Subiectul 3

Problema 1 *Considerăm problema de interpolare Hermite: determinaţi* $H_{2n-1}f \in P_{2n-1}$ *astfel încât*

$$\left(H_{2n-1}f\right)(\tau_\nu) = f(\tau_\nu), \quad \left(H_{2n-1}f\right)'(\tau_\nu) = f'(\tau_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad ((*))$$

Prin analogie cu formula lui Lagrange, polinomul care rezolvă (*) se poate scrie cu ajutorul polinoamelor fundamentale de interpolare Hermite $h_{\nu,0}$, $h_{\nu,1}$ *sub forma*

$$\left(H_{2n-1}f\right)(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[h_{\nu,0}(t) f_\nu + h_{\nu,1}(t) f'_\nu\right].$$

(a) Căutaţi $h_{\nu,0}$ *şi* $h_{\nu,1}(t)$ *sub forma*

$$h_{\nu,0}(t)(t) = (a_\nu + b_\nu t)\,\ell_\nu^2(t), \;\; h_{\nu,1}(t)(t) = (c_\nu + d_\nu t)\,\ell_\nu^2(t),$$

unde ℓ_ν *sunt polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange. Determinaţi constantele* a_ν, b_ν, c_ν, d_ν.

(b) Obţineţi formula de cuadratură

$$\int_a^b f(t) w(t) \mathrm{d}\, t = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\lambda_\nu f(\tau_\nu) + \mu_\nu f'(\tau_\nu)\right] + R_n(f)$$

cu proprietatea $R_n(f) = 0$ *pentru orice* $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

(c) Ce condiţii trebuie impuse asupra polinomului nodurilor $\omega_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n}(t - t_\nu)$ *(sau asupra nodurilor* τ_ν*) astfel ca* $\mu_\nu = 0$ *pentru* $\nu = 1, 2, \ldots, n$*?*

Soluţie.

(a) Polinoamele $h_{\nu,0}$ trebuie să verifice

$$h_{\nu,0}(\tau_\nu) = 1, \;\; h'_{\nu,0}(\tau_\nu) = 0,$$

iar condiţiile $h_{\nu,0}(\tau_\mu) = h'_{\nu,0}(\tau_\mu) = 0$, $\mu \neq \nu$, sunt automat verificate datorită formei lui $h_{\nu,0}$. Astfel,

$$a_\nu + b_\nu \tau_\nu = 1, \;\; b_\nu + (a_\nu + b_\nu \tau_\nu) \cdot 2\ell_\nu(\tau_\nu)\,\ell'_\nu(\tau_\nu) = 0,$$

adică,

$$\begin{aligned} a_\nu + b_\nu \tau_\nu &= 1, \\ b_\nu + 2\ell'_\nu(\tau_\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul cu necunoscutele a_ν şi b_ν şi înlocuind în $h_{\nu,0}$ se obţine

$$h_{\nu,0}(t) = \left[1 - 2(t - \tau_\nu)\ell'_\nu(\tau_\nu)\right]\ell_\nu^2(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Analog, $h_{\nu,1}$ satisface

$$h_{\nu,1}(\tau_\nu) = 0,\ h'_{\nu,1}(\tau_\nu) = 1$$

din care se obţine

$$c_\nu + d_\nu \tau_\nu = 0,\ d_\nu + (c_\nu + d_\nu \tau_\nu) \cdot 2\ell_\nu(\tau_\nu)\ell'_\nu(\tau_\nu) = 1,$$

adică,

$$c_\nu + d_\nu \tau_\nu = 0, \quad d_\nu = 1.$$

Astfel, $c_\nu = -\tau_\nu$ şi

$$h_{\nu,1}(t) = (t - \tau_\nu)\ell_\nu^2(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Derivata polinomului fundamental în τ_ν este

$$\ell'_\nu(\tau_\nu) = \sum_{\mu \neq \nu} \frac{1}{\tau_\nu - \tau_\mu}.$$

(b) Formula de cuadratură se obţine integrând termen cu termen

$$\int_a^b f(t)w(t)\mathrm{d}\,t = \int_a^b p(t)w(t)\mathrm{d}\,t + R_n(f),$$

Gradul de exactitate este $2n-1$. Utilizând punctul (a), se obţine

$$\begin{aligned}\int_a^b p(t)w(t)\mathrm{d}\,t &= \int_a^b \sum_{\nu=1}^n \left[h_{\nu,0}(t)f_\nu + h_{\nu,1}(t)\, f'_\nu\right] w(t)\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left[f_\nu \int_a^b h_\nu(t)w(t)\mathrm{d}\,t + f'_\nu \int_a^b k_\nu(t)\, w(t)\mathrm{d}\,t\right].\end{aligned}$$

Deci

$$\lambda_\nu = \int_a^b h_{\nu,0}(t)w(t)\mathrm{d}\,t, \quad \mu_\nu = \int_a^b h_{\nu,1}(t)\, w(t)\mathrm{d}\,t, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

(b) Pentru ca toţi coeficienţii μ să fie nuli, trebuie să avem

$$\int_a^b h_{\nu,1}(t)\, w(t)\mathrm{d}\,t = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

sau, pe baza lui (a), observând că $\ell_\nu(t) = \frac{\omega_n(t)}{(t-\tau_\nu)\omega'_n(\tau_\nu)}$,

$$\frac{1}{\omega'_n(\tau_\nu)} \int_a^b \frac{\omega_n(t)}{(t - \tau_\nu)\omega'_n(\tau_\nu)} \omega_n(t)w(t)\mathrm{d}\,t = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

adică,

$$\int_a^b \ell_\nu(t)\omega_n(t)w(t)\mathrm{d}\,t = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots,n.$$

Deoarece $\{\ell_\nu(t)\}_{\nu=1}^n$ formează o bază a lui $\mathbb{P}_{n-1}$ (ℓ_ν sunt liniar independente şi generează $\mathbb{P}_{n-1}$), ω_n trebuie să fie ortogonal pe $[a,b]$ în raport cu $w(t)=1$ pe toate polinoamele de grad mai mic, adică, $\omega_n(t)=\pi_n(t;w)$. Se obţine o formulă de cuadratură gaussiană.

■

Problema 2 *Implementaţi în MATLAB o metodă hibridă Newton+înjumătăţire pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x)=0$, $f\in C^1$. Testaţi pentru $f(x)=J_0(x)$, pe intervalul $[0,4]$ şi comparaţi cu metoda lui Newton pentru $x_0=0.01$.*

```
function [xFinal,ni]=Newtonsafevb(f,fd,a,b,tol,nitmax,varargin)
% NEWTSAFEVB - root-finder using hybrid Newton-Bisection method to always maintain bracket
%
% [xFinal, xN, errorN, ni]=Newtonsafe(f,fd,a,b,tol,nitmax,varargin)
%
% f, fd - returns the function and its derivative
% a,b: initial bracket
% tol: stopping condition for error f(x) <= tol or |b-a|<tol*b
%
% xFinal: final value
% xN: vector of intermediate iterates
% errorN: vector of errors
if nargin<6, nitmax=50; end
% initialize the problem
h = b-a;
fa = f(a,varargin{:});
fb = f(b,varargin{:});
if ( sign(fa) == sign(fb) )
    error('function must be bracketed to begin with' );
end
c = a ; % start on the left side (could also choose the middle
fc = f(c,varargin{:}); df=fd(c,varargin{:}) ;
%xN(1) = c;
%errorN(1,:) = [ abs(fc) h ];
% begin iteration until convergence or Maximum Iterations
ni=1;
for i = 1:nitmax
    % try a Newton step
    c = c - fc/df;
    % if not in bracket choose bisection
    if ( ~(a <= c && b >= c) )
        c = a + h/2;
```

```
    end
    % Evaluate function and derivative at new c
    fc = f(c,varargin{:}); df=fd(c,varargin{:});
    % check and maintain bracket
    if ( sign(fc) ~= sign(fb) )
        a=c;
        fa=fc;
    else
        b = c;
        fb = fc;
    end
    h = b-a;
    % calculate errors and track solutions
    absError = abs(fc);
    relError = h;
    % check if converged
    if ( absError < tol || relError < tol*b ) %succes
        xFinal=c; ni=i; return;
    end
end
% clean up
error('Maximum iterations exceeded' );
```

Test

```
%testsub3
g = @(x) besselj(0,x);
gd = @ (x) -besselj(1, x);
[z2,ni2]=Newton(g,gd,0.01,tol)
[z5, ni5]=Newtonsafevb(g,gd,0,4,tol)
```

Rezultate:

```
z2 =
200.2772
ni2 =
5
z5 =
2.4048
ni5 =
4
```

Subiectul 4

Problema 3 *(a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a obţine formula de cuadratură (cu gradul de exactitate $d \geq 2$) de forma*

$$\int_0^1 y(s)\mathrm{d}\,s \approx ay(0) + by(1) - c\left[y'(1) - y'(0)\right] + R(f).$$

(b) Transformaţi formula de la (a) într-o formulă pentru a aproxima $\int_x^{h+x} f(t)\mathrm{d}\,t$.

(c) Obţineţi o formulă de integrare repetată bazată pe formula de la (b) pentru a aproxima $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t$. Interpretaţi rezultatul.

Soluţie.

(a) Punând $y(s) = 1$, $y(s) = s$, $y(s) = s^2$, din condiţiile de exactitate se obţine

$$\begin{aligned} a + b + 0c &= 1 \\ 0a + b - 0c &= \frac{1}{2} \\ 0a + b - 2c &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţia este: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{12}$, adică,

$$\int_0^1 y(s)\mathrm{d}\,s = \frac{1}{2}\left[y(0) + y(1)\right] - \frac{1}{12}\left[y'(1) - y'(0)\right] + R(f)$$

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 s^2(s-1)^2\mathrm{d}\,s = \frac{1}{720}f^{(4)}(\xi)$$

:

(b) Schimbarea de variabilă $t = x + hs$, $dt = hds$ ne conduce la

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}\,t = h\int_0^1 (x+hs)\,\mathrm{d}\,s &= \frac{h}{2}\left[f(x) + f(x+h)\right] \\ &- \frac{h^2}{12}\left[f'(x+h) - f'(h)\right] + \frac{h^4}{720}f^{(4)}\left(\zeta\right). \end{aligned}$$

(c) Punând $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$, $f'_k = f'(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, obţinem folosind (b), că

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_k+h} f(t)\mathrm{d}\,t &\approx \frac{h}{2}\left[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots\right. \\ &+ \left.(f_{n-1} + f_n)\right] - \frac{h^2}{12}\left[(f'_1 - f'_0) + (f'_2 - f'_{10}) + \cdots + \left(f'_n - f'_{n-1}\right)\right] \\ &= h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]. \end{aligned}$$

Restul

$$R_n(f) = \frac{(b-a)^4}{720n^3} f^{(4)}(\zeta)$$

Interpretare regula trapezelor cu o "corecţie la capete". Corecţia aproximează eroarea în formula trapezelor:

$$-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \approx -\frac{h^2}{12} \left[f'(b) - f'(a) \right].$$

■

Problema 4 *Implementaţi în MATLAB o metodă hibridă secantă+înjumătăţire pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Testaţi pentru $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2-2x+2}$. Câte iteraţii sunt necesare? Comparaţi cu metoda secantei şi a înjumătăţirii.*

```
function [z,ni]=secantsafe(f,a,b,tol)
% SECANTSAFE - safe secant method = secant + bisection
% call z=secantsafe(f,a,b,tol)

% The method uses three points a, b, and c. The points a and b are the next
% points xk and xk?1 in the secant method approximation.
% The points b and c form a sign change interval (proper bracket) for the root.
% The idea behind the method is that if the secant method produces an
% undesirable approximation, we take the midpoint of the sign change interval
% (next bisection iterate) as our next approximation.

% Let fa = f(a), fb = f(b) and fc = f(c) which must satisfy
% Conditions:
% 1. fa, fb, fc ~= 0,
% 2. sign(fb) ~= sign(fc) (sign change interval)
% 3. |fb| <= |fc|.

fa=f(a); fb=f(b);
if fa==0
    z=a; return;
end
if fb==0
    z=b; return;
end
if sign(fa)==sign(fb)
    error('f(a) and f(b) must have different sign')
end
c=a; fc=fa;
ni=0;
while 1 %forever
```

```
    ni=ni+1;
    if abs(fc) < abs(fb) %swap b and c
        t = c; c = b; b = t;
        t = fc; fc = fb; fb = t;
        % In this case, a and b may no longer
        % be a pair of secant iterates, and we must set a = c.
        a = c; fa = fc;
    end
    if abs(b-c) <= tol, break; end %success
    dm = (c-b)/2;
    df = (fa-fb);
    if df == 0
        ds = dm;
    else
        ds = -fb*(a-b)/df;
    end
    if (sign(ds)~=sign(dm) || abs(ds) > abs(dm))%bisection or secant
        dd = dm;
    else
        dd = ds;
    end
    if abs(dd) < tol
        dd = 0.5*sign(dm)*tol;
    end
    % New iterate b+dd
    d = b + dd;
    fd = f(d);
    if fd == 0
        b = d; c = d; fb = fd; fc = fd;
        break;
    end
    a = b; b = d;
    fa = fb; fb = fd;
    if sign(fb) == sign(fc)
        c = a; fc = fa;
    end
end
z=(b+c)/2;
```

Test

```
f=@(x) 1-2./(x.^2-2*x+2);
%[-10,1]
[z1,ni1]=secantsafe(f,-10,1,1e-8)
[z2,ni2]=Bisection(f,-10,1,1e-8)
[z3,ni3]=secant(f,-10,1,1e-8)
```

Rezultate

```
z1 =
-1.9747e-09
ni1 =
11
z2 =
-1.6298e-09
ni2 =
31
Error using secant (line 28)
numarul maxim de iteratii depasit
Error in testsecantsafe2 (line 5)
[z3,ni3]=secant(f,-10,1,1e-8)
```

Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x, \; x > 0.$$

(a) *Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una,* α_n*, în fiecare interval de forma* $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p)*

(b) *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$*. (1p)*

(c) *Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu* $x_0 = n\pi$*. (2p)*

Solution.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\tanh x$ se intersectează de o infinitate de ori pe $\mathbb{R}_+$, exact o dată în fiecare interval $[(n-1/2)\pi, n\pi]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Abscisele respective α_n sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei (figura 1).

(b) Deoarece $\tanh x \to 1$ când $x \to \infty$, discuţia de la (a) ne arată că $\alpha_n - n\pi \sim \tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1)$, deci $n\pi - \alpha_n \to \tan^{-1}(1) = \pi/4 = .785398\ldots$ când $n \to \infty$.

(c) Pe intervalul $I_n = [(n-1/2)\pi, n\pi]$ avem $f\left((n-1/2)\pi\right) = -\infty$, $f(n\pi) = \tanh n\pi > 0$ şi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan^2 x - \tanh^2 x + 2 \\ f''(x) &= 2\tan x\left(\tan^2 x + 1\right) - 2\tanh x\left(1 - \tanh^2 x\right) \end{aligned}$$

Deci, f este monoton crescătoare şi concavă pe I_n. Metoda lui Newton va converge dacă se porneşte cu capătul din dreapta, $x_0 = n\pi$, dacă $x_1 > (n-1/2)\pi$. Deoarece funcţia $u/(2-u^2)$ este crescătoare pe $[0,1]$ şi ia valori între 0 şi 1, avem

$$x_1 = n\pi - \frac{\tanh n\pi}{2 - \tanh^2 n\pi} > n\pi - 1 > n\pi - \frac{1}{2}\pi.$$

■

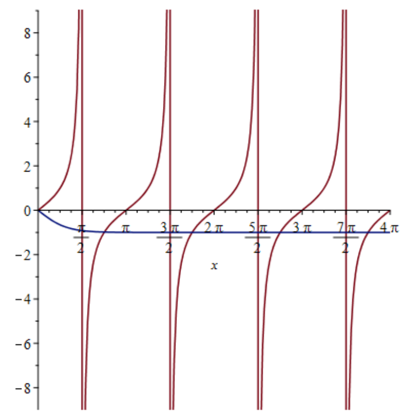


Figure 1: Problema 1

Problema 2 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

Soluţie.

(a) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{t+1} \cos \frac{t+1}{2}\, dt$$

Cuadratura este de tip Gauss-Jacobi cu $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$. Polinomul ortogonal este

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{17}{63}$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9}, x_2 = \frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = 1 - \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{-\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10} + 1$$

Restul:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1} \left(t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{17}{63}\right)^2 \mathrm{d}\, t = \frac{512}{130\,977}\sqrt{2} f^{(4)}(\xi)$$

(b)

■

Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia* $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ *are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix,* $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, *sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) Determinaţi un interval pentru ω *astfel ca pentru orice* ω *din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când* $x_0 \neq 1$ *este ales adecvat). (1p)*

(b) Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi $x_0 \neq 2$*). (1p)*

(c) Pentru ce valori ale lui ω *iteraţia converge pătratic către 1? (1p)*

(d) Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie $F(x) = 0$ *şi determinaţi* F*. Pentru ce valori inţiale* x_0 *metoda este convergentă? (2p)*

Soluţie.

(a) Se aplică metoda aproximaţiilor succesive, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, unde $\varphi(x) = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\,x + 2\right]$. Convergenţa locală către 1 necesită $|\varphi'(1)| < 1$. Deoarece

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\omega}\left[2x - (3-\omega)\right],$$

se obţine

$$|\varphi'(1)| = \left|\frac{\omega-1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} < \omega < \infty.$$

(b) Analog,

$$|\varphi'(2)| = \left|\frac{\omega+1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow -\infty < \omega < -\frac{1}{2}.$$

(c) Avem convergenţă pătratică către 1 dacă $\varphi'(1) = 0$, adică, $\omega = 1$.

(d) Iteraţia se poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 = x_n - \left(3x_n - x_n^2 - 2\right) = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

de unde

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = 3x - x^2 - 2 = -\,(x-1)\,(x-2)\,,$$

sau

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = (\ln F)' = -\frac{1}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Rezolvare ec. dif.

$$F(x) = \exp\left(C\log\frac{x-1}{x-2}\right) = C\frac{x-1}{x-2}.$$

Putem alege $C = 1$. Din graficul lui F (F este concavă şi monoton descrescătoare pe $[0, 2)$ şi limita la dreapta în 2 este $-\infty$), rezultă că metoda lui Newton converge către dacă $0 < x_0 < 2$. Pentru $x_0 > 2$ şi $x_0 < 0$ metoda este divergentă către $+\infty$.

