Logică computațională
Curs 8

Lector dr. Pop Andreea-Diana

Sistemul axiomatic al logicii predicatelor de ordinul I - Alfabetul

- P=$(\Sigma_{\mathrm{Pr}}, F_{\mathrm{Pr}}, A_{\mathrm{Pr}}, R_{\mathrm{Pr}})$
  - $\Sigma_{\mathrm{Pr}} = Var \cup Const \cup (\cup^{n}_{j=1} \mathcal{F}_j) \cup (\cup^{n}_{j=1} \mathcal{P}_j) \cup \mathcal{P}_0 \cup Conective \cup Cuantif$
    - $Var = \{ x, y, z, \ldots\}$ – mulţimea *simbolurilor de variabile*
    - $Const = \{ a, b, c, \ldots\}$ – mulţimea *constantelor*
    - $\mathcal{F}_j = \{ f \mid f : D^j \rightarrow D\}$ – mulţimea *simbolurilor de funcţii* de aritate "*j*"
    - $\mathcal{P}_j = \{ P \mid P: D^j \rightarrow \{T, F\}\}$ – mulţimea *simbolurilor de predicate* de aritate "*j*"
    - $\mathcal{P}_0 = \{ p, q, r, \ldots\} \cup \{T, F\}$ – mulţimea *variabilelor propoziționale* și a *valorilor de adevăr*
    - $Conective = \{ \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$
    - $Cuantif = \{ \forall$ (cuantificatorul universal), $\exists$ (cuantificatorul existențial)$\}$

TERM, ATOM, Literal

- ***TERM*** = mulţimea *termenilor*:
  - $Var \subset TERM$
  - $Const \subset TERM$
  - dacă $f \in \mathcal{F}_k$ și $t_1, \ldots, t_k \in TERM$ atunci $f(t_1, \ldots, t_k) \in TERM$
- ***ATOM*** = mulţimea *formulelor atomice* (*atomilor*):
  - $T, F \in ATOM$
  - dacă $P \in \mathcal{P}_k$ și $t_1, \ldots, t_k \in TERM$ atunci $P(t_1, \ldots, t_k) \in ATOM$
- ***Literal*** = un atom sau negația sa

Formule corect construite

- F_{Pr} = mulţimea formulelor predicative bine formate
  - $ATOM \subset F_{\mathrm{Pr}}$
  - dacă $U \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ și $x \in Var$ astfel încât x nu se află deja sub incidența unui cuantificator (nu este legat), atunci:

    $(\forall x)\ U(x) \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ și $(\exists x)\ U(x) \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$
  - dacă $U, V \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ astfel încât U și V nu conțin aceeași variabilă atât liberă cât și legată, atunci:

    $\neg U \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \wedge V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \vee V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \rightarrow V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \leftrightarrow V \in F_{\mathrm{Pr}}$

Axiome

- $A_{\mathrm{Pr}} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ scheme axiomatice
  - A_1: $U \to (V \to U)$
  - A_2: $(U \to (V \to Z)) \to ((U \to V) \to (U \to Z))$
  - A_3: $(U \to V) \to (\neg V \to \neg U)$
  - A_4: $(\forall x)\, U(x) \to U(t)$, unde t este un termen arbitrar
  - A_5: $(U \to V(y)) \to (U \to (\forall x)\, V(x))$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U, iar x nu este variabilă liberă nici în U, nici în V

Reguli de inferență

- $R_{\mathrm{Pr}} = \{mp, gen\}$
  - *modus ponens*: $U , U \rightarrow V \vdash_{mp} V$
  - *regula generalizării*: $U(x) \vdash_{gen} (\forall x)\, U(x)$

(*x* era o variabilă liberă în *U*)

Definiții

- Variabilele din formulele predicative care se află sub incidenţa unui cuantificator se numesc *variabile legate*, în caz contrar ele se numesc *variabile libere.*

- O *formulă* predicativă se numeşte *închisă*, dacă toate variabilele sale sunt legate, iar în caz contrar se numeşte *deschisă*.

Definiția deducției

- Fie formulele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ numite ipoteze şi V formulă propoziţională. Spunem că **V este deductibilă din $U_1, U_2, \ldots, U_n$** şi notăm $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, dacă există o secvenţă de formule $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ astfel încât $f_m = V$ şi $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ avem:
  - $f_i \in A_{\mathrm{Pr}}$;
  - $f_i \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$;
  - $f_j, f_k \vdash_{mp} f_i$, $j < i$ și $k < I$
  - $f_j \vdash_{gen} f_i$, $j < i$
- Secvenţa $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ se numeşte *deducţia* lui V din $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Definiția teoremei

- O formulă $U \in F_{\mathrm{Pr}}$, astfel încât $\varnothing \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numeşte ***teoremă***.

