Problema 9.8: Să se găsească un punct al elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $a>b>c>0$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmentele de lungime egală pe axele de coordonate.

Pasul 1: Considerăm un punct de pe elipsoid

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\Rightarrow$ coordonatele verifică ec. elipsoidului

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0 \iff \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$$

Pasul 2: Ecuația planului tangent la elipsoid în M_0:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1 \quad \text{(prin dedublare)}$$

Pasul 3: Ecuația planului prin tăieturi:

$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$ și impunem condiția ca acest plan să determine segmente egale pe axele de coordonate $\Rightarrow |A|=|B|=|C|$

Comparând ec. planului prin tăieturi cu ec. planului tangent

$$\Rightarrow \left|\frac{x_0}{a^2}\right|=\left|\frac{y_0}{b^2}\right|=\left|\frac{z_0}{c^2}\right| \overset{\text{Not.}}{=} \lambda$$

~~ec. elipsoidului~~

$$\left|\frac{x_0}{a^2}\right|=\lambda \qquad \left|\frac{y_0}{b^2}\right|=\lambda \qquad \left|\frac{z_0}{c^2}\right|=\lambda$$

$$\frac{x_0}{a^2}=\pm\lambda \qquad \frac{y_0}{b^2}=\pm\lambda \qquad z_0=\pm c^2\lambda$$

$$x_0=\pm a^2\lambda \qquad y_0=\pm b^2\lambda$$

Scanned with CamScanner

$$x_0^2 = a^4 \lambda^2$$
$$y_0^2 = b^4 \lambda^2$$
$$z_0^2 = c^4 \lambda^2$$

$M_0 \in$ elipsoidului

$$\Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{a^{\cancel{4}\,2}\lambda^2}{\cancel{a^2}} + \frac{b^{\cancel{4}\,2}\lambda^2}{\cancel{b^2}} + \frac{c^{\cancel{4}\,2}\lambda^2}{\cancel{c^2}} = 1$$

$$(a^2+b^2+c^2)\lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\begin{cases} x_0 = \pm\, a^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}} \\ y_0 = \pm\, b^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}} \\ z_0 = \pm\, c^2 \cdot \sqrt{\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$