# Curs 13

## Grafuri euleriene și grafuri hamiltoniene. Colorarea grafurilor. Polinoame cromatice

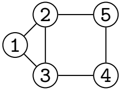
21 decembrie 2018

# Grafuri euleriene

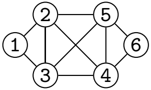
Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat.

- O cale euleriană este o cale care conține fiecare muchie a lui $G$ o singură dată.
- Un ciclu eulerian este un ciclu care conține fiecare muchie a lui $G$ o singură dată.
- $G$ este graf eulerian dacă are un ciclu eulerian.

**Exemple:**

1. 

nu este graf eulerian (de ce?)
are calea euleriană `(2,5,4,3,1,2,3)`

2. 

este graf eulerian:
`(2,3,1,2,4,5,3,2,5,6,4,3,2)` este ciclu eulerian

3. Orice graf ciclic $C_n$ cu $n \geq 3$ este eulerian.
4. Nici un graf $P_n$ cu $n \geq 2$ nu este eulerian.

# Grafuri euleriene

## Cum recunoaștem grafurile euleriene?

**Teorema de caracterizare a grafurilor euleriene**

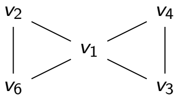
Pentru un graf conex $G = (V, E)$, afirmațiile următoare sunt echivalente:

1. $G$ este graf eulerian.
2. Fiecare nod al lui $G$ are grad par.
3. Muchiile lui $G$ pot fi partiționate în cicluri care nu au muchii în comun.

DEMONSTRAŢIA LUI $1 \Rightarrow 2$: Presupunem că

- ▷ $G$ este Eulerian $\Leftrightarrow \exists$ un ciclu care conține toate muchiile lui $G$

De exemplu, $(v_1, v_3, v_4, v_1, v_2, v_6, v_1)$ este un ciclu al grafului




$\deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(v_4) = \deg(v_6) = 2$
$\deg(v_1) = 4$

Ori de câte ori ciclul eulerian intră în un nod $v$ pe o muchie, trebuie să plece din acel nod pe altă muchie. Deoarece nici o muchie nu apare de 2 ori în ciclu, nr. de muchii incidente la $v$ este par $\Rightarrow \deg(v)$ este par.

# Grafuri euleriene

## Demonstrație a Teoremei de Caracterizare (continuare)

DEMONSTRAŢIA LUI $2 \Rightarrow 3$: Presupunem că fiecare nod al lui $G$ are grad par. Gândim inductiv după numărul de cicluri disjuncte ale lui $G$.

$G$ nu are noduri de grad 1 $\Rightarrow$ $G$ nu este arbore $\Rightarrow$ $G$ are cel puțin un ciclu $C_{n_1}$.
Fie $G'$ graful produs din $G$ prin eliminarea muchiilor lui $C_{n_1}$ $\Rightarrow$ toate nodurile lui $G'$ au grad par $\Rightarrow$ se deduce recursiv că $G'$ poate fi partiționat în cicluri disjuncte $C_{n_2}, \ldots, C_{n_k}$.

Rezultă că $C_{n_1}, C_{n_2}, \ldots, C_{n_k}$ este o partiție a lui $G$ în cicluri (cu muchii) disjuncte.

DEMONSTRAŢIA LUI $3 \Rightarrow 1$: evident.

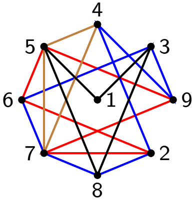
# Detecția ciclurilor euleriene
## Algoritmul lui Hierholzer

**Se dă:** un graf eulerian $G = (V, E)$

**Sa caută** un ciclu eulerian al lui $G$.

1. Se identifică un circuit $R_1$ al lui $G$ și se marchează muchiile lui $R_1$. Fie $i = 1$.
2. Dacă $R_i$ conține toate muchiile lui $G$, stop: $R_i$ este Eulerian.
3. Dacă $R_i$ nu conține toate muchiile lui $G$, fie $v_i$ un nod al $R_i$ incident la o muchie nemarcată $e_i$.
4. Se construiește un ciclu de muchii nemarcate $Q_i$, pornind de la nodul $v_i$ de-a lungul muchiei $e_i$. Se marchează muchiile lui $Q_i$.
5. Se crează un ciclu nou $R_{i+1}$ înlănțuind $Q_i$ în $R_i$ la nodul $v_i$.
6. Se incrementează $i$ cu 1 și se revine la pasul (2).

