3.4.14 (a) $e = [e_1, e_2, e_3]$ - baza canonică pt $\mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = [3x_1 + x_2, -4x_1 - x_2, -4x_1 - 8x_2 - 2x_3]$$

Matricea lui $f$ în raport cu baza canonică

$$f(e_1) = f[1, 0, 0] = [3 \cdot 1 + 0, -4 \cdot 0 + 0, -4]$$

$$f(e_1) = [3, 0, -4]$$

$$f(e_2) = [3 \cdot 0 + 1, -1, -8 \cdot 1] = [1, -1, -8]$$

$$f(e_3) = [0, 0, -2]$$

$$[f]_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix} = A$$

$$p_f(t) = \det(t I_3 - A)$$

$$t I_3 - A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$t I_3 - A = \begin{pmatrix} t-3 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 4 & 8 & t+2 \end{pmatrix}$$

$$\det(t I_3 - A) = \begin{vmatrix} t-3 & -1 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 4 & 8 & t+2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-3)(t+1)(t+2) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 =$$

$$= (t-3)(t+1)(t+2) \Rightarrow \text{Răd. } p_f(t) \text{ sunt } t_1 = 3, t_2 = -1, t_3 = -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{deci } p_f(t) = 3 \\ f \text{ are 3 valori proprii distincte} \end{array}\right\} \xRightarrow{3.1.13} f \text{ este diagonalizabil}$$

Corolar 3.1.13 Dacă $f$ are $n$ valori proprii distincte înt al $f$ este diagonalizabil (n = gradul polinomului)

Cazul I $\lambda = 3$

Considerăm $x = [x_1, x_2, x_3]$

Punem condiția $f(x) = 3x$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -16$

$x_1, x_2$ - nec. principale $x_3 = \alpha$ nec. secundară

$$\Rightarrow \begin{cases} 0x_1 + 4x_2 = 0 & | \cdot (-2) \\ 4x_1 + 8x_2 = -5\alpha \end{cases} +$$

$4x_1 = -5\alpha$

$x_1 = -\frac{5}{4}\alpha$

$8x_2 = -5\alpha - 4 \cdot \frac{5}{4}\alpha$

$8x_2 = -10\alpha \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{4}\alpha$

$S_1 = \{(-\frac{5}{4}\alpha, -\frac{5}{4}\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\}$

Alegând $\alpha = 4 \Rightarrow$ obținem vectorul $v_1 = [-5, -5, 4]$

Cazul II $\lambda = -1$

Considerăm $x = [x_1, x_2, x_3]$

Punem condiția $f(x) = -1x$

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -28$$

$x_1, x_2$ - nec. principale, $x_3 = \alpha$ - nec. sec.

$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = -\alpha \end{cases} +$$

$$7x_2 = -\alpha \iff x_2 = -\frac{1}{7}\alpha$$

$$-4x_1 = -\frac{1}{7}\alpha$$

$$-x_1 = \frac{1}{28}\alpha$$

$$S_2 = \{ (\tfrac{1}{28}\alpha, -\tfrac{1}{7}\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$$

Alegând $\alpha = 28$ obținem $v_2 = [1, -4, 28]$

Cazul III $\lambda = -2$

Considerăm $x = [x_1, x_2, x_3]$

Punem condiția $f(x) = -2x$

$$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \qquad d_2 = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$x_1, x_2$ - nec. principale, $x_3 = \alpha$ nec. secundare

$$\left.\begin{cases} -5x_1 - x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x_1 = 0$$

$S_3 = \{(0, 0, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Alegând $\alpha = 1$ obținem $v_3 = [0, 0, 1]$

În baza $\mathcal{B} = [v_1, v_2, v_3]^t$, având

$f(v_1) = 3 \cdot v_1$

$f(v_2) = -v_2$

$f(v_3) = -2v_3$,

matricea asociată lui $f$ este

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$