Temă Algebră

3.1.35. Să se găsească ecuațiile care determină vectorii din următoarele subspații:

$$S = \langle [1,2,-1] \rangle$$

$$T = \langle [1,2,1], [-2,1,3] \rangle$$

ale lui $\mathbb{R}^3$ (ecuațiile acestor subspații).

COROLAR 3.1.14: Fie V un K-spațiu vectorial

(a) Pentru $x \in V$ avem $\langle x \rangle_K = \{\alpha x, \alpha \in K\}$

(b) Pentru $x, y \in V$ avem $\langle x, y \rangle_K = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in K\}$

a) $S = \langle [1,2,-1] \rangle = \{\alpha(1,2,-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha, 2\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$$S: \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = -\alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow S: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

b) ~~T =~~ $T = \langle [1,2,1], [-2,1,3] \rangle =$

$= \{\alpha(1,2,1) + \beta(-2,1,3) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(\alpha - 2\beta, 2\alpha - \beta, \alpha + 3\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$T: \begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta \\ x_2 = 2\alpha - \beta \\ x_3 = \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

~~$x_1 + x_3 =$~~ $x_3 - x_1 = 5\beta \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{x_3 - x_1}{5}}$

$x_1 - 2x_2 = \alpha - 2\beta - 4\alpha + 2\beta = -3\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2x_2 - x_1}{3}}$

$$x_1 = \alpha - 2\beta \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2 - x_1}{3} - 2 \cdot \frac{x_3 - x_1}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{10x_2 - 5x_1 - 6x_3 - 6x_1}{15} \Rightarrow 15x_1 = x_1 - 6x_3 + 10x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x_1 - 10x_2 + 6x_3 = 0 \;/ :2 \Rightarrow \boxed{7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0}$$

$$\Rightarrow S = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 - x_3 = 2x_1 - x_2 = x_1 + x_3 = 0\}$$

$$T = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 / 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\}$$