Semantica logicii predicatelor de ordinul I

- realizează legătura dintre
  - constantele,
  - simbolurile de funcţii,
  - simbolurile de predicate respectiv

  constantele, funcţiile şi predicatele din conceptualizarea universului modelat

- este furnizat un înţeles în termenii universului modelat pentru orice formulă din limbaj

Definiția interpretării

- O *interpretare* pentru un limbaj L al calculului predicatelor este o pereche I=<D, m>, unde :
  - D este o mulţime nevidă numită *domeniu al interpretării*.
  - m este o funcţie care asociază:
    - o valoare fixă $m(c)$ din domeniul D unei constante c.
    - o funcţie $m(f)$: $D^n \rightarrow D$ fiecărui simbol de funcţie f de aritate n;
    - un predicat $m(P)$: $D^n \rightarrow \{T, F\}$ fiecărui simbol de predicat P de aritate n.

Notații

pentru interpretarea I=<D, m>:

- $|I| = D$ este domeniul interpretării I
- $I|x| = m(x)$ unde x este constantă, simbol de funcţie sau simbol de predicat.
- As(I) mulţimea funcţiilor de asignare de variabile peste domeniul interpretării I.

  O funcţie $a \in$ As(I) este definită astfel $a{:}Var \to |\mathrm{I}|$.
- $[a]_x = \{a' \mid a' \in \mathrm{As}(I)$ şi $a'(y) = a(x)$, pentru orice $y \neq x\}$.

Definiția funcției de evaluare

Fie o interpretare I şi $a \in \mathrm{As}(I)$. Se defineşte inductiv ***funcţia de evaluare*** ν^I_a:

- $\nu^I_a(x) = a(x)$, $x \in Var$;
- $\nu^I_a(c) = \mathrm{I}|c|$, $c \in Const$;
- $\nu^I_a(f(t_1, \ldots, t_n)) = I|f|(\nu^I_a(t_1), \ldots, \nu^I_a(t_n))$, $f \in \mathcal{F}_k$, $n>0$;
- $\nu^I_a(P(t_1, \ldots, t_n)) = I|P|(\nu^I_a(t_1), \ldots, \nu^I_a(t_n))$, $P \in \mathcal{P}_k$, $n>0$;
- $\nu^I_a(\neg A) = \neg\, \nu^I_a(A)$; $\nu^I_a(A \wedge B) = \nu^I_a(A) \wedge \nu^I_a(B)$
- $\nu^I_a(A \vee B) = \nu^I_a(A) \vee \nu^I_a(B)$; $\nu^I_a(A \rightarrow B) = \nu^I_a(A) \rightarrow \nu^I_a(B)$
- $\nu^I_a((\exists x)A(x)) = T$ dacă şi numai dacă $\nu^I_{a'}(A(x)) = T$ pentru o funcţie $a' \in [a]_x$
- $\nu^I_a((\forall x)A(x)) = T$ dacă şi numai dacă $\nu^I_{a'}(A(x)) = T$ pentru orice funcţie $a' \in [a]_x$

Concepte semantice

- *O formulă A* este *realizabilă (consistentă)* dacă şi numai dacă există o interpretare I şi o funcţie $a \in \mathrm{As}(I)$ astfel încât $\nu^I_a(A)=T$. În caz contrar formula se numeşte *nerealizabilă (inconsistentă)*.
- Formula A este *adevărată în interpretarea I* dacă şi numai dacă pentru orice funcţie $a \in \mathrm{As}(I)$ de asignare avem $\nu^I_a(A)=\mathrm{T}$ şi notăm $\models_I A$, iar I se numeşte *model* al lui A.
- Interpretarea I se numește *anti-model* al formulei predicative A dacă A este evaluată ca falsă în I, adică: $\forall\ a \in \mathrm{As}(I)$ are loc $\nu^I_a(A)=F$.
- *Formula* A este *validă (tautologie)* dacă şi numai dacă A este adevărată în orice interpretare şi se notează: $\models A$.
- Două *formule A* şi *B* sunt *logic echivalente* dacă $\nu^I_a(A)= \nu^I_a(B)$ pentru orice interpretare I şi funcţie a de asignare. Notaţie $A \equiv B$.
- O mulţime S de formule *implică logic* o formulă A dacă toate modelele mulţimii (adică modelele conjuncţiei formulelor din S) sunt modele ale formulei. Spunem că A este o *consecinţă logică* a mulţimii de formule S şi notăm $S \models A$.
- O *mulţime de formule* predicative este *consistentă* dacă formula obținută prin conjuncţia elementelor sale este consistentă, adică are cel puţin un model.
- O *mulţime de formule* este *inconsistentă* dacă nu există nici un model pentru formula obținută prin conjuncţia elementelor sale.

