CAPITOLUL 1

Probleme rezolvate din seminarul 8

Problema 1.1. (Pb. 8.4) Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$4x-2y+23=0$$

şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Avem $a^2=30$, $b^2=24$. Panta dreptei (care coincide cu panta tangentelor) este egală cu 2. Prin urmare, ecuaţiile celor două drepte paralele cu dreapta dată vor fi

$$y=2x\pm\sqrt{30\cdot 4+24}$$

sau

$$2x-y\pm 12=0.$$

Fie, acum, t_1 şi t_2 cele două tangente:

$$t_1: 2x-y+12=0,$$

$$t_2: 2x-y-12=0.$$

Avem două posibilităţi de a determina distanţa dintre cele două drepte paralele:

- Determinăm un punct M_1 de pe dreapta t_1 şi apoi calculăm distanţa de la acest punct până la dreapta t_2. Dacă, de exemplu, punem, în ecuaţia dreptei t_1, $x=0$, obţinem $y=12$, deci găsim punctul $M_1(0,12)$. Atunci

$$d(M_1,t_2)=\frac{|2\cdot 0-12-12|}{\sqrt{4+1}}=\frac{24}{\sqrt{5}}.$$

- Scriem ecuaţiile celor două tangente sun forma normală (Hesse). Atunci termenii liberi (cu semn schimbat) vor reprezenta distanţele de la origine până la tangente, prin urmare, distanţa dintre cele două tangente este suma distanţelor de la origine până la ele, dacă ele nu sunt de aceeaşi parte a originii (adică originea se află între ele) sau modulul diferenţei distanţelor de la origine la tangente, dacă ele se află de aceeaşi parte a originii.

Avem

$$t_1 : -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0,$$
$$t_2 : \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0.$$

În mod clar, tangentele nu se află de aceeaşi parte a originii, deci avem

$$d(t_1, t_2) = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

□

Problema 1.2. (Pb. 8.6) Din punctul $C\,(10, -8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Soluţie. Observăm că punctul C este situat în afara elipsei şi nu este situat pe una dintre tangentele verticale la aceasta.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia elipsei sub forma

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0, y_0)$ al elipsei se scrie sub forma

$$16xx_0 + 25yy_0 - 400 = 0.$$

Cum tangenta trebuie să treacă prin punctul C, coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia tangentei, prin urmare avem

$$160x_0 - 200y_0 - 400 = 0$$

sau

$$4x_0 - 5y_0 - 10 = 0. \tag{1.0.1}$$

Noi vrem să determinâm coordonatele punctului M_0, prin urmare avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta rezultă din faptul că punctul se află pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia elipsei. Suntem conduşi, aşadar, la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 16x_0^2 + 25y_0^2 - 400 = 0, \\ 4x_0 - 5y_0 - 10 = 0. \end{cases} \tag{1.0.2}$$

Sistemul (1.0.2) are soluţiile

$$x_{01,2} = \frac{5}{4}\left(1 \pm \sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad y_{01,2} = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Aşadar punctele de intersecţie cu elipsa a celor două tangente din C sunt

$$M_1\left(\frac{5}{4}\left(1 - \sqrt{7}\right), -1 + \sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{4}\left(1 - \sqrt{7}\right), -1 - \sqrt{7}\right).$$

Dreapta determinată de punctele de contact este dreapta M_1M_2:

$$\frac{x - \frac{5}{4}\,(1 + \sqrt{7})}{\frac{5}{4}\,(1 - \sqrt{7}) - \frac{5}{4}\,(1 + \sqrt{7})} = \frac{y - (-1 + \sqrt{7})}{-1 - \sqrt{7} - (-1 + \sqrt{7})}$$

sau

$$\frac{x - \frac{5}{4}\left(1+\sqrt{7}\right)}{\frac{5}{2}} = \frac{y-(-1+\sqrt{7})}{2},$$

de unde

$$2x - \frac{5}{2}\left(1+\sqrt{7}\right) = \frac{5}{2}y - \frac{5}{2}\left(-1+\sqrt{7}\right)$$

sau

$$2x - \frac{5}{2}y - 5 = 0$$

sau, în fine,

$$M_1M_2 : 4x - 5y - 10 = 0.$$

$\square$

Problema 1.3. (Pb. 8.7) O elipsă trece prin punctul $A(4,-1)$ şi este tangentă dreptei $x+4y-10=0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sau

