Gramatici. Gramatici regulare. Limbaje regulare. Proprietati

lect. dr. Lupsa Dana

Faculty of Mathematics and Computer Science
Babeș-Bolyai University

2022-2023

Gramatica

O gramatica este un cvadruplu **$G = (N, \Sigma, P, S)$**

- **N** este un alfabet de simboluri ***neterminale***
- Σ este un alfabet de simboluri ***terminale***
- $N \cap \Sigma = \phi$
- $\mathbf{P} \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$

  P multime finitã (multimea regulilor de productie)
- $\mathbf{S} \in \mathbf{N}$ (simbolul de start - simbolul initial)

Notatie:

$(\alpha, \beta) \in P$ se noteaza: $\alpha \to \beta$

(α se înlocuieste cu β)

Notatii

- la nivel abstract (exemple matematice, specificari)
  - Σ: a,b,… litere mici de la inceputul alfabetului
  - N: A,B,.. litere mari de la inceputul alfabetului
  - Σ sau N: X,Y,…litere mari de la sfarsitul alfabetului
  - Σ^* : x,y,… litere mici de la sfarsitul alfabetului
  - $(\Sigma \cup N)^*$: $\alpha,\beta,\ldots$ litere grecesti
- nu se folosesc spatii cand avem nevoie de mai multe caractere pentru a specifica un simbol (terminal sau neterminal)

Relatii de derivare

relatii binare peste $(\Sigma \cup N)^*$ adica $(\Sigma \cup N)^* \times (\Sigma \cup N)^*$

- derivare directa

  $\gamma \Rightarrow \delta \Leftrightarrow \exists\, \gamma_1, \gamma_2, \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$

  a.i. $\gamma = \gamma_1 \alpha \gamma_2$, $\delta = \gamma_1 \beta \gamma_2$, iar $(\alpha \to \beta) \in P$

- k-derivare $\overset{k}{\Rightarrow}$

  (o succesiune de *k* derivãri directe)

- + derivare $\overset{+}{\Rightarrow}$

  dacã $\exists$ k>0 a.i. cele 2 secvente sã fie într-o relatie de "k derivare"

- * derivare $\overset{*}{\Rightarrow}$

  daca fie cele 2 secvente sunt egale, fie intre ele exista o relatie de +derivare

Limbaj generat de o gramatica

- Limbaj generat gramatica $G=(N,\Sigma,P,S)$

  $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{=>} w\}$
- Forma propozitionala
  - $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ a.i. $S \overset{*}{=>} \alpha$
- Propozitie (<u>cuvant</u>)
  - un element din L(G)
- Gramatici echivalente

  daca genereaza acelasi limbaj

Tipuri de gramatici

- Gramatica monotona
  - $\forall \alpha \to \beta \in P$: $|\alpha| <= |\beta|$ $\qquad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$
  - caz special: $\mathbf{S} \to \boldsymbol{\varepsilon}$ poate sa apartina lui P. In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

- Gramatica dependenta de context

  reguli de productie sunt de forma:

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta \qquad A \in N$$

$$\alpha, \beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*, \gamma \neq \boldsymbol{\varepsilon}$$

  - caz special: $\mathbf{S} \to \boldsymbol{\varepsilon}$ poate sa apartina lui P. In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

Tipuri de gramatici

- Gramatica regulara:

  reg. prod. sunt de forma
    - $A\rightarrow aB$
    - $A\rightarrow b$ unde $A,B\in N$ si $a,b\in \Sigma$

  caz special: $\mathbf{S}\rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ poate $\in$. P In acest caz S nu apare în membrul drept al nici unei reguli de productie.

- Gramatica independenta de context:

  reg. productie sunt de forma $A\rightarrow \alpha$, $A\in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$

Clasificarea Chomsky

- Gramatici de tip **0**

  nici o restrictie *(suplimentara)* referitoare la forma regulilor de productie
- Gramaticile de tip **1**

  dependente de context ⇔ ***gramatici monotone***

  (monotonic**, **non-contracting)
- Gramaticile de tip **2**

  gramatici independente de context

  => Limbaje independente de context
- Gramaticile de tip **3**

  gramatici regulare

  => Limbaje regulare

Ierarhia Chomsky

Fie

~ 1959-1963

- $\mathcal{L}0$ - multimea limbajelor generate de gram. de tip 0
- $\mathcal{L}1$ - multimea limbajelor generate de gram. de tip 1
- $\mathcal{L}2$ - multimea limbajelor generate de gram. de tip 2
- $\mathcal{L}3$ - multimea limbajelor generate de gram. de tip 3

Are loc:

$$\mathcal{L}0 \supset \mathcal{L}1 \supset \mathcal{L}2 \supset \mathcal{L}3$$

Ierarhia Chomsky: observatii

Teorema:

Fiecare dintre familiile de limbaje:

$\mathcal{L}0$, $\mathcal{L}1$, $\mathcal{L}2$, $\mathcal{L}3$

este inchisa fata de operatia de reuniune

Limbaje regulare. Echivalente

- putere de exprimare

  AF: AFN $\Leftrightarrow$ AFD

  AF $\Leftrightarrow$ gr.regulare

  AF $\Leftrightarrow$ (m.regulare $\Leftrightarrow$ expr.reg.)

