Laboratorul 6

1. Simulaţi de $n \in \{500, 1000, 2000\}$ ori valoarea înălţimii unei persoane alese aleator folosind distribuţia normală cu parametrii $m = 165$ (cm) şi $\sigma = 10$ (cm).
i) Afişaţi histograma frecvenţelor absolute cu 10 bare pentru vectorul X dat de cele n simulări.
ii) Afişaţi histograma frecvenţelor relative cu 10 bare pentru vectorul X dat de cele n simulări astfel încât suma ariilor barelor să fie 1. Comparaţi această histogramă cu graficul funcţiei de densitate corespunzătoare.
iii) Afişaţi valoarea medie, deviaţia standard şi proporţia de valori în intervalul $[160, 170]$ pentru cele n simulări. Comparaţi rezultatele obţinute cu rezultatele corespunzătoare exacte.

În rezolvarea cerinţelor de mai sus, folosiţi funcţiile: `hist`, `normrnd`, `normpdf`, `normcdf`.

Metode Monte Carlo pentru integrare numerică

Fie $g : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie continuă şi $M > 0$ astfel încât $g(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in [a, b]$. Considerăm următoarele metode pentru aproximarea integralei $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ folosind valori aleatoare.

Metoda 1:
- Fie (X, Y) un vector aleator care are distribuţia uniformă pe $[a, b] \times [0, M]$.
- Folosind probabilitatea geometrică (a se revedea Laboratorul 2), avem:

$$P\left((X, Y) \text{ este sub graficul lui } g\right) = \frac{\text{aria subgraficului lui } g}{\text{aria dreptunghiului } [a, b] \times [0, M]} = \frac{1}{(b-a)M} \int_a^b g(t)dt.$$

- În simulări:

$$\int_a^b g(t)dt \approx \frac{\#\{k \in \{1, ..., n\} : y_k \leq g(x_k)\}}{n}(b-a)M \text{ , pentru } n \text{ suficient de mare,}$$

unde $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ sunt perechi de numere aleatoare generate independent conform distribuţiei uniforme pe dreptunghiul $[a, b] \times [0, M]$.

Metoda 2:
- Considerăm $(U_n)_n$ şir de v.a. independente uniform distribuite pe $[a, b]$ şi notăm $X_n = g(U_n)$.
- $(X_n)_n$ satisface LTNM, adică

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt.$$

- În simulări:

$$\int_a^b g(t)dt \approx (b-a)\frac{1}{n}\left(g(u_1) + \cdots + g(u_n)\right), \text{ pentru } n \text{ suficient de mare,}$$

unde $u_1, \dots, u_n$ sunt valori aleatoare generate independent conform distribuţiei uniforme pe intervalul $[a, b]$.

2. Consideraţi următoarele funcţii:
i) $g_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = e^{-x^2}$, $x \in [-2, 2]$;
ii) $g_2 : [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = |\sin(e^x)|$, $x \in [-1, 3]$.
iii) $g_3 : [-1, 2] \to [0, \infty)$, $g_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2}, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{2x - x^2}, & x \in (0, 2]. \end{cases}$

a) Scrieţi un program care pentru inputurile: g (funcţie pozitivă dată ca "function handle"), a, b ($a < b$), M (astfel încât M este mai mare sau egal decât maximul lui g pe intervalul $[a, b]$) şi n, generează aleator n puncte uniform distribuite în dreptunghiul $[a, b] \times [0, M]$ şi desenează, cu o anumită culoare, pe cele care aparţin subgraficului funcţiei g. Desenaţi şi graficul funcţiei g pe intervalul $[a, b]$. Testaţi programul cu funcţiile de mai sus.

b) Implementaţi în Matlab cele două metode Monte Carlo pentru integrarea numerică a unei funcţii continue $g : [a, b] \to [0, \infty)$. Testaţi programele realizate cu funcţiile de mai sus. Comparaţi rezultatele obţinute cu rezultatele date de funcţia `integral`.

3. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 şi I_2. Calculatorul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0,4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0,6. I_1 printează un poster $A2$ în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia $Exp(\frac{1}{5})$, iar I_2 printează un poster $A2$ în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă $Unif[4, 6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer. Estimaţi:

a) valoarea medie şi deviaţia standard pentru timpul (în secunde) de printare a posterului;

b) probabilitatea ca timpul de printare a posterului să fie mai mare decât 5 secunde.

c) probabilitatea ca printarea să fie efectuată de imprimanta I_2, ştiind că timpul de printare a posterului este mai mare decât 5 secunde.