2\lambda+\mu}{3}\right)^2+\left(\frac{\mu-\lambda}{3}\right)^2+\left(-\frac{\lambda+2\mu}{3}\right)^2=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2+4\lambda\mu+\mu^2+\mu^2-2\lambda\mu+\lambda^2+\lambda^2+4\lambda\mu+4\mu^2=9$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=\frac{3}{2}$$

Aducem ecuația în funcție de x, y, z:

$$(x-y)^2+(x-y)(y-z)+(y-z)^2=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{3}{2}$$

Metoda II – nu utilizăm ecuația curbei

Avem ecuațiile generatoarelor și ecuația sferei. Suprafața căutată e dată de generatoarele care sunt tangente la sferă și e dată de o soluție dublă a sistemului:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=\lambda \Rightarrow y=x-\lambda \\ y-z=\mu \Rightarrow z=x-\lambda-\mu \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(x-\lambda)^2+(x-\lambda-\mu)^2=1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+x(-4\lambda-2\mu)+2\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu=1$$

Soluția e o tangentă la sferă $\Leftrightarrow$ discriminantul este nul.

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (-4\lambda-2\mu)^2-4\cdot 3\cdot(2\lambda^2+\mu^2+2\lambda\mu-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2+2\mu^2+2\lambda\mu-3=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2+\mu^2+\lambda\mu=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-y)(y-z)=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{3}{2}$$