

Vectori și coordonate

Paul A. Blaga

Universitatea "Babeș-Bolyai"

16 martie 2020

Segmente orientate

- Un segment de dreaptă pentru care s-a precizat care dintre capetele sale este originea și care extremitatea, se numește *segment orientat* sau *vector legat*.
- Un segment orientat cu originea în punctul A și extremitatea în punctul B se notează, de regulă, cu \overrightarrow{AB} .
- Din punct de vedere grafic, un segment de dreaptă orientat \overrightarrow{AB} se reprezintă sub forma unei săgeți:



- Un segment orientat este definit, în mod unic, de capetele sale și de ordinea acestor capete.
- $A = B$, avem de-a face cu un *segment orientat nul* și se scrie $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Segmente orientate

- Dacă s-a ales o unitate de lungime, atunci putem defini lungimea segmentului orientat \overline{AB} ca fiind lungimea segmentului neorientat AB și scriem:

$$\|\overline{AB}\| = |AB| \quad \text{sau} \quad \|\overline{AB}\| = AB.$$

- Lungimea unui segment orientat se mai numește și *modulul* său sau *norma* sa.
- Spunem că două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} sunt *egale* dacă $A = C$ și $B = D$, cu alte cuvinte, dacă ele au aceeași origine și aceeași extremitate.

Vectori liberi

- Două segmente orientate *nenule* \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{CD} au *aceeași direcție* dacă dreptele AB și CD sunt paralele.
- Un segment legat nul se consideră, prin convenție, că are aceeași direcție cu orice alt segment orientat.
- Presupunem acum că cele două segmente orientate (nenule) au aceeași direcție, dar dreptele lor suport nu coincid. Vom spune că ele au *același sens* dacă segmentele (neorientate) AC și BD nu se intersectează.



Vectori liberi

- Dacă aceste doua segmente se intersectează, vom spune că segmentele orientate \overline{AB} și \overline{CD} au *sensuri opuse*:



- Dacă segmentele orientate nenule \overline{AB} și \overline{CD} au aceeași dreaptă suport: $AB = CD$ (ca drepte), atunci vom spune că ele au același sens dacă există un al treilea segment orientat, \overline{EF} , având aceeași direcție (dar nu și aceeași dreaptă suport) cu \overline{AB} și \overline{CD} , și care are același sens cu ambele segmente. În caz contrar, vom spune că segmentele \overline{AB} și \overline{CD} au sensuri opuse.

Vectori liberi

- Se consideră, prin convenție, că vectorul nul are același sens cu orice alt vector.

Observație

De fiecare dată când spunem că două segmente orientate au același sens, subînțelegem, chiar dacă nu o spunem în mod explicit, că segmentele au aceeași direcție. Relația “același sens” nu este definită pentru perechi de segmente orientate care nu au aceeași direcție. Mai spunem, uneori, despre două segmente orientate care au aceeași direcție și același sens, că au *aceeași orientare*.

Vectori liberi

Definiție

Spunem că două segmente orientate \overline{AB} și \overline{CD} sunt *echipolente* și scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, dacă fie ambele sunt nule, fie ambele sunt nenule și ele au aceeași direcție, același sens și același modul.

Este ușor de constatat că relația de echipolență este o relație de echivalență (adică este reflexivă, simetrică și tranzitivă).

Definiție

Se numește *vector liber* o clasă de echivalență de segmente orientate, în raport cu relația de echipolență. Vectorul liber determinat de segmentul orientat \overline{AB} se notează cu \overrightarrow{AB} . Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \left\{ \overline{CD} \mid \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB} \right\}$$

Vectori liberi

- Un vector liber este o familie de vectori legați echipolenți, câte unul în fiecare punct al spațiului:



- Doi vectori liberi se numesc *egali* dacă ei sunt egali ca și clasă de echivalență, adică sunt alcătuiți din aceleași segmente orientate. Altfel spus,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overline{AB} \sim \overline{CD}.$$

Vectori liberi

- De regulă, dacă nu vrem să scoatem în evidență un reprezentant al unui vector liber, vom utiliza pentru notarea acestor obiecte litere mici, de regulă din prima parte a alfabetului, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$. Vectorul nul se notează cu $\mathbf{0}$. Pentru reprezentarea unui vector liber se utilizează unul dintre segmentele orientate care îl formează.
- Dacă se dă un vector liber \mathbf{a} și un punct A , există un singur punct B din spațiu astfel încât să avem

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}.$$

Prin construirea punctului B pentru care e verificată relația de mai sus, spunem că am *atașat* vectorul liber \mathbf{a} punctului A .

- Se numește *modul* al vectorului liber \mathbf{a} modulul oricăruia dintre segmentele orientate care îl alcătuiesc. Modulul lui \mathbf{a} se notează cu $\|\mathbf{a}\|$.

Vectori liberi

- Să presupunem că se dau doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} . Îi atașăm unui punct O (construim punctele A și B astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$). Atunci *unghiul dintre vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b}* este, prin definiție, unghiul dintre segmentele orientate \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} . În mod evident, acest unghi nu depinde de alegerea punctului O .
- Spunem că un segment orientat \overrightarrow{AB} este paralel cu o dreaptă Δ (cu un plan Π) dacă dreapta sa suport este paralelă cu dreapta Δ (cu planul Π). Segmentul nu se consideră, prin convenție, că este paralel cu orice dreaptă sau plan.
- Spunem că vectorii liberi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ sunt *coliniari (coplanari)* dacă segmentele care îi alcătuiesc sunt paralele cu o aceeași dreaptă (respectiv cu același plan).

Vectori liberi

- Dacă în spațiu se fixează un plan Π și se consideră numai acele puncte care aparțin acestui plan, atunci prin vector (liber) vom înțelege o clasă de echivalență de segmente orientate situate în acel plan. Analog se definesc și vectorii de pe dreaptă.

Adunarea vectorilor

Considerăm doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} . Alegem un punct O oarecare din spațiu și construim un punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiție

Vectorul \overrightarrow{OB} se numește *suma vectorilor* \mathbf{a} și \mathbf{b} și se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.



Adunarea vectorilor

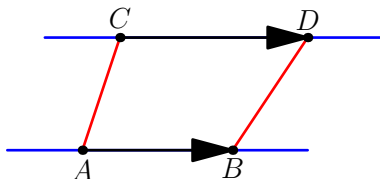
Suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nu depinde de alegerea punctului O . Modalitatea de construcție a sumei a doi vectori descrisă mai sus se numește *regula triunghiului* (sau a *închiderii*).

Dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, atunci avem și o altă metodă de a determina suma a doi vectori, care, firește, dă același rezultat ca și regula triunghiului.

