1 Calcul numeric

Problema 1.1. (a) Scrieţi formula de interpolare Hermite pentru $f \in C^4[-1,1]$ şi nodurile $x_0 = -1$ simplu, $x_1 = 0$ dublu şi $x_2 = 1$ simplu.

(b) Determinaţi o formulă de cuadratură de tip interpolator integrând formula precedentă termen cu termen.

(c) Transformaţi formula precedentă într-o formulă pe $[a, b]$. Este aceasta o formulă cunoscută?

Problema 1.2. Să se aplice metoda lui Newton ecuaţiei $\sin x = 0$ pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dacă x_0 este soluţia nenulă a ecuaţiei $\mathrm{tg} x = 2x$. Ce ar trebui să se întâmple şi ce se întâmplă în realitate?

2 Calcul numeric

Problema 2.1. Considerăm formula de cuadratură de tipul

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = af(0) + bf(c) + R(f)$$

(a) Determinaţi a, b, c astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 2$. Puteţi identifica formula astfel obţinută? (Indicaţie: $\Gamma(n+1) = n!$).

(b) Fie $p_2(x) = (H_2 f)(x, 0, 2, 2)$ polinomul de interpolare Hermite corespunzător funcţiei f şi nodurilor $x = 0$, simplu şi $x = 2$, dublu. Calculaţi $\int_0^\infty e^{-x} p_2(x)dx$ şi comparaţi cu rezultatul de la punctul (a).

(c) Obţineţi restul $R(f)$ sub forma

$$R(f) = const \cdot f'''(\xi), \quad \xi > 0.$$

Problema 2.2. O analiză de tip element finit a sarcinii pe o structură ne conduce la următorul sistem

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \beta & 0 & \gamma & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde $\alpha = 482317$, $\beta = 2196.05$ şi $\gamma = 6708.43$. Aici x_1, x_2, x_3 reprezintă deplasări laterale, iar x_4, x_5, x_6 reprezintă deplasări rotaţionale (tridimensionale) corespunzând forţei aplicate (membrul drept).

1. Determinaţi x.

2. Cât de precise sunt calculele? Presupunem întâi date exacte, apoi $\|\Delta A\|/\|A\| = 5 \times 10^{-7}$.

3 Calcul numeric

Problema 3.1. (a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 0$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$).

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

(c) Transformaţi formula de la (b) într-o formulă cu rest pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 3.2. Să se genereze un spline cubic parametric care să treacă prin punctele date $P_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, n}$. Punctele se vor citi cu `ginput`.

4 Calcul numeric

Problema 4.1. (a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f). \qquad (1)$$

Să se determine α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate să fie cât mai mare posibil. Care este gradul de exactitate maxim care se poate atinge?

(b) Utilizaţi interpolarea şi teorema lui Peano pentru a obţine o margine a lui $|R(f)|$ în funcţie de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} |f^{(r)}(x)|$, pentru un r adecvat.

(c) Adaptaţi (1), inclusiv delimitarea pentru $|R(f)|$, pentru a obţine o integrală de forma $\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă şi $h > 0$.

(d) Aplicaţi rezultatul de la (c) pentru a obţine o formulă de cuadratură repetată pentru $\int_a^b f(t)dt$, subdivizând $[a,b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \frac{b-a}{n}$. Găsiţi o margine a erorii totale.

Problema 4.2. Presiunea P a vaporilor de apă (în bari) ca funcţie de temperatură T (în grade C) este

T	0	10	20	30
$P(T)$	0.006107	0.012277	0.023378	0.04243
T	40	50	60	80
$P(T)$	0.073774	0.12338	0.19924	0.31166
T	80	90	100	
$P(T)$	0.47364	0.70112	1.01325	

Interpolaţi aceste date cu un spline cubic. Se ştie că $P(5) = 0.008721$, $P(45) = 0.095848$, and $P(95) = 0.84528$. Cât de bine interpolează S în aceste puncte? Reprezentaţi grafic S ca o funcţie de T. Calculaţi integrala presiunii de la 0 la 100.

5 Calcul numeric

Problema 5.1. (a) Construiţi prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = -\alpha f'(0) + \beta f\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha f'(1) + R(f)$$

care are grad maxim de exactitate.

(b) Care este gradul exact de exactitate al formulei de la punctul (a)?

(c) Utilizaţi nucleul lui Peano al funcţionalei Q pentru a exprima $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată, folosind rezultatul de la (b).

(d) Transformaţi formula de la punctul (a) într-una potrivită pentru a evalua $\int_c^{c+h} g(t)dt$ şi apoi obţineţi formula repetată corespunzătoare pentru $\int_a^b g(t)dt$, utilizând n subintervale de lungime egală şi deduceţi restul. Interpretaţi rezultatul.

Problema 5.2. (a) Implementaţi în MATLAB metoda lui Newton pentru ecuaţii scalare cu rădăcini multiple.

(b) Studiaţi comportarea metodei lui Newton şi a metodei secantei pentru funcţia

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x-a)\sqrt{|x-a|}.$$

6 Calcul numeric

Problema 6.1. Fie

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ în n subintervale egale.

(a) Deduceţi o formulă de cuadratură elementară pentru integrala $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx$ (inclusiv restul), aproximând f printr-un polinom de interpolare Hermite $(H_3 f)(x; x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1})$ şi apoi integrând pe $[x_k, x_{k+1}]$. Interpretaţi rezultatul.

(b) Deduceţi din formula de la (a) o formulă repetată de cuadratură (cu rest), pentru integrala $\int_a^b f(x)dx$.

Problema 6.2. Rezolvaţi ecuaţia lui Kepler

$$f(x) = x - \varepsilon \sin x - \eta = 0, \qquad 0 < |\varepsilon| < 1, \ \eta \in \mathbb{R},$$

unde ε şi η sunt parametrii.

7 Calcul numeric

Problema 7.1. (a) Fie $L_n(f;x)$ polinomul de interpolare de grad $\le n$ corespunzător funcţiei $f(x) = e^x$ şi punctelor $x_i = i/n$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Deduceţi o margine superioară pentru

$$\max_{0\le x\le 1} |e^x - (L_n f)(x)| = \max_{0\le x\le 1} |(R_n f)(x)|$$

şi determinaţi cel mai mic n ce garantează o eroare mai mică decât 10^{-6} pe $[0, 1]$.

Indicaţie. Arătaţi întâi că pentru orice i, $0 \le i \le n$ are loc

$$\max_{0\le x\le 1} \left| \left(x - \frac{i}{n} \right) \left(x - \frac{n-i}{n} \right) \right| \le \frac{1}{4}.$$

(b) Rezolvaţi problema analoagă pentru polinomul Taylor de grad n

$$(T_n f)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

şi comparaţi rezultatul cu cel de la (a).

Problema 7.2. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 36 &= 0 \\ x^2 - 2y^2 - 20z &= 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Indicaţie: Sunt patru soluţii. Valori bune de pornire

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

8 Calcul numeric

Problema 8.1. (a) Dându-se $f \in C[a,b]$, găsiţi $\widehat{s}_1(f;\cdot) \in S_1^0(\Delta)$ astfel încât

$$\int_a^b [f(x) - \widehat{s}_1(f;x)]^2 dx \to \min$$

utilizând baza B-splinelor de gradul întâi. Ce puteţi spune despre problema analoagă discretă?

(b) Implementaţi soluţia de la punctul (a) în MATLAB.

9 Calcul numeric

Problema 9.1. (a) Pentru un polinom de interpolare de grad II cu noduri echidistante x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, deduceţi o margine superioară $\|R_2 f\|_\infty$ în funcţie de $\|f'''\|_\infty$ şi h.

(b) Comparaţi marginea obţinută la (a) cu cea analoagă pentru trei puncte Cebîşev din $[x_0, x_2]$.

Problema 9.2. Fie funcţia $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 - x_2^2 - e^{x_3} - 8x_1 - 2x_2 + x_3$. Să se determine un punct staţionar al ei.

10 Calcul numeric

Problema 10.1. (a) Presupunem că funcţia $f(x) = \ln(2 + x)$, $x \in [-1, 1]$ este interpolată printr-un polinom $L_n f$ în punctele Cebîşev $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $k = \overline{0, n}$. Deduceţi o margine a erorii maxime, $\|R_n f\|_\infty$.

(b) Comparaţi rezultatul de la (a) cu marginea superioară $\|R_n^T f\|_\infty$ a restului polinomului de interpolare Taylor al lui f.

Problema 10.2. Inversaţi funcţia specială

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}\, t$$

rezolvând ecuaţia $y = \operatorname{erf}(x)$ în raport cu x folosind metoda lui Newton, $-1 \le y \le 1$.

11 Calcul numeric

Problema 11.1. Fie $f(t) = \arccos t$, $t \in [-1, 1]$. Determinaţi aproximaţia continuă în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{\varphi} \in P_n$ a lui f relativ la ponderea $w(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$, adică, găsiţi soluţia $\varphi = \widehat{\varphi}$ a problemei

$$\min \left\{ \int_{-1}^{1} [f(t) - \varphi(t)]^2 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} : \varphi \in P_n \right\}.$$

(φ se va exprima în baza formată de polinoamele Cebîşev de speţa I, $\pi_j(t) = T_j(t)$.)

Problema 11.2. Studiul transportului neutronului într-o vergea (vezi G. M. Wing: *An Introduction to Transport Theory*, Wiley, New York, 1962) conduce la o ecuaţie transcendentă care are rădăcini legate de lungimile critice. Pentru o vergea de lungime ℓ ecuaţia este

$$\cot(\ell x) = \frac{x^2 - 1}{2x}.$$

Faceţi un grafic al funcţiilor $\cot(\ell x)$ şi $\frac{x^2-1}{2x}$ pentru a vă face o idee asupra poziţiei rădăcinilor. Pentru $\ell = 1, 2$ determinaţi cele mai mici trei rădăcini pozitive.

12 Calcul numeric

Problema 12.1. Implementaţi un algoritm O(n) pentru rezolvarea unui sistem tridiagonal prin descompunere LUP.

Problema 12.2. Deduceţi formulele de derivare numerică

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + R(h), \\ f''(x) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + R(h), \end{aligned}$$

presupunând că f este continuu diferenţiabilă de câte ori este necesar.

Problema 12.3. Se consideră problema bilocală

$$y''(x) - p(x)y'(x) - q(x)y(x) = r(x), \qquad x \in [a,b]$$

cu condiţiile pe frontieră $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Presupunem că $q(x) \geq \underline{q} > 0$. Pentru a rezolva problema numeric o vom discretiza, căutând aproximaţiile pe grila uniformă $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N-1$, unde $h = (b-a)/(N+1)$. Definim $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ and $y_i \approx y(x_i)$. Utilizând formulele din problema 12.2 şi ţinând cont că $y_0 = \alpha$ şi $y_{N+1} = \beta$, se obţine un sistem liniar tridiagonal.

(a) Scrieţi sistemul obţinut prin discretizare şi studiaţi proprietăţile lui.

(b) Scrieţi o funcţie MATLAB pentru rezolvarea problemei cu valori pe frontieră date, folosind ideea de mai sus şi funcţia din problema 12.1.

13 Calcul numeric

Problema 13.1. Implementaţi un algoritm O(n) pentru rezolvarea unui sistem tridiagonal cu matrice SPD prin descompunere Cholesky.

Problema 13.2. Deduceţi formulele de derivare numerică

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + R(h), \\ f''(x) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + R(h), \end{aligned}$$

presupunând că f este continuu diferenţiabilă de câte ori este necesar.

Problema 13.3. Se consideră problema bilocală (ecuaţia Poisson unidimensională)

$$-\frac{d^2v(x)}{dx^2} = f, \qquad 0 < x < 1,$$

cu condiţiile pe frontieră $v(0) = v(1) = 0$. Pentru a rezolva problema numeric o vom discretiza, căutând aproximaţiile pe grila uniformă $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N-1$, unde $h = (b-a)/(N+1)$, $[a,b] = [0,1]$. Definim $y_i \approx y(x_i)$. Utilizând formulele din problema 13.2 (una din ele) şi ţinând cont că $y_0 = 0$ şi $y_{N+1} = 0$, se obţine un sistem liniar tridiagonal.

(a) Scrieţi sistemul obţinut prin discretizare şi studiaţi proprietăţile lui.

(b) Scrieţi o funcţie MATLAB pentru rezolvarea problemei cu valori pe frontieră date, folosind ideea de mai sus şi funcţia din problema 13.1.

14 Calcul numeric

Problema 14.1. Considerăm ecuaţia lui Kepler,

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x - \varepsilon \sin x - \eta, \quad 0 < |\varepsilon| < 1,\ \eta \in \mathbb{R},$$

unde ε, η sunt parametrii.

(a) Arătaţi că, pentru orice ε, η există exact o rădăcină reală $\alpha = \alpha(\varepsilon, \eta)$ şi că

$$\eta - |\varepsilon| \le \alpha(\varepsilon, \eta) \le \eta + |\varepsilon|.$$

(b) Scriind ecuaţia sub forma unei probleme de punct fix

$$x = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \varepsilon \sin x + \eta$$

arătaţi că metoda aproximaţiilor succesive $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge pentru orice valoare de pornire arbitrară x_0.

(c) Fie m un întreg astfel încât $m\pi < \eta < (m+1)\pi$. Arătaţi că metoda lui Newton cu valoarea de pornire

$$x_0 = \begin{cases} (m+1)\pi, & \text{dacă } (-1)^m \varepsilon > 0; \\ m\pi, & \text{altfel.} \end{cases}$$

converge (monoton) către $\alpha(\varepsilon, \eta)$.

(d) Estimaţi constanta de eroare asimptotică c a metodei lui Newton.

Problema 14.2. Scrieţi o funcţie MATLAB ce calculează coeficienţii unui spline cubic periodic de clasă $C^2[a, b]$. Aceasta înseamnă că datele de intrare verifică $f_n = f_1$ şi interpolantul trebuie să fie periodic, de perioadă $x_n - x_1$. Realizarea condiţiilor la capete este mai simplu de impus dacă adăugăm două puncte suplimentare $x_0 = x_1 - \Delta x_{n-1}$ şi $x_{n+1} = x_n + \Delta x_1$, unde spline-ul are valorile $f_0 = f_{n-1}$ şi respectiv $f_{n+1} = f_2$.

15 Calcul numeric

Problema 15.1. (a) Deduceţi o metodă iterativă ce utilizează numai adunări (sau scăderi) şi înmulţiri pentru calculul inversului $\frac{1}{a}$ al unui număr pozitiv a.

(b) Pentru ce valori de pornire x_0 algoritmul de la (a) converge? Ce se întâmplă dacă $x_0 < 0$?

(c) Deoarece în aritmetica în virgulă flotantă binară este suficient să găsim inversul semnificantului, presupunem că $1 \leq a < 2$, sau după creşterea exponentului cu o unitate $\frac{1}{2} \leq a < 1$. Arătaţi că în acest ultim caz

$$\left|x_{n+1} - \frac{1}{a}\right| < \left|x_n - \frac{1}{a}\right|^2.$$

(d) Utilizaţi rezultatul de la (c) pentru a estima câte iteraţii sunt necesare pentru a obţine $\frac{1}{a}$ cu o eroare mai mică decât 2^{-48}, dacă se ia $x_0 = \frac{3}{2}$.

Problema 15.2. Să se reprezinte grafic o cubică parametrică care trece prin două puncte date şi are în acele puncte tangente date.

16 Calcul numeric

Problema 16.1. (a) Deduceţi iteraţia care rezultă aplicând metoda lui Newton funcţiei $f(x) := x^3 - a = 0$ pentru a calcula rădăcina cubică $\alpha = a^{\frac{1}{3}}$ a lui $a > 0$.

(b) Consideraţi ecuaţia echivalentă $f_\lambda(x) = 0$, unde $f_\lambda(x) = x^{3-\lambda} - ax^{-\lambda}$ şi determinaţi λ, astfel încât metoda lui Newton să conveargă cubic. Scrieţi iteraţia obţinută în cea mai simplă formă.

Problema 16.2. Pentru o funcţie dată f şi o mulţime de noduri, x_i, date să se determine un spline cubic S_3f ce verifică

$$\begin{aligned}(S_3f)(x_i) &= f(x_i),\\ (S_3f)'(x_i) &= f'(x_i), \qquad i = \overline{1,n}.\end{aligned}$$

Să se reprezinte grafic S_3f şi spline-ul natural S_3f_N ce verifică $(S_3f_N)(x_i) = f(x_i)$. (pe acelaşi grafic).

17 Calcul numeric

Problema 17.1. Arătaţi că

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

este o metodă de calcul al lui $\alpha = \sqrt{a}$, care converge cubic către α (pentru un x_0 potrivit). Determinaţi constanta de eroare asimptotică.

Problema 17.2. Scrieţi o funcţie MATLAB pentru inversarea unei matrice Vandermonde utilizând proprietăţile polinoamelor Lagrange fundamentale.

18 Calcul numeric

Problema 18.1. Se consideră iteraţia de tip punct fix

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

unde

$$\varphi(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3.$$

(a) Dându-se un număr pozitiv α, să se determine constantele A, B, C, astfel ca iteraţia să conveargă local către $1/\alpha$ cu ordinul $p = 3$. (Se obţine astfel o metodă cu convergenţă cubică pentru calculul inversului $1/\alpha$ a lui α, care utilizează doar adunări, scăderi şi înmulţiri).

(b) Determinaţi condiţii asupra erorii iniţiale $\varepsilon_0 = x_0 - \dfrac{1}{\alpha}$, astfel ca iteraţia să conveargă.

Problema 18.2. În literatura de specialitate (J. Crank, G. Park: Evaluation of the diffusion coefficient for $CHCl_3$ in polystirene from simple absorbtion experiments, *Trans. Faraday Soc.* **45**(1949), pp. 240-249) se dă o metodă de deducere a coeficientului de difuzie a cloroformului în polistiren din măsurătorile de absorbţie. Utilizând mai multe ipoteze, autorii ajung la cantitatea

$$\widehat{D}(C_0) = \frac{1}{C_0}\int_0^{C_0} D(C)\,\mathrm{d}C,$$

care poate fi măsurată pentru diverse valori ale lui C_0. Derivarea în raport cu C_0 ne dă o expresie a lui D în funcţie de cantitatea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C_0}\left[C_0\widehat{D}(C_0)\right].$$

Utilizând datele

C_0	5.0	7.5	9.9	12.9
$\widehat{D}(C_0)$	0.0240	0.0437	0.0797	0.1710
C_0	13.2	15.1	16.3	16.8
$\widehat{D}(C_0)$	0.1990	0.3260	0.8460	0.9720

aproximaţi D pentru fiecare valoare a lui C_0 diferenţiind spline-ul corespunzător. (*Indicaţie*: $\widehat{D}(C0) + C0\frac{\widehat{D}(C0)}{dC0} = D(C0)$).

19 Calcul numeric

Problema 19.1. (a) Găsiţi polinomul de cea mai bună aproximare de gradul al doilea pentru funcţia $f(x) = \cos x$ în $L_w^2[a,b]$, unde $w(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$.

1. Stabiliţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 19.2. Calculaţi inversa unei matrice date rezolvând un set de sisteme convenabile şi utilizând descompunerea LUP.

20 Calcul numeric

Problema 20.1. (a) Găsiţi polinomul de cea mai bună aproximare de gradul întâi pentru funcţia $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ în $L_w^2[a,b]$, unde $w(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$, $b = 1$.

(b) Stabiliţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = A_1 f(x_1) + R(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 20.2. Căutăm parametrii α, β şi γ ai modelului

$$f(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma x$$

interpolând punctele $(1, 10)$, $(2, 12)$ şi $(3, 18)$. Utilizaţi metoda lui Newton pentru a găsi parametrii cu trei cifre corecte.

21 Calcul numeric

Problema 21.1. Considerăm formula de cuadratură de tipul

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = af(0) + bf(c) + R(f)$$

(a) Determinaţi a, b, c astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 2$. Puteţi identifica formula astfel obţinută? (Indicaţie: $\Gamma(n+1) = n!$).

(b) Fie $p_2(x) = (H_2 f)(x, 0, 2, 2)$ polinomul de interpolare Hermite corespunzător funcţiei f şi nodurilor $x = 0$, simplu şi $x = 2$, dublu. Calculaţi $\int_0^\infty e^{-x} p_2(x)dx$ şi comparaţi cu rezultatul de la punctul (a).

(c) Obţineţi restul $R(f)$ sub forma

$$R(f) = const \cdot f'''(\xi), \quad \xi > 0.$$

Problema 21.2. Datele următoare dau absorbţia luminii A ca funcţie de lungimea de undă λ pentru un obturator vanadyl D-tartrat.