# Detecția ciclurilor euleriene
## Algoritmul lui Hierholzer: exemplu ilustrat




Cicluri:
$Q_1 = (3, 6, 7, 8, 2, 4, 9, 3)$
$Q_2 = (3, 8, 5, 1, 3)$
$Q_3 = (6, 2, 7, 9, 5, 6)$
$Q_4 = (4, 5, 7, 4)$

- Primele 2 cicluri au nodul comun 3 ⇒ ciclul $R_2 = (3, 8, 5, 1, 3, 6, 7, 8, 2, 4, 9, 3)$
- $R_2$ are nodul 6 în comun cu al 3-lea ciclu ⇒ ciclul $R_3 = (3, 8, 5, 1, 3, 6, 2, 7, 9, 5, 6, 7, 8, 2, 4, 9, 3)$
- $R_3$ are nodul 4 în comun cu a 4-lea ciclu ⇒ ciclul eulerian $R_4 = (3, 8, 5, 1, 3, 6, 2, 7, 9, 5, 6, 7, 8, 2, 4, 5, 7, 4, 9, 3)$

# Detecția căilor euleriene

Întrebare: Cum detectăm dacă un graf conține o cale euleriană?

# Detecția căilor euleriene

Întrebare: Cum detectăm dacă un graf conține o cale euleriană?

Răspuns: Se observă că:

- Un graf eulerian conține un o cale euleriană deoarece orice ciclu eulerian este și cale euleriană.
- **Există grafuri ne-euleriene care conțin căi euleriene.**

# Detecția căilor euleriene

Întrebare: Cum detectăm dacă un graf conține o cale euleriană?

Răspuns: Se observă că:

- Un graf eulerian conține un o cale euleriană deoarece orice ciclu eulerian este și cale euleriană.
- **Există grafuri ne-euleriene care conțin căi euleriene.**

## Observație

Un graf conex $G$ conține o cale euleriană dacă și numai dacă are cel mult 2 noduri cu grad impar.

# Grafuri hamiltoniene

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat.

- O cale hamiltoniană este o cale care conține fiecare nod a lui $G$ o singură dată.
- Un ciclu hamiltonian este un ciclu care trece prin fiecare nod a lui $G$ o singură dată.
- $G$ este traversabil dacă conține o cale hamiltoniană.
- $G$ este graf hamiltonian dacă are un ciclu hamiltonian.

**Observații:**

1. Toate grafurile hamiltoniene sunt traversabile.
2. Există grafuri traversable care nu sunt hamiltoniene; De exemplu, $P_3$.

# Detecția grafurilor hamiltoniene

- Nu se cunosc condiții necesare și suficiente de caracterizare a grafurilor hamiltoniene.
- Se cunosc condiții suficiente pentru ca un graf să fie sau să nu fie hamiltonian:
    1. Teorema lui Dirac
    2. Teorema lui Dirac generalizată
    3. Teorema lui Chvátal și Erdös
    4. Teorema Goodman și Hedetniemi
    5. Teorema lui Duffus, Gould și Jacobson

    ...

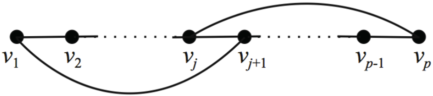
# Detecția grafurilor hamiltoniene
## Teorema lui Dirac

**Teorema lui Dirac**

Fie $G$ un graf simplu cu ordinul $n \geq 3$. Dacă $\delta(G) \geq n/2$ atunci $G$ este hamiltonian.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că $G$ satisface condițiile date, însă $G$ nu este hamiltonian. Fie $P = (v_1, \ldots, v_p)$ o cale simplă în $G$ de lungime maximală $\Rightarrow$ toți vecinii lui $v_1$ și ai lui $v_p$ sunt în $P$. Deasemenea, $v_1$ și $v_p$ au cel puțin $n/2$ vecini în $P$ fiindcă $\delta(G) \geq n/2$.

Demonstrăm că $\exists j \in \{1, \ldots, p-1\}$ astfel încât $v_j \in N(v_p)$ și $v_{j+1} \in N(v_1)$. Dacă n-ar fi așa, atunci pentru fiecare vecin $v_i$ de pe $P$ al lui $v_p$ (reținem că sunt $\geq n/2$ astfel de $v_i$), $v_{i+1}$ **nu** este vecin al lui $v_1$. Ar rezulta că $\deg(v_1) \leq p - 1 - \frac{n}{2} < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, contradicție cu faptul că $\delta(G) \geq n/2$. Deci, există un astfel de $j$, pentru care avem situația ilustrată în figura de mai jos:



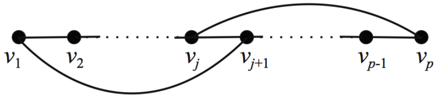
# Detecția grafurilor hamiltoniene

## Teorema lui Dirac (continuare)

### Teorema lui Dirac

Fie $G$ un graf simplu cu ordinul $n \geq 3$. Dacă $\delta(G) \geq n/2$ atunci $G$ este hamiltonian.

DEMONSTRAŢIE. (CONTINUARE)




Fie $C$ ciclul $v_1, v_2, \ldots, v_j, v_p, v_{p-1}, \ldots, v_{j+1}, v_1$. Presupunând că $G$ nu este hamiltonian, există un nod al lui $G$ care nu este în $P$.

- Se observă că, dacă $\delta(G) \geq n/2$ atunci $G$ este conex.

$\Rightarrow$ $G$ are un nod $w$ care nu-i în $P$ și este adiacent la un nod $v_i$ din $P$. Dar atunci calea care pornește cu $w, v_i$ și continuă în jurul ciclului $C$ este mai lungă decât $P$, contradicție.

