

## Seminar 9

**Problema 9.2.13.2:** Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), demonstrați distributivitatea cuantificatorului " $\forall$ " față de " $\wedge$ ":

$$\vdash (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$$

Rezolvare:

$$U = (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x))$$

$$\neg U = \neg ( (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \leftrightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) )$$

$$\neg U = \neg ( ( (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \rightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) ) \wedge ( (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) ) ) - (1)$$

/

\

$\beta(1)$

$$\neg ( (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \rightarrow (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) ) (2)$$

$\alpha(2)$

$$\neg ( (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) ) (3)$$

$\alpha(3)$

$$(\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) \text{ (4)}$$

|

$$\neg (\forall x) ( P(x) \wedge Q(x) ) \text{ (5)}$$

|

$\alpha(4)$

$$(\forall x) P(x) \text{ (6)}$$

|

$$(\forall x) Q(x) \text{ (7)}$$

|

$\delta(5)$  - a

constantă nouă

$$\neg ( P(a) \wedge Q(a) ) \text{ (8)}$$

|

$\beta(8)$

$$(\forall x) ( P(x) \wedge Q(x) ) \text{ (9)}$$

|

$$\neg ( (\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x) ) \text{ (10)}$$

|

$\beta(10)$

$$\neg (\forall x) P(x) \text{ (11)}$$

|

$\delta(11)$  - b

ct. nouă

$$\neg (\forall x) Q(x) \text{ (12)}$$

|

$\delta(12)$  - c

ct. nouă

$$\neg P(b)$$

|

$\gamma(9)$  - b

ct. exist.

$$\neg Q(c)$$

|

$\gamma(9)$  - c

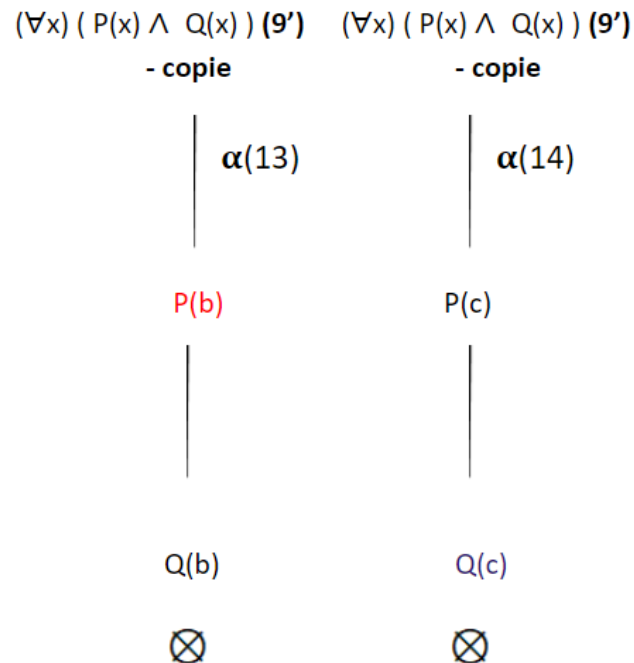
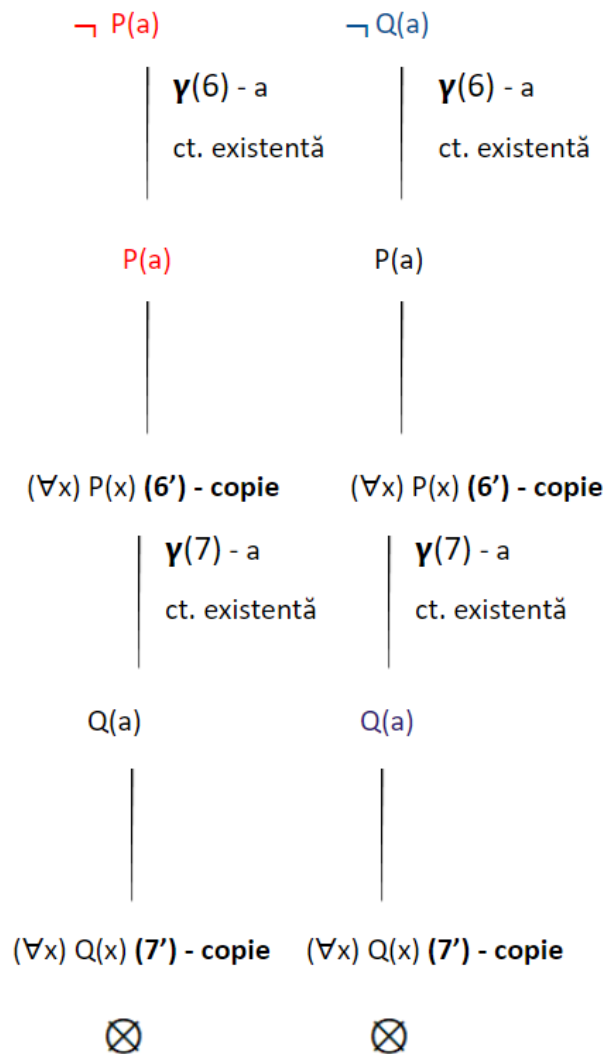
ct. exist.

$$( P(b) \wedge Q(b) ) \text{ (13)}$$

|

$$( P(c) \wedge Q(c) ) \text{ (14)}$$

|



Pornind de la negația ( $\neg U$ ) a formulei inițiale ( $U$ ), am obținut o tabelă semantică închisă (cu toate ramurile închise). Din TCC rezultă că formula inițială este tautologie (distributivitatea cuantificatorului " $\forall$ " față de " $\wedge$ ").