Multimi regulare

Fie Σ un alfabet.

Multimile regulare peste Σ se definesc recursiv astfel:

1. Φ este o m. reg. peste Σ
2. {ε}
3. {a} daca: $a \in \Sigma$
4. RUS daca R,S – multimi regulare peste Σ +
5. RS daca R,S – multimi regulare peste Σ
6. R* daca R – multime regulara peste Σ
7. Orice alta multime regulara se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6

Multimi regulare si expresii regulare

- Expresii regulare

1. Φ expr. reg. coresp. m.reg. Φ
2. ε $\{\varepsilon\}$
3. a daca: $a \in \Sigma$ $\{a\}$
4. r+s daca r,s – expresii regulare **r | s** RUS
5. rs daca r,s – expresii regulare RS
6. r* daca r – expresie regulara R*
7. **Orice alta expr. reg. se obtine aplicand de un numar finit de ori reg. 1-6**

- Expresii regulare echivalente:
  – mult. regulare reprezentate de acestea sunt egale

Expresii regulare

- expresiile regulare – secv. obtinute prin concatenarea de simb. din

  $\Sigma \cup \{\Phi, \varepsilon, +, *, (\ ,\ )\}$ **(… prioritate …)**
- multimile regulare asociate expresiilor regulare sunt limbaje regulare

Deci: ***Orice expresie regulara peste Σ descrie un limbaj regular peste Σ***

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

Teorema:

Daca

L_1, L_2 sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

atunci:

$\mathbf{L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1L_2, L_1^*,}$ **complement**$(\mathbf{L_1})$

sunt limbaje regulare peste alfabetul Σ

Lema de pompare pt. limbaje regulare

- Daca L este un limbaj regular,
- atunci $\exists\, p \in \mathbf{N}^*$ (fix pt. un limbaj dat)
  (oricat de mare)
- astfel incat:

  $\forall\, w \in L$ de lungime cel putin p

  exista o descompunere de forma w=xyz,

  unde $0 < |y| \leq p$

  cu proprietatea ca: $xy^iz \in L, \forall\, i \in \mathbf{N}$

Lema de pompare pt. limbaje regulare

$$
\begin{aligned}
&(\forall L \subseteq \Sigma^*)\\
&\quad (\mathrm{regular}(L) \Rightarrow\\
&\quad ((\exists p \geq 1)((\forall w \in L)((|w| \geq p) \Rightarrow\\
&\quad ((\exists x, y, z \in \Sigma^*)(w = xyz \wedge (|y| \geq 1 \wedge |\, y \,| \leq p \wedge (\forall n \geq 0)(xy^n z \in L)))))))
\end{aligned}
$$

(enunt formal al teoremei)

Lema de pompare pt. limbaje regulare

(o alta versiune, mai “puternica”)

Daca L este un limbaj regular,

- atunci $\exists$ p $\in$ $\mathbf{N}^*$ (fix pt. un limbaj dat)
  (oricat de mare)
- astfel incat:

  $\forall$ w $\in$ L de lungime cel putin p

  exista o descompunere de forma w=xyz astfel incat

  $0 < |y|$

  $| x y | \leq p$

  $xy^iz \in L, \forall i \in \mathbf{N}$

Lema de pompare pt. limbaje regulare

Observatii:

- Lema da o conditie necesara dar nu suficienta
- daca un limbaj satisface conditiile lemei nu inseamna ca este regular
- folosim negatia lemei de pompare pt. a dem. ca un limbaj nu este regular

Lema de pompare pt. limbaje regulare

De ce se intampla asa:

- Daca L – limb. reg.

$\Rightarrow$ exista G – gram. reg. a.i. L(G) = L (def.)

$\Rightarrow$ exista M – AF a.i. L(M) = L (teorema)

- Fie p – nr. de stari ale lui M
- daca |w|>=p si w –acceptat

$\Rightarrow$ $\exists$ un drum in graful asociat lui M a.i. etichetele arcelor sunt simb. din w

$\Rightarrow$ drumul e de lung. p ; adica trece prin p + 1 noduri din graf

$\Rightarrow$ $\exists$ un nod prin care se trece de cel putin 2 ori

$\Rightarrow$ ciclu/bucla – care se poate repeta de oricate ori !!

$\Rightarrow$ se poate repeta sirul etichetelor arcelor din bucla !!

(de 0 sau mai multe ori)

Exemplu:

Fie L - limbajul regular corespunzator expresiei regulare:

aa^*b^*

1) fie w = ab ;

Puteti identifica o descompunere w=xyz a.i. xy^iz in L ?

2) fie w = aa ;

Puteti identifica o descompunere w=xyz a.i. xy^iz in L ?

