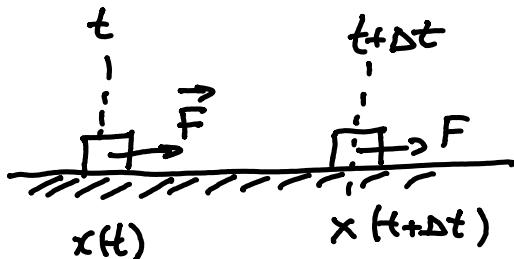


## CURS 6

Module matematice date prin  
ecuații diferențiale de ordinul II

1) Mișcarea unui corp sub acțiunea unei forțe



$x(t)$  — poziția corpului la momentul  $t > 0$

$x_0$  — poziția corpului la momentul initial  $t_0 = 0$

$$x(0) = x_0$$

Legea lui Newton :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$v_m = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{viteză medie}$$

viteză instantaneous (la momentul  $t$ )  $\rightarrow v(t)$

$$v_m(\Delta t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t)$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

$v_0$  - viteza initială a corpului la mom. initial  $t_0 = 0$ .

$$v(0) = \underline{\underline{x'(0)}} = v_0.$$

În general, forța ce acionează asupra corpului nu este constantă, aceasta poate să depindă de timp, de poziție și de viteza, adică:

$$F = F(t, x(t), x'(t)).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \cdot x'' = f(t, x, x') \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

În cazul particular al forței constantei

$$f(t, x, x') \equiv F$$

$$\Rightarrow m \cdot x'' = F \Rightarrow x'' = \frac{F}{m} \Rightarrow x' = \int \frac{F}{m} \cdot dt + c_1$$

$$x' = \frac{F}{m} \cdot t + c_1$$

$$x(t) = \int \left( \frac{F}{m} t + c_1 \right) dt + c_2$$

$$x(t) = \frac{F}{2m} \cdot t^2 + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

sol. gen. a ec. diff.

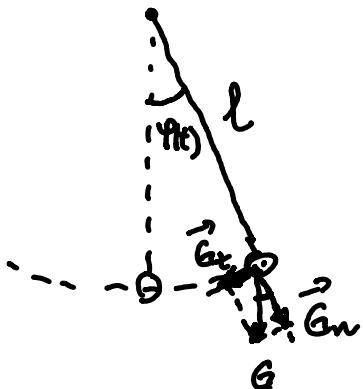
$$x(0) = x_0 \Rightarrow c_2 = x_0$$

$$x'(0) = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0$$

$\Rightarrow$  soluția nu de lungim.

$$\boxed{x(t) = \frac{F}{2m} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0}$$

## 2) Pendulul matematic



Pendulul matematic este format dintr-un punct material de masă  $m$  susținut de un fir inextensibil de masă neglijabilă, de lungime  $l$ .

corful se scoate din poziția de echilibru și astfel acesta va efectua o mișcare oscilatorie în jurul poz. de echilibru (poz. verticală). Nu se ia în considerare forța de fierbere cu aerul.

$\varphi(t)$  – unghiul format de fir și verticală la mom.  $t > 0$

$\varphi_0$  – unghiul format de fir și verticală la mom. initial  $t_0 = 0$

$$\boxed{\varphi(0) = \varphi_0}$$

$$\boxed{m \cdot a = F}$$

$$F = -G_t = -mg \cdot \sin \varphi$$

dint. parcursă de corp

$$s = s(t) = l \cdot \varphi(t)$$



lung. arcului de cerc.

$$v = s'(t) = \overbrace{l \cdot \varphi'(t)}^{\text{lung. arcului de cerc}}$$

$v_0$  - viteza corpului la mom. initial  $t_0 = 0$

$$s(0) = l \cdot \varphi(0) = v_0 \Rightarrow \boxed{\varphi(0) = \frac{v_0}{l}}$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = l \cdot \varphi''(t).$$

$$\Rightarrow m \cdot l \cdot \varphi''(t) = -mg \sin(\varphi(t))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi''(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi(t)) = 0 & \text{ecuația pendulu lui} \\ \varphi(0) = \varphi_0 & \text{mehanic} \\ \varphi'(0) = \frac{v_0}{l} \end{cases}$$

Cazul oscilațiilor mici  $\Rightarrow$   $\varphi$  mic.  $\Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$ .