■

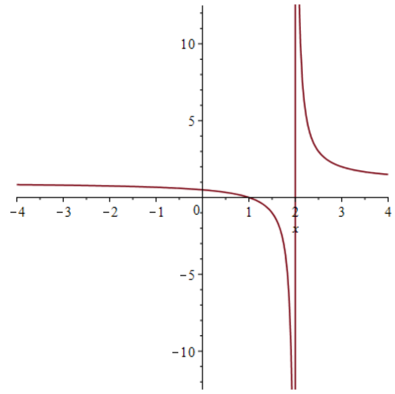


Figure 2: Graficul lui $F(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Problema 4 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Soluţie.

(a) Cu schimbarea de variabilă $x = t^2$ se obţine

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^1 f(t^2) \mathrm{d}\, t$$

Gauss-Legendre

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

Nodurile sunt $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Coeficienţii sunt egali

$$A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}\, t = 1$$

■

Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x,\ x > 0.$$

(a) Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una, α_n, în fiecare interval de forma $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (1p)

(b) Determinaţi $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$. (1p)

(c) Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu $x_0 = n\pi$. (2p)

Soluţie. ■

Problema 2 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

1 Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix, $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3 - \omega)x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3 - \omega)x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) *Determinaţi un interval pentru ω astfel ca pentru orice ω din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când $x_0 \neq 1$ este ales adecvat). (1p)*

(b) *Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi $x_0 \neq 2$). (1p)*

(c) *Pentru ce valori ale lui ω iteraţia converge pătratic către 1? (1p)*

(d) *Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie $F(x) = 0$ şi determinaţi F. Pentru ce valori inţiale x_0 metoda este convergentă? (2p)*

Problema 4 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Subiectul 7

Problema 5 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n - 1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)*

(c) *Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, …, m_{n-1}. (1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Soluţie.

(a) Sunt $3(n-1)$ parametrii şi $2(n-2)+2$ condiţii de interpolare şi $n-2$ condiţii de continuitate a primei derivate. Rămân $3(n-1)-2(n-2)-2-(n-2)=1$ grade de libertate. Avem nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina spline-ul unic.

(b) Cu notaţia $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, obţinem tabela de diferenţe divizate

x	f	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
x_i	f_i	m_i	$\frac{m_i - f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i}$
x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}		

Polinoamele p_i sunt

$$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + (x - x_i)^2 \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

(c) Impunem $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Astfel,

$$\begin{gathered} m_i + 2\Delta x_i \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} = m_{i+1} \Longleftrightarrow \\ m_i + 2f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i = m_{i+1}, \end{gathered}$$

sau

$$\begin{cases} m_1 = f'(a) \\ m_{i+1} = 2f[x_i, x_{i+1}] - m_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

■

Problema 6 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a+b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \dots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\, (-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = 48 - 4\alpha = 0,$$

adică $\alpha = 12$. Nodurile sunt $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 2 \\ A_1(-2\sqrt{3})^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1(-2\sqrt{3})^2 = 24A_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 4 \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 24A_1 &= 4 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= 4 \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 48 \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= 4 \\ 2A_1 x_1^4 &= 48 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1=\frac{1}{6}, A_2=\frac{5}{3}, x_1=-2\sqrt{3}\right], \left[A_1=\frac{1}{6}, A_2=\frac{5}{3}, x_1=2\sqrt{3}\right]$
Restul

$$R(f)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\left(x^3-12x\right)^2 \mathrm{d}\,x=\frac{6}{5}f^{(6)}(\xi).$$

: $\frac{6}{5}f^6\xi$

■

Subiectul 8

Problema 7 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned}&\tau_0=t_0,\ \ \tau_{n+1}=t_n\\ &\tau_i=\frac{1}{2}\left(t_i+t_{i-1}\right), \quad i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q\in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i)=y_i, \quad i=0,1,\dots,n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Soluţie. Fie $Q_i=Q|_{[t_i,t_{i+1}]}$ şi $m_i=Q'(t_i)$. Căutăm Q_i sub forma

$$Q_i(x)=y_{i+1}+c_{i,1}(x-\tau_{i+1})+c_{i,2}(x-\tau_{i+1})^2. \tag{1}$$

Obţinem $c_{i,1}$ şi $c_{i,2}$ din condiţiile $Q_i(\tau_{i+1})=y_{i+1}$, $Q_i'(t_i)=m_i$ şi $Q_i'(t_{i+1})=m_{i+1}$. Aceste condiţii ne conduc la

$$Q_i(x)=y_{i+1}+\frac{1}{2}\left(m_i+m_{i+1}\right)\left(x-\tau_{i+1}\right)+\frac{1}{2h_i}(m_{i+1}-m_i)(x-\tau_{i+1})^2, \tag{2}$$

unde $h_i=x_{i+1}-x_i$. Impunând condiţia de continuitate pe nodurile interioare

$$\lim_{x\to t_i^-}Q_{i-1}(x)=\lim_{x\to t_i^+}Q_i(x)$$

se obţine

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (3)$$

Trebuie impuse condiţii de interpolare pe capete

$$Q(\tau_0) = y_0, \qquad Q(\tau_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Aceste două condiţii ne conduc la ecuaţiile

$$\begin{aligned} 3h_0m_0 + h_0m_1 &= 8(y_1 - y_0) \\ h_{n-1}m_{n-1} + 3h_{n-1}m_n &= 8(y_{n+1} - y_n) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuaţii pentru vectorul $\mathbf{m} = [m_0, m_1, ..., m_n]^T$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 3h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 3\,(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 3\,(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 3\,(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$= 8 \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} - y_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul are $n+1$ ecuaţii, $n+1$ necunoscute, este tridiagonal, simetric şi diagonal dominant. După obţinerea vectorului $\mathbf{m}$, valorile lui $Q(x)$ se pot calcula folosind formula (2). ■

Problema 8 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a+b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n\pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) *Obţineţi o formulă gaussiană de forma*

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t)\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\, (-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică
$$\int_{-1}^{1} |x|\, x\left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha = 0,$$
adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Nodurile sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Din condiţiile de exactitate avem
$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}\, x = 2$$
$$A_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}A_1 = \int_{-1}^{1} x^2\, |x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$$
adică
$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ \frac{4}{3}A_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar
$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1x_1 &= 0 \\ A_1x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ A_1x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1x_1^4 &= \int_{-1}^{1} x^4\, |x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$
Sistemul este echivalent cu
$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ 2A_1x_1^4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$
Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$, $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$

Restul
$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1} |x|\left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{25\,920} f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 7

Problema 1 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.*

(a) Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)

(b) Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)

(c) Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, ..., m_{n-1}. (1p)

(d) Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)

Soluţie.

(a) Sunt $3(n-1)$ parametrii şi $2(n-2)+2$ condiţii de interpolare şi $n-2$ condiţii de continuitate a primei derivate. Rămân $3(n-1)-2(n-2)-2-(n-2) = 1$ grade de libertate. Avem nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina spline-ul unic.

(b) Cu notaţia $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, obţinem tabela de diferenţe divizate

x	f	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
x_i	f_i	m_i	$\frac{m_i - f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i}$
x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}		

Polinoamele p_i sunt

$$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + (x - x_i)^2 \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

(c) Impunem $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-2$. Astfel,

$$m_i + 2\Delta x_i \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} = m_{i+1} \iff$$
$$m_i + 2f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i = m_{i+1},$$

sau

$$\begin{cases} m_1 = f'(a) \\ m_{i+1} = 2f[x_i, x_{i+1}] - m_i \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \end{cases}$$

■

Problema 2 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \dots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\,(-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = 48 - 4\alpha = 0,$$

adică $\alpha = 12$. Nodurile sunt $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 2$$
$$A_1(-2\sqrt{3})^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1(-2\sqrt{3})^2 = 24A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 4$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 24A_1 &= 4 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= 4 \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 48 \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= 4 \\ 2A_1 x_1^4 &= 48 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = -2\sqrt{3}\right]$, $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = 2\sqrt{3}\right]$
Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \left(x^3 - 12x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{6}{5} f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 8

Problema 3 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned} \tau_0 &= t_0,\ \tau_{n+1} = t_n \\ \tau_i &= \frac{1}{2}\left(t_i + t_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q \in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Soluţie. Fie $Q_i = Q|_{[t_i,t_{i+1}]}$ şi $m_i = Q'(t_i)$. Căutăm Q_i sub forma

$$Q_i(x) = y_{i+1} + c_{i,1}(x - \tau_{i+1}) + c_{i,2}(x - \tau_{i+1})^2. \tag{1}$$

Obţinem $c_{i,1}$ şi $c_{i,2}$ din condiţiile $Q_i(\tau_{i+1}) = y_{i+1}$, $Q_i'(t_i) = m_i$ şi $Q_i'(t_{i+1}) = m_{i+1}$. Aceste condiţii ne conduc la

$$Q_i(x) = y_{i+1} + \frac{1}{2}\left(m_i + m_{i+1}\right)(x - \tau_{i+1}) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_{i+1})^2, \tag{2}$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$. Impunând condiţia de continuitate pe nodurile interioare

$$\lim_{x \to t_i^-} Q_{i-1}(x) = \lim_{x \to t_i^+} Q_i(x)$$

se obţine

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Trebuie impuse condiţii de interpolare pe capete

$$Q(\tau_0) = y_0, \qquad Q(\tau_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Aceste două condiţii ne conduc la ecuaţiile

$$\begin{aligned} 3h_0m_0 + h_0m_1 &= 8(y_1 - y_0) \\ h_{n-1}m_{n-1} + 3h_{n-1}m_n &= 8(y_{n+1} - y_n) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuaţii pentru vectorul $\mathbf{m} = [m_0, m_1, ..., m_n]^T$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 3h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 3(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 3(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 3(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$= 8 \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} - y_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul are $n+1$ ecuaţii, $n+1$ necunoscute, este tridiagonal, simetric şi diagonal dominant. După obţinerea vectorului $\mathbf{m}$, valorile lui $Q(x)$ se pot calcula folosind formula (2). ■

Problema 4 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a,a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned} A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t-t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t-t_\nu)\,(-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)} \mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_\nu)\, w'(t_\nu)} \mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu. \end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-1}^{1} |x|\, x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha = 0,$$

adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Nodurile sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}\, x = 2$$

$$A_1 \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} A_1 = \int_{-1}^{1} x^2\, |x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ \frac{4}{3} A_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-1}^{1} x^4\, |x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ 2A_1x_1^4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right], \left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}|x|\left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}\,x = \frac{1}{25\,920}f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 9

Problema 1 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = \pi_k^+(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^+\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0, a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0, 1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-a}^{a} w(t)\pi_{2k}(t)\pi_{2j}(t)\mathrm{d}\,t = 2\int_{0}^{a} w(t)\pi_k^+(t^2)\pi_j^+(t^2)\mathrm{d}\,t \\ &= 2\int_0^{a^2} \frac{1}{2}\frac{w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^+(u)\pi_j^-(u)}{\sqrt{u}}du, \end{aligned}$$

rezultă că polinoamele (π_n^+) sunt ortogonale pe $[0, a^2]$ în raport cu ponderea $w^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Polinoamele Legendre (π_n) sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = 1$, deci (π_n^+) vor fi ortogonale pe [0,1] în raport cu $w^+(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Conform punctului (a), $\pi_k^+(u)$ se obţine din $\pi_{2k}(t)$ înlocuind $t^2 = u$.

$$\pi_k^+(u) = \left.\pi_{2k}(t)\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 4

$$\pi_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}.$$

Polinomul căutat π_2^+ se obţine înlocuint $t^2 = u$ în π_4

$$\pi_2^+(u) = u^2 - \frac{6}{7}u + \frac{3}{35}.$$

Nodurile sunt rădăcinile lui π_2^+, $u_1 = \frac{3}{7} - \frac{2}{35}\sqrt{30}$ şi $u_2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{35}\sqrt{30}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u = 2 \\ A_1u_1 + A_2u_2 &= \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}, \quad A_2 = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\pi_2^+(u)\right)^2 \mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(u^2 - \frac{6}{7}u + \frac{3}{35}\right)^2 \mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{16}{33\,075} f^{(4)}(\xi)$$

■

Problema 2 *Considerăm ecuaţiile echivalente*

$$(A)\ x\ln x - 1 = 0; \quad (B)\ \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

(a) Arătaţi că au exact o rădăcină pozitivă şi determinaţi un interval care o conţine. (1p)

*(b) Atât pentru (A) cât şi pentru (B), determinaţi cel mai mare interval pe care metoda lui Newton converge. (*Indicaţie*: studiaţi convexitatea celor două funcţii care apar în ecuaţii.) (1p)*

(c) Care din cele două iteraţii converge asimptotic mai repede? (1p)

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \ln x$ şi $y = 1/x$ se intersectează în exact un punct cu abscisa cuprinsă între 1 şi 2 (deoarece $\ln 2 > 1/2$).

(b) Fie $f(x) = x\ln x - 1$. Avem $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}_+$. Pentru orice x_0 din intervalul $(0, e^{-1})$, deoarece f este descrescătoare, metoda lui Newton produce un x_1 negativ, inacceptabil. Pe de altă parte, datorită convexităţii lui f, metoda lui Newton converge monoton descrescător (exceptând, eventual, primul pas) pentru orice $x_0 \in (e^{-1}, \infty)$. Fie $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. Avem, $g'(x) = x^{-2}(x+1)$, $g''(x) = -x^{-3}(x+2)$, deci g este crescătoare şi ia valori de la $-\infty$ la $+\infty$ ş este concavă pe $\mathbb{R}+$. Pentru orice $x_0 < \alpha$, metoda lui Newton va converge monoton crescător. Dacă $x_0 > \alpha$, trebuie să ne asigurăm că $x_1 > 0$. Deoarece

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln x_0 - x_0^{-1}}{x_0^{-2}(x_0+1)} = x_0\frac{x_0 + 2 - x_0\ln x_0}{x_0+1},$$

trebuie să avem $x_0 + 2 - x_0\ln x_0 > 0$, adică, $x_0 < x_*$ unde

$$x_*\ln x_* - x_* - 2 = 0.$$

Aceasta are o soluţie unică între 4 şi 5, care se poate obţine cu metoda lui Newton. Rezultatul este $x = 4.319136566\ldots$.

(c) Constantele asimptotice de eroare sunt

$$c_f = \left.\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{1}{2x(\ln x+1)}\right|_{x=\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)}.$$
$$c_g = \left.\frac{g''(x)}{2g'(x)}\right|_{x=\alpha} = -\frac{\alpha+2}{2\alpha(\alpha+1)}$$

Avem
$$\frac{c_f}{|c_g|} = \frac{1}{2(\alpha+1)}\cdot\frac{2\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{a}}.$$

Deoarecece $1+\frac{2}{a} > 2$, are loc $c_f < 1/2|c_g|$, deci metoda lui Newton pentru (A) converge asimptotic mai repede cu un factor mai mare decât 2.

■

Subiectul 10

Problema 3 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a,a]$, $0 < a \le \infty$ *şi*

$$\pi_{2k+1}(t;\mathrm{d}\,\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^-\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0,a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^-(t) = t^{+1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0,1]$ *în raport cu ponderea* $w(t)=\sqrt{t}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$0 = \int_{-a}^{a} w(t)\pi_{2k+1}(t)\pi_{2j+1}(t)\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a t^2\pi_k^-(t^2)\pi_j^-\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t$$
$$= 2\int_0^{a^2}\frac{1}{2}\sqrt{u}w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^-(u)\pi_j^-(u)\,\mathrm{d}\,u$$

rezultă că polinoamele (π_n^-) sunt ortogonale pe $[0,a^2]$ în raport cu ponderea $w^-(t) = t^{1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Luân $a=-1$ şi $w(t)=1$, polinoamele ortogonale pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w^+(t)=\sqrt{t}$ se obţin din polinoamele Legendre: calculăm $\pi_{2k+1}(t)/t$, înlocuim $t^2=u$ şi am obţinut astfel $\pi_k^-(u)$

$$\pi_k^-(u) = \left.\frac{\pi_{2k+1}(t)}{t}\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 5

$$\pi_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$$

Polinomul ortogonal căutat este

$$\pi_2^-(u) = u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}.$$

Rădacinile lui vor fi nodurile formulei de cuadratura $u_1 = \frac{5}{9} - \frac{2}{63}\sqrt{70}$, $u_2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{3}$$

$$A_1u_1 + A_2u_2 = \int_0^1 u\sqrt{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{5}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{150}\sqrt{70}, \quad A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{150}\sqrt{70}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(\pi_2^-(u)\right)^2\mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}\right)^2\mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{16}{130\,977}f^{(4)}(\xi).$$

■

Problema 4 *Ecuaţia*

$$\cos x \cosh x - 1 = 0$$

are exact două rădăcini $\alpha_n < \beta_n$ *în fiecare interval* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată aceste ecuaţii converge către* α_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *(1p) şi către* β_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. *(1p)*

Soluţie. Avem

$$f(x) = \cos x \cosh x - 1$$
$$f'(x) = \cos x \sinh x - \sin x \cosh x$$
$$f''(x) = -2\sin x \sinh x$$

Observăm că $f''(x) > 0$ pe $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 2n\pi\right]$ şi $f''(x) < 0$ pe $\left[2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Mai mult, $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$ şi $f(2n\pi) = \cosh(2n\pi) > 1$. Deoarece f este convexă pe jumătatea stângă a intervalului $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, metoda lui Newton cu $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ şi valoarea de pornire x_1 converge monoton descrescător către α_n, dacă x_1 este situată în stânga mijlocului intervalului. Într-adevăr, pentru $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, avem, pentru $n \geq 1$,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)}$$
$$< -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2n\pi - 1.55283... < 2n\pi.$$

Deoarece f este concavă pe jumătatea dreaptă a intervalului, metoda lui Newton cu valoarea de pornire egală cu capătul drept converge monoton descrescător către β_n. ■

Subiectul 7

Problema 1 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n-1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i,x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)*

(c) *Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, $\ldots$, m_{n-1}. (1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Soluţie.

(a) Sunt $3(n-1)$ parametrii şi $2(n-2)+2$ condiţii de interpolare şi $n-2$ condiţii de continuitate a primei derivate. Rămân $3(n-1)-2(n-2)-2-(n-2) = 1$ grade de libertate. Avem nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina spline-ul unic.

