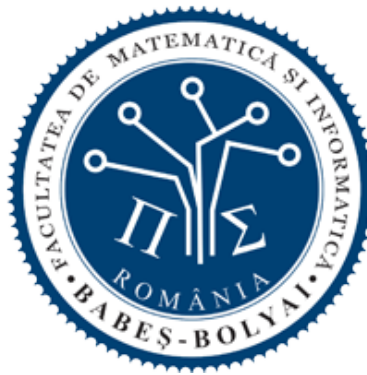


Curs - Probabilități și Statistică 2021/2022

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca



Teoria Probabilităților

Teoria probabilităților este o disciplină a matematicii care se ocupă de **studiul fenomenelor aleatoare**.

- *aleator* = care depinde de o împrejurare viitoare și nesigură; supus întâmplării
- provine din latină: *aleatorius*; *alea* (lat.) = zar; joc cu zaruri; joc de noroc; șansă; risc

↪ se măsoară *șansele pentru succes* sau *riscul pentru insucces* al unor evenimente

Fenomene și procese aleatoare apar, de exemplu, în:

- jocuri de noroc, pariuri, loto (6 din 49)
- previziuni meteo
- previziuni economice / financiare
- sondaje de opinie, asigurări (evaluarea riscurilor, pierderilor)



[Sursa: www.financialmarket.ro]

→ **în informatică:**

- ▷ sisteme de comunicare, prelucrarea informației, modelarea traficului în rețea;
- ▷ analiza probabilistică a unor algoritmi, fiabilitatea sistemelor;
- ▷ algoritmi de simulare, machine learning, data mining, recunoașterea formelor sau a vocii;
- ▷ generarea de numere aleatoare, algoritmi aleatori: de tip Monte-Carlo, de tip Las Vegas etc.

Octave online: <https://octave-online.net>

Exemplu: Generarea de valori aleatoare (în Octave/Matlab)

```
a=rand % valoare aleatoare între 0 și 1
v1=rand(1,10) %vector cu 10 valori aleatoare între 0 și 1
a=4; b=10;
v2=a+(b-a)*rand(1,15) %vector cu 15 valori aleatoare între 4 și 10
z=randi(6,1,20)
%vector cu 20 de valori aleatoare din mulțimea {1,2,3,4,5,6}
```

Exercițiu: Generați un vector cu 100 de valori aleatoare 0 și 1, în care 0 și 1 au aceleași șanse de apariție.

Răspuns: `floor(2*rand(1,100))` sau `randi(2,1,100)-1`

Algoritmi aleatori

Def. 1. *Un algoritm pe cursul executării căruia se iau anumite decizii aleatoare este numit **algoritm aleator (randomizat)**.*

- ▷ durata de execuție, spațiul de stocare, rezultatul obținut sunt variabile aleatoare (chiar dacă se folosesc aceleași valori input)
- ▷ la anumite tipuri de algoritmi corectitudinea e garantată doar cu o anumită probabilitate
- ▷ în mod paradoxal, incertitudinea ne poate oferi mai multă eficiență

Exemplu: Random QuickSort, în care elementul pivot este selectat aleator

- Algoritm de tip **Las Vegas** este un algoritm aleator, care returnează la fiecare execuție rezultatul corect (independent de alegerile aleatoare făcute); durata de execuție este o variabilă aleatoare.

Exemplu: Random QuickSort

- Un algoritm aleatoriu pentru care rezultatele obținute sunt corecte *doar* cu o anumită probabilitate se numește algoritm **Monte Carlo**.

→ se examinează probabilitatea cu care rezultatul este corect; probabilitatea de eroare poate fi scăzută semnificativ prin execuții repetate, independente;

Exemplu:

▷ testul Miller-Rabin, care verifică dacă un număr natural este prim sau este număr compus; testul returnează fie răspunsul “numărul este sigur un număr compus” sau răspunsul “numărul este probabil un număr prim”;

Exercițiu: Fie $S(1), \dots, S(300)$ un vector cu 300 de elemente, din mulțimea $\{0, 1, 2\}$ (ordinea lor este necunoscută). → De care tip este următorul algoritm (scris în Octave)?

```
S=randi(3,1,300)-1;
k=0;
do
    k=k+1;
    i=randi(300);
until (S(i) == 0)
i % indicele, pentru care S(i)=0
k % număr iterații până se găsește aleator un 0
```

Răspuns: Algoritm de tip Las Vegas.

