

CURS 9

Funcțiile SET, SETQ, SETF. Arbori binari. Exemple

Cuprins

1. Arbori binari.....	1
2. Exemple	2
3. SET, SETQ, SETF	9

1. Arbori binari

Un arbore binar se poate memora sub forma unei liste, în următoarele două moduri:

V1 Un arbore având

- rădăcină,
- subarborii subarbore-stâng și subarbore-drept

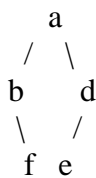
se va reprezenta sub forma unei liste neliniare de forma

(rădăcină lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept)

unde

- lista-subarbore-stâng reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V1) a subarborelui stâng al nodului rădăcină
- lista-subarbore-drept reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V1) a subarborelui drept al nodului rădăcină

De exemplu arborele



se reprezintă, în varianta **V1** sub forma listei (a (b () (f)) (d (e)))

Reprezentarea V1 este cea mai potrivită pentru reprezentarea sub formă de listă a unui arbore cu rădăcină, fiind adecvată definiției recursive a unui arbore (binar).

V2 Un arbore având

- rădăcină,
- nr-arbori subarbori
- subarborii subarbore-stâng și subarbore-drept

se va reprezenta sub forma unei liste liniare de forma

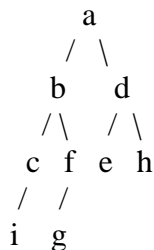
(rădăcină nr-subarbori lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept)

unde

- lista-subarbore-stâng reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V2) subarborelui stâng al nodului rădăcină
- lista-subarbore-drept reprezintă lista asociată (în memorarea sub forma V2) subarborelui drept al nodului rădăcină

Dezavantajul reprezentării **V2** este dat faptul că nu este potrivită pentru un arbore ordonat (de ex., în cazul arborelui binar nu se face distincție între subarboarele stâng și cel drept).

De exemplu arborele



se reprezintă, în varianta **V2** sub forma listei (a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)

Observație. Reprezentările V1 și V2 pot fi generalizate pentru arbori n -ari, varianta V1 fiind cea mai potrivită.

2. Exemple

EXEMPLU 2.1 Se dă un arbore binar reprezentat în V1 (a se vedea Secțiunea 1). Să se determine lista liniară a nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine.

(inordine '(a (b () (f)) (d (e)))) = (b f a e d)

În reprezentarea unui AB în varianta V1, sub forma unei liste l de forma (rădăcină lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept), observăm următoarele

- (car l) – primul element al listei este rădăcina arborelui
- (cadr l) – al doilea element al listei, la nivel superficial, este subarborele stâng
- (caddr l) – al treilea element al listei, la nivel superficial, este subarborele drept

Model recursiv

$$inordine(l_1 l_2 l_3) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inordine(l_2) \oplus l_1 \oplus inordine(l_3) & \text{altfel} \end{cases}$$

```

(defun inordine(l)
  (cond
    ((null l) nil)
    (t (append (inordine (cadr l)) (list (car l)) (inordine (caddr l))))
    ; (t (append (inordine (cadr l)) (cons (car l) (inordine (caddr l)))))
  )
)

```

EXEMPLU 2.2 Se dă un arbore binar reprezentat în V2 (a se vedea Secțiunea 2). Să se determine lista nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine.

În reprezentarea unui AB în V2, față de reprezentarea V1, nu este clar identificat subarborele stâng și subarborele drept, pentru ca AB să poată fi prelucrat recursiv.

Idee: Dacă am reuși să extragem lista corespunzătoare (reprezentării în V2) subarborilor stâng și drept, problema s-ar reduce la cea prezentată în EXEMPLU 3.3.

Vom folosi o funcție auxiliară pentru a determina subarborele stâng al unui AB reprezentat în V2 (presupunem reprezentarea corectă).

