9.2.13.3 Construind arborele binar, demonstrați semidistributivitatea cuantificatorului „$\forall$" față de „$\rightarrow$"

$\vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$

Arătați că implicația inversă nu are loc

$\neg((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)))$ 1 ✓

| α (1)

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 2 ✓

|

$\neg((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x))$ 3 ✓

| α (3)

$(\forall x)P(x)$ 4 ✓

|

$\neg(\forall x)Q(x)$ 5 ✓

| δ (5), a - constantă nouă

$\boxed{\neg Q(a)}$

| γ (4), a - constantă existentă

$\boxed{P(a)}$

|

$(\forall x)P(x)$ 4' - copie

| γ (2), a - constantă existentă

$P(a) \rightarrow Q(a)$ 6

|

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ 2' - copie

/ \ β (6)

$\boxed{\neg P(a)}$ $\boxed{Q(a)}$

⊗ ⊗

Tabla semantică este închisă $\xRightarrow{TCC}$ formula este tautologie

Implicația inversă: $\vdash ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)) \to (\forall x)(P(x) \to Q(x))$

$\neg(((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)) \to (\forall x)(P(x) \to Q(x)))$ 1 ✓

| α (1)

$(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$ 2 ✓

$\neg(\forall x)(P(x) \to Q(x))$ 3 ✓

| δ (3), a - constantă nouă

$\neg(P(a) \to Q(a))$ 4 ✓

| α (4)

$P(a)$

$\boxed{\neg Q(a)}$

Left branch:

$\neg(\forall x)P(x)$ 5

| δ (5) b - const. nouă

$\neg P(b)$

$\odot$

Right branch:

$(\forall x)Q(x)$ 6

| γ (6), a - const. existentă

$\boxed{Q(a)}$

$(\forall x)Q(x)$ 6' - copie

$\otimes$

Tabela semantică este deschisă $\Leftrightarrow$ formula nu este tautologie

$\Rightarrow$ implicația inversă nu are loc