Problema 11.4

Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului Q(2,2), urmată de o translație de vector (1,2).
Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Rezolvare

- Matricea de rotație în forma generală

$$Rot(Q,\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- În cazul nostru:

$$Rot(2,2,30^\circ)=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matricea translației

$$[T_w]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Matricea translației

$$[T_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• În cazul nostru, având translația de vector (1,2):

$$[T_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Aplic rotația urmată de o translație și obținem transformarea de matrice:

$$T_1 = T_w \cdot Rot(2,2,30^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Imaginea Δ prin această transf. este $\Delta A_1B_1C_1$

$$[A_1B_1C_1] = T_1 \cdot [ABC] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7-\sqrt{3}}{2} & \frac{7+2\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}+10}{2} & \frac{\sqrt{3}+8}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Vârfurile triunghiului transformat:

$A_1\left(\frac{7-\sqrt{3}}{2}, \frac{7-\sqrt{3}}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{7+2\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+10}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{2}\ \frac{\sqrt{3}+8}{2}\right)$

• Aplic transformările în ordine inversă:

$$T_2 = Rot(2,3,30^\circ)\cdot T_{xr} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}+4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Imaginea triunghiului prin această ~~transform~~ transf. este $\Delta A_2B_2C_2$

$$[A_2B_2C_2] = T_2\cdot[A,B,C] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}+4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \cancel{1-\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}+3}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{4+\sqrt{3}}{2} & \frac{7+\sqrt{3}}{2} & \frac{5+3\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Vârfurile triunghiului transformat:

$$A_2\left(\frac{3}{2}, \frac{4+\sqrt{3}}{2}\right) \quad B_2\left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2}, \frac{7+\sqrt{3}}{2}\right) \quad C_2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{5+3\sqrt{3}}{2}\right)$$