(stang ' (a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (b 2 c 1 i 0 f 1 g 0)

Vom folosi o funcție auxiliară, **parcure_st**, care va parcurge lista începând cu al 3-lea element și care va returna subarborele stâng. **Idee:** se colectează elementele, începând cu al 3-lea element al listei,**până când?**

(parcure_st ' (b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (b 2 c 1 i 0 f 1 g 0)

$stang(l_1 l_2 \dots l_n) = parcure_st(l_3 \dots l_n, 0, 0)$

nv – număr vârfuri

nm – număr muchii

$parcure_st(l_1 l_2 \dots l_k, nv, nm)$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ \emptyset & \text{daca } nv = 1 + nm \\ l_1 \oplus l_2 \oplus parcure_st(l_3 \dots l_k, nv + 1, nm + l_2) & \text{altfel} \end{cases}$$

```

(defun parcure_st(arb nv nm)
  (cond
    ((null arb) nil)
    ((= nv (+ 1 nm)) nil)
    (t (cons (car arb) (cons (cadr arb) (parcure_st (caddr arb) (+ 1 nv) (+ (cadr arb) nm))))))
  )
)

```

(defun stang(arb)

(parcure_st (cddr arb) 0 0)
)

Temă. Scrieți funcția pentru determinarea subarborelui drept.

- 1) Se poate folosi aceeași idee ca la parcurgerea pentru subarborele stâng, doar că în momentul în care $nv=1+nm$, se va returna lista rămasă
- 2) Pentru a reduce complexitatea timp, se poate defini o sigură funcție care determină atât subarborele stâng, cât și cel drept.

(drept '(a 2 b 2 c 1 i 0 f 1 g 0 d 2 e 0 h 0)) = (d 2 e 0 h 0)

Observație. Se poate folosi o funcție care să returneze atât subarborele stâng, cât și subarborele drept.

Având funcțiile anterioare care determină subarborele stâng și cel drept, lista nodurilor obținute prin parcurgerea arborelui în inordine se va face similar modelului recursiv descris în **EXEMPLU 2.1.**

$$\begin{aligned} inordine(l_1 l_2 \dots l_n) \\ = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inordine(stang(l_1 l_2 \dots l_n)) \oplus l_1 \oplus inordine(drept(l_1 l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases} \end{aligned}$$

EXEMPLU 2.3 Se dă o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare. Se cere să se determine lista (mulțimea) submulțimilor listei.

(subm '(1 2)) → (() (2) (1) (1 2))

? Cum obținem lista submulțimilor (1 2) dacă știm să generăm lista submulțimilor listei (2)?
(() (2))

Idee: Dacă lista e vidă, submulțimea sa e lista vidă. Pentru determinarea submulțimilor unei liste [E|L], care are capul E și coada L, vom proceda în felul următor:

- i. determină o submulțime a listei L
- ii. plasează elementul E pe prima poziție într-o submulțime a listei L

Vom folosi o funcție auxiliară **insPrimaPoz**(*e*, *l*) care are ca parametri un element *e* și o listă *l* de liste liniare și returnează o copie a listei *l* în ale cărei liste se inserează *e* pe prima poziție.

(insPrimaPoz '3 '(() (2) (1) (1 2)) → ((3) (3 2) (3 1) (3 1 2))

; *l* este o listă de liste liniare

; se inserează e pe prima poziție, în fiecare listă din l , și se returnează rezultatul

$$insPrimaPoz(e, l_1 l_2 \dots l_n) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca lista } e \text{ vida} \\ (e, l_1) \oplus insPrimaPoz(e, l_2 \dots l_n) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun insPrimaPoz(e l)
  (cond
    ((null l) nil)
    (t (cons (cons e (car l)) (insPrimaPoz e (cdr l))))
  )
)
```

; l este o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare

$$subm(l_1 l_2 \dots l_n) = \begin{cases} (\emptyset) & \text{daca lista } e \text{ vida} \\ subm(l_2 \dots l_n) \oplus insPrimaPoz(l_1, subm(l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun subm(l)
  (cond
    ((null l) (list nil))
    (t (append (subm (cdr l)) (insPrimaPoz (car l) (subm (cdr l))))
  )
)
```

În codul Lisp scris anterior observăm faptul că apelul recursiv `(subm (cdr l))` din cea de-a doua clauză COND se repetă, ceea ce evident, nu este eficient din perspectiva complexității timp. O soluție pentru evitarea acestui apel repetat va fi folosirea unei funcții anonime LAMBDA (se va discuta în **Cursul 10**).

