Varianta II

Considerăm planele:

$$\begin{cases} (\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- Planele (α) și (β) coincid dacă sistemul format din ecuațiile lor să fie compatibil, dublu nedeterminat.
- Planele (α) și (β) sunt paralele dacă rangul sistemului este egal cu 1, iar rangul matricei extinse este egal cu 2.
- Planele (α) și (β) se intersectează după o dreaptă dacă sistemul format de ecuațiile planelor ~~este~~ de rang maxim

(a) $(\alpha): x - y + 3z + 1 = 0 \Rightarrow A_1 = 1, B_1 = -1, C_1 = 3$ și $D_1 = 1$

$(\beta): 2x - y + 5z - 2 = 0 \Rightarrow A_2 = 2, B_2 = -1, C_2 = 5$ și $D_2 = -2$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2,3}$$ matricea ~~există~~ extinsă a sist.

Observăm că alegând minorul $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0$

obținem rang$(A) = 2$ maximal ținând cont că $A \in \mathcal{M}_{2,3}$.

$\Rightarrow$ Planele (α) și (β) se intersectează; nu sunt paralele și nu coincid

(sistemul det. de ecuații NU comp. dublu nedeterminat).

b) $\begin{cases} (\alpha'): 2x+4y+2z+4=0 \Rightarrow A'_1=2,\ B'_1=4,\ C'_1=2 \text{ și } D'_1=4 \\ (\beta'): 4x+2y+4z+8=0 \Rightarrow A'_1=4,\ B'_1=2,\ C_n \end{cases}$

b) $(S)\ \begin{cases} (\alpha'): 2x+4y+2z+4=0 \Rightarrow A'_1=2,\ B'_1=4,\ C'_1=2 \text{ și } D'_1=4 \\ (\beta'): 4x+2y+4z+8=0 \Rightarrow A'_2=4,\ B'_2=2,\ C'_2=4 \text{ și } D'_2=8. \end{cases}$

$\Rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ matricea extinsă a sistemului

Alegând minorul $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 16-4 = 12 \neq 0$ obținem $\operatorname{rang}(\tilde{A}) = 2$, care este maximal ținând cont că $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Planele (α') și (β') se intersectează după o dreaptă.

Cum $\operatorname{rang}(A') = 2 > 1$ și (S) nu este compatibil nedet. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Planele (α') și (β') nu sunt paralele și nu coincid.

$$(\alpha''):\begin{cases} x = u+2v & \mid \cdot 2 \\ y = 1+v & \mid \cdot(-6) \\ z = u-v & \mid \cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \cancel{2u}+\cancel{4v} \\ -6y = -6-\cancel{6v} \\ -2z = -\cancel{2u}+\cancel{2v} \end{cases} +$$

$$2x-6y-2z=-6$$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha''): 2x-6y-2z+6=0}$$

$$(\beta''):\begin{cases} x = 2+3u'+v' & \mid \cdot 2 \\ y = 1+u'+v' & \mid \cdot(-6) \\ z = 2-2v' & \mid \cdot(-2) \end{cases} \Leftrightarrow (\beta''):\begin{cases} 2x = \cancel{4}+\cancel{6u'}+\cancel{2v'} \\ -6y = -6-\cancel{6u'}-\cancel{6v'} \\ -2z = -\cancel{4}+\cancel{4v'} \end{cases} +$$

$$2x-6y-2z=-6$$

$$\Rightarrow \boxed{(\beta''): 2x-6y-2z+6=0}$$

Scriem sistemul format:

$$(S)\begin{cases} (\alpha''): 2x-6y-2z+6=0 \\ (\beta''): 2x-6y-2z+6=0 \end{cases}$$

$$A'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -2 & 6 \\ 2 & -6 & -2 & 6 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2,3}$$ (matricea extinsă a sist.)

Cum $A'' \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rang}(A'') \le 2$

Calculăm determinanții de ordin 2 a matricii sist:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12+12=0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4+4=0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 12+(-12)=0.$$

(*)

Cum toți determinanții de ordin 2 sunt nuli și există măcar un det. de ordin 1 nenul $\Rightarrow$ rang $A'' = 1$.

Cum rang$(A'') = 1$ (NU E MAXIMAL) $\Rightarrow$ Planele nu se intersectează după o dreaptă

Calculăm rangul matricii extinse

Cum $A^{u} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & -2 & 6 \\ 2 & -6 & -2 & 6 \end{array}\right) \in M_{2,3} \Rightarrow \text{rang } A^{u} \leq 2$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -36 + 36 = 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0.$

Din (*) și $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0 \Rightarrow \text{rang } A^{u} = 1.$

Cum rang A = rang $A^{u} = 1$ (rangul matricei sist. este egal cu rangul matricei extinse) $\Rightarrow$ Planele NU sunt paralele (ca două plane să fie paralele avem: rang $A = 1$ și rang $A^{u} = 2$).

Cum rang A = rang $A^{u} = 1 \Rightarrow (S)$ este comp. dublu nedet. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Planele (α^{u}) și (β^{u}) coincid.