În concluzie $G$ trebuie să fie graf hamiltonian. $\square$

# Detecția grafurilor hamiltoniene

## Alte criterii și noțiuni auxiliare

### Teorema lui Dirac generalizată

Fie $G$ un graf simplu cu ordinul $n \geq 3$. Dacă $\deg(x) + deg(y) \geq n$ pentru toate perechile de noduri neadiacente $x, y$, atunci $G$ este hamiltonian.

# Detecția grafurilor hamiltoniene

## Alte criterii și noțiuni auxiliare

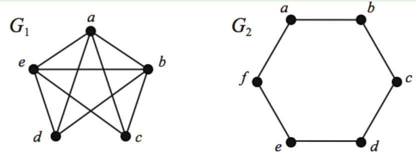
### Teorema lui Dirac generalizată

Fie $G$ un graf simplu cu ordinul $n \geq 3$. Dacă $\deg(x) + deg(y) \geq n$ pentru toate perechile de noduri neadiacente $x, y$, atunci $G$ este hamiltonian.

O mulțime de noduri a unui graf $G$ este independentă dacă nu conține noduri adiacente. Numărul de independență $\alpha(G)$ al unui graf $G$ este mărimea cea mai mare posibilă a unei mulțimi independente a lui $G$.

### Exemplu

Se consideră grafurile




Cea mai mare mulțime independentă a lui $G_1$ este $\{c, d\}$, deci $\alpha(G_1) = 2$. Există 2 mulțimi independente cu mărimea 3 în $G_2$ : $\{a, c, e\}$ și $\{b, d, f\}$, și nici una cu mărimea 4, deci $\alpha(G_2) = 3$.

# Detecția grafurilor hamiltoniene

## Alte criterii și noțiuni auxiliare. Teorema lui Chvátal și Erdös

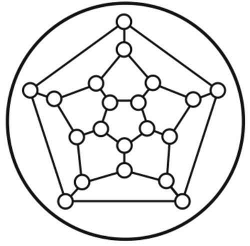
Conectivitatea $\kappa(G)$ unui graf $G$ este este mărimea minimă a unei mulțimi de tăiere a lui $G$. Spunem că $G$ este *k-conectat* dacă $k \leq \kappa(G)$.

**Teoremă (Chvátal și Erdös, 1972)**

Fie $G$ un graf conectat cu ordinal $n \geq 3$, conectivitatea $\kappa(G)$, și numărul de independență $\alpha(G)$. Dacă $\kappa(G) \geq \alpha(G)$, atunci $G$ este hamiltonian.

**Exercițiu (Jocul icosian al lui Hamilton)**

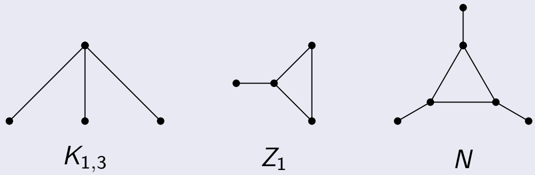
Să se arate că graful ilustrat în cercul de mai jos este hamiltonian.



# Detecția grafurilor hamiltoniene
## Două definiții și trei grafuri speciale

- Date fiind două grafuri $G$ și $H$, spunem că $G$ este liber de $H$ dacă $G$ nu conține subgraful $H$.
- Dacă $S$ este o colecție de grafuri, spunem că $G$ este liber de $S$ dacă $G$ nu conține nici unul din grafurile lui $S$ ca subgraf.

### Trei grafuri speciale



# Detecția grafurilor hamiltoniene
## Alte rezultate

**Teoremă (Goodman și Hedetniemi, 1974)**

*Dacă $G$ este un graf 2-conectat și liber de $\{K_{1,3}, Z_1\}$ atunci $G$ este hamiltonian.*

DEMONSTRAŢIE. Fie $G$ un astfel de graf, și fie $C$ un ciclu de lungime maximă în $G$. Deoarece $G$ este 2-conectat, un astfel de ciclu $C$ există. Demonstrăm că $C$ este ciclu hamiltonian.
Dacă $G$ nu ar fi hamiltonian, ar exista un nod $v$ care nu este în $C$ și care este adiacent la un nod $w$ din $C$. Fie $a$ și $b$ succesorul și predecesorul imediat al lui $w$ în ciclul $C$.

- Dacă $\{a, b\} \cap N(v) \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ un ciclu mai lung decât $C \Rightarrow \{a, b\} \cap N(v) = \emptyset$.
- Dacă $a, b$ nu sunt adiacente atunci subgraful indus de $\{w, v, a, b\}$ este $K_{1,3}$, contradicție cu ipoteza că $G$ este liber de $K_{1,3} \Rightarrow ab$ trebuie să fie muchie în $G$. Însă în acest caz subgraful indus de $\{w, v, a, b\}$ este $Z_1$, contradicție cu ipoteza că $G$ este liber de $Z_1$.

$\Rightarrow C$ este ciclu hamiltonian.