- \mathbf{a} și \mathbf{b} – doi vectori necoliniari.
- Alegem un punct O și atașăm cei doi vectori de punctul O , cu alte cuvinte, determinăm punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
- Cum vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, de aici rezultă că nici punctele O , A și B nu sunt coliniare, deci ele determină un plan.

Adunarea vectorilor

- În acest plan, construim paralelogramul $OACB$.



Cum se constată cu ușurință că $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, rezultă, pe baza regulii triunghiului, menționată mai sus, că au loc egalitățile:

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (1)$$

Avem două egalități, pentru că avem două situații în care putem aplica regula triunghiului, și de fiecare dată vectorul care încheie triunghiul este \overrightarrow{OC} .

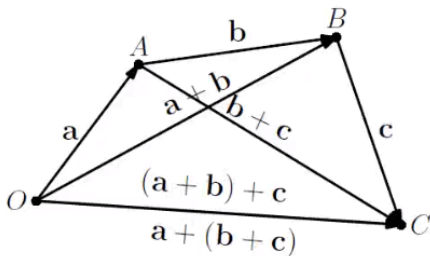
Adunarea vectorilor

- (*Regula paralelogramului*): pentru a găsi suma a doi vectori necoliniari, se atașează acești doi vectori unui punct O și se construiește pe segmentele orientate obținute, ca laturi, un paralelogram. Diagonala paralelogramului care pleacă din punctul O va fi atunci segmentul orientat care determină suma celor doi vectori.
- Regula paralelogramului permite (vezi formula (1)) demonstrarea foarte simplă a *comutativității* adunării vectorilor liberi, pentru cazul vectorilor *necoliniari*. Pentru cazul vectorilor coliniari, comutativitatea se poate verifica foarte ușor cu ajutorul regulii închiderii, atât pentru vectorii orientați în același sens, cât și pentru cei având sensuri opuse. Așadar, operația de adunare a vectorilor liberi este comutativă.

Adunarea vectorilor

Considerăm acum trei vectori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Atașăm vectorul \mathbf{a} unui punct O , construind, astfel, punctul A astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$. Construim, mai departe, punctul B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$. Conform definiției sumei, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Adunăm acum la acest vector vectorul \mathbf{c} . Pentru aceasta construim punctul C astfel încât $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$. Avem, atunci

$$\overrightarrow{OC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}. \quad (2)$$



Adunarea vectorilor

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, prin urmare

$$\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (3)$$

Combinând (2) cu (3) obținem

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

adică adunarea vectorilor este *asociativă*.

- Adunarea vectorilor liberi admite *element neutru*, vectorul nul, $\mathbf{0}$, deoarece este evident că pentru orice vector \mathbf{a} avem:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a}.$$

- Fiecare vector admite un opus relativ la operația de adunare. Astfel, dacă vectorul liber \mathbf{a} este reprezentat de segmentul orientat \overrightarrow{AB} , atunci vom nota cu $-\mathbf{a}$ vectorul liber reprezentat de segmentul orientat \overrightarrow{BA} și se constată imediat că avem:

Adunarea vectorilor

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Acestea fiind spuse, putem afirma că *mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiu formează un grup abelian în raport cu operația de adunare a vectorilor.*

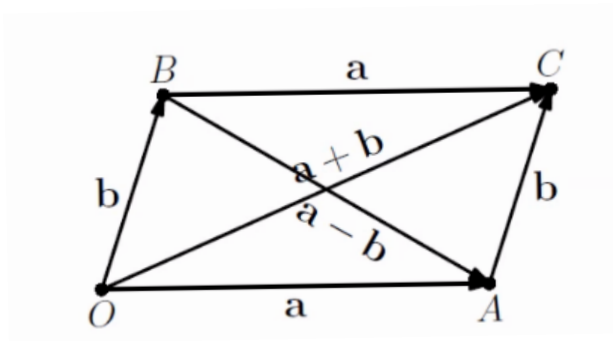
Așa cum se întâmplă în orice grup abelian (aditiv), odată cu adunarea vectorilor putem defini și scăderea lor, punând, prin definiție:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Dacă atașăm vectorul \mathbf{a} unui punct O și alegem A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, atunci, după cum se constată cu ușurință, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$ sau

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

Adunarea vectorilor



Înmulțirea cu scalari

Notăm cu \mathcal{V} mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiu.

Definiție

Fie \mathbf{a} un vector și $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real. *Produsul vectorului \mathbf{a} cu scalarul λ* este, prin definiție, un vector, notat $\lambda\mathbf{a}$ caracterizat în modul următor:

- (i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de

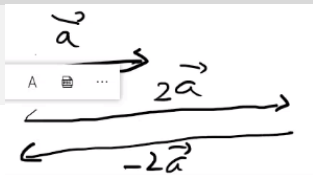
$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$

unde produsul din membrul drept este produsul de numere reale;

- (ii) direcția lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcția lui \mathbf{a} ;
- (iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui \mathbf{a} dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui \mathbf{a} dacă $\lambda < 0$.

Înmulțirea cu scalari

Proprietăți



- 1 $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.
- 2 $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.
- 3 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$, pentru orice scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ și orice vector \mathbf{a} .
- 4 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ și pentru orice doi vectori liberi \mathbf{a}, \mathbf{b} .

~~Presupunem acum, în continuare, că $\lambda > 0$, dar vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt, de data aceasta, coliniari. Alegem un punct O arbitrar și construim punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.~~

- 5 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, pentru orice scalari λ și μ și pentru orice vector \mathbf{a} .

Proprietățile 1)–5), împreună cu faptul că mulțimea \mathcal{V} este un grup abelian (ceea ce am demonstrat în secțiunea precedentă), înseamnă că această mulțime este un *spațiu vectorial* peste mulțimea numerelor reale.

Înmulțirea cu scalari

Observație

Proprietățile 4) și 5) pot fi extinse, prin inducție, la orice număr finit de sumanzi, cu alte cuvinte, se poate demonstra cu ușurință că:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_k) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda\mathbf{a}_k,$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a} + \cdots + \lambda_k\mathbf{a},$$

pentru orice k natural, cel puțin egal cu 2, orice numere reale, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ și orice vectori $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Proiecțiile vectorilor

Axe

Alegem o dreaptă oarecare în spațiu. Vom numi unul dintre cele două sensuri de pe această dreaptă *pozitiv* și îl vom nota pe desen cu o săgeată. Sensul opus va fi numit *negativ*. O dreaptă pe care s-a ales un sens pozitiv se numește *axă* sau *dreaptă orientată*.

