Seminar 9

Problema 9.2.13.2: Utilizând metoda tabelelor semantice (construind arborele binar), demonstrați distributivitatea cuantificatorului "$\forall$" față de "$\wedge$":

$$\vdash (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \leftrightarrow (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x))$$

<u>Rezolvare:</u>

$$U = (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \leftrightarrow (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\neg U = \neg((\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \leftrightarrow (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)))$$

$$\neg U = \neg(((\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \longrightarrow (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x))) \wedge ((\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x))) \text{ - } \mathbf{(1)}$$

$\beta(1)$

$\neg((\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x) \longrightarrow (\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)))$ **(2)**

$\alpha(2)$

$\neg((\forall x)\,(P(x) \wedge Q(x)) \longrightarrow (\forall x)\, P(x) \wedge (\forall x)\, Q(x))$ **(3)**

$\alpha(3)$

$(\forall x)\ P(x) \land (\forall x)\ Q(x)$ **(4)**

$\neg (\forall x)\ (P(x) \land Q(x))$ **(5)**

$\boldsymbol{\alpha}(4)$

$(\forall x)\ P(x)$ **(6)**

$(\forall x)\ Q(x)$ **(7)**

$\boldsymbol{\delta}(5)$ - a

constantă nouă

$\neg (P(a) \land Q(a))$ **(8)**

$\boldsymbol{\beta}(8)$

$(\forall x)\ (P(x) \land Q(x))$ **(9)**

$\neg ((\forall x)\ P(x) \land (\forall x)\ Q(x))$ **(10)**

$\boldsymbol{\beta}(10)$

$\neg (\forall x)\ P(x)$ **(11)** $\neg (\forall x)\ Q(x)$ **(12)**

$\boldsymbol{\delta}(11)$ - b

ct. nouă

$\boldsymbol{\delta}(12)$ - c

ct. nouă

$\neg P(b)$ $\neg Q(c)$

$\boldsymbol{\gamma}(9)$ - b

ct. exist.

$\boldsymbol{\gamma}(9)$ - c

ct. exist.

$(P(b) \land Q(b))$ **(13)** $(P(c) \land Q(c))$ **(14)**

¬ P(a)

γ(6) - a

ct. existentă

P(a)

(∀x) P(x) **(6’) - copie**

γ(7) - a

ct. existentă

Q(a)

(∀x) Q(x) **(7’) - copie**

⊗

¬ Q(a)

γ(6) - a

ct. existentă

P(a)

(∀x) P(x) **(6’) - copie**

γ(7) - a

ct. existentă

Q(a)

(∀x) Q(x) **(7’) - copie**

⊗

(∀x) (P(x) ∧ Q(x)) **(9’) - copie**

α(13)

P(b)

Q(b)

⊗

(∀x) (P(x) ∧ Q(x)) **(9’) - copie**

α(14)

P(c)

Q(c)

⊗

Pornind de la negația (¬ U) a formulei inițiale (U), am obținut o tabelă semantică închisă (cu toate ramurile închise). Din TCC rezultă că formula inițială este tautologie (distributivitatea cuantificatorului ”∀” față de ”∧”).