λ	> 3125	> 3250	3375	> 3500	3625	> 3750
$A(\lambda)$	0.700	0.572	0.400	0.382	0.449	0.560
λ	3875	> 4000	4125	> 4250	4375	
$A(\lambda)$	0.769	0.836	0.750	0.530	0.315	
λ	> 4500	4625	> 4750	4875	> 5000	
$A(\lambda)$	0.170	0.144	0.183	0.252	0.350	

Utilizaţi un spline cubic pentru a interpola punctele marcate cu (>). Studiaţi efectele scalării şi translaţiei variabilei independente $x = \lambda$(lungimea de undă) în cazurile:

(a) se iau datele aşa cum sunt;

(b) se înlocuieşte x cu $x/1000$;

(c) se înlocuieşte x cu $(x - 4000)/1000$;

În fiecare caz evaluaţi spline-ul cubic pentru lungimile de undă nemarcate. Cum sunt valorile aproximative comparativ cu valorile din tabelă? Afectează scalările şi translaţiile precizia lui S?

22 Calcul numeric

Problema 22.1. (a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 0$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$).

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

(c) Transformaţi formula de la (b) într-o formulă cu rest pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 22.2. În unele probleme de distribuţie a temperaturii este necesar să se găsească rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$2xJ_1(x) - J_0(x) = 0,$$

unde $J_0(x)$ şi $J_1(x)$ sunt funcţiile Bessel de speţa I de ordinul 0 şi 1. Calculaţi cele mai mici trei rădăcini pozitive.

23 Calcul numeric

Problema 23.1. Fie $p(t)$ un polinom monic de gradul n. Fie $x \in \mathbb{C}^n$ şi definim

$$f_\nu(x) = p[x_1, x_2, \ldots, x_\nu], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

ca fiind diferenţa divizată a lui p relativ la coordonatele x_μ ale lui x. Considerăm sistemul de ecuaţii

$$f(x) = 0, \quad [f(x)]^T = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)].$$

(a) Fie $\alpha^T = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ zerourile lui p. Arătaţi că α este, exceptând o permutare a componentelor, soluţia unică a lui $f(x) = 0$.

(Indicaţie. Folosiţi forma Newton a polinomului de interpolare).

(b) Arătaţi că

$$\frac{\partial}{\partial x_0} g[x_0, x_1, \ldots, x_n] = g[x_0, x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

presupunând că g este o funcţie diferenţiabilă în x_0. Ce se poate spune despre derivatele parţiale în raport cu celelalte variabile?

(c) Descrieţi aplicarea metodei lui Newton sistemului de ecuaţii neliniare $f(x) = 0$, dat la punctul (a).

(d) Discutaţi în ce măsură procedura de la (a) şi (c) este valabilă pentru funcţii p nepolinomiale.

Problema 23.2. Generaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{10} w_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Folosiţi formula pentru a aproxima integralele

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x \text{ şi } \int_{-1}^{1} \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$$

24 Calcul numeric

Problema 24.1. Evaluaţi $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$ utilizând o cuadratură adaptivă

(a) rezolvând problema aşa cum este enunţată;

(b) utilizând o tehnică de dezvoltare în serie;

(c) utilizând o schimbare de variabilă.

Comparaţi rezultatele.

Problema 24.2. Dându-se $f \in C^2[0, h],\ h > 0$ să se determine un polinom de grad minim B astfel încât

$$\begin{cases} B(0) = f(0) \\ B'(h) = f'(h). \end{cases} \tag{2}$$

Să se dea expresia restului.

25 Calcul numeric

Problema 25.1. Pentru un întreg $n \geq 1$, se consideră ecuaţia

$$f(x) = 0, \quad f(x) = x^{n+1} - b^n x + ab^n, \quad a > 0,\ b > 0.$$

(a) Demonstraţi că ecuaţia are exact două rădăcini distincte pozitive dacă şi numai dacă
$$a < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} b.$$

(*Indicaţie.* Analizaţi convexitatea lui f.)

(b) Presupunând că au loc condiţiile de la (a), arătaţi că metoda lui Newton converge către cea mai mică rădăcină pozitivă, când se porneşte cu $x_0 = a$ şi către cea mai mare, când $x_0 = b$.

Problema 25.2. (a) Care este valoarea exactă a lui

$$\int_0^{4\pi} \cos^2 x \mathrm{d}\, x$$

(b) Ce se întâmplă dacă se calculează cu o cuadratură adaptivă? Ce este greşit?

(c) Cum evită funcţia MATLAB `quad` această dificultate?

(d) Calculaţi integrala folosind o cuadratură gaussiană şi metoda lui Romberg.

26 Calcul numeric

Problema 26.1. Fie f o funcţie dată pe $[0,1]$ ce satisface $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(a) Reduceţi problema aproximării lui f pe $[0,1]$ în sensul celor mai mici pătrate (continuu, cu ponderea $w(t) = 1$) printr-un polinom de grad II p ce satisface $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ la o problemă de aproximare în sensul celor mai mici celor mai mici pătrate fără restricţii (pentru o funcţie diferită).

(b) Aplicaţi rezultatul de la (a) lui $f(t) = t^r$, $r > 2$. Reprezentaţi pe acelaşi grafic aproximanta şi funcţia exactă pentru $r = 3$.

Problema 26.2. Funcţia $y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}\,t$ se numeşte integrala lui Dawson. Tabelaţi această funcţie pentru $x = 0,\ 0.1,\ \dots,\ 0.5$. Pentru a evita evaluările de funcţii nenecesare, descompuneţi integrala într-o sumă de integrale pe subintervale.

27 Calcul numeric

Problema 27.1. Fie

$$s_1(x) = 1 + c(x+1)^3, \quad -1 \le x \le 0,$$

unde c este un parametru real.

Determinaţi $s_2(x)$ pe $0 \le x \le 1$ astfel încât

$$s(x) := \begin{cases} s_1(x) & \text{if} \quad -1 \le x \le 0 \\ s_2(x) & \text{if} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

să fie un spline cubic natural pe $[-1, 1]$ cu nodurile $-1, 0, 1$. Cât trebuie ales c dacă se doreşte ca $s(1) = -1$?

Problema 27.2. În încercarea de a rezolva ecuaţia transferului radiativ în atmosfere semiinfinite, se întâlneşte ecuaţia neliniară

$$\omega_0 = \frac{2k}{\ln\left[(1+k)/(1-k)\right]},$$

unde numărul $\omega_0 \in (0, 1)$ se numeşte albedo. Arătaţi că pentru ω_0 fixat, dacă k este o rădăcină, la fel este şi $-k$ şi că există o singură rădăcină $k \in (0, 1)$. Pentru $\omega_0 = 0.25$, 0.50, 0.75 găsiţi rădăcinile pozitive corespunzătoare.

28 Calcul numeric

Problema 28.1. Dându-se relaţia de recurenţa

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k - \beta_k \pi_{k-1}(t), \;\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru polinoame ortogonale (monice) $\{\pi_j(\cdot; d\lambda)\}$ şi definind $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\lambda(t)$ arătaţi că $\|\pi_k\|^2 = \beta_0\beta_1 \ldots \beta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Cum poate fi exploatat acest lucru într-o implementare practică a aproximării în sensul celor mai mici pătrate relativă la un sistem ortogonal?

Problema 28.2. Factorul de concentrare geometrică C într-un model de colectare a energiei solare (L. Vant-Hull, A. Hildebrandt: Solar thermal power systems based on optical transmissions, *Solar Energy*, 18(1976), pp. 31-40) satisface

$$C = \frac{\pi \left(h / \cos A\right)^2 f}{\frac{1}{2}\pi D^2 \left(1 + \sin A - \frac{1}{2}\cos A\right)}.$$

Scalaţi problema pentru a evita polii. Găsiţi cea mai mică rădăcină pozitivă A dacă $h = 300$, $C = 1200$, $f = 0.8$ şi $D = 14$.

29 Calcul numeric

Problema 29.1. (a) Utilizaţi interpolarea Hermite pentru a găsi un polinom de grad minim ce satisface

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p(0) = 1, \quad p(1) = p'(1) = 0.$$

Simplificaţi expresia lui p cât mai mult posibil.

(b) Presupunem că polinomul p de la (a) este utilizat pentru a aproxima funcţia $f(x) = [\cos(\pi x/2)]^2$ pe $-1 \le x \le 1$.

(b_1) Exprimaţi eroarea $(Rf)(x) = f(x) - p(x)$ (pentru un $x \in [-1, 1]$ *fixat*) în funcţie de o derivată corespunzătoare a lui f.

(b_2) Găsiţi o margine superioară a lui $|(Rf)(x)|$ (pentru un $x \in [-1, 1]$ fixat).

(b_3) Estimaţi $\max\limits_{-1 \le x \le 1} |(Rf)(x)|$.

Problema 29.2. Pentru curgerea turbulentă a unui fluid într-o conductă netedă, ecuaţia

$$1 = \sqrt{c_f}\left(-0.4 + 1.74 \ln\left(\mathrm{Re}\sqrt{c_f}\right)\right)$$

modelează relaţia dintre factorul de frecare c_f şi numărul lui Reynolds Re. Calculaţi c_f pentru $\mathrm{Re} = 10^4$, 10^5, 10^6.

30 Calcul numeric

Problema 30.1. (a) Implementaţi metoda falsei poziţii în MATLAB.

(b) Considerăm o distribuţie de probabilitate *continuă*, pentru care F (cdf) este disponibilă. Scrieţi o funcţie MATLAB ce calculează o cuantilă de ordin α a acestei distribuţii utilizând metoda falsei poziţii. Atenţie: F poate depinde de un număr variabil de parametrii.

Problema 30.2. Deduceţi o formulă de cuadratură Gauss-Lobatto de forma

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(-1) + w_2 f(x_1) + w_3 f(x_2) + w_4 f(1) + R(f).$$

Ce devine formula pentru un interval oarecare $[a, b]$? Unde utilizează funcţia MATLAB `quadl` această formulă?

31 Calcul numeric

Problema 31.1. Arătaţi că integrala polinomului de interpolare Hermite P cu nodurile duble 0 şi h este

$$\int_0^h P(s)ds = h\frac{f(h)+f(0)}{2} - h^2\frac{f'(h)-f'(0)}{12}.$$

Care este eroarea care se comite dacă se aproximează $\int_0^h f(x)dx$ cu integrala polinomului de interpolare Hermite?

Problema 31.2. Fie forma pătratică $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Ecuaţia se poate normaliza, împărţind cu un coeficient nenul (de exemplu $f \neq 0$).Mulţimile $\{(x,y) : z = 0\}$ se numesc secţiuni conice. Ele se pot vizualiza cu funcţia `contour`. Planetele au orbite eliptice. Iată 10 observaţii ale poziţiilor unei planete

x	1.02	.95	.87	.77	.67	.56	.44	.30	.16	.01
y	0.39	.32	.27	.22	.18	.15	.13	.12	.13	.15

(a) Determinaţi coeficienţii formei pătratice care aproximează aceste date în sensul celor mai mici pătrate luînd un coeficient egal cu 1 şi rezolvând sistemul supradeterminat 10×5. Desenaţi orbita şi cele 10 puncte date.

(b) Această problemă este aproape deficientă de rang. Pentru a vedea efectul perturbaţi datele uşor adăugând fiecărei coordonate de punct un număr aleator distribuit uniform în intervalul $[-0.005, 0.005]$. Calculaţi noii coeficienţi pentru datele perturbate. Desenaţi orbita nouă pe acelaşi grafic cu cea veche. Comentaţi pe marginea diferenţelor între coeficienţi şi orbite.

32 Calcul numeric

Problema 32.1. Deduceţi o formulă de cuadratură de tip Gauss-Radau de forma

$$\int_0^1 f(x)dx = Af(0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R(f).$$

Problema 32.2. Ecuaţia ce determină încărcarea critică pentru coloanele cu capitel îngroşat este dată în S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, McGraw Hill, New York, 1961. Valori potrivite ale parametrilor fizici pentru experimentele realizate de Timoshenko conduc la problema

$$\frac{1}{180} = \left(\frac{1 - \cos\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10} - \cos z} \right) \frac{\sin z}{z}$$

şi se doreşte cea mai mică rădăcină pozitivă. Faceţi o schiţă a graficului pentru a vă face o idee asupra locaţiei rădăcinii. Scalaţi pentru a evita dificultăţile legate de poli şi singularitatea aparentă în 0 şi apoi calculaţi rădăcina.

33 Calcul numeric

Problema 33.1. Deduceţi o formulă de cuadratură de tip Gauss-Radau de forma

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = Af(0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + R(f).$$

Problema 33.2. Energia potenţială a două sau mai multe molecule ce interacţionează se numeşte energie de interacţiune van der Waal. Un calcul teoretic pentru doi atomi de heliu are energiile $V(r)$ pentru diferite valori de distanţe internucleare r date mai jos. Energia se manifestă repulsiv ($V > 0$) pentru r mic şi atractiv ($V < 0$) pentru valori mai mari ale lui r.

r (bohr)	4.6	4.8	5.0	5.1	5.2
$V(r)$	32.11	9.0	−3.52	−7.11	−9.22
r (bohr)	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7
$V(r)$	−10.74	−11.57	−11.95	−12.00	−11.73
r (bohr)	5.8	5.9	6.0	6.5	7.0
$V(r)$	−11.23	−10.71	−10.13	−7.15	−4.77
r (bohr)	7.5	8.0	9.0	10.0	
$V(r)$	−3.17	−2.14	−1.03	−0.54	

Să se aproximeze $S(r)$ utilizând un spline cubic şi să se reprezinte grafic. Aproximaţi derivata de ordinul I a lui V pe întregul domeniu de valori tabelate şi $\int\limits_5^9 V(r)\mathrm{d}\,r$.

34 Calcul numeric

Problema 34.1. Presupunem că (1) ξ este un punct fix al funcţiei g, (2) g este de două ori continuu derivabilă într-o vecinătate a lui ξ, şi (3) $g'(\xi) \neq 1$. Considerăm metoda iterativă definită prin:

$$z_{i+1} = g(g(z_i)) - \frac{[g(g(z_i)) - g(z_i)]^2}{g(g(z_i)) - 2g(z_i) + z_i}.$$

(a) Dezvoltând $g(z_i)$ şi $g(g(z_i))$ cu formula lui Taylor în jurul lui ξ, arătaţi că

(a1) ξ este limita lui (z_n).

(a2) Convergenţa este pătratică.

(b) Implementaţi această metodă în MATLAB.

(c) Utilizaţi funcţia MATLAB de la punctul precedent pentru a găsi o rădăcină reală a ecuaţiei $x^3 - x - 1 = 0$.

35 Calcul numeric

Problema 35.1. O populaţie este guvernată de capacitatea variabilă a mediului de a o susţine. Un model simplu este dat de ecuaţia diferenţială

$$P'(t) = kP(t)\left[M\left(1 - r\cos\frac{\pi}{6}t\right) - P(t)\right],$$

unde t este timpul măsurat în luni, $P(t)$ este populaţia la momentul t, iar ceilalţi parametrii sunt constante cunoscute. Această ecuaţie are soluţia

$$P(t) = \frac{P(0)F(t)}{1 + kP(0)\int\limits_0^t F(s)\,\mathrm{d}\,s},$$

unde

$$F(t) = \exp\left[kM\left(t - \frac{6r}{\pi}\sin\frac{\pi t}{6}\right)\right].$$

Presupunând că $k = 0.001$, $M = 1000$, $r = 0.3$, $P(0) = 250$ calculaţi $P(t)$ pentru $t = 0, 3, 6, 9, \ldots, 36$.

Problema 35.2. Pentru $f \in C^6[-1,1]$, găsiţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^{1} |x| f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

36 Calcul numeric

Problema 36.1. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

şi vectorii

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 13 & -4 \end{bmatrix}^T \\ b_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \\ b_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T \\ b_4 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Să se rezolve sistemele $Ax = b_i$, $i = \overline{1,4}$ eficient.

Problema 36.2. (a) Arătaţi că iteraţia Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a > 0$$

pentru calculului rădăcinii pătrate $\alpha = \sqrt{a}$ satisface

$$\frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^2} = \frac{1}{2x_n}$$

Obţineţi de aici eroarea asimptotică.

(b) Care este formula analoagă pentru rădăcina cubică?

37 Calcul numeric

Problema 37.1. Să se rezolve sistemul

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cu metodele Jacobi si Gauss-Seidel. Câţi paşi sunt necesari? Care este condiţia de oprire?

Problema 37.2. Se consideră metoda lui Newton

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a > 0$$

pentru calculul rădăcinii pătrate $\alpha = \sqrt{a}$. Fie $d_n = x_{n+1} - x_n$.

(a) Arătaţi că

$$x_n = \frac{a}{d_n + \sqrt{d_n^2 + a}}$$

(b) Utilizaţi (a) pentru a arăta că

$$|d_{n+1}| = \frac{d_n^2}{2\sqrt{d_n^2 + a}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Discutaţi semnificaţia acestui rezultat pentru comportarea globală a iteraţiei Newton în acest caz.

(c) Arătaţi că, numărul de cifre corecte se dublează (practic) la fiecare pas.

(*Indicaţie.* Punem $x_n = \sqrt{a}(1 + \delta)$ şi calculăm x_{n+1}).

38 Calcul numeric

Problema 38.1. Fie $f(x) = x^{10} - 10x^8 + 33x^6 - 40x^4 + 16x^2$.

(a) Utilizaţi `ezplot` (sau `plot`) pentru a reprezenta $f(x)$ pe $[-2, 2]$.

(b) Utilizaţi toolbox-ul Symbolic sau Maple pentru a găsi o expresie analitică a integralei $\int_{-2}^{2} f(x) \mathrm{d}\, x$.

(c) Ce se întâmplă dacă definiţi

$$\mathtt{F = inline('x\hat{}10 - 10*x\hat{}8 + 33*x\hat{}6 - 40*x\hat{}4 + 16*x\hat{}2')}$$

şi utilizaţi o cuadratură adaptivă? De ce?

(d) Cum evitaţi dificultatea? Justificaţi?

(e) Ce se întâmplă dacă calculaţi cu metoda lui Romberg?

Problema 38.2. Considerăm ecuaţia algebrică

$$x^n + ax - 1 = 0, \quad a > 0,\ n \geq 2.$$

(a) Arătaţi că ecuaţia are exact o rădăcină pozitivă $\xi(a)$.

(b) Obţineţi o formulă pentru $(cond\xi)(a)$.

(c) Obţineţi margini superioare şi inferioare pentru $(cond\xi)(a)$.

39 Calcul numeric

Problema 39.1. (a) Construiţi o formulă Newton-Cotes cu ponderi

$$\int_0^1 f(x)x^\alpha dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f), \ \ \alpha > -1.$$

Explicaţi de ce formula are sens.

(b) Deduceţi o expresie a erorii $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată a lui f.

(c) Din formulele de la (a) şi (b) deduceţi o formulă de integrare numerică pentru $\int_0^h g(t)t^\alpha dt$ ($h > 0$ mic) (inclusiv termenul rest).

Problema 39.2. Absorbţia sunetului (la 20°, 40% umiditate) ca funcţie de frecvenţa f este dată în tabela:

f	> 20	> 40	63	> 100	200
$A(f)$	0.008	0.030	0.070	0.151	0.359
f	> 400	800	> 1250	2000	> 4000
$A(f)$	0.592	0.935	1.477	2.870	9.618
f	10000	> 16000	> 40000	> 80000	
$A(f)$	53.478	122.278	429.310	850.536	

Utilizaţi un spline deBoor şi punctele marcate cu (>) pentru a interpola în următoarele două moduri.

(a) se iau datele aşa cum sunt;

(b) $\log f$ în raport cu $\log A(f)$.

Care este mai bun? Reprezentaţi grafic varianta mai bună. Comparaţi valorile în punctele nemarcate cu valorile aproximative.

40 Calcul numeric

Problema 40.1. (a) Folosind interpolarea Newton, determinaţi un polinom de gradul p ce interpolează f în $x = 0$, $x = 1$ şi f' în $x = 1$. Exprimaţi termenul rest în funcţie de o derivată adecvată a lui f (presupusă a fi continuă pe $[0, 1]$).

(b) folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de integrare numerică de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(1) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

(c) Transformaţi resultatul de la(b) pentru a obţine o formulă de integrare numerică (cu rest) pentru $\int_c^{c+h} y(t)dt$, unde $h > 0$.

Problema 40.2. Analiza ecuaţiei lui Schrödinger pentru o particulă de masă m într-un potenţial rectangular ne conduce la o mulţime discretă de valori ale energiei totale R care sunt soluţiile unei perechi de ecuaţii transcendente. Una dintre aceste ecuaţii este

$$\cot\left(\frac{\alpha}{h}\sqrt{2mV_0}\sqrt{E/V_0}\right) = \sqrt{\frac{E/V_0}{1 - E/V_0}},$$

unde

$$\overline{h} = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6.625 \times 10^{-27} erg - \sec,$$

este constanta lui Planck. Găsiţi valorile lui E ce satisfac această ecuaţie. Utilizaţi datele următoare, care corespund unui model simplificat al atomului de hidrogen:

$$m = 9.109 \times 10^{-28} g$$
$$V_0 = 2.179 \times 10^{-11} erg$$
$$a = 5.292 \times 10^{-9} cm.$$

Pe unele maşini va fi nevoie să scalaţi unele variabile pentru a evita depăşirea flotantă inferioară. Fiţi atenţi şi la alegerea erorii dacă doriţi un răspuns precis.