# Detecția grafurilor hamiltoniene
## Alte rezultate

**Teoremă (Duffus, Gould și Jacobson, 1981)**

Fie $G$ un graf liber de $\{K_{1,3}, N\}$.

1. Dacă $G$ este conectat atunci $G$ este traversabil.
2. Dacă $G$ este 2-conectat atunci $G$ este hamiltonian.

# Detecția grafurilor hamiltoniene
## Alte rezultate

**Teoremă (Duffus, Gould și Jacobson, 1981)**

Fie $G$ un graf liber de $\{K_{1,3}, N\}$.

1. Dacă $G$ este conectat atunci $G$ este traversabil.
2. Dacă $G$ este 2-conectat atunci $G$ este hamiltonian.

OBSERVAŢII.

- Ultimele 2 teoreme interzic ca graful $K_{1,3}$ să apară ca subgraf. De obicei, graful $K_{1,3}$ se numește *gheară*, și este un graf interzis să apară în numeroase teoreme din teoria grafurilor.

# Problemă motivantă

Adi, Barbu, Călin, Dan, Eugen, Florin, Gelu și Ion sunt senatori ai unui stat, și fac parte din 7 comitete:

$C_1 = \{\text{Adi, Barbu, Călin}\}$, $C_2 = \{\text{Călin, Dan, Eugen}\}$,
$C_3 = \{\text{Dan,Florin}\}$, $C_4 = \{\text{Adi, Gelu}\}$, $C_5 = \{\text{Eugen, Ion}\}$,
$C_6 = \{\text{Eugen,Barbu,Gelu}\}$, $C_7 = \{\text{Ion, Călin, Florin}\}$.

Fiecare comitet trebuie să fixeze o oră la care să se întâlnească toți membrii săi.

Întrebare: Care este numărul minim de ore ce trebuiesc fixate pentru întâlniri, dacă se știe că nici un membru nu poate participa simultan la două întâlniri fixate la aceeași oră?

# Răspuns la problema motivantă

Observații:

- Două comitete $C_i$ și $C_j$ nu se pot întâlni la aceeași oră dacă și numai dacă au un membru comun (adică $C_i \cap C_j = \emptyset$).

$\Rightarrow$ Putem considera graful neorientat $G$ cu

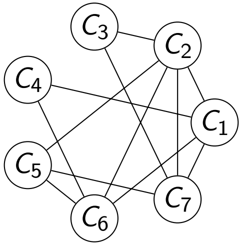
  - noduri = comitetele $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$
  - muchii $\{C_i, C_j\}$ dacă $C_i$ și $C_j$ au un membru comun (adică $C_i \cap C_j \neq \emptyset$)
    $\Rightarrow$ muchiile
    $\{C_1, C_2\}, \{C_1, C_4\}, \{C_1, C_6\}, \{C_1, C_7\}, \{C_2, C_3\}, \{C_2, C_5\}, \{C_2, C_7\}, \{C_3, C_7\}, \{C_4, C_6\}, \{C_5, C_6\}, \{C_5, C_7\}$

- Colorăm fiecare nod $C_i$ cu o culoare care reprezintă ora la care are loc întâlnirea comitetului $C_i$

  $\Rightarrow$ problema se poate reformula astfel: care este numărul minim de culori pentru nodurile lui $G$, astfel încât nici o muchie să nu aibă capetele colorate la fel?

# Răspuns la problema motivantă

$G$ :

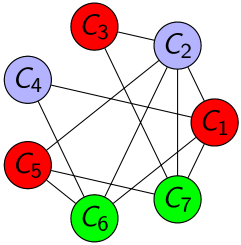



**Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)**

O *k-colorare* a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf $G$ este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o $k$-colorare a lui $G$.

# Răspuns la problema motivantă

$G$ :




$K(C_1) = K(C_3) = K(C_5) = 1$

$K(C_2) = K(C_4) = 2$

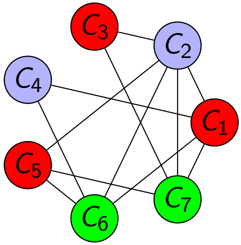
$K(C_6) = K(C_7) = 3$

**Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)**

O *k-colorare* a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf $G$ este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o $k$-colorare a lui $G$.

# Răspuns la problema motivantă

$G$ :




$K(C_1) = K(C_3) = K(C_5) = 1$

$K(C_2) = K(C_4) = 2$

$K(C_6) = K(C_7) = 3$

$\Rightarrow$ nr. minim de date este 3.
(sunt necesare 3 culori)

**Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)**

O $k$-colorare a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \to \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf $G$ este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o $k$-colorare a lui $G$.

# Colorări de noduri
## Polinoame cromatice

Calculul lui $\chi(G)$ este o problemă dificilă (NP-completă).

- Birkhoff ($\approx$ 1900) a descoperit o metodă de calcul al unui polinom $c_G(z)$ pentru orice graf $G$, numit polinomul cromatic al lui $G$, astfel încât
  - $c_G(k) =$ numărul de $k$-colorări ale nodurilor lui $G$

$\Rightarrow$ $\chi(G) =$ valoarea minimă a lui $k$ pentru care $c_G(k) > 0$.