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{1.0.3}$$

Trebuie să determinăm semiaxele elipsei. Avem nevoie, deci, de două ecuaţii. Prima o obţinem din condiţia ca punctul A să aparţină elipsei, adică

$$a^2 + 16b^2 = a^2b^2. \tag{1.0.4}$$

Întrucât dreapta dată este tangentă la elipsă, sistemul de ecuaţii care ne dă punctul de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă trebuie să aibă soluţie dublă, deoarece contactul de tangenţă înseamnă că dreapta şi elipsa au două puncte comune confundate. Acest sistem de ecuaţii este

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \\ x + 4y - 10 = 0. \end{cases}$$

Dacă înlocuim pe x din a doua ecuaţie în prima (adică punem în prima ecuaţie $x = -2(2y-5)$), obţinem ecuaţia de gradul doi în y

$$\left(a^2 + 16vb^2\right)y^2 - 80b^2y + b^2(100 - a^2) = 0.$$

Pentru ca sistemul de mai sus să aibă soluţie dublă (mai precis, să furnizeze puncte de contact confundate), discriminantul ecuaţie de gradul doi în y trebuie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$\Delta \equiv 4a^2b^2\left(a^2 + 16b^2 - 100\right) = 0.$$

Dar a şi b sunt semiaxele unei elipse, deci trebuie să fie numere reale strict pozitive, aşadar din condiţia de mai sus obţinem ecuaţia în a şi b

$$a^2 + 16b^2 = 100 \tag{1.0.5}$$

Aşadar, pentru a determina semiaxele elipsei care îndeplineşte cerinţele problemei, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii următor (pe care îl privim ca fiind un sistem în a^2 şi b^2):

$$\begin{cases} a^2 + 16b^2 = a^2b^2, \\ a^2 + 16b^2 = 100. \end{cases} \tag{1.0.6}$$

Sistemul (1.0.6) are soluţiile

$$a^2 = 80,\ b^2 = \frac{5}{4},$$

respectiv

$$a^2 = 20,\ b^2 = 5.$$

Ambele soluţii sunt acceptabile (în sensul că, în ambele situaţii, a^2 şi b^2 sunt numere strict pozitive) şi ne conduc la cele două soluţii ale problemei:

$$\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1,$$

respectiv

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

$\square$

Problema 1.4. (Pb. 8.11) Calculaţi aria triunghiului format de dreapta

$$9x + 2y - 24 = 0.$$

şi de tangentele la hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

în punctele de intersecţie cu dreapta.

Soluţie. Punctele de intersecţie dintre hiperbolă şi dreaptă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0, \\ 9x + 2y - 24 = 0. \end{cases} \tag{1.0.7}$$

Rezolvând sistemul, obţinem punctele

$$M_1\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}, \frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ecuaţia tangentei în M_1 este

$$t_1 : 9\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)x - 4\left(\frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right)y - 36 = 0$$

sau

$$t_1 : 9\left(6+\sqrt{2}\right)x + 2\left(6+9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0,$$

iar ecuaţia tangentei în M_2 este

$$t_2 : 9\left(6-\sqrt{2}\right)x + 2\left(6-9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0.$$

De aici rezultă imediat că cel de-al treilea vârf al triunghiului, în care se intersectează cele două tangente, este $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Prin urmare, aria triunghiului $M_1M_2M_3$ va fi dată de

$$\mathcal{A} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \dfrac{6+\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-6-9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \dfrac{6-\sqrt{2}}{2} & \dfrac{-6+9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{128}\begin{vmatrix} 2(6+\sqrt{2}) & -6-9\sqrt{2} & 4 \\ 2(6-\sqrt{2}) & -6+9\sqrt{2} & 4 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2}.$$

□

Problema 1.5. (Pb 8.15) Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x + 3y - 7 = 0.$$

Soluţie. După cum ştim, tangentele la hiperbolă de pantă k au ecuaţia

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Astfel de tangente există dacă şi numai dacă expresia de sub radical este strict pozitivă:

$$|k| > \frac{b}{a}.$$

În cazul nostru, panta dreptei date este egală cu $-\frac{4}{3}$, deci panta tangentei (care e perpendiculară pe dreapta dată!) trebuie să fie

$$k = \frac{3}{4} > \frac{b}{a} \equiv \frac{1}{2}.$$

Aşadar, ecuaţiile tangentelor de pantă k sunt

$$y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{20 \cdot \frac{9}{16} - 5}$$

sau

$$3x - 4y \pm 10 = 0.$$

□

Problema 1.6. (Pb 8.17) O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x+2y-15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Căutăm, mai întâi, condiţia generală pentru ca o dreaptă de ecuaţie

