II.5

Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$, urmată de o translație de vector $\vec{v}(2,-1)$. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Soluție:

Se calculează matricea scalării uniforme de factor de scală s, relativ la punctul Q:

$$Scale(Q,s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ EXPLICIT

$$Scale(Q,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ unde q_1, q_2 coordonatele punctului Q.

Înlocuind în cazul nostru, avem:

$$Scale(Q,s) = Scale((2,2),2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & (1-2)\cdot 2 \\ 0 & 2 & (1-2)\cdot 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matricea translației de vector $\vec{v}(2,-1)$ este:

$$Trans(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_v \\ 0 & 1 & y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$, unde x_v și y_v coordonatele vectorului $\vec{v}$

În cazul nostru, avem:

$$Trans(2,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. Începem cu prima transformare, în care se efectuează scalarea urmată apoi de translație. Așadar matricea primei transformări este:

$$T_1 = Trans(2,-1) \cdot Scale((2,2),2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II. A doua transformare este obținută prin efectuarea translației urmată apoi de scalare. Așadar, matricea celei de-a transformări este:

$$T_2 = Scale((2,2),2)\cdot Trans(2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Imaginea triunghiului este dată de:

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_2 \cdot \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_A+2 & 2x_B+2 & 2x_C+2 \\ 2y_A-4 & 2y_B-4 & 2y_C-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cum $\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_A+2 & 2x_B+2 & 2x_C+2 \\ 2y_A-4 & 2y_B-4 & 2y_C-4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\overset{4}{V} = 4$

A(1,1) $\quad x_A' = 2x_A + 2, \; y_A' = 2y_A - 4 = -2$

B(4,1) $\quad x_B' = 2x_B + 2 = 10, \; y_B' = 2y_B - 4 = -2$

C(2,3) $\quad x_C' = 2x_C + 2 = 6, \; y_C' = 2y_C - 4 = 2$

$\Rightarrow A'(2x_A+2, 2y_A-4), \; B'(2x_B+2, 2y_B-4)$ și $C'(2x_C+2, 2y_C-4)$

coordonatele imaginii ΔABC

$A'(4,-2), \; B'(10,-2)$ și $C'(6,2)$

Considerăm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ și $C(x_C, y_C)$ coordonatele punctelor care compun ΔABC, respectiv $A'(x_A', y_A')$, $B'(x_B', y_B')$ și $C'(x_C', y_C')$ coordonatele punctelor care compun imaginea ΔABC.

Imaginea triunghiului este dată de:

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T_1 \cdot \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_A & 2x_B & 2x_C \\ 2y_A-3 & 2y_B-3 & 2y_C-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cum $\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_A & 2x_B & 2x_C \\ 2y_A-3 & 2y_B-3 & 2y_C-3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{ll} A(1,1) & x_A' = 2x_A = 2,\ y_A' = 2y_A - 3 = -1 \\ B(4,1) & x_B' = 2x_B = 8,\ y_B' = 2y_B - 3 = -1 \\ C(2,3) & x_C' = 2x_C = 4,\ y_C' = 2y_C - 3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A'(2x_A, 2y_A-3)$, $B'(2x_B, 2y_B-3)$ și $C'(2x_C, 2y_C-3)$

coordonatele punctelor imaginii ΔABC.

$\Rightarrow A'(2,-1)$, $B'(8,-1)$ și $C'(4,3)$