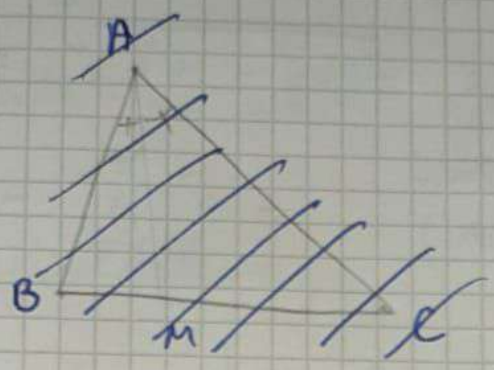
Cusiac Andrei
Gr. 212

7-04-2021

Lucrare

~~Pr. 1~~



Pr. 2: Dacă $\vec{a}$ - vector a.î. $\|a\| = 2$, calculați $\|a \times i\|^2 + \|a \times j\|^2 + \|a \times k\|^2$

Rez: Fie $\vec{a} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{j} = 0 i + 1 \vec{j} + 0 \vec{k}$

$\vec{k} = 0 i + 0 \vec{j} + 1 \vec{k}$

Calculăm produsele scalare:

$$\vec{a} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = c\vec{j} - b\vec{k}$$

$$a \times \vec{j} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a\vec{k} - c\vec{i}$$

$$a \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b\vec{i} - a\vec{j}$$

$$\| a \times i \|^2 = \sqrt{(c\vec{j} - b\vec{k})^2}^{\,2} = (c\vec{j} - b\vec{k})^2 =$$

(formula normei unui vector) $= c^2 \underbrace{\vec{j}^2}_{=1} - 2cb \underbrace{\vec{j}\vec{k}}_{=0} +$

$$+ b^2 \underbrace{\vec{k}^2}_{=1} = c^2 + b^2$$

Analog:

$$\| a \times j \|^2 = \sqrt{(a\vec{k} - c\vec{i})^2}^{\,2} = a^2 + c^2$$

$$\| a \times k \|^2 = \sqrt{(b\vec{i} - a\vec{j})^2}^{\,2} = b^2 + a^2$$

Astfel, $\| a \times i \|^2 + \| a \times j \|^2 + \| a \times k \|^2 =$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2) = S$$

Din ipoteză, $\left.\begin{array}{l} \|\vec{a}\| = 2 \\ \vec{a} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4$$

$S = 4 \cdot 2 = 8$, rezultatul dorit

Pr. 3 : Două vf. opuse ale unui pătrat ABCD sunt $A(1, -2)$, $C(-5, 6)$. Det. celelalte două vârfuri.

Rez.: Într-un pătrat este știut că diagonalele:

1) Se înjumătățesc;

A, C - vârfuri opuse $\Rightarrow$ AC - o diagonală

~~Fie B, D~~ $\Rightarrow$ BD - a doua diagonală

Fie O - mijlocul lui $AC \overset{1)}{\Rightarrow} O$ - mijl. lui BD

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2 \Rightarrow O(-2, 2)$$

În același timp, $x_O = \dfrac{x_B + x_D}{2} = -2$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2} = 2 \quad (*)$$

2) Sunt egale;

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = BD$$

$(6+2)^2 + (-5-1)^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{100} = BD = 10$

Deci, $(y_D - y_B)^2 + (x_D - x_B)^2 = 100 \quad (**)$

Din $(*)$, $(**)$ rezultă sistemele:

$$\begin{cases} x_B + x_D = -4 \Rightarrow x_D = -4 - x_B \\ y_B + y_D = 4 \\ (y_D - y_B)^2 + (x_D - x_B)^2 = 100 \end{cases}$$

3) Sunt perpendiculare;

$\Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \cdot \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = -1$$

$$\frac{8}{\cancel{-}6} \cdot \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \cancel{-}1 \quad / \cdot \frac{6}{8}$$

$$\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow y_D - y_B = \frac{3}{4}(x_D - x_B) \quad /^2$$

$$(y_D - y_B)^2 = \frac{9}{16}(x_D - x_B)^2$$

Înlocuind: $\left(\frac{9}{16} + 1\right)(x_D - x_B)^2 = 100$

$$\frac{25}{16}(x_D - x_B)^2 = 100 \Rightarrow (x_D - x_B)^2 = 64$$

(**)

$$\cancel{(x_D - x_B)\underbrace{(x_D + x_B)}_{-4} = 64}$$

$$\cancel{x_D - x_B = -16}$$

$$\cancel{\left.\begin{array}{l} x_D = x_B - 16 \\ x_D = -4 - x_B \end{array}\right\} \Rightarrow} \quad \cancel{2x_B = 12 - 4} \quad \cancel{x_B = 8} \quad \cancel{x_D =}$$

$$\cancel{x_D - 16 = -4 - x_B}$$

$$\cancel{x_B = 16 - 4 = 12}$$

$$\cancel{x_B = 6}$$

$$\cancel{y_B = -8}$$

$$(-4 - 2x_B)^2 = 64$$

Fie $-4 - 2x_B = 8$

(pentru $-4 - 2x_B = -8$ am obține aceleași valori pentru B și D, doar că inversate)

$$-2x_B = 12$$

$$x_B = -6 \Rightarrow x_D = 2$$

$$y_D - y_B = \frac{3}{4}(2 + 6) = 6$$

$$y_D = 6 + y_B = 4 - y_B \Rightarrow 2y_B = 4 - 6 = -2$$

$$y_B = -1$$

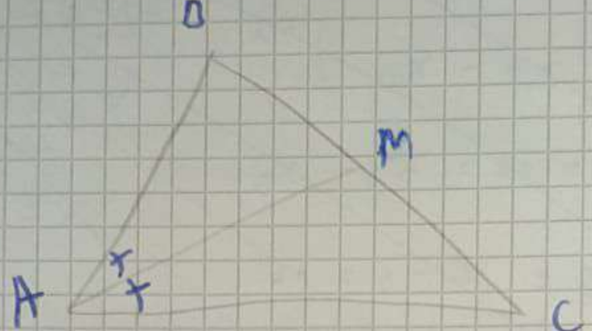
$$y_D = 5$$

Astfel, avem $B(-6, -1)$

$D(2, 5)$

<u>Pr. 1</u>: Se cons. punctele $A(1,1,1)$, $B(7,3,4)$, $C(3,3,2)$. $M \in BC$, $\vec{AM} = ?$ a.î. AM – bisectoare int. a $(\sphericalangle A)$ în triunghiul ABC.

<u>Rez.</u>



$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM}$$ ✓

Se consideră știută teorema bisectoarei, și se obține următorul rezultat (demonstrat și la seminar):

$$\vec{AM} = \frac{AB}{AC+AB}\vec{AC} + \frac{AC}{AB+AC}\vec{AB}$$

$$AB = \sqrt{(7-1)^2 + (3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+4+9} = 7$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$\vec{AC} = (2,2,1)$, $\vec{AB} = (6,2,3)$

Antfel : $\vec{AM} = \frac{7}{10}(2,2,1) + \frac{3}{10}(6,2,3) =$

$= \left(\frac{14}{10}, \frac{14}{10}, \frac{7}{10}\right) + \left(\frac{18}{10}, \frac{6}{10}, \frac{9}{10}\right) =$

$= \left(\frac{32}{10}, \frac{20}{10}, \frac{16}{10}\right) = \left(\frac{16}{5}, 2, \frac{8}{5}\right)$