41 Calcul numeric

Problema 41.1. Estimaţi numarul de subintervale necesar pentru a calcula $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ cu 6 zecimale corecte (eroarea absolută $\leq \frac{1}{2} \times 10^{-6}$)

(a) cu regula trapezelor;

(b) cu formula repetată a lui Simpson.

Problema 41.2. Să se calculeze $\sqrt{115}$ cu trei zecimale exacte folosind interpolarea Lagrange.

42 Calcul numeric

Problema 42.1. Generaţi 11 puncte luând $t_k = (k-1)/10$ şi $y_k = \mathrm{erf}(t_k)$, $k = 1, \ldots, 11$.

(a) Aproximaţi discret datele în sensul celor mai mici pătrate cu polinoame având gradul de la 1 la 10. Comparaţi aproximantele cu $\mathrm{erf}(t)$ pentru valori ale lui t situate între punctele t_k. Cum depinde eroarea maximă de gradul polinomului?

(b) Deoarece $\mathrm{erf}(t)$ este o funcţie pară în t, este rezonabil să se aproximeze datele printr-o combinaţie liniară de puteri impare ale lui t,

$$\mathrm{erf}(t) \approx c_1 t + c_2 t^3 + \cdots + c_n t^{2n-1}.$$

Cum depind erorile între punctele t_k de n?

(c) Polinoamele nu sunt aproximante bune pentru $\mathrm{erf}(t)$, deoarece sunt nemărginite, pe când $\mathrm{erf}(t)$ tinde către 1 pentru t mare. Utilizând aceleaşi date, aproximaţi utilizând un model de forma

$$\mathrm{erf}(t) \approx c_1 + e^{-t^2}\left(c_2 + c_3 z + c_4 z^2 + c_5 z^3\right)$$

unde $z = 1/(1+t)$. Cum sunt erorile în valori ale lui t situate între punctele t_k, comparativ cu modelul polynomial?

Problema 42.2. Pornind de la o ecuaţie convenabilă, deduceţi o metodă de aproximare a lui $\sqrt[3]{a}$. Cum se alege valoarea de pornire? care este criteriul de oprire?

43 Calcul numeric

Problema 43.1. (a) Se consideră o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)] + R(f) \tag{3}$$

Determinaţi α, β, x_1 astfel încât gradul de exactitate şa fie cât mai mare posibil Cât este gradul maxim care se poate obţine?

(b) Utilizaţi teoria interpolării şi teorema lui Peano pentru a obţine o margine superioară a lui $|R(f)|$ în funcţie de $\|f^{(r)}\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} |f^{(r)}(x)|$ pentru un r potrivit.

(c) Adaptaţi (3), inclusiv marginea pentru $|R(f)|$, pentru a aproxima o integrală de forma $\displaystyle\int_c^{c+h} f(t)dt$, unde c este o constantă şi $h > 0$.

(d) Aplicaţi rezultatul de la (c) pentru a obţine o formulă repetată pentru $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ subdivizând $[a, b]$ în n subintervale de lungime totală $h = \dfrac{b-a}{n}$. Găsiţi o margine superioară a erorii totale.

Problema 43.2. Cartea P. Davis, J. Voge, *Propagation of Waves*, Pergamon Press, New York, 1969 conţine o ecuaţie cubică pentru parametrul s în contextul corecţiei pentru curbura pământului în zona de interferenţă. Ecuaţia

$$s^3 - \frac{3}{2}s^2 - \frac{s}{2}\left(\frac{1+u}{v^2} - 1\right) + \frac{1}{2v^2} = 0$$

depinde de doi parametrii, u şi v, care se obţin din înălţimile turnurilor, distanţa între staţii şi raza pământului. Valorile reprezentative sunt $v = 1/291$, $u = 30$. Rădăcina de interes este cea mai mică rădăcină, dar calculaţi-le pe toate. Valorea funcţiei în cele mai mari două rădăcini este mare. Sunt ele imprecise?

44 Calcul numeric

Problema 44.1. Considerăm problema determinării unui polinom $p \in \mathbb{P}_n$ astfel încât
$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_i) = f_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
unde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sunt noduri distincte. Această interpolare nu este nici Lagrange nici Hermite (de ce?). Arătaţi că problema are soluţie unică şi explicaţi cum se poate obţine. Găsiţi restul.

Problema 44.2. Ecuaţia temperaturii T pentru care otoluidina are o presiune de vaporizare de 500 mm Hg este
$$21.306 - \frac{3480.3}{T} - 5.081 \log_{10} T = 0.$$
Calculaţi toate rădăcinile.

45 Calcul numeric

Problema 45.1. (a) Determinaţi un spline pătratic $s_2(x)$ pe $[-1, 1]$ cu un singur nod $x = 0$ astfel ca $s_2(x) = 0$ pe $[-1, 0]$ şi $s_2(1) = 1$.

(b) Se consideră funcţia $s(x)$ de forma

$$s(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 s_2(x), \quad c_i = const$$

unde $s_2(x)$ a fost definit la (a). Ce fel de funcţie este s? Determinaţi s astfel ca

$$s(-1) = f_{-1}, \quad s(0) = f_0, \quad s'(0) = f_0', \quad s(1) = f_1$$

unde $f_i = f(i)$, $f_i' = f'(i)$, $i = -1, 0, 1$.

(c) Ce formula de cuadratură se obţine dacă se aproximează $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ prin $\int_{-1}^{1} s(x)dx$, cu s obţinut la (b)?

Problema 45.2. Un fir cu greutatea de 0.7708689229 kg/m este suspendat între două turnuri de înălţimi egale, la acelaşi nivel la o distanţă de 152.4 m. Dacă încovoierea firului este de 15.24 m, determinaţi tensiunea maximă în fir. Ecuaţiile de rezolvat sunt

$$c + 15.24 = c \cosh \frac{152.4}{2c}$$
$$T = 0.7708689229(c + 15.24).$$

46 Calcul numeric

Problema 46.1. Se consideră datele $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(3) = 5$, $f(4) = 12$.

(a) Utilizaţi forma Newton pentru a obţine polinomul de interpolare corespunzător $L_3 f$.

(b) Datele sugerează că f are un minim între $x = 1$ şi $x = 3$. Găsiti o valoare aproximativă a punctului de minim x_{min}.

Problema 46.2. Problema aceasta se referă la răcirea unei sfere. Presupunem că sfera este de rază a şi temperatura ei iniţială este V. Ea se răceşte după legea lui Newton cu conductivitatea k, constanta ε şi difuzia h^2 după ce a fost pusă să se răcească la aer la temperatura de $0°$ C. Se poate arăta că temperatura $\theta(r,t)$ la momentul de timp $t > 0$ şi raza r este

$$\theta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r} e^{-\gamma_n^2 h^2 t} \sin \gamma_n r.$$

Aici, γ_n sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$\gamma_n \cos \gamma_n a - \left(\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon}{k}\right) \sin \gamma_n a = 0$$

şi

$$A_n = \frac{2\gamma_n V}{[\gamma_n a - \cos \gamma_n a \sin \gamma_n a]} \int_0^a r \sin \gamma_n r dr.$$

Pentru o sferă de oţel răcită la aer la $0°$ C, presupunem că temperatura iniţială este $V = 100°C$ şi că raza este $a = 0.30m$. Constantele corespunzătoare sunt $h^2 = 1.73 \times 10^{-5}$, $\varepsilon = 20$ şi $k = 60$. Găsiţi cele trei cele mai mici valori ale lui $\gamma_n a$ şi utilizaţi-le pentru a calcula A_1, A_2 şi A_3. Aproximaţi temperatura pentru $r = 0.25$, pentru $t = 10^k$ secunde, $k = 2, 3, 4, 5$.

47 Calcul numeric

Problema 47.1. Fie f o funcţie definită pe $[0,3]$ despre care se ştie că

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f'(1) = -1, \quad f(3) = f'(3) = 0.$$

(a) Estimaţi $f(2)$ folosind interpolarea Hermite.

(b) Estimaţi eroarea maximă posibilă a rezultatului de la (a) dacă se ştie, în plus, că $f \in C^5[0,3]$ şi $|f^{(5)}(x)| \leq M$ pe $[0,3]$. Exprimaţi răspunsul în funcţie de M.

Problema 47.2. Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + y^2 - z &= 0 \\ 32x^2 - y^2 + 20z &= 0 \\ y^2 - 14xz &= 0 \end{aligned}$$

cu o precizie de 10^{-4}, în vecinătatea punctului $(0.5, 1, 0)$.

48 Calcul numeric

Problema 48.1. (a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a construi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = af(0) + bf(1) + cf''(\gamma) + R(f)$$

cu gradul maxim de exactitate d, nedeterminatele fiind a, b, c şi γ.

(b) Arătaţi că nucleul lui K_d al restului formulei obţinute la (a) are semn constant şi exprimaţi restul sub forma

$$R(f) = e_{d+1} f^{(d+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Problema 48.2. Rezolvaţi sistemul

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 \sin\theta + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \cos\theta &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cos\theta + a_{23}x_3 &= b_2\\
a_{31}x_1 \cos\theta + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \sin\theta &= b_3\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \sin\theta + a_{43}x_3 &= b_4
\end{aligned}$$

cu necunoscutele x_1, x_2, x_3 şi θ.

49 Calcul numeric

Problema 49.1. Intr-o tabelă cu funcţii Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta,$$

unde x este incrementat cu pasul h, cât de mic trebuie să fie ales h pentru ca tabela să fie ,,interpolabilă liniar"cu o eroare mai mică decât 10^{-6} în modul? (Adică, dacă interpolăm liniar între două noduri consecutive tabelate, modulul erorii să fie mai mic decât valoarea dată.)

Problema 49.2. Un mediu semi-infinit este încălzit uniform la temperatura iniţială $T_0 = 70°F$. La momentul $t > 0$, un flux de căldură cu densitatea constantă $q = 300$ Btu/hr sq ft este menţinut pe suprafaţa $x = 0$. Cunoscând conductivitatea termică $k = 1.0$ Btu/hr/ft/°Fşi difuzivitatea termică $\alpha = 0.04$ sq ft/hr, temperatura rezultată $T(x,t)$ este dată de

$$T(x,t) = T_0 + \frac{q}{k}\left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} e^{-x^2/4\alpha t} - x\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right)\right],$$

unde

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-z^2} dz$$

este funcţia specială de eroare, disponibilă în MATLAB şi alte pachete. Găsiţi timpul t necesar pentru ca temperatura la distanţele $x = 0.1, 0.2, \ldots, 0.5$ să atingă o valoare de $T = 100$°F. Utilizaţi o eroare absolută de 10^{-8} şi o eroare relativă de 10^{-6}.

50 Calcul numeric

Problema 50.1 (Alegerea valorii de pornire pentru metoda lui Newton)**.** . Dacă $f(a)f(b) < 0$ şi $f'(x)$ şi $f''(x)$ asunt nenule şi îşi păstrează semnul pe $[a, b]$, atunci alegând aproximaţia iniţială $x_0 \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x_0)f''(x_0) > 0, \tag{4}$$

este posibil, utilizând metoda lui Newton, să se calculeze rădăcina unică ξ a lui $f(x) = 0$ cu orice precizie. ($f \in C^2[a, b]$).

Problema 50.2. Calculaţi integrala

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\,x}{4 + \sin 20x}$$

cu aceeaşi metodă pe întreg intervalul şi pe un interval mai mic, exploatând periodicitatea. Care metodă este mai bună? Consideraţi următoarele metode:

(a) o cuadratură adaptivă ;

(b) metoda lui Romberg.

(c) o cuadratură gaussiană.

51 Calcul numeric

Problema 51.1. Să se arate că pentru polinomul de interpolare Hermite cu noduri duble avem

$$(H_{2m+1}f)(x) = \sum_{k=0}^{m} h_{k_0}(x)f(x_k) + \sum_{k=0}^{m} h_{k_1}(x)f'(x_k),$$

unde

$$\begin{aligned} h_{k0}(x) &= [1 - 2(x - x_k)l_k'(x_k)]\, l_k^2(x) \\ h_{k1}(x) &= (x - x_k)l_k^2(x), \end{aligned}$$

iar l_k sunt polinoamele fundamentale Lagrange.

Problema 51.2. Funcţia Bessel de ordinul zero $J_0(x)$ se poate calcula cu formula

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\mathrm{d}\,\theta.$$

Utilizaţi formula pentru a evalua $J_0(x)$ pentru $x = 1.0,\ 2.0,\ 3.0.$ comparaţi rezultatul obţinut cu cel furnizat de MATLAB.

52 Calcul numeric

Problema 52.1. Pentru ecuaţia $f(x) = 0$ definim

$$y^{[0]}(x) = x$$

$$y^{[1]}(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\ldots$$

$$y^{[m]}(x) = \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} y^{[m-1]}(x), \quad m = 2, 3, \ldots$$

Considerăm iteraţia definită de funcţia

$$\varphi_r(x) := \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \frac{y^{[m]}(x)}{m!} [f(x)]^m$$

Dacaă $r = 1$ se obţine metoda lui Newton. Arătaţi că $\varphi_r(x)$ defineşte o iteraţie $x_{n+1} = \varphi_r(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ce converge local cu ordinul exact $p = r + 1$ către o rădăcină α a ecuaţiei dacă $y^{[r+1]}(\alpha) f'(\alpha) \neq 0$.

Problema 52.2. O sferă de rază R pluteşte pe jumătate scufundată într-un lichid. Dacă este împinsă în jos până când planul diametral este la distanţa p ($0 < p \leq R$) sub suprafaţa lichidului şi apoi este eliberată, perioada vibraţiei care se produce astfel este

$$T = 8R \sqrt{\frac{R}{g\,(6R^2 - p^2)}} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

unde $k^2 = p^2/(6R^2 - p^2)$ şi $g = 10m/s^2$. Pentru $R = 1$ şi $p = 0.5,\ 0.75,\ 1.0$ găsiţi T.

53 Calcul numeric

Problema 53.1. Fie α un zero simplu al lui f şi $f \in C^p$ în vecinătatea lui α, unde $p \geq 3$. Arătaţi că: dacă $f''(\alpha) = \cdots = f^{(p-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(p)}(\alpha) \neq 0$, atunci metoda lui Newton aplicată lui $f(x) = 0$ converge local către α cu ordinul p. Determinaţi constanta de eroare asimptotică.

Problema 53.2. Evaluaţi $\int\limits_0^1 \frac{\exp(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$ utilizând o cuadratură adaptivă

(a) rezolvând problema aşa cum este enunţată;

(b) utilizând o tehnică de dezvoltare în serie;

(c) utilizând o schimbare de variabilă.

Comparaţi rezultatele.

54 Calcul numeric

Problema 54.1. Iteraţia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}f''(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$ se numeşte metoda lui Halley.

(a) Arătaţi că metoda se poate obţine aplicând metoda lui Newton ecuaţiei $g(x) = 0$, $g(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$.

(b) Presupunând că α este o rădăcină simplă a ecuaţiei şi $x_n \to \alpha$ când $n \to \infty$, arătaţi că ordinul exact de convergenţă este $p = 3$, înafară de cazul când

$$(Sf)(x) := \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

se anulează în $x = \alpha$ şi atunci ordinul de convergenţă poate fi mai mare decât 3.

(c) Cum arată metoda lui Halley pentru ecuaţia $f(x) = x^\lambda - a$, $a > 0$?

Problema 54.2. Utilizaţi o cuadratură adaptivă cu diverse toleranţe pentru a aproxima π prin

$$\pi = \int_{-1}^{1} \frac{2}{1+x^2} \mathrm{d}\, x.$$

Cum variază precizia şi numărul de evaluări de funcţie odată cu toleranţa?

55 Calcul numeric

Problema 55.1. Arătaţi că dacă A este strict diagonal dominantă pe linii sau pe coloane, atunci metoda lui Jacobi este convergentă.

Problema 55.2. Utilizaţi Maple sau toolbox-ul Symbolic pentru a găsi valoarea exactă a

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \mathrm{d}\, x.$$

(a) De ce aproximare faimoasă vă aminteşte această integrală?

(b) Prezintă evaluarea numerică a acestei integrale cu o cuadratură adaptivă dificultăţi?

56 Calcul numeric

Problema 56.1. Se consideră următoarea metodă de rezolvare a ecuaţiei $f(x) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

Să se determine ordinul de convergenţa şi eroarea asimptotică.

Problema 56.2. Integrala exponenţială

$$E_1(x) = \int_1^{\infty} e^{-tx} \frac{\mathrm{d}\,x}{x}, \qquad t > 0,$$

apare în studiul transferului radiativ şi în teoria transportului. Integrala se transformă succesiv

$$\begin{aligned}
E_1(t) &= \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \int_t^1 e^{-x} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \\
&= -\left\{ \int_1^{\infty} e^{-x} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} - \int_0^1 \left(1 - e^{-x}\right) \frac{\mathrm{d}\,x}{x} \right\} \\
&+ \int_t^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{x} + \int_0^t \left(1 - e^{-x}\right) \frac{\mathrm{d}\,x}{x}.
\end{aligned}$$

Expresia dintre acolade are valoarea aproximativă $\gamma = 0.5772156649015329$ (constanta lui Euler). Al doilea termen se integrează analitic la $-\ln t$. Deci,

$$E_1(t) = -\gamma - \ln t + \int_0^t \left(1 - e^{-x}\right) \frac{\mathrm{d}\,x}{x}.$$

Evaluaţi $E_1(t)$ pentru $t = 1.0$, 2.0, 3.0. Apare vreo dificultate datorită comportării integrandului în $x = 0$?

57 Calcul numeric

Problema 57.1. Fie $p > 1$. Se consideră şirurile

$$x_n = \underbrace{\sqrt{p + \sqrt{p + \ldots \sqrt{p}}}}_{n \text{ ori}}$$

şi

$$y_n = \underbrace{\frac{1}{p + \frac{1}{p + \frac{1}{p + \cdots}}}}_{n \text{ ori}},$$

Demonstraţi convergenţa lor şi determinaţi limitele folosind metoda aproximaţiilor succesive.

Problema 57.2. Potenţialul în interiorul cercului unitate datorat unui potenţial dat pe frontieră, $f(\theta)$, este dat de integrala lui Poisson

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2} f(\theta')d\theta'.$$

Pot să apară dificultăţi la evaluarea integrandului când $r \to 1$, deoarece pentru $\theta' = \theta$,

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2} = \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Problema nu este prea severă deoarece termenul este mare doar dacă r este foarte apropiat de 1, dar, în principiu, nu ar trebui să fie nici o problemă căci dacă $r \to 1$, $\varphi(r,\theta) \to f(\theta)$. Observând că

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2} d\theta',$$

se obţine forma

$$\varphi(r,\theta) = f(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \theta') + r^2} [f(\theta') - f(\theta)]\, d\theta',$$

care are proprietăţi numerice mai bune. Verificaţi aceasta evaluând $\varphi(r,\theta)$ pentru r apropiat de 1 cu $f(\theta) = \sin\theta$. Soluţia analitică este $\varphi(r,\theta) = \sin\theta$.

58 Calcul numeric

Problema 58.1. Se consideră aproximaţia succesivă dată de funcţia $F(x) = x - f(x)f'(x)$, unde $f(r) = 0$ şi $f'(r) \neq 0$. Impuneţi condiţii precise asupra lui f astfel ca metoda să conveargă cel puţin cubic către r dacă se porneşte suficient de aproape de r.

Problema 58.2. Fie funcţia $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+(1-x)^2)}$ şi 20 de puncte echidistante pe domeniul de definiţie. Să se aproximeze f printr-un polinom de grad 3 prin metoda celor mai mici pătrate şi printr-un spline deBoor. Să se reprezinte pe două grafice funcţia şi fiecare din aproximante (cu `subplot`).

59 Calcul numeric

Problema 59.1. (a) Fie clasa Φ_n de funcţii de aproximare cu proprietăţile date în continuare. Orice $\varphi \in \Phi_n$ este definită pe un interval $[a, b]$ simetric faţă de origine (i.e. $a = -b$) şi $\varphi(t) \in \Phi_n$ implică $\varphi(-t) \in \Phi_n$. Fie $d\lambda(t) = \omega(t)dt$, cu $\omega(t)$ funcţie pară pe $[a, b]$ (i.e. $\omega(-t) = \omega(t)$). Arătaţi că dacă f este o funcţie pară pe $[a, b]$, atunci şi aproximanta sa în sensul celor mai mici pătrate $\widehat{\varphi}_n \in \Phi_n$ este pară.

(b) Considerăm "hat function"

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1] \\ 1 + t, & t \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Determinaţi aproximaţia sa în sensul celor mai mici pătrate pe $[-1, 1]$ printr-o funcţie cuadratică. (Utilizaţi $d\lambda(t) = dt$). Simplificaţi calculele utilizând (a). Determinaţi punctele în care eroarea se anulează.

Problema 59.2. Funcţia beta este definită prin

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1 - t)^{w-1}\mathrm{d}\,t.$$

Scrieţi un fişier M `mybeta` care aproximează $B(z, w)$ folosind o cuadratură adaptivă. Comparaţi funcţia dumneavoastră cu funcţia MATLAB `beta`.

