Geometrie pentru informaticieni
Seminar

Paul A. Blaga

SEMINARUL 7

Secţiuni conice

7.1 Elipsa

Problema 7.1. Stabiliţi ecuaţia unei elipse ale cărei focare se află pe axa Oy şi sunt simetrice faţă de origine în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) semiaxele sunt egale, respectiv, cu 5 şi 3;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar axa mare este egală cu 10;

3) axa mare este egală cu 26, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Soluţie. 1) ecuaţia este

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Avem $c = 3$. Dar $3 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - b^2}$, de unde rezultâ că $b^2 = 16$, adică $b = 4$. Ecuaţia elipsei va fi, deci,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) Avem $a = 13$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{13}\sqrt{169 - b^2} = \frac{12}{13}.$$

De aici deducem imediat că $b = 5$, deci ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

□

Problema 7.2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$3x + 2y + 7 = 0.$$

Prima soluţie. Scriem ecuaţia tangentei prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct de pe elipsă. Ecuaţia tangentei în M_0 este

$$\frac{xx_0}{10}+\frac{yy_0}{5}=1.$$

Tangenta este paralelă cu dreapta dată dacă şi numai dacă vectorii normali la cele două drepte sunt paraleli, adică avem

$$\frac{\frac{x_0}{10}}{3}=\frac{\frac{y_0}{5}}{2}$$

sau

$$x_0=3y_0.$$

Pe de altă parte, punctul M_0 este pe elipsă, deci avem

$$\frac{x_0^2}{10}+\frac{y_0^2}{5}=1.$$

Suntem, astfel, conduşi la sistemul

$$\begin{cases} x_0=3y_0, \\ \dfrac{x_0^2}{10}+\dfrac{y_0^2}{5}=1. \end{cases}$$

Dacă înlocuim prima ecuaţie în a doua, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$11y_0^2=10,$$

ceea ce înseamnă că cele două soluţii ale sistemului sunt coordonatele punctelor (de pe elipsă!) $M_{01}\left(3\sqrt{\frac{10}{11}},\sqrt{\frac{10}{11}}\right)$ şi $M_{02}\left(-3\sqrt{\frac{10}{11}},-\sqrt{\frac{10}{11}}\right)$. Dacă înlocuim coordonatele celor două puncte de contact în ecuaţia tangentei prin dedublare, obţinem, după un calcul simplu, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată:

$$3x+2y\pm\sqrt{110}=0.$$

□

Soluţia a doua. Se ştie (vezi cursul) că tangentele la elipsa de semiaxe a şi b, paralele cu o dreaptâ de pantă k au ecuaţiile

$$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}.$$

În cazul nostru, în mod evident, panta este $k=-3/2$, semiaxa mare este $a=\sqrt{10}$, iar semiaxa mică este $b=\sqrt{5}$. Prin urmare, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată vor fi

$$y=-\frac{3}{2}x\pm\sqrt{10\cdot\frac{9}{4}+5}$$

sau

$$3x+2y\pm\sqrt{110}=0,$$

adică tocmai ecuaţiile pe care le-am obţinut mai sus, prin medoda dedublării. □

Observaţie. Deşi ambele metode utilizate sunt corecte, dacă nu ni se cere să determinăm şi punctele de contact, cea de-a doua medodă este, fireşte, mult mai economică şi o vom folosi întotdeauna pentru rezolvarea unor probleme de acest tip.

Problema 7.3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$x^2 + 4y^2 = 20$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$(d) : 2x - 2y - 13 = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia canonică a elipsei este, în mod evident,

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

deci $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Panta dreptei d este egală cu 1. Cum tangentele trebuie să fie perpendiculare pe dreaptă, înseamnă că panta lor trebuie să fie egală cu -1, aşadar ele două tangente vor avea ecuaţiile

$$y = -x \pm \sqrt{20 \cdot 1 + 5}$$

sau

$$x + y \pm 5 = 0.$$

□

Problema 7.4. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$4x - 2y + 23 = 0$$

şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Avem $a^2 = 30$, $b^2 = 24$. Panta dreptei (care coincide cu panta tangentelor) este egalâ cu 2. Prin urmare, ecuaţiile celor două drepte paralele cu dreapta dată vor fi

$$y = 2x \pm \sqrt{30 \cdot 4 + 24}$$

sau

$$2x - y \pm 12 = 0.$$

Fie, acum, t_1 şi t_2 cele două tangente:

$$t_1 : 2x - y + 12 = 0,$$

$$t_2 : 2x - y - 12 = 0.$$

Avem două posibilităţi de a determina distanţa dintre cele două drepte (paralele!):

- Determinăm un punct M_1 de pe dreapta t_1 şi apoi calculăm distanţa de la acest punct până la dreapta t_2. Dacă, de exemplu, punem, în ecuaţia dreptei t_1, $x = 0$, obţinem $y = 12$, deci găsim punctul $M_1(0, 12)$. Atunci
$$d(M_1, t_2) = \frac{|2 * 0 - 12 - 12|}{\sqrt{4+1}} = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

- Scriem ecuaţiile celor două tangente sun forma normală (Hesse). Atunci termenii liberi (cu semn schimbat) vor reprezenta distanţele de la origine până la tangente, prin urmare, distanţa dintre cele două tangente este suma distanţelor de la origine până la ele, dacă ele nu sunt de aceeaşi parte a originii (adică originea se află între ele) sau modulul diferenţei distanţelor de la origine la tangente, dacă ele se află de aceeaşi parte a originii.

  Avem
$$t_1 : -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0,$$
$$t_2 : \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0.$$

  În mod clar, tangentele nu se află de aceeaşi parte a originii, deci avem
$$d(t_1, t_2) = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

□

Problema 7.5. Din punctul $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ se duc tangente la elipsa
$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1.$$
Scrieţi ecuaţiile lor.

Soluţie. Un calcul simplu ne arată că A este exterior elipsei, deci punem, într-adevăr, duce *două* tangente din A la elipsă. Constăm, de asemenea, că A nu se află pe o dreaptă verticală care să treacă prinrt-unul dintre capetele axei mari (orizontale) a elipsei, deci nici una dintre tangente nu va fi verticalâ.

Considerăm acum o tangentă la elipsă de pantă k (care urmează a fi determinată). După cum se ştie, o astfel de tangentă va avea ecuaţia
$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$
sau, în cazul nostru concret,
$$y - kx = \pm\sqrt{10k^2 + 5}. \tag{7.1.1}$$
Dacă ridicăm la pătrat ecuaţia (7.1.1), obţinem
$$y^2 - 2kxy + k^2x^2 = 10k^2 + 5.$$
Dacă punem condiţia ca tangenta să treacă prin A, ecuaţia de mai sus devine:
$$\frac{25}{9} - 2\cdot\frac{50}{9}k + \frac{100}{9}k^2 = 10k^2 + 5,$$
ceea ce ne conduce la ecuaţia în k
$$k^2 - 10k - 2 = 0, \tag{7.1.2}$$
ale cărei soluţii sunt
$$k_1 = 5 + 3\sqrt{3} \quad \text{şi} \quad k_2 = 5 - 3\sqrt{3}.$$
Aşadar, ecuaţia primei tangente este
$$y - \frac{5}{3} = (5 + 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$
iar ecuaţia celei de-a doua tangente este
$$y - \frac{5}{3} = (5 - 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$

□

Problema 7.6. Din punctul $C(10,-8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Soluţie. Întrucât, de data aceasta, nu ni se cer ecuaţiile tangentelor ci punctele de contact, procedăm altfel decât în cazul problemei precedente. Remarcăm, şi de data aceasta, că punctul C este situat în afara elipsei şi nu este situat pe una dintre tangentele verticale la aceasta.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia elipsei sub forma

$$16x^2+25y^2-400=0.$$

Tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$ al elipsei se scrie sub forma

$$16xx_0+25yy_0-400=0.$$

Cum tangenta trebuie să treacă prin punctul C, coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia tangentei, prin urmare avem

$$160x_0-200y_0-400=0$$

sau

$$4x_0-5y_0-10=0. \tag{7.1.3}$$

Noi vrem să determinâm coordonatele punctului M_0, prin urmare avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta rezultă din faptul că punctul se află pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia elipsei. Suntem conduşi, aşadar, la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}16x_0^2+25y_0^2-400=0,\\ 4x_0-5y_0-10=0.\end{cases} \tag{7.1.4}$$