Alegem acum o axă Δ și pe ea alegem un segment nenul ca unitate de lungime. Vom numi *lungime cu semn* a unui segment orientat \overline{AB} de pe axă și-l vom nota cu simbolul (AB) numărul dat de

$$(AB) = \begin{cases} \|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ are același sens cu } \Delta \\ -\|\overline{AB}\| & \text{dacă } \overline{AB} \text{ și } \Delta \text{ au sensuri opuse} \end{cases} \quad (4)$$



Proiecțiile vectorilor

Proiecția pe o axă în spațiu



Teorema (Chasles)

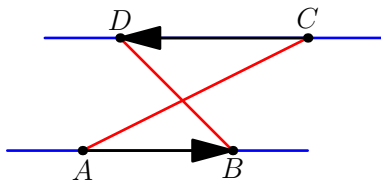
Pentru orice trei puncte A, B, C situate pe o axă pe care s-a ales o unitate de lungime, are loc următoarea relație:

$$(AB) + (BC) = (AC). \quad (5)$$

Fie Δ o axă în spațiu și Π un plan care nu este paralel cu Δ . Printr-un punct oarecare A din spațiu ducem un plan Π_1 , paralel cu planul Π . Acest plan intersectează axa Δ într-un punct A' . Punctul A' se numește *proiecția punctului A pe axa Δ , paralelă cu planul Π* . Dacă planul Π este perpendicular pe axa Δ , atunci proiecția se numește *ortogonală*. În acest caz, A' este piciorul perpendicularei coborâte din punctul A pe axa Δ .

Proiecțiile vectorilor

- Proiecția unui vector legat \overline{AB} este vectorul legat $\overline{A'B'}$, care unește proiecțiile capetelor se numește *proiecția segmentului orientat \overline{AB} pe axa Δ , paralelă cu planul Π* . Lungimea cu semn a proiecției se notează cu $\text{pr}_{\Delta} \overline{AB} (\parallel \Pi)$.
- Proiecția unui vector liber \mathbf{a} este proiecția unui reprezentant al său. Proiecția se notează cu $\text{pr}_{\Delta} \mathbf{a} (\parallel \Pi)$ și este un vector liber pe axă.



Proiecția pe o axă într-un plan

Presupunem acum că atât axa Δ , cât și figura care se proiectează sunt situate într-un același plan Π .

- Fie Δ_1 o dreaptă din planul Π , care nu este paralelă cu axa Δ .
- Ducem, printr-un punct A al planului, o dreaptă paralelă cu dreapta Δ_1 , care intersectează axa într-un punct A' , care se numește *proiecția punctului A pe axa Δ , paralelă cu dreapta Δ_1* .
- Celelalte noțiuni din paragraful precedent se definesc în mod analog și se bucură de aceleași proprietăți.

Proiecția pe un plan

- Fie Π un plan și Δ o dreaptă care nu este paralelă cu planul. Ducem printr-un punct A al spațiului o dreaptă Δ_1 , paralelă cu dreapta Δ .
- Dreapta Δ_1 intersectează planul într-un punct A' , care se numește *proiecția punctului A pe planul Π , paralelă cu dreapta Δ* .
- Dacă dreapta Δ este perpendiculară pe planul Π , proiecția se numește *ortogonală*.

Proiecția sumei vectorilor

- Presupunem că pe axa Δ se proiectează doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} .
Proiecția se face paralel cu un plan Π sau paralel cu o dreaptă Δ_1 , dacă atât vectorii, cât și axa se află într-un același plan.
- Alegem un punct O și construim punctele A și B astfel încât $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ și, prin urmare, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- Dacă O', A', B' sunt proiecțiile punctelor O, A, B pe axa Δ , atunci vectorii $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{A'B'}$ și $\overrightarrow{O'B'}$ sunt, respectiv, proiecțiile vectorilor \mathbf{a} , \mathbf{b} și $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- De aici rezultă că *proiecția sumei vectorilor este egală cu suma proiecțiilor termenilor*. Este clar că această proprietate se poate extinde, fără dificultate, și la sume de mai mult de doi vectori.

Proiecția sumei vectorilor

- Dacă pe axă s-a ales și o unitate de lungime, atunci, în virtutea egalității (5), avem și

$$(O'B') = (O'A') + (A'B')$$

sau, utilizând notația introdusă mai devreme,

$$\text{pr}_{\Delta}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{pr}_{\Delta} \mathbf{a} + \text{pr}_{\Delta} \mathbf{b}, \quad (6)$$

adică lungimea cu semn a proiecției sumei vectorilor pe o axă este egală cu suma magnitudinilor proiecțiilor termenilor.

Dependența liniară a vectorilor

Definiție

Vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \quad (7)$$

se numesc *liniar dependenți* dacă există numerele reale

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \quad (8)$$

nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \quad (9)$$

În caz contrar, vectorii se numesc *liniar independenți*.

Dependența liniară a vectorilor

Este clar că vectorii sunt liniar independenți dacă și numai dacă din egalitatea (9) rezultă că

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Se mai spune, de asemenea, că vectorii (7) formează *un sistem liniar dependent*, respectiv *un sistem liniar independent*.

Dacă un vector \mathbf{a} se poate scrie în funcție de vectorii (7) sub forma

$$\mathbf{a} = \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \mu_k \mathbf{a}_k,$$

atunci vom spune că \mathbf{a} este *o combinație liniară a acestor vectori*.

Dependența liniară a vectorilor

Teorema

Pentru ca vectorii (7) (cu $k > 1$) să fie liniar dependenți, este necesar și suficient ca cel puțin unul dintre acești vectori să poată fi scris ca o combinație liniară a celorlalți.

Consecința

Dacă vectorii (7) sunt liniar independenți, atunci nici unul nu poate fi scris ca o combinație liniară a celorlalți. În particular, nici unul dintre vectori nu poate fi egal cu zero.

Pentru cazul a doi vectori, avem următorul rezultat:

Teorema

Doi vectori sunt liniar dependenți dacă și numai dacă sunt coliniari.

Dependența liniară a vectorilor

Consecința

Doi vectori sunt liniar independenți dacă și numai dacă ei nu sunt coliniari.

Vectorii liniar independenți vor juca un rol esențial. În particular, ei ne furnizează descompuneri ale altor vectori. Un prototip de astfel de descompunere este dat de următoarea teoremă:

Teorema

Să presupunem că într-un plan Π sunt dați doi vectori necoliniari \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 . Atunci orice alt vector \mathbf{a} din plan se poate descompune în funcție de vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 , cu alte cuvinte există două numere reale (unic determinate) x și y astfel încât

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (10)$$

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Alegem $O \in \Pi$. Atunci există $E_1, E_2, M \in \Pi$ a.î.