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangentă unei hiperbole de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1.$$

Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $B \neq 0$. Atunci

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$\left(a^2A^2 - b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(b^2B^2 + C^2\right) = 0.$$

Condiţia de tangenţă impune ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero. Dar

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 - b^2B^2 - C^2\right) = 0.$$

Dar a şi B nu se anulează (ele sunt numere strict pozitive), în timp ce B este diferit de zero prin ipoteză. Prin urmare, dreapta este tangentă hiperbolei dacă şi numai dacă avem

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$$

Ecaxt aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.

În cazul nostru concret, condiţia de mai sus devine

$$81a^2 - 4b^2 = 225.$$

Aceasta este prima ecuaţie pentru determinarea pătratelor semiaxelor. A doua se obţine din condiţia ca punctul M să se afle pe hiperbolă, ceea ce ne conduce la

$$9a^2 - 6b^2 + a^2b^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii, obţinem $a^2 = 10/3$, $b^2 = 45/4$ sau $a^2 = 5$, $b^2 = 45$, de unde rezultă ecuaţiile celor două hiperbole care îndeplinesc condiţiile din enunţul problemei. $\square$

Problema 1.7. (Pb. 8.22) Din punctul $A(5, 9)$ ducem tangente la parabola $y^2 = 5x$. Stabiliţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de tangenţă.

Soluţie. După cum ştim, ecuaţia care ne dă pantele tangentelor duse dintr-un punct exterior $M_1(x_1, y_1)$ la parabola de parametru p este

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

În cazul nostru concret, $x_1 = 5, y_1 = 9, p = 5/2$, deci ecuaţia devine

$$10k^2 - 18k + \frac{5}{2} = 0$$

sau

$$20k^2 - 36k + 5 = 0.$$

Discriminantul ecuaţiei este strict pozitiv (ceea ce înseamnă că A este, într-adevăr, exterior parabolei!) şi obţinem

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{10}.$$

Pe de altă parte, ecuaţia tangentei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al parabolei este

$$yy_0 = \frac{5}{2}\left(x + x_0\right),$$

adică panta tangentei este

$$k = \frac{5}{2y_0},$$

de unde

$$y_0 = \frac{5}{2k},$$

în timp ce, punctul fiind pe parabolă,

$$x_0 = \frac{y_0^2}{5} = \frac{5}{4k^2}.$$

Dacă punem $k = k_1$, obţinem

$$x_{01} = \frac{125}{\left(9 + 2\sqrt{14}\right)^2}, \quad y_{01} = \frac{25}{9 + 2\sqrt{14}},$$

în timp ce pentru $k = k_2$, obţinem

$$x_{02} = \frac{125}{\left(9 - 2\sqrt{14}\right)^2}, \quad y_{02} = \frac{25}{9 - 2\sqrt{14}}.$$

Coarda căutată este dreapta $M_{01}M_{02}$, care are ecuaţia

$$\frac{y - y_{01}}{y_{02} - y_{01}} = \frac{x - x_{01}}{x_{02} - x_{01}}.$$

care după înlocuire ne conduce la ecuaţia:

$$5x - 18y + 25 = 0.$$

□

Problema 1.8. (Pb. 8.24) Scrieţi ecuaţia tangentei la parabola $y^2 = 4ax$ care taie pe axele de coordonate segmente de lungimi egale.

Soluţie. Tangenta la parabola $y^2 = 2px$ are ecuaţia

$$y = kx + \frac{p}{2k},$$

unde p este parametrul parabolei. Pentru parabola dată $p = 2a$, iar ecuaţia tangentei la parabolă este

$$y = kx + \frac{a}{k}.$$

Împărţind totul la $\frac{a}{k}$ şi rearanjând termenii astfel încât ecuaţia tangentei să aibă forma ecuaţiei dreptei prin tăieturi, obţinem

$$\frac{x}{-\frac{a}{k^2}} + \frac{y}{\frac{a}{k}} = 1. \tag{1.0.8}$$

Dreapta (1.0.8) taie pe axele de coordonate segmente de lungimi egale dacă şi numai dacă

$$\left|-\frac{a}{k^2}\right| = \left|\frac{a}{k}\right|,$$

de unde $k = \pm 1$, iar ecuaţiile tangentelor sunt

$$y = \pm x \pm a.$$

□