Sistemul (7.1.4) este uşor de rzolvat şi ne conduce la soluţiile

$$x_{01,2}=\frac{5}{4}\left(1\pm\sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad y_{01,2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

Aşadar punctele de intersecţie cu elipsa a celor două tangente din C sunt

$$M_1\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1+\sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1-\sqrt{7}\right).$$

Dreapta determinată de punctele de contact este dreapta M_1M_2:

$$\frac{x-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{4}(1-\sqrt{7})-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{-1-\sqrt{7}-(-1+\sqrt{7})}$$

sau

$$\frac{x-\frac{5}{4}(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{2}}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{2},$$

de unde

$$2x-\frac{5}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)=\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}\left(-1+\sqrt{7}\right)$$

sau

$$2x-\frac{5}{2}y-5=0$$

sau, în fine,

$$M_1M_2: 4x-5y-10=0.$$

□

Problema 7.7. O elipsă trece prin punctul $A(4,-1)$ şi este tangentă dreptei $x+4y-10=0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

sau

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2. \tag{7.1.5}$$

Ceea ce trebuie să facem este să determinăm semiaxele (sau, ceea ce este acelaţi lucru, pătratele lor). Avem nevoie, deci, de două ecuaţii. Prima o obţinem din condiţia ca punctul A să aparţină elipsei, adică

$$a^2+16b^2=a^2b^2. \tag{7.1.6}$$

Întrucât dreapta dată este tangentă la elipsă, sistemul de ecuaţii care ne dă punctul de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă trebuie să aibă soluţie dublă, deoarece contactul de tangenţă înseamnă că dreapta şi elipsa au două puncte comune confundate. Acest sistem de ecuaţii este

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,\\ x+4y-10=0.\end{cases}$$

Dacă înlocuim pe x din a doua ecuaţie în prima (adică punem în prima ecuaţie $x=-2(2y-5)$), obţinem ecuaţia de gradul doi în y

$$\left(a^2+16vb^2\right)y^2-80b^2y+b^2(100-a^2)=0.$$

Pentru ca sistemul de mai sus să aibă soluţie dublă (mai precis, să furnizeze puncte de contact confundate), discriminantul ecuaţie de gradul doi în y trebuie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$\Delta\equiv 4a^2b^2\left(a^2+16b^2-100\right)=0.$$

Dar a şi b sunt semiaxele unei elipse, deci trebuie să fie numere reale strict pozitive, aşadar din condiţia de mai sus obţinem ecuaţia în a şi b

$$a^2+16b^2=100 \tag{7.1.7}$$

Aşadar, pentru a determina semiaxele elipsei care îndeplineşte cerinţele problemei, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii următor (pe care îl privim ca fiind un sistem în a^2 şi b^2):

$$\begin{cases} a^2+16b^2=a^2b^2,\\ a^2+16b^2=100.\end{cases} \tag{7.1.8}$$

Sistemul (7.1.8) este foarte uşor de rezolvat şi ne conduce la soluţiile

$$a^2=80,\ b^2=\frac{5}{4},$$

respectiv

$$a^2=20,\ b^2=5.$$

Ambele soluţii sunt acceptabile (în sensul că, în ambele situaţii, a^2 şi b^2 sunt numere strict pozitive) şi ne conduc la cele două soluţii ale problemei:

$$\frac{x^2}{80}+\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1,$$

respectiv

$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1.$$

□

Problema 7.8. Determinaţi ecuaţia unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate şi care este tangentă dreptelor $3x-2y-20=0$ şi $x+6y-20=0$.