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

- Proiectând punctul M pe dreapta OE_1 , paralel cu dreapta OE_2 , obținem un punct M_1 .
- Analog, fie M_2 punctul ce se obține proiectând punctul M pe dreapta OE_2 , paralel cu dreapta OE_1 .
- Întrucât vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ și $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari, iar $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$.



Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

- În mod analog, există un y real astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$. Cum $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$, egalitatea (10) este verificată.
- Mai rămâne să demonstrăm unicitatea numerelor reale x și y . Să presupunem că ar exista alte două numere reale, x' și y' astfel încât să avem

$$\mathbf{a} = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2. \quad (11)$$

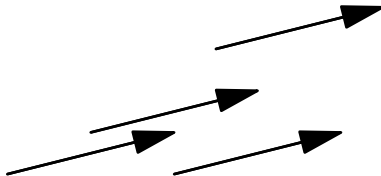
Dacă scădem egalitatea (11) din egalitatea (10), obținem

$$(x - x')\mathbf{e}_1 + (y - y')\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}. \quad (12)$$

Cum vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 sunt liniar independenți, obținem că $x - x' = 0$ și $y - y' = 0$, adică $x = x'$ și $y = y'$.



Dependența liniară a vectorilor



Dependența liniară a vectorilor

Să vedem acum ce se întâmplă în cazul în care avem *trei* vectori. Avem următorul rezultat:

Teorema

Pentru ca trei vectori să fie liniar dependenți este necesar și suficient ca ei să fie coplanari.

Demonstrație.

Presupunem că vectorii

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \quad (13)$$

sunt liniar dependenți. Atunci putem presupune, fără a reduce generalitatea, că al treilea vector e o combinație liniară a primilor doi. Prin urmare, există două numere reale λ_1 și λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2. \quad (14)$$

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Dacă atașăm vectorii unui punct O , obținem trei puncte M_1, M_2, M_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{a}_1, \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{a}_2, \overrightarrow{OM_3} = \mathbf{a}_3.$$

Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ sunt necoliniari, atunci punctele O, M_1, M_2 sunt necoliniare, deci ele determină un plan Π . Datorită relației (14), vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ aparține, de asemenea, planului Π , prin urmare cei trei vectori sunt coplanari. Dacă vectorii $\overrightarrow{OM_1}$ și $\overrightarrow{OM_2}$ sunt coliniari, atunci din relația (14) rezultă că vectorul $\overrightarrow{OM_3}$ este, de asemenea, coliniar cu ceilalți doi vectori, prin urmare, cu atât mai mult, cei trei vectori sunt coplanari. □

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Invers, să presupunem că vectorii (13) sunt coplanari. Să admitem, pentru început, că doi dintre vectori, de exemplu vectorii \mathbf{a}_1 și \mathbf{a}_2 nu sunt coliniari. Atunci, în virtutea teoremei 4, există două constante λ_1 și λ_2 astfel încât să avem

$$\mathbf{a}_3 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

și, prin urmare, vectorii (13) sunt liniar dependenți.

Dacă toți trei vectorii sunt coliniari, atunci avem, de exemplu, $\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2$, relație care se poate rescrie sub forma

$$\mathbf{a}_1 = \lambda \mathbf{a}_2 + 0 \mathbf{a}_3,$$

adică, din nou, conchidem că cei trei vectori sunt coplanari. □

Dependența liniară a vectorilor

Drept consecință a acestei teoreme, putem conchide că *în spațiu există triplete de vectori liniar independenți*.

Și în spațiu avem un rezultat similar teoremei 4, adică:

Teorema

Dacă vectorii

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad (15)$$

sunt liniar independenți și \mathbf{a} este un vector oarecare, atunci există trei numere reale, x, y, z astfel încât

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \quad (16)$$

Această descompunere a lui \mathbf{a} este unică.

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Alegem un punct oarecare O din spațiu și determinăm punctele E_1, E_2, E_3 și M astfel încât să avem

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3, \overrightarrow{OM} = \mathbf{a}.$$

Notăm cu M_1, M_2, M_3 proiecțiile punctului M pe dreptele OE_1, OE_2, OE_3 , paralel cu planele OE_2E_3, OE_1E_3 , respectiv OE_1E_2 . Se constată cu ușurință că

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \quad (17)$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OE_1}$ și $\overrightarrow{OM_1}$ sunt coliniari și $\overrightarrow{OE_1} \neq 0$, rezultă că există un număr real x astfel încât $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OE_1}$. □

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

În mod analog, există numerele reale y și z astfel încât $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OE_2}$ și $\overrightarrow{OM_3} = z\overrightarrow{OE_3}$. Unicitatea numerelor x, y, z se demonstrează ca și în cazul teoremei 4. □

Întrebarea naturală care se pune este: ce se întâmplă dacă avem mai mult de trei vectori? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Teorema

Orice patru vectori sunt liniar dependenți.

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Presupunem că dintre cei patru vectori

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a} \quad (18)$$

trei sunt liniar independenți, de exemplu

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3. \quad (19)$$

Atunci, în virtutea teoremei 6, există trei numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât

$$\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3,$$

adică cei patru vectori sunt, într-adevăr, liniar dependenți. □

Dependența liniară a vectorilor

Demonstrație.

Dacă vectorii (19) sunt liniar dependenți, adică între ei există o relație de forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}, \quad (20)$$

unde nu toți coeficienții se anulează, această relație se poate rescrie sub forma

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \mu_3 \mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

adică vectorii (18) sunt liniar dependenți. □

Consecința

Spațiul vectorial \mathcal{V} al vectorilor liberi din spațiu este de dimensiune 3.

Orientarea sistemelor de doi și trei vectori liniar independenți

Definiție

Un sistem (ordonat) de vectori liniar independenți $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ într-un plan se numește un sistem *drept* dacă atunci când atașăm cei doi vectori punctului O din plan, adică alegem două puncte A_1 și A_2 din plan astfel încât $\mathbf{a}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ și $\mathbf{a}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, când rotim vectorul \mathbf{a}_1 în jurul punctului O pentru a-l aplica peste vectorul \mathbf{a}_2 (ca direcție și sens), pe drumul cel mai scurt, rotația se face în sens trigonometric (invers sensului acelor de ceasornic).

Același sistem se numește *stâng* dacă rotația menționată mai sus se face în sensul acelor de ceasornic.

Observație

Este clar că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ este drept, atunci sistemul $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$ este stâng și viceversa.

