3.2.29 $_kV$ - spațiu vectorial
$\dim V = n$
$S \leq_k V$

Să se arate că există $T \leq_k V$ a.î. $S \oplus T = V$

Dacă $\dim S = n \Rightarrow S = V$ atunci $T = \{0\}$
altfel alegem baza $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ pentru S.
$\Rightarrow B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ - liniar independentă

Considerăm $v_{m+1} \in V$, dar $v_{m+1} \notin S$
$B \cup \{v_{m+1}\}$ este liniar independentă?

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1} = 0$$

caz 1 $\left.\begin{array}{l} a_{m+1} = 0 \\ B \text{ - bază} \end{array}\right\} \Rightarrow$ toți scalarii sunt nuli $\Rightarrow B \cup \{v_{m+1}\}$ - lin ind

caz 2 $a_{m+1} \neq 0$

$$a_{m+1} v_{m+1} = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_m v_m$$

$$v_{m+1} = -\frac{a_1}{a_{m+1}} v_1 - \frac{a_2}{a_{m+1}} v_2 - \dots - \frac{a_m}{a_{m+1}} v_m$$

Am obținut o combinație liniară a lui v_{m+1} în funcție de vectorii din S $\Big\}$ contradicție
Dar $v_{m+1} \notin \langle S \rangle$

din caz 1 și caz 2 $\Rightarrow B \cup \{v_{m+1}\}$ - liniar independentă
Astfel definim $S_1 = \langle B \cup \{v_{m+1}\} \rangle$

Dacă $S_1 \neq V$, atunci putem repeta procedura.
Considerăm $v_{m+2} \in V$, dar $v_{m+2} \notin S_1$ și definim
$U_2 = \langle B \cup \{v_{m+1}, v_{m+2}\} \rangle$

Repetăm procedura până când obținem
$S_k = V$, și definim $S_k = \langle B \cup \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}\} \rangle$

Din acest punct nu mai putem extinde lista de vectori, deoarece am ieși din spațiul vectorial V

$B \cup \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}\}$ - liniar independentă
$\Rightarrow \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}\}$ este liniar independentă

Definim $T = \langle \{v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}\} \rangle$
Mai avem de arătat că $S \oplus T = V$

$S \oplus T = V \Leftrightarrow \begin{cases} S + T = V \\ S \cap T = \{0\} \end{cases}$

Alegem un $v \in V$

$v = \underbrace{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m}_{= s \in S} + \underbrace{a_{m+1} v_{m+1} + \dots + a_{m+k} v_{m+k}}_{= t \in T}$

$v = s + t \Rightarrow S + T = V$ (1)

Presupunem că $v = s' + t'$
$s' = b_1 v_1 + \dots + b_m v_m$
$t' = c_{m+1} v_{m+1} + \dots + c_{m+k} v_{m+k}$

Din unicitate $a_i = b_i$, $1 \le i \le m$
$a_i = c_i$, $m+1 \le i \le m+k$

$\Rightarrow s = s'$ și $t = t'$ (2) - scrierea vectorilor este unică, deci $S \cap T = \{0\}$

Din (1) și (2) $\Rightarrow S \oplus T = V$