Observații

- Evaluarea unei formule *A* închise depinde doar de interpretarea în care se evaluează formula, notându-se ν^I (A).
- Dacă interpretarea are domeniu finit:
  - o formulă cuantificată *universal* este înlocuită cu *conjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare
  - o formulă cuantificată *existențial* este înlocuită cu *disjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare

Echivalenţe logice în calculul predicatelor

- Legile de expansiune

$(\forall x)\ A(x) \equiv (\forall x)\ A(x) \wedge A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

$(\exists x)\ A(x) \equiv (\exists x)\ A(x) \vee A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

- Legile infinite ale lui DeMorgan

$\neg\ (\exists x)\ A(x) \equiv (\forall x) \neg\ A(x)$

$\neg\ (\forall x)\ A(x) \equiv (\exists x) \neg\ A(x)$

- Legile de interschimbare a cuantificatorilor

$(\exists x)\ (\exists y)\ A(x, y) \equiv (\exists y)\ (\exists x)\ A(x\ , y)$

$(\forall x)\ (\forall y)\ A(x, y) \equiv (\forall y)\ (\forall x)\ A(x\ , y)$

Legi de extragere

- Legile de extragere a cuantificatorilor în faţa formulei

$A \vee (\exists x)\, B(x) \equiv (\exists x)\, (A \vee B(x))$

$A \vee (\forall x)\, B(x) \equiv (\forall x)\, (A \vee B(x))$

$A \wedge (\exists x)\, B(x) \equiv (\exists x)\, (A \wedge B(x))$

$A \wedge (\forall x)\, B(x) \equiv (\forall x)\, (A \wedge B(x))$

unde formula A nu conţine pe x ca variabilă liberă sau legată

$(\exists x)\, A(x) \vee B \equiv (\exists x)\, (A(x) \vee B)$

$(\forall x)\, A(x) \vee B \equiv (\forall x)\, (A(x) \vee B)$

$(\exists x)\, A(x) \wedge B \equiv (\exists x)\, (A(x) \wedge B)$

$(\forall x)\, A(x) \wedge B \equiv (\forall x)\, (A(x) \wedge B)$

unde formula B nu conţine pe x ca variabilă liberă sau legată

Legile distributivităţii

- $\exists$ faţă de $\vee$:

  $(\exists x)\ (A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)\ A(x) \vee (\exists x)\ B(x)$

- $\forall$ faţă de $\wedge$:

  $(\forall x)\ (A(x) \wedge B(x)) \equiv (\forall x)\ A(x) \wedge (\forall x)\ B(x)$

Semidistributivităţi

- $\exists$ faţă de $\wedge$:

  $\models (\exists x)\ (A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x)\ A(x) \wedge (\exists x)\ B(x)$

- $\forall$ faţă de $\vee$:

  $\models (\forall x)\ A(x) \vee (\forall x)\ B(x) \rightarrow (\forall x)\ (A(x) \vee B(x))$

Forme normale ale formulelor predicative

- O formulă U predicativă este în ***forma normală prenexă*** dacă ea este de forma $(Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)\ M$, unde $Q_i, i=1,\ldots,n$ sunt cuantificatori logici, iar M nu conţine cuantificatori. Secvenţa se numeşte *prefixul formulei U*, iar M este *matricea formulei U*.
- O formulă U predicativă este în *forma normală prenexă conjunctivă* dacă ea este în formă normală prenexă, iar matricea este în FNC.

- **Teoremă:**

Orice formulă din calculul predicatelor poate fi transformată într-o forma normală prenexă logic echivalentă cu ea.

Algoritmul de aducere la forma normală prenexă

Pas 1: Se înlocuiesc conectivele $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$ folosind $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Pas 2: Se aplică legile finite şi infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedaţi de negaţie.

Pas 3: Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte.

Pas 4: Se utilizează echivalenţele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în faţa formulei.*

!!! Ordinea de extragere a cuantificatorilor este arbitrară.