60 Calcul numeric

Problema 60.1. Determinaţi aproximanta în sensul celor mai mici pătrate

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{1+t} + \frac{c_2}{(1+t)^2}, \quad t \in [0,1]$$

a funcţiei $f(t) = e^{-t}$, luând $d\lambda(t) = dt$ on $[0,1]$. Determinaţi numărul de condiţionare $cond_\infty A = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ al matricei A a coeficienţilor ecuaţiilor normale. Calculaţi eroarea $f(t) - \varphi(t)$ în $t = 0$, $t = 1/2$, şi $t = 1$.

(Indicaţie: Integrala

$$\int_1^\infty t^{-m} e^{-xt} dt = E_m(x) = E_i(m, x)$$

se numeşte a ,,m-a integrală exponenţială”. Exprimaţi rezultatul cu ajutorul acestei funcţii)

Problema 60.2. Funcţia $\Gamma(x)$ se defineşte prin

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}\, t.$$

Încercarea de evaluare numerică a acestei integrale cu o cuadratură este ineficientă şi nefiabilă. Dificultăţile sunt cauzate de intervalul infinit şi de variaţiile mari ale valorilor integrandului. Scrieţi un fişier M `mygamma` care utilizează o cuadratură adaptivă pentru a calcula $\Gamma(x)$. Comparaţi funcţia dumneavoastră cu funcţia MATLAB `gamma`. Pentru ce valori ale lui x funcţia dumneavoastră este rezonabil de rapidă şi precisă? Pentru ce valori ale lui x devine lentă şi imprecisă?

61 Calcul numeric

Problema 61.1. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_1^2 (x^4 - 1) f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f),$$

cu grad maxim de exactitate.

Problema 61.2. La realizarea titrării potenţiometrice se obţine o curbă a diferenţelor de potenţial în funcţie de volumul de titrant adăugat. Tabela de mai jos dă măsurătorile pentru titrarea potenţiometrică a soluţiei de Fe^{2+} cu soluţia $0.1095N$ Ce^{4+} utilizând electrozi de platină şi calomel.

Sol. adăugată (ml)	1.0	5.0	10.0	15.0	20.0	21.0	22.0
$E(mV)$	373	415	438	459	491	503	523
Sol. adăugată (ml)	22.5	22.6	22.7	22.8	22.9	23.0	23.1
$E(mV)$	543	550	557	565	575	590	620
Sol. adăugată (ml)	23.2	23.3	23.4	23.5	24.0	26.0	30.0
$E(mV)$	860	915	944	958	986	1067	1125

Calculaţi un spline cubic pentru aceste date (utilizând cam 15 puncte de interpolare). Reprezentaţi grafic spline-ul pe intervalul $[0, 24]$. Cât de bine se comportă? Problema fizică are un punct de inflexiune. Este acest lucru adevărat şi pentru spline?

62 Calcul numeric

Problema 62.1. Să se determine un polinom de interpolare de grad minim care verifică:

$$\begin{aligned} P'(0) &= f'(0); \\ P(h) &= f(h), \qquad h > 0, f \in C^2[0,h]. \end{aligned}$$

Aceasta interpolare nu este nici Lagrange, nici Hermite. De ce? Determinaţi expresia restului.

Problema 62.2. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=1}^{10} A_k f(x_k) + R_3(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Să se aplice formula pentru a calcula

$$\int_{-1}^{1} \frac{x e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Verificare.

63 Calcul numeric

Problema 63.1. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 xf(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R_2(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 63.2. Determinaţi toate rădăcinile ecuaţiei

$$x^4 - x^3 + \frac{5}{4}x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

cu metoda lui Newton. Atenţie, ecuaţia are o rădăcină reală dublă şi două complexe.

64 Calcul numeric

Problema 64.1. Concepeţi o metodă pentru a calcula $\sqrt[20]{a}$, $a > 0$, bazată pe metoda lui Newton. De ce o astfel de metodă este lent convergentă? Ce se poate face? Gândiţi-vă şi la o altă metodă.

Problema 64.2. Determinaţi lungimea arcului de curba parametrică

$$\begin{aligned} x(t) &= (1 - \cos(t))\cos(t) \\ y(t) &= (1 - \cos(t))\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

folosind o cuadratură adaptivă şi metoda lui Romberg. Indicaţie: formula este

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

65 Calcul numeric

Problema 65.1. Se consideră o metodă iterativă de forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Se presupune că metoda converge către un zero simplu al lui f, ξ, dar care nu este zero al lui g. Stabiliţi o relaţie între f şi g astfel încât ordinul de convergenţă al metodei să fie cel puţin 3.

Problema 65.2. Constanta lui Euler $\gamma = 0.57721566490153286\ldots$ se defineşte ca limita

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n, \text{ unde } \gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Presupunând că $\gamma - \gamma_n \sim cn^{-d}$, $n \to \infty$, pentru constantele c şi d strict pozitive, determinaţi c şi d experimental pe calculator. (*Indicaţie*: logaritmaţi relaţia $\gamma - \gamma_n \approx cn^{-d}$ şi aplicaţi metoda celor mai mici pătrate).

66 Calcul numeric

Problema 66.1. (a) Se consideră funcţia compusă $h(t) = g(f(t))$. Să se exprime condiţionarea lui h în funcţie de condiţionarea lui g şi f. Atenţie la formulare — precizaţi în care puncte se vor evalua numerele de condiţionare.

(b) Ilustraţi (a) pentru $h(t) = \frac{1+\sin t}{1-\sin t}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Problema 66.2. (a) Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 + z^2 + e^z$. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $f(z) = 0$, alegând ca valoare de pornire $z_0 = -1 + 4i$.

(b) Găsiţi primele patru zerouri ale funcţiei f ordonate crescător după modulele valorilor complexe. Cum ştiţi că acestea sunt intr-adevăr primele patru zerouri şi că nu aţi omis niciunul?

(c) Să se rezolve sistemul

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y = 0 \\ f_2(x, y) &= 2xy + e^x \sin y = 0 \end{aligned}$$

Utilizaţi valorile de pornire $x_0 = -1$ şi $y_0 = 4$. Este această problemă legată de problema de la punctul (a) şi au ele aceeaşi comportare numerică? Explicaţi. (*Indicaţie*: $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$)

67 Calcul numeric

Problema 67.1. Fie $A, B \in \mathbb{C}^{m\times m}$. Arătaţi că dacă $I - B$ este singulară, există un vector $x \in \mathbb{C}^m$, astfel încât $(I - B)x = 0$. Deduceţi de aici că $\|B\| \geq 1$,şi deci dacă $\|A\| \leq 1$ atunci $I - A$ este nesingulară. Dacă $\|A\| \leq 1$, atunci

$$(I - A)^{-1} = I + A(I - A)^{-1}.$$

Deduceţi de aici că

$$\left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Problema 67.2. Determinaţi un zero al funcţiei

$$f(x) = x^3 - \sinh x + 4x^2 + 6x + 9.$$

68 Calcul numeric

Problema 68.1. Fie A o matrice pătratică diagonal dominantă. Arătaţi că:

(a) A este nesingulară.

(b) metoda lui Jacobi pentru sistemul $Ax = b$ converge pentru orice b.

Problema 68.2. Aproximaţi integralele

$$I_c = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \qquad I_s = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

cu o precizie dată:

(a) utilizând o cuadratură adaptivă;

(b) utilizând o cuadratură Gauss-Legendre, după ce s-a efectuat schimbarea de variabilă $x = t^2$;

(c) utilizând o cuadratură Gauss-Jacobi.

69 Calcul numeric

Problema 69.1. Stabiliţi următoarea formulă pentru aproximarea lui $f'(x)$

$$f'(x) \approx \frac{k^2 f(x+h) - h^2 f(x+k) + (h^2 - k^2) f(x)}{(k-h)kh},$$

(a) utilizând formula lui Taylor pentru $f(x+h)$ şi $f(x+k)$;

(b) utilizând interpolarea Lagrange cu nodurile x, $x+h$, $x+k$ şi derivând rezultatul.

Problema 69.2. Programaţi şi testaţi o rafinare a metodei secantei ce utilizează aproximarea lui $f'(x)$ dată în problema precedentă. Adică, utilizaţi această aproximaţie a lui $f'(x)$ în metoda lui Newton. Sunt necesare trei puncte de pornire: două pot fi arbitrare, iar al treilea se poate obţine prin metoda secantei.

Aplicaţie pentru funcţia $f(x) = x^3 - 12x^2 + 3x + 1$.

70 Calcul numeric

Problema 70.1. Se consideră formula de interpolare a lui Lagrange cu restul în forma Peano, pentru $m = 1$:

$$f(x) = (L_1 f)(x) + \int_a^b K_1(x,t) f''(t)dt, \qquad f \in C^2[a,b].$$

(a) Ce devine nucleul lui Peano $K_1(x,t)$ dacă $x \in (x_0, x_1)$? Deduceţi existenţa unui $\xi_x \in (x_0, x_1)$ astfel încât

$$(R_1 f)(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(\xi_x).$$

(b) Arătaţi că soluţia unică a problemei cu valori pe frontieră: fiind dat $g \in C[x_0, x_1]$, găsiţi $u \in C^2[x_0, x_1]$ astfel încât

$$\begin{aligned} u''(x) &= g(x), \qquad x \in (x_0, x_1) \\ u(x_0) &= 0 \\ u(x_1) &= 0 \end{aligned}$$

este dată de

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} K_1(x,t) g(t) dt,$$

unde $K_1(x,t)$ este nucleul lui Peano.

Problema 70.2. Se consideră sistemul neliniar

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ f_2(x,y,z) &\equiv 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \\ f_3(x,y,z) &\equiv 3x^2 - 4y + z^2 = 0. \end{aligned}$$

Găsiţi soluţia sistemului situată în primul octant ($\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$).

71 Calcul numeric

Problema 71.1. Să se aproximeze volumul butoiului cu diametrele D şi d şi înălţime h. Justificaţi formula utilizată în practică

$$V \approx \frac{\pi h}{12}\left(d^2 + 2D^2\right).$$

Indicaţie: Aproximaţi conturul butoiului prin arce de parabolă (polinom de interpolare de gradul 2) şi folosiţi formula pentru volumul de rotaţie.

Problema 71.2 (P)**.** Se consideră funcţia $f:[0,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ şi 4 noduri echidistante în intervalul $[0,5]$. Să se aproximeze $f(\pi)$, $f'(\pi)$ şi $f''(\pi)$ prin:

(a) un spline de tip Hermite;

(b) un spline de tip deBoor;

(c) un spline cu derivate secunde;

şi să se reprezinte pe acelaşi grafic funcţia şi aproximantele.

72 Calcul numeric

Problema 72.1. Se consideră formulele Newton-Cotes închise

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k) + R(f),$$

unde

$$x_k = a + kh, \qquad k = \overline{0,m}, \qquad h = \frac{b-a}{m}.$$

(a) Demonstraţi următoarele proprietăţi ale coeficienţilor, $k = \overline{0,m}$

$$\begin{aligned} A_k &= (-1)^{m-k}\frac{h}{k!(m-k)!}\int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k}dt, \\ A_k &= A_{m-k} \\ \sum_{k=0}^{m} A_k &= b-a. \end{aligned}$$

unde $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$.

(b) Se consideră afirmaţia: $A_k > 0$, $k = \overline{0,m}$. Ce se poate spune despre valoarea ei de adevăr? Demonstraţi-o dacă este adevărată sau daţi un contraexemplu dacă este falsă. (Indicaţie: calculaţi cantităţile

$$b_k = (-1)^{m-k}\frac{1}{k!(m-k)!}\int_0^m \frac{t^{[m+1]}}{t-k}dt,$$

care nu depind de a şi b).

Problema 72.2. Studiaţi comportarea polinomului de interpolare Hermite cu n noduri duble H_{2n+1} pentru funcţia $f : [-5,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ şi

(a) n noduri echidistante pe intervalul de definiţie

(b) n noduri Cebîşev $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = \overline{1,n}$.

(c) n noduri Cebîşev de forma $x_k = \cos\frac{k-1}{n}\pi$, $k = \overline{1,n+1}$.

(Luaţi $n = 10, 11$)

73 Calcul numeric

Problema 73.1. Fie $f \in C^6[-1,1]$ şi fie $P \in \mathbb{P}_5$ polinomul de interpolare Hermite cu nodurile duble -1, 0, 1, adică $P(x_i) = f(x_i)$, $P'(x_i) = f'(x_i)$, $x_i = -1,\ 0,\ 1$.

(a) Arătaţi că

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1).$$

(b) Folosind punctul (a) deduceţi o formula de integrare numerică de forma

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{7}{15}f(-1) + \frac{16}{15}f(0) + \frac{7}{15}f(1) + \frac{1}{15}f'(-1) - \frac{1}{15}f'(1) + R(f).$$

Deduceţi expresia restului integrând restul formulei de interpolare Hermite.

(c) Arătaţi că nucleul lui Peano îşi păstrează semnul pe $[-1,1]$ şi deduceţi de aici expresia restului.

Problema 73.2 (P)**.** Găsiţi factorizarea QR a matricei

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 12 & -8 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

şi folosind aceasta găsiţi soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului liniar

$$\begin{aligned} 9x - 6y &= 300 \\ 12x - 8y &= 600 \\ 20y &= 900. \end{aligned}$$

74 Calcul numeric

Problema 74.1. Valorile funcţiei $f : x \to \sin x$ sunt date în punctele $x_i = i\pi/8$, pentru toate valorile întregi ale lui i. Pentru un $x \in \mathbb{R}$, se calculează o aproximare $u(x)$ a lui $f(x)$ definind $k = \left[\frac{8x}{\pi}\right]$ (partea întreagă), astfel încât $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ şi apoi evaluând polinomul de interpolare Lagrange de gradul 5 cu nodurile $(x_j, f(x_j))$, $j = k-2, ..., k+3$. Arătaţi că pentru orice x real

$$|\sin x - u(x)| \leq \frac{225\pi^6}{16^6 \cdot 6!} < 0.00002.$$

Problema 74.2 (P)**.** Dorim să calculăm

$$\int_0^1 x \sin \frac{1}{x} dx.$$

(a) Incercaţi să obţineţi valoarea „exactă” utilizând Symbolic Math Toolbox sau Maple.

(b) Ce se întâmplă dacă utilizaţi o cuadratură adaptivă sau funcţia MATLAB `quad`?

(c) Cum puteţi rezolva impedimentul de la punctul anterior? Calculaţi integrala cu o eroare absolută $< 10^{-8}$.

75 Calcul numeric

Problema 75.1. Calculaţi eroarea care se comite aplicând formula trapezului şi formula elementară a lui Simpson la aproximarea $\int_0^1 x^4 dx$ şi $\int_0^1 x^5 dx$. Găsiţi valoarea constantei C pentru care regula trapezului dă valoarea exactă la calculul integralei

$$\int_0^1 (x^5 - Cx^4) dx$$

şi arătaţi că regula trapezului dă rezultate mai precise decât regula lui Simpson pentru $\frac{15}{14} < C < \frac{85}{74}$.

Problema 75.2 (P)**.** Interpretaţi rezultatele următoarelor experimente numerice şi trageţi concluziile care se impun.

(a) Fie p polinomul de grad 20 ce interpolează funcţia $f(x) = (1 - 6x^2)^{-1}$ în 21 de puncte echidistante din intervalul $[-1, 1]$. Includeţi capetele printre noduri. Tabelaţi $f(x)$, $p(x)$ şi $f(x) - p(x)$ în 41 de puncte echidistante din interval.

(b) Repetaţi experimentul utilizând noduri Cebîşev date de

$$x_i = \cos \frac{(i-1)\pi}{20}, \qquad i = \overline{1, 21}.$$

(c) Repetaţi experimentul cu un spline cubic natural şi 21 de puncte echidistante.

76 Calcul numeric

Problema 76.1. Determinaţi formule de cuadratură de tip Gauss pentru ponderea $w(t) = -\ln t$, $[a,b] = [0,1]$ şi $n = 1$ şi $n = 2$. Pentru funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}/\ln(x)$, determinaţi polinomul de cea mai bună aproximare de gradul al doilea în $L^2_w[0,1]$.

Problema 76.2. Figura 1 arată o gridă cu zăbrele plană având 21 de membri (liniile numerotate) legate în 12 joncţiuni (cercurile numerotate). Încărcările indicate, în tone, se aplică joncţiunilor 2, 5, 6, 9, şi 10 şi dorim să determinăm forţa rezultantă pe fiecare membru al grinzii.

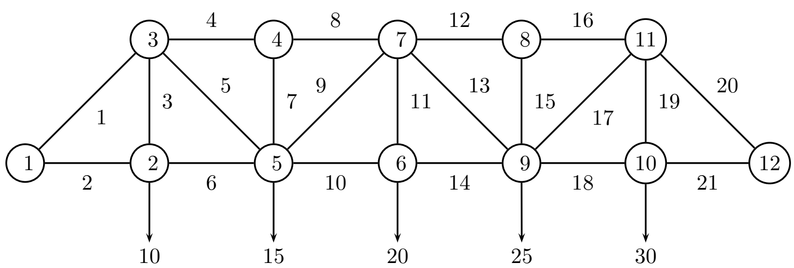

Figura 1: Grinda plană

Pentru ca grinda să fie în echilibru static, rezultantele în fiecare joncţiune trebuie să fie nule. Astfel, putem determina forţele membre egalând forţele orizontale la stânga şi la dreapta fiecărei joncţiuni şi la fel, forţele verticale deasupra şi dedesubtul fiecărei joncţiuni. Pentru cele 12 joncţiuni se obţin 24 de ecuaţii şi 21 de necunoscute. Pentru ca grinda săfie determinată static, adică să existe soluţie unică, presupunem că joncţinuea 1 este fixată rigid, atât orizontal cât şi vertical şi că joncţiunea 12 este fixată vertical. Descompunând forţele membre în componente verticale şi orizontale şi definind $\alpha = 1/\sqrt{2}$, obţinem următorul sistem de ecuaţii pentru forţele membre f_i:

jonc. 2	$f_2 = f_6$ $f_3 = 10$	jonc. 3	$\alpha f_1 = f_4 + \alpha f_5$ $\alpha f_1 + f_3 + \alpha f_5 = 0$
jonc. 4	$f_4 = f_8$ $f_7 = 0$	jonc. 5	$\alpha f_5 + f_6 = \alpha f_9 + f_{10}$ $\alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 = 15$
jonc. 6	$f_{10} = f_{14}$ $f_{11} = 20$	jonc. 7	$f_8 + \alpha f_9 = f_{12} + \alpha f_{13}$ $\alpha f_9 + f_{11} + \alpha f_{13} = 0$
jonc. 8	$f_{12} = f_{16}$ $f_{15} = 0$	jonc. 9	$\alpha f_{13} + f_{14} = \alpha f_{17} + f_{18}$ $\alpha f_{13} + f_{15} + \alpha f_{17} = 25$
jonc. 10	$f_{18} = f_{21}$ $f_{19} = 30$	jonc. 11	$f_{16} + \alpha f_{17} = f_{20}$ $\alpha f_{17} + f_{19} + \alpha f_{20} = 0$
jonc. 12	$\alpha f_{20} + f_{21} = 0$		

77 Calcul numeric

Problema 77.1. Se consideră punctele de extrem ale polinomului Cebîşev de speţa I T_n, $\eta_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0,n}$.

(a) Arătaţi că

$$(f,g)_U = \frac{1}{2}f(\eta_0)g(\eta_0) + f(\eta_1)g(\eta_1) + \cdots + f(\eta_{n-1})g(\eta_{n-1}) + \frac{1}{2}f(\eta_n)g(\eta_n)$$

este un produs scalar discret.

(b) Arătaţi că polinoamele Cebîşev de speţa I sunt ortogonale în raport cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)_U$, adică

$$(T_i,T_j)_U = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{n}{2}, & i = j \neq 0 \\ n, & i = j = 0 \end{cases}.$$

(c) Daţi expresia coeficienţilor polinomului de cea mai bună aproximare în raport cu produsul scalar $(\cdot,\cdot)_U$.

Problema 77.2. Scrieţi un program MATLAB de interpolare a unei funcţii f cu funcţii spline cubice pe un interval $[a,b]$ considerând condiţia de spline de Boor în punctul a ($p_1(x) \equiv p_2(x)$) şi spline cu derivate secunde în punctul b ($s''(b) = f''(b)$). Aplicaţie: aproximaţi $\sin x$ pe intervalul $[0,2\pi]$.

78 Calcul numeric

Problema 78.1. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R_3(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Care este eroarea dacă se aplică formula pentru a calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

Problema 78.2. Un model simplu al bătăilor inimii umane este dat de

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= -(x^3 - Ax + c), \\ c' &= x, \end{aligned}$$

unde x este deplasarea de la echilibru a fibrei musculare, $c(t)$ este concentraţia unui control chimic, iar ε şi A sunt constante pozitive. Se aşteaptă ca soluţiile să fie periodice. Aceasta se poate vedea reprezentând soluţia în planul fazelor (x pe abscisă, c pe ordonată), trebuind să se obţină o curbă închisă. Presupunem că $\varepsilon = 1$ şi $A = 3$.

