Seminarul 3

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?
R: $P(\text{“angajatul ales lucrează la } m_3\text{”} | \text{“angajatul ales este bărbat”}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.
R: Fie A:“zarul ales este albastru”, R:“zarul ales este roşu” şi S:“suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10”. Formula probabilităţii totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?
R: Fie D: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite” şi E: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale”. În continuare, considerăm $P(D|N = 1) = 0$, $P(E|N = 1) = 1$. Formula lui Bayes implică: a) $P(N = 3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum\limits_{i=2}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$; b) $P(N = 3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*). Un succes are loc cu $P(A) = p$, un insucces are loc cu $P(\bar{A}) = 1 - p$. Probabilitatea de a obţine k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuţiei binomiale.

4. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă cel puţin 11 sunt operaţionale.
1) Calculaţi probabilitatea ca
1a) 12 astfel de cipuri să fie funcţionale;
1b) componenta să fie funcţională.
2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care este probabilitatea p ca cel puţin 3 dintre ele să fie funcţionale?
3) Dacă un calculator are instalate 3 astfel de componente, care este probabilitatea ca în total mai mult de 30 de cipuri să fie funcţionale?

R: 1) 1a) $(0.94)^{12}$; 1b) $p = C_{12}^{11}(0.94)^{11}0.06 + (0.94)^{12}$. 2) $C_4^3 p^3(1 - p) + p^4$. 3) $\sum\limits_{i=31}^{36} C_{36}^i (0.94)^i (0.06)^{36-i}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1, r}, \\ &\quad\ \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1, r}$.
▷ Cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

5. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?
R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \frac{1}{26^{11}}$.

6. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:"exact două numere sunt pare."
b) B:"1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".
R: a) $C_5^2 \frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{2^2} \frac{1}{6} \frac{1}{6^2}$.

7. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?
R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0{,}8 = 0{,}82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$.

8. O pereche de zaruri - unul alb şi unul roşu - se aruncă o dată şi apoi încă o dată. Calculaţi probabilitea ca numerele apărute la cea de-a doua aruncare să fie aceleaşi ca la prima aruncare. (Exemplu de caz favorabil: la prima aruncare zarul alb indică 2 şi zarul roşu indică 4, iar la a doua aruncare zarul alb indică 2 şi zarul roşu indică 4.)
R: Considerăm variabilele aleatoare:
▷A_1 indică numarul apărut la prima aruncare pe zarul alb.
▷A_2 indică numarul apărut la prima aruncare pe zarul alb.
▷R_1 indică numarul apărut la prima aruncare pe zarul roşu
▷R_2 indică numarul apărut la prima aruncare pe zarul roşu.
Probabilitatea cerută este

$$p = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} P\left(\{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\} \cap \{A_2 = i\} \cap \{R_2 = j\}\right) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{6^4} = \frac{6^2}{6^4} = \frac{1}{36},$$

unde s-a folosit faptul că evenimentele $\{A_1 = i\}, \{R_1 = j\}, \{A_2 = i\}, \{R_2 = j\}$ sunt independente $\forall\, i, j \in \{1, \ldots, 6\}$.
Soluţie alternativă, folosind formula probabilităţii totale:

$$p = \sum_{i,j=1}^{6} P\left(\{A_2 = i\} \cap \{R_2 = j\} \middle| \{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}\right) P\left(\{A_1 = i\} \cap \{R_1 = j\}\right) = \sum_{i,j=1}^{6} \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$