Soluţie. Considerăm elipsa

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0.$$

Pentru a determina elipsa, trebuie să determminăm semieaxele lor, a şi b (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Vom stabili mai întâi o condiţie necesară şi suficientă ca o dreaptă dată prin ecuaţia generală

$$Ax+By+C=0$$

să fie tangentă elipsei. După cum am mai văzut, această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul de ecuaţii care determină punctele de contact dintre elipsă şi dreaptă să aibă soluţie dublă. Este vorba despre sistemul

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \\ Ax+By+C=0. \end{cases} \tag{7.1.9}$$

Să presupunem că, în a doua ecuaţie din sistemul (7.1.9), coeficientul B este nenul. Atunci putem scrie

$$y=-\frac{Ax+C}{B}$$

şin după înlocuirea în prima ecuaţie a sistemului, obţinem ecuaţia de gradul al doilea în x

$$\left(a^2A^2+b^2B^2\right)x^2+2a^2ACx+a^2\left(C^2-b^2B^2\right)=0. \tag{7.1.10}$$

Condiţia pe care trebuie să o punem este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să se anuleze. Un calcul simplu ne conduce la

$$\Delta=4a^2b^2B^2\left(a^2A^2+b^2B^2-C^2\right). \tag{7.1.11}$$

Din relaţia (7.1.11) rezultă că Δ se anulează dacă şi numai dacă

$$a^2A^2+b^2B^2=C^2. \tag{7.1.12}$$

Exact aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A\neq 0$.ăţia (7.1.12) celor două drepte din enunţ şi obţinem, pentru a^2 şi b^2 sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 9a^2+4b^2=400, \\ a^2+36b^2=400. \end{cases} \tag{7.1.13}$$

Sistemul (7.1.13) este liniar în a^2 şi b^2 şi rezolvarea lui ne conduce la $a^2=40, b^2=10$, adică elipsa căutată are ecuaţia

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{10}=1.$$

□

7.2 Hiperbola

Problema 7.9. Stabiliţi ecuaţia unei hiperbole ale cărei focare sunt situate pe axa Ox, simetric faţă de origine şi care satisface unul dintre următoarele seturi de condiţii suplimentare:

1) axele sunt date de $2a=10$ şi $2b=8$;

2) distanţa dintre focare este $2c=6$, iar excentricitatea este $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

3) ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm\frac{4}{3}x,$$

iar distanţa dintre focare este $2c = 20$;

Soluţie. 1) Semiaxele sunt $a = 5$ şi $b = 4$, deci ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2) Determinăm mai întâi semiaxele. Avem:

$$c = 3 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

adică $a^2 + b^2 = 9$, iar excentricitatea fiind egală cu $3/2$, avem

$$\frac{3}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$

de unde deducem că $a = 2$, prin urmare $b \equiv \sqrt{9 - a^2} = \sqrt{5}$. Aşadar, ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

3) Avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3}, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10. \end{cases}$$

Obţinem imediat că $a = 6, b = 8$, deci ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

□

Problema 7.10. Se dă hiperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Să se determine:

1) semiaxele;

2) focarele;

3) ecuaţiile asimptotelor;

Soluţie. Scriem, mai întâi, hiperbola sub forma canonică. Împărţim cu 144 şi obţinem:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

De aici deducem imediat că:

1) Semiaxele sunt $a = 3$ şi $b = 4$.

2) Semidistanţa focală este $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, deci focarele sunt $F_1(-5, 0)$ şi $F_2(5, 0)$

3) Cele două asimptote sunt date de ecuaţiile

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

□

Problema 7.11. Calculaţi aria triunghiului format de dreapta

$$9x+2y-24=0.$$

şi de tangentele la hiperbola

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

în punctele de intersecţie cu dreapta.

Soluţie. Punctele de intersecţie dintre hiperbolă şi dreaptă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 9x^2-4y^2-36=0, \\ 9x+2y-24=0. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Rezolvând sistemul, obţinem punctele

$$M_1\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2},\frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2},\frac{-6+9\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ecuaţia tangentei în M_1 este

$$t_1 : 9\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)x-4\left(\frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right)y-36=0$$

sau

$$t_1 : 9\left(6+\sqrt{2}\right)x+2\left(6+9\sqrt{2}\right)y-72=0,$$

iar ecuaţia tangentei în M_2 este

$$t_2 : 9\left(6-\sqrt{2}\right)x+2\left(6-9\sqrt{2}\right)y-72=0.$$

De aici rezultă imediat că cel de-al treilea vârf al triunghiului, în care se intersectează cele două tangente, este $M_3\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{4}\right)$.

