Problema 1 *Se consideră polinoamele*

$$P_n^{(\lambda)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^2 n!} \left(1-t^2\right)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \left[\left(1-t^2\right)^{n+\lambda-\frac{1}{2}}\right].$$

(a) *Să se arate că sunt ortogonale pe* $[-1,1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \left(1-t^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. *(1p)*

(b) *Să se determine coeficienţii relaţiei de recurenţă* α_k *şi* β_k. *(1p)*

(c) *Să se implementeze în MATLAB o rutină pentru o cuadratură Gaussiană de forma*

$$\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(t_k).$$

(1p)

(d) *Să se aproximeze* $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{1-t^2} \cos t\,\mathrm{d}t$ *folosind rutina de la punctul (c) şi 5 noduri. (1p)*

(e) *Daţi o estimare a erorii de la punctul (d). (1p)*

Problema 2 *Uneori metoda lui Newton poate avea ordinul* $p > 2$.

(a) *Dăm o astfel de situaţie. Fie* α *un zero simplu al lui* f *şi* $f \in C^p$ *în vecinătatea lui* α, *unde* $p \geq 3$. *Arătaţi că: dacă* $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 2,\dots,p-1$ *şi* $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, *atunci metoda lui Newton aplicată lui* $f(x) = 0$ *converge local către* α *cu ordinul* p. *Determinaţi constanta de eroare asimptotică. (2p)*

(b) *Deduceţi o metodă pentru calculul lui* $\sqrt[4]{a}$, *aplicând rezultatul precedent funcţiei* $f(x) = x^{4-\lambda} - ax^{-\lambda}$, *pentru un* λ *convenabil.(1p)*

Cât este ordinul de convergenţă? (2p)