Forma normală Skolem

- Fie U o formulă predicativă, iar $U^P = (Q_1 x_1)\ldots(Q_n x_n)\, M$ una dintre formele sale normale prenexe.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem* notată U^S care se obţine astfel: pentru fiecare cuantificator existenţial Q_r din prefix se aplică următoarea transformare:
  - dacă înaintea simbolului Q_r nu apare niciun cuantificator universal, atunci se alege o constantă notată **a,** diferită de toate constantele care apar în M şi se înlocuiesc toate apariţiile variabilei x_r în M cu **a**. Se şterge $(Q_r x_r)$ din prefixul formulei.
  - dacă înaintea simbolului Q_r apar cuantificatorii universali $Q_{s_1},\ldots,Q_{s_m}$, unde $1 \leq s_1 < \ldots < s_m < r$, atunci alegem un simbol f de funcţie de m variabile, diferit de celelalte simboluri de funcţii şi se înlocuieşte fiecare apariţie a variabilei în M cu $f(x_{s_1},\ldots, x_{s_m})$. Se şterge $(Q_r x_r)$ din prefixul formulei.
- Constantele şi funcţiile folosite pentru a înlocui variabilele existenţiale se numesc *constante Skolem* şi *funcţii Skolem*.

Forma normală clauzală

- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem fără cuantificatori* notată U^{Sq} care se obţine prin eliminarea cuantificatorilor universali din U^{S}.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală clauzală* notată U^{C} care se obţine din U^{Sq} prin aducerea la FNC.

- Obs.: Transformările utilizate în procesul de Skolemizare nu păstrează echivalenţa logică, dar păstrează inconsistenţa

Teoremă

Fie $U_1, U_2, .., U_n, V$ formule predicative.

- V inconsistentă **ddacă** V^P inconsistentă **ddacă** V^S inconsistentă **ddacă** V^{Sq} inconsistentă **ddacă** V^C inconsistentă.
- $\{U_1, U_2, .., U_n\}$ inconsistentă **ddacă** $\{U_1^C, U_2^C, .., U_n^C\}$ inconsistentă.

Proprietăţile logicii predicatelor de ordinul I

- **Teorema de completitudine și corectitudine**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă.

  - **completitudinea**: dacă $S \models A$ atunci $S \vdash A$.
  - **corectitudinea**: dacă $S \vdash A$ atunci $S \models A$.

- **Teorema respingerii**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{\neg A\}$ este inconsistentă atunci $S \vdash A$.

- **Teorema de deducţie**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{A\} \vdash B$ atunci $S \vdash A \rightarrow B$.

Teorema lui Church 1936

- Problema validităţii unei formule în calculul predicatelor de ordinul I este *nedecidabilă*. Mulţimea formulelor valide din acest sistem logic este recursiv numărabilă, adică există o procedură *P* care, având ca intrare o formulă *A* din limbaj, are următorul comportament:
  - dacă formula *A* este validă, *P* se termină şi furnizează răspunsul corespunzător;
  - dacă formula *A* nu este validă, *P* se termină cu răspunsul corespunzător *sau* execuţia procedurii nu se încheie niciodată.

- Calculul predicatelor este **semi-decidabil**.

Metoda tabelelor semantice în calculul predicatelor

- introdusă de Smullyan
- se bazează pe considerații semantice
- încearcă să construiască modelele unei formule date

(FND)

- $\vdash U$ prin respingere, $\neg U$ nu are modele

- ideea:
  - descompunerea formulei inițiale în subformule
  - până la nivel de literali

Clase de formule (1)

- clasa α - formule de tip conjunctiv

$$A \wedge B$$

$$\neg (A \vee B)$$

$$\neg (A \to B)$$

- clasa β - formule de tip disjunctiv

$$A \vee B$$

$$\neg (A \wedge B)$$

$$A \to B$$

Clase de formule (2)

- clasa γ - formule cuantificate universal

$$(\forall x)\ A(x)$$

$$\neg\ (\exists x)\ A(x)$$

- clasa δ - formule cuantificate existențial

$$(\exists x)\ A(x)$$

$$\neg\ (\forall x)\ A(x)$$

Reguli de descompunere a formulelor (1)

- regula α

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg (A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg (A \rightarrow B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

- regula β

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ \swarrow & & \searrow \\ A & & B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg (A \wedge B) & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A \rightarrow B & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg A & & B \end{array}$$

Reguli de descompunere a formulelor (2)