Orientarea sistemelor de doi și trei vectori liniar independenți

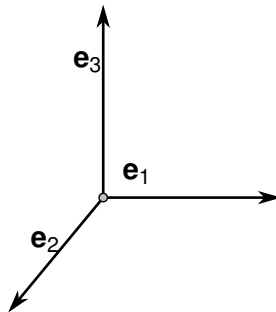
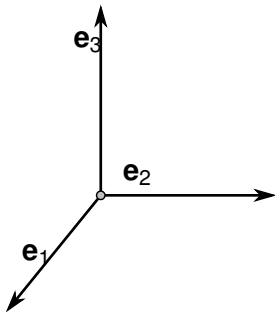
Definiție

Fie $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ un sistem ordonat de trei vectori liniar independenți din spațiu. Fixăm, ca și mai sus, un punct O și alegem trei puncte A_1, A_2, A_3 astfel încât să avem $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$, $i = 1, 2, 3$. Sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ se numește *drept* dacă în planul OA_1A_2 , văzut din punctul A_3 , rotația în jurul punctului O care aplică A_1 peste A_2 pe cel mai scurt drum, se face în sens trigonometric. În caz contrar, adică dacă rotația se face în sensul acelor de ceasornic, sistemul se numește *stâng*.

Observație

Se poate constata imediat că dacă sistemul $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ este drept, atunci tot drepte sunt și sistemele $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1\}$ și $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, în timp ce sistemele $\{\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_2\}$ și $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ sunt stângi.

Orientarea sistemelor de doi și trei vectori liniar independenți

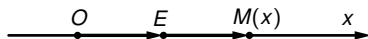


Coordonate pe dreaptă

- Fie Δ o dreaptă oarecare. Alegem pe ea un vector nenul oarecare, \mathbf{e} , pe care îl vom numi *vector unitar* sau *versor*.
- Dacă acum \mathbf{a} este un vector oarecare de pe dreaptă, atunci, conform secțiunii precedente, există un singur număr real x astfel încât $\mathbf{a} = x\mathbf{e}$. Numărul x se numește *componenta* vectorului \mathbf{a} , relativ la dreapta Δ , înzestrată cu versorul \mathbf{e} .
- Alegem pe dreapta Δ , înzestrată cu versorul \mathbf{e} , un punct O , pe care îl vom numi *originea coordonatelor*. Dreapta Δ se va numi de-acum *axă de coordonate*. Dacă M este un punct oarecare al dreptei, vectorul \overrightarrow{OM} se va numi *rază vectoare* sau *vector de poziție* al punctului M , iar componenta acestui vector se numește *coordonata punctului M* .

Coordonate pe dreaptă

- Alegem, mai departe, punctul E pe dreaptă astfel încât să avem $\overrightarrow{OE} = \mathbf{e}$. Segmentul OE va fi ales ca scară a lungimilor pe dreapta Δ . Prin urmare, coordonata unui punct M de pe dreaptă nu este altceva decât mărimea (OM) a segmentului orientat \overrightarrow{OM} . Pentru a scoate în evidență că numărul real x este coordonata punctului M , vom scrie, de regulă, $M(x)$.



Trebuie remarcat că există o infinitate de moduri de a asocia coordonate punctelor de pe dreaptă.

Coordonate pe dreaptă

Coordonata unui punct este unic determinată doar în momentul în care s-au ales:

- versorul dreptei;
- originea dreptei.

Datorită introducerii coordonatelor, fiecărui punct M de pe axa de coordonate Δ i se pune în corespondență un singur număr real – coordonata sa x . Invers, pentru fiecare număr real x există un singur punct M de pe axa Δ a cărei coordonată este x . Astfel, poziția fiecărui punct de pe axa de coordonate este unic determinată prin prescrierea coordonatei aceluși punct.

Notăm cu $\rho(M_1, M_2)$ distanța dintre punctele M_1 și M_2 , adică lungimea segmentului M_1M_2 . Această distanță se poate exprima cu ajutorul coordonatelor. Mai precis, avem următoarea teoremă:

Coordonate pe dreaptă

Teorema

Pentru orice puncte $M_1(x_1)$ și $M_2(x_2)$ de pe axa de coordonate au loc egalitățile:

$$(M_1 M_2) = x_2 - x_1, \quad (21)$$

$$\rho(M_1, M_2) = |x_2 - x_1|. \quad (22)$$

Demonstrație.

Din teorema lui Chasles rezultă că

$$(OM_1) + (M_1 M_2) = (OM_2) \implies (M_1 M_2) = (OM_2) - (OM_1).$$

Utilizând definiția coordonatelor, obținem egalitatea (21). Formula (22) rezultă imediat din formula (21). □

Coordonate în plan

Coordonate afine

Peste tot în această secțiune vom considera că toate punctele și toți vectorii se află într-un plan Π .

Definiție

Fie O un punct și $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – doi vectori liniar independenți (necoliniari) din planul Π . Tripletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ se numește *reper afin* sau *sistem de coordonate afin* în planul Π .

Atașăm vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 punctului O , construind punctele E_1 și E_2 astfel încât $\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1$ și $\overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2$. Segmentele orientate $\overline{OE_1}$ și $\overline{OE_2}$ definesc două axe de coordonate, Ox și Oy . Punctul O se numește *originea coordonatelor*, iar vectorii \mathbf{e}_1 și \mathbf{e}_2 – *vectorii bazei*.

Coordonate în plan

Coordonate afine

Fie acum \mathbf{a} un vector oarecare din planul Π . \mathbf{a} se poate reprezenta în mod unic sub forma

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2. \quad (23)$$

Definiție

Coeficienții x și y din descompunerea (23) se numesc *componentele* vectorului \mathbf{a} relativ la sistemul de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

x și y sunt, de fapt, lungimile cu semn ale proiecțiilor vectorului \mathbf{a} pe axele Ox și Oy , paralel cu axele OY , respectiv Ox . Pentru a scoate în evidență faptul că x și y sunt componentele vectorului \mathbf{a} vom scrie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y)$ sau, pur și simplu, $\mathbf{a}(x, y)$.

Fie, acum, M un punct oarecare al planului Π , în care s-a fixat un sistem de coordonate afine $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Vectorul \overrightarrow{OM} se numește *raza vectoare* sau *vectorul de poziție* al punctului M .

Coordonate în plan

Coordonate afine

Definiție

Componentele x și y ale vectorului \overrightarrow{OM} se numesc *coordonate afine* ale punctului M relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. De regulă, x se numește *abscisă*, în timp ce y se numește *ordonată*.

Un sistem de coordonate afine se mai notează și cu Oxy , dacă vectorii bazei sunt subînțeleși. Dacă x și y sunt coordonatele unui punct M , vom utiliza în mod frecvent notația $M(x, y)$.