$$\rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ecuația pendulu lui liniar} \\ \text{ec. liniară omogenă de ord. 2} \\ \text{cu coef. const.).} \end{array}$$

$$\therefore \frac{g}{l} \stackrel{\text{no}}{=} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0$$
$$\omega^2 = 0$$
$$\omega^2 = -\omega^2$$
$$R_{1,2} = \pm i\omega.$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \rightarrow \text{sol. gen.}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0 \rightarrow c_1 = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}(t) = -c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t$$

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{l} \rightarrow c_2 \omega = \frac{v_0}{l} \rightarrow c_2 = \frac{v_0}{l \cdot \omega}$$

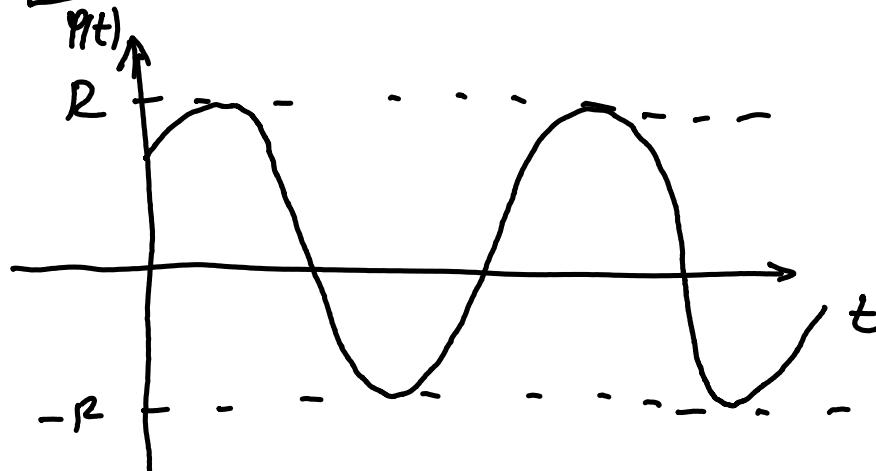
$$\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{l \cdot \omega} \sin \omega t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 = R \cdot \cos \delta \\ \frac{v_0}{lw} = R \cdot \sin \delta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{\psi_0^2 + (\frac{v_0}{lw})^2} \\ \delta = \arctg \left( \frac{v_0}{\psi_0 \cdot lw} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \psi(t) = R \cdot \cos \omega t \cdot \cos \delta + R \cdot \sin \omega t \cdot \sin \delta =$$

$$\boxed{\psi(t) = R \cdot \cos(\omega t - \delta)}$$

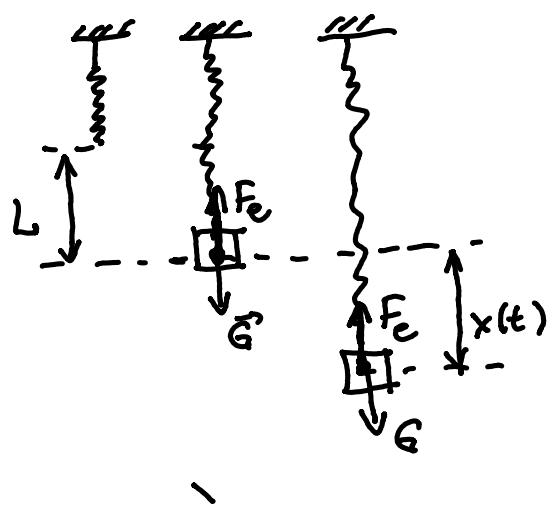
R - amplitudinaa miscării



misiunea este periodică cu perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$ .

În cazul oscilațiilor mici perioada mișcării nu depinde de masa corpului, aceasta este proporțională cu  $\sqrt{\ell}$ .

### 3) Pendulul armonic fără fizare



se consideră un resorț  
de care se suspendă un corp  
de masă  $m$ .

$L$  - lungimea resortei în  
poz. de echilibru.

se scoate corpul din poz. de  
echilibru

- nu se ia în considerare forțele  
de fizare.