(b) Cu notaţia $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, obţinem tabela de diferenţe divizate

x	f	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
x_i	f_i	m_i	$\frac{m_i - f[x_i,x_{i+1}]}{\Delta x_i}$
x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}		

Polinoamele p_i sunt

$$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + (x - x_i)^2 \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

(c) Impunem $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Astfel,

$$m_i + 2\Delta x_i \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} = m_{i+1} \iff$$
$$m_i + 2f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i = m_{i+1},$$

sau

$$\begin{cases} m_1 = f'(a) \\ m_{i+1} = 2f[x_i, x_{i+1}] - m_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

■

Problema 2 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a,b]$, $a<b$, $a+b=0$, adică $w(-t)=w(t)$ pe $[a,b]$. Arătaţi că $(-1)^n\pi_n(-t;w)=\pi_n(t,w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt=\sum_{\nu=1}^{n}A_\nu f(t_\nu)+R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu}=-t_\nu,\qquad A_{n+1-\nu}=A_\nu,\ \nu=1,\dots,n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}f(x)\mathrm{d}\,x=A_1f(x_1)+A_2f(x_2)+A_3f(x_3)+R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t)=(-1)^n\pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n,\overline{\pi}_m)&=\int_{-a}^{a}w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t)\mathrm{d}\,t=(-1)^{n+m}\int_{-a}^{a}w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t)\mathrm{d}\,t\\&=(-1)^{n+m}\int_{-a}^{a}w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\,t=(-1)^{n+m}\int_{-a}^{a}w(u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\,t=0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a,a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n=\overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n\pi_n'(-t)=\pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu}&=\int_{-a}^{a}\frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_{n+1-\nu})\,w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\,t=\int_{-a}^{a}\frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t-t_{n+1-\nu})\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t\\&=(-1)^{n+1}\int_{-a}^{a}\frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t-t_\nu)\,(-1)^{n+1}\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t=\int_{-a}^{a}\frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_\nu)\,w'(t_\nu)}\mathrm{d}\,t\\&=A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}f(x)\mathrm{d}\,x=A_1f(x_1)+A_2f(0)+A_1f(-x_1)+R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = 48 - 4\alpha = 0,$$

adică $\alpha = 12$. Nodurile sunt $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 2$$
$$A_1(-2\sqrt{3})^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1(-2\sqrt{3})^2 = 24A_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 4$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 24A_1 &= 4 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= 4 \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 48 \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= 4 \\ 2A_1 x_1^4 &= 48 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = -2\sqrt{3}\right]$, $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}, x_1 = 2\sqrt{3}\right]$
Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \left(x^3 - 12x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{6}{5} f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 8

Problema 3 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$*; fie nodurile*

$$\tau_0 = t_0,\ \tau_{n+1} = t_n$$
$$\tau_i = \frac{1}{2}\left(t_i + t_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Determinaţi un spline pătratic $Q \in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Soluţie. Fie $Q_i = Q|_{[t_i, t_{i+1}]}$ şi $m_i = Q'(t_i)$. Căutăm Q_i sub forma

$$Q_i(x) = y_{i+1} + c_{i,1}(x - \tau_{i+1}) + c_{i,2}(x - \tau_{i+1})^2. \quad (1)$$

Obţinem $c_{i,1}$ şi $c_{i,2}$ din condiţiile $Q_i(\tau_{i+1}) = y_{i+1}$, $Q_i'(t_i) = m_i$ şi $Q_i'(t_{i+1}) = m_{i+1}$. Aceste condiţii ne conduc la

$$Q_i(x) = y_{i+1} + \frac{1}{2}\left(m_i + m_{i+1}\right)\left(x - \tau_{i+1}\right) + \frac{1}{2h_i}(m_{i+1} - m_i)(x - \tau_{i+1})^2, \quad (2)$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$. Impunând condiţia de continuitate pe nodurile interioare

$$\lim_{x \to t_i^-} Q_{i-1}(x) = \lim_{x \to t_i^+} Q_i(x)$$

se obţine

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (3)$$

Trebuie impuse condiţii de interpolare pe capete

$$Q(\tau_0) = y_0, \qquad Q(\tau_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Aceste două condiţii ne conduc la ecuaţiile

$$3h_0 m_0 + h_0 m_1 = 8(y_1 - y_0)$$
$$h_{n-1}m_{n-1} + 3h_{n-1}m_n = 8(y_{n+1} - y_n)$$

Sistemul de ecuaţii pentru vectorul $\mathbf{m} = [m_0, m_1, ..., m_n]^T$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 3h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 3(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 3(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 3(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$
$$= 8 \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} - y_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul are $n+1$ ecuaţii, $n+1$ necunoscute, este tridiagonal, simetric şi diagonal dominant. După obţinerea vectorului $\mathbf{m}$, valorile lui $Q(x)$ se pot calcula folosind formula (2). ■

Problema 4 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) = \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t) \mathrm{d}\, t$$
$$= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u) \mathrm{d}\, t = 0$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a,a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n\pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}
A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_{n+1-\nu})\,w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\,t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t-t_{n+1-\nu})\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t \\
&= (-1)^{n+1}\int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t-t_\nu)\,(-1)^{n+1}\,w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\,t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t-t_\nu)\,w'(t_\nu)}\mathrm{d}\,t \\
&= A_\nu.
\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-1}^{1} |x|\,f(x)\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-1}^{1} |x|\,x\left(x^3-\alpha x\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha = 0,$$

adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Nodurile sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}\,x = 2$$

$$A_1\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + A_2\cdot 0^2 + A_1\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}A_1 = \int_{-1}^{1} x^2\,|x|\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}$$

adică

$$\begin{aligned}
2A_1 + A_2 &= 2 \\
\frac{4}{3}A_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned}
2A_1 + A_2 &= 2 \\
-A_1x_1 + A_2\cdot 0 + A_1x_1 &= 0 \\
A_1x_1^2 + A_2\cdot 0 + A_1x_1^2 &= \frac{1}{2} \\
A_1x_1^4 + A_2\cdot 0 + A_1x_1^4 &= \int_{-1}^{1} x^4\,|x|\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ 2A_1 x_1^4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right], \left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^{1} |x| \left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{25\,920} f^{(6)}(\xi).$$

■

Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x, \; x > 0.$$

(a) Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una, α_n*, în fiecare interval de forma* $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$*,* $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p)*

(b) Determinaţi $\lim_{n\to\infty} (n\pi - \alpha_n)$*. (1p)*

(c) Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu $x_0 = n\pi$*. (2p)*

Solution.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\tanh x$ se intersectează de o infinitate de ori pe $\mathbb{R}_+$, exact o dată în fiecare interval $[(n - 1/2)\pi, n\pi]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Abscisele respective α_n sunt rădăcinile pozitive ale ecuaţiei (figura 1).

(b) Deoarece $\tanh x \to 1$ când $x \to \infty$, discuţia de la (a) ne arată că $\alpha_n - n\pi \sim \tan^{-1}(-1) = -\tan^{-1}(1)$, deci $n\pi - \alpha_n \to \tan^{-1}(1) = \pi/4 = .785398\ldots$ când $n \to \infty$.

(c) Pe intervalul $I_n = [(n - 1/2)\pi, n\pi]$ avem $f\left((n - 1/2)\pi\right) = -\infty$, $f(n\pi) = \tanh n\pi > 0$ şi

$$f'(x) = \tan^2 x - \tanh^2 x + 2$$
$$f''(x) = 2\tan x \left(\tan^2 x + 1\right) - 2\tanh x \left(1 - \tanh^2 x\right)$$

Deci, f este monoton crescătoare şi concavă pe I_n. Metoda lui Newton va converge dacă se porneşte cu capătul din dreapta, $x_0 = n\pi$, dacă $x_1 > (n - 1/2)\pi$. Deoarece funcţia $u/(2 - u^2)$ este crescătoare pe $[0, 1]$ şi ia valori între 0 şi 1, avem

$$x_1 = n\pi - \frac{\tanh n\pi}{2 - \tanh^2 n\pi} > n\pi - 1 > n\pi - \frac{1}{2}\pi.$$

■

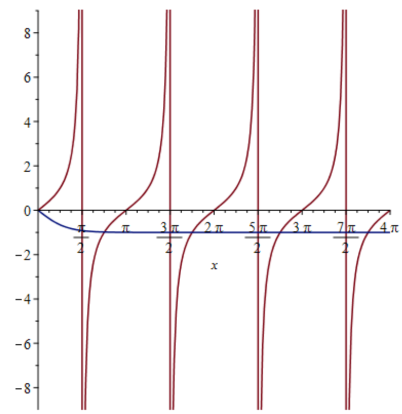


Figure 1: Problema 1

Problema 2 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

Soluţie.

(a) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{t+1} \cos \frac{t+1}{2}\, dt$$

Cuadratura este de tip Gauss-Jacobi cu $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{2}$. Polinomul ortogonal este

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{2}{9} t - \frac{17}{63}$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9}, x_2 = \frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii

$$A_1 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} - \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = 1 - \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)}{-\frac{4}{63}\sqrt{70} + \frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{63}\sqrt{70}\right)} \mathrm{d}\, t = \frac{1}{40}\sqrt{7}\sqrt{10} + 1$$

Restul:

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_{-1}^{1} \sqrt{t+1} \left(t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{17}{63}\right)^2 \mathrm{d}\, t = \frac{512}{130\,977}\sqrt{2} f^{(4)}\,(\xi)$$

(b)

■

Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix, $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\, x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)\, x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) Determinaţi un interval pentru ω astfel ca pentru orice ω din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când $x_0 \neq 1$ este ales adecvat). (1p)

(b) Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi $x_0 \neq 2$). (1p)

(c) Pentru ce valori ale lui ω iteraţia converge pătratic către 1? (1p)

(d) Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie $F(x) = 0$ şi determinaţi F. Pentru ce valori inţiale x_0 metoda este convergentă? (2p)

Soluţie.

(a) Se aplică metoda aproximaţiilor succesive, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, unde $\varphi(x) = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\,x + 2\right]$. Convergenţa locală către 1 necesită $|\varphi'(1)| < 1$. Deoarece

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\omega}\left[2x - (3-\omega)\right],$$

se obţine

$$|\varphi'(1)| = \left|\frac{\omega - 1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} < \omega < \infty.$$

(b) Analog,

$$|\varphi'(2)| = \left|\frac{\omega + 1}{\omega}\right| < 1 \Longrightarrow -\infty < \omega < -\frac{1}{2}.$$

(c) Avem convergenţă pătratică către 1 dacă $\varphi'(1) = 0$, adică, $\omega = 1$.

(d) Iteraţia se poate scrie sub forma

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 = x_n - \left(3x_n - x_n^2 - 2\right) = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},$$

de unde

$$\frac{F(x)}{F'(x)} = 3x - x^2 - 2 = -\,(x-1)\,(x-2)\,,$$

sau

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = (\ln F)' = -\frac{1}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}.$$

Rezolvare ec. dif.

$$F(x) = \exp\left(C \log \frac{x-1}{x-2}\right) = C\frac{x-1}{x-2}.$$

Putem alege $C = 1$. Din graficul lui F (F este concavă şi monoton descrescătoare pe $[0, 2)$ şi limita la dreapta în 2 este $-\infty$), rezultă că metoda lui Newton converge către dacă $0 < x_0 < 2$. Pentru $x_0 > 2$ şi $x_0 < 0$ metoda este divergentă către $+\infty$.

■

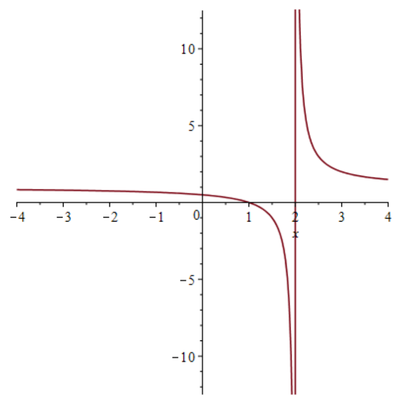


Figure 2: Graficul lui $F(x) = \frac{x-1}{x-2}$

Problema 4 *(a) Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) Folosind ideea de la (a), calculaţi

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Soluţie.

(a) Cu schimbarea de variabilă $x = t^2$ se obţine

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^1 f(t^2) \mathrm{d}\, t$$

Gauss-Legendre

$$\pi_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$$

Nodurile sunt $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Coeficienţii sunt egali

$$A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} \mathrm{d}\, t = 1$$

■

Subiectul 9

Problema 1 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a, a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = \pi_k^+(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^+\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0, a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0, 1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-a}^{a} w(t)\pi_{2k}(t)\pi_{2j}(t)\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a w(t)\pi_k^+(t^2)\pi_j^+(t^2)\mathrm{d}\,t \\ &= 2\int_0^{a^2} \frac{1}{2}\frac{w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^+(u)\pi_j^-(u)}{\sqrt{u}}du, \end{aligned}$$

rezultă că polinoamele (π_n^+) sunt ortogonale pe $[0, a^2]$ în raport cu ponderea $w^+(t) = t^{-1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Polinoamele Legendre (π_n) sunt ortogonale pe $[-1, 1]$ în raport cu ponderea $w(t) = 1$, deci (π_n^+) vor fi ortogonale pe [0,1] în raport cu $w^+(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Conform punctului (a), $\pi_k^+(u)$ se obţine din $\pi_{2k}(t)$ înlocuind $t^2 = u$.

$$\pi_k^+(u) = \left.\pi_{2k}(t)\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 4

$$\pi_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35}.$$

Polinomul căutat π_2^+ se obţine înlocuint $t^2 = u$ în π_4

$$\pi_2^+(u) = u^2 - \frac{6}{7}u + \frac{3}{35}.$$

Nodurile sunt rădăcinile lui π_2^+, $u_1 = \frac{3}{7} - \frac{2}{35}\sqrt{30}$ şi $u_2 = \frac{3}{7} + \frac{2}{35}\sqrt{30}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u = 2 \\ A_1u_1 + A_2u_2 &= \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\,u = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = 1 - \frac{1}{18}\sqrt{30}, \quad A_2 = 1 + \frac{1}{18}\sqrt{30}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\pi_2^{+}(u)\right)^2 \mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(u^2 - \frac{6}{7}u + \frac{3}{35}\right)^2 \mathrm{d}\,u$$
$$= \frac{16}{33\,075} f^{(4)}(\xi)$$

■

Problema 2 *Considerăm ecuaţiile echivalente*

$$(A)\ x\ln x - 1 = 0; \quad (B)\ \ln x - \frac{1}{x} = 0.$$

(a) Arătaţi că au exact o rădăcină pozitivă şi determinaţi un interval care o conţine. (1p)

*(b) Atât pentru (A) cât şi pentru (B), determinaţi cel mai mare interval pe care metoda lui Newton converge. (*Indicaţie*: studiaţi convexitatea celor două funcţii care apar în ecuaţii.) (1p)*

(c) Care din cele două iteraţii converge asimptotic mai repede? (1p)

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \ln x$ şi $y = 1/x$ se intersectează în exact un punct cu abscisa cuprinsă între 1 şi 2 (deoarece $\ln 2 > 1/2$).

(b) Fie $f(x) = x\ln x - 1$. Avem $f'(x) = \ln x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}_+$. Pentru orice x_0 din intervalul $(0, e^{-1})$, deoarece f este descrescătoare, metoda lui Newton produce un x_1 negativ, inacceptabil. Pe de altă parte, datorită convexităţii lui f, metoda lui Newton converge monoton descrescător (exceptând, eventual, primul pas) pentru orice $x_0 \in (e^{-1}, \infty)$. Fie $g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$. Avem, $g'(x) = x^{-2}(x+1)$, $g''(x) = -x^{-3}(x+2)$, deci g este crescătoare şi ia valori de la $-\infty$ la $+\infty$ ş este concavă pe $\mathbb{R}+$. Pentru orice $x_0 < \alpha$, metoda lui Newton va converge monoton crescător. Dacă $x_0 > \alpha$, trebuie să ne asigurăm că $x_1 > 0$. Deoarece

$$x_1 = x_0 - \frac{\ln x_0 - x_0^{-1}}{x_0^{-2}(x_0+1)} = x_0\frac{x_0 + 2 - x_0\ln x_0}{x_0 + 1},$$

trebuie să avem $x_0 + 2 - x_0\ln x_0 > 0$, adică, $x_0 < x_*$ unde

$$x_*\ln x_* - x_* - 2 = 0.$$

Aceasta are o soluţie unică între 4 şi 5, care se poate obţine cu metoda lui Newton. Rezultatul este $x = 4.319136566\ldots$.

(c) Constantele asimptotice de eroare sunt

$$c_f = \left.\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right|_{x=\alpha} = \left.\frac{1}{2x(\ln x + 1)}\right|_{x=\alpha} = \frac{1}{2(\alpha+1)}.$$
$$c_g = \left.\frac{g''(x)}{2g'(x)}\right|_{x=\alpha} = -\frac{\alpha+2}{2\alpha(\alpha+1)}$$

Avem
$$\frac{c_f}{|c_g|} = \frac{1}{2(\alpha+1)} \cdot \frac{2\alpha(\alpha+1)}{\alpha+2} = \frac{1}{1+\frac{2}{a}}.$$

Deoarecece $1+\frac{2}{a} > 2$, are loc $c_f < 1/2|c_g|$, deci metoda lui Newton pentru (A) converge asimptotic mai repede cu un factor mai mare decât 2.

■

Subiectul 10

Problema 3 *(a) Fie* $\mathrm{d}\,\lambda$ *o măsură simetrică pe* $[-a,a]$, $0 < a \leq \infty$ *şi*

$$\pi_{2k+1}(t; \mathrm{d}\,\lambda) = t\pi_k^-(t^2).$$

Arătaţi că $\{\pi_k^-\}$ *sunt polinoame ortogonale monice pe* $[0,a^2]$ *în raport cu măsura* $\mathrm{d}\,\lambda^-(t) = t^{+1/2}w(t^{1/2})\mathrm{d}\,t$. *(1p)*

(b) Aplicaţi acest rezultat la calculul polinoamelor ortogonale pe $[0,1]$ *în raport cu ponderea* $w(t) = \sqrt{t}$. *(1p)*

(c) Generaţi o formulă de cuadratură de tip Gauss cu două noduri pentru această pondere. (4p)

Soluţie.

(a) Deoarece

$$0 = \int_{-a}^{a} w(t)\pi_{2k+1}(t)\pi_{2j+1}(t)\mathrm{d}\,t = 2\int_0^a t^2\pi_k^-(t^2)\pi_j^-\left(t^2\right)\mathrm{d}\,t$$
$$= 2\int_0^{a^2} \frac{1}{2}\sqrt{u}w\left(\sqrt{u}\right)\pi_k^-(u)\pi_j^-(u)\,\mathrm{d}\,u$$

rezultă că polinoamele (π_n^-) sunt ortogonale pe $[0,a^2]$ în raport cu ponderea $w^-(t) = t^{1/2}w(t^{1/2})$.

