

## Observație:

La acest examen nu aveți voie să luați loc în bancă având asupra Dv. un telefon mobil sau un alt dispozitiv asemănător. Totodată, nu aveți nevoie de coli de hârtie, de vreme ce ele vor fi furnizate la cerere. În bancă veți putea păstra doar instrumentele de scris și alimente dacă considerați necesar. Hainele groase care vă vor putea incomoda în timpul examenului, genți, telefoane, orice foie de hârtie (mai ales fițuici) trebuie lăsate oriunde altundeva, în sala de examen având loc doar la cuier. Voi folosi proiectorul și voi proiecta un ceas astfel încât să puteți gestiona corect timpul (în cazul în care obișnuți să folosiți telefonul pentru acest lucru).

Dacă veți fi depistați că ați încălcat această regulă, sau că discutați pe orice temă cu colegii Dv. în timpul examenului, veți fi scoși automat afară din sala de examen și veți primi nota 1 pe lucrarea scrisă, care nu va mai fi corectată. Dacă la o reexaminare veți încălca din nou regula, voi comunica situația Dv. forurilor superioare cu indicația respectării regulamentului și demararea procedurii de exmatriculare. Dacă nu vă recunosc, aș putea solicita legitimarea, astfel că vă rog să aveți asupra Dv. carnetul de student.

Vor fi 3 subiecte, câte unul pentru fiecare treime de materie. Fiecare se va nota de la 1-10. Dacă nu vă reamintiți metoda indicată, puteți obține jumătate din punctajul aferent metodei aplicând o metodă cunoscută. Partea teoretică a fiecărui subiect (incluzând descrierea metodei care se aplică) va fi evaluată cu maxim 3p, 1p se va primi din oficiu, iar restul de 6p vor fi obținute ca urmare a rezolvării corecte și complete a exercițiului. Astfel că nu aveți cum obține suficiente puncte doar cunoscând teoria, dar aveți șanse să obțineți o notă mare dacă știți aplica metoda specificată. Vă recomand să studiați în sesiune (presupunând că ați participat activ la seminarii și ați încercat să rezolvați testele on-line în timpul semestrului) măcar 3 zile câte 8h, timp în care să rezolvați exerciții sau să încercați să rezolvați singuri exercițiile discutate la seminar...

## Listă subiecte teoretice care vor fi verificate la Logică computațională – doar 3p din examenul scris

### Logica propozițiilor

Semantica – domeniul semantic, semantica conectivelor, definiția interpretării, definiții pentru: model, anti-model, tautologie, formulă consistentă, contingentă, nerealizabilă, definiția consecinței logice, a echivalenței logice; concepte semantice pentru mulțimi de formule.

Echivalențe logice în logica propozițională – mai ales legile lui De Morgan și de distributivitate, definirea conectivelor derivate, mai ales a implicației.

Principiul dualității.

Forme normale – definirea noțiunilor de literal, clauză, cub, FND, FNC; algoritmul de normalizare; utilizarea celor două forme normale pentru a verifica dacă o formulă este inconsistentă/tautologie.

Sintaxa – Sistemul axiomatic propozițional (alfabetul, formule corect construite, axiomele, regulile de inferență). Definiția deducției, definiția noțiunii de teoremă, teorema de deducție și inversa sa, consecințele teoremei de deducție.

Proprietățile logicii propozițiilor: Teorema de corectitudine și completitudine a logicii propozițiilor, necontradicția, coerența, decidabilitatea.

Metoda tabelor semantice: clase de formule, reguli de descompunere a formulelor, arborele binar de descompunere a unei formule, tipuri de ramuri și de tabele semantice (definiție), Teorema de corectitudine și completitudine a metodei.

Metoda rezoluției: definirea sistemului formal asociat (alfabetul, formule corect construite, axiomele, regulile de inferență), algoritmul rezoluției propoziționale, Teorema de corectitudine și completitudine a metodei. Strategii de aplicare a rezoluției (trebuie să poată fi descrise și aplicate în rezolvarea unor probleme): eliminării, saturării pe nivele (se poate reține algoritmul), mulțimii suport. Rafinări ale rezoluției: blocării (și TCC-ul specific), rezoluția liniară (și TCC-ul specific) – unitară și de intrare (și Teorema de echivalență). Să se cunoască măcar 3 exemple de strategii/rafinări sau combinații ale lor care sunt complete.

## Logica predicatelor

Sistemul axiomatic predicativ (alfabetul, formule corect construite, axiomele, regulile de inferență). Inclusiv definiția unui Termen, atom, literal. Definiția noțiunii de variabilă legată/liberă, Formulă predicativă deschisă/închisă. Definiția deducției.

