(1) (a) Să se defineasca urmatoarele noţiuni: funcţie inversabilă, grup ciclic, corp, sumă directă de subspaţii, nucleu al unei aplicaţii liniare.
(b) Să se dea câte un exemplu de funcţie bijectivă de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{N}$, element minimal in mulţimea ordonată $(\mathcal{P}^*(\{1,2,3\}), \subseteq)$, (aici $\mathcal{P}^*(\{1,2,3\}) = \{X \subseteq \{1,2,3\} \mid \emptyset \neq X\}$), partiţie a mulţimii $\{1,2,3,4,5\}$, spaţiu vectorial de dimensiune 7, vector cu coordonatele $(1,1)$ in baza $[(1,0),(1,1)]^t$ a spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^2$.
(c) Fie V un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial şi $v_1, v_2 \in V$. Să se arate că există o aplicaţie liniară unică $f : \mathbb{R}^2 \to V$ cu proprietatea că $f(1,1) = v_1$ şi $f(0,1) = v_2$.

(2) Se consideră funcţiile: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ şi $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & x \in 2\mathbb{N} \\ -(x+1)/2, & x \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = x^2 - 3x + 2.$$

(a) Să se studieze injectivitatea şi surjectivitatea acestor funcţii.
(b) Dacă există să se determine inversele acestor funcţii.
(c) Dacă sunt definite să se calculeze compunerile $f \circ g$ şi $g \circ f$.
(d) Să se determine numărul funcţiilor $h : \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 9\} \to \{a,b,c\}$ cu proprietatea că $h(0) \in \{a,b\}$.

(3) Fie $G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$.
(a) Să se arate că G este un subgrup al grupului $\mathbb{C}^*$.
(b) Să se arată că $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}$ este un morfism surjectiv de grupuri (arătaţi şi că $f(k) \in G$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$) şi că relaţia $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \sim)$ dată prin $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ este o relaţie de echivalenţă.
(c) Să se găsească o peraţie $\perp : G \times G \to G$ astfel încât $(G, \cdot, \perp)$ este un inel cu unitate.

(4) Se consideră $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ şi $T = \langle v_1, v_2 \rangle$, unde $u_1 = (1,2,-1,-2)$, $u_2 = (3,1,1,1)$, $u_3 = (-1,0,1,-1)$, $v_1 = (-1,2,-7,-3)$, $v_2 = (2,5,-6,-5)$.
(a) Să se arate că S este subspaţiu în $\mathbb{R}^3$.
(b) Să se determine câte o bază şi dimensiunea pentru S, T, $S+T$ şi $S \cap T$.
(c) Fie V un K-spaţiu vectorial de dimensiune $n \in \mathbb{N}^*$ şi $V_1, V_2 \leq_K V$ astfel încât $\dim_K V_1 = n-1$ şi $V_2 \nsubseteq V_1$. Să se arate că $\dim_K(V_1 \cap V_2) = \dim V_2 - 1$ şi că $V_1 + V_2 = V$.

(5) Fie $f \in \mathrm{End}_R(\mathbb{R}^3)$ cu matricea în baza canonică $e = [e_1, e_2, e_3]^t$:

$$[f]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se determine:
(a) $f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$.
(b) Câte o bază şi dimensiunea pentru $\mathrm{Im}(f)$ şi $\mathrm{Ker}(f)$.
(c) Matricea $[f]_b$ unde $b = [e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3]^t$ (se va arăta şi că b este o bază a lui $\mathbb{R}^3$).

NOTĂ: Fiecare subiect este notat de la 1 la 10. Toate afirmaţiile făcute trebuie sa fie justificate.