(a) Calculaţi $x(t)$ şi $c(t)$, pentru $0 \le t \le 12$ şi valorile iniţiale $x(0) = 0.1$, $c(0) = 0.1$. Reprezentaţi ieşirea în planul fazelor. Cam cât este perioada?

(b) Repetaţi punctul (a) cu $x(0) = 0.87$, $c(0) = 2.1$.

79 Calcul numeric

Problema 79.1. Găsiţi o formula de cuadratură de forma

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 79.2. Ecuaţia atractorului Lorenz

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -ax + ay,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= bx - y - xz,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -cz + xy
\end{aligned}$$

are soluţii haotice care sunt sensibil dependente de condiţiile iniţiale. Rezolvaţi numeric pentru $a = 5$, $b = 15$, $c = 1$ cu condiţiile iniţiale

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 6, \quad z(0) = 4, \quad t \in [0, 20],$$

cu toleranţa $T = 10^{-4}$. Repetaţi pentru

(a) $T = 10^{-5}$;

(b) $x(0) = 2.1$.

Comparaţi rezultatele cu cele obţinute anterior. În fiecare caz reprezentaţi grafic.

80 Calcul numeric

Problema 80.1. Determinaţi o metodă Runge-Kutta de ordinul al doilea diferită de metoda lui Euler modificată şi metoda lui Heun. Studiaţi consistenţa, stabilitatea şi convergenţa acestei metode.

Problema 80.2. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f),$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Aplicaţi formula pentru a calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx.$$

cu o precizie dată.

81 Calcul numeric

Problema 81.1. (a) Arătaţi că polinoamele

$$V_n(t) = \frac{\cos\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{\cos\frac{1}{2}\theta},$$

unde $\theta = \arccos t$, sunt ortogonale pe intervalul $[-1,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.

(b) Stabiliţi relaţia de recurenţă $V_{n+1}(t) = 2tV_n(t) - V_{n-1}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Găsiţi o formulă de cuadratură cu două noduri bazată pe aceste polinoame ortogonale.

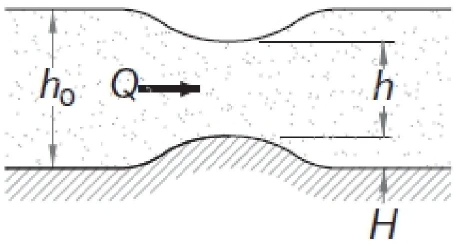

Figura 2: Ec. Bernoulli

Problema 81.2. Ecuaţia lui Bernoulli pentru fluxul de fluid într-un canal deschis cu o mică cocoaşă este

$$\frac{Q^2}{2gb^2h_0^2 + h_0} + h_0 = \frac{Q^2}{2gb^2h^2 + h} + h + H$$

unde

$$
\begin{aligned}
Q &= 1.2m^3/s = \text{rata de curgere a volumului} \\
g &= 9.81m/s^2 = \text{acceleraţia gravitaţională} \\
b &= 1.8m = \text{lăţimea canalului} \\
h_0 &= 0.6m = \text{nivelul superior al apei} \\
H &= 0.075m = \text{înălţimea cocoaşei} \\
h &= \text{nivelul apei deasupra cocoaşei}
\end{aligned}
$$

Determinaţi h.

82 Calcul numeric

Problema 82.1. (a) Arătaţi că polinoamele

$$W_n(t) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\frac{1}{2}\theta},$$

unde $\theta = \arccos t$, sunt ortogonale pe intervalul $[-1,1]$ în raport cu ponderea $w(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$.

(b) Stabiliţi relaţia de recurenţă $W_{n+1}(t) = 2tW_n(t) - W_{n-1}(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Găsiţi o formulă de cuadratură cu două noduri bazată pe aceste polinoame ortogonale.

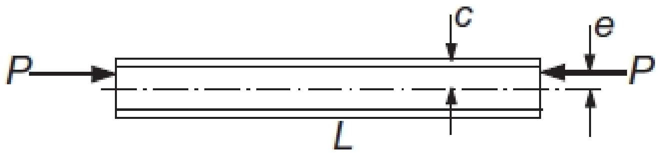

Figura 3: Coloană de aluminiu

Problema 82.2. O coloană de aluminiu $W310 \times 202$ (flanşă largă) este supusă unei încărcări excentrice axiale P ca în figura 3. Apăsarea maximă compresivă în coloană este dată de formula secantei:

$$\sigma_{\max} = \overline{\sigma}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{\overline{\sigma}}{E}}\right)\right]$$

unde

$$\overline{\sigma} = P/A = \text{apăsarea medie}$$
$$A = 25800mm^2 = \text{aria secţiunii coloanei}$$
$$e = 85mm = \text{excentricitatea încărcării}$$
$$c = 170mm = \text{semiadâncimea coloanei}$$
$$r = 142mm = \text{raza de giraţie a secţiunii}$$
$$L = 7100mm = \text{lungimea coloanei}$$
$$E = 71 \times\ 10^9 Pa = \text{modulul de elasticitate}$$

Determinaţi încărcarea maximă P pe care coloana o poate suporta, dacă apăsarea maximă nu poate depăşi $120 \times 10^6\ Pa$.

83 Calcul numeric

Problema 83.1. Găsiţi polinoamele ortogonale discrete de grad 0, 1 şi 2, având ca suport mulţimea numerelor naturale, în raport cu ponderea $w(k) = \frac{e^{-a}a^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Găsiţi aproximanta de grad I în sensul celor mai mici pătrate a funcţiei $f(x) = e^x$ bazată pe aceste polinoame ortogonale.

Problema 83.2. Perioada unui pendul simplu de lungime L este $\tau = \sqrt{\frac{L}{g}}h\left(\theta_0\right)$, unde g este acceleraţia gravitaţională , θ_0 reprezintă amplitudinea unghiulară, iar

$$h\left(\theta_0\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \dfrac{\theta_0}{2} \sin^2 \theta}}.$$

Calculaţi $h(15°)$, $h(30°)$ şi $h(45°)$ şi comparaţi aceste valori cu $h(0) = \pi/2$ (aproximarea utilizată pentru amplitudini mici).

84 Calcul numeric

Problema 84.1. Găsiţi polinoamele ortogonale discrete de grad 0, 1 şi 2, având ca suport mulţimea $\{0, 1, \ldots, N-1\}$, în raport cu ponderea $w(k) = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Găsiţi aproximanta de grad I în sensul celor mai mici pătrate a funcţiei $f(x) = 2^x$ bazată pe aceste polinoame ortogonale, pentru $N = 5$.

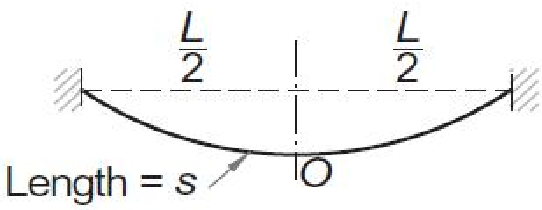

Figura 4: Tensiune în cablu

Problema 84.2. Un cablu de oţel de lungime s este suspendat aşa cum se arată în figura 4. Tensiunea de întindere maximă în cablu, care apare la suporturi (punctele de sprijin), este

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 \cosh \beta$$

unde

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\gamma L}{2\sigma_0} \\ \sigma_0 &= \text{tensiunea de întindere în O} \\ \gamma &= \text{greutatea cablului pe unitatea de volum} \\ L &= \text{întinderea orizontală a cablului} \end{aligned}$$

Raportul lungime-întindere este legat de β prin

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{\beta} \sinh \beta$$

Determinaţi $\sigma_{\max}$ dacă $\gamma = 77 \times 10^3 N/m^3$ (oţel), $L = 1000$ m şi $s = 1100$ m.

85 Calcul numeric

Problema 85.1. Se consideră iteraţia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Explicaţi legătura cu iteraţia Newton şi arătaţi că (x_k) converge pătratic dacă x_0 este suficient de apropiată de soluţie. Aplicaţi această metodă pentru $f(x) = e^x - x - 2$ şi verificaţi convergenţa pătratică pentru $x_0 = 1$. Experimentaţi şi pentru $x_0 = 10$ şi $x_0 = -10$ şi explicaţi comportarea.

Problema 85.2. Formula lui Debye pentru capacitatea calorică C_V a unui solid este $C_V = 9Nkg(u)$, unde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^4} dx.$$

Termenii din această ecuaţie sunt

$$\begin{aligned}
N &= \text{numărul de particule din solid}\\
k &= \text{constanta lui Boltzmann}\\
u &= T/D\\
T &= \text{temperatura absolută}\\
D &= \text{temperatura Debye}
\end{aligned}$$

Calculaţi $g(u)$ pentru u de la 0 la 1.0 din 0.05 în 0.05 şi reprezentaţi rezultatul.

86 Calcul numeric

Problema 86.1. Să se determine aproximarea lui x^k de grad $k-1$ în sensul celor mai mici pătrate cu polinoame Cebâşev, pentru $k = 1, \ldots, 5$. Să se verifice rezultatele teoretice cu rutinele de la laborator pentru aproximare continuă cu polinoame Cebîşev.

Problema 86.2. Un vârf de tensiune într-un circuit este provocat de un curent

$$i(t) = i_0 e^{-t/t_0} \sin(2t/t_0)$$

printr-un rezistor. Energia E disipată de rezistor este

$$E = \int_0^{\infty} R i^2(t) dt.$$

Determinaţi E cunoscând $i_0 = 100A$, $R = 0.5\Omega$ şi $t_0 = 0.01s$.

87 Calcul numeric

Problema 87.1. Notând cu $T(m)$ aproximaţia din formula repetată a trapezului pentru m subintervale

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)\right]$$

unde

$$h = \frac{b-a}{m},\ x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, m$$

şi cu $S(2m)$ aproximaţia din formula repetată a lui Simpson pentru m subintervale scrisă sub forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots \right.$$
$$\left. + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\right]$$

unde

$$h = \frac{b-a}{2m}, \qquad x_k = a + kh, \quad k = 0, \ldots, 2m,$$

arătaţi că

$$S(2m) = \frac{4}{3}T(2m) - \frac{1}{3}T(m)$$

şi dacă $f \in C^4[a,b]$, atunci

$$\lim_{m\to\infty} \frac{T(m) - T(2m)}{T(2m) - T(4m)} = 4.$$

Problema 87.2. Tabela de mai jos arată coeficientul de frânare c_D al unei sfere în funcţie numărul Reynolds Re. Utilizaţi un spline cubic natural pentru a determina c_D corespunzând $Re = 5$, 50, 500 şi 5000. Indicaţie: Utilizaţi o scară log–log (logaritmaţi ambele coordonate).

Re	0.2	2	20	200	2000	20000
c_D	103	13.9	2.72	0.800	0.401	0.433

Aproximaţi derivata lui c_D în raport cu Re şi reprezentaţi c_D şi derivata pe acelaşi grafic.

88 Calcul numeric

Problema 88.1. Să se arate că regula repetată a trapezului cu m subintervale, $T(m)$, este exactă pentru polinoame trigonometrice al căror grad nu este multiplu de m. Ce rezultat dă regula trapezului dacă gradul este multiplu de m? (Indicaţie: datorită liniarităţii este suficient să se verifice exactitatea pe intervalul $[0, 2\pi]$ şi funcţiile $f(x) = \cos kx$ şi $f(x) = \sin kx$, sau chiar pentru $f(x) = e^{kix} = \cos kx + i \sin kx$).

Problema 88.2. Frecvenţele naturale ale unui cantilever (grindă în consolă) uniform sunt legate de rădăcinile β_i ale ecuaţiei de frecvenţă $f(\beta) = \cosh\beta\cos\beta + 1 = 0$, unde

$$\begin{aligned}
\beta_i^4 &= (2\pi f_i)^2 \frac{mL^3}{EI} \\
f_i &= \text{a } i\text{-a frecvenţă naturală} \\
m &= \text{masa grinzii} \\
L &= \text{lungimea grinzii} \\
E &= \text{modulul de elasticitate} \\
I &= \text{momentul de inerţie al secţiunii transversale}
\end{aligned}$$

Determinaţi cele mai mici două frecvenţe ale unei grinzi de $0.9m$ lungime, cu o secţiune rectangulară cu lăţimea de 25 mm şi înălţimea de 2.5 mm. Densitatea oţelului este 7850 kg/m^3 şi $E = 200GPa$.

89 Calcul numeric

Problema 89.1. Determinaţi valorile lui c_j, $j = -1, 0, 1, 2$, astfel încât formula de cuadratură

$$\int_0^1 f(x)dx \approx c_{-1}f(-1) + c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)$$

să fie exactă pentru orice polinom de gradul 3. Arătaţi că pentru aceste valori ale coeficienţilor c_j şi pentru condiţii adecvate asupra lui f,

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - c_{-1}f(-1) + c_0 f(0) + c_1 f(1) + c_2 f(2)\right| \le \frac{11}{720}M_4.$$

Impuneţi condiţii pentru validitatea acestei delimitări şi daţi o definiţie a lui M_4.

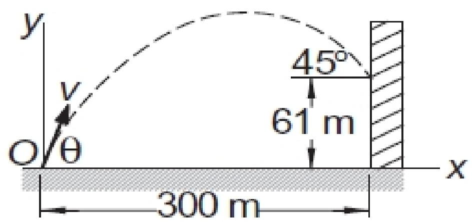

Figura 5: Proiectil

Problema 89.2. Un proiectil este lansat din O cu viteza v la unghiul θ cu orizontala. Ecuaţia parametrică a traiectoriei este

$$\begin{aligned} x &= (v\cos\theta)\,t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + (v\sin\theta)\,t, \end{aligned}$$

unde t este timpul măsurat de la lansare, iar $g = 9.81m/s^2$ reprezintă acceleraţia gravitatională. Dacă proiectilul trebuie să atingă ţinta la un unghi de 45° (figura 5), determinaţi v, θ şi timpul de zbor.

90 Calcul numeric

Problema 90.1. Funcţia H este definită prin

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0,1] \\ -1, & \text{dacă } x \in [-1,0]. \end{cases}$$

Construiţi cea mai bună aproximaţie polinomială de grad 0, 1 şi 2 în $L^2_w[-1,1]$, pentru $w(x) \equiv 1$. Comparaţi cu rezultatul obţinut de rutina de la laborator.

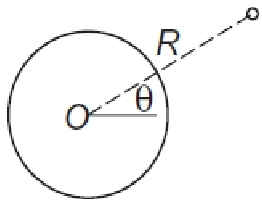

Figura 6: Satelit

Problema 90.2. Traiectoria unui satelit care se roteşte pe orbită în jurul Pământului este (figura 6)

$$R = \frac{C}{1 + e \sin(\theta + \alpha)}$$

unde (R, θ) sunt coordonatele polare ale satelitului, iar C, e şi α sunt constante (e se numeşte excentricitatea orbitei). Dacă satelitul a fost observat în următoarele trei poziţii

θ	$-30°$	$0°$	$30°$
$R(km)$	6870	6728	6615

determinaţi cea mai mică rază R a traiectoriei şi valoarea corespunzătoare a lui θ.

91 Calcul numeric

Problema 91.1. Determinaţi cea mai bună aproximaţie de grad 2 a lui $f(t) = \frac{1}{t^2}$ din $L^2_w(\mathbb{R})$, pentru $w(t) = |t|^{2\mu} e^{-t^2}$, $\mu > -\frac{1}{2}$. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^{2\mu} e^{-t^2} f(t) \mathrm{d}\, t = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate.

Problema 91.2. Viteza v a unei rachete Saturn V în zbor vertical în apropierea suprafeţei Pământului poate fi aproximată prin

$$v = u \ln \frac{M_0}{M_0 - mt} - gt$$

unde

- $u = 2510\ m/s$ = viteza de expulzare relativă la rachetă
- $M_0 = 2.8 \times 10^6\ kg$ = masa rachetei la lansare
- $m = 13.3 \times 10^3\ kg/s$ = rata de consum a combustibilului
- $g = 9.81\ m/s^2$ = acceleraţia gravitaţională
- t = timpul măsurat de la lansare

Determinaţi momentul când racheta atinge viteza sunetului ($335\ m/s$).

92 Calcul numeric

Problema 92.1. Determinaţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^\infty e^{-t^2} f(t)dt = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. Determinaţi aproximaţia de grad 2 în medie pătratică pentru ponderea şi intervalul de mai sus pentru $f(t) = \sqrt{t}$.

Problema 92.2. Aproximaţi funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \exp(x) |\operatorname{sech}(\sin 8x)|^{\exp(x)}$$

printr-un polinom de interpolare Lagrange de grad 150 cu noduri Cebîşev de speţa a doua (extremele polinoamelor Cebîşev de speţa I). Aproximaţi integrala lui f prin integrala polinomului de interpolare.

93 Calcul numeric

Problema 93.1. (a) Calculaţi

$$\int_{-1}^{1} T_k(x) \mathrm{d}\, x,$$

unde T_k este polinomul Cebîşev de speţa I de grad k.

(b) Folosiţi rezultatul de la punctul anterior pentru a demonstra că integrala unui polinom de grad n exprimată sub forma unei serii Cebîşev este

$$\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ par}}}^{n} \frac{2c_k}{1-k^2}.$$

(c) Implementaţi ideea de la punctul (b) în MATLAB (folosiţi rutinele de la laborator pentru calculul coeficienţilor c_k) şi utilizaţi-o la integrarea numerică a funcţiilor.

(d) Utilizaţi rutina de la punctul (c) pentru a calcula

$$\int_{-1}^{1} e^x \sin x^2 \mathrm{d}\, x.$$

94 Calcul numeric

Problema 94.1. (a) Fie $\mathrm{d}\lambda$ o măsură simetrică pe $[-a,a]$, $0 < a \le \infty$ şi

$$\pi_{2k}(t;\mathrm{d}\lambda) = \pi_k^+(t^2), \qquad \pi_{2k+1}(t;\mathrm{d}\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^+\}$ şi $\{\pi_k^-\}$ sunt polinoame ortogonale monice pe $[0,a^2]$ în raport cu măsurile $\mathrm{d}\lambda^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}t$ şi respectiv $\mathrm{d}\lambda^-(t) = t^{+1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}t$.

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0,1]$ în raport cu ponderile $w(t) = \sqrt{t}$ şi $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

(c) Generaţi formulele de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru aceste ponderi.

Problema 94.2. Un cablu de 15 m este suspendat în A şi D şi susţine greutăţile concentrate în B şi C (vezi figura 7). Ecuaţiile de echilibru vertical în joncţiunile B şi C sunt

$$\begin{aligned} T(-\tan\theta_2 + \tan\theta_1) &= 16 \\ T(\tan\theta_3 + \tan\theta_2) &= 20 \end{aligned}$$

unde T componenta orizontală a forţei cablului (este aceeaşi în toate segmentele cablului). În plus, există două restricţii geometrice impuse de poziţiile suporturilor:

$$\begin{aligned} -4\sin\theta_1 - 6\sin\theta_2 + 5\sin\theta_3 &= -3 \\ 4\cos\theta_1 + 6\cos\theta_2 + 5\cos\theta_3 &= 12. \end{aligned}$$

Determinaţi unghiurile θ_1, θ_2 şi θ_3.

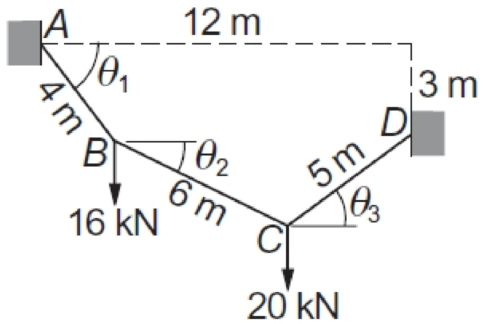

Figura 7: Problema 94.2

95 Calcul numeric

Problema 95.1. Se consideră ecuaţia

$$x = e^{-x}$$

(a) Arătaţi că există o rădăcină reală unică α şi determinaţi intervalul care o conţine.

(b) Arătaţi că metoda aproximaţiilor succesive $x_n = e^{-x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ converge local către α şi determinaţi constanta de eroare asimptotică.

(c) Ilustraţi grafic faptul că iteraţia de la (b) converge global, adică petru $x_0 > 0$, arbitrar. Demonstraţi apoi convergenţa.

(d) O ecuaţie echivalentă este

$$x = \ln \frac{1}{x}.$$

Iteraţia $x_n = \ln \frac{1}{x_n}$ converge local? Explicaţi.