Semantica – definiția interpretării.

Echivalențe logice în logica propozițională – mai ales legile lui De Morgan și de distributivitate, cunoașterea și mai ales aplicarea legilor de extragere. Legile semidistributivității.

Formele normale ale formulelor predicative: forma normală prenexă – definiție, algoritmul de aducere la FNP, Forma normală Skolem – descrierea modului de obținere a sa, la fel și pentru – forma normală Skolem fără cuantificatori și forma clauzală.

Proprietățile logicii propozițiilor: Teorema de corectitudine și de completitudine a logicii propozițiilor, Teorema lui Church.

Metoda tabelelor semantice: clase de formule, reguli de descompunere a formulelor, arborele binar de descompunere a unei formule, tipuri de ramuri și de tabele semantice (definiție), Teorema de corectitudine și completitudine a metodei, semidecidabilitatea.

Substituții și unificatori: definiția unei substituții, să se știe aplica compunerea substituțiilor, definiția unui unificator și a celui mai general unificator, algoritmul de determinare a *mg*.

Metoda rezoluției: definirea sistemului formal asociat (alfabetul, formule corect construite, axiomele, regulile de inferență), algoritmul rezoluției predicative, Teorema de corectitudine și completitudine a metodei. Strategii de aplicare a rezoluției (trebuie să poată fi descrise și aplicate în rezolvarea unor probleme): saturării pe nivele (se poate reține algoritmul), mulțimii suport. Rafinări ale rezoluției: blocării (și TCC-ul specific), rezoluția liniară (și TCC-ul specific) – unitară și de intrare (și Teorema de echivalență) – condițiile în care este completă (+definiția unei clauze Horn). Să se cunoască măcar 3 exemple de strategii/rafinări sau combinații ale lor care sunt complete.

## Algebre boolee, funcții booleene, circuite logice

Definirea axiomatică a algebrei booleene  $B = (B_2 = \{0,1\}, \wedge, \vee, \neg, 0, 1)$  (toate cele 13 proprietăți)

Definiția noțiunii de funcție booleană, definiția formei canonice disjunctive și conjunctive (o definiție), definiția noțiunii de monom, minterm, maxterm, proprietățile mintermilor respectiv a maxtermilor, dualitatea minterm – maxterm, definiția suportului funcției, definiția relației mai mic sau egal, definiția monoamelor adiacente, a factorizării și a simplificării unei funcții booleene, definiția mulțimii monoamelor maximale și a mulțimii monoamelor centrale (se pot și scrie în cuvinte proprii), algoritmul de simplificare a funcțiilor booleene.

Metoda diagramelor Veitch – descrierea modului de construire a diagramei, cum se identifică monoamele maximale și cele centrale, metoda diagramelor Karnaugh – descrierea modului de construire a diagramei, și cum se identifică monoamele maximale și cele centrale, Metoda analitică a lui Quine - McCluskey – descrierea modului de construire a tabelor, și cum se identifică monoamele maximale și cele centrale.

Circuite logice – desenarea porților de bază și a celor derivate, construirea circuitelor combinaționale discutate: codorul, decodorul, circuitul comparator, sumatorul a două cifre binare, sumatorul pe  $n$  biți.

## Observație

Algoritmii nu trebuie memorați în forma prezentată la curs, ei pot fi descriși sau rescriși în pseudocod și vor primi întregul punctaj dacă nu se omit pași. Același lucru este valabil și pentru definirea noțiunilor (cât timp sensul se păstrează).

Problemele (6p) care se vor cere a fi rezolvate la examen sunt de genul celor discutate la seminar. Iată o scurtă sinteză:

## Logica propozițiilor

1. Utilizând o metodă
  - a) semantică (tabelă de adevăr, forma normală conjunctivă, tabela semantică)
  - b) sintactică (rezoluție (dacă preferați puteți utiliza și *construirea deducției, teorema de deducție și inversa sa*))
  - c) directă (tabela de adevăr, forma normală conjunctivă (dacă preferați puteți utiliza și *construirea deducției, teorema de deducție și inversa sa*))

