Cotoarbă Anamaria Bianca 27.4.2021

Problema 10.3

Să se afle ecuația conului cu vârful în $V(1,1,1)$ și având curbă directoare elipsa de ecuații

$$y^2+z^2=1 \ , \ x+y+z=1$$

Rezolvare:

Ecuațiile vârfului (ca intersecție de trei plane) sunt:

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv x=1 \\ P_2(x,y,z) \equiv y=1 \\ P_3(x,y,z) \equiv z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(x,y,z) \equiv x-1=0 \\ P_2(x,y,z) \equiv y-1=0 \\ P_3(x,y,z) \equiv z-1=0 \end{cases}$$

Ecuațiile generatoarelor sunt:

$$\begin{cases} P_1=\lambda P_3 \\ P_2=\mu P_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=\lambda(z-1) \\ y-1=\mu(z-1) \end{cases}$$

Adăugăm ecuațiilor generatoarelor a doua ecuație a curbei:

$$\begin{cases} x-1=\lambda(z-1) \\ y-1=\mu(z-1) \\ x+y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda(z-1)+1+\mu(z-1)+1+z-1=0$$

$$\Rightarrow (z-1)(\lambda+\mu+1)+2=0$$

$$\Rightarrow z-1=\frac{-2}{\lambda+\mu+1} \Rightarrow z=\frac{\lambda+\mu-1}{\lambda+\mu+1}$$

$$\Rightarrow y-1=\frac{-2\mu}{\lambda+\mu+1} \Rightarrow y=\frac{\lambda-\mu+1}{\lambda+\mu+1}$$

$$\Rightarrow x-1=\frac{-2\lambda}{\lambda+\mu+1} \Rightarrow x=\frac{-\lambda+\mu+1}{\lambda+\mu+1}$$

Înlocuind în prima relație (ecuație) a curbei directoare, obținem:

$$\left(\frac{\lambda-\mu+1}{\lambda+\mu+1}\right)^2+\left(\frac{\lambda+\mu-1}{\lambda+\mu+1}\right)^2-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2+\mu^2+1-\cancel{2\lambda\mu}-2\mu+\cancel{2\lambda}+\lambda^2+\mu^2+1+\cancel{2\lambda\mu}-\cancel{2\lambda}-2\mu}{(\lambda+\mu+1)^2}-1=0$$

$$\Rightarrow \frac{2\lambda^2+2\mu^2+2-4\mu-\lambda^2-\mu^2-1-2\lambda\mu-2\lambda-2\mu}{(\lambda+\mu+1)^2}=0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2+\mu^2+1-6\mu-2\lambda\mu-2\lambda}{(\lambda+\mu+1)^2}=0$$

$$\Rightarrow \varphi(\lambda,\mu)=\lambda^2+\mu^2-2\lambda\mu-6\mu-2\lambda+1=0=(\lambda-\mu)^2-2(3\mu+\lambda)+1=0$$

Înlocuind în această relație, din ecuațiile generatoarelor,

$\lambda=\frac{x-1}{z-1}$ și $\mu=\frac{y-1}{z-1}$, obținem:

$$\left(\frac{x-1}{z-1}-\frac{y-1}{z-1}\right)^2-2\left(\frac{3y-3}{z-1}+\frac{x-1}{z-1}\right)+1=0$$

$$\left(\frac{x-y}{z-1}\right)^2-2\left(\frac{3y+x-4}{z-1}\right)+1=0$$

$$\Rightarrow x^2-2xy+y^2-2(z-1)(3y+x-4)+z^2-2z+1=0$$

$$\Rightarrow x^2-2xy+y^2-2(3yz+xz-4z-3y-x+4)+z^2-2z+1=0$$

$$\Rightarrow x^2-2xy+y^2-6yz-2xz+8z+6y+2x-8+z^2-2z+1=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz+1-4yz+8z+6y-2x-8-2z=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz-8yz+2x+6y+6z-7=0$$

$$\Rightarrow (x-y-z)^2-2(4yz-x-3y-3z)-7=0$$