Versiunea Monte Carlo a problemei formulate anterior: se dă M numărul maxim de iterații.

```
M=3;
S=randi(3,1,300)-1;
k=0;
do
    k=k+1 ;
    i=randi(300);
until ( (S(i) == 0) || (k==M) )
i % indicele, pentru care S(i)=0 sau pentru care k==M
k
% număr iterații până se găsește
% aleator un 0 sau programul s-a oprit
S(i)
```

▷ dacă 0 este găsit, atunci algoritmul se încheie cu rezultatul corect, altfel algoritmul nu găsește niciun 0.

Noțiuni introductive:

- **Experiența aleatoare** este acea experiență al cărei rezultat nu poate fi cunoscut decât după încheierea ei.
- **Evenimentul** este rezultatul unui experiment.

Exemple:

- ▷ Experiment: aruncarea a două zaruri, eveniment: ambele zaruri indică 1
- ▷ experiment: aruncarea unei monede, eveniment: moneda indică pajură
- ▷ experiment: extragerea unei cărți de joc, eveniment: s-a extras as
- ▷ experiment: extragerea unui număr la loto, eveniment: s-a extras numărul 27

● **evenimentul imposibil**, notat cu \emptyset , este evenimentul care nu se realizează niciodată la efectuarea experienței aleatoare

● **evenimentul sigur** este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței aleatoare

● **spațiul de selecție**, notat cu Ω , este mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat

◇ spațiul de selecție poate fi finit sau infinit

● dacă A este o submulțime a lui Ω atunci A se numește **eveniment aleator**, iar dacă A are un singur element atunci A este un **eveniment elementar**.

▷ *O analogie între evenimente și mulțimi* permite o scriere și o exprimare mai comode ale unor idei și rezultate legate de conceptul de eveniment aleator.

Exemplu: Experimentul: aruncarea unui zar, spațiul de selecție: $\Omega = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, e_i : s-a obținut numărul i ($i = 1, \dots, 6$); $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ sunt evenimente elementare

A : s-a obținut un număr par $\Rightarrow A = \{e_2, e_4, e_6\}$

\bar{A} : s-a obținut un număr impar $\Rightarrow \bar{A} = \{e_1, e_3, e_5\}$



Operații cu evenimente

- dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci **evenimentul reuniune** $A \cup B$ este un eveniment care se produce dacă cel puțin unul din evenimentele A sau B se produce
- dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci **evenimentul intersecție** $A \cap B$ este un eveniment care se produce dacă cele două evenimente A și B se produc în același timp
- dacă $A \subseteq \Omega$ atunci **evenimentul contrar** sau **complementar** \bar{A} este un eveniment care se realizează atunci când evenimentul A nu se realizează
- $A, B \subseteq \Omega$ sunt **evenimente incompatibile (disjuncte)**, dacă $A \cap B = \emptyset$
- dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci **evenimentul diferență** $A \setminus B$ este un eveniment care se produce dacă A are loc și B nu are loc, adică

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

Relații între evenimente

- dacă $A, B \subseteq \Omega$, atunci A **implică** B , dacă producerea evenimentului A conduce la producerea evenimentului B : $A \subseteq B$
- dacă A implică B și B implică A , atunci evenimentele A și B sunt **egale**: $A = B$

Proprietăți ale operațiilor între evenimente $A, B, C \subseteq \Omega$

Operațiile de reuniune și intersecție sunt operații **comutative**:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$

asociative

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

și distributive

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

satisfac legile lui De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Are loc $\bar{\bar{A}} = A$.