(b) Luân $a = -1$ şi $w(t) = 1$, polinoamele ortogonale pe $[0,1]$ în raport cu ponderea $w^+(t) = \sqrt{t}$ se obţin din polinoamele Legendre: calculăm $\pi_{2k+1}(t)/t$, înlocuim $t^2 = u$ şi am obţinut astfel $\pi_k^-(u)$

$$\pi_k^-(u) = \left.\frac{\pi_{2k+1}(t)}{t}\right|_{t^2=u}$$

(c) Calculăm polinomul Legendre de grad 5

$$\pi_5(t) = t^5 - \frac{10}{9}t^3 + \frac{5}{21}t$$

Polinomul ortogonal căutat este

$$\pi_2^-(u) = u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}.$$

Rădacinile lui vor fi nodurile formulei de cuadratura $u_1 = \frac{5}{9} - \frac{2}{63}\sqrt{70}$, $u_2 = \frac{5}{9} + \frac{2}{63}\sqrt{70}$. Coeficienţii se obţin din condiţiile

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \int_0^1 \sqrt{u}\mathrm{d}\,u = \frac{2}{3} \\ A_1u_1 + A_2u_2 &= \int_0^1 u\sqrt{u}\mathrm{d}\,u = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul se obţine

$$A_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{150}\sqrt{70}, \quad A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{150}\sqrt{70}.$$

Restul

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(\pi_2^-(u)\right)^2 \mathrm{d}\,u = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 \sqrt{u}\left(u^2 - \frac{10}{9}u + \frac{5}{21}\right)^2 \mathrm{d}\,u \\ &= \frac{16}{130\,977}f^{(4)}(\xi). \end{aligned}$$

■

Problema 4 *Ecuaţia*

$$\cos x \cosh x - 1 = 0$$

are exact două rădăcini $\alpha_n < \beta_n$ *în fiecare interval* $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată aceste ecuaţii converge către* α_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ *(1p) şi către* β_n *când se ia valoarea de pornire* $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$*. (1p)*

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \cosh x - 1 \\ f'(x) &= \cos x \sinh x - \sin x \cosh x \\ f''(x) &= -2\sin x \sinh x \end{aligned}$$

Observăm că $f''(x) > 0$ pe $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, 2n\pi\right]$ şi $f''(x) < 0$ pe $\left[2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Mai mult, $f\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = -1$ şi $f(2n\pi) = \cosh(2n\pi) > 1$. Deoarece f este convexă pe jumătatea stângă a intervalului $\left[-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$, metoda lui Newton cu $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ şi valoarea de pornire x_1 converge monoton descrescător către α_n, dacă x_1 este situată în stânga mijlocului intervalului. Într-adevăr, pentru $x_0 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, avem, pentru $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \\ &< -\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \frac{1}{\cosh\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2n\pi - 1.55283... < 2n\pi. \end{aligned}$$

Deoarece f este concavă pe jumătatea dreaptă a intervalului, metoda lui Newton cu valoarea de pornire egală cu capătul drept converge monoton descrescător către β_n. ■

Setul 1

Problema 1 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 0$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$). (3p)*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$. (2p)

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1) - f(0) - f'(0)$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2 f)(t) = f(0) + t f'(0) + t^2 \left[f(1) - f(0) - f'(0) \right],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2 f)(t) = \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2 f)(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi)\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{72} f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2 f)(0) = c = f(0)$, $(H_2 f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2 f)'(0) = b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 2 *Concepeţi o metodă pentru a calcula $\sqrt[20]{a}$, $a > 0$, bazată pe metoda lui Newton. (2p) De ce o astfel de metodă este lent convergentă? (A se vedea de exemplu $a = 1$ şi $x_0 = \frac{1}{2}$). (1p) Ce se poate face? Gândiţi-vă şi la o altă metodă. (1p)*

Soluţie. $f(x) = x^{20} - a$, $f'(x) = 20x^{19}$, $f''(x) = 20 \cdot 19 \cdot x^{18}$,

$$x_{n+1} = \frac{19x_n^{20} + a}{20x_n^{19}} = \frac{19}{20}x_n + \frac{a}{20x_n^{19}}$$

Deoarece pe $(0, \infty)$ $f' > 0$, $f'' > 0$, orice $x_0 > 0$ este bun ca valoare de pornire. (2p) Ţinând cont că $x_{n+1} \approx \frac{19}{20}x_n$ dacă x_n este mare, pentru $a = 1$ şi $x_0 = 1/2$, se obţine

$$x_1 = \frac{19 \cdot (0.5)^{20} + 1}{20 \cdot (0.5)^{19}} = 26215,$$

si deoarece la fiecare pas aproximanta este redusă cu un factor $\frac{19}{20} = 0.95$ avem nevoie cam de 200 de iteraţii. Odată ce ne apropiem de rădăcină, viteza de convergenţă creşte dramatic (1p).

Folosind criteriul de alegere a valorii de pornire $f(x_0)f''(x_0) > 0$ şi folosind inegalitatea mediilor

$$\sqrt[20]{a \cdot 1 \cdots 1} \leq \frac{a + 19}{20} =: x_0.$$

Altă metodă: se poate folosi formula lui Taylor pentru seria binomială

$$(1-x)^{1/20} = 1 - \frac{1}{20}x - \frac{19}{800}x^2 - \frac{247}{16\,000}x^3 - \frac{14\,573}{1280\,000}x^4 - \frac{1151\,267}{128\,000\,000}x^5 + O\left(x^6\right)$$

sau aproximând $\sqrt[20]{a} = \exp\left(\frac{1}{20}\ln a\right)$.(1p) ■

Setul 2

Problema 3 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 1$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$).*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(1) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	$f'(1) - f(1) + f(0)$
1	$f(1)$	$f'(1)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2 f)(t) = f(0) + t\left[f(1) - f(0)\right] + t(t-1)\left[f'(1) - f(1) + f(0)\right],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2 f)(t) = \frac{t(t-1)^2}{3!} f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{6}f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2 f)(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t(t-1)^2}{3!} f'''(\xi)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{72} f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2 f)(0) = c = f(0)$, $(H_2 f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2 f)'(1) = 2a + b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 4 *Se consideră ecuaţia* $x = \cos x$*.*

(a) Arătaţi grafic că are o rădăcină pozitivă unică α*. Indicaţi, aproximativ, unde este situată.*

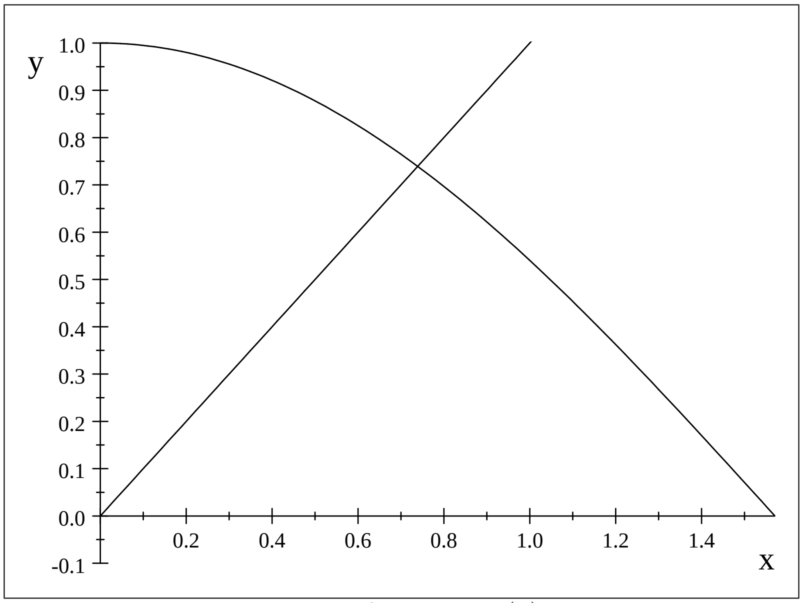
(b) Demonstraţi convergenţa locală a iteraţiei $x_{n+1} = \cos x_n$*.*

(c) Pentru iteraţia de la (b) demonstraţi că dacă $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*, atunci*

$$|x_{n+1} - \alpha| < \sin\frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|.$$

În particular, are loc convergenţa globală pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = 0$*,* $f(x) = x - \cos x$*, converge global pe* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*.*



Punctul fix al lui $\cos(x)$

Soluţie.

(a) $x = \cos(x)$, Soluţia $\alpha \approx 0.739\,09$

(b)
$$|\varphi'(x)| = |\sin(x)| < 1$$
pentru $x \in (0, \pi/2)$. $I_\varepsilon = \{x : |x - \alpha| < \varepsilon\}$. Se poate alege $I_\varepsilon \subset [0.6, 0.8]$;

(c)
$$|x_{n+1} - \alpha| = |\cos x_n - \cos \alpha| = \left|2 \sin \frac{x_n + \alpha}{2} \sin \frac{x_n - \alpha}{2}\right| \le \sin \frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|$$
pentru $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, şi deoarece $\sin \frac{\alpha+\pi/2}{2} < 1$ in acest interval, rezultă convergenţa globală.

(d) $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$, $f''(x) = \cos(x) > 0$ pentru $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se poate alege orice x_0 din $(0, \pi/2)$.
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$
Pentru $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi pentru $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ avem $f(x_1)f''(x_1) > 0$.

■

Setul 3

Problema 5 *(a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a construi o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = af(0) + bf(1) + cf''(\gamma) + R(f)$$

cu gradul maxim de exactitate d, nedeterminatele fiind a, b, c *şi* γ*.(3p)*

(b) Arătaţi că nucleul lui K_d *al restului formulei obţinute la (a) are semn constant şi exprimaţi restul sub forma (2p)*

$$R(f) = e_{d+1} f^{(d+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)dx - af(0) - bf(1) - cf''(\gamma)$$

şi scriind că formula este exactă pentru $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 1 - a - b &= 0 \\ \frac{1}{2} - b &= 0 \\ \frac{1}{3} - b - 2c &= 0 \\ \frac{1}{4} - b - 6c\gamma &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{12}, \gamma = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $R(e_4) \neq 0$, $dex = 3$. Nucleul lui Peano este

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{3!} R\left((x-t)_+^3\right) &= \begin{cases} -\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{24} + \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{24}t^3(t-2) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}(t+1)(t-1)^3 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \leq 0 \end{aligned}$$

Aplicând corolarul la teorema lui Peano

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) R(e_4) \\ &= \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \left[\int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} f(1) + \frac{2}{12} \cdot 12 \frac{1}{2^2}\right] \\ &= -\frac{1}{480} f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

∎

Problema 6 *(a) Să se arate că şirul dat prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + (2 - e^{x_n})\frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}}}, x_0 = 0, x_1 = 1$$

este convergent şi să se determine limita sa. (3p)

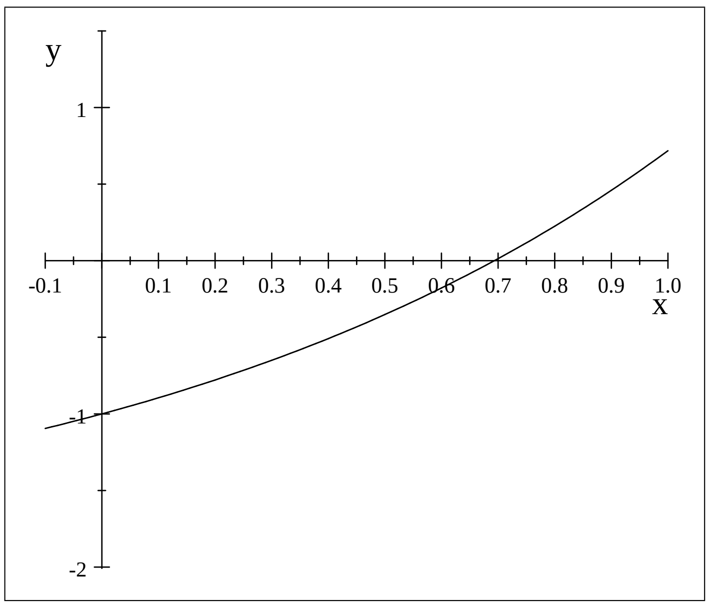
(b) Iteraţia din metoda secantei se poate scrie şi sub forma (1p)

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Din punct de vedere al erorii, care formă este mai bună în programe, forma aceasta sau forma clasică? Justificaţi riguros raspunsul.

Soluţie.

(a) Şirul se obţine aplicând metoda secantei funcţiei $f(x) = e^x - 2$ (1p)



cu rădăcina $\alpha = \ln 2$ şi valorile de pornire menţionate. Convergenţa: f convexă, crescătoare

$$M(\varepsilon) = \max_{s,t} \frac{f''(s)}{2f'(t)} = \max_{s,t} \frac{e^s}{e^t} = \max_{s,t} e^{s-t} = e$$

Luând $\varepsilon < 1/e = 0.367\,88$, se obţine $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$, deci convergenţa. (2p)

(b) În forma din enunţ, avem anulări flotante. Justificarea anulărilor flotante-1p

■

Setul 4

Problema 7 *(a) Construiţi o formulă Newton-Cotes cu ponderi*

$$\int_0^1 f(x)x^\alpha dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f),\ \alpha > -1.$$

Explicaţi de ce formula are sens.

(b) Deduceţi o expresie a erorii $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată a lui f.

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)x^\alpha dx - a_0 f(0) - a_1 f(1)$$

şi scriind că formula este exactă pentru 1 şi x obţinem sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} - a_0 - a_1 &= 0 \\ \frac{1}{\alpha+2} - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha + 2} \\ a_1 &= \frac{1}{\alpha+2} \end{aligned}$$

Deoarece $R(e_2) \neq 0$, $dex = 1$. Pentru rest folosim teorema lui Peano

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{1!} R\left[(x-t)_+\right] \\ &= \begin{cases} \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x < t \\ \frac{t^{\alpha+2}-t}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x \geq t \end{cases} \geq 0 \end{aligned}$$

Folosind corolarul la TP

$$R(f) = \frac{1}{2!} f''(\xi) R(e_2) = \frac{-1}{2\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)} f''(\xi).$$

■

Problema 8 *Se consideră iteraţia*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Explicaţi legătura cu iteraţia Newton şi arătaţi că (x_k) converge pătratic dacă x_0 este suficient de apropiată de soluţie. (2p - legatura cu Newton+ covergenta, 2p ordinul de convergenta).

Soluţie. Iteraţia se scrie sub forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} f(x_k),$$

iar dacă este convergentă x_k este apropiat de rădăcină, $f(x_k) \approx 0$,

$$\frac{f(x_k)}{f(x_k + f(x_k)) - f(x_k)} \approx \frac{1}{f'(x_k)}$$

iar limita va fi rădăcina căutată α. (2p) Scriem iteraţia sub forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

Pentru a arăta convergenţa pătratică punem $\beta_n = f(x_n)$ şi dezvoltăm $g(x_n)$ cu Taylor

$$g(x_n) = f'(x_n) \left[1 - \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right) \right]$$

unde $h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$.Deci

$$x_{n+1} = x_n + h_n \left[1 + \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right) \right]$$

Utilizând expresia erorii pentru Newton obţinem

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \to \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \left[1 + f'(\alpha) \right].$$

(2p)

Altfel. Punem

$$\varphi(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}$$

şi arătăm că $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \left[1 + f'(\alpha) \right] \neq 0$. ∎

1 Subiectul 1

Problema 1 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (4p)

(b) Folosind formula de la punctul (a), să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator) (2p)

Problema 2 *Se consideră ecuaţia*

$$\tan x + \lambda x = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(a) Arătaţi că în intervalul $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, ecuaţia are exact o rădăcină, α. (1p)

(b) Converge metoda lui Newton către $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, dacă aproximaţia iniţială este $x_0 = \pi$? Justificaţi răspunsul. (2p)

2 Subiectul 2

Problema 3 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) Folosind formula de la punctul (a) pentru n noduri, să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator). (2p)

Problema 4 *Dacă $A > 0$, atunci $\alpha = \sqrt{A}$ este rădăcină a ecuaţiilor*

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

(a) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuaţii converge pentru o valoare de pornire arbitrară $x_0 > 0$.(1p)

(b) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată la a doua ecuaţie produce iterate pozitive (x_n) ce converg la α numai dacă x_0 este situat într-un interval $0 < x_0 < b$. Determinaţi b. (2p)

(c) Descrieţi în fiecare caz algoritmul (iteraţia, criteriul de oprire, valoarea de pornire).(1p)

Setul 1

Problema 1 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul natural de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\
p_2(x) &= f(0) + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3
\end{aligned}
$$

Condiţii: Condiţii de netezime

$$
\begin{aligned}
p_1(0) &= p_2(0) \\
p_1'(0) &= p_2'(0) \\
p_1''(0) &= p_2''(0)
\end{aligned}
$$

Condiţii de spline natural

$$
\begin{aligned}
p_1''(-1) &= 0 \\
p_2''(1) &= 0
\end{aligned}
$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 0$.

(1p) Se obţine sistemul

$$
\begin{aligned}
b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\
b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\
2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\
2c_1 &= 0 \\
6d_2 + 2c_2] &= 0 \\
1 + b_2 + c_2 + d_2 &= 0
\end{aligned}
$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{2}, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{2}\right]$.

Expresia spline-ului:

$$
s(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}
$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = -1$.

(2p) Se obţine sistemul

$$
\begin{aligned}
2m_1 + m_2 &= 3 \\
m_1 + 4m_2 + m_3 &= 0 \\
m_2 + 2m_3 &= -3
\end{aligned}
$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = 0, m_3 = -\frac{3}{2}\right]$.

(1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{cc} c_{1,0} = 0, & c_{2,0} = 1 \\ c_{1,1} = \frac{3}{2}, & c_{2,1} = 0 \\ c_{1,2} = 0, & c_{2,2} = -\frac{3}{2} \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = \frac{1}{2} \end{array}$$

■

Problema 2 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Deduceţi de aici o metodă pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri. (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$.

(1p) Se obţine iteraţia

$$\varphi(x) = x - \frac{\frac{1}{x^2} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right)} = x - \frac{1}{2}x^3\left(a - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}x\left(3 - ax^2\right)$$

sau

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n\left(3 - ax_n^2\right).$$

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

(1p) Alegerea valorii de pornire: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = -\frac{2}{x^3} < 0$, pentru $x > 0$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = \frac{6}{x^4} > 0$, pentru $x > 0$. Deci orice valoare $x_0 > 0$ se poate lua ca valoare de pornire.

(0.5p) Pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri: $\sqrt{a} = a\frac{1}{\sqrt{a}}$. ■

Setul 2

Problema 3 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul complet de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \end{aligned}$$

Conditii :Condiţii de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiţii de spline complet

$$p_1'(-1) = f'(-1)$$
$$p_2'(1) = f'(1)$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 1$.

(1p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} -1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ b_1 &= 0 \\ 3d_2 + 2c_2 + b_2 &= 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 &= 1 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = 0, b_2 = \frac{3}{2}, c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = 0, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{2}\right]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} -1 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = 1$.