- regula γ

$$\begin{array}{c} (\forall x)\, A(x) \\ | \\ A(c_1) \\ | \\ A(c_2) \\ | \\ \vdots \\ | \\ A(c_n) \\ | \\ (\forall x)\, A(x) \end{array}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – toate constantele existente pe ramură

copie formulă

$$\begin{array}{c} \neg\, (\exists x)\, A(x) \\ | \\ \neg\, A(c_1) \\ | \\ \neg\, A(c_2) \\ | \\ \vdots \\ | \\ \neg\, A(c_n) \\ | \\ \neg\, (\exists\, x)\, A(x) \end{array}$$

– copie formulă

- regula δ

$$\begin{array}{c} (\exists x)\, A(x) \\ | \\ A(a) \end{array}$$

a – constantă nou introdusă

$$\begin{array}{c} \neg\, (\forall x)\, A(x) \\ | \\ \neg\, A(a) \end{array}$$

Arborele binar de descompunere a unei formule

Având o formulă *U*, ei i se poate asocia o tabelă semantică, care este de fapt un arbore binar ce conţine în nodurile sale formule şi se construieşte astfel:

- rădăcina arborelui este etichetată cu formula *U*;
- fiecare ramură a arborelui care conţine o formulă va fi extinsă cu subarborele corespunzător regulii de descompunere care se aplică formulei;
- extinderea unei ramuri se *încheie* în două situaţii:
  a) dacă pe ramură apare o formulă şi negaţia sa;
  b) dacă au fost descompuse toate formulele de pe acea ramură sau prin aplicarea regulilor de descompunere nu se mai obțin formule noi pe acea ramură

Tipuri de ramuri

- O *ramură* a tabelei se numeşte *închisă* (simbolizată prin ⊗) dacă ea conţine o formulă şi negaţia ei, în caz contrar *ramura* se numeşte *deschisă* (simbolizată prin⊙).
- O *ramură* a tabelei se numeşte *completă* dacă ea este fie *închisă*, fie *toate formulele* de pe acea ramură au fost *descompuse*.

Tipuri de tabele semantice

- O *tabelă* se numeşte *închisă* dacă toate ramurile sale sunt închise. Dacă o tabelă are cel puţin o ramură deschisă, atunci ea se numeşte *deschisă*.
- O *tabelă* se numeşte *completă* dacă toate ramurile ei sunt complete.

Observaţii:

- Procesul de construire a unei tabele semantice este unul *nedeterminist* deoarece regulile de descompunere se pot aplica în orice ordine şi la un moment dat se pot alege mai multe ramuri pentru extindere. Astfel unei formule i se pot asocia mai multe tabele semantice, dar acestea sunt echivalente.
- Pentru a obţine tabele semantice *cât mai simple* (mai puţin ramificate) se recomandă:
  - utilizarea regulilor de tip α înaintea regulilor de tip β care realizează o ramificare;
  - utilizarea regulilor de tip δ (care introduc constante noi) înaintea regulilor de tip γ care utilizează toate constantele de pe ramura respectivă;

Observaţii (2):

- formulele de pe aceeaşi ramură a unei tabele semantice sunt *legate* între ele prin conectiva logică $\wedge$, iar *ramificarea* corespunde conectivei logice $\vee$.
- tabela semantică asociată unei formule propoziţionale este o reprezentare grafică a *formei* sale *normale disjunctive*. Fiecare ramură reprezintă un *cub* (conjuncţia tuturor literalilor de pe acea ramură), iar arborele este *disjuncţia* tuturor *ramurilor* sale.
- Unei formule *consistente* i se asociază o *tabelă completă deschisă*, iar fiecare *ramură deschisă* a tabelei furnizează cel puţin un *model* pentru formula respectivă.
- O *tabelă semantică închisă* asociată unei formule indică faptul că formula este *inconsistentă*, adică nu există nicio interpretare în care formula să fie adevărată

Teorema de corectitudine şi completitudine a metodei tabelelor semantice

- O formulă U este teoremă (tautologie) dacă şi numai dacă există o tabelă semantică închisă pentru formula $\neg U$.

Teoremă

- $U_1, U_2, \ldots, U_n \vdash Y$ (echivalent cu $U_1, U_2, \ldots, U_n \models Y$) dacă şi numai dacă există o tabelă semantică închisă pentru formula $U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n \wedge \neg Y$.

Semi-decidabilitatea calculului predicativ

- Pentru cazul logicii predicatelor de ordinul I, arborele poate fi infinit datorită combinării regulilor de tip γ şi δ.

- Dacă arborele asociat negaţiei unei formule predicative este *finit*, atunci *se poate* decide dacă formula respectivă este o tautologie sau nu, dar dacă arborele este *infinit*, *nu* se poate decide nimic asupra validităţii formulei.