3.2.40 Se consideră în $\mathbb{R}^3$ lista de vectori $v=[v_1, v_2, v_3]^t$.
Folosind două metode (def. bazei și lema substituției) să se găsească $a \in \mathbb{R}$ astfel încât v este o bază a lui $\mathbb{R}^3$, unde:

(1) $v_1 = [1, -2, 0]$ $\quad v_2 = [2, 1, 1]$ $\quad v_3 = [0, a, 1]$

I Definiția bazei:

v bază dacă $\begin{cases} v \text{ - sistem liniar independent} \\ v \text{ - sistem de generatori} \end{cases}$

Dar numărul de elemente din v coincide cu $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow$ e suficient să arătăm doar o proprietate pentru a demonstra că v este bază pt. anumite valori ale parametrului a.

~~Vom arăta~~

Vom găsi valorile lui a pt. care v formează un sistem liniar independent

$(\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ ai. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0)$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 \Rightarrow [\alpha_1, -2\alpha_1, 0] + [2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2] +$
$+ [0, a\alpha_3, \alpha_3] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S = \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + a\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1+0+0-0-a+4 = 5-a$$

v liniar independentă $\Leftrightarrow$ soluția sistemului S este soluția unică $(0,0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $5-a \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $a \neq 5$ (SCD omogen).

Deci, $v = [v_1, v_2, v_3]$ bază a lui $\mathbb{R}^3$ pt. $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 5$.

II Lema substituției

Bază cunoscută a lui $\mathbb{R}^3$ – baza canonică $e = [e_1, e_2, e_3]$, $e_1 = [1,0,0]$, $e_2 = [0,1,0]$, $e_3 = [0,0,1]$.

Pentru a găsi valorile lui a, vrem să putem ajunge să putem verifica următoarea propoziție din lemă, pentru o bază inițială $[v_1, v_2, e_3]$:

Inlocuindu-l pe e_3 cu v_3, lista nou formată „este bază $\Leftrightarrow$ coordonata lui e_3 din scrierea lui v_3 în baza inițială este diferită de 0."

Pentru a putea ajunge în această situație, aplicăm lema substituției de 2 ori, pentru v_1 și v_2:

baza e	v_1	v_2	v_3
e_1	1	2	0
e_2	-2	1	a
e_3	0	1	1

Schimbăm e_1 cu v_1.
noua listă $e' = [v_1, e_2, e_3]$.
în baza e, $v_1 = 1 \cdot e_1 + \ldots$, iar cum $1 \neq 0 \Rightarrow e'$ e o bază

baza e'	v_1	v_2	v_3
v_1	1	2	0
e_2	0	5	a
e_3	0	1	1

$v_2 = [v'_{21}, v'_{22}, v'_{23}]$

$v'_{21} = \frac{2}{1} = 2$

$v'_{22} = 1 - \frac{(-2) \cdot 2}{1} = 5$

$v'_{23} = 1 - \frac{0 \cdot 2}{1} = 1$

$v_3 = [v'_{31}, v'_{32}, v'_{33}]$

$v'_{31} = \frac{0}{1} = 0$

$v'_{32} = a - \frac{(-2) \cdot 0}{1} = a$

$v'_{33} = 1 - \frac{0 \cdot 0}{1} = 1$

Schimbăm e_2 cu v_2:
noua listă $e'' = [v_1, v_2, e_3]$.
în baza e', $v_2 = 5 e_2 + \ldots$, iar cum $5 \neq 0 \Rightarrow e''$ e o bază

baza e''	v_1	v_2	v_3
v_1	1	0	$-\frac{2a}{5}$
v_2	0	1	$\frac{a}{5}$
e_3	0	0	$\frac{5-a}{5}$

$v_3 = [v''_{31}, v''_{32}, v''_{33}]$

$v''_{31} = 0 - \frac{2 \cdot a}{5} = -\frac{2a}{5}$

$v''_{32} = \frac{a}{5}$

$v''_{33} = 1 - \frac{1 \cdot a}{5} = \frac{5-a}{5}$

Schimbăm e_3 cu v_3; noua listă este chiar $v = [v_1, v_2, v_3]$; v este bază $\Leftrightarrow 5-a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 5$.

$$v_3 = \frac{5-a}{5} \cdot e_3 + \ldots$$

<u>Matricea bazei e'</u> × <u>coordonatele unui vector în baza e'</u> = <u>coord. vectorului în baza e</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Inversa matricei</u> × <u>coordonatele unui vector în baza e</u> = <u>coord. vectorului în baza e'</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$