Temă

Geometrie seminar 3

3.4.

Det. vectorul r, știind că el este perpendicular pe vectorii $\vec{a}(2,3,-1)$ și $\vec{b}(1,-1,3)$ și verifică ecuația: $\vec{r}\cdot(2\bar{i}-3j+4k)=51$

$\vec{r}(r_1, r_2, r_3)$

$r \perp a \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{a}=0 \;\Big|\; \Rightarrow r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3=0$

$\Leftrightarrow 2r_1+3r_2-r_3=0 \quad (1)$

$r\perp b \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{b}=0 \Rightarrow r_1b_1+r_2b_2+r_3b_3=0$

$\Leftrightarrow r_1-r_2+3r_3=0 \quad (2)$

$$\xrightarrow[(2)]{(1)} \begin{cases} 2r_1+3r_2-r_3=0 \\ r_1-r_2+3r_3=0 \end{cases}$$

Dar

$r\cdot(2i-3j+4k)=51$

Fie $c=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k} \Leftrightarrow \vec{c}(2,-3,4) \;\Big|\; \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r_1-3r_2+4r_3=51 \quad (3)$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{cases} 2r_1+3r_2-r_3=0 \\ r_1-r_2+3r_3=0 \Rightarrow r_1=r_2-3r_3 \\ 2r_1-3r_2+4r_3=51 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2r_2-6r_3+3r_2-r_3=0 \\ 2r_2-6r_3-3r_2+4r_3=51 \\ r_1=r_2-3r_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5r_2 - 7r_3 = 0 \\ -r_2 - 2r_3 = 51 \\ r_1 = r_2 - 3r_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{7}{5} \cdot r_3 \\ -\frac{7}{5} r_3 - 2r_3 = 51 \mid \cdot 5 \\ r_1 = r_2 - 3r_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{7}{5} \cdot r_3 \\ -7r_3 - 10r_3 = 255 \\ r_1 = r_2 - 3r_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{7}{5} \cdot r_3 \\ -17r_3 = 255 \\ r_1 = r_2 - 3r_3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_2 = \frac{7}{5} r_3 \\ r_3 = -15 \\ r_1 = r_2 - 3r_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_2 = -21 \\ r_3 = -15 \\ r_1 = -21 + 45 = 24 \end{cases}$$

$\rightarrow r(24, -21, -15)$ vectorul căutat

Var. 2

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} \perp \vec{a} \\ \vec{r} \perp \vec{b} \end{array}\right| \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{r}$$

Dar $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$ $= \vec{r} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r} = 9\vec{i} - 2\vec{k} \mp \vec{j} - 3\vec{k} \mp \vec{i} - 6\vec{j}$

$\Leftrightarrow \vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{k} - 7\vec{j}$

Știm că $\begin{cases} (\lambda \vec{r}) \cdot \vec{a} = \vec{0} \\ (\lambda \vec{r}) \cdot \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ (produsul scalar este compat. cu înmulțirea vect.)

Căutăm λ a.î. $\underbrace{(\lambda \vec{p})}\cdot \vec{c} = 51$

Not. $\vec{p}$ cu $\lambda \vec{p}$ not. cu $\vec{p}$

$\Longleftrightarrow (\lambda \vec{p})\cdot \vec{c} = 51$

$\vec{c}\,(2, -3, 4)$ $\Big| \longrightarrow$

$\longrightarrow \lambda \vec{p} = (8\lambda \vec{i}, -7\lambda \vec{j}, -5\lambda \vec{k})$

$\longrightarrow (\lambda \vec{p})\cdot \vec{c} = 16\lambda + 21\lambda - 20\lambda = 51$

$\Longleftrightarrow 17\lambda = 51 \longrightarrow \lambda = 3$

$\Longleftrightarrow \vec{p}\,(8\cdot 3, -7\cdot 3, -15) \longrightarrow \vec{p}\,(24, -21, -15)$

vectorul soluție