Problema 10.9 Să se afle ecuația suprafeței de rotație obținute prin rotirea dreptei $x - y = a$, $z = 0$ în jurul dreptei $x = y = z$

$$C : \begin{cases} x - y - a = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Axa : $$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Ecuațiile cercului generator sunt:

$$(\Gamma) \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \lambda^2 \\ lx + my + nz = \mu \end{cases}$$

$$(\Gamma) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \end{cases}$$

Condiția de compatibilitate se obține eliminând x, y, z din sistemul

$$\begin{cases} x - y - a = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 \\ x + y + z = \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - a = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 = \lambda^2 \\ x + y = \mu \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x - y = a \\ x + y = \mu \\ \hline 2x = \mu + a \end{array} +$$

$$x = \frac{1}{2}(\mu + a)$$

$$y = \mu - x$$
$$y = \mu - \frac{1}{2}(\mu + a)$$
$$y = \mu - \frac{\mu}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\mu}{2} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(\mu - a)$$

$$x^2 + y^2 = t^2$$
$$\left[\frac{1}{2}(\mu + a)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(\mu - a)\right]^2 = t^2$$
$$\frac{1}{4}(\mu^2 + 2a\mu + a^2) + \frac{1}{4}(\mu^2 - 2a\mu + a^2) = t^2$$
$$\frac{1}{4}(2\mu^2 + 2a^2) = t^2$$
$$\frac{1}{2}(\mu^2 + a^2) = t^2$$

Ecuația suprafeței se obține eliminând parametrii t și μ din sistemul format din ecuațiile cercului generator și relația de legătură

$$\begin{cases} t^2 = \frac{1}{2}(\mu^2 + a^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = t^2 \\ x + y + z = \mu \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2 + a^2\right]$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + a^2)$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + a^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - a^2 = 0$$