Frecvența relativă și frecvența absolută

Def. 2. Fie A un eveniment asociat unei experiențe, repetăm experiența de n ori (în aceleași condiții date) și notăm cu $r_n(A)$ numărul de realizări ale evenimentului A ; **frecvența relativă** a evenimentului A este numărul

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este **frecvența absolută** a evenimentului A .

Definiția clasică a probabilității

Def. 3. Într-un experiment în care cazurile posibile sunt finite la număr și au aceleași șanse de a se realiza, **probabilitatea** unui eveniment A este numărul

$$P(A) = \frac{\text{numărul de cazuri favorabile apariției lui } A}{\text{numărul total de cazuri posibile}}.$$

▷ Prin repetarea de multe ori a unui experiment, în condiții practic identice, frecvența relativă $f_n(A)$ de apariție a evenimentului A este aproximativ egală cu $P(A)$

$$f_n(A) \approx P(A), \text{ dacă } n \rightarrow \infty.$$

Exemplu: Experiment: Se aruncă 4 monede. Evenimentul A : (exact) 3 din cele 4 monede indică pajură; experimentul s-a repetat de $n = 100$ de ori și evenimentul A a apărut de 22 de ori.

$$f_n(A) = ?, \quad P(A) = ?$$

Răspuns: $f_n(A) = \frac{22}{100} = 0.22$

$$\Omega = \{(c, c, c, c), (c, p, p, p), \dots, (p, p, p, c), (p, p, p, p)\}$$

$$A = \{(c, p, p, p), (p, c, p, p), (p, p, c, p), (p, p, p, c)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{2^4} = 0.25$$



Exemplu - Joc de zaruri (sec. XVII): Un pasionat jucător de zaruri, cavalerul de Méré, susținea în discuțiile sale cu B. Pascal că a arunca un zar de 4 ori pentru a obține cel puțin o dată fața șase, este același lucru cu a arunca de 24 ori câte două zaruri pentru a obține cel puțin o dublă de șase. Cu toate acestea, cavalerul de Méré a observat că jucând în modul al doilea (cu două zaruri aruncate de 24 ori), pierdea față de adversarul său, dacă acesta alegea primul mod (aruncarea unui singur zar de 4 ori). Pascal și Fermat au arătat că probabilitatea de câștig la jocul cu un singur zar aruncat de 4 ori este $p_1 \approx 0.5177$, iar probabilitatea $p_2 \approx 0.4914$ la jocul cu două zaruri aruncate de 24 de ori. Deși diferența dintre cele două probabilități este mică, totuși, la

un număr mare de partide, jucătorul cu probabilitatea de câștig p_1 câștigă în fața jucătorului cu probabilitatea de câștig p_2 . Practica jocului confirmă astfel justetea raționamentului matematic, contrar credinței lui de Méré.



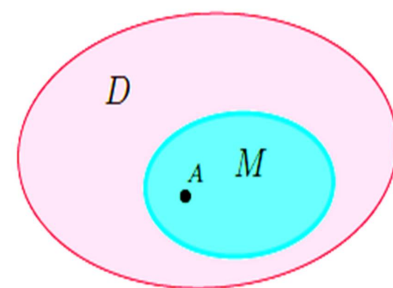
Definiția axiomatică a probabilității

Definiția clasică a probabilității poate fi utilizată numai în cazul în care numărul cazurilor posibile este finit. Dacă numărul evenimentelor elementare este infinit, atunci există evenimente pentru care probabilitatea în sensul clasic nu are nici un înțeles.

Probabilitatea geometrică: Măsura unei mulțimi corespunde lungimii în \mathbb{R} , ariei în \mathbb{R}^2 , volumului în \mathbb{R}^3 . Fie $M \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{1, 2, 3\}$, mulțimi cu măsură finită.

Alegem aleator un punct $A \in D$ (în acest caz spațiul de selecție este D). Probabilitatea geometrică a evenimentului “ $A \in M$ ” este

$$P(A \in M) := \frac{\text{măsura}(M)}{\text{măsura}(D)}.$$



$M \subset D \subset \mathbb{R}^2$

O teorie formală a probabilității a fost creată în anii '30 ai secolului XX de către matematicianul rus **Andrei Nikolaevici Kolmogorov**, care, în anul **1933**, a dezvoltat teoria axiomatică a probabilității în lucrarea sa *Conceptele de bază ale Calculului Probabilității*.