(2p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 6 \\ m_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = 0\right]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{ll} c_{1,0} = -1, & c_{2,0} = 0 \\ c_{1,1} = 0, & c_{2,1} = \frac{3}{2} \\ c_{1,2} = \frac{3}{2}, & c_{2,2} = 0 \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

■

Problema 4 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{a}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Cum veţi proceda pentru o implementare eficientă în virgulă flotantă? (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$.

(1p) Iteraţia

$$\varphi(x) := x - \frac{\frac{1}{x} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} - a\right)} = x - x^2\left(a - \frac{1}{x}\right) = x\,(2 - ax)$$

sau $x_{n+1} = x_n\,(2 - a x_n)$.

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire:

$$|x_n - 1/a| < a\left(\frac{1}{a} - x_{n-1}\right)^2 < \cdots < \frac{1}{a^{2^n-1}}\left(\frac{1}{a} - x_0\right)^{2^n}$$

(x_n) covergent $\Longleftrightarrow 0 < a x_0 < 2$.

(0.5p) $x_0 = \frac{3}{2}$, maxim 5 iteraţii, $(2^e f)^{-1} = 2^{-e}(1/f)$ ■

Setul 3

Problema 5 *Se consideră ecuaţia $f(x) = xe^x - 1 = 0$. Dorim să o rezolvăm aplicând metoda aproximaţiilor succesive, rezolvând problema de punct fix $x = F(x)$ în două moduri*

(a) $F(x) = e^{-x}$

(b) $F(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

Arătaţi că în ambele cazuri iteraţiile $x_k = F(x_k)$ sunt convergente, determinaţi ordinul de convergenţă şi numărul de iteraţii necesare pentru a obţine precizia $\varepsilon = 10^{-10}$. (6p)

Soluţie.

(a) (2p) $x = e^{-x}$, Solutia: $\{[\alpha = 0.567\,14]\}$. $F'(x) = |\exp(-x)| < 1$, pentru $x > 0$. Deoarece $F'(\alpha) \neq 0$, $ordF = 1$.

(0.5 p) Numărul de iteraţii: din teorema de punct fix a lui Banach

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| < \varepsilon$$

unde $c = \max\{|F'(x)|, x \in I_\varepsilon\}$. Se obţine

$$n = \left[\frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-c) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln c}\right] + 1.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.2$ şi $\varepsilon = 10^{-10}$ sunt necesare 122 de iteraţii.

(b) (3p) $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{xe^x-1}{(e^x+1)^2}$; $F'(\alpha) = 0$ căci $f(\alpha) = 0$. $F''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,(x + e^x - xe^x + 3) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}\,(x + e^x - xe^x + 3)$. Dar, $F''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha+1)^3}(\alpha + e^\alpha + 2) \neq 0$, deoarece $\alpha\exp(\alpha) = 1$. $ordF = 2$.

Altfel: Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = x - e^{-x} = 0$.

(0.5p) Numărul de iteraţii: Deoarece ordinul de convergenţă este 2 pornim de la relaţia de recurenţă

$$e_{n+1} \approx c e_n^2.$$

Se obţine

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\approx c e_n^2 = c^{1+2} e_{n-1}^{2^2} = c^{1+2+\cdots+2^{n-1}} e_0^{2^n} = c^{2^n-1} e_0^{2^n} \\ &= \frac{1}{c} \left(c e_0\right)^{2^n} < \varepsilon \Longrightarrow \left(c e_0\right)^{2^n} < c\varepsilon \end{aligned}$$

n se obţine prin logaritmare

$$n = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{\ln c + \ln \varepsilon}{\ln c + \ln |e_0|}.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.4$, avem $e_0 \approx 0.18$ şi avem nevoie cam de 3 iteraţii.

■

Problema 6 *Fie $f \in C^4[-1,1]$. Determinaţi un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condiţiile*

$$P(-1) = f(-1),\ P'(-1) = f'(-1),\ P(0) = f(0),\ P(1) = f(1)$$

şi determinaţi expresia restului.(3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 1$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 0$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f'(-1)$	$f(0) - f(-1) - f'(-1)$	$\frac{f(1)-4f(0)+3f(-1)+2f'(-1)}{4}$
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$		
1	$f(1)$			

(0.5p) Polinomul de interpolare

$$\begin{aligned} \left(H_3 f\right)(x) &= f(-1) + (t+1) f'(-1) + (t+1)^2 \left[f(0) - f(-1) - f'(-1)\right] \\ &+ (t+1)^2 t \left[\frac{f(1) - 4f(0) + 3f(-1) + 2f'(-1)}{4}\right] \end{aligned}$$

(1p) Restul

$$\left(R_3 f\right)(x) = \frac{(t+1)^2 t (t-1)}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■

Setul 4

Problema 7 *(6p) Pentru a rezolva ecuaţia $f(x) = 0$ se aplică metoda lui Newton funcţiei $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.*

(a) *Scrieţi formula iterativă care se obţine şi determinaţi ordinul de convergenţă.*

(b) *Aplicaţi metoda de la punctul (a) pentru a aproxima* $\sqrt{a}$, $a > 0$.

Soluţie.

(a) (2p)

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\left(\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}\right)'}$$

$$= x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2}\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} = x - \frac{f(x)}{f'(x)\left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{2f'^2(x)}\right]}.$$

adică,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{1}$$

(2p) Ordinul de convergenţă: Fie α rădăcina lui $f(x) = 0$. Se observă că $\varphi(\alpha) = \alpha$ şi că

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{f^2(\alpha)\left[2f'''(\alpha)f'(\alpha) - 3\left(f''(\alpha)\right)^2\right]}{\left[2f'(\alpha)^2 - f(\alpha)f''(\alpha)\right]^2} = 0$$

$$\varphi''(\alpha) = -2\,\frac{f(\alpha)G(x)}{\left[2\left(f'(\alpha)\right)^2 - f(\alpha)f''(\alpha)\right]^3} = 0$$

$$\varphi'''(\alpha) = \frac{-2f'''(\alpha)f'(\alpha) + 3\left(f''(\alpha)\right)^2}{3f'^2(\alpha)} \neq 0,$$

deci dacă rădăcina este simplă ordinul de convergenţă este $p = 3$, dar putem avea $p > 3$ dacă

$$\frac{-2f'''(\alpha)f'(\alpha) + 3\left(f''(\alpha)\right)^2}{3f'^2(\alpha)} = 0$$

(b) (2p) Alegând $f(x) = x^2 - a$, din (1) se obţine

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a}.$$

■

Problema 8 *Fie* $f \in C^4[-1,1]$. *Determinaţi un polinom de interpolare* P *de grad minim care verifică condiţiile*

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \; P(1) = f(1), P'(1) = f'(1).$$

şi determinaţi expresia restului. (3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 0$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 1$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	$\frac{2f'(1)-3f(1)+4f(0)-f(-1)}{4}$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	$f'(1) - f(1) + f(0)$	
1	$f(1)$	$f'(1)$		
1	$f(1)$			

(0.5p) Polinomul de interpolare

$$\begin{aligned}(H_3 f)(x) &= f(-1) + (t+1)\left[f(0) - f(-1)\right] + (t+1)t\left[\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}\right] \\ &+ (t+1)t(t-1)\left[\frac{2f'(1) - 3f(1) + 4f(0) - f(-1)}{4}\right].\end{aligned}$$

(1p) Restul

$$(R_3 f)(x) = \frac{(t+1)t(t-1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■

1 Subiectul 1

Problema 1 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (4p)

(b) Folosind formula de la punctul (a), să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sin(\pi x) \mathrm{d}\, x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator) (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) \mathrm{d}\, x = \int_{-1}^{1} \frac{f\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}\, t.$$

Vom folosi o formulă de tip Gauss cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Formula va fi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x) \mathrm{d}\, x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

cu

$$A_k = \frac{\pi}{n}, x_k = \frac{1 + \cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{2},$$

iar restul

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} T_n^2(t) \mathrm{d}\, t = \frac{1}{(2)^{2n}(2n)!} \frac{\pi}{2^{2n+1}} f^{(2n)}(\xi).$$

■

Problema 2 *Se consideră ecuaţia*

$$\tan x + \lambda x = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(a) *Arătaţi că în intervalul* $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, *ecuaţia are exact o rădăcină*, α. *(1p)*

(b) *Converge metoda lui Newton către* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$, *dacă aproximaţia iniţială este* $x_0 = \pi$*? Justificaţi răspunsul. (2p)*

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\lambda x$ pentru $x > 0$ se intersectează într-un punct situat între $\frac{1}{2}\pi$ şi π, a cărui abscisă este rădăcina ecuaţiei. Este singura rădăcină în acel interval.

(b) Pentru $f(x) = \tan x + x$, avem, pe $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) &= -\infty,\ f(\pi) = \lambda\pi \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + \lambda > 0, \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{2}{\cos^3 x}\sin x < 0, \end{aligned}$$

deci f este crescătoare şi concavă. Dacă metoda lui Newton se aplică pentru $x_0 = \pi$, atunci şirul aproximantelor este monoton crescător dacă $x_1 > \frac{\pi}{2}$. Dar,

$$x_1 = \pi - \frac{f(\pi)}{f'(\pi)} = \frac{\pi}{1+\lambda} > \frac{\pi}{2},$$

căci $\lambda \in [0, 1]$.

■

2 Subiectul 2

Problema 3 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) Folosind formula de la punctul (a) pentru n noduri, să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \sin(\pi x) \mathrm{d}\, x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator). (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f\left(\frac{t+1}{2}\right) \mathrm{d}\, t$$

Este o cuadratură Gauss-Cebîşev de speţa a doua. Polinomul ortogonal este

$$\pi_3(x) = t^3 - \frac{1}{2} t$$

cu rădăcinile $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($t_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,3$). Nodurile vor fi t_k, iar coeficienţii

$$A_1 = \frac{\pi}{8}, A_2 = \frac{\pi}{4}, A_3 = \frac{\pi}{8}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \left(t^3 - \frac{1}{2} t\right)^2 \mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{92\,160} f^{(6)}(\xi)$$

Revenind la substituţie, avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{8} f\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{8} f\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{92\,160 \cdot 2^6} f^{(6)}(\zeta) \right]$$

$\blacksquare$

Problema 4 *Dacă* $A > 0$, *atunci* $\alpha = \sqrt{A}$ *este rădăcină a ecuaţiilor*

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

(a) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuaţii converge pentru o valoare de pornire arbitrară $x_0 > 0$. *(1p)*

(b) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată la a doua ecuaţie produce iterate pozitive (x_n) *ce converg la* α *numai dacă* x_0 *este situat într-un interval* $0 < x_0 < b$. *Determinaţi* b. *(2p)*

(c) Descrieţi în fiecare caz algoritmul (iteraţia, criteriul de oprire, valoarea de pornire).(1p)

Soluţie.

(a) În primul caz, $f(x) = x^2 - A$ este convexă pe $\mathbb{R}_+$ şi crescătoare pe $(0, \infty)$. Newton coverge pentru orice $x_0 > 0$. Altfel: dacă $x_0 > \alpha$, atunci (x_n) converge monoton descrescător către α. Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci $x_1 > \alpha$, şi se raţionează la fel., pentru $n > 1$.

(b) În al doilea caz, $f(x) = \frac{A}{x^2} - 1$ este convexă $\mathbb{R}_+$ şi descrecătoare ($\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ to $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$). Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci (x_n) converge monoton crescător către α. Dacă $x_0 > \alpha$, trebui să ne asigurăm că $x_1 > 0$, ceea ce înseamnă că

$$x_1 = x_0 - \frac{\frac{A}{x_0^2} - 1}{-2\frac{A}{x_0^3}} > 0, \quad x_0 + x_0\frac{A - x_0^2}{2A} > 0$$

$$x_0\left(3A - x_0^2\right) > 0,\ x_0 < \sqrt{3A} =: b.$$

(c) Se alege $x_0 \in (0, b)$, iteraţia

$$x_{n+1} = x_n + x_n\frac{A - x_0^2}{2A}$$

criteriul

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Subiectul 3

Problema 1 *Considerăm problema de interpolare Hermite: determinaţi* $H_{2n-1}f \in P_{2n-1}$ *astfel încât*

$$\left(H_{2n-1}f\right)(\tau_\nu) = f(\tau_\nu), \quad \left(H_{2n-1}f\right)'(\tau_\nu) = f'(\tau_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad ((*))$$

Prin analogie cu formula lui Lagrange, polinomul care rezolvă (*) se poate scrie cu ajutorul polinoamelor fundamentale de interpolare Hermite $h_{\nu,0}$, $h_{\nu,1}$ *sub forma*

$$\left(H_{2n-1}f\right)(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[h_{\nu,0}(t) f_\nu + h_{\nu,1}(t) f'_\nu\right].$$

(a) *Căutaţi* $h_{\nu,0}$ *şi* $h_{\nu,1}(t)$ *sub forma*

$$h_{\nu,0}(t)(t) = (a_\nu + b_\nu t)\,\ell_\nu^2(t), \ h_{\nu,1}(t)(t) = (c_\nu + d_\nu t)\,\ell_\nu^2(t),$$

unde ℓ_ν *sunt polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange. Determinaţi constantele* a_ν, b_ν, c_ν, d_ν.

(b) *Obţineţi formula de cuadratură*

$$\int_a^b f(t)w(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\lambda_\nu f(\tau_\nu) + \mu_\nu f'(\tau_\nu)\right] + R_n(f)$$

cu proprietatea $R_n(f) = 0$ *pentru orice* $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$.

(c) *Ce condiţii trebuie impuse asupra polinomului nodurilor* $\omega_n(t) = \prod_{\nu=1}^{n} (t - t_\nu)$ *(sau asupra nodurilor* τ_ν*) astfel ca* $\mu_\nu = 0$ *pentru* $\nu = 1, 2, \ldots, n$*?*

Soluţie.

(a) Polinoamele $h_{\nu,0}$ trebuie să verifice

$$h_{\nu,0}(\tau_\nu) = 1, \ h'_{\nu,0}(\tau_\nu) = 0,$$

iar condiţiile $h_{\nu,0}(\tau_\mu) = h'_{\nu,0}(\tau_\mu) = 0$, $\mu \neq \nu$, sunt automat verificate datorită formei lui $h_{\nu,0}$. Astfel,

$$a_\nu + b_\nu \tau_\nu = 1, \ b_\nu + (a_\nu + b_\nu \tau_\nu) \cdot 2\ell_\nu(\tau_\nu)\,\ell'_\nu(\tau_\nu) = 0,$$

adică,

$$\begin{aligned} a_\nu + b_\nu \tau_\nu &= 1, \\ b_\nu + 2\ell'_\nu(\tau_\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul cu necunoscutele a_ν şi b_ν şi înlocuind în $h_{\nu,0}$ se obţine

$$h_{\nu,0}(t) = \left[1 - 2(t - \tau_\nu)\ell'_\nu(\tau_\nu)\right]\ell_\nu^2(t), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Analog, $h_{\nu,1}$ satisface

$$h_{\nu,1}\left(\tau_\nu\right)=0,\; h'_{\nu,1}\left(\tau_\nu\right)=1$$

din care se obţine

$$c_\nu+d_\nu\tau_\nu=0,\; d_\nu+(c_\nu+d_\nu\tau_\nu)\cdot 2\ell_\nu(\tau_\nu)\ell'_\nu(\tau_\nu)=1,$$

adică,

$$c_\nu+d_\nu\tau_\nu=0,\quad d_\nu=1.$$

Astfel, $c_\nu=-\tau_\nu$ şi

$$h_{\nu,1}(t)=(t-\tau_\nu)\ell_\nu^2(t),\quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

Derivata polinomului fundamental în τ_ν este

$$\ell'_\nu(\tau_\nu)=\sum_{\mu\neq\nu}\frac{1}{\tau_\nu-\tau_\mu}.$$

(b) Formula de cuadratură se obţine integrând termen cu termen

$$\int_a^b f(t)w(t)\mathrm{d}\,t=\int_a^b p(t)w(t)\mathrm{d}\,t+R_n(f),$$

Gradul de exactitate este $2n-1$. Utilizând punctul (a), se obţine

$$\begin{aligned}\int_a^b p(t)w(t)\mathrm{d}\,t&=\int_a^b\sum_{\nu=1}^n\left[h_{\nu,0}(t)f_\nu+h_{\nu,1}\left(t\right)f'_\nu\right]w(t)\mathrm{d}\,t\\&=\sum_{\nu=1}^n\left[f_\nu\int_a^b h_\nu(t)w(t)\mathrm{d}\,t+f'_\nu\int_a^b k_\nu\left(t\right)w(t)\mathrm{d}\,t\right].\end{aligned}$$

Deci

$$\lambda_\nu=\int_a^b h_{\nu,0}(t)w(t)\mathrm{d}\,t,\quad \mu_\nu=\int_a^b h_{\nu,1}\left(t\right)w(t)\mathrm{d}\,t,\quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

(b) Pentru ca toţi coeficienţii μ să fie nuli, trebuie să avem

$$\int_a^b h_{\nu,1}\left(t\right)w(t)\mathrm{d}\,t=0,\quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

sau, pe baza lui (a), observând că $\ell_\nu(t)=\frac{\omega_n(t)}{(t-\tau_\nu)\omega'_n(\tau_\nu)}$,

$$\frac{1}{\omega'_n(\tau_\nu)}\int_a^b\frac{\omega_n(t)}{(t-\tau_\nu)\omega'_n(\tau_\nu)}\omega_n(t)w(t)\mathrm{d}\,t=0,\quad \nu=1,2,\ldots,n.$$

adică,

$$\int_a^b \ell_\nu(t)\omega_n(t)w(t)\mathrm{d}\,t = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Deoarece $\{\ell_\nu(t)\}_{\nu=1}^n$ formează o bază a lui $\mathbb{P}_{n-1}$ (ℓ_ν sunt liniar independente şi generează $\mathbb{P}_{n-1}$), ω_n trebuie să fie ortogonal pe $[a, b]$ în raport cu $w(t) = 1$ pe toate polinoamele de grad mai mic, adică, $\omega_n(t) = \pi_n(t; w)$. Se obţine o formulă de cuadratură gaussiană.