# Colorări de noduri
## Polinoame cromatice

Calculul lui $\chi(G)$ este o problemă dificilă (NP-completă).

- Birkhoff ($\approx$ 1900) a descoperit o metodă de calcul al unui polinom $c_G(z)$ pentru orice graf $G$, numit polinomul cromatic al lui $G$, astfel încât
  - $c_G(k) =$ numărul de $k$-colorări ale nodurilor lui $G$

$\Rightarrow$ $\chi(G) =$ valoarea minimă a lui $k$ pentru care $c_G(k) > 0$.

Vom prezenta

1. formule simple de calcul al lui $c_G(z)$ pentru grafuri speciale $G$.
2. doi algoritmi recursivi de calcul al lui $c_G(z)$ pentru orice graf $G$.

# Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid $E_n$: $v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din $z$ culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$

# Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid $E_n$: $v_1$ $v_2$ $\cdots$ $v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din $z$ culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore $T_n$ cu $n$ noduri:
   - $z$ opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z - 1$ opțiuni pentru colorarea lui

   $\Rightarrow c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1}$ și $\chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$

# Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid $E_n$: $v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din $z$ culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore $T_n$ cu $n$ noduri:
   - $z$ opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z - 1$ opțiuni pentru colorarea lui

   $$\Rightarrow c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$
3. Caz special: graful $P_n$ (cale cu $n$ noduri) este un arbore special cu $n$ noduri: $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$

   $$\Rightarrow c_{P_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = 1, \\ 2 & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

# Polinoame cromatice pentru grafuri speciale

1. Graful vid $E_n$: $v_1$ $v_2$ $\cdots$ $v_n$
   pentru fiecare nod, putem alege oricare din $z$ culori:
   $\Rightarrow c_{E_n}(z) = z^n$ și $\chi(E_n) = 1$
2. Arbore $T_n$ cu $n$ noduri:
   - $z$ opțiuni pentru culoarea rădăcinii
   - orice alt nod poate fi colorat cu orice culoare diferită ce cea a nodului părinte $\Rightarrow z-1$ opțiuni pentru colorarea lui

   $$\Rightarrow c_{T_n}(z) = z\cdot(z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(T_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=1, \\ 2 & \text{dacă } n>1. \end{cases}$$
3. Caz special: graful $P_n$ (cale cu $n$ noduri) este un arbore special cu $n$ noduri: $v_1 - v_2 - \cdots - v_n$

   $$\Rightarrow c_{P_n}(z) = z\cdot(z-1)^{n-1} \text{ și } \chi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n=1, \\ 2 & \text{dacă } n>1. \end{cases}$$
4. Graful complet $K_n$:
   $c_{K_n}(z) = z\cdot(z-1)\cdot\ldots\cdot(z-n+1)$ și $\chi(K_n) = n$.

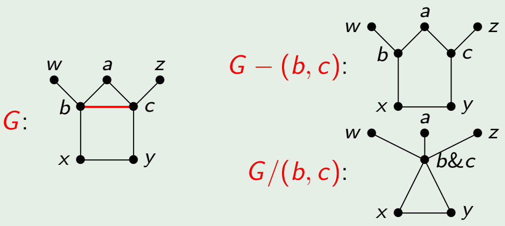
# Calculul polinoamelor cromatice

## Operații speciale asupra unui graf

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $e = (x, y)$ o muchie din $E$

- $G - e$ este graful obținut din $G$ prin eliminarea muchiei $e$
- $G/e$ este graful obținut din $G$ astfel:
    - Se înlocuiesc nodurile $x$ și $y$ cu un singur nod, care se învecinează cu vecinii lui $x$ și ai lui $y$.

### Exemplu



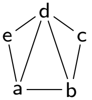
# Calculul polinoamelor cromatice
## Formule de calcul recursiv

Se observă că, pentru orice $e \in E$: $c_G(z) = c_{G-e}(z) - c_{G/e}(z)$
$\Rightarrow$ doi algoritmi de calcul recursiv al polinomului cromatic:

1. Se reduce $G$ eliminând pe rând câte o muchie $e \in E$:
$$c_G(z) = c_{G-e}(z) - c_{G/e}(z)$$
până când se obțin grafuri speciale $E_n$ sau $T_n$:
   - Cazuri de bază: $c_{E_n}(z) = z^n$ și $c_{T_n}(z) = z \cdot (z-1)^{n-1}$
2. Se extinde $G$ adăugând pe rând muchii $e$ care lipsesc din $G$:
$$c_G(z) = c_{\bar{G}}(z) + c_{\bar{G}/e}(z)$$
unde $e$ este o muchie lipsă din $G$, și $\bar{G} = G + e$
   - Caz de bază: $c_{K_n}(z) = z \cdot (z-1) \cdot \ldots \cdot (z-n+1)$

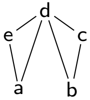
# Calculul polinomului cromatic prin reducere
## Exemplu ilustrat

$G$ :