→ $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție astfel încât oricărui eveniment aleator $A \in \mathcal{K}$ i se asociază valoarea $P(A)$, **probabilitatea de apariție a evenimentului A**

→ \mathcal{K} este o mulțime de evenimente și are structura unei σ -algebre (vezi Def. ??)

→ P satisface anumite axiome (vezi Def. ??)

Def. 4. O familie \mathcal{K} de evenimente din spațiul de selecție Ω se numește **σ -algebră** dacă sunt satisfăcute condițiile:

(i) \mathcal{K} este nevidă;

(ii) dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci $\bar{A} \in \mathcal{K}$;

(iii) dacă $A_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Perechea (Ω, \mathcal{K}) se numește **spațiu măsurabil**.

Exemple: 1) Dacă $\emptyset \neq A \subset \Omega$ atunci $\mathcal{K} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ este o σ -algebră.

2) $\mathcal{P}(\Omega) :=$ mulțimea tuturor submulțimilor ale lui Ω este o σ -algebră.

3) Dacă (Ω, \mathcal{K}) este un spațiu măsurabil și $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$, atunci

$$B \cap \mathcal{K} = \{B \cap A : A \in \mathcal{K}\}$$

este o σ -algebră pe mulțimea B , iar $(B, B \cap \mathcal{K})$ este un spațiu măsurabil.

P. 1. *Proprietăți ale unei σ -algebre: Dacă \mathcal{K} este o σ -algebră în Ω , atunci au loc proprietățile:*

(1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K};$

(2) $A, B \in \mathcal{K} \implies A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{K};$

(3) $A_n \in \mathcal{K}, n \in \mathbb{N}^* \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}.$

Def. 5. *Fie \mathcal{K} o σ -algebră în Ω . O funcție $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **probabilitate** dacă satisface axiomele:*

(i) $P(\Omega) = 1;$

(ii) $P(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathcal{K};$

(iii) *pentru orice șir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de evenimente două câte două disjuncte (adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$) din \mathcal{K} are loc*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

*Tripletul (Ω, \mathcal{K}, P) format din spațiul măsurabil (Ω, \mathcal{K}) și probabilitatea $P : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **spațiu de probabilitate**.*

P. 2. *Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate. Au loc proprietățile:*

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ și $0 \leq P(A) \leq 1;$

(2) $P(\emptyset) = 0;$

(3) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B);$

(4) $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$, adică P este monotonă;

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Exercițiu: a) Să se arate că pentru $\forall A, B, C \in \mathcal{K}$ are loc:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

b) Pentru $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ care e formula similară de calcul pentru $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$?

Exemplu: Dintr-un pachet de 52 de cărți de joc se extrage o carte aleator. Care este probabilitatea p de a extrage a) un as sau o damă de pică? b) o carte cu inimă sau un as?

R.: a) A : s-a extras un as; D : s-a extras damă de pică; A și D sunt două evenimente disjuncte (incompatibile)

$$p = P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{4 + 1}{52};$$

b) I : s-a extras o carte cu inimă; I și A nu sunt evenimente incompatibile

$$p = P(I \cup A) = P(I) + P(A) - P(I \cap A) = \frac{13 + 4 - 1}{52} = \frac{4}{13}.$$



Evenimente independente

Def. 6. Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate. Evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ sunt **evenimente independente** dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Observație: Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$. Evenimentele A și B sunt **independente**, dacă **apariția evenimentului A , nu influențează apariția evenimentului B și invers**. Două evenimente se numesc **dependente** dacă probabilitatea realizării unuia dintre ele depinde de faptul că celălalt eveniment s-a produs sau nu.

Exercițiu: Se aruncă un zar de două ori.

A : primul număr este 6; B : al doilea număr este 5; C : primul număr este 1.

Sunt A și B evenimente independente?

