$\boxed{3.1.31}$ Să se arate că $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor $\boxplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $x \boxplus y = xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ și cu înmulțirea cu scalari
$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \boxdot x = x^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se știe că $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ și că operația „$\boxdot$" este cu valori în $\mathbb{R}_+^*$. Rămâne de verificat că $(\mathbb{R}_+^*, \boxplus)$ este grup abelian și că sunt satisfacute axiomele.

Operația „$\boxplus$" are valori în $\mathbb{R}_+^*$, deci, rămân de verificat:

→ asociativitatea:

$\underline{\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*, \ x \boxplus (y \boxplus z) = (x \boxplus y) \boxplus z}$

$$\left.\begin{array}{l} x \boxplus (y \boxplus z) = \cancel{x \boxplus (xy} \ x \boxplus (yz) = x(yz) \\ (x \boxplus y) \boxplus z = (xy) \boxplus z = (xy)z \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{înmulțirii clasice}]{} \text{în baza asoc.}$$

$\Rightarrow \ x \boxplus (y \boxplus z) = (x \boxplus y) \boxplus z, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$

→ comutativitatea:

$\underline{\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ x \boxplus y = y \boxplus x}$

$$\left.\begin{array}{l} x \boxplus y = xy \\ y \boxplus x = yx \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{comut. „}\cdot\text{"}]{\text{în baza}} x \boxplus y = y \boxplus x, \ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

→ element neutru (vector nul)

$\underline{\exists 0 \in \mathbb{R}_+^* \text{ unic a.î. } 0 \boxplus x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*}$

$0 \boxplus x = x \iff 0 \cdot x = x \iff 0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$

→ element simetric (opusul)

$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists -x \in \mathbb{R}_+^* \text{ a.î. } x \boxplus -x = 0}$

$$x \boxplus -x = 0 \iff \cancel{xy\,xx} \ x(-x) = 1 \iff \left.\begin{array}{l} -x = \frac{1}{x} \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{array}\right\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ($$

Deci, $(\mathbb{R}_+^*, \boxplus)$ grup abelian.

Axiomele:

1) $\alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot (xy) = (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y$

2) $(\alpha+\beta) \boxdot x = x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta = \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x$

3) $\cancel{\alpha \boxdot (\beta x}$

$\alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = \alpha \boxdot (x^\beta) = (x^\beta)^\alpha = x^{\beta\alpha} = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \boxdot x$

4) $1 \boxdot x = x^1 = x$

$\Rightarrow$ sunt satisfăcute

Concluzie: $\mathbb{R}_+^*$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial în raport cu „$\boxplus$" și „$\boxdot$"

$\boxed{31.32}$ Să se verifice că operațiile:

$\boxplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \boxplus y = \sqrt[5]{x^5+y^5}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \boxdot \cancel{y}x = \alpha \sqrt[5]{\alpha}\, x$, $\forall \alpha, x \in \mathbb{R}$

definesc o structură de $\mathbb{R}$-spațiu vectorial pe $\mathbb{R}$.

Verificăm axioma: $(\alpha+\beta) \boxdot x = \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$(\alpha+\beta) \boxdot x = (\alpha+\beta) \sqrt[5]{\alpha+\beta}\, x$

$\alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x = \alpha \sqrt[5]{\alpha}\, x \boxplus \beta \sqrt[5]{\beta}\, x = \sqrt[5]{\alpha^6 x^5 + \beta^6 x^5} =$

$= x \sqrt[5]{\alpha^6+\beta^6} \neq (\alpha+\beta) \boxdot x$, deci axioma nu este satisfăcută $\Rightarrow$ legile nu definesc pe $\mathbb{R}$ o structură de $\mathbb{R}$-spațiu vectorial.

3.1.33 Care dintre următoarele submulțimi ale mulțimii R^3 sunt R-subspații?

a) $A = \{[x_1, x_2, x_3] \in R^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

~~i) $0 \in$~~

i) 0 (din R^3) $\in A$

$0 = [0,0,0]$
$2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$ $\} \Rightarrow 0 \in A$

ii) $x, y \in A \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A, \ \alpha, \beta \in R$

$x = [x_1, x_2, x_3], \ y = [y_1, y_2, y_3]$

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3] + [\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3] =$
$= [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

$2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) =$
$= \alpha(2x_1 + x_2 - x_3) + \beta(2y_1 + y_2 - y_3)$
$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \Rightarrow x + y \in A$

Deci, $A \leq_R R^3$

b) $B = \{[x_1, x_2 x_3] \in R^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$

idem a), verificăm că $\alpha(2x_1 + x_2 - x_3) + \beta(2y_1 + y_2 - y_3) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 - \beta$, ceea ce nu are loc pt. $\forall \alpha, \beta \in R$.

Deci, $A \not\leq_R R^3$

c) $C = \{[x_1, x_2, x_3] \in R^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

Rescriem $C = \{[x, x, x] \in R^3\}$

i) $0 = [0,0,0] \in C$

ii) $x, y \in C \Rightarrow \alpha x + \beta y = [\alpha x, \alpha x, \alpha x] + [\beta y, \beta y, \beta y] =$

$= [\alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y] \in C$

Deci, $C \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

d) $D = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2 = 0\}$

i) $0 = [0,0,0] \in D$

ii) Fie $x, y \in D \Rightarrow x = [x_1, x_2, x_3],\ x_1^2 + x_2 = 0$ și

$y = [y_1, y_2, y_3],\ y_1^2 + y_2 = 0$

~~$\alpha x + \beta y = [\alpha y_1$~~

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

$(\alpha x_1 + \beta y_1)^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha\beta x_1 x_2 + \beta^2 y_1^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 =$

$= \underbrace{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2}_{0} - \alpha^2 x_2 + 2\alpha\beta x_1 x_2 + \underbrace{\beta^2 y_1^2 + \beta^2 y_2}_{0} - \beta^2 y_2 + \alpha x_2 + \beta y_2$

$= x_2(\alpha - \alpha^2) + y_2(\beta - \beta^2) + 2\alpha\beta x_1 x_2$ care nu este 0,

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Deci, $D \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

e) $E = \mathbb{R}^3 \setminus A = \{[x_1, x_2 x_3] \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 \neq 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = [0,0,0] \notin E \Rightarrow E \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

f) $F = (\mathbb{R}^3 \setminus A) \cup \{0\}$

rămâne de ~~fост~~ verificat că $\forall x, y \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in F$,
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Fie $x \in F \Rightarrow x = [x_1, x_2, x_3]$, $2x_1 + x_2 - x_3 \neq 0$ sau $x = 0$

Fie $y \in F \Rightarrow y = [y_1, y_2, y_3]$, $2y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$ sau $y = 0$

Considerăm ~~cazurile~~ cazul în care x și $y \neq 0$:

$\alpha x + \beta y = [\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3]$

$2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) =$

$= \alpha \underbrace{(2x_1 + x_2 - x_3)}_{\neq 0} + \beta \underbrace{(2y_1 + y_2 - y_3)}_{\neq 0} \neq 0$

Deci, $\alpha x + \beta y \in F$ și $F \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$