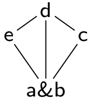

$c_G(z) = c_{G_1}(z) - c_{G_2}(z)$, unde

$G_1$:




$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) - c_{G_{12}}(z)$
unde $G_{11} = G_1 - (b, c)$
și $G_{12} = G_1/(b, c)$

$G_2$:

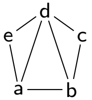



$c_{G_2}(z) = c_{G_{21}}(z) - c_{G_{22}}(z)$
unde $G_{21} = G_2 - (a\&b, c)$
și $G_{22} = G_2/(a\&b, c)$

# Calcului polinomului cromatic prin reducere

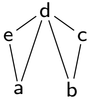
## Exemplu ilustrat

$G$ :



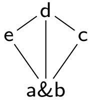

$c_G(z) = c_{G_1}(z) - c_{G_2}(z)$, unde

$G_1$:



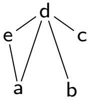

$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) - c_{G_{12}}(z)$
unde $G_{11} = G_1 - (b, c)$
și $G_{12} = G_1/(b, c)$

$G_2$:

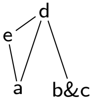



$c_{G_2}(z) = c_{G_{21}}(z) - c_{G_{22}}(z)$
unde $G_{21} = G_2 - (a\&b, c)$
și $G_{22} = G_2/(a\&b, c)$

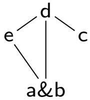
$G_{11}$:



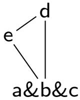

$G_{12}$:




$G_{21}$:




$G_{22}$:




Grafurile următoare sunt izomorfe: $G_{12} \equiv G_{21}$ și $G_{22} = K_3$, deci:

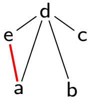
$$c_G(z) = c_{G_{11}}(z) - 2 \cdot c_{G_{12}}(z) + \underbrace{z(z-1)(z-2)}_{c_{K_3}(z)}$$

# Calculul polinomului cromatic prin reducere

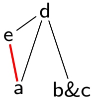
## Exemplu ilustrat (continuare)

$$c_G(z) = c_{G_{11}}(z) - 2 \cdot c_{G_{12}}(z) + z(z-1)(z-2)$$

$G_{11}$:




$G_{12}$:

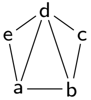



Se observă că

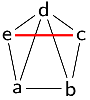
- $c_{G_{11}}(z) = c_{T_5}(z) - c_{T_4}(z) = z(z-1)^4 - z(z-1)^3$
- $c_{G_{12}}(z) = c_{T_4}(z) - c_{T_3}(z) = z(z-1)^3 - z(z-1^2)$

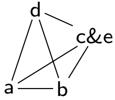
$$\begin{aligned} \Rightarrow c_G(z) = & z(z-1)^4 - z(z-1)^3 - 2(z(z-1)^3 - z(z-1)^2) \\ & + z(z-1)(z-2) \\ & = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z \end{aligned}$$

# Calculul polinomului cromatic prin extindere
## Exemplu ilustrat

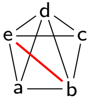
$G$ :


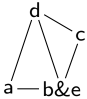

$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z)$, unde

$G_1 = G + (c, e)$ :


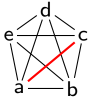

$G_2 = G_1/(c, e)$ :



$c_{G_2}(z) = z(z-1)(z-2)(z-3)$ deoarece $G_2 \equiv K_4$, și

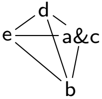
$c_{G_1}(z) = c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)$ unde $G_{11}$ :



$G_{12}$ :



$$c_{G_{11}}(z) = c_{G_{111}}(z) + c_{G_{112}}(z) = c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z)$$ unde

$G_{111}$ :



$G_{111} \equiv K_5$

$G_{112}$ :


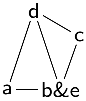

$G_{112} \equiv K_4$

# Calculul polinomului cromatic prin extindere

## Exemplu ilustrat (continuare)

$$
\begin{aligned}
c_G(z) &= c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z) \\
&= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z)
\end{aligned}
$$

unde $G_{12}$ :

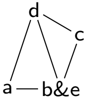


# Calculul polinomului cromatic prin extindere

## Exemplu ilustrat (continuare)

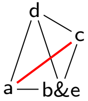
$$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z)$$
$$= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z)$$

unde $G_{12}$ :



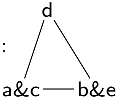

$c_{G_{12}}(z) = c_{G_{121}}(z) + c_{G_{122}}(z) = c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z)$ unde

unde $G_{121}$ :




$G_{121} \equiv K_4$

unde $G_{122}$ :



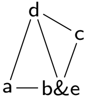

$G_{122} \equiv K_3$

# Calculul polinomului cromatic prin extindere

## Exemplu ilustrat (continuare)

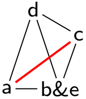
$$c_G(z) = c_{G_1}(z) + c_{G_2}(z) = (c_{G_{11}}(z) + c_{G_{12}}(z)) + c_{K_4}(z)$$
$$= c_{K_5}(z) + c_{K_4}(z) + c_{G_{12}}(z) + c_{K_4}(z)$$

unde $G_{12}$ :