Coordonate în plan

Coordonate afine

Teorema

Componentele unei combinații liniare de vectori sunt egale cu aceeași combinație liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă

$$\mathbf{a}(X, Y) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j.$$

Coordonate în plan

Coordonate afine

Consecința

Dacă $X(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$ sunt două puncte din plan, atunci

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

adică pentru a obține componentele vectorului definit de segmentul orientat \overrightarrow{AB} , trebuie să scădem din coordonatele extremității sale coordonatele originii.

Demonstrație.

Rezultă imediat din teorema precedentă și din relația

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$



Coordonate în plan

Coordonate afine

Consecința

Pentru ca doi vectori $\mathbf{a}(x_1, y_1)$ și $\mathbf{b}(x_2, y_2)$ să fie coliniari, este necesar și suficient ca ei să aibă componentele corespunzătoare proporționale.

Proporționalitatea componentelor se poate scrie și

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1},$$

cu condiția ca ambii numitori să fie diferiți de zero. Menționăm, pe de altă parte, că se poate utiliza convenția că de fiecare dată când un numitor este zero, se admite că și numărătorul care îi corespunde este zero, ceea ce înseamnă că, formal, putem scrie egalitatea precedentă și când unul dintre numitori se anulează.

Coordonate în plan

Coordonate afine

Consecința

Coordonatele mijlocului A al unui segment de dreaptă cu capetele în punctele $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ sunt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

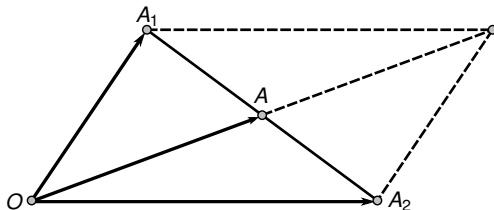


Figura:

Coordonate în plan

Coordonate rectangulare

- Presupunem că în planul Π a fost aleasă o unitate de măsură pentru lungime.
- Alegem un punct O și doi vectori de lungime 1, perpendiculari unul pe celălalt, \mathbf{i} și \mathbf{j} .
- Sistemul afin de coordonate $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ se numește *sistem de coordonate rectangular* sau *cartezian*. Despre baza $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ vom spune că este *ortonormată* (ceea ce înseamnă că vectorii sunt *ortogonali*, adică perpendiculari și “normați”, adică de lungime 1).
- Toate proprietățile valabile într-un sistem de coordonate afin oarecare rămân adevărate și într-un sistem rectangular, dar, de regulă, expresiile care intervin sunt mult mai simple atunci când sunt scrise în coordonate carteziane.

Coordonate în spațiu

Coordonate afine și rectangulare

Fie O un punct oarecare al spațiului și $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – trei vectori liniar independenți (adică necoplanari).

Definiție

Cuadrupletul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numește *reper afin* sau *sistem de coordonate afine* în spațiu. Punctul O se numește *originea coordonatelor*, iar vectorii $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se numesc *vectorii bazei*.

Definiție

Se numesc *componente* ale unui vector \mathbf{a} relativ la reperul $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ coeficienții x, y, z ai descompunerii:

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Coordonate în spațiu

Coordonate afine și rectangulare

Definiție

Coordonatele unui punct M , relativ la același reper sunt, prin definiție, componentele x, y, z ale vectorului său de poziție, \overrightarrow{OM} . Coordonata x se numește *abscisă*, coordonata y – *ordonată*, iar coordonata z – *cotă*.

- Un sistem de coordonate afin se mai notează cu $Oxyz$, dacă vectorii bazei sunt subînțeleși.
- Construim punctele E_1, E_2, E_3 astfel încât

$$\overrightarrow{OE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{OE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{OE_3} = \mathbf{e}_3. \quad (24)$$

- Segmentele orientate $\overline{OE_1}, \overline{OE_2}$ și $\overline{OE_3}$ determină cele trei axe de coordonate, Ox, Oy și Oz .

Coordonate în spațiu

Coordonate afine și rectangulare

- Cele trei plane determinate de câte două axe de coordonate se numesc *plane de coordonate*. Aceste plane împart spațiul în opt zone, care se numesc *octanți de coordonate*.
- Ca și în cazul reperelor plane, distingem sisteme de coordonate *drepte* și *stângi*.
- Considerăm un triplet de vectori necoplanari ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Atașăm acești vectori unui punct O , adică determinăm punctele E_1, E_2, E_3 , astfel încât să fie verificate relațiile (24).
- Rotim segmentul orientat $\overline{OE_1}$, în planul OE_1E_2 , în jurul lui O , pe cel mai scurt drum, până când el coincide, ca direcție și sens, cu segmentul orientat $\overline{OE_2}$.

Coordonate în spațiu

Coordonate afine și rectangulare

- Dacă această rotație, privită din extremitatea segmentului orientat $\overline{OE_3}$ (cu alte cuvinte, din punctul E_3) se produce în sensul invers mersului acelor de ceasornic, vom spune că tripletul de vectori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este *drept*, altfel vom spune că este *stâng*.
- Un sistem de coordonate $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ se numește *drept* sau *stâng*, după cum tripletul $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ este drept sau stâng.
- Peste tot, în cele ce urmează, sistemele de coordonate vor fi totdeauna drepte, dacă nu se menționează altfel.

Cel mai simplu dintre sistemele de coordonate afine în spațiu este sistemul de coordonate rectangular sau cartezian. Presupunem că în spațiu s-a ales o unitate de măsură pentru lungime. Atunci un sistem de coordonate rectangular sau cartezian în spațiu este determinat de alegerea unui punct O și a trei vectori de lungime 1, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendiculari între ei.

Coordonate în spațiu

Coordonate afine și rectangulare

Pe componente, avem

Teorema

Componentele unei combinații liniare de vectori sunt egale cu aceeași combinație liniară a componentelor vectorilor. Mai precis, dacă

$$\mathbf{a}(X, Y, Z) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{a}_i(X_i, Y_i, Z_i),$$

atunci

$$X = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^k \lambda_j Y_j, \quad Z = \sum_{j=1}^k \lambda_j Z_j.$$

Produsul scalar al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Definiție

Fie \mathbf{a} și \mathbf{b} doi vectori. Se numește *produs scalar* al celor doi vectori numărul real, notat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, dat de

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \varphi, \quad (25)$$

unde φ este unghiul dintre cei doi vectori.