Prin urmare, aria triunghiului $M_1M_2M_3$ va fi dată de

$$\mathscr{A}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{6+\sqrt{2}}{2} & \frac{-6-9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{6-\sqrt{2}}{2} & \frac{-6+9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix}=\pm\frac{1}{128}\begin{vmatrix} 2(6+\sqrt{2}) & -6-9\sqrt{2} & 4 \\ 2(6-\sqrt{2}) & -6+9\sqrt{2} & 4 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}=3\sqrt{2}.$$

□

Problema 7.12. Focarele unei hiperbole coincid cu cele ale elipsei

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că excentricitatea ei este egală cu 2.

Soluţie. Parametrul focal al elipsei este $c=\sqrt{a^2-b^2}$, deci, în cazul nostru, $c=4$. Aşadar, focarele elipsei (deci şi ale hiperbolei) sunt $F_1(-2,0)$ şi $F_2(2,0)$. Fie a' şi b' semiaxele hiperbolei. După cum se ştie, în cazul hiperbolei, parametrul c este legat de semiaxe prin relaţia $c=\sqrt{a'^2+b'^2}$, prin urmare avem

$$a'^2+b'^2=16.$$

Excentricitatea hiperbolei fiind egală cu 2, rezultă că avem

$$2=\frac{c}{a'}=\frac{4}{a'},$$

de unde rezultă că $a'=2$, ceea ce înseamnă că

$$b'=\sqrt{16-a'^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

Prin urmare, ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

□

Problema 7.13. Demonstraţi că produsul distanţelor de la orice punct de pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

până la asimptote este constant, egal cu $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Soluţie. Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct oarecare de pe hiperbolă. Cele două asimptote au ecuaţiile

$$as_1: y=\frac{b}{a}x$$

sau

$$as_1: bx-ay=0,$$

respectiv

$$as_2: bx+ay=0.$$

Cele două distanţe sunt:

$$d_1\equiv d(M_0,as_1)=\frac{|bx_0-ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

respectiv

$$d_2\equiv d(M_0,as_2)=\frac{|bx_0+ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Prin urmare,

$$d_1\cdot d_2=\frac{|b^2x_0^2-a^2y_0^2|}{a^2+b^2}.$$

Dar, cum punctul M_0 este pe hiperbolă, avem

$$b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2,$$

de unde rezultă că

$$d_1\cdot d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

□

Problema 7.14. Demonstraţi că aria paralelogramului format de asimptotele la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

şi de dreptele duse prin orice punct al hiperbolei, paralele cu asimptotele, este constantă, egală cu $\frac{ab}{2}$.

Soluţie. Fie $A(x_0,y_0)$ un punct de pe hiperbolă. Cele două asimptote au ecuaţiile

$$as_1 : y=\frac{b}{a}x,$$

respectiv

$$as_2 : y=-\frac{b}{a}x.$$

Dreapta care trece prin A şi este paralelă cu as_1 va avea ecuaţia

$$d_1 : y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0),$$

în timp ce dreapta care trece prin A şi este paralelă cu asimptota a doua are ecuaţia

$$d_2 : y-y_0=-\frac{b}{a}(x-x_0).$$

Fie $B=as_1\cap d_2$, $C=as_1\cap as_2$, $D=as_2\cap d_1$. Atunci paralelogramul a cărui arie o căutăm este paralelogramul $ABCD$. Aria sa este egală cu de două ori aria triunghiului ABC. Prin urmare, pentru a determina această arie, este suficient să determinăm coordonatele vârfurilor B şi C. C fiind punctul de intersecţie a asimptotelor, el coincide cu originea, deci tot ce mai trebuie să facem este să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x,\\ y-y_0=-\dfrac{b}{a}(x-x_0).\end{cases}$$

Obţinem imediat $B\left(\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{b}y_0\right),\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right)\right)$. Conform celor spuse mai sus, aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului ABC, adică

$$\mathscr{A}=\left|\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1\\ \frac{1}{2}\left(x_0+\frac{a}{b}y_0\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0+y_0\right) & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2ab}\left|b^2x_0^2-a^2y_0^2\right|=\frac{ab}{2},$$

unde, pentru a scrie ultima egalitate, am folosit faptul că punctul A se află pe hiperbolă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia acesteia. □

