6.13.

Considerăm 3 plane date prin ecuațiile lor generale.

$$\begin{cases} (P_1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (P_2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ (P_3)\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

și $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ determinantul sistemului

$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ matricea sistemului și $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ matricea extinsă a sistemului

și $\vec{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ $\vec{n_2}(A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n_3}(A_3, B_3, C_3)$ vectori normali la cele 3 plane.

Avem situațiile:

(a) $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistem comp. determinat $\Rightarrow$ planele se intersectează într-un singur punct.

(b) $\Delta = 0$; $rg\, m = 2$; $rg\, M = 3$ și vectori necoliniari doi câte doi. $\Rightarrow$ planele sunt, două câte două, neparalele. Se intersectează după câte o dreaptă.

(c) $rg\, m = 2$; $rg\, M = 3$; dar ~~doi~~ vectori normali sunt coliniari $\Rightarrow$ Două din cele trei plane sunt paralele (cele cu vectorii normali paraleli, iar a treia le intersectează pe amândouă).

(d) $rg\, m = 2$ $rg\, M = 2$, vectori normali 2 câte 2 necoliniari $\Rightarrow$ planele sunt 2 câte 2 distincte și trec prin aceeași dreaptă.

(e) $rg\, m = 2$ $rg\, M = 2$, 2 vectori normali coliniari $\Rightarrow$ două plane coincid iar al treilea le intersectează după o dreaptă.

(f) $rg\, m = 1$ $rg\, M = 3$ $\Rightarrow$ nu se intersectează, sunt paralele

(g) $rg\, m = 1$ $rg\, M = 2$ $\Rightarrow$ 2 plane coincid iar al 3-lea e paralel cu ele.

(h) $rg\, m = 1$ $rg\, M = 1$ $\Rightarrow$ toate cele 3 plane coincid!

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 7 = 0 & \Rightarrow \vec{n_1}(2, -4, 4) \\ x + 3y + 2z - 5 = 0 & \Rightarrow \vec{n_2}(1, 3, 2) \\ -3x + 6y - 6z - 5 = 0 & \Rightarrow \vec{n_3}(-3, 6, -6) \end{cases}$$

Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 6 \cdot (-6 + 4 + 2 + 6 - 4 - 4) = 6 \cdot 0 = 0$

$\boxed{\Delta = 0} \Rightarrow rg\, m \leq 2$

$$m = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ -3 & 6 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Găsim $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6+4 = 10 \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{rg\, m = 2}$

și $\Delta_1' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \\ -3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -30 - 42 \cancel{-60} - 63 \cancel{+60} - 20$

$= -50 - 105 = -155 \neq 0 \Rightarrow \boxed{rg M = 3}$

Avem $\vec{n_1}(2,-4,4)$ $\vec{n_3}(-3,6,-6)$

$$\frac{2}{-3} = \frac{-4}{6} = \frac{4}{-6}$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ vectorii normali $\vec{n_1}$ și $\vec{n_2}$ sunt coliniari

Deci, (C) $\Rightarrow$ planele $(P_1): 2x-4y+4z-7=0$

și $(P_3): -3x+6y-6z-5=0$ sunt paralele

și sunt intersectate de planul $(P_2): x+3y+2z-5=0$