- d) prin respingere (rezoluție, tabela semantică)
- demonstrați că sunt tautologii/ teoreme, formule propoziționale, printre care:
- A2 -cea de-a doua axiomă a calculului propozițional.
  - A3- axioma 3, „modul tollens”
  - legea silogismului
  - legea permutării/reunirii/separării premiselor
2. Verificați dacă are loc o relație de consecință logică/derivabilitate-deduție:
- $$U_1, \dots, U_n \models V \text{ ( } \vdash \text{ )}$$
- Se pot utiliza:
- tabela semantică pentru:  $U_1 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V$ ;
  - rezoluția pentru:  $\text{FNC}(U_1) \wedge \dots \wedge \text{FNC}(U_n) \wedge \text{FNC}(\neg V)$ .
  - *construirea deducției lui V din ipotezele  $U_1, \dots, U_n$  folosind sistemul axiomatic;*
3. Decideți tipul (consistentă, contingentă, inconsistentă, tautologie) unei formule propoziționale U și construiți modelele și anti-modelele sale.
- din tabela de adevăr a lui U
  - din tabela semantică a lui  $U \Rightarrow$  modelele lui U furnizate de ramurile deschise
  - din tabela semantică a lui  $\neg U \Rightarrow$  anti-modelele lui U furnizate de ramurile deschise
  - din forma normală conjunctivă a lui U  $\Rightarrow$  anti-modelele lui U furnizate de clauzele care nu sunt tautologii
  - din forma normală disjunctivă a lui U  $\Rightarrow$  modelele lui U furnizate de cuburile care nu sunt inconsistente
4. Demonstrarea inconsistenței unei mulțimi de clauze folosind:
- rezoluția generală + transformări
  - strategia saturării pe nivele
  - rezoluția blocării
  - rezoluția liniară ('unit' sau 'input')
5. Verificarea consistenței/inconsistenței unei mulțimi de clauze folosind:
- strategia saturării pe nivele
  - rezoluția blocării + strategia saturării pe nivele
  - rezoluția liniară cu o căutare completă folosind backtracking.
6. Modelare raționament propozițional

## Logica predicatelor

1. Evaluarea unei formule predicative închise în interpretări date (sau propuse de student) cu domeniu finit/infinit.
2. Construire model/ anti-model pentru o formulă predicativă închisă U:
- din tabela semantică a lui  $U \Rightarrow$  modelele lui U furnizate de ramurile deschise
  - din tabela semantică a lui  $\neg U \Rightarrow$  anti-modelele lui U furnizate de ramurile deschise
  - se propune o interpretare care evaluează formula U ca adevărată/falsă deci este model/anti-model.
3. Utilizând o metodă
- a) semantică (tabela semantică)
  - b) sintactică (rezoluție, (dacă preferați puteți utiliza și *construirea deducției, teorema de deducție și inversa sa*))

- c) prin respingere (rezoluție, tabela semantica) (nu se va cere o metodă directă, întrucât nu am discutat suficient de mult o astfel de metodă)  
demonstrați că sunt tautologii/ teoreme, formule predicative.
4. Verificarea proprietății de distributivitate a unui cuantificator ( $\exists, \forall$ ) față de o conectivă ( $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ) cu o metodă impusă (tabele semantice/rezoluție).  
Ex: distributivitate „ $\exists$ ” față de „ $\rightarrow$ ”:  
 $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \equiv (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$  dacă și numai dacă  
 $\models (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \leftrightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x))$  dacă și numai dacă  
 $\models (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \rightarrow ((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x))$  și  $\models ((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)) \rightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$
5. Construirea formelor normale prenex, Skolem și clauzale ale unei formule predicative.
6. Verificați dacă are loc o relație de consecință logică/ derivabilitate - deducție:  
 $U_1, \dots, U_n \models V \text{ (} \vdash \text{)}$   
 Se pot utiliza:  
  - construirea deducției lui V din ipotezele  $U_1, \dots, U_n$  folosind sistemul axiomatic
  - tabela semantică pentru:  $U_1 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V$ ;
  - rezoluția pentru:  $U_1^c \wedge \dots \wedge U_n^c \wedge (\neg V)^c$ .
7. Unificați, dacă este posibil o pereche de atomi și determinați cel mai general unificator.
8. Demonstrarea inconsistenței unei mulțimi de clauze predicative folosind:  
  - rezoluția generală
  - strategia saturării pe nivele
  - rezoluția blocării
  - rezoluția liniară ('unit' sau 'input')
9. Modelare raționament predicativ.

## Algebre booleene, funcții booleene, circuite logice

1. Algebre booleene: definiție + exemple.  
 În funcție de operația "nand"/"nor" să se exprime operațiile logice "și", "not", "sau" și să se deseneze circuitele logice asociate.
2. Construirea formelor canonice conjunctivă și disjunctivă din tabela valorilor funcției booleene. Exemple de mintermi și maxtermi (de 2,3,4 variabile): notații, expresii, tabele de valori.
3. Simplificarea funcțiilor booleene de 2/3/4 variabile utilizând metoda lui Quine/ diagrame Veitch/ diagrame Karnaugh.  
 Funcțiile booleene se pot furniza astfel:  
  - în forma canonică disjunctivă ca o disjuncție de mintermi (dați prin notație standard):  

$$f(x_1, x_2, x_3) = m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7;$$
  - în forma canonică disjunctivă prin expresiile mintermilor:  

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}\overline{x_4} \vee \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}\overline{x_2}x_3x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4;$$
  - printr-o expresie care trebuie adusă la forma canonică disjunctivă.  