$x(t) \rightarrow$  poz. corpului față de poz. de echil. la  
mom.  $t > 0$

$x_0 \rightarrow$  poz. corpului la mom. initial  $t_0 = 0$

$v_0 \rightarrow$  viteză corpului la mom. initial  $t_0 = 0$

$$m \cdot a = F$$

$$x = x(t) \Rightarrow v(t) = x'(t) \Rightarrow a(t) = v'(t) = x''(t).$$

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ v(0) &= x'(0) = v_0 \end{aligned} \quad \text{cond. initiale}$$

$$F = G - F_e \quad F_e - \text{forță de elasticitate a resortei lui Hooke}$$

legea lui Hooke:  $F_e$  este prop. cu alungirea resortei.

$$\text{în poz. de echilibru: } F_e = G \Rightarrow mg = k \cdot L$$

$k$  - const. de elasticitate

$$k = \frac{mg}{L}$$

$$\text{la momentul } t \geq 0: \quad F_e = k(L+x) = \frac{mg}{L}(L+x)$$

$$\Rightarrow F = G - F_e = mg - \frac{mg}{L}(L+x) =$$

$$= \cancel{mg} - \cancel{mg} - \frac{mgx}{L}$$

$$\Rightarrow m \cdot a = f \Rightarrow m \cdot x'' = -\frac{mgx}{L} \Rightarrow \boxed{x'' + \frac{g}{L}x = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' + \frac{g}{L}x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = N_0 \end{cases} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \rightarrow \text{frecvență naturală a pend. armnic'}$$

$$\Rightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$$

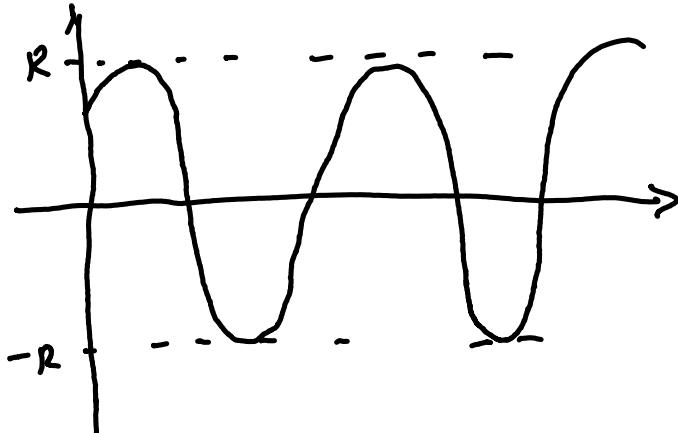
$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

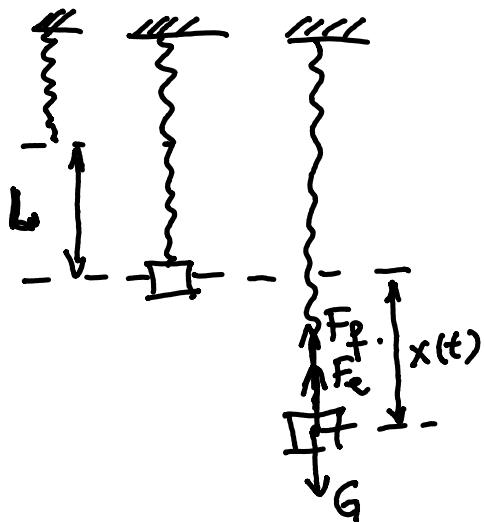
$$\left. \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ x'(0) = N_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_1 = x_0 \\ C_2 = \frac{N_0}{\omega_0} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{N_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 = R \cos \delta \\ \frac{N_0}{\omega_0} = R \cdot \sin \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} R = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{N_0}{\omega_0}\right)^2} \\ \delta = \arctg \frac{N_0}{x_0 \omega_0} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{x(t) = R \cdot \cos(\omega_0 t - \delta)}$$



#### 4) Pendulul armonic cu fricare



dacă se ia în considerare  
și forța de fricare

$$\Rightarrow F = G - F_e - F_f.$$

forța de fricare este proporțională  
cu viteza corpului la mom. t.

$$F_f = \mu \cdot x'(t)$$

$$m \cdot a = F \rightarrow m \cdot x' = mg - \frac{mg}{L}(x+L) - \mu \cdot x'$$

$$F = G - f_e - f_f \quad mx'' = \cancel{mg} - \frac{mg}{L}x - \cancel{mg} - \mu \cdot x'$$

$$mx'' + \mu \cdot x' + \frac{mg}{L} \cdot x = 0 \quad | : m$$

$$x'' + \underbrace{\frac{\mu}{m} \cdot x'}_{\omega_0^2} + \underbrace{\frac{g}{L} \cdot x}_{\omega_0^2} = 0$$

notizen zu  $\lambda = \frac{\mu}{m}$ ,  $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'' + \lambda \cdot x' + \omega_0^2 \cdot x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

$$x'' + \lambda x' + \omega_0^2 x = 0$$

$$r^2 + \lambda \cdot r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{ec. charact.}$$

$$\boxed{D = \lambda^2 - 4\omega_0^2}$$

$\exists D > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 4\omega_0^2$  (casul supra-amortizării)