■

Problema 2 *Implementaţi în MATLAB o metodă hibridă Newton+înjumătăţire pentru rezolvarea ecuaţiei* $f(x) = 0$*,* $f \in C^1$*. Testaţi pentru* $f(x) = J_0(x)$*, pe intervalul* $[0, 4]$ *şi comparaţi cu metoda lui Newton pentru* $x_0 = 0.01$.

```
function [xFinal,ni]=Newtonsafevb(f,fd,a,b,tol,nitmax,varargin)
% NEWTSAFEVB - root-finder using hybrid Newton-Bisection method to always maintain bracket
%
% [xFinal, xN, errorN, ni]=Newtonsafe(f,fd,a,b,tol,nitmax,varargin)
%
% f, fd - returns the function and its derivative
% a,b: initial bracket
% tol: stopping condition for error f(x) <= tol or |b-a|<tol*b
%
% xFinal: final value
% xN: vector of intermediate iterates
% errorN: vector of errors
if nargin<6, nitmax=50; end
% initialize the problem
h = b-a;
fa = f(a,varargin{:});
fb = f(b,varargin{:});
if ( sign(fa) == sign(fb) )
    error('function must be bracketed to begin with' );
end
c = a ; % start on the left side (could also choose the middle
fc = f(c,varargin{:}); df=fd(c,varargin{:}) ;
%xN(1) = c;
%errorN(1,:) = [ abs(fc) h ];
% begin iteration until convergence or Maximum Iterations
ni=1;
for i = 1:nitmax
    % try a Newton step
    c = c - fc/df;
    % if not in bracket choose bisection
    if ( ~(a <= c && b >= c) )
        c = a + h/2;
```

```
    end
    % Evaluate function and derivative at new c
    fc = f(c,varargin{:}); df=fd(c,varargin{:});
    % check and maintain bracket
    if ( sign(fc) ~= sign(fb) )
        a=c;
        fa=fc;
    else
        b = c;
        fb = fc;
    end
    h = b-a;
    % calculate errors and track solutions
    absError = abs(fc);
    relError = h;
    % check if converged
    if ( absError < tol || relError < tol*b ) %succes
        xFinal=c; ni=i; return;
    end
end
% clean up
error('Maximum iterations exceeded' );
```

Test

```
%testsub3
g = @(x) besselj(0,x);
gd = @ (x) -besselj(1, x);
[z2,ni2]=Newton(g,gd,0.01,tol)
[z5, ni5]=Newtonsafevb(g,gd,0,4,tol)
```

Rezultate:

```
z2 =
200.2772
ni2 =
5
z5 =
2.4048
ni5 =
4
```

Subiectul 4

Problema 3 *(a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a obţine formula de cuadratură (cu gradul de exactitate $d \geq 2$) de forma*

$$\int_0^1 y(s)\mathrm{d}\, s \approx ay(0) + by(1) - c\left[y'(1) - y'(0)\right] + R(f).$$

(b) Transformaţi formula de la (a) într-o formulă pentru a aproxima $\int_x^{h+x} f(t)\mathrm{d}\, t$.

(c) Obţineţi o formulă de integrare repetată bazată pe formula de la (b) pentru a aproxima $\int_a^b f(t)\mathrm{d}\, t$. Interpretaţi rezultatul.

Soluţie.

(a) Punând $y(s) = 1$, $y(s) = s$, $y(s) = s^2$, din condiţiile de exactitate se obţine

$$\begin{aligned} a + b + 0c &= 1 \\ 0a + b - 0c &= \frac{1}{2} \\ 0a + b - 2c &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţia este: $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{12}$, adică,

$$\int_0^1 y(s)\mathrm{d}\, s = \frac{1}{2}\left[y(0) + y(1)\right] - \frac{1}{12}\left[y'(1) - y'(0)\right] + R(f)$$

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_0^1 s^2(s-1)^2 \mathrm{d}\, s = \frac{1}{720} f^{(4)}(\xi)$$

:

(b) Schimbarea de variabilă $t = x + hs$, $dt = hds$ ne conduce la

$$\begin{aligned} \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}\, t = h\int_0^1 (x+hs)\,\mathrm{d}\, s &= \frac{h}{2}\left[f(x) + f(x+h)\right] \\ &- \frac{h^2}{12}\left[f'(x+h) - f'(h)\right] + \frac{h^4}{720} f^{(4)}\left(\zeta\right). \end{aligned}$$

(c) Punând $h = (b-a)/n$, $x_k = a + kh$, $f_k = f(x_k)$, $f'_k = f'(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, obţinem folosind (b), că

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\mathrm{d}\, t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_k+h} f(t)\mathrm{d}\, t &\approx \frac{h}{2}\left[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \cdots\right. \\ &+ \left.(f_{n-1} + f_n)\right] - \frac{h^2}{12}\left[(f'_1 - f'_0) + (f'_2 - f'_{10}) + \cdots + \left(f'_n - f'_{n-1}\right)\right] \\ &= h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right) - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]. \end{aligned}$$

Restul

$$R_n(f) = \frac{(b-a)^4}{720n^3} f^{(4)}(\zeta)$$

Interpretare regula trapezelor cu o "corecţie la capete". Corecţia aproximează eroarea în formula trapezelor:

$$-\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \approx -\frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right].$$

■

Problema 4 *Implementaţi în MATLAB o metodă hibridă secantă+înjumătăţire pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Testaţi pentru $f(x) = 1 - \frac{2}{x^2-2x+2}$. Câte iteraţii sunt necesare? Comparaţi cu metoda secantei şi a înjumătăţirii.*

```
function [z,ni]=secantsafe(f,a,b,tol)
% SECANTSAFE - safe secant method = secant + bisection
% call z=secantsafe(f,a,b,tol)

% The method uses three points a, b, and c. The points a and b are the next
% points xk and xk?1 in the secant method approximation.
% The points b and c form a sign change interval (proper bracket) for the root.
% The idea behind the method is that if the secant method produces an
% undesirable approximation, we take the midpoint of the sign change interval
% (next bisection iterate) as our next approximation.

% Let fa = f(a), fb = f(b) and fc = f(c) which must satisfy
% Conditions:
% 1. fa, fb, fc ~= 0,
% 2. sign(fb) ~= sign(fc) (sign change interval)
% 3. |fb| <= |fc|.

fa=f(a); fb=f(b);
if fa==0
    z=a; return;
end
if fb==0
    z=b; return;
end
if sign(fa)==sign(fb)
    error('f(a) and f(b) must have different sign')
end
c=a; fc=fa;
ni=0;
while 1 %forever
```

```
    ni=ni+1;
    if abs(fc) < abs(fb) %swap b and c
        t = c; c = b; b = t;
        t = fc; fc = fb; fb = t;
        % In this case, a and b may no longer
        % be a pair of secant iterates, and we must set a = c.
        a = c; fa = fc;
    end
    if abs(b-c) <= tol, break; end %success
    dm = (c-b)/2;
    df = (fa-fb);
    if df == 0
        ds = dm;
    else
        ds = -fb*(a-b)/df;
    end
    if (sign(ds)~=sign(dm) || abs(ds) > abs(dm))%bisection or secant
        dd = dm;
    else
        dd = ds;
    end
    if abs(dd) < tol
        dd = 0.5*sign(dm)*tol;
    end
    % New iterate b+dd
    d = b + dd;
    fd = f(d);
    if fd == 0
        b = d; c = d; fb = fd; fc = fd;
        break;
    end
    a = b; b = d;
    fa = fb; fb = fd;
    if sign(fb) == sign(fc)
        c = a; fc = fa;
    end
end
z=(b+c)/2;
```

Test

```
f=@(x) 1-2./(x.^2-2*x+2);
%[-10,1]
[z1,ni1]=secantsafe(f,-10,1,1e-8)
[z2,ni2]=Bisection(f,-10,1,1e-8)
[z3,ni3]=secant(f,-10,1,1e-8)
```

Rezultate

```
z1 =
-1.9747e-09
ni1 =
11
z2 =
-1.6298e-09
ni2 =
31
Error using secant (line 28)
numarul maxim de iteratii depasit
Error in testsecantsafe2 (line 5)
[z3,ni3]=secant(f,-10,1,1e-8)
```

Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x,\ x > 0.$$

(a) *Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una,* α_n*, în fiecare interval de forma* $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p)*

(b) *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$. *(1p)*

(c) *Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu* $x_0 = n\pi$. *(2p)*

Problema 2 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \sqrt{x} \cos x \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia* $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ *are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix,* $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)\,x + 2\right]$, $\omega \neq 0$, *sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)\,x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) *Determinaţi un interval pentru* ω *astfel ca pentru orice* ω *din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când* $x_0 \neq 1$ *este ales adecvat). (1p)*

(b) *Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi* $x_0 \neq 2$*). (1p)*

(c) *Pentru ce valori ale lui* ω *iteraţia converge pătratic către 1? (1p)*

(d) *Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie* $F(x) = 0$ *şi determinaţi* F*. Pentru ce valori inţiale* x_0 *metoda este convergentă? (2p)*

Problema 4 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Subiectul 7

Problema 5 *Fie* $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ *o diviziune a intervalului* $[a, b]$ *cu* $n-1$ *subintervale. Presupunem că se dau valorile* $f_i = f(x_i)$ *ale unei funcţii* $f(x)$ *în punctele* $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. *În această problemă* $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ *este un spline pătratic din* $C^1[a, b]$ *care interpolează* f *pe* Δ, *adică*, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe* s *unic. (1p)*

(b) *Definim* $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. *Determinaţi* $p_i = s|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, *în funcţie de* f_i, f_{i+1} *şi* m_i. *(1p)*

(c) *Presupunem că luăm* $m_1 = f'(a)$. *(Conform lui (a), aceasta determină* s *în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula* m_2, m_3, $\dots$, m_{n-1}. *(1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Problema 6 (a) *Fie* $w(t)$ *o funcţie pondere pară pe* $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, *adică* $w(-t) = w(t)$ *pe* $[a, b]$. *Arătaţi că* $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, *adică polinomul ortogonal monic de grad* n *în raport cu ponderea* w *este par (impar) dacă* n *este par (impar).*

(b) *Arătaţi că formula gaussiană*

$$\int_a^b f(t) w(t) dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w *pară este simetrică, i.e.*

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu, \; \nu = 1, \dots, n.$$

(c) *Obţineţi o formulă gaussiană de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Subiectul 8

Problema 7 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned}
&\tau_0 = t_0, \ \tau_{n+1} = t_n \\
&\tau_i = \frac{1}{2}\left(t_i + t_{i-1}\right), \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q \in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Problema 8 *(a) Fie* $w(t)$ *o funcţie pondere pară pe* $[a, b]$*,* $a < b$*,* $a+b = 0$*, adică* $w(-t) = w(t)$ *pe* $[a, b]$*. Arătaţi că* $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$*, adică polinomul ortogonal monic de grad* n *în raport cu ponderea* w *este par (impar) dacă* n *este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w *pară este simetrică, i.e.*

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) Obţineţi o formulă gaussiană de forma

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Subiectul 5

Problema 1 *Ecuaţia următoare se foloseşte în inginerie la determinarea vitezelor unghiulare critice pentru axe circulare:*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = \tan x + \tanh x,\ x > 0.$$

(a) *Arătaţi că are o infinitate de rădăcini pozitive, exact câte una,* α_n*, în fiecare interval de forma* $\left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, n\pi\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *(1p)*

(b) *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty}(n\pi - \alpha_n)$*. (1p)*

(c) *Discutaţi convergenţa metodei lui Newton dacă se porneşte cu* $x_0 = n\pi$*. (2p)*

Soluţie. ■

Problema 2 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}\,x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Jacobi. (3p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \sqrt{x}\cos x \mathrm{d}\,x$$

cu 8 zecimale exacte (2p)

1 Subiectul 6

Problema 3 *Ecuaţia* $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ *are rădăcinile 1 şi 2. Scrisă sub forma de punct fix,* $x = \frac{1}{\omega}\left[x^2 - (3-\omega)x + 2\right]$, $\omega \neq 0$*, sugerează iteraţia*

$$x_{n+1} = \frac{1}{\omega}\left[x_n^2 - (3-\omega)x_n + 2\right], \quad n = 1, 2, \ldots \ (\omega \neq 0)$$

(a) *Determinaţi un interval pentru ω astfel ca pentru orice ω din acest interval procesul iterativ să conveargă către 1 (când $x_0 \neq 1$ este ales adecvat). (1p)*

(b) *Faceţi acelaşi lucru ca la (a), dar pentru rădăcina 2 (şi $x_0 \neq 2$). (1p)*

(c) *Pentru ce valori ale lui ω iteraţia converge pătratic către 1? (1p)*

(d) *Interpretaţi algoritmul de la (c) ca o aplicare a metodei lui Newton pentru o ecuaţie $F(x) = 0$ şi determinaţi F. Pentru ce valori inţiale x_0 metoda este convergentă? (2p)*

Problema 4 (a) *Stabiliţi o formulă de cuadratură cu două noduri şi cu grad maxim de exactitate*

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f)$$

reducând cuadratura la o cuadratură de tip Gauss-Legendre. (2p)

(b) *Folosind ideea de la (a), calculaţi*

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}\, x$$

cu 8 zecimale exacte (2p).

Subiectul 7

Problema 5 *Fie $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu $n - 1$ subintervale. Presupunem că se dau valorile $f_i = f(x_i)$ ale unei funcţii $f(x)$ în punctele $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În această problemă $s \in \mathbb{S}_2^1(\Delta)$ este un spline pătratic din $C^1[a, b]$ care interpolează f pe Δ, adică, $s(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

(a) *Explicaţi de ce este necesară o condiţie suplimentară pentru a determina pe s unic. (1p)*

(b) *Definim $m_i = s'(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Determinaţi $p_i = s|_{[x_i, x_{i+1}]}$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, în funcţie de f_i, f_{i+1} şi m_i. (1p)*

(c) *Presupunem că luăm $m_1 = f'(a)$. (Conform lui (a), aceasta determină s în mod unic.) Arătaţi cum se poate calcula m_2, m_3, ..., m_{n-1}. (1p)*

(d) *Implementaţi metoda de calcul a spline-ului de la (a), (b), (c) în MATLAB. (2p)*

Soluţie.

(a) Sunt $3(n-1)$ parametrii şi $2(n-2)+2$ condiţii de interpolare şi $n-2$ condiţii de continuitate a primei derivate. Rămân $3(n-1)-2(n-2)-2-(n-2)=1$ grade de libertate. Avem nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina spline-ul unic.

(b) Cu notaţia $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, obţinem tabela de diferenţe divizate

x	f	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^2$
x_i	f_i	m_i	$\frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}$
x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	
x_{i+1}	f_{i+1}		

Polinoamele p_i sunt

$$p_i(x) = f_i + m_i(x - x_i) + (x - x_i)^2 \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

(c) Impunem $p_i'(x_{i+1}) = m_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Astfel,

$$m_i + 2\Delta x_i \frac{m_i - f[x_i, x_{i+1}]}{\Delta x_i} = m_{i+1} \Longleftrightarrow$$
$$m_i + 2f[x_i, x_{i+1}] - 2m_i = m_{i+1},$$

sau

$$\begin{cases} m_1 = f'(a) \\ m_{i+1} = 2f[x_i, x_{i+1}] - m_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-2 \end{cases}$$

■

Problema 6 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a + b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) *Arătaţi că formula gaussiană*

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \dots, n.$$

(c) *Obţineţi o formulă gaussiană de forma*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t)\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\, (-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = 48 - 4\alpha = 0,$$

adică $\alpha = 12$. Nodurile sunt $x_1 = -2\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2\sqrt{3}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 2 \\ A_1(-2\sqrt{3})^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1(-2\sqrt{3})^2 = 24A_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 4 \end{aligned}$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 24A_1 &= 4 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{5}{3}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= 4 \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-|x|} \mathrm{d}\, x = 48 \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= 4 \\ 2A_1 x_1^4 &= 48 \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1=\frac{1}{6}, A_2=\frac{5}{3}, x_1=-2\sqrt{3}\right], \left[A_1=\frac{1}{6}, A_2=\frac{5}{3}, x_1=2\sqrt{3}\right]$
Restul

$$R(f)=\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\left(x^3-12x\right)^2 \mathrm{d}\,x=\frac{6}{5}f^{(6)}(\xi).$$

: $\frac{6}{5}f^6\xi$

■

Subiectul 8

Problema 7 *Presupunem că se dă diviziunea* $\Delta : a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$*; fie nodurile*

$$\begin{aligned}&\tau_0=t_0,\ \ \tau_{n+1}=t_n\\ &\tau_i=\frac{1}{2}\left(t_i+t_{i-1}\right),\quad i=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Determinaţi un spline pătratic $Q\in S_2^1(\Delta)$ *care în nodurile date ia nişte valori prescrise:*

$$Q(\tau_i)=y_i,\quad i=0,1,\dots,n.$$

Implementaţi metoda de calcul a spline-ului în MATLAB.

Soluţie. Fie $Q_i=Q|_{[t_i,t_{i+1}]}$ şi $m_i=Q'(t_i)$. Căutăm Q_i sub forma

$$Q_i(x)=y_{i+1}+c_{i,1}(x-\tau_{i+1})+c_{i,2}(x-\tau_{i+1})^2. \tag{1}$$

Obţinem $c_{i,1}$ şi $c_{i,2}$ din condiţiile $Q_i(\tau_{i+1})=y_{i+1}$, $Q_i'(t_i)=m_i$ şi $Q_i'(t_{i+1})=m_{i+1}$. Aceste condiţii ne conduc la

$$Q_i(x)=y_{i+1}+\frac{1}{2}\left(m_i+m_{i+1}\right)(x-\tau_{i+1})+\frac{1}{2h_i}(m_{i+1}-m_i)(x-\tau_{i+1})^2, \tag{2}$$

unde $h_i=x_{i+1}-x_i$. Impunând condiţia de continuitate pe nodurile interioare

$$\lim_{x\to t_i^-}Q_{i-1}(x)=\lim_{x\to t_i^+}Q_i(x)$$

se obţine

$$h_{i-1}m_{i-1} + 3(h_{i-1} + h_i)m_i + h_i m_{i+1} = 8(y_{i+1} - y_i), \quad i = 1, \ldots, n-1. \quad (3)$$

Trebuie impuse condiţii de interpolare pe capete

$$Q(\tau_0) = y_0, \qquad Q(\tau_{n+1}) = y_{n+1}.$$

Aceste două condiţii ne conduc la ecuaţiile

$$\begin{aligned} 3h_0 m_0 + h_0 m_1 &= 8(y_1 - y_0) \\ h_{n-1}m_{n-1} + 3h_{n-1}m_n &= 8(y_{n+1} - y_n) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuaţii pentru vectorul $\mathbf{m} = [m_0, m_1, ..., m_n]^T$ se scrie sub forma

$$\begin{bmatrix} 3h_0 & h_0 & & & & \\ h_0 & 3(h_0+h_1) & h_1 & & & \\ & h_1 & 3(h_1+h_2) & h_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-2} & 3(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-1} & 3h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix}$$

$$= 8 \begin{bmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \\ \vdots \\ y_n - y_{n-1} \\ y_{n+1} - y_n \end{bmatrix}.$$

Sistemul are $n+1$ ecuaţii, $n+1$ necunoscute, este tridiagonal, simetric şi diagonal dominant. După obţinerea vectorului $\mathbf{m}$, valorile lui $Q(x)$ se pot calcula folosind formula (2). ■

Problema 8 *(a) Fie $w(t)$ o funcţie pondere pară pe $[a, b]$, $a < b$, $a+b = 0$, adică $w(-t) = w(t)$ pe $[a, b]$. Arătaţi că $(-1)^n \pi_n(-t; w) = \pi_n(t, w)$, adică polinomul ortogonal monic de grad n în raport cu ponderea w este par (impar) dacă n este par (impar).*

(b) Arătaţi că formula gaussiană

$$\int_a^b f(t)w(t)dt = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f(t_\nu) + R_n(f),$$

pentru o pondere w pară este simetrică, i.e.

$$t_{n+1-\nu} = -t_\nu, \qquad A_{n+1-\nu} = A_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n.$$

(c) *Obţineţi o formulă gaussiană de forma*

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

Folosiţi (a) şi (b) pentru a simplifica calculele.