Problema 7.15. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x+3y-7=0.$$

Soluţie. După cum ştim, tangentele la hiperbolă de pantă k au ecuaţile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Astfel de tangente există dacă şi numai dacă expresia de sub radical este strict pozitivă:

$$|k| > \frac{b}{a}.$$

În cazul nostru, panta dreptei date este egală cu $-\frac{4}{3}$, deci panta tangentei (care e perpendiculară pe dreapta dată!) trebuie să fie

$$k = \frac{3}{4} > \frac{b}{a} \equiv \frac{1}{2}.$$

Aşadar, ecuaţiile tangentelor de pantă k sunt

$$y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{20 \cdot \frac{9}{16} - 5}$$

sau

$$3x - 4y \pm 10 = 0.$$

□

Problema 7.16. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$10x - 3y + 9 = 0.$$

Soluţie. Ca în cazul problemei precedente, ecuaţiile acestor tangente sunt

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2},$$

unde, acum, k este chiar panta dreptei date, adică

$$k = \frac{10}{3}.$$

Prin urmare, avem,

$$y = \frac{10}{3}x \pm \sqrt{16 \cdot \frac{100}{9} - 64}$$

sau

$$10x - 3y \pm 32 = 0.$$

□

Problema 7.17. O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x + 2y - 15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Căutăm, mai întâi, condiţia general ă pentru ca o dreaptă de ecuaţie

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangent ă unei hiperbole de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1.$$

Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $B \neq 0$. Atunci

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$\left(a^2 A^2 - b^2 B^2\right) x^2 + 2a^2 ACx + a^2 \left(b^2 B^2 + C^2\right) = 0.$$

Condiţia de tangenţă impune ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero. Dar

$$\Delta = 4a^2 b^2 B^2 \left(a^2 A^2 - b^2 B^2 - C^2\right) = 0.$$

Dar a şi B nu se anulează (ele sunt numere strict pozitive), în timp ce B este diferit de zero prin ipoteză. Prin urmare, dreapta este tangentă hiperbolei dacă şi numai dacă avem

$$a^2 A^2 - b^2 B^2 = C^2.$$

Ecaxt aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.

În cazul nostru concret, condiţia de mai sus devine

$$81a^2 - 4b^2 = 225.$$

Aceasta este prima ecuaţie pentru determinarea pătratelor semiaxelor. A doua se obţine din condiţia ca punctul M să se afle pe hiperbolă, ceea ce ne conduce la

$$9a^2 - 6b^2 + a^2 b^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii, obţinem $a^2 = 10/3$, $b^2 = 45/4$ sau $a^2 = 5$, $b^2 = 45$, de unde rezultă ecuaţiile celor două hiperbole care îndeplinesc condiţiile din enunţul problemei. □

7.3 Parabola

Problema 7.18. Determinaţi ecuaţia unei parabole cu vârful în origine dacă axa parabolei este axa Ox şi parabola trece prin punctul $A(9,6)$.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma $y^2 = 2px$. Sigurul parametru care trebuie determinat este parametrul parabolei, p. Din condiţia ca A să fie pe parabolă, obţinem:

$$36 = 2 \cdot p \cdot 9,$$

de unde rezultă că $p = 2$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 4x.$$

□

Problema 7.19. Să se afle locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola $y^2 = 2px$.

Soluţie. Ecuaţia tangentei de pantă k la parabolă este

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Tangenta perpendiculară va avea panta $-1/k$, deci va fi de ecuaţie

$$y = -\frac{1}{k}x - \frac{kp}{2}.$$

Ajungem acum la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} my = m^2 x + \dfrac{p}{2}, \\ -my = x + \frac{m^2 p}{2}. \end{cases}$$