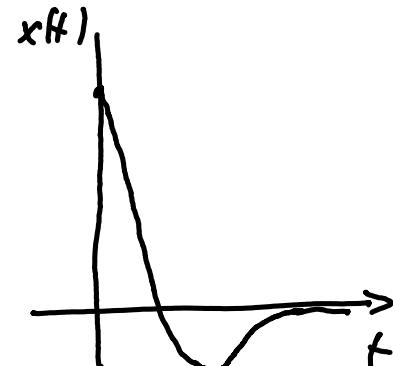
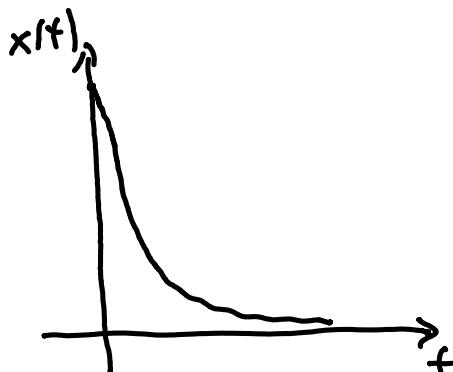
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\rightarrow x(t) = C_1 e^{n_1 t} + C_2 e^{n_2 t}$$

$n_1, n_2$  sunt d.c. de cond. inițiale  $x_0$  și  $v_0$

avem  $n_{1,2} < 0 \Rightarrow x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

corpul revine la poz. de echilibru



$$\underline{\text{II}} \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4\omega_0^2 \quad (\text{amortizarea critică})$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_2 = -\frac{\lambda}{2} < 0$$

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

$c_1, c_2$  sunt det. de val. inițiale  $x_0$  și  $v_0$

$$x(t) = \underbrace{e^{-\frac{\lambda}{2}t}}_{\rightarrow 0} \left( \underbrace{c_1 + c_2 \cdot t}_{\lambda > 0} \right)$$

$$x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\underline{\text{III}} \quad \Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 < 4\omega_0^2 \quad (\text{amortizarea slabă})$$

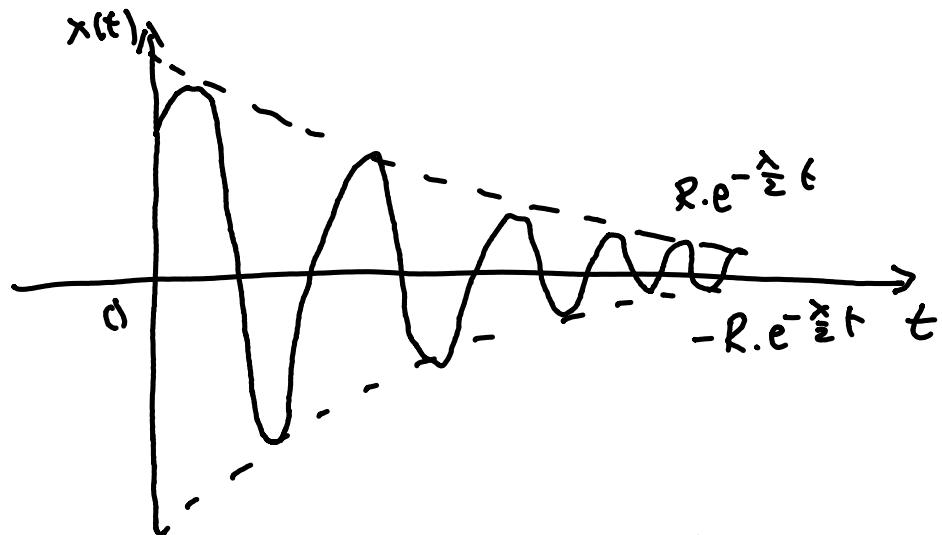
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\lambda \pm i \sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{4\omega_0^2 - \lambda^2}{2}}}_w$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cos \omega t + c_2 e^{-\frac{\lambda}{2}t} \sin \omega t$$

$c_1, c_2$  sunt det. de  $x_0$  și  $v_0$

$$\begin{cases} -c_1 = R \cdot \cos \sigma \\ c_2 = R \cdot \sin \sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \\ \sigma = \arctan \frac{c_2}{c_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(t) = R \cdot e^{-\frac{\lambda}{2}t} \cos(\omega t - \sigma)$$



$$x(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

mijloaca este oscillatorie în jurul poz. de echilibru, mijloacă care se anustizează în timp.