Alegem un punct oarecare O în spațiu și construim un segment orientat \overrightarrow{OA} astfel încât

$$\overrightarrow{OA} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Notăm cu Δ axa definită de segmentul orientat \overrightarrow{OA} . Atunci

$$\|\mathbf{b}\| \cos \varphi = \text{pr}_{\Delta} \mathbf{b}.$$

Produsul scalar al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Prin urmare, definiția devine

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \operatorname{pr}_{\Delta} \mathbf{b}. \quad (26)$$

Proprietăți

- ❶ comutativitatea:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (27)$$

Această proprietate rezultă direct din definiția produsului scalar;

- ❷ compatibilitatea cu înmulțirea vectorilor cu scalari:

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (28)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (29)$$

- ❸ distributivitatea față de adunarea vectorilor:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}. \quad (30)$$

Produsul scalar al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

- 4 Doi vectori **a** și **b** sunt perpendiculari dacă și numai dacă produsul lor scalar este egal cu zero:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \quad (31)$$

- 5 Produsul scalar a unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acestui vector:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2. \quad (32)$$

Produsul scalar al vectorilor

Exprimarea produsului scalar în coordonate

Alegem, în spațiu, un sistem de coordonate rectangular, cu originea într-un punct O . Fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată care generează acest sistem de coordonate. Din proprietățile produsului scalar obținem tabla de multiplicare:

\cdot	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	1	0	0
\mathbf{j}	0	1	0
\mathbf{k}	0	0	1

(33)

Presupunem acum că se dau doi vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} , care au următoarele expresii în raport cu baza de coordonate:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Produsul scalar al vectorilor

Exprimarea produsului scalar în coordonate

Utilizând tabla de înmulțire scalară (33) a vectorilor bazei, produsul scalar dintre **a** și **b** va fi

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (Xi + Yj + Zk) \cdot (X'i + Y'j + Z'k) = XX'i^2 + XY'i \cdot j + \\ &+ XZ'i \cdot k + YX'j \cdot i + YY'j^2 + YZ'j \cdot k + ZX'k \cdot i + ZZ'k^2 = \\ &= XX' + YY' + ZZ' .\end{aligned}$$

Așadar, în coordonate, avem:

- produsul scalar este dat de

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = XX' + YY' + ZZ' . \quad (34)$$

- condiția de ortogonalitate este

$$XX' + YY' + ZZ' = 0 . \quad (35)$$

Produsul scalar al vectorilor

Exprimarea produsului scalar în coordonate

- lungimea vectorului \mathbf{a} este

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (36)$$

- Dacă se dau $M(x, y, z)$ și $M'(x', y', z')$, distanța $d(M, M')$ dintre cele două puncte este egală cu lungimea vectorului $\overrightarrow{MM'}$ ($x' - x, y' - y, z' - z$), deci

$$d(M, M') = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

- Unghiul dintre vectorii $\mathbf{a}(X, Y, Z)$ și $\mathbf{b}(X', Y', Z')$, este dat de:

$$\cos \varphi = \frac{XX' + YY' + ZZ'}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}}.$$

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Definiție

Produsul vectorial dintre vectorul \mathbf{a} și vectorul \mathbf{b} este, prin definiție, vectorul, notat prin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, determinat prin următoarele condiții:

- 1) dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt coliniari, atunci, prin definiție, produsul lor vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egal cu zero.
- 2) dacă cei doi vectori nu sunt coliniari, adică fac între ei un unghi φ , cu $0 < \varphi < \pi$, atunci produsul lor vectorial se definește prin următoarele trei condiții:
 - (i) lungimea vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu $\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \varphi$;
 - (ii) vectorul $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este perpendicular pe ambii vectori \mathbf{a} și \mathbf{b} ;
 - (iii) tripletul de vectori $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ este direct.

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Proprietăți

- 1 Dacă vectorii \mathbf{a} și \mathbf{b} nu sunt coliniari, atunci norma vectorului $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe segmentele OA și OB , unde O este un punct arbitrar din spațiu, iar $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ și $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
- 2 Aria triunghiului OAB este egală cu jumătate din norma produsului vectorial a vectorilor \overrightarrow{OA} și \overrightarrow{OB} .
- 3 Produsul vectorial este *anticomutativ*:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (37)$$

- 4 Produsul vectorial este compatibil cu înmulțirea cu scalari a vectorilor:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (38)$$

$$\mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (39)$$

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

- 5 Produsul vectorial este distributiv față de adunarea vectorilor:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad (40)$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b}. \quad (41)$$

Proprietățile produsului vectorial descrise mai sus permit formularea unei reguli pentru calculul produsului vectorial a două combinații liniare de vectori liberi: pur și simplu se calculează produsul fiecărui termen din prima combinație cu fiecare termen din a doua combinație și apoi se însumează rezultatele. De exemplu,

$$(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \times (2\mathbf{c} - 3\mathbf{d}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{c} - 3\mathbf{a} \times \mathbf{d} + 4\mathbf{b} \times \mathbf{c} - 6\mathbf{b} \times \mathbf{d}.$$

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Observație

Produsul vectorial are o serie de similarități cu produsul scalar al vectorilor. Sunt, totuși, o serie de diferențe care trebuie ținute minte:

- 1) Produsul vectorial *nu* este comutativ – ordinea factorilor contează.
- 2) Produsul vectorial a doi vectori este un vector, nu un scalar. Ca urmare, de data aceasta are sens să considerăm produse de mai mulți factori. Totuși, așa cum vom vedea ceva mai târziu, produsul vectorial *nu* este asociativ.

Produsul vectorial al vectorilor

Expresia produsului vectorial în funcție de componentele factorilor

Considerăm un sistem de coordonate ortogonal $Oxyz$ și fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ baza ortonormată de coordonate. Vectorii bazei se înmulțesc vectorial după regulile descrise în următoarea tabelă:

\times	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	$\mathbf{0}$	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Fie, acum, \mathbf{a} și \mathbf{b} doi vectori dați prin componentele lor:

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = X'\mathbf{i} + Y'\mathbf{j} + Z'\mathbf{k}.$$

Atunci

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (YZ' - ZY')\mathbf{i} + (ZX' - XZ')\mathbf{j} + (XY' - YX')\mathbf{k}. \quad (42)$$

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Ținând cont de regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul al treilea după prima linie, formula precedentă se mai poate scrie sub următoarea formă, mult mai ușor de reținut:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}. \quad (43)$$

Din expresia analitică (43) rezultă imediat formule analitice pentru aria paralelogramului și aria triunghiului determinate de cei doi vectori. Astfel, din formula menționată rezultă imediat că

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix},$$

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

adică

$$Aria_{par} \equiv \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}^2}. \quad (44)$$