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3(\overline{x_1} \vee x_2) \vee x_1(x_2 \vee \overline{x_2}\overline{x_3}) \vee \overline{x_1}\overline{x_2}\overline{x_3}, \text{ aplicare distributivitate și aducere la forma canonică}$$

sau

$$f(x, y, z) = x(\overline{y} \oplus z) \vee y(\overline{x} \oplus z) \vee \overline{x}(\overline{y} \downarrow z) \vee (\overline{x} \downarrow y)z; \text{ înlocuire } \oplus, \downarrow$$

- prin intermediul tabelului sale de valori din care se construiește forma canonică disjunctivă:

$x$	$y$	$z$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- prin intermediul valorilor sale de 1:

$$f_1(1,1,1,1) = f_1(1,1,0,1) = f_1(0,1,1,1) = f_1(1,1,0,0) = f_1(0,1,0,0) = f_1(0,0,0,0) = \\ = f_1(0,0,0,1) = f_1(0,0,1,1) = 1;$$

construindu-se forma sa canonică disjunctivă

- prin intermediul zerourilor sale:

$$f_1(0,1,0) = f_1(0,1,1) = f_1(1,0,1) = 0,$$

- se obțin valorile de 1 ale funcției și apoi forma sa canonică disjunctivă

4. Desenare circuit logic din expresia funcției booleene, atât cu porți de bază, cât și cu porți derivate.  
Construire expresie funcție booleană care modelează funcționarea unui circuit logic dat, atât cu porți simple, cât și cu porți derivate.
5. Exemple de circuite combinaționale: “circuitul de comparare a 2 cifre binare”, “circuitul de adunare a 2 cifre binare”, “circuitul de adunare binară pe  $n$  biți”, circuitul de codificare/decodificare în binar.

## BILET

1. Semantica logicii propozițiilor. Utilizând o metodă semantică de demonstrare, demonstrați că legea permutării premiselor este o tautologie.
2. Verificați proprietatea de distributivitate a cuantificatorului existențial față de implicație folosind o metodă sintactică. Teorema de corectitudine și completitudine a acestei metode.
3. Desenați un circuit logic având 3 variabile de intrare și conținând toate porțile de bază și derivate. Scrieți funcția booleană corespunzătoare acestui circuit și simplificați-o. Implementați circuitul logic simplificat.

## BILET

1. Folosind rezoluția blocării verificați dacă are loc:  $p \rightarrow q, \neg(q \rightarrow r) \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow r$ . Rezoluția ca sistem formal.
2. Folosind o metodă semantică de demonstrare, verificați dacă formula:  $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$  este consecință logică a formulei:  $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ . Teoria aferentă.
3. Simplificați următoarea funcție booleană, folosind metoda diagramelor Veitch:  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ . Implementați circuitul logic asociat formei inițiale a lui  $f$  și tuturor formelor sale simplificate.

## BILET

1. Sistemul axiomatic (formal) al calculului propozițiilor. Ce este o teoremă?  
Folosind o metodă sintactică demonstrați că cea de-a doua axiomă a calculului propozițional este

o teoremă.

2. Folosind rezoluția liniară, verificați dacă următoarea mulțime de formule este inconsistentă.  
 $S = \{p(x) \wedge q(x) \vee r(x), \neg q(y) \vee r(y), r(a) \wedge \neg p(a)\}$ . Teoria aferentă.

3. Folosind metoda lui Quine, simplificați funcția booleană:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4.$$

Implementați circuitul logic asociat unei forme simplificate a funcției  $f$ .

## BILET

1. Scrieți toate modelele și anti-modelele formulei  $V = ((p \wedge \neg r) \rightarrow q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge r$ .

Teoria aferentă metodei alese.

2. Evaluați formula predicativă  $U = ((\forall x)p(x) \rightarrow (\forall x)q(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \wedge q(x))$  în două interpretări diferite alese astfel încât o interpretare să aibă domeniul finit, iar ce-a de-a doua domeniul infinit. Câte interpretări posibile are  $U$ ?

Este logica predicatelor decidabilă? Argumentați răspunsul.

3. Definiții pentru noțiunile: minterm, maxterm, monom central, monom maximal, factorizare.

Exemple de 4 mintermi și 4 maxtermi de 3 variabile: expresii, notații și tabele de valori.

Construiți circuitul logic asociat funcției booleene:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_1 \vee m_{13} \vee m_8 \vee m_5.$$