De asemenea, în **Cursul 11** vom discuta despre simplificarea implementării funcției `subm`, renunțând la utilizarea funcției auxiliare, folosind o funcție MAP.

EXEMPLU 2.4 Se dă o mulțime reprezentată sub forma unei liste liniare. Se cere să se determine lista (mulțimea) permutărilor listei inițiale.

$$(PERMUTĂRI \ '(1 \ 2 \ 3)) \rightarrow ((1 \ 2 \ 3) (1 \ 3 \ 2) (2 \ 1 \ 3) (2 \ 3 \ 1) (3 \ 1 \ 2) (3 \ 2 \ 1))$$

? Cum obținem lista permutărilor `(1 2 3)` dacă știm să generăm lista permutărilor listei `(2 3)`?
`((2 3) (3 2))`

Idee: Dacă lista e vidă, lista permutărilor sale este lista vidă. Pentru determinarea permutărilor unei liste $[E|L]$, care are capul E și coada L , vom proceda în felul următor:

1. determină o permutare $L1$ a listei L ;

2. plasează elementul E pe toate pozițiile listei L1 și produce în acest fel lista X care va fi o permutare a listei inițiale [E|L].

Vom folosi câteva funcții auxiliare:

- 1) o funcție care returnează lista obținută prin inserarea unui element E pe o anumită poziție N într-o listă L ($1 \leq N \leq \text{lungimea listei L}+1$).

(INS '1 2 '(2 3)) = (2 1 3)

(INS '1 3 '(2 3)) = (2 3 1)

Modelul recursiv

$$\text{ins}(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) = \begin{cases} (e l_1 l_2 \dots l_k) & \text{daca } n = 1 \\ l_1 \oplus \text{ins}(e, n-1, l_2 \dots l_k) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(DEFUN INS (E N L)
  (COND
    ((= N 1) (CONS E L))
    (T (CONS (CAR L) (INS E (- N 1) (CDR L)))))
  )
)
```

- 2) o funcție care să returneze mulțimea formată din listele obținute prin inserarea unui element E pe pozițiile 1, 2,..., lungimea listei L+1 într-o listă L.

(INSERARE '1 '(2 3)) = ((2 3 1) (2 1 3) (1 2 3))

Observație: Se va folosi o funcție auxiliară (INSERT E N L) care returnează mulțimea formată cu listele obținute prin inserarea unui element pe pozițiile N, N-1, N-2,...,1 în lista L.

(INSERT '1 2 '(2 3)) = ((2 1 3) (1 2 3))

$$\text{insert}(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } n = 0 \\ \text{ins}(e, n, l_1 l_2 \dots l_k) \oplus \text{insert}(e, n-1, l_1 l_2 \dots l_k) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(DEFUN INSERT (E N L)
  (COND
    ((= N 0) NIL)
    (T (CONS (INS E N L) (INSERT E (- N 1) L))))
  )
)
```

$$inserare(e, l_1 l_2 \dots l_n) = insert(e, n + 1, l_1 l_2 \dots l_n)$$

```
(DEFUN INSERARE (E L)
  (INSERT E (+ (LENGTH L) 1) L)
)
```

Temă Continuați implementarea pentru funcția PERMUTĂRI.

EXEMPLU 2.5. Se o listă liniară numerică. Să se determine lista sortată, folosind sortarea arborescentă (un ABC intermediar).