Analog pt.: $a(ba)^*$

si w = aba

Analog pt.: L={a,b} si w = a

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

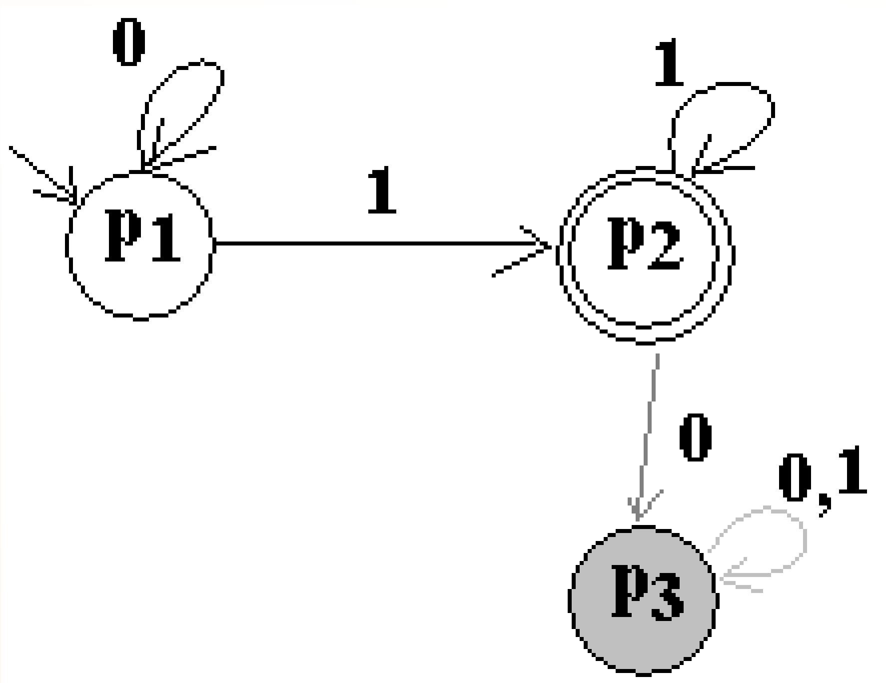
$L_1 \cap L_2$

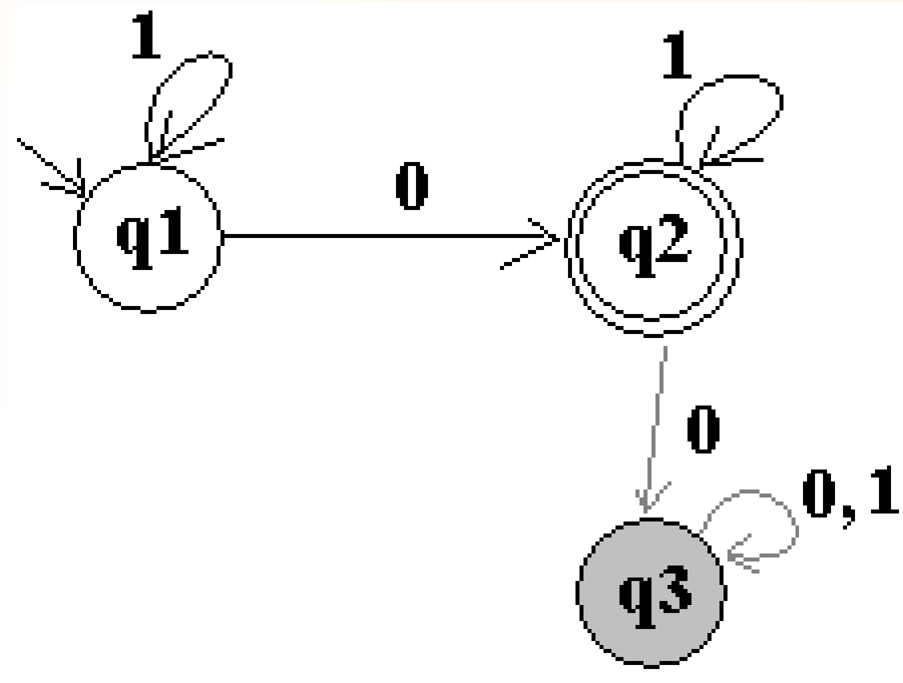
- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$
- ? $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 si M_2 sunt deterministe, complet definite !

(alg. de constr. !!)

- $M = (Q_1 x Q_2, \Sigma , \delta, (q_{01},q_{02}), F_1 x F_2)$
- $\delta((q_1,q_2),a) = (\delta_1(q_1,a),\delta_2(q_2,a))$


0
1
1
p1
p2
0
0,1
p3


1
1
0
q1
q2
0
0, 1
q3

Proprietati de inchidere ale limbajelor regulare

complement(L_1)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$
- ? $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

PP. ca aut. M_1 este determinist complet definit !

(alg. de constr.)

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, Q_1\text{-}F_1)$