Problema 9.5 Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2-9y^2=36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Aducem ecuația dată la forma specifică a paraboloidului hiperbolic: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

$$4x^2-9y^2=36z \quad |:36$$

$$\frac{4x^2}{36}-\frac{9y^2}{36}=z$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z \quad |\cdot 2$$

$$\frac{2x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=2z$$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}}-\frac{y^2}{2}=2z$$ - ecuația paraboloidului hiperbolic

Rescriem ecuația paraboloidului hiperbolic sub forma:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z\cdot 1$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=2z\cdot 1$$

$$\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=2z\cdot 1$$

Pornind de la această ecuație, putem obține o familie de drepte:

$$\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\mu\cdot z\\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\lambda\end{cases}$$

, unde λ, μ parametrii reali ce nu se anulează simultan

$$\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=2\mu\cdot z\\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{2}}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=\lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}}-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=2\mu\cdot z\\ \mu\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right)=\lambda\end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) = 2\mu \cdot z \\ \mu \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) = \lambda \end{cases} \quad +$$

$$\lambda \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) + \mu \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right) = 2\mu z + \lambda$$

$$\lambda \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) - \lambda = 2\mu z - \mu \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\lambda \left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \mu \left(2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \right) \Bigg| \cdot \frac{1}{2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}}$$

$$\lambda \, \frac{\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - 1}{2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}} = \mu$$

Considerând $\lambda = 1$ și știind că $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$ aparține generatoarelor rectilinii obținem:

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{2 - \frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{2}{\sqrt{2}}} = \mu$$

$$\frac{2 - \frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{\cancel{2} - \cancel{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}} = \mu$$

$$\frac{{}^{\sqrt{2})}1 - \frac{2}{\sqrt{2}}}{-\frac{2}{\sqrt{2}}} = \mu$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}-2}{\cancel{\sqrt{2}}}}{-\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}} = \mu$$

$$\frac{-(\sqrt{2}-2)}{2} = \mu$$

$$\mu = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

Înlocuim în prima ecuație λ și μ:

$$\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = \cancel{2}z \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{3} - \frac{y}{\sqrt{2}} = z(2-\sqrt{2}) \Big| \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{2x}{3} - y = z\sqrt{2}(2-\sqrt{2})$$

$$\frac{2x}{3} - {}^{3)}y = {}^{3)}z(2\sqrt{2}-2)$$

$$2x - 3y = 3z(2\sqrt{2}-2)$$

$$2x - 3y = 6z(\sqrt{2}-1)$$

Înlocuim în cea de-a doua ecuația λ și μ:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}$$

În același mod demonstrăm:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta \cdot z \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha \end{cases}$$, unde α, β parametrii reali

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 2\beta \cdot z \\ \beta\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \alpha \end{cases} \quad +$$

$$\alpha\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \beta\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 2\beta \cdot z + \alpha$$

$$\alpha\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) - \alpha = 2\beta \cdot z - \beta\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\alpha\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1\right) = \beta\left(2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) \Big| \cdot \frac{1}{2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}}$$

$$\alpha \frac{\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 1}{2z - \frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}}} = \beta$$

Considerând $\alpha = 1$ și știind că $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$ aparține generatoarelor rectilinii obținem:

$$\frac{\frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{2 - \frac{3\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2}}} = \beta$$

$$\frac{2 + \frac{2}{\sqrt{2}} - 1}{\cancel{2} - \cancel{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}} = \beta$$

$$\frac{1 + \frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = \beta$$

$$\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}}{\frac{2}{\cancel{\sqrt{2}}}} = \beta$$

$$\beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Înlocuim în prima ecuație α și β:

$$\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \cancel{2}z \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

$$\frac{x\sqrt{2}}{3} + \frac{y}{\sqrt{2}} = z(2+\sqrt{2}) \mid \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{2x}{3} + {}^{3)}y = {}^{3)}z(2\sqrt{2}+2)$$

$$2x + 3y = 6z(\sqrt{2}+1)$$

Înlocuim α și β în a doua ecuație:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic sunt:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6z(\sqrt{2}+1) \\ \dfrac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2+\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6z(\sqrt{2}-1) \\ \dfrac{x}{\frac{3}{\sqrt{2}}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}} \end{cases}$$