(sortare '(5 1 4 6 3 2)) = (1 2 3 4 5 6)

Pentru sortarea arborescentă a unei liste, vom proceda astfel:

1. Construim un ABC intermediar cu elementele listei inițiale
 - pentru memorarea ABC vom face folosi o listă liniară – varianta V1 (Secțiunea 1)
 - pentru construirea ABC intermediar vom avea nevoie de inserarea unui element în arbore
2. Parcurgerea în inordine a arborelui construit anterior ne va furniza lista inițială ordonată.

Model recursiv – inserarea unui element în ABC

$$inserare(e, l_1 l_2 l_3) = \begin{cases} (e) & \text{daca } l \text{ e vida} \\ l_1 \oplus inserare(e, l_2) \oplus l_3 & \text{daca } e \leq l_1 \\ l_1 \oplus l_2 \oplus inserare(e, l_3) & \text{altfel} \end{cases}$$

```
(defun inserare(e arb)
  (cond
    ((null arb) (list e))
    ((<= e (car arb)) (list (car arb) (inserare e (cadr arb)) (caddr arb)))
    (t (list (car arb) (cadr arb) (inserare e (caddr arb)))))
)
```

Model recursiv – construirea ABC din listă

$$construire(l_1 l_2 \dots l_n) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ inserare(l_1 construire(l_2 \dots l_n)) & \text{altfel} \end{cases}$$

```

(defun construire(l)
  (cond
    ((null l) nil)
    (t (inserare (car l) (construire (cdr l)))))
  )
)

; lista nodurilor unui ABC parcurs în inordine
(defun inordine (arb)
  (cond
    ((null arb) nil)
    (t (append (inordine (cadr arb)) (list (car arb)) (inordine (caddr arb)))))
  )
)

; sortarea arborescentă a listei
(defun sortare(l)
  (inordine (construire l))
)

```

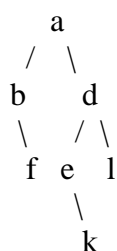
Care este complexitatea timp a sortării arborescente?

Temă Se dă un arbore binar, ale cărui noduri sunt distincte, reprezentat sub forma unei liste neliniare de forma (rădăcină lista-subarbore-stâng lista-subarbore-drept). Să se determine o listă liniară reprezentând calea de la rădăcină către un nod e dat.

De exemplu :

- (setq arb '(a (b () (f)) (d (e () (k)) (l))))

arborele



(cale 'm arb) → NIL (cale 'f arb) → (a b f) (cale 'k arb) → (a d e k)

$$\text{cale}(e, l_1 l_2 l_3) = \begin{cases} \emptyset & \text{daca } l \text{ e vida} \\ (e) & \text{daca } e = l_1 \\ l_1 \oplus \text{cale}(e, l_2) & \text{daca } e \in l_2 \\ l_1 \oplus \text{cale}(e, l_3) & \text{daca } e \in l_3 \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$$

3. SET, SETQ, SETF

Pentru a da valori simbolurilor în Lisp se folosesc funcțiile cu **efect secundar** SET și SETQ.

Acțiunea prin care o funcție, pe lângă calculul valorii sale, realizează și modificări ale structurilor de date din memorie se numește *efect secundar*.

(SET $s_1 f_1 \dots s_n f_n$): e

- se evaluează argumentele și apoi se trece la evaluarea funcției
- efect:
 - valorile argumentelor de rang par (f_i) devin valorile argumentelor de rang impar corespunzătoare evaluate în prealabil la simboluri (s_i)
- rezultatul întors valoarea ultimei forme evaluate (f_n)

Iată câteva exemple

- | | |
|---|------------------------|
| • (SET 'X 'A) = A | X se evaluează la A |
| • (SET X 'B) = B | A se evaluează la B |
| • (SET 'X (CONS (SET 'Y X) '(B))) = (A B) | X := (A B) și Y := A |
| • (SET 'X 'A 'L (CDR L)) | X := A și L := (CDR L) |