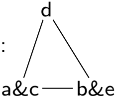

$c_{G_{12}}(z) = c_{G_{121}}(z) + c_{G_{122}}(z) = c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z)$ unde

unde $G_{121}$ :




$G_{121} \equiv K_4$

unde $G_{122}$ :




$G_{122} \equiv K_3$

$$\Rightarrow c_G(z) = c_{K_5}(z) + 3c_{K_4}(z) + c_{K_3}(z) = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z$$

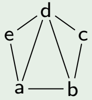
# Proprietăți ale polinomului cromatic

Dacă $G = (V, E)$ este un graf neorientat cu $n$ noduri și $q$ muchii atunci polinomul cromatic $c_G(z)$ satisface condițiile următoare:

- Are gradul $n$.
- Coeficientul lui $z^n$ este 1.
- Coeficienții săi au semne alternante.
- Termenul constant este 0.
- Coeficientul lui $z^{n-1}$ este $-q$.

## Exemplu

$G$ :



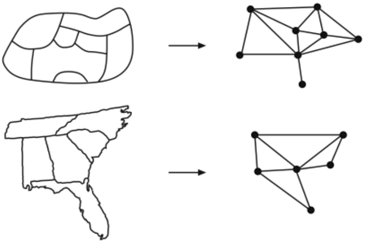

$n = 5, \ q = 7$

$c_G(z) = z^5 - 7\,z^4 + 18\,z^3 - 20\,z^2 + 8\,z$

# Rezultate remarcabile
## Hărți și grafuri planare

- Fiecare țară a unei hărți se reprezintă ca nod al unui graf
- Două noduri se conectează dacă și numai dacă țările respective au o graniță nebanală (mai mult decât un punct)

$\Rightarrow$ graf neorientat $G_H$ corespunzător unei hărți $H$. De exemplu:



# Rezultate remarcabile
## Colorarea hărții cu 4 culori

**Observații:**

1. Un graf $G$ este planar dacă poate fi redesenat astfel încât muchiile să nu i se intersecteze.
2. $H$ este hartă dacă și numai dacă $G_H$ este graf planar.

**Țările unei hărți $H$ pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.**

# Rezultate remarcabile
## Colorarea hărții cu 4 culori

**Observații:**

1. Un graf $G$ este planar dacă poate fi redesenat astfel încât muchiile să nu i se intersecteze.
2. $H$ este hartă dacă și numai dacă $G_H$ este graf planar.

**Țările unei hărți $H$ pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.**

# Rezultate remarcabile
## Colorarea hărții cu 4 culori

**Observații:**

1. Un graf $G$ este planar dacă poate fi redesenat astfel încât muchiile să nu i se intersecteze.
2. $H$ este hartă dacă și numai dacă $G_H$ este graf planar.

**Țările unei hărți $H$ pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.**

1. Una dintre cele mai faimoase teoreme din Teoria Grafurilor
   - Demonstrație extrem de lungă și complexă
   - Problemă propusă in 1858, rezolvată de-abia în 1976 (Appel & Haken)
   - Echivalentă cu faptul că graful planar $G_H$ este 4-colorabil.

# Rezultate remarcabile

## Colorarea hărții cu 4 culori

**Observații:**

1. Un graf $G$ este planar dacă poate fi redesenat astfel încât muchiile să nu i se intersecteze.
2. $H$ este hartă dacă și numai dacă $G_H$ este graf planar.

**Țările unei hărți $H$ pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.**

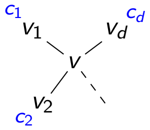
1. Una dintre cele mai faimoase teoreme din Teoria Grafurilor
   - Demonstrație extrem de lungă și complexă
   - Problemă propusă in 1858, rezolvată de-abia în 1976 (Appel & Haken)
   - Echivalentă cu faptul că graful planar $G_H$ este 4-colorabil.
2. Teorema este echivalentă cu afirmația:

$$\chi(G) \leq 4 \text{ pentru orice graf planar } G.$$

# Colorarea hărții cu 5 culori

**Țările unei hărți $H$ pot fi colorate cu 5 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.** sau, echivalent: $\chi(G) \leq 5$ pentru orice graf planar $G$.

DEMONSTRAȚIE: Inducție după $n =$ numărul de noduri din $G$. Teorema este evidentă pt. $n \leq 5$, deci considerăm doar $n \geq 6$. $\delta(G) \leq 5$ datorită consecinței 4, deci $G$ are un nod $v$ cu $\deg(v) \leq 5$. Fie $G'$ graful obținut prin eliminarea lui $v$ din $G \Rightarrow G'$ are $n-1$ noduri, deci $\chi(G') \leq 5$ conform ipotezei inductive. Deci putem presupune că $G'$ are o 5-colorare cu culorile 1,2,3,4,5.
CAZUL 1: $\deg(v) = d \leq 4$. Fie $v_1, \ldots, v_d$ vecinii lui $v$, cu culorile $c_1, \ldots, c_d$.