Dacă adunăm cele două ecuaţii, obţinem

$$(m^2+1)\left(x+\frac{p}{2}\right) = 0,$$

de unde

$$x = -\frac{p}{2},$$

adică locul geometric este directoarea parabolei. □

Problema 7.20. Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că ea este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$ şi determinaţi punctul de tangenţă.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma

$$y^2 - 2px = 0.$$

Vom stabili condiţia necesară şi suficientă pentru ca parabola să fie tangentă dreptei

$$Ax + By + C = 0.$$

din ecuaţia parabolei deducem imediat că

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia dreptei, obţinem

$$A \cdot \frac{y^2}{2p} + By + C = 0$$

sau

$$Ay^2 + 2pBy + 2pC = 0.$$

condiţia de tangenţă este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să fie egal cu zero, adică

$$4p^2B^2 - 8ACp = 0$$

sau

$$p^2B^2 - 2ACp = 0.$$

Cum p este parametrul parabolei, el nu se poate anula, deci condiţia de mai sus devine

$$pB^2 - 2AC = 0.$$

Scopul nostru este să determinăm p din condiţia de tangenţă. Dacă $B = 0$, adică dreapta este verticală, atunci fie nu avem soluţii (dacă $C \neq 0$), fie orice parabolă ne furnizează o soluţie, dacă $C = 0$. În acest ultim caz, problema este nedeterminată. Dacă $A = 0$, pe de altă parte, singura soluţie ar fi $p = 0$, care nu este acceptabilă (parabola nu are tangente paralele cu axa de simetrie!). Dacă nici A, nici B, nici C nu se anulează, atunci

$$p = \frac{2AC}{B^2}.$$

În cazul nostru concret, obţinem $p = 6$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 12x.$$

Dacă rezolvăm sistemul de ecuaţii format din ecuaţia parabolei, pe xcare tocmai am determinat-0 şi ecuaţia tangentei, obţinem punctul de contact $M_0\left(\frac{4}{3}, 4\right)$. □

Problema 7.21. Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că tangenta paralelă cu dreapta $5x-4y-2=0$ trece prin punctul $A(4,7)$.

Soluţie. panta tangentei este $k=5/4$. Ecuaţia tangentei de pantă $5/4$ este

$$y=\frac{5}{4}x+\frac{2}{5}p.$$

Dacă impunem condiţia ca A să se afle pe tangentă, obţinem

$$7=\frac{5}{4}\cdot 4+\frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă imediat că $p=5$, adică ecuaţia parabolei este

$$y^2=10x.$$

□

Problema 7.22. Din punctul $A(5,9)$ ducem tangente la parabola $y^2=5x$. Stabiliţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de tangenţă.

Soluţie. După cum ştim, ecuaţia care ne dă pantele tangentelor duse dintr-un punct exterior $M_1(x_1,y_1)$ la parabola de parametru p este

$$2x_1k^2-2y_1k+p=0.$$

În cazul nostru concret, $x_1=5, y_1=9, p=5/2$, deci ecuaţia devine

$$10k^2-18k+\frac{5}{2}=0$$

sau

$$20k^2-36k+5=0.$$

Discriminantul ecuaţiei este strict pozitiv (ceea ce înseamnă că A este, într-adevăr, exterior parabolei!) şi obţinem

$$k_{1,2}=\frac{9\pm 2\sqrt{14}}{10}.$$

Pe de altă parte, ecuaţia tangentei într-un punct $M_0(x_0,y_0)$ al parabolei este

$$yy_0=\frac{5}{2}(x+x_0),$$

adică panta tangentei este

$$k=\frac{5}{2y_0},$$

de unde

$$y_0=\frac{5}{2k},$$

în timp ce, punctul fiind pe parabolă,

$$x_0=\frac{y_0^2}{5}=\frac{5}{4k^2}.$$

Dacă punem $k=k_1$, obţinem

$$x_{01}=\frac{125}{\left(9+2\sqrt{14}\right)^2},\quad y_{01}=\frac{25}{9+2\sqrt{14}},$$

în timp ce pentru $k = k_2$, obţinem

$$x_{02} = \frac{125}{\left(9-2\sqrt{14}\right)^2}, \quad y_{01} = \frac{25}{9-2\sqrt{14}}.$$

Coarda căutată este dreapta $M_{01}M_{02}$. Se obţine uşor pentru ea ecuaţia:

$$5x - 18y + 25 = 0.$$

□