Soluţie.

(a) Fie $\overline{\pi}_n(t)(t) = (-1)^n \pi_n(-t)$. Se observă că

$$\begin{aligned}(\overline{\pi}_n, \overline{\pi}_m) &= \int_{-a}^{a} w(t)\overline{\pi}_n(t)\overline{\pi}_m(t)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(t)\pi_n(-t)\pi_m(-t)\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(-u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = (-1)^{n+m} \int_{-a}^{a} w(u)\pi_n(u)\pi_m(u)\mathrm{d}\, t = 0\end{aligned}$$

Deci polinoamele $(\overline{\pi}_n)$ sunt ortogonale pe $[-a, a]$ în raport cu ponderea w şi sunt monice, deci $\pi_n = \overline{\pi}_n$.

(b) Simetria nodurilor rezultă din paritatea/imparitatea polinoamelor ortogonale. Simetria coeficienţilor: deoarece $(-1)^n \pi_n'(-t) = \pi_n'(t)$, avem

$$\begin{aligned}A_{n+1-\nu} &= \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_{n+1-\nu})\, w'(t_{n+1-\nu})}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(t)}{(-t - t_{n+1-\nu})\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(-t)w(-t)}{(-t - t_\nu)\,(-1)^{n+1}\, w'(-t_\nu)}\mathrm{d}\, t = \int_{-a}^{a} \frac{\pi_n(t)w(t)}{(t - t_\nu)\, w'(t_\nu)}\mathrm{d}\, t \\ &= A_\nu.\end{aligned}$$

(c) Din simetria nodurilor şi coeficienţilor rezultă că

$$\int_{-1}^{1} |x|\, f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(0) + A_1 f(-x_1) + R(f).$$

Polinomul ortogonal are forma

$$\pi_3(x) = x^3 - \alpha x.$$

El trebuie să fie ortogonal pe $\pi_1(x) = x$, adică

$$\int_{-1}^{1} |x|\, x \left(x^3 - \alpha x\right) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\alpha = 0,$$

adică $\alpha = \frac{2}{3}$. Nodurile sunt $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Din condiţiile de exactitate avem

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2A_1 + A_2 = \int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}\, x = 2$$

$$A_1 \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 + A_2 \cdot 0^2 + A_1 \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3} A_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \,|x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}$$

adică

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ \frac{4}{3} A_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}\right]$. Altfel: rezolvăm sistemul neliniar

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ -A_1 x_1 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1 &= 0 \\ A_1 x_1^2 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ A_1 x_1^4 + A_2 \cdot 0 + A_1 x_1^4 &= \int_{-1}^{1} x^4 \,|x| \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} 2A_1 + A_2 &= 2 \\ 2A_1 x_1^2 &= \frac{1}{2} \\ 2A_1 x_1^4 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Soluţiile: $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$, $\left[A_1 = \frac{3}{8}, A_2 = \frac{5}{4}, x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{3}\right]$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^{1} |x| \left(x^3 - \frac{2}{3}x\right)^2 \mathrm{d}\, x = \frac{1}{25\,920} f^{(6)}(\xi).$$

■

Setul 1

Problema 1 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul natural de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$p_1(x) = f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3$$
$$p_2(x) = f(0) + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3$$

Conditii :Condiţii de netezime

$$p_1(0) = p_2(0)$$
$$p_1'(0) = p_2'(0)$$
$$p_1''(0) = p_2''(0)$$

Condiţii de spline natural

$$p_1''(-1) = 0$$
$$p_2''(1) = 0$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 0$. (1p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} b_1 + c_1 + d_1 &= 1 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ 2c_1 &= 0 \\ 6d_2 + 2c_2] &= 0 \\ 1 + b_2 + c_2 + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = 0, c_1 = 0, c_2 = -\frac{3}{2}, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = \frac{1}{2}\right]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1+t) - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = -1$. (2p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 2m_1 + m_2 &= 3 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 0 \\ m_2 + 2m_3 &= -3 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = 0, m_3 = -\frac{3}{2}\right]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{ll} c_{1,0} = 0, & c_{2,0} = 1 \\ c_{1,1} = \frac{3}{2}, & c_{2,1} = 0 \\ c_{1,2} = 0, & c_{2,2} = -\frac{3}{2} \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\blacksquare$

Problema 2 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{\sqrt{a}}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Deduceţi de aici o metodă pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri. (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0$. (1p) Se obţine iteraţia

$$\varphi(x) = x - \frac{\frac{1}{x^2} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right)} = x - \frac{1}{2}x^3\left(a - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}x\left(3 - ax^2\right)$$

sau

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n\left(3 - ax_n^2\right).$$

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = -\frac{2}{x^3} < 0$, pentru $x > 0$; $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x^2} - a\right) = \frac{6}{x^4} > 0$, pentru $x > 0$. Deci orice valoare $x_0 > 0$ se poate lua ca valoare de pornire. (0.5) Pentru calculul lui $\sqrt{a}$ fără împărţiri: $\sqrt{a} = a\frac{1}{\sqrt{a}}$. $\blacksquare$

Setul 2

Problema 3 *Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ şi diviziunea $\Delta : x_1 = -1 < x_2 = 0 < x_3 = 1$, determinaţi spline-ul complet de interpolare. (5p)*

Soluţie. (3p) Pe porţiuni:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(-1) + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 \\ p_2(x) &= f(0) + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3 \end{aligned}$$

Conditii :Condiţii de netezime

$$\begin{aligned} p_1(0) &= p_2(0) \\ p_1'(0) &= p_2'(0) \\ p_1''(0) &= p_2''(0) \end{aligned}$$

Condiţii de spline complet

$$\begin{aligned} p_1'(-1) &= f'(-1) \\ p_2'(1) &= f'(1) \end{aligned}$$

Interpolare în 1: $p_2(1) = f(1) = 1$. (1p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} -1 + b_1 + c_1 + d_1 &= 0 \\ b_1 + 2c_1 + 3d_1 &= b_2 \\ 2c_1 + 6d_1 &= 2c_2 \\ b_1 &= 0 \\ 3d_2 + 2c_2 + b_2 &= 0 \\ b_2 + c_2 + d_2 &= 1 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[b_1 = 0, b_2 = \frac{3}{2}, c_1 = \frac{3}{2}, c_2 = 0, d_1 = -\frac{1}{2}, d_2 = -\frac{1}{2}\right]$. Expresia spline-ului:

$$s(x) = \begin{cases} -1 + \frac{3}{2}(t+1)^2 - \frac{1}{2}(t+1)^3, & t \in [-1, 0] \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3, & t \in (0, 1]. \end{cases}$$

■

Soluţie 2. (1p) Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x) = p_i(x) = c_{i,0} + c_{i,1}(x - x_i) + c_{i,2}(x - x_i)^2 + c_{i,3}(x - x_i)^3$. Ca la curs notăm $s'(x_i)$ cu m_i. Avem $\Delta x_1 = 1$, $\Delta x_2 = 1$; $f[x_1, x_2] = 1$, $f[x_2, x_3] = 1$. (2p) Se obţine sistemul

$$\begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_1 + 4m_2 + m_3 &= 6 \\ m_3 &= 0 \end{aligned}$$

(1p) Soluţiile: $\left[m_1 = 0, m_2 = \frac{3}{2}, m_3 = 0\right]$. (1p) Aplicând formulele pentru coeficienţi obţinem

$$\begin{array}{ll} c_{1,0} = -1, & c_{2,0} = 0 \\ c_{1,1} = 0, & c_{2,1} = \frac{3}{2} \\ c_{1,2} = \frac{3}{2}, & c_{2,2} = 0 \\ c_{1,3} = -\frac{1}{2}, & c_{2,3} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

■

Problema 4 *Fie $a > 0$. Pornind de la o ecuaţie convenabilă şi folosind metoda lui Newton, deduceţi o metodă pentru aproximarea lui $\frac{1}{a}$ fără împărţiri. Cum se alege valoarea de pornire? Care este criteriul de oprire? Cum veţi proceda pentru o implementare eficientă în virgulă flotantă? (4p)*

Soluţie. (1p) Pornim de la ecuaţia $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$. (1p) Iteraţia

$$\varphi(x) := x - \frac{\frac{1}{x} - a}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} - a\right)} = x - x^2\left(a - \frac{1}{x}\right) = x\,(2 - ax)$$

sau $x_{n+1} = x_n\,(2 - ax_n)$.

(0.5p) Criteriul de oprire: $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. (1p) Alegerea valorii de pornire:

$$|x_n - 1/a| < a\left(\frac{1}{a} - x_{n-1}\right)^2 < \cdots < \frac{1}{a^{2^n-1}}\left(\frac{1}{a} - x_0\right)^{2^n}$$

(x_n) covergent $\iff 0 < ax_0 < 2$. (0.5) $x_0 = \frac{3}{2}$, maxim 5 iteraţii, $(2^e f)^{-1} = 2^{-e}(1/f)$ ■

Setul 3

Problema 5 *Se consideră ecuaţia $f(x) = xe^x - 1 = 0$. Dorim să o rezolvăm aplicând metoda aproximaţiilor succesive, rezolvând problema de punct fix $x = F(x)$ în două moduri* *(a)* $F(x) = e^{-x}$

(b) $F(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

Arătaţi că în ambele cazuri iteraţiile $x_k = F(x_k)$ sunt convergente, determinaţi ordinul de convergenţă şi numărul de iteraţii necesare pentru a obţine precizia $\varepsilon = 10^{-10}$. (6p)

Soluţie.

(a) (2p) $x = e^{-x}$, Solutia: $\{[\alpha = 0.567\,14]\}$. $F'(x) = |\exp(-x)| < 1$, pentru $x > 0$. Deoarece $F'(\alpha) \neq 0$, $ordF = 1$. (0.5 p) Numărul de iteraţii: din teorema de punct fix a lui Banach

$$|x_{n+1} - \alpha| < \frac{c^n}{1-c}|x_1 - x_0| < \varepsilon$$

unde $c = \max\{|F'(x)|, x \in I_\varepsilon\}$. Se obţine

$$n = \left[\frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-c) - \ln|x_1 - x_0|}{\ln c}\right] + 1.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.2$ şi $\varepsilon = 10^{-10}$ sunt necesare 122 de iteraţii.

(b) (3p) $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{xe^x-1}{(e^x+1)^2}$; $F'(\alpha) = 0$ căci $f(\alpha) = 0$. $F''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1+x}{1+e^x}\right) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}(x + e^x - xe^x + 3) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^3}(x + e^x - xe^x + 3)$. Dar, $F''(\alpha) = -\frac{e^\alpha}{(e^\alpha+1)^3}(\alpha + e^\alpha + 2) \neq 0$, deoarece $\alpha\exp(\alpha) = 1$. $ordF = 2$. **Altfel**: Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = x - e^{-x} = 0$. (0.5) Numărul de iteraţii: Deoarece ordinul de convergenţă este 2 pornim de la relaţia de recurenţă

$$e_{n+1} \approx ce_n^2.$$

Se obţine

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\approx ce_n^2 = c^{1+2}e_{n-1}^{2^2} = c^{1+2+\cdots+2^{n-1}}e_0^{2^n} = c^{2^n-1}e_0^{2^n} \\ &= \frac{1}{c}(ce_0)^{2^n} < \varepsilon \Longrightarrow (ce_0)^{2^n} < c\varepsilon \end{aligned}$$

n se obţine prin logaritmare

$$n = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\ln c + \ln\varepsilon}{\ln c + \ln|e_0|}.$$

De exemplu, pentru $x_0 = 0.4$, avem $e_0 \approx 0.18$ şi avem nevoie cam de 3 iteraţii.

■

Problema 6 *Fie $f \in C^4[-1,1]$. Determinaţi un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condiţiile*

$$P(-1) = f(-1),\ P'(-1) = f'(-1),\ P(0) = f(0),\ P(1) = f(1)$$

şi determinaţi expresia restului.(3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 1$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 0$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f'(-1)$	$f(0) - f(-1) - f'(-1)$	$\frac{f(1)-4f(0)+3f(-1)+2f'(-1)}{4}$
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$		
1	$f(1)$			

(0.5) Polinomul de interpolare

$$\begin{aligned}(H_3 f)(x) &= f(-1) + (t+1)f'(-1) + (t+1)^2\left[f(0) - f(-1) - f'(-1)\right] \\ &\quad + (t+1)^2 t\left[\frac{f(1) - 4f(0) + 3f(-1) + 2f'(-1)}{4}\right]\end{aligned}$$

(1p) Restul

$$(R_3 f)(x) = \frac{(t+1)^2 t(t-1)}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■

Setul 4

Problema 7 *(6p) Pentru a rezolva ecuaţia $f(x) = 0$ se aplică metoda lui Newton funcţiei $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$.*

(a) Scrieţi formula iterativă care se obţine şi determinaţi ordinul de convergenţă.

(b) Aplicaţi metoda de la punctul (a) pentru a aproxima $\sqrt{a}$, $a > 0$.

Soluţie.

(a) (2p)

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x - \frac{g(x)}{g'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\left(\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}\right)'} \\ &= x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{1}{2}\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} = x - \frac{f(x)}{f'(x)\left[1 - \frac{f(x)f''(x)}{2f'^2(x)}\right]}.\end{aligned}$$

adică,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \frac{1}{2}\frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{1}$$

(2p) Ordinul de convergenţă: Fie α rădăcina lui $f(x) = 0$. Se observă că $\varphi(\alpha) = \alpha$ şi că

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{f^2(\alpha)\left[2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) - 3\,(f''(\alpha))^2\right]}{\left[2\,f'(\alpha)^2 - f(\alpha)\,f''(\alpha)\right]^2} = 0$$

$$\varphi''(\alpha) = -2\,\frac{f(\alpha)\,G(x)}{\left[2\,(f'(\alpha))^2 - f(\alpha)\,f''(\alpha)\right]^3} = 0$$

$$\varphi'''(\alpha) = \frac{-2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) + 3\,(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} \neq 0,$$

deci dacă rădăcina este simplă ordinul de convergenţă este $p = 3$, dar putem avea $p > 3$ dacă

$$\frac{-2\,f'''(\alpha)\,f'(\alpha) + 3\,(f''(\alpha))^2}{3f'^2(\alpha)} = 0$$

(b) (2p) Alegând $f(x) = x^2 - a$, din (1) se obţine

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3a\right)}{3x_n^2 + a}.$$

■

Problema 8 *Fie $f \in C^4[-1,1]$. Determinaţi un polinom de interpolare P de grad minim care verifică condiţiile*

$$P(-1) = f(-1), \quad P(0) = f(0), \; P(1) = f(1), P'(1) = f'(1).$$

şi determinaţi expresia restului. (3p)

Soluţie. (1.5p) Folosim metoda diferenţelor divizate: $x_0 := -1$, $r_0 = 0$, $x_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_2 = 1$, $r_2 = 1$. Gradul polinomului este $n = \sum(r_i + 1) - 1 = 3$. Tabela diferenţelor divizate

	D^0	D^1	D^2	D^3
-1	$f(-1)$	$f(0) - f(-1)$	$\frac{f(1)-2f(0)+f(-1)}{2}$	$\frac{2f'(1)-3f(1)+4f(0)-f(-1)}{4}$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	$f'(1) - f(1) + f(0)$	
1	$f(1)$	$f'(1)$		
1	$f(1)$			

(0.5) Polinomul de interpolare

$$(H_3 f)(x) = f(-1) + (t+1)\left[f(0) - f(-1)\right] + (t+1)t\left[\frac{f(1) - 2f(0) + f(-1)}{2}\right]$$
$$+ (t+1)t(t-1)\left[\frac{2f'(1) - 3f(1) + 4f(0) - f(-1)}{4}\right].$$

Restul

$$(R_3 f)(x) = \frac{(t+1)t(t-1)^2}{4!} f^{(4)}(\xi).$$

■

Setul 1

Problema 1 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x = 0$ şi $x = 1$ şi f' în $x = 0$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0, 1]$). (3p)*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\,x = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$. (2p)

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f'(0)$	$f(1) - f(0) - f'(0)$
0	$f(0)$	$f(1) - f(0)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2 f)(t) = f(0) + tf'(0) + t^2 \left[f(1) - f(0) - f'(0)\right],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2 f)(t) = \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1) + \frac{1}{6} f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2 f)(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t^2(t-1)}{3!} f'''(\xi)\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{72} f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2 f)(0) = c = f(0)$, $(H_2 f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2 f)'(0) = b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 2 *Concepeţi o metodă pentru a calcula $\sqrt[20]{a}$, $a > 0$, bazată pe metoda lui Newton. (2p) De ce o astfel de metodă este lent convergentă? (A se vedea de exemplu $a = 1$ şi $x_0 = \frac{1}{2}$). (1p) Ce se poate face? Gândiţi-vă şi la o altă metodă. (1p)*

Soluţie. $f(x)=x^{20}-a$, $f'(x)=20x^{19}$, $f''(x)=20\cdot 19\cdot x^{18}$,

$$x_{n+1}=\frac{19x_n^{20}+a}{20x_n^{19}}=\frac{19}{20}x_n+\frac{a}{20x_n^{19}}$$

Deoarece pe $(0,\infty)$ $f'>0$, $f''>0$, orice $x_0>0$ este bun ca valoare de pornire. (2p) Ţinând cont că $x_{n+1}\approx\frac{19}{20}x_n$ dacă x_n este mare, pentru $a=1$ şi $x_0=1/2$, se obţine

$$x_1=\frac{19\cdot(0.5)^{20}+1}{20\cdot(0.5)^{19}}=26215,$$

si deoarece la fiecare pas aproximanta este redusă cu un factor $\frac{19}{20}=0.95$ avem nevoie cam de 200 de iteraţii. Odată ce ne apropiem de rădăcină, viteza de convergenţă creşte dramatic (1p).