Problema 95.2 (P)**.** Considerăm următorul mod de ordonare a echipelor de fotbal american. Presupunem că avem 4 echipe, T1, T2, T3 şi T4, iar rezultatul întâlnirilor directe este :
T1 bate T2 cu 4 puncte 21-17

- T3 bate T1 cu 8 puncte 27-18

- T1 bate T4 cu 6 puncte 16-10
- T4 bate T4 cu 3 puncte 10-7
- T2 bate T4 cu 7 puncte 17-10

Pentru a determina punctajul r_1, ..., r_4 al fiecărei echipe vom rezolva sistemul supradeterminat

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= 4, \\ r_3 - r_1 &= 9, \\ r_1 - r_4 &= 6, \\ r_3 - r_4 &= 3, \\ r_2 - r_4 &= 7 \end{aligned}$$

în sensul celor mai mici pătrate. Soluţia nu este unică, deoarece dacă $(r_1, \dots, r_4)^T$ este o soluţie şi dacă îi adunăm un vector constant arbitrar, de exemplu $(1, \dots, 1)^T$ obţinem un vector cu acelaşi reziduu. Arătaţi că dacă $(r_1, \dots, r_4)^T$ este o soluţie a sistemului în sensul celor mai mici pătrate, atunci şi $(r_1 + c, \dots, r_4 + c)^T$ este o soluţie, pentru orice constantă c. Pentru a face ca soluţia să fie unică, putem limita numărul total de puncte, de exemplu, la 20:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 20.$$

Determinaţi punctajele şi normele reziduurilor, considerând întâi toate ecuaţiile şi apoi numai primele 5.

96 Calcul numeric

Problema 96.1. (a) Construiţi formula Newton-Cotes cu ponderi

$$\int_0^1 f(x)x\ln\frac{1}{x}dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f).$$

(b) Găsiţi o formulă Newton-Cotes pentru $w(x) = 1$, cu 5 noduri de forma $t_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0..n$ (pe $[-1,1]$).

Problema 96.2 (P)**.** John Machin (1680-1752) a descoperit următoarea expresie pentru π:

$$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}. \tag{5}$$

(a) Scrieţi seria Maclaurin şi polinomul lui Taylor T_n de grad n pentru $\arctan x$ în jurul lui $x = 0$.

(b) Aproximaţi π utilizând T_n şi (5). Mai concret, utilizaţi aproximarea

$$\pi \approx P_n = 16T_n\left(\frac{1}{5}\right) - 4T_n\left(\frac{1}{239}\right).$$

(c) Care este eroarea relativă în aproximarea de mai sus? Calculaţi π cu precizia eps (în MATLAB). Câte zecimale corecte se obţin pentru $n = 9$?

97 Calcul numeric

Problema 97.1. (a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a,b]$, $a<b$, $a+b=0$, adică $w(-t)=w(t)$ pe $[a,b]$. Arătaţi că $(-1)^n\pi_n(-t;w)=\pi_n(t,w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt=\sum_{\nu=1}^{n} w_\nu f(t_\nu)+R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu}=-t_\nu,\qquad w_{n+1-\nu}=w_\nu,\ \nu=1,\dots,n.$$

(c) Fie w funcţia ,,pălarie"

$$w(t)=\begin{cases}1+t, & \text{pentru } t\in[-1,0]\\ 1-t, & \text{pentru } t\in[0,1].\end{cases}$$

Obţineţi o formulă gaussiană cu două noduri $\int_{-1}^1 f(t)w(t)dt=w_1f(t_1)+w_2f(t_2)+R_2(f)$ pentru ponderea de mai sus. Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Problema 97.2 (P)**.** Literele PostScript şi TrueType se generează cu spline parametrice, utilizând doar câteva puncte pentru fiecare literă.

(a) Creaţi şi imprimaţi litera de mână definită de următoarele date.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	3	1.75	0.90	0	0.50	1.50	3.25	4.25	4.25	3	3.75	6.00
y	4	1.60	0.50	0	1.00	0.50	0.50	2.25	4.00	4	4.25	4.25

(b) În acelaşi sistem de axe, desenaţi litera împreună cu litera de dimensiune dublă. (Comanda `2*x` va dubla dimensiunea fontului în direcţia x).

(c) Animaţi desenarea literei utilizând comanda `comet`.

(d) Creaţi şi desenaţi o altă literă.

98 Calcul numeric

Problema 98.1. (a) Construiţi o formulă de tip trapez

$$\int_0^h f(x)dx = af(0) + bf(h) + R(f)$$

care este exactă pentru $f(x) = \cos x$ şi $f(x) = \sin x$. Este formula exactă pentru constante?

(b) Arătaţi că are loc o formulă similară pentru $\int_c^{c+h} g(t)dt$.

Problema 98.2 (P)**.** (a) Determinaţi matricea $A = [a_{ij}]$ de dimensiune $(m+1) \times (m+1)$, $a_{ij} = (p_{m,i}, p_{m,j})$ a ecuaţiilor normale relativ la baza Bernstein

$$p_{m,j}(t) = \binom{m}{j} t^j (1-t)^{m-j}, \qquad j = \overline{0,m},$$

şi funcţia pondere $w(t) \equiv 1$ pe $[0,1]$.

(*Indicaţie*: utilizaţi funcţia beta a lui Euler)

(b) Rezolvaţi sistemul de ecuaţii normale pentru $m = 3:3:12$, când funcţia care urmează să fie aproximată este $f(t) = 1$. Care este soluţia exactă? Afişaţi, pentru fiecare m, o estimaţie a numărului de condiţionare, vectorul coeficienţilor şi eroarea asociată (modulul diferenţei dintre valoarea calculată şi cea exactă). Comentaţi rezultatul.

99 Calcul numeric

Problema 99.1. Dându-se o subdiviziune Δ cu N subintervale egale a intervalului $[0, 2\pi]$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 2\pi, \ x_k = kh, \ h = 2\pi/N$$

şi o funcţie f 2π-periodică, construiţi o formulă de cuadratură pentru al m-lea coeficient Fourier complex al lui f

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx,$$

aproximând f printr-un interpolant spline de gradul I din $\mathbb{S}_1^0(\Delta)$. Scrieţi rezultatul sub forma unei formule a trapezului ,,modificate". (Indicaţie: exprimaţi interpolantul în baza funcţiilor B-spline de gradul 1 (pălariile chinezeşti).)

Problema 99.2 (P)**.** Presupunem că dorim să aproximăm funcţia

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

pe semiaxa pozitivă $\mathbb{R}_+$ printr-o combinaţie liniară de exponenţiale $\pi_j(t) = e^{-jt}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în sensul celor mai mici pătrate (continuu, cu ponderea 1).

(a) Deduceţi ecuaţiile normale. Ce legătură are matricea cu matricea Hilbert?

(b) Utilizaţi Matlab pentru a rezolva ecuaţiile normale pentru $n = 1, 2, \ldots, 8$. Listati n, numărul de condiţionare al matricei în norma euclidiană şi soluţia. Reprezentaţi pe acelaşi grafic aproximanta şi funcţia exactă pentru $1 \le n \le 4$.

100 Calcul numeric

Problema 100.1. Se consideră ecuaţia $x = \cos x$.

(a) Arătaţi grafic că are o rădăcină pozitivă unică α. Indicaţi, aproximativ, unde este situată.

(b) Demonstraţi convergenţa locală a iteraţiei $x_{n+1} = \cos x_n$.

(c) Pentru iteraţia de la (b) demonstraţi că dacă $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci

$$|x_{n+1} - \alpha| < \sin \frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha| .$$

În particular, are loc convergenţa globală pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = 0$, $f(x) = x - \cos x$, converge global pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Problema 100.2 (P)**.** Fie $f(x) = \frac{1}{1-\pi x}$ şi $f_i = f(ih)$, $i = -2, -1, 0, 1, 2$. Cu ajutorul diferenţelor finite regresive

$$\nabla f_1 = f_1 - f_0, \ \nabla^2 f_1 = f_1 - 2f_0 + f_{-1}$$
$$\nabla^3 f_2 = f_2 - 3f_1 + 3f_0 - f_{-1}, \ \nabla^4 f_2 = f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_2,$$

definim

$$e_n(h) = f^{(n)}(0) - \frac{1}{h^n} \nabla^n f_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Încercaţi să determinaţi ordinul de convergenţă a lui $e_n(h)$ când $h \to \infty$ afişând pentru $n = 1, \ldots, 4$

$$e_n(h_k) \text{ şi } r_k := \frac{e_n(h_k)}{e_n(h_{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 10,$$

unde $h_k = \frac{1}{4} 2^{-k}$, $k \geq 0$. Comentaţi rezultatele.

101 Calcul numeric

Problema 101.1. Arătaţi că dacă funcţia g interpolează funcţia f în x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1} şi h interpolează f în x_1, x_2, $\ldots$, x_n, atunci

$$g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}\left[g(x) - h(x)\right] \tag{6}$$

interpolează f în x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n. Daţi un exemplu de funcţii g şi h şi combinaţie (6) cu această proprietate.

Problema 101.2 (P)**.** Pentru $p \in \mathbb{N}$ fie

$$I_p = \int_0^1 (1-t)^p f(t)dt.$$

Comparaţi regula trapezelor cu n subintervale cu cuadratura Gauss-Jacobi cu n puncte pe $[0,1]$ cu parametrii $\alpha = p$, $\beta = 0$. Luaţi de exemplu $f(t) = \tan t$ şi $p = 5 : 5 : 20$ şi $n = 10 : 10 : 50$ în cazul metodei trapezelor şi $n = 2 : 2 : 10$ pentru cuadratura Gauss.

102 Calcul numeric

Problema 102.1. Fie $f(x) = e^x$.

(a) Arătaţi că
$$f[t, t+1, \ldots, t+n] = \frac{(e-1)^n}{n!} e^t.$$

(b) Din formula de medie pentru diferenţe divizate se ştie că
$$f[0, 1, \ldots, n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (0, n).$$
Utilizaţi rezultatul de la (a) pentru a determina ξ. Este localizat la stânga sau la dreapta mijlocului $n/2$?

Problema 102.2 (P)**.** Pentru $n \geq 2$ întreg, considerăm ecuaţia
$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

(a) Scrieţi ecuaţia sub forma unei ecuaţii polinomiale echivalente $p_n(x) = 0$.

(b) Utilizaţi regula lui Descartes (aplicată lui $p_n(x) = 0$) pentru a arăta că există exact două rădăcini pozitive, una în $(0, 1)$, alta în $(1, 1)$. Ce legătură este între ele? Se notează cea mai mare rădăcină cu α_n $(n > 1)$. Se ştie că (*nu trebuie să demonstraţi aceasta*)
$$1 < \alpha_{n+1} < \alpha_n < 3, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

(c) Scrieţi şi executaţi un program care aplică metoda lui Newton (ecuaţiei $p_n(x) = 0$) pentru a calcula α_n, $n = 2, 3, \ldots, 20$, cu şase zecimale exacte, utilizând valoarea iniţială 3 pentru α_2 şi valoarea iniţială α_n pentru α_{n+1} $(n \geq 2)$. (Justificaţi aceste alegeri.) Pentru fiecare n, determinaţi numărul de iteraţii necesare.

103 Calcul numeric

Problema 103.1. Fie f o func(t)ie arbitrară continuă pe $[0,1]$ ce satisface

$$f(x) + f(1-x) = 1, \qquad x \in [0,1].$$

(a) Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

(b) Arătaţi că formula repetată a trapezului pentru a calcula $\int_0^1 f(x)dx$ este exactă.

(c) Arătaţi, cu cât mai puţine calcule, că formula repetată a lui Simpson şi formulele simetrice mai generale sunt de asemenea exacte.

Problema 103.2 (P)**.** Se consideră ecuaţia

$$x = e^{-x}.$$

(a) Implementaţi iteraţia cu punct fix $x_n = e^{-x_n}$, pornind cu $x_0 = 1$ şi oprind după primul n pentru care x_{n+1} coincide cu x_n în limita preciziei maşinii. Listaţi această valoare a lui n şi x_{n+1} corespunzător.

(b) Dacă ecuaţia este înmulţită cu ω ($\neq 0$ şi $\neq 1$) şi x este adăugat la ambii membri, se obţine ecuaţia echivalentă

$$x = \frac{\omega e^{-x} + x}{1 + \omega}.$$

Ce condiţii trebuie puse asupra lui ω pentru ca iteraţia cu punct fix pentru această ecuaţie să conveargă mai rapid decât iteraţia de la (a)? În această condiţie apare şi rădăcina α a ecuaţiei

(c) Care este valoarea optimă a lui ω? Verificaţi pe calculator într-o manieră analoagă cu cea de la (a).

104 Calcul numeric

Problema 104.1. Se consideră ecuaţia lui Lambert $xe^x = a$ pentru valori reale ale lui x şi a.

(a) Arătaţi grafic că ecuaţia are exact o rădăcină $\xi(a) \geq 0$ dacă $a \geq 0$, exact două rădăcini $\xi_2(a) < \xi_1(a) < 0$ dacă $-1/e < a < 0$, o rădăcină dublă -1 dacă $a = -1/e$ şi nici o rădăcină dacă $a < -1/e$.

(b) Discutaţi condiţionarea lui $\xi(a)$, $\xi_1(a)$, $\xi_2(a)$ când a variază în intervalele respective.

Problema 104.2 (P)**.** Constanta Littlewood–Salem–Izumi, α_0, definită ca soluţia unică în intervalul $0 < \alpha < 1$ a ecuaţiei

$$\int_0^{3\pi/2} \frac{\cos t}{t^\alpha} \mathrm{d}\, t = 0,$$

prezintă interes în teoria seriilor trigonometrice. Utilizaţi metoda lui Newton în combinaţie cu o cuadratură Gauss-Jacobi pentru a calcula α_0.

105 Calcul numeric

Problema 105.1 (Euler, 1734)**.** Fie $x_k = 10^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ şi $f(x) = \log_{10} x$.

(a) Arătaţi că

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{(-1)^{n-1}}{10^{n(n-1)/2}\,(10^n - 1)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(Indicaţie: demonstraţi prin inducţie după n rezultatul mai general

$$f[x_r, \ldots, x_{r+n}] = \frac{(-1)^{n-1}}{10^{rn+n(n-1)/2}\,(10^n - 1)}, \qquad r \geq 0.)$$

(b) Utilizaţi formula lui Newton pentru a determina $p_n(x) = (L_n f)(x; x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} p_n(x)$ există, pentru $x \in [1, 10)$. Este limita egală cu $\log_{10}(x)$? Verificaţi pentru $x = 9$.

Problema 105.2 (P)**.** Ecuaţia

$$f(x) = x \tan x - 1 = 0;$$

are o infinitate de rădăcini, α_n, câte una în fiecare interval $[n\pi, (n + \frac{1}{2})\pi]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Arătaţi existenţa rădăcinilor pe cale grafică.

(b) Arătaţi că cea mai mică rădăcină pozitivă α_0 se poate obţine cu metoda lui Newton pornind cu $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

(c) Arătaţi că metoda lui Newton cu valoarea de pornire $x_0 = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$ converge monoton descrescător către α_n dacă $n \geq 1$.

(d) Dezvoltând α_n (formal) după puterile inverse ale lui πn

$$\alpha_n = n\pi + c_0 + c_1\,(\pi n)^{-1} + c_2(\pi n)^{-2} + c_3\,(\pi n)^{-3} + \ldots$$

determinaţi c_0, c_1, c_2, $\ldots$, c_9. (Indicaţie: Utilizaţi comanda Maple `series`.)

(e) Utilizaţi metoda lui Newton pentru a calcula α_n pentru $n = 1 : 10$ şi comparaţi rezultatele cu aproximaţia furnizată de dezvoltarea de la (d).

106 Calcul numeric

Problema 106.1. (a) Deduceţi relaţia de recurenţă cu trei termeni

$$\sqrt{\beta_{k+1}}\widetilde{\pi}_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\,\widetilde{\pi}_k(t) - \sqrt{\beta_k}\widetilde{\pi}_{k-1}(t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\widetilde{\pi}_{-1}(t) = 0, \qquad \widetilde{\pi}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}$$

pentru polinoamele ortonormale $\widetilde{\pi}_k(t) = \pi_k(t)/\|\pi_k\|$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) Utilizaţi rezultatul de la (a) pentru a deduce formula *Christoffel–Darboux*

$$\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\pi}_k(x)\widetilde{\pi}_k(t) = \sqrt{\beta_{n+1}}\frac{\widetilde{\pi}_{n+1}(x)\widetilde{\pi}_n(t) - \widetilde{\pi}_n(x)\widetilde{\pi}_{n+1}(t)}{x-t}.$$

Problema 106.2 (P)**.** Funcţiile Bessel J_n se definesc prin

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\sin\theta - n\theta\right)d\theta.$$

Arătaţi că $|J_n(x)| \le 1$.

(a) Se ştie că $J_{n+1}(x) = 2nx^{-1}J_n(x) - J_{n-1}(x)$. Utilizaţi această relaţie pentru a calcula $J_0(1)$, $J_1(1)$, …, $J_{20}(1)$, pornind de la valorile cunoscute $J_0(1) \approx 0.7651976865$ şi $J_1(1) \approx 0.4400505857$. Ţineţi cont de paptul că inegalitatea $|J_n(x)| \le 1$ este încălcată.

(b) O altă relaţie de recurenţă este $J_{n-1}(x) = 2nx^{-1}J_n(x) - J_{n+1}(x)$. Pornind de la valorile cunoscute $J_{20}(1) \approx 3.873503009 \times 10^{-25}$ şi $J_{19}(1) \approx 1.548478441 \times 10^{-23}$, utilizaţi această relaţie pentru a calcula $J_{18}(1)$, $J_{17}(1)$, …, $J_1(1)$, $J_0(1)$. Analizaţi rezultatele.

107 Calcul numeric

Problema 107.1. Dându-se numărul natural n, fie $\xi = \xi(a)$ rădăcina pozitivă unică a ecuaţiei $x^n = ae^{-x}$ ($a > 0$). Determinaţi condiţionarea în funcţie de a; simplificaţi rezultatul cât mai mult posibil. În particular, arătaţi că $(\mathrm{cond}\ \xi)(a) < 1/n$.

Problema 107.2 (P)**.** *Funcţia lui Lebesgue* pentru sistemul de noduri $(x_j)_{j=\overline{0,m}}$ din $[a,b]$ se defineşte prin

$$\lambda(x) = \sum_{j=0}^{m} |\ell_j(x)|,$$

unde ℓ_j sunt polinoamele fundamentale Lagrange, iar cantitatea

$$\Lambda = \sup_{x\in[a,b]} \lambda(x)$$

se numeşte *constanta lui Lebesgue*.

(a) Să se repezinte grafic $\lambda(x)$ şi să se calculeze Λ pentru noduri echidistante în $[-1,1]$ şi $m = 4, 8, 12, 30$.

(b) Să se repezinte grafic $\lambda(x)$ şi să se calculeze Λ pentru noduri Cebîşev de speţa a doua în $[-1,1]$ şi $m = 4, 8, 12, 100$.

(c) Comentaţi rezultatele obţinute.

108 Calcul numeric

Problema 108.1. Fie $f(x) = (1+a)^x$; $|a| < 1$. Arătaţi că $(L_n f)(x; 0, 1, \dots n)$ este trunchierea (suma parţială) a seriei binomiale a lui f la $n+1$ termeni. (Indicaţie: utilizaţi forma Newton a polinomului de interpolare.)

Problema 108.2 (P)**.** Nu există nici o metodă elegantă de a calcula

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

Metoda "forţei brute" împarte integrala în trei părţi: de la $x = 0$ la 0.01, de la 0.01 la 0.2 şi de la $x = 0.02$ to $\pi/2$. Pentru prima parte utilizăm aproximarea $\sin x \approx x$, care ne permite să obţinem integrala analitic. Celelalte părţi se pot calcula cu o cuadratură Gauss–Legendre. Utilizaţi această metodă pentru a aproxima I cu şase zecimale.

109 Calcul numeric

Problema 109.1. (a) (T) Metoda lui Newton se poate aplica şi pentru funcţii complexe utilizând valori de pornire complexe şi aritmetică complexă. De asemenea, se poate aplica şi ecuaţiei $f(z) = g(x,y) + ih(x,y)$, unde $f(z)$ este o funcţie analitică în variabila complexă $z = x + iy$ (x şi y reale) şi $g(x,y)$ şi $h(x,y)$ sunt funcţii reale de variabilele x şi y. Derivata $f'(z)$ este dată de $f'(z) = g_x + ih_x = h_y - ig_y$, datorită condiţiilor Cauchy-Riemann $g_x = h_y$ şi $h_x = -g_y$. Semnificaţia notaţiilor este $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = \frac{\partial g}{\partial y}$, $h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$, $h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$. Arătaţi că metoda lui Newton

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

se poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{gh_y - hg_y}{g_x h_y - g_y h_x}, \qquad y_{n+1} = y_n - \frac{hg_x - gh_x}{g_x h_y - g_y h_x}.$$

Toate funcţiile se evaluează în $z_n = x_n + iy_n$.

(b) (P) Determinaţi rădăcinile complexe ale ecuaţiilor

$$\begin{array}{ll} z^3 - z - 1 = 0, & z^4 - 2z^3 - 2iz^2 + 4iz = 0, \\ 2z^3 - 6(1+i) - 6(1-i) = 0, & z = e^z, \end{array}$$

aplicând direct metoda lui Newton şi folosind punctul (a).

110 Calcul numeric

Problema 110.1. Arătaţi că dacă A este simetrică şi admite o factorizare LU, atunci A are o factorizare $A = LDL^T$, unde D este diagonală. Este rezultatul valabil pentru o matrice hermitiană? Deduceţi de aici existenţa factorizării Cholesky dacă A este simetrică (hermitiană) şi pozitiv definită.