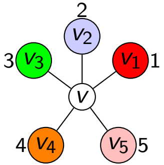



pentru nodul $v$ putem alege orice culoare $c \in \{1,2,3,4,5\} - \{c_1, \ldots, c_d\}$
$\Rightarrow G$ este 5-colorabil.

# Colorarea hărții cu 5 culori
## Continuarea demonstrației

CAZUL 2: $\deg(v) = 5$, deci $v$ are 5 vecini $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ pe care-i presupunem colorați cu culorile $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$.

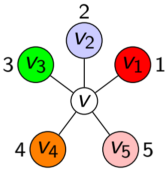
1. Dacă $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, putem să-l colorăm pe $v$ cu orice culoare $c \in \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ $\Rightarrow$ $G$ este 5-colorabil.
2. Dacă $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, putem presupune că $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3, c_4 = 4, c_5 = 5$.



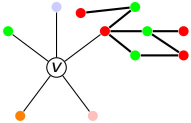

**Idee de bază:** Vom rearanja culorile lui $G'$ pentru a face disponibilă o culoare pentru $v$.

# Colorarea hărţii cu 5 culori

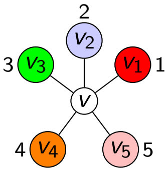
## Continuarea demonstraţiei



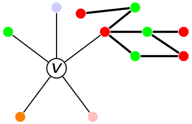

Considerăm toate nodurile lui $G'$ care sunt colorate cu 1 (roşu) şi 3 (verde).
CAZUL 2.1. $G'$ nu are nici o cale de la $v_1$ la $v_3$ colorată doar cu 1 şi 3.
Fie $H$ subgraful lui $G'$ care conţine toate căile ce pornesc din $v_1$ şi sunt colorate doar cu 1 (roşu) şi 3 (verde).



# Colorarea hărții cu 5 culori
## Continuarea demonstrației



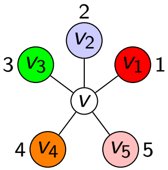

Considerăm toate nodurile lui $G'$ care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. $G'$ nu are nici o cale de la $v_1$ la $v_3$ colorată doar cu 1 și 3.
Fie $H$ subgraful lui $G'$ care conține toate căile ce pornesc din $v_1$ și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).



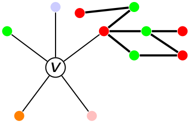

- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici $v_3$ și nici vecinii lui $v_3$ nu sunt noduri din $H$.

# Colorarea hărții cu 5 culori

## Continuarea demonstrației

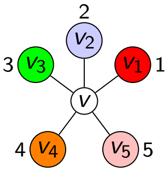



Considerăm toate nodurile lui $G'$ care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. $G'$ nu are nici o cale de la $v_1$ la $v_3$ colorată doar cu 1 și 3.
Fie $H$ subgraful lui $G'$ care conține toate căile ce pornesc din $v_1$ și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

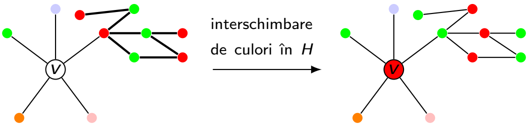



- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici $v_3$ și nici vecinii lui $v_3$ nu sunt noduri din $H$.
- Putem interschimba culorile 1 și 3 în $H$, iar apoi să atribuim culoarea 1 (roșu) lui $v \Rightarrow G$ este 5-colorabil.

# Colorarea hărții cu 5 culori
## Continuarea demonstrației

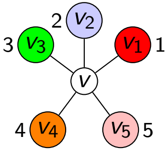



Considerăm toate nodurile lui $G'$ care sunt colorate cu 1 (roșu) și 3 (verde).
CAZUL 2.1. $G'$ nu are nici o cale de la $v_1$ la $v_3$ colorată doar cu 1 și 3.
Fie $H$ subgraful lui $G'$ care conține toate căile ce pornesc din $v_1$ și sunt colorate doar cu 1 (roșu) și 3 (verde).

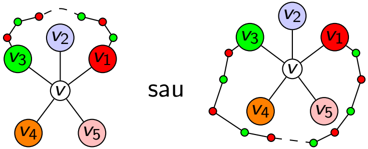



- $V[v_3] \cap V(H) = \emptyset$, adică nici $v_3$ și nici vecinii lui $v_3$ nu sunt noduri din $H$.
- Putem interschimba culorile 1 și 3 în $H$, iar apoi să atribuim culoarea 1 (roșu) lui $v \Rightarrow G$ este 5-colorabil.

# Colorarea hărții cu 5 culori
## Continuarea demonstrației




CAZUL 2.2. $G'$ are o cale de la $v_1$ la $v_3$ colorată doar cu culorile 1 și cu 3 $\Rightarrow$ una din următoarele situații are loc:




În ambele cazuri, nu poate exista o cale de la $v_2$ la $v_4$ colorată doar cu culorile 2 și 4 $\Rightarrow$ cazul 2.1 este aplicabil pentru nodurile $v_2$ și $v_4$ $\Rightarrow$ $G$ este 5-colorabil și în cazul acesta.