(SETQ $s_1 f_1 \dots s_n f_n$): e

- se evaluează doar formele f_1, \dots, f_n
- efect:
 - valorile argumentelor de rang par (f_i) devin valorile argumentelor de rang impar corespunzătoare neevaluate (s_i)
- rezultatul întors valoarea ultimei forme evaluate (f_n)

Iată câteva exemple

- | | |
|---------------------------------|---------------------------|
| • (SETQ X 'A) = A | |
| • (SETQ A '(B C)) = (B C) | |
| • (CDR A) = (C) | |
| • (SETQ X (CONS X A)) = (A B C) | X se evaluează la (A B C) |

Lista vidă este singurul caz de listă care are un nume simbolic, NIL, iar NIL este singurul atom care se tratează ca și listă, () și NIL reprezentând același obiect (elementul NIL are în câmpul CDR un pointer spre el însuși, iar în CAR are NIL).

- (CDR NIL) = NIL
- (CAR NIL) = NIL

Observație. Atenție la diferența dintre () = NIL, lista vidă, și (()) = (NIL), listă ce are ca singur element pe NIL.

- (CONS NIL NIL) = (())

(SETF $f_1 f'_1 \dots f_n f'_n$): e

- este un macro, are efect distructiv
- f_1, \dots, f_n sunt forme care în momentul evaluării macro-ului accesează un obiect Lisp
- f'_1, \dots, f'_n sunt forme ale căror valori vor fi legate de locațiile desemnate de parametrii f_1, \dots, f_n corespunzători.
- efect:
 - se evaluează formele de rang par (f'_i) și valorile acestora se leagă de locațiile desemnate de formele f_i corespunzătoare
- rezultatul întors valoarea ultimei forme evaluate (f'_n)

De remarcat că Lisp oferă pe lângă funcțiile SET și SETQ macro-ul SETF. Parametrii p_1, \dots, p_n sunt forme care în momentul evaluării macro-ului accesează un obiect Lisp, iar e_1, \dots, e_n sunt forme ale căror valori vor fi legate de locațiile desemnate de parametrii p_1, \dots, p_n corespunzători. Rezultatul întors de SETF este valoarea ultimei expresii evaluate, e_n .

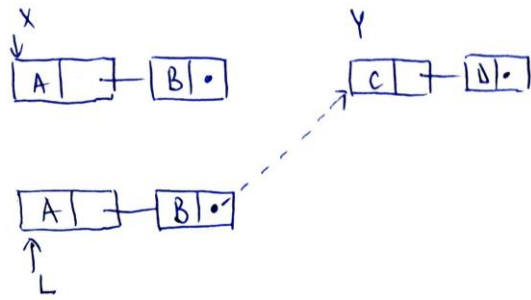
Pentru a ne lămurii în legătură cu modul de operare a lui SETF, să vedem următorul exemplu:

- (SETQ A '(B C D))
 - în acest moment A se evaluează la (B C D)
- (SETF (CADR A) 'X)
 - efectul este înlocuirea lui (CADR A) cu X
- în acest moment A se evaluează la (B X D)
 - (SET (CADR A) 'Y)
- efectul este evaluarea lui (CADR A) la X și inițializarea simbolului X la valoarea Y
- în acest moment A se evaluează la (B X D)
- în acest moment X se evaluează la Y

- (SETQ X '(A B)) X se evaluează la (A B)
- (SETQ Y '(A B)) Y se evaluează la (A B)
- (SETF (CAR X) 'C) X se evaluează la (C B), Y se va evalua tot la (A B)

!!! Atenție la funcția APPEND

- (SETQ X '(A B)) X se evaluează la (A B)
- (SETQ Y '(C D)) Y se evaluează la (C D)
- (SETQ L (APPEND X Y)) L se evaluează la (A B C D)



- (SETF (CAR X) 'E) X se evaluează la (E B)
- L ??
- (SETF (CADR Y) 'F) Y se evaluează la (C F)
- L ??