Problema 110.2 (P)**.** O grindă uniformă formează arcul de cantilever (grindă încastrată) AB (figura 8). Se poate arăta că deplasamentul vertical al lui A datorat forţei P este

$$\delta_A = \frac{Pb^3}{EI} C\left(\frac{h}{b}\right),$$

unde EI este rigiditatea grindei şi

$$C\left(\frac{h}{b}\right) = \int_0^1 z^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{b} z\right)^2}\, dz.$$

Scrieţi un program care calculează $C(h/b)$ pentru orice valoare dată a lui h/b. Utilizaţi programul pentru a calcula $C(0.5)$, $C(1.0)$ şi $C(2.0)$.

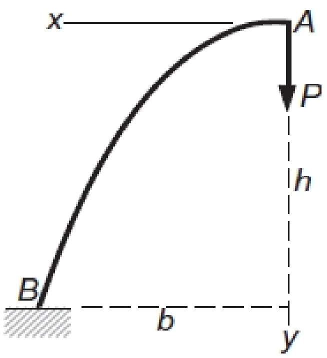

Figura 8: Cantilever semiparabolic

111 Calcul numeric

Problema 111.1. Se consideră sistemul

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

Arătaţi cum se poate rezolva sistemul mai eficient utilizând submatrice în locul sistemului întreg. Daţi o estimare a costurilor în ambele abordări (submatrice şi global). Daţi un exemplu numeric când toate submatricele sunt 2×2.

Problema 111.2 (P)**.** Aproximaţi

$$\int_1^\pi \frac{\ln x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

cu 8 zecimale exacte folosind o cuadratură Gauss-Legendre. Aproximaţi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$$

cu 9 zecimale exacte, folosind o cuadratură Gauss-Cebîşev.

112 Calcul numeric

Problema 112.1. (a) Utilizaţi formula $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ pentru polinoame Cebîşev şi arătaţi că

$$\int T_j(x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos\left((j+1)\arccos x\right)}{j+1} - \frac{\cos\left((j-1)\arccos x\right)}{j-1}\right] + C$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{T_{j+1}(x)}{j+1} - \frac{T_{j-1}(x)}{j-1}\right] + C, \qquad j = 2, 3, \ldots,$$

unde C este o constantă arbitrară.

(b) Fie $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$. Utilizaţi partea (a) împreună cu relaţiile $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ pentru a determina coeficienţii $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}$ astfel încât $\int p(x)dx = \sum_{j=0}^{n+1} A_j T_j(x)$, adică exprimaţi $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}$ în funcţie de $a_0, \ldots, a_n$. (Notă: coeficientul A_0 poate fi arbitrar, pentru a ţine cont de constanta arbitrară din integrala nedefinită.)

(c) Fie acum $q(x) = \sum_{j=0}^{n+1} A_j T_j(x)$. Inversând procesul de la punctul (b), determinaţi coeficienţii $a_0, \ldots, a_n$ astfel încât $q'(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j T_j(x)$, adică exprimaţi $a_0, \ldots, a_n$ în funcţie de $A_0, \ldots, A_n, A_{n+1}$. *Indicaţie*: lucraţi de la indici mari spre indici mici, exprimând a_n în funcţie de A_{n+1}, apoi exprimând a_{n-1} în funcţie de A_n, apoi a_{j-1} în funcţie de A_j şi a_{j+1}, $j = n-1, \ldots, 1$.

Problema 112.2 (P). Calculaţi $\mathrm{cond}_2(H_n)$ pentru $n = 10 : 10 : 100$.

113 Calcul numeric

Problema 113.1. (a) Utilizând formula lui Taylor deduceţi aproximarea

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}\left[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)\right]$$

şi termenul rest.

(b) Deduceţi o aproximare pentru $f'(x)$ cu eroarea $O(h^4)$ folosind formula lui Taylor şi extrapolarea Richardson.

Problema 113.2 (P)**.** Scrieţi o funcţie `CubeRoot(x)` pentru calculul lui $\sqrt[3]{x}$ pentru x real utilizând algoritmul următor. La început, reduceţi argumentul x determinând un număr real r şi un întreg m astfel încât $x = 2^{3m}r$ cu $\frac{1}{8} \leq r < 1$. Apoi, calculaţi x_2 utilizând patru iteraţii ale metodei lui Newton cu

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}\left(x_n + \frac{r}{2x_n^2}\right)$$

cu valoarea de pornire specială

$$x_0 = 2.502926 - \frac{8.045125(r + 0.3877552)}{(r + 4.612244)(r + 0.3877552) - 0.3598496}.$$

Setaţi $\sqrt[3]{x} \approx 2^m x_4$. Testaţi pentru diverse valori ale lui x.

114 Calcul numeric

Problema 114.1. Se consideră aproximarea

$$f''(x) \approx Af(x) + Bf(x+h) + Cf(x+2h).$$

Determinaţi coeficienţii A, B şi C astfel încât gradul de exactitate să fie maxim şi determinaţi eroarea.

Problema 114.2 (P)**.** Scrieţi o rutină ce calculează tangenta lui x în radiani, utilizând algoritmul de mai jos. Testaţi rutina obţinută pentru mai multe valori ale lui x. Întâi, argumentul x se reduce la $|x| \leq \pi/2$ adăugând sau scăzând multiplii de π. Dacă $0 \leq |x| \leq 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\tan x \approx x$. Dacă $|x| > \pi/4$, facem $u = \pi/2 - x$; altfel, setăm $u = x$. Calculăm acum aproximaţia

$$\tan u \approx u \left(\frac{135135 - 17336.106u^2 + 379.23564u^4 - 1.0118625u^6}{135135 - 62381.106u^2 + 3154.9377u^4 + 28.17694u^6} \right)$$

În final, dacă $|x| > \pi/4$, punem $\tan x \approx 1/\tan u$; dacă $|x| \leq \pi/4$, facem $\tan x \approx \tan u$. Notă: Acest algoritm se obţine din ,,raţionale telescopate" şi fracţii continue gaussiene pentru funcţia tangentă.

115 Calcul numeric

Problema 115.1. Presupunem că se dau valorile lui f şi f' în punctele $x_0 - h$ şi $x_0 + h$ şi că dorim să aproximăm $f'(x_0)$. Găsiţi coeficienţii α şi β astfel încât aproximaţia

$$f'(x_0) \approx \alpha \frac{f'(x_0+h) + f'(x_0-h)}{2} + \beta \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

să aibă precizia $O(h^4)$. *Indicaţie*: Combinaţi dezvoltările Taylor ale lui $f(x_0 + h)$, $f(x_0 - h)$,$f'(x_0 + h)$, $f'(x_0 - h)$ şi eliminaţi termenul dominant al erorii.

Problema 115.2. Calculul unei aproximaţii a lui $\sqrt{x^2 + y^2}$ se poate realiza cu algoritmul Moler-Morison

---

Algorithm 1 Algoritmul Moler-Morison pentru calculul lui $\sqrt{x^2 + y^2}$

---

function $f(x, y)$
$f \leftarrow \max(|x|, |y|)$;
$a \leftarrow \min(|x|, |y|)$;
for $n = 1$ **to** 3 **do**
  $b \leftarrow (a/f)^2$;
  $c \leftarrow b/(4 + b)$;
  $f \leftarrow f + 2cf$;
  $a \leftarrow ca$;
end for
return f
end function

(a) Implementaţi algoritmul în MATLAB si testaţi-l.

(b) De ce nu s-a preferat o implementare ,,directă"? Justificaţi răspunsul cu exemple în MATLAB.

(c) De ce se fac numai trei iteraţii? (Indicaţie: am putea itera până când $2cf$ este suficient de mic şi f nu se mai modifică.)

(d) Folosiţi rutina pentru calculul normei unui vector de dimensiune oarecare.

116 Calcul numeric

Problema 116.1. 1. Arătaţi că dacă $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ şi $h = (b-a)/n$, atunci pentru orice $x \in [a, b]$

$$\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \le \frac{1}{4} h^{n+1} n!.$$

Indicaţie: Se arată că dacă $x_j \le x \le x_{j+1}$

$$|x - x_j|\,|x - x_{j+1}| \le \frac{h^2}{4}.$$

2. Dacă $f \in C^{n+1}[a, b]$ şi $|f^{(n+1)}(x)| \le M$ pe $[a, b]$ şi nodurile sunt echidistante

$$|(R_n f)(x)| \le \frac{1}{4(n+1)} M h^{n+1},$$

unde $h = (b-a)/n$.

Problema 116.2 (P)**.** Se consideră sistemul rar

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & & & & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & & & & & \frac{1}{2} & \\ & -1 & 3 & -1 & & & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \iddots & & & \\ & & & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & & \iddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2} & & & -1 & 3 & -1 & \\ & \frac{1}{2} & & & & & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & & & & & & & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Soluţia exactă este $x = [1, 1, \dots, 1, 1]^T$. Utilizaţi o metodă iterativă pentru a rezolva acest sistem pentru valori crescătoare ale lui n.

117 Calcul numeric

Problema 117.1. Fie A o matrice complexă nesingulară. Verificaţi că

$$\begin{bmatrix} A & A^* \\ -Ai & A^*i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}i \\ A^{*-1} & -A^{*-1}i \end{bmatrix},$$

unde A^* este transpusa conjugată a lui A.

Problema 117.2 (P)**.** (a) Scrieţi o funcţie `SquareRoot(x)` pentru calculul lui $\sqrt{x}$ pentru x pozitiv utilizând algoritmul următor. La început, reduceţi argumentul x determinând un număr real r şi şi un întreg m astfel încât $x = 2^{2m}r$ cu $\frac{1}{4} \leq r < 1$. Apoi, calculaţi x_2 utilizând trei iteraţii ale metodei lui Newton cu

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{r}{x_n}\right)$$

cu valoarea de pornire specială

$$x_0 = 1.27235367 + 0.242693281r - \frac{1.02966039}{1+r}.$$

Apoi, setaţi $\sqrt{x} \approx 2^m x_2$. Testaţi acest algoritm pentru diverse valori ale lui x.

(b) Comparaţi experimental cu metoda cu ordinul de convergenţă 3 dată de

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3r\right)}{3x_n^2 + r}.$$

Utilizaţi aceeaşi reducere a argumentului şi aceeaşi aproximaţie iniţială.

118 Calcul numeric

Problema 118.1. Fie X o matrice pătratică de forma

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

unde A şi D sunt pătratice şi A^{-1} există. Se ştie că X^{-1} există dacă şi numai dacă $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ există. Verificaţi că X^{-1} este dată de

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}.$$

Ca aplicaţie, calculaţi inversele matricelor

$$X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & [2] \end{bmatrix}$$

Problema 118.2 (P)**.** Scrieţi o rutină ce calculează $\sin x$ pentru x în radiani, după algoritmul următor. Întâi, utilizând proprietăţile funcţie sinus, reduceţi rangul astfel încât $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. Apoi, dacă $|x| < 10^{-8}$, punem $\sin x \approx x$; dacă $|x| > \pi/6$, punem $u = x/3$, calculăm $\sin u$ după formula (7) de mai jos şi apoi punem $\sin x \approx \left(3 - 4\sin^2 u\right)\sin u$; dacă $|x| \le \pi/6$, punem $u = x$ şi calculăm $\sin u$ după cum urmează:

$$\sin u \approx u \left[\frac{-\frac{479249}{11511339840}u^6 + \frac{34911}{7613320}u^4 - \frac{29593}{207636}u^2 + 1}{1 + \frac{1671}{69212}u^2 + \frac{97}{351384}u^4 + \frac{2623}{1644477120}u^6} \right]. \tag{7}$$

Testaţi rutina dumneavoastră. *Notă*: Aceasta este aproximarea raţională Padé pentru sinus.

119 Calcul numeric

Problema 119.1. Procedeul Δ^2 al lui Aitken este un instrument pentru accelerarea convergenţei proceselor liniare şi se defineşte prin

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}, \tag{8}$$

unde $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ şi $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$. Fie (x_n) un şir ce converge liniar către α cu constanta de eroare asimptotică c

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} = c, \qquad |c| < 1$$

şi presupunem că $x_n \neq \alpha$, $\forall n$.

(a) Deduceţi procedeul Δ^2 al lui Aitken, presupunând că două rapoarte consecutive în relaţia de mai sus (de exemplu, pentru n şi $n+1$) sunt egale cu c.

(b) Arătaţi că şirul (x'_n) din (8) este bine definit pentru n suficient de mare.

(c) Arătaţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x'_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0,$$

adică convergenţa superliniară.

Problema 119.2 (P, exponenţiala)**.** (a) Scrieţi o rutină ce calculează e^x însumând n termeni ai seriei Taylor până când al $(n+1)$-lea termen t verifică $|t| < \varepsilon$, ε dat. Utilizaţi $1/e^x$ pentru valori negative ale lui x. Testaţi pentru valorile: 0, +1, -1, 0.5, -0.123, -25.5, -1776, 3.14159. Calculaţi eroarea absolută, eroarea relativă şi n pentru fiecare caz, utilizând funcţia exponenţială din sistem pentru valoarea exactă. Nu însumaţi mai mult de 25 de termeni.

(b) Calculul lui e^x se poate reduce la calculul lui e^u pentru $|u| < (\ln 2)/2$. Acest algoritm înlătură puterile lui 2 şi calculează e^u într-un domeniu în care seria converge foarte repede. Se scrie

$$e^x = 2^m e^u,$$

unde m şi u se calculează prin

$$\begin{aligned} z &\leftarrow x/\ln 2; \quad m \leftarrow integer\left(z \pm \tfrac{1}{2}\right) \\ w &\leftarrow z - m; \qquad u \leftarrow w \ln 2 \end{aligned}$$

Aici semnul minus se utilizează dacă $x < 0$ deoarece $z < 0$. Încorporaţi tehnica de reducere în cod.

(c) Scrieţi o rutină care utilizează reducerea de rang $e^x = 2^m e^u$ şi calculează e^u din partea pară a fracţiei continue gaussiene, adică,

$$e^u = \frac{s+u}{s-u} \text{ unde } s = 2 + u^2\left(\frac{2520 + 28u^2}{15120 + 420u^2 + u^4}\right).$$

Testaţi pe datele date la punctul (a).

120 Calcul numeric

Problema 120.1. Să se stabilească formulele

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

derivând formula de interpolare a lui Lagrange.

Problema 120.2. Se consideră problema cu valori pe frontieră

$$y'' = g(x, y, y'), \qquad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta. \tag{9}$$

Ea poate fi discretizată notând $u_k = y(x_k)$ şi înlocuind derivata întâi şi a doua cu formulele din problema 120.1 relative la o grilă de puncte echidistante $x_k = a + \frac{k}{n+1}h$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$, $h = \frac{b-a}{n+1}$. Se ajunge la un sistem neliniar în necunoscutele u_k, $k = 1, \ldots, n$. Concepeţi o metodă de rezolvare aproximativă a problemei (9) bazată pe metoda lui Newton. Aplicaţie: implementaţi metoda în MATLAB şi rezolvaţi problema

$$y'' = yy', \qquad y(0) = 0, y(1) = 1$$

pentru $n = 10, 50, 100$ şi precizia $0.5e-6$. Cum verificaţi corectitudinea programului?

121 Calcul numeric

Problema 121.1. O formulă de cuadratură mai puţin cunoscută, datorată lui Simpson, este

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] + R(f).$$

(a) Deduceţi coeficienţii şi termenul rest.

(b) Explicaţi de ce formula lui Simpson este preferată acestei formule.

(c) Deduceţi formula compusă corespunzătoare.

Problema 121.2. Se consideră sistemul rar

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & & & & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & & & & & \frac{1}{2} & \\ & -1 & 3 & -1 & & & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \iddots & & & \\ & & & -1 & 3 & -1 & & & \\ & & & \iddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \frac{1}{2} & & & -1 & 3 & -1 & \\ & \frac{1}{2} & & & & & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & & & & & & & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Soluţia exactă este $x = [1, 1, \ldots, 1, 1]^T$. Utilizaţi o metodă iterativă pentru a rezolva acest sistem pentru valori crescătoare ale lui n.

122 Calcul numeric

Problema 122.1. (a) Deduceţi o formulă Newton-Cotes închisă cu cinci noduri echidistante pe $[-1, 1]$. Care este gradul de exactitate?

(b) Deduceţi o formulă cu cinci noduri Cebîşev de speţa a doua pe acelaşi interval. Comparaţi resturile.

Problema 122.2 (P)**.** Scrieţi o rutină ce calculează $\arcsin x$, bazată pe algoritmul de mai jos, ce utilizează raţionale telescopate pentru arcsinus. Dacă $|x| < 10^{-8}$, setaţi $\arcsin x \approx x$. Altfel, dacă $0 \le x \le \frac{1}{2}$, punem $u = x$, $a = 0$ şi $b = 1$; dacă $\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$ puneţi $u = 2x^2 - 1$, $a = \pi/4$, şi $b = 1/2$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{3} < x \le \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ setaţi $u = 8x^4 - 8x^2 + 1$, $a = 3\pi/8$, şi $b = 1/4$; dacă $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} < x \le 1$, setaţi $u = \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)}$, $a = \pi/2$, şi $b = -2$. Apoi calculaţi aproximanta

$$\begin{aligned}\arcsin u \approx u\Big(&1.0 + \frac{1}{6}u^2 + 0.075u^4 + 0.04464286u^6 + 0.03038182u^8\\ &+ 0.022375u^{10} + 0.01731276u^{12} + 0.01433124u^{14}\\ &+ 0.009342806u^{16} + 0.01835667u^{18} - 0.01186224u^{20}\\ &+0.03162712u^{22}\Big)\end{aligned}$$

În final, se pune $\arcsin x \approx a + b \arcsin u$. Testaţi rutina pentru diverse valori ale lui x.

123 Calcul numeric

Problema 123.1. Se consideră o formulă de cuadratură de forma

$$\int_0^1 x^\alpha f(x)dx \approx Af(0) + B\int_0^1 f(x)dx, \qquad \alpha > -1, \alpha \neq 0.$$

(a) Determinaţi A şi B astfel încât formula să aibă gradul de exactitate $d = 1$.

(b) Fie $R(f)$ funcţionala de eroare pentru regula determinată la punctul (a). Arătaţi cănucleul lui Peano $K_1(t) = R_x((x-t)_+)$ este pozitiv definit pentru $\alpha > 0$ şi negativ definit pentru $\alpha < 0$.

(c) Folosind rezultatele de la punctul (b), determinaţi constanta e_2 din $R(f) = e_2 f''(\xi)$, $0 < \xi < 1$.

Problema 123.2 (P)**.** Scrieţi o rutină care calculează $\arctan x$ pentru x în radiani după cum urmează. Dacă $0 \le x \le 1.7 \times 10^{-9}$, punem $\arctan x \approx x$. Dacă $1.7 \times 10^{-9} < x \le 2 \times 10^{-2}$, se utilizează seria trunchiată

$$\arctan x \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7.$$

Altfel, se pune $y = x$, $a = 0$ şi $b = 1$ dacă $0 \le x \le 1$; se pune $y = 1/x$, $a = \pi/2$ şi $b = -1$ dacă $1 < x$. Apoi punem $c = \pi/16$ şi $d = \tan c$ dacă $0 \le y \le \sqrt{2} - 1$ şi $c = 3\pi/16$ şi $d = \tan c$ dacă $\sqrt{2} - 1 < y \le 1$. Calculăm $u = (y - d)/(1 + dy)$ şi aproximarea

$$\arctan u \approx u\left(\frac{135135 + 171962.46u^2 + 52490.4832u^4 + 2218.1u^6}{135135 + 217007.46u^2 + 97799.3033u^4 + 10721.3745u^6}\right)$$

În final, punem $\arctan x \approx a + b(c + \arctan u)$. Notă: Acest algoritm utilizează ,,raţionale telescopate" şi fracţii continue gaussiene.

124 Calcul numeric

Problema 124.1. Funcţia

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)|$$

se numeşte funcţia lui Lebesgue pentru interpolarea polinomială şi nodurile distincte x_i, $i = 0, 1, \dots, n$.

(a) Dacă $f_i = f(x_i)$ şi $f_i^* = f(x_i) + \varepsilon_i$, unde $|\varepsilon_i| \le \varepsilon$, arătaţi că $|(L_n f^*)(x) - (L_n f)(x)| \le \varepsilon \lambda_n(x)$.

(b) Arătaţi că $\lambda_n(x_j) = 1$, $j = 0, 1, \dots, n$.

(c) Pentru $n = 2$ şi trei puncte echidistante, arătaţi că $\lambda_2(x) \le 1.25$ pentru orice x situat între aceste puncte.

(d) Calculaţi $\lambda_2(x)$ pentru $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = p$, unde $p \gg 1$ şi determinaţi $\max_{1 \le x \le p} \lambda_2(x)$. Cum creşte acest maxim odată cu p? *Indicaţie*: pentru a simplifica calculele, din (b) se obţine că $\lambda_2(x)$ trebuie să fie pe intervalul $[1, p]$ de forma $\lambda_2(x) = 1 + c(x - 1)(p - x)$, unde c este o constantă.