Folosind criteriul de alegere a valorii de pornire $f(x_0)f''(x_0)>0$ şi folosind inegalitatea mediilor

$$\sqrt[20]{a\cdot 1\cdots 1}\leq\frac{a+19}{20}=:x_0.$$

Altă metodă: se poate folosi formula lui Taylor pentru seria binomială

$$(1-x)^{1/20}=1-\frac{1}{20}x-\frac{19}{800}x^2-\frac{247}{16\,000}x^3-\frac{14\,573}{1280\,000}x^4-\frac{1151\,267}{128\,000\,000}x^5+O\left(x^6\right)$$

sau aproximând $\sqrt[20]{a}=\exp\left(\frac{1}{20}\ln a\right)$.(1p) ■

Setul 2

Problema 3 *(a) Determinaţi forma Newton a polinomului de interpolare p ce interpolează f în $x=0$ şi $x=1$ şi f' în $x=1$. Exprimaţi eroarea cu ajutorul unei derivate de ordin corespunzător a lui f (presupusă continuă pe $[0,1]$).*

(b) Folosind rezultatul de la (a), deduceţi o formulă de cuadratură de tipul

$$\int_0^1 f(x)dx=a_0f(0)+a_1f(1)+b_0f'(1)+R(f)$$

Determinaţi a_0, a_1, b_0 şi $R(f)$.

Soluţie.

(a) (1p) Tabela de diferenţe divizate este

0	$f(0)$	$f(1)-f(0)$	$f'(1)-f(1)+f(0)$
1	$f(1)$	$f'(1)$	
1	$f(1)$		

Gradul polinomului de interpolare este 2. (1p) Expresia polinomului de interpolare este

$$(H_2f)(t)=f(0)+t\left[f(1)-f(0)\right]+t(t-1)\left[f'(1)-f(1)+f(0)\right],$$

iar restul este (1p)

$$(R_2 f)(t) = \frac{t(t-1)^2}{3!} f'''(\xi).$$

(b) Integrând termen cu termen se obţine (1p)

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(1) - \frac{1}{6}f'(0) + R(f)$$

unde (1p)

$$R(f) = \int_0^1 (R_2 f)(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^1 \frac{t(t-1)^2}{3!} f'''(\xi)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{72} f'''(\xi).$$

Altfel: direct $(H_2 f)(x) = ax^2 + bx + c$, $(H_2 f)(0) = c = f(0)$, $(H_2 f)(1) = a + b + c = f(1)$, $(H_2 f)'(1) = 2a + b = f'(1)$. (2p). ■

Problema 4 *Se consideră ecuaţia* $x = \cos x$.

(a) Arătaţi grafic că are o rădăcină pozitivă unică α. *Indicaţi, aproximativ, unde este situată.*

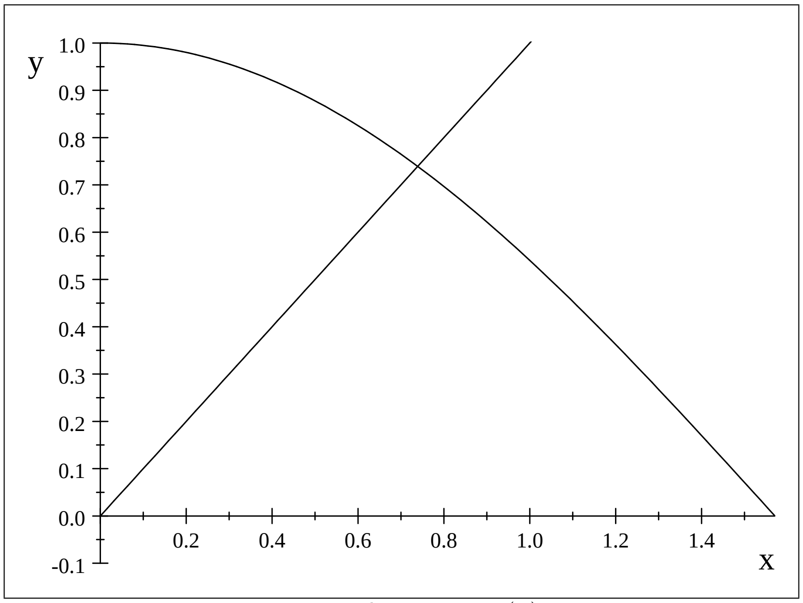
(b) Demonstraţi convergenţa locală a iteraţiei $x_{n+1} = \cos x_n$.

(c) Pentru iteraţia de la (b) demonstraţi că dacă $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *atunci*

$$|x_{n+1} - \alpha| < \sin\frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|.$$

În particular, are loc convergenţa globală pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Arătaţi că metoda lui Newton aplicată ecuaţiei $f(x) = 0$, $f(x) = x - \cos x$, *converge global pe* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



Punctul fix al lui $\cos(x)$

Soluţie.

(a) $x = \cos(x)$, Soluţia $\alpha \approx 0.739\,09$

(b)
$$|\varphi'(x)| = |\sin(x)| < 1$$
pentru $x \in (0, \pi/2)$. $I_\varepsilon = \{x : |x - \alpha| < \varepsilon\}$. Se poate alege $I_\varepsilon \subset [0.6, 0.8]$;

(c)
$$|x_{n+1} - \alpha| = |\cos x_n - \cos \alpha| = \left| 2 \sin \frac{x_n + \alpha}{2} \sin \frac{x_n - \alpha}{2} \right| \le \sin \frac{\alpha + \pi/2}{2} |x_n - \alpha|$$
pentru $x_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, şi deoarece $\sin \frac{\alpha+\pi/2}{2} < 1$ in acest interval, rezultă convergenţa globală.

(d) $f(x) = x - \cos(x)$, $f'(x) = 1 + \sin(x) > 0$, $f''(x) = \cos(x) > 0$ pentru $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Se poate alege orice x_0 din $(0, \pi/2)$.
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + \sin(x_n)}$$
Pentru $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi pentru $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$ avem $f(x_1) f''(x_1) > 0$.

■

Setul 3

Problema 5 *(a) Utilizaţi metoda coeficienţilor nedeterminaţi pentru a construi o formulă de cuadratură de tipul*

$$\int_0^1 f(x)dx = af(0) + bf(1) + cf''(\gamma) + R(f)$$

cu gradul maxim de exactitate d, nedeterminatele fiind a, b, c şi γ.(3p)

(b) Arătaţi că nucleul lui K_d al restului formulei obţinute la (a) are semn constant şi exprimaţi restul sub forma (2p)

$$R(f) = e_{d+1}f^{(d+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1.$$

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)dx - af(0) - bf(1) - cf''(\gamma)$$

şi scriind că formula este exactă pentru $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ se obţine sistemul

$$\begin{aligned} 1 - a - b &= 0 \\ \frac{1}{2} - b &= 0 \\ \frac{1}{3} - b - 2c &= 0 \\ \frac{1}{4} - b - 6c\gamma &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{12}, \gamma = \frac{1}{2}.$$

Deoarece $R(e_4) \neq 0$, $dex = 3$. Nucleul lui Peano este

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{3!}R\left((x-t)_+^3\right) &= \begin{cases} -\frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{24} + \frac{1}{12}t - \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{24}t^4 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{24}t^3\left(t-2\right) & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{24}\left(t+1\right)\left(t-1\right)^3 & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \le 0 \end{aligned}$$

Aplicând corolarul la teorema lui Peano

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)R(e_4) \\ &= \frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)\left[\int_0^1 x^4 dx - \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}f(1) + \frac{2}{12}\cdot 12\frac{1}{2^2}\right] \\ &= -\frac{1}{480}f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

■

Problema 6 *(a) Să se arate că şirul dat prin relaţia de recurenţă*

$$x_{n+1} = x_n + (2 - e^{x_n})\frac{x_n - x_{n-1}}{e^{x_n} - e^{x_{n-1}}}, x_0 = 0, x_1 = 1$$

este convergent şi să se determine limita sa. (3p)

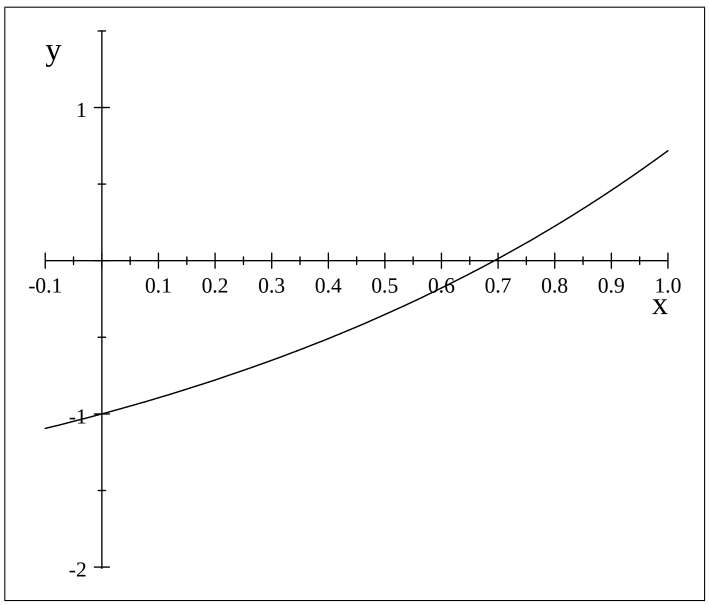
(b) Iteraţia din metoda secantei se poate scrie şi sub forma (1p)

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Din punct de vedere al erorii, care formă este mai bună în programe, forma aceasta sau forma clasică? Justificaţi riguros raspunsul.

Soluţie.

(a) Şirul se obţine aplicând metoda secantei funcţiei $f(x) = e^x - 2$ (1p)



cu rădăcina $\alpha = \ln 2$ şi valorile de pornire menţionate. Convergenţa: f convexă, crescătoare

$$M(\varepsilon) = \max_{s,t} \frac{f''(s)}{2f'(t)} = \max_{s,t} \frac{e^s}{e^t} = \max_{s,t} e^{s-t} = e$$

Luând $\varepsilon < 1/e = 0.367\,88$, se obţine $\varepsilon M(\varepsilon) < 1$, deci convergenţa. (2p)

(b) În forma din enunţ, avem anulări flotante. Justificarea anulărilor flotante-1p

■

Setul 4

Problema 7 *(a) Construiţi o formulă Newton-Cotes cu ponderi*

$$\int_0^1 f(x)x^\alpha dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + R(f),\ \alpha > -1.$$

Explicaţi de ce formula are sens.

(b) Deduceţi o expresie a erorii $R(f)$ în funcţie de o derivată adecvată a lui f.

Soluţie. Definind

$$R(f) = \int_0^1 f(x)x^\alpha dx - a_0 f(0) - a_1 f(1)$$

şi scriind că formula este exactă pentru 1 şi x obţinem sistemul

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+1} - a_0 - a_1 &= 0 \\ \frac{1}{\alpha+2} - a_1 &= 0 \end{aligned}$$

cu soluţiile

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha^2+3\alpha+2} \\ a_1 &= \frac{1}{\alpha+2} \end{aligned}$$

Deoarece $R(e_2) \neq 0$, $dex = 1$. Pentru rest folosim teorema lui Peano

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{1!} R\left[(x-t)_+\right] \\ &= \begin{cases} \frac{t^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x < t \\ \frac{t^{\alpha+2}-t}{(\alpha+1)(\alpha+2)} & x \geq t \end{cases} \geq 0 \end{aligned}$$

Folosind corolarul la TP

$$R(f) = \frac{1}{2!} f''(\xi) R(e_2) = \frac{-1}{2\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)} f''(\xi).$$

■

Problema 8 *Se consideră iteraţia*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)^2}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pentru rezolvarea ecuaţiei $f(x) = 0$. Explicaţi legătura cu iteraţia Newton şi arătaţi că (x_k) converge pătratic dacă x_0 este suficient de apropiată de soluţie. (2p - legatura cu Newton+ covergenta, 2p ordinul de convergenta).

Soluţie. Iteraţia se scrie sub forma

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} f(x_k),$$

iar dacă este convergentă x_k este apropiat de rădăcină, $f(x_k) \approx 0$,

$$\frac{f(x_k)}{f\left(x_k + f(x_k)\right) - f(x_k)} \approx \frac{1}{f'(x_k)}$$

iar limita va fi rădăcina căutată α. (2p) Scriem iteraţia sub forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f\left(x_n + f(x_n)\right) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

Pentru a arăta convergenţa pătratică punem $\beta_n = f(x_n)$ şi dezvoltăm $g(x_n)$ cu Taylor

$$g(x_n) = f'(x_n)\left[1 - \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right)\right]$$

unde $h_n = -f(x_n)/f'(x_n)$.Deci

$$x_{n+1} = x_n + h_n\left[1 + \frac{1}{2} h_n f''(x_n) + O\left(\beta_n^2\right)\right]$$

Utilizând expresia erorii pentru Newton obţinem

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \to \frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1 + f'(\alpha)\right].$$

(2p)

Altfel. Punem

$$\varphi(x) = x - \frac{f^2(x)}{f(x + f(x)) - f(x)}$$

şi arătăm că $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\varphi'(\alpha) = 0$, $\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[1 + f'(\alpha)\right] \neq 0$. ■

1 Subiectul 1

Problema 1 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (4p)

(b) Folosind formula de la punctul (a), să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\,x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator) (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{-1}^1 \frac{f\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\,t.$$

Vom folosi o formulă de tip Gauss cu ponderea $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Formula va fi

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R(f)$$

cu

$$A_k = \frac{\pi}{n}, x_k = \frac{1+\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{2},$$

iar restul

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^1 T_n^2(t)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{(2)^{2n}(2n)!}\frac{\pi}{2^{2n+1}} f^{(2n)}(\xi).$$

■

Problema 2 *Se consideră ecuaţia*

$$\tan x + \lambda x = 0, \quad 0 < \lambda < 1.$$

(a) *Arătaţi că în intervalul* $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$*, ecuaţia are exact o rădăcină,* α*. (1p)*

(b) *Converge metoda lui Newton către* $\alpha \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$*, dacă aproximaţia iniţială este* $x_0 = \pi$*? Justificaţi răspunsul. (2p)*

Soluţie.

(a) Graficele lui $y = \tan x$ şi $y = -\lambda x$ pentru $x > 0$ se intersectează într-un punct situat între $\frac{1}{2}\pi$ şi π, a cărui abscisă este rădăcina ecuaţiei. Este singura rădăcină în acel interval.

(b) Pentru $f(x) = \tan x + x$, avem, pe $\left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}+0\right) &= -\infty,\ f(\pi) = \lambda\pi \\ f'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + \lambda > 0, \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{2}{\cos^3 x}\sin x < 0, \end{aligned}$$

deci f este crescătoare şi concavă. Dacă metoda lui Newton se aplică pentru $x_0 = \pi$, atunci şirul aproximantelor este monoton crescător dacă $x_1 > \frac{\pi}{2}$. Dar,

$$x_1 = \pi - \frac{f(\pi)}{f'(\pi)} = \frac{\pi}{1+\lambda} > \frac{\pi}{2},$$

căci $\lambda \in [0, 1]$.

■

2 Subiectul 2

Problema 3 *(a) Să se determine o formulă de cuadratură de forma*

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f)$$

care să aibă grad maxim de exactitate. (3p)

(b) Folosind formula de la punctul (a) pentru n noduri, să se scrie cod MATLAB care calculează

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} \sin(\pi x) \mathrm{d}\, x$$

cu o precizie dată. (Se pot folosi funcţii de la laborator). (2p)

Soluţie.

(a) Efectuând schimbarea de variabilă $x = \frac{t+1}{2}$, integrala din enunţ devine

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f\left(\frac{t+1}{2}\right) \mathrm{d}\, t$$

Este o cuadratură Gauss-Cebîşev de speţa a doua. Polinomul ortogonal este

$$\pi_3(x) = t^3 - \frac{1}{2} t$$

cu rădăcinile $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 0, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($t_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, 3$). Nodurile vor fi t_k, iar coeficienţii

$$A_1 = \frac{\pi}{8}, A_2 = \frac{\pi}{4}, A_3 = \frac{\pi}{8}.$$

Restul

$$R(f) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \left(t^3 - \frac{1}{2} t\right)^2 \mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{92\,160} f^{(6)}(\xi)$$

Revenind la substituţie, avem

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{8} f\left(\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{4} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{8} f\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{92\,160 \cdot 2^6} f^{(6)}(\zeta) \right]$$

■

Problema 4 *Dacă $A > 0$, atunci $\alpha = \sqrt{A}$ este rădăcină a ecuaţiilor*

$$x^2 - A = 0, \qquad \frac{A}{x^2} - 1 = 0.$$

(a) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată primei ecuaţii converge pentru o valoare de pornire arbitrară $x_0 > 0$.(1p)

(b) Explicaţi de ce metoda lui Newton aplicată la a doua ecuaţie produce iterate pozitive (x_n) ce converg la α numai dacă x_0 este situat într-un interval $0 < x_0 < b$. Determinaţi b. (2p)

(c) Descrieţi în fiecare caz algoritmul (iteraţia, criteriul de oprire, valoarea de pornire).(1p)

Soluţie.

(a) În primul caz, $f(x) = x^2 - A$ este convexă pe $\mathbb{R}_+$ şi crescătoare pe $(0, \infty)$. Newton coverge pentru orice $x_0 > 0$. Altfel: dacă $x_0 > \alpha$, atunci (x_n) converge monoton descrescător către α. Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci $x_1 > \alpha$, şi se raţionează la fel., pentru $n > 1$.

(b) În al doilea caz, $f(x) = \frac{A}{x^2} - 1$ este convexă $\mathbb{R}_+$ şi descrecătoare ($\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$ to $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$). Dacă $0 < x_0 < \alpha$, atunci (x_n) converge monoton crescător către α. Dacă $x_0 > \alpha$, trebui să ne asigurăm că $x_1 > 0$, ceea ce înseamnă că

$$x_1 = x_0 - \frac{\frac{A}{x_0^2} - 1}{-2\frac{A}{x_0^3}} > 0, \quad x_0 + x_0 \frac{A - x_0^2}{2A} > 0$$

$$x_0 \left(3A - x_0^2\right) > 0, \ x_0 < \sqrt{3A} =: b.$$

(c) Se alege $x_0 \in (0, b)$, iteraţia

$$x_{n+1} = x_n + x_n \frac{A - x_0^2}{2A}$$

criteriul

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

■