Prin urmare, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este

$$Aria_{trium} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} Y & Z \\ Y' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Z \\ X' & Z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} X & Y \\ X' & Y' \end{vmatrix}^2}. \quad (45)$$

Să considerăm acum cazul în care avem trei puncte oarecare din planul xOy : $A(x_A, y_A, 0)$, $B(x_B, y_B, 0)$, $C(x_C, y_C, 0)$. Ele determină doi vectori: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ și $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$. Este clar că $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x_B - x_A, y_B - y_A, 0)$ și $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x_C - x_A, y_C - y_A, 0)$. Prin urmare,

Produsul vectorial al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = \mathbf{k} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix},$$

de unde rezultă că

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \pm \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Așadar, aria triunghiului ABC din planul xOy este dată de formula

$$Aria_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}. \quad (46)$$

Produsul vectorial al vectorilor

Dublul produs vectorial

După cum am putut constata până acum, produsul vectorial a doi vectori este, din nou, un vector, de aceea are sens să înmulțim acest vector cu un al treilea vector. Rezultatul acestei operații este ceea ce se numește *dublul produs vectorial*. Menționăm că *produsul vectorial nu este asociativ*, de aceea nu se poate renunța la paranteze așa cum se face, de exemplu, în cazul produsului numerelor reale sau complexe sau în cazul produsului matricilor. De acest fapt ne putem convinge cu ușurință, studiind produsele elementelor bazei canonice a spațiului tridimensional. Avem, de exemplu:

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i},$$

în timp ce

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{0}.$$

Produsul vectorial al vectorilor

Dublul produs vectorial

Fie, prin urmare, **a**, **b** și **c** trei vectori din spațiu. După cum am spus mai devreme, *dublul produs vectorial* al celor trei vectori este, prin definiție, vectorul $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$. Are loc următoarea relație:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}. \quad (47)$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

Comparând vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ și $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ajungem la concluzia că ei pot fi egali doar dacă

$$-(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = 0.$$

Produsul vectorial al vectorilor

Dublul produs vectorial

*Astfel, o condiție necesară pentru ca cele două produse vectoriale duble să fie egale este necesar ca cei trei vectori să fie coplanari. Această condiție nu este, însă, și suficientă, întrucât, după cum se vede din egalitatea de mai sus, coeficienții celor trei vectori nu sunt arbitrari. Se poate demonstra cu ușurință, utilizând relația (47) că pentru orice trei vectori **a**, **b** și **c** are loc următoarea identitate (identitatea lui Jacobi):*

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (48)$$

Produsul mixt al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori. Se numește *produs mixt* al celor trei vectori numărul

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) := (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}. \quad (49)$$

Produsul mixt al vectorilor are o interpretare geometrică remarcabilă, exprimată de următoarea teoremă.

Teorema

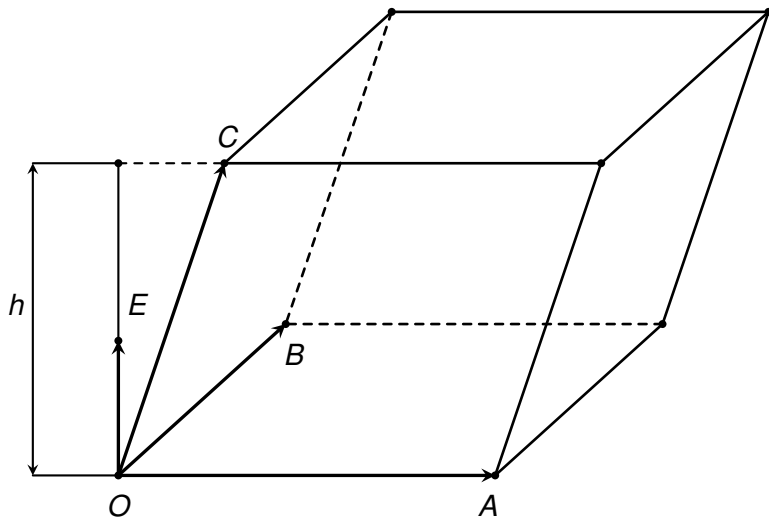
Fie \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} trei vectori necoplanari. Îi atașăm unui punct O și fie A , B , C punctele pentru care

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}.$$

Atunci produsul mixt $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA , OB , OC , luat cu semnul plus dacă tripletul $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este direct și cu semnul minus dacă tripletul este stâng.

Produsul mixt al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale



Produsul mixt al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Consecința

Volumul tetraedrului $OABC$ este dat de formula

$$Vol_{OABC} = \pm \frac{1}{6}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

unde $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

Consecința

Un sistem de trei vectori liniar independenți $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ și stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$.

Consecința

Un sistem ortonormat de trei vectori liniar independenți $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$ și stâng dacă $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$.

Produsul mixt al vectorilor

Definiție și proprietăți fundamentale

Produsul mixt al vectorilor ne permite, de asemenea, să stabilim un criteriu de coplanaritate a trei vectori, cuprins în teorema care urmează.

Teorema

Pentru ca trei vectori \mathbf{a} , \mathbf{b} și \mathbf{c} să fie coplanari este necesar și suficient ca produsul lor mixt să fie egal cu zero:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0. \quad (50)$$

Produsul mixt al vectorilor

Expresia produsului mixt în coordonate

Dacă, relativ la o bază ortonormată, vectorii **a**, **b**, **c** sunt dați prin componentele lor:

$$\mathbf{a}(X_1, Y_1, Z_1), \mathbf{b}(X_2, Y_2, Z_2), \mathbf{c}(X_3, Y_3, Z_3), \quad (51)$$

atunci:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1) X_3 + (X_2 Z_1 - X_1 Z_2) Y_3 + \\ &+ (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) Z_3 = X_1 Y_2 Z_3 + X_2 Y_3 Z_1 + X_3 Y_1 Z_3 - X_1 Y_3 Z_2 - \\ &- X_3 Y_2 Z_1 - X_2 Y_1 Z_3.\end{aligned}$$

Este ușor de constatat că această relație se poate rescrie cu ajutorul unui determinant de ordinul al treilea:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (52)$$

Produsul mixt al vectorilor

Expresia produsului mixt în coordonate

Din proprietățile determinantilor se obțin imediat următoarele relații între produsele mixte a trei vectori, luați în diferite ordini:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

- dacă facem o permutare circulară a factorilor într-un produs mixt, valoarea produsului nu se schimbă;
- dacă se schimbă ordinea a doi factori (nu neapărat vecini), *semnul* produsului se schimbă (dar valoarea absolută nu!).
- dacă doi factori dintr-un produs mixt sunt liniar dependenți, produsul se anulează.
- Vectorii sunt coplanari dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (53)$$