Sunt A și C evenimente independente? Sunt A și C evenimente disjuncte?

Sunt B și C evenimente dependente?



P. 3. Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate și fie $A, B \in \mathcal{K}$. Sunt echivalente afirmațiile:

(1) A și B sunt independente.

(2) \bar{A} și B sunt independente.

(3) A și \bar{B} sunt independente.

(4) \bar{A} și \bar{B} sunt independente.

Def. 7. Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate. B_1, \dots, B_n sunt n **evenimente independente (în totalitate)** din \mathcal{K} dacă

$$P(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_m}) = P(B_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(B_{i_m})$$

pentru orice submulțime finită $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplu: Se dă algoritmul de tip Monte-Carlo

```
M=input('M=') % numar maxim de iteratii; M >= 1
M=3 % maximale Anzahl Iterationen; M >= 1
S=[0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3];
% 0,1,2,3 apar fiecare cu probabilitatea 5/20=1/4
S=S(randperm(length(S))) % permutare aleatoare a lui S
k=0;
do
    k=k+1;
    i=randi(20);
    % se alege o valoare aleatoare S(i)
until ( (S(i) == 0) || (k==M) )
fprintf('k: %d \n', k)
fprintf('S(%d): %d \n', i, S(i))
```

Se calculează probabilitățile următoarelor evenimente (din punct de vedere teoretic):

$$P(\text{“primul 0 este găsit la a } M\text{-a iterație”}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{M-1} \cdot \frac{1}{4},$$

$$P(\text{“0 nu este găsit în } M \text{ iterații”}) = \left(\frac{3}{4}\right)^M,$$

probabilitatea evenimentului complementar este

$$P(\text{“cel puțin un 0 este găsit în } M \text{ iterații”}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^M \longrightarrow 1, \text{ când } M \rightarrow \infty.$$



Exemplu: 1) $A, B, C \in \mathcal{K}$ sunt trei evenimente independente (în totalitate), dacă

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), P(A \cap C) = P(A)P(C), P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

2) Cele 4 fețe ale unui tetraedru regulat sunt vopsite astfel: una este roșie, una este albastră, una este verde și una este colorată având cele trei culori. Se aruncă tetraedrul și se consideră evenimentele: R : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea roșie; A : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea albastră; V : tetraedrul cade pe o parte ce conține culoarea verde.

Sunt cele 3 evenimente independente în totalitate?

R.: Nu, cele 3 evenimente nu sunt independente în totalitate pentru că $P(R \cap A \cap V) = \frac{1}{4} \neq P(R)P(A)P(V) = \frac{1}{8}$.

3) Pentru a verifica dacă n evenimente distincte B_1, \dots, B_n sunt independente în totalitate câte relații trebuie verificate?

R.: $C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - 1 - n$.



Probabilitate condiționată

Def. 8. Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate și fie $A, B \in \mathcal{K}$. **Probabilitatea condiționată a evenimentului A de evenimentul B** este $P(\cdot|B) : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ definită prin

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

dacă $P(B) > 0$. $P(A|B)$ este probabilitatea apariției evenimentului A , știind că evenimentul B s-a produs.

Observație: Fie evenimentele $A, B \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A) > 0$ și $P(B) > 0$. Evenimentele A și B sunt **independente** (a se vedea Def. ??), dacă apariția evenimentului A , nu influențează apariția evenimentului B și invers, adică

$$P(A|B) = P(A) \text{ și } P(B|A) = P(B).$$

Exemplu: Se extrag succesiv fără returnare două bile dintr-o urnă cu 4 bile albe și 5 bile roșii.

a) Știind că prima bilă este roșie, care este probabilitatea (condiționată) ca a doua bilă să fie albă?

b) Care este probabilitatea ca ambele bile să fie roșii?

R.: pentru $i \in \{1, 2\}$ fie evenimentele

R_i : la a i -a extragere s-a obținut o bilă roșie;

$A_i = \bar{R}_i$: la a i -a extragere s-a obținut o bilă albă;

a) $P(A_2|R_1) = \frac{4}{8}$. b) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2|R_1)P(R_1) = \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{9}$.