Problema 124.2 (P)**.** Un model simplu de grindă supusă îndoirii la solicitări este dat de ecuaţia diferenţială Euler-Bernoulli. Discretizarea cu elemente finite ne conduce la un sistem de ecuaţii liniare.Pe măsură ce dimensiunea discretizării scade, sistemul devine mai mare şi mai prost condiţionat.

Pentru o grindă fixată la ambele capete se obţine sistemul bandă cu lăţimea benzii 5:

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & \frac{4}{3} & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & \frac{4}{3} & 6 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Membrul drept reprezintă forţele aplicate grinzii. Alegeţi-l astfel ca sa avem o soluţie cunoscută, cum ar fi o încovoiere la mijlocul grinzii. Utilizând o metodă iterativă rezolvaţi repetat sistemul pentru valori crescătoare ale lui n. Creşte eroarea când n creşte? Calculaţi numărul de condiţionare al matricei pentru a explica ce se întâmplă.

125 Calcul numeric

Problema 125.1. (a) Dându-se o funcţie $g(x,y)$ definită pe $[0,1]\times[0,1]$, să se determine un ,,polinom biliniar” $p(x,y) = a + bx + cy + dxy$ astfel încât p să reproducă valorile lui g pe colţurile pătratului unitate.

(b) Utilizaţi (a) pentru a obţine o formulă de cubatură pentru $\int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dxdy$ în care intervin valorile lui g pe cele patru colţuri ale pătratului. La ce formulă se ajunge dacă g depinde numai de x nu şi de y?

(c) Utilizaţi (b) pentru a obţine o formulă de cubatură repetată în care intervin valorile $g_{ij} = g(ih, jh)$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, unde $h = 1/n$.

Problema 125.2 (P)**.** Scrieţi o rutină pentru lui calculul lui $\ln x$ cu ajutorul algoritmului descris în continuare şi bazat pe ,,raţionale telescopate” şi fracţii continue gaussiene şi testaţi pentru câteva valori ale lui x. Verificaţi dacă $x = 1$ şi returnaţi zero în caz afirmativ. Reduceţi rangul lui x determinând n şi r astfel încât $x = r\times 2^n$ cu $\frac{1}{2} \leq r < 1$. Apoi, puneţi $u = (r-\sqrt{2}/2)/(r+\sqrt{2}/2)$ şi calculaţi $\ln[(1+u)/(1-u)]$ cu aproximarea

$$\ln\frac{1+u}{1-u} \approx u\left(\frac{20790 - 21545.27u^2 + 4223.9187u^4}{10395 - 14237.635u^2 + 4778.8377u^4 - 230.41913u^6}\right)$$

valabilă pentru $|u| < 3 - 2\sqrt{2}$. În final, se pune

$$\ln x \approx \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln 2 + \ln\frac{1+u}{1-u}.$$

126 Calcul numeric

Problema 126.1. Se consideră intervalul $[a, b] = [-1, 1]$ şi subdiviziunea sa $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$ şi fie $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$, $x \in [-1, 1]$.

(a) Determinaţi spline-ul cubic natural al lui f pe Δ.

(b) Ilustraţi teorema de minimalitate pentru funcţii spline naturale, alegând $g(x) = (L_2 f)(x; -1, 0, 1)$ şi $g(x) = f(x)$.

(d) Aceeaşi problemă pentru interpolantul cubic natural f pe Δ' şi alegerile $g(x) = (L_3 f)(x; -1, 0, 1, 1)$[1] şi $g(x) = f(x)$.

Problema 126.2 (P)**.** O matrice în forma Hessenberg superioară este o matrice de forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Scrieţi o procedură eficientă pentru rezolvarea unui astfel de sistem si testaţi-o pentru un sistem cu cel putin 20 de ecuaţii.

[1]de fapt este un interpolant Hermite cu nodul dublu 1 şi nodurile -1 si 0 simple.

127 Calcul numeric

Problema 127.1. (a) Să se arate că şirul dat prin relaţia de recurenţă

$$x_{n+1} = x_n + (2 - e^{x_n}) \frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}}}, x_0 = 0, x_1 = 1$$

este convergent şi să se determine limita sa.

(b) Iteraţia din metoda secantei se poate scrie şi sub forma

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Din punct de vedere al erorii, care formă este mai bună în programe, forma aceasta sau forma clasică? Justificaţi riguros raspunsul.

Problema 127.2 (P)**.** Un model simplu de grindă supusă îndoirii la solicitări este dat de ecuaţia diferenţială Euler-Bernoulli. Discretizarea cu elemente finite ne conduce la un sistem de ecuaţii liniare.Pe măsură ce dimensiunea discretizării scade, sistemul devine mai mare şi mai prost condiţionat. Sistemul liniar pentru un cantilever (grindă în consolă) cu condiţii libere la un capăt este

$$\left[\begin{array}{ccccccccc} 12 & -6 & \frac{4}{3} & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & \\ & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\ & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 1 & -\frac{93}{25} & \frac{111}{25} & -\frac{43}{25} \\ & & & & & & \frac{12}{25} & \frac{24}{25} & \frac{12}{25} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{n-3} \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ b_n \end{array}\right].$$

Membrul drept reprezintă forţele aplicate grinzii. Alegeţi-l astfel ca să avem o soluţie cunoscută, cum ar fi o încovoiere la mijlocul grinzii. Utilizând o metodă directă rezolvaţi repetat sistemul pentru valori crescătoare ale lui n. Creşte eroarea când n creşte? Calculaţi numărul de condiţionare al matricei pentru a explica ce se întâmplă. Se poate aplica o metodă iterativă staţionară?

128 Calcul numeric

Problema 128.1. Se consideră formula trapezelor ,,cu valori medii",

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^{1} f(x)\mathrm{d}x\right] + R(f), \quad 0 < \varepsilon < 2.$$

(a) Determinaţi gradul de exactitate al formulei.

(b) Exprimaţi restul cu teorema lui Peno în ipoteza că $f \in C^2[0,1]$.

(c) Arătaţi că nucleul lui Peano păstrează semn constant şi exprimaţi restul sub forma $R(f) = Cf''(\tau)$, $\tau \in (0,1)$.

(d) Consideraţi (şi explicaţi) cazurile limită $\varepsilon \searrow 0$ şi $\varepsilon \to \frac{1}{2}$.

Problema 128.2 (P)**.** Să se rezolve sistemul neliniar

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ e^x + xy - xz = 1 \end{cases}$$

cu metoda lui Newton.

129 Calcul numeric

Problema 129.1 (P). (a) Ce se întâmplă dacă aplicăm metoda lui Newton funcţiei $f(x) = \arctan x$ cu $x_0 = 2$? Pentru ce valori de pornire metoda converge?

(b) În metoda lui Newton se avansează de la x la $x-h$, unde $h = f(x)/f'(x)$. O rafinare uşor de programat este următoarea: dacă $|f(x-h)|$ nu este mai mic decât $|f(x)|$, atunci valoare lui h se respinge şi se utilizează valoarea $h/2$. Testaţi această rafinare.

Problema 129.2. Găsiţi o formulă de cuadratură de forma

$$\int_{-2}^{2} |x| f(x) dx = Af(-1) + B(f(0) + Cf(1) + R(f).$$

130 Calcul numeric

Problema 130.1 (P)**.** (a) Se consideră ecuaţia $e^{-x^2} = \cos x + 1$ pe $[0, 4]$. Ce se întâmplă dacă se aplică metoda lui Newton cu $x_0 = 0$ şi $x_0 = 1$?

(b) Găsiţi rădăcina ecuaţiei $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 - e^x = 0$ cu metoda lui Newton şi $x_0 = 1$. Remarcaţi convergenţa lentă, explicaţi fenomenul şi găsiţi un remediu.

Problema 130.2. Deduceţi o formulă de integrare numerică de forma

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f(x)dx = Af(x_n) + Bf'(x_{n-1}) + Cf''(x_{n+1}) + R(f)$$

unde punctele x_{n-1}, x_n, x_{n+1} sunt echidistate cu distanţa dintre ele h. Formula va avea grad de exactitate cât mai mare posibil. Indicaţie: Consideraţi

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = Af(0) + Bf'(-h) + Cf''(h) + R(f).$$

131 Calcul numeric

Problema 131.1 (P)**.** Utilizaţi formule de cuadratură de tip Gauss pentru a verifica numeric formulele:

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x} dx = -\frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx = \frac{\pi^2}{24}.$$

Problema 131.2. Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a lui $[a,b]$ în $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale funcţie f în punctele x_i, $i = 1,2,\dots,n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1$ va fi un spline cuadratic (de gradul II) care interpolează f pe Δ, adică $s(x_i) = f_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

(a) Explicaţi de ce este nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina s unic.

(b) Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1,2,\dots,n-1$. Determinaţi $p_i := s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1,2,\dots,n-1$ în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i.

(c) Presupunem că $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s unic.) Arătaţi cum pot fi calculate m_2, m_3, …, m_{n-1}.

132 Calcul numeric

Problema 132.1. Fie

$$\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Considerăm problema următoare: dându-se $n-1$ numere f_ν şi $n-1$ puncte ξ_k cu $x_\nu < \xi_\nu < x_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) determinaţi o funcţie spline $s \in \mathbb{S}_1^0(\Delta)$ cu proprietăţile

$$s(\xi_\nu) = f_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots n-1,\ s(x_1) = s(x_n).$$

Reprezentând s în baza B-splinelor de grad 1, B_1, B_2, …, B_n, determinaţi structura sistemului liniar care dă coeficienţii c_j ai lui $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j B_j(x)$. Descrieţi modul de rezolvare eficientă a sistemului.

Problema 132.2 (P)**.** Fie

$$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-k),$$

M_n şi m_n cel mai mare şi cel mai mic maxim relativ al lui $|\omega_n(x)|$. Pentru $n = 5 : 5 : 30$, calculaţi M_n, m_n şi M_n/m_n, utilizând metoda lui Newton şi afişaţi şi numărul maxim de iteraţii.

133 Calcul numeric

Problema 133.1. Aproximând derivatele prin diferenţe centrate

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$
$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

şi considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$, să se rezolve problema bilocală

$$y'' - y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1$$

prin reducere la un sistem liniar, alegând $n = 10, 100, 1000, 10000$

(a) cu o metodă directă;

(b) cu o metodă iterativă.

134 Calcul numeric

Problema 134.1. Se consideră problema bilocală

$$\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(0) &= 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

care descrie mişcarea unghiulară a unui pendul.

(a) Aproximând derivatele prin diferenţe centrate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

şi considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda aproximaţiilor succesive. (Indicaţie: utilizaţi faptul că o matrice simetrică tridiagonală A de dimensiune $n \times n$ cu -2 pe diagonala principală şi -1 pe diagonalele adiacente are o inversă ce satisface $\|A^{-1}\|_\infty \le (n+1)^2/8$.

(b) Implementaţi algoritmul de la (a) în MATLAB.

135 Calcul numeric

Problema 135.1. Se consideră problema bilocală

$$\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(0) &= 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

care descrie mişcarea unghiulară a unui pendul.

(a) Aproximând derivatele prin diferenţe centrate

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \\ f''(x) &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned}$$

şi considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda lui Newton.

(b) Implementaţi algoritmul de la (a) în MATLAB.

136 Calcul numeric

Problema 136.1 (P)**.** Se consideră problema bilocală

$$\begin{aligned} y'' + \sin y &= 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ y(0) &= 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

care descrie mişcarea unghiulară a unui pendul.

(a) Utilizând integratorul MATLAB `ode45` calculaţi soluţia $u(x;s)$ a problemei Cauchy

$$\begin{aligned} u'' + \sin u &= 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \\ u(0) &= 0, \qquad u'(0) = s. \end{aligned}$$

pentru $s = 0.2 : 0.2 : 2$.

(b) Scrieţi cod MATLAB care aplică metoda înjumătăţirii cu toleranţa $0.5e-12$ ecuaţiei $f(s) = 0$, $f(s) = u(1;s) - 1$. Utilizaţi graficele de la punctul (a) pentru a alege valorile de pornire s_0 şi s_1 astfel ca $f(s_0) < 0$, $f(s_1) > 0$. Afişaţi numărul de înjumătăţiri şi valoarea lui s astfel obţinută.

(c) Obţineţi soluţia $y(x) = u(x;s)$ a problemei cu valori pe frontieră şi reprezentaţi-o grafic.

Problema 136.2. Presupunând că f este o funcţie cu o comportare bună, discutaţi modul în care integralele următoare se pot aproxima prin cuadraturi gaussiene standard (adică cu intervale şi ponderi canonice).

(a) $\int_a^b f(x)dx$, $a < b$.

(b) $\int_1^\infty e^{-ax} f(x)dx$, $a > 0$.

(c) $\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx)} f(x)dx$, $a > 0$. (Indicaţie: completaţi un pătrat perfect la exponent)

(d) $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{y+t}dt$, $x > 0$, $y > 0$. Este aproximarea obţinută prea mare sau prea mică? Explicaţi.

137 Calcul numeric

Problema 137.1. (a) Determinaţi un spline cuadratic $s_2(x)$ pe $[-1,1]$ cu un singur nod în $x=0$ astfel ca $s_2(x)\equiv 0$ pe $[-1,0]$ şi $s_2(1)=1$.

(b) Se consideră o funcţie de forma

$$s(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3s_2(x),$$

unde c_i sunt constante şi $s_2(x)$ este definită la punctul (a). Ce fel de funcţie este s? Determinaţi s astfel încât

$$s(-1)=f_{-1},\ s(0)=f_0,\ s'(0)=f_0',\ s(1)=f_1,$$

unde f este o funcţie definită pe $[-1,1]$, iar $f_{-1}=f(-1)$, $f_0=f(0)$, $f_0'=f'(0)$, $f_1=f(1)$.

(c) Ce formulă de cuadratură se obţine dacă se aproximează $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ prin $\int_{-1}^{1} s(x)dx$, unde s este funcţia de la punctul (b).

Problema 137.2. Modelul lui Kepler pentru orbite planetare se bazează pe ecuaţia

$$M=E-e\sin E,$$

unde M este anomalia medie, E este anomalia excentrică, iar e este excentricitatea orbitei. Luaţi $M=24.851090$ şi $e=0.1$.

(a) Rezolvaţi ecuaţia de mai sus cu necunoscuta E folosind metoda lui Newton, metoda secantei şi metoda aproximaţiilor succesive.

(b) Se cunoaşte o formulă exactă pentru E

$$E=M+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}J_m(me)\sin(mM),$$

unde J_m este funcţia Bessel de speţa I de ordin m. Utilizaţi formula de mai sus şi funcţia MATLAB `besselj(m,x)` pentru a calcula E. Câţi termeni sunt necesari? Cum este valoarea lui E calculată în acest mod faţă de valoarea obţinută din ecuaţie.

138 Calcul numeric

Problema 138.1. Fie E o funcţională liniară cu $KerE = d$. Arătaţi că nucleul lui Peano $K_r(t)$, $r \leq d$, al lui E se anulează pentru orice $t \notin [a,b]$, unde $[a,b]$ este intervalul pe care sunt definite funcţiile cărora li se aplică E.

Problema 138.2 (P)**.** Reţelele de utilităţi trebuie să evite îngheţarea conductelor de apă. Dacă presupunem condiţii uniforme de sol, temperatura $T(x,t)$ la adâncimea x faţă de suprafaţă şi momentul t după o răcire bruscă este aproximată prin ecuaţia

$$\frac{T(x,t) - T_s}{T_i - T_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right).$$

Aici T_s este temperatura constantă de la suprafaţă, T_i este temperatura iniţială a solului înainte de răcirea bruscă, iar α este conductivitatea termică a solului. Dacă x este măsurat în metri şi t în secunde, atunci $\alpha = 0.138 \cdot 10^{-6} m^2/s$. Fie $T_i = 20°C$, $T_s = -15°C$. Determinaţi la ce adâncime trebuie îngropată conducta pentru ca să nu îngheţe după cel puţin 60 de zile de expunere la aceste condiţii. Care este adâncimea pentru o iarnă întreagă (în condiţii de climă temperată)?

139 Calcul numeric

Problema 139.1. Arătaţi că o funcţională liniară ce satisface $Ef = e_{r+1}f^{(r+1)}(\overline{t})$, $\overline{t} \in [a,b]$, $e_{r+1} \neq 0$, pentru orice $f \in C^{r+1}[a,b]$, este în mod necesar definită de ordinul r dacă are nucleul Peano K_r continuu.

Problema 139.2 (P)**.** Iată 25 de observaţii, y_k, luate în 25 de puncte echidistante t

```
t = 1:25
y = [ 5.0291 6.5099 5.3666 4.1272 4.2948
6.1261 12.5140 10.0502 9.1614 7.5677
7.2920 10.0357 11.0708 13.4045 12.8415
11.9666 11.0765 11.7774 14.5701 17.0440
17.0398 15.9069 15.4850 15.5112 17.6572]
```

(a) Neteziţi datele cu o dreaptă, $y(t) = \beta_1 + \beta_2 t$ şi afişaţi reziduurile $y(t_k) - y_k$. Se observă că o dată are reziduu mai mare decât altele. Aceasta este o valoare ilegală (outlier).

(b) Eliminaţi oulier-ul şi refaceţi netezirea. Afişaţi din nou reziduurile. Se observă vreun anumit şablon al reziduurilor?

(c) Neteziţi din nou, cu outlier-ul exclus, cu un model de forma

$$y(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 \sin t.$$

(d) Evaluaţi ultima netezire pe o grilă (diviziune) mai fină a intervalului $[0,26]$. Afişaţi curba cu stilul de linie `'-'` şi datele cu `'o'`, Outlier-ul se va marca cu `'*'`.

140 Calcul numeric

Problema 140.1. Fie E o funcţională liniară care se anulează pentru polinoame de grad d. Arătaţi că nici unul din nucleele Peano K_0, K_1, ..., K_{d-1} nu poate fi definit (adică, nu poate păstra semn constant).

Problema 140.2 (P)**.** Un ax metalic circular este utilizat la transmiterea energiei. Se ştie că la anumite viteze unghiulare critice ω, orice trepidaţie a axului va cauza deformări sau curbări. Aceasta este o situaţie periculoasă deoarece axul se poate distruge sub acţiunea forţei centrifuge mari. Pentru a găsi viteza unghiulară critică ω, trebuie să determinăm întâi numărul x care satisface ecuaţia

$$\tan x + \tanh x = 0.$$

Rezolvaţi ecuaţia.

141 Calcul numeric

Problema 141.1. (a) Găsiţi o formulă de tipul

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx = a_1 f(0) + a_2 \int_0^1 f(x)dx + R(f),$$

unde $f \in C^2[0,1]$.

(b) Dacă f este doar de clasă $C^1[0,1]$

b1. Deduceţi o reprezentare adecvată de tip Peano a lui $R(f)$.

b2. Obţineţi o estimare de forma $|Ef| \le c_0 \|f'\|_\infty$.

Problema 141.2 (P)**.** Aproximaţi arcsin pe intervalul $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ printr-un polinom de interpolare de grad 15. Determinaţi precizia aproximării teoretic şi prin teste numerice. Utilizaţi noduri echidistante. Scrieţi o funcţie pentru arcsin folosind polinomul de la punctul precedent. Utilizaţi formula

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

dacă $|x| > 1/\sqrt{2}.$

142 Calcul numeric

Problema 142.1. Deduceţi o metodă de rezolvare numerică a ecuaţiei $f(x) = 0$, bazată pe interpolarea Lagrange inversă de ordinul II. (Indicaţie: Fie g inversa lui f. $f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha = g(0)$, şi se aproximează $g(0)$ prin polinomul de interpolare Lagrange de grad II, $(L_2 g)(0)$, de preferat în forma Newton.

Problema 142.2. (a) Implementaţi algoritmul Van Wijngaarden-Dekker-Brent în MATLAB. Ce legătură este cu problema precedentă?

(b) Rezolvaţi ecuaţiile $\sin \pi x = 0$ şi $J_0(x) = 0$, unde J_0 este funcţia Bessel de speţa I şi ordinul 0 (`besselj(0,x)` în MATLAB) pe intervalul $[0, \pi]$ utilizând metoda lui Newton şi metoda de la (a). Ce se observă?

143 Calcul numeric

Problema 143.1. Determinaţi A, B, C, D astfel încât formula

$$\int_{-h}^{h} f(t)dt = Af(-h) + Bf(0) + Cf(h) - hDf'(h) + R(f)$$

să aibă grad de exactitate cât mai mare posibil. Daţi expresia restului în acest caz.

Problema 143.2 (P). (a) Implementaţi metoda hibridă Newton-înjumătăţire în MATLAB.

(b) Rezolvaţi ecuaţiile $\sin 2\pi x = 0$ şi $J_0(x) = 0$ pentru $x_0 = \frac{501\pi}{1000}$, unde J_0 este funcţia Bessel de speţa I şi ordinul 0 (`besselj(0,x)` în MATLAB) cu metoda lui Newton şi apoi cu metoda de la punctul (a). Comentaţi comportarea metodelor şi avantajele şi dezavantajele fiecăreia pentru problemele rezolvate aici.