(1) (a) Să se defineasca urmatoarele noţiuni: relaţie de echivalenţă, funcţie injectivă, subgrup, liniar independenţă, valoare proprie a unui endomorfism al unui spaţiu vectorial.

(b) Să se dea câte un exemplu de funcţie bijectivă de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$, element minimal in mulţimea ordonată $(\mathcal{P}^*(\{1,2,3\}), \subseteq)$, (aici $\mathcal{P}^*(\{1,2,3\}) = \{X \subseteq \{1,2,3\} \mid \emptyset \neq X\}$), partiţie a mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$, spaţiu vectorial de dimensiune 7, vector cu coordonatele $(1,1)$ in baza $[(1,0),(1,1)]^t$ a spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^2$.

(c) Fie S şi T două subspaţii ale unui K-spaţiu vectorial V şi $\{x\}$ o baza în $S \cap T$. Dacă $\{x,y,z\}$ şi $\{x,v\}$ sunt baze în S, respectiv T, să se arate că $\{x,y,z,v\}$ este o bază în $S+T$.

(2) Se consideră funcţiile: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x \in (-\infty, 1] \\ 2x-5, & x \in (1,\infty) \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2+1.$$

(a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.

(b) Dacă există să se determine inversele acestor funcţii.

(c) Dacă sunt definite să se calculeze compunerile $f \circ g$ şi $g \circ f$.

(d) Să se determine numărul funcţiilor $h : \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\} \to \{a,b,c\}$ cu proprietatea că $h^{-1}(\{a\}) \leq 7$.

(3) Fie $G = \{1,-1,i,-i\}$, unde $i^2 = -1$ este unitatea imaginară.

(a) Să se arate că G este un subgrup al grupului $\mathbb{C}^*$.

(b) Să se arate că $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$ este un morfism surjectiv de grupuri (se va arăta de asemenea că $f(k) \in G$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$) şi să se arate că relaţia $(\mathbb{Z},\mathbb{Z},\sim)$ dată prin $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ este o relaţie de echivalenţă.

(c) Să se arată că dacă $|G|$ este un număr natural impar, atunci G conţine un element de ordin 2.

(4) Se consideră $S = \langle u_1,u_2,u_3\rangle$ şi $T = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$, unde $u_1 = (1,2,1,-2)$, $u_2 = (2,3,1,0)$, $u_3 = (1,2,2,-3)$, $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1,-1)$ $v_3 = (1,3,0,-3)$.

(a) Să se arate că S este subspaţiu în $\mathbb{R}^3$.

(b) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T, $S+T$ şi $S\cap T$.

(c) Fie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ cu proprietatea că $(1,2,0),(-2,0,1),(0,2,1) \in \mathrm{Im}(f)$. Să se arate că f este injectivă.

(5) Fie $f \in \mathrm{End}_R(\mathbb{R}^3)$ cu matricea în baza canonică $e = [e_1,e_2,e_3]^t$:

$$[f]_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Să se determine:

(a) $f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$.

(b) Câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Im}(f)$ şi $\mathrm{Ker}(f)$.

(c) Matricea $[f]_b$ unde $b = [(1,2,1),(1,1,2),(1,1,0)]^t$ (se va arăta şi că b este o bază a lui $\mathbb{R}^3$).

NOTĂ: Fiecare subiect este notat de la 1 la 10. Toate afirmaţiile făcute trebuie sa fie justificate.