P. 4. Pentru $A, B \in \mathcal{K}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ au loc:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A),$$

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B).$$

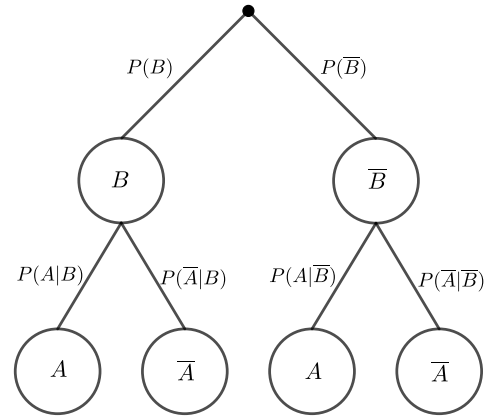


Fig.1. Probabilități condiționate

Def. 9. O familie $\{H_1, \dots, H_n\} \subset \mathcal{K}$ de evenimente din Ω se numește **partiție** sau **sistem complet de evenimente** a lui Ω , dacă $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$ și pentru fiecare $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, evenimentele H_i și H_j sunt disjuncte, adică $H_i \cap H_j = \emptyset$.

Exemplu: Dacă $B \subset \Omega$ atunci $\{B, \bar{B}\}$ formează o partiție a lui Ω . ♠

P. 5. (Formula probabilității totale) Într-un spațiu de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) considerăm partiția $\{H_1, \dots, H_n\}$ a lui Ω cu $H_i \in \mathcal{K}$ și $P(H_i) > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, și fie $A \in \mathcal{K}$. Atunci are loc

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n).$$

Exemplu: Într-o urnă sunt 7 bile albe, notate cu 1,2,3,4,5,6,7, și 6 bile roșii notate cu 8,9,10,11,12,13. Se extrage o bilă. **a)** Știind că bila extrasă este roșie, care este probabilitatea (condiționată) p_1 , ca numărul înscris să fie divizibil cu 4? **b)** Știind că prima bilă este roșie, care este probabilitatea (condiționată) p_2 , ca o a doua bilă extrasă să fie un număr impar? (Prima bilă nu s-a returnat în urnă!)

R.: Se consideră evenimentele:

A_1 : prima bilă extrasă are înscris un număr divizibil cu 4;

B_1 : prima bilă extrasă este roșie;

C_1 : prima bilă extrasă are înscris un număr impar;

C_2 : a doua bilă extrasă are înscris un număr impar.

a) $p_1 = P(A_1|B_1) = \frac{2}{6}$.

b) $p_2 = P(C_2|B_1) = ?$ Folosim Def.?? și P.??, scriem succesiv

$$\begin{aligned} p_2 = P(C_2|B_1) &= \frac{P(C_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(C_2 \cap B_1 \cap C_1) + P(C_2 \cap B_1 \cap \bar{C}_1)}{P(B_1)} \\ &= \frac{P(C_2|B_1 \cap C_1)P(B_1 \cap C_1) + P(C_2|B_1 \cap \bar{C}_1)P(B_1 \cap \bar{C}_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{6}{12} \cdot \frac{3}{13} + \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{13}}{\frac{6}{13}} = \frac{13}{24}. \end{aligned}$$



Exemplu: Ce probabilități calculează programul de mai jos? Ce tip de algoritm aleator este?

► `randi(imax, n, m)` generează o $n \times m$ matrice cu valori întregi aleatoare (pseudoaleatoare) între 1 și imax.

```
clear all
ci=0;
cp=0;
c=0;
a=0;
b=0;
N=1000;
A=[1:20];
for i=1:N
    r= randi(length(A));
    v=A(r);
    ci=ci+mod(v,2);
    cp=cp+(mod(v,2)==0);
    c=c+ mod(v,2)*(mod(v,3)==0);
    a=a+ mod(v,2)*(6<=v && v<=10);
    b=b+ (mod(v,2)==0)*(v>=14);
end
p1=c/ci
p2=a/ci
p3=b/cp
```

R.: Se extrage aleator un număr din șirul $A=[1, 2, \dots, 20]$.

► p_1 estimează probabilitatea condiționată ca numărul ales aleator să fie divizibil cu 3, *știind* că s-a extras un număr impar;

► p_2 estimează probabilitatea condiționată ca numărul ales aleator să provină din mulțimea $\{6, 7, 8, 9, 10\}$, *știind* că s-a extras un număr impar;

► p_3 estimează probabilitatea condiționată ca numărul ales aleator să provină din mulțimea $\{14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, *știind* că s-a extras un număr par.

Algoritmul este de tip Monte-Carlo!



Exercițiu: Să se calculeze valorile teoretice pentru probabilitățile p_1, p_2, p_3 din exemplul anterior!



P. 6. (Regula de înmulțire) Fie (Ω, \mathcal{K}, P) un spațiu de probabilitate și fie $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Atunci,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Exemplu: Într-o urnă sunt 2 bile verzi și 3 bile albastre. Se extrag 2 bile succesiv, fără returnare. Care este probabilitatea ca

a) prima bilă să fie verde, iar cea de-a doua albastră?

b) cele 2 bile să aibă aceeași culoare?

c) a doua bilă să fie albastră?

d) prima bilă să fie verde, *știind* că a doua este albastră?

e) se mai extrage o a treia bilă; se cere probabilitatea ca prima bilă să fie verde, cea de-a doua albastră și a treia tot albastră.

R.: Notăm pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ evenimentele:

A_i : la a i -a extragere s-a obținut bilă albastră; V_i : la a i -a extragere s-a obținut bilă verde;

a) folosim P.???: $P(V_1 \cap A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}$

b) $P((V_1 \cap V_2) \cup (A_1 \cap A_2)) = P(V_1 \cap V_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(V_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$

c) folosim formula probabilității totale P.???:

$$P(A_2) = P(A_2|V_1)P(V_1) + P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}$$

d) folosim P.???: $P(V_1|A_2) = \frac{P(V_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_2|V_1)P(V_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5}}$

e) formula de înmulțire a probabilităților P.???:

$$P(V_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(V_1) \cdot P(A_2|V_1) \cdot P(A_3|V_1 \cap A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}.$$



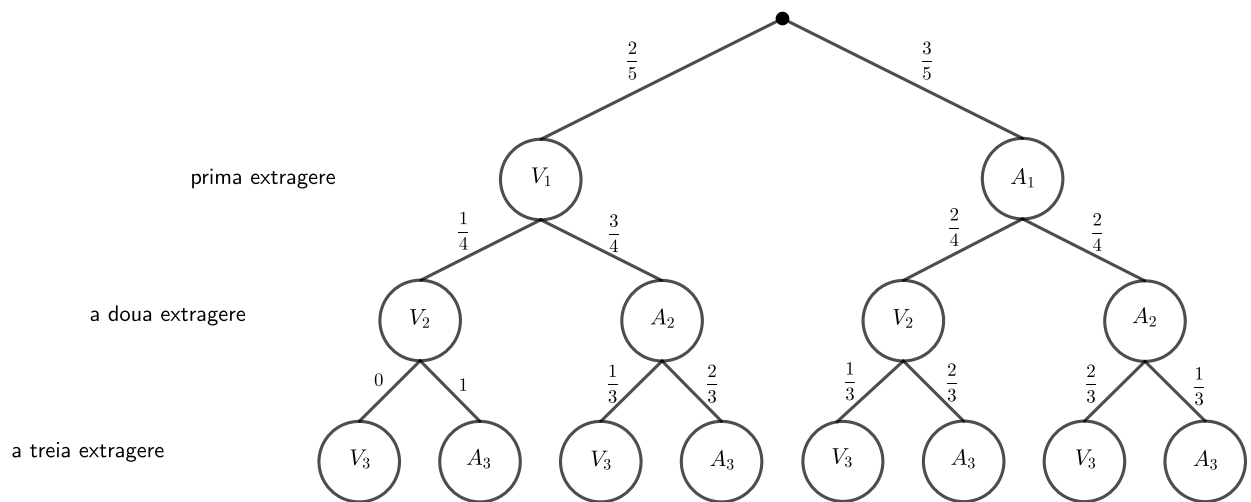


Fig. 3. Extragere fără returnare

Formula lui Bayes

Formula lui Bayes este o metodă de a "corecta" (a revizui, a îmbunătăți) pe baza unor noi date (informații) disponibile o probabilitate determinată apriori. Se pornește cu o estimare pentru probabilitatea unei anumite ipoteze H (engl. *hypothesis*). Dacă avem noi date (date de antrenare, dovezi, informații, evidențe - engl. *evidence*) E , ce privesc ipoteza H , se poate calcula o probabilitate "corectată" pentru ipoteza H , numită probabilitate posterioară (a-posteriori).

→ $P(H)$ probabilitatea ca ipoteza H să fie adevărată, numită și *probabilitatea apriori*;

→ probabilitatea condiționată $P(H|E)$ este *probabilitatea posterioară* (corectată de cunoașterea noilor date / informații);

→ $P(E|H)$ probabilitatea ca să apară datele (informațiile), știind că ipoteza H este adevărată;

→ $P(E|\bar{H})$ probabilitatea ca să apară datele (informațiile), știind că ipoteza H este falsă (ipoteza \bar{H} este adevărată).

Folosind P.?? are loc:

$$P(E) = P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) = P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot (1 - P(H)).$$

Formula lui Bayes este în acest caz

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)} = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})}.$$

P. 7. (Formula lui Bayes)

Într-un spațiu de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) considerăm partiția $\{H_1, \dots, H_n\}$ a lui Ω cu $H_i \in \mathcal{K}$

și $P(H_i) > 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$, și fie $E \in \mathcal{K}$ astfel încât $P(E) > 0$. Atunci,

$$P(H_j|E) = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{P(E)} = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{P(E|H_1)P(H_1) + \dots + P(E|H_n)P(H_n)} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

▷ pentru $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $P(H_i)$ sunt **probabilități apriori** pentru H_i , numite și ipoteze (asertiuni; engl. *hypothesis*)

▷ E se numește **evidență** (dovadă, premisă, informație; engl. *evidence*);

▷ cu formula lui Bayes se calculează probabilitățile pentru ipoteze, cunoscând evidența: $P(H_j|E)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, care se numesc **probabilități posterioare** (ulterioare);

▷ $P(E|H_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, reprezintă verosimilitatea (engl. *likelihood*) datelor observate.

▷ Se pot calcula probabilitățile *cauzelor*, date fiind (cunoscând / știind) *efectele*; formula lui Bayes ne ajută să diagnosticăm o anumită situație sau să testăm o ipoteză.

Exemplu: Considerăm evenimentele (în teste clinice):

H : o persoană aleasă aleator dintr-o populație are o anumită alergie \mathcal{A}

E : testul clinic returnează pozitiv privind alergia \mathcal{A}

\bar{E} : testul clinic returnează negativ privind alergia \mathcal{A}

▷ din statistici anterioare sunt cunoscute:

$p = P(H)$, probabilitatea ca o persoană selectată aleator din populație să sufere de alergia \mathcal{A} ;

sensibilitatea testului $s_1 = P(E|H)$;

specificitatea testului $s_2 = P(\bar{E}|\bar{H})$;

▷ probabilitatea de a obține răspuns fals pozitiv este $P(E|\bar{H}) = 1 - s_2$;

▷ un test clinic bun implică valori apropiate de 1 pentru s_1 și s_2 ;

► cunoscând p, s_1, s_2 se dorește a se determina *valoarea predictivă* $P(H|E)$:

$$P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)} = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H})} = \frac{s_1 \cdot p}{s_1 \cdot p + (1 - s_2) \cdot (1 - p)}.$$



Variable aleatoare

Exemplu: Un jucător aruncă două monede $\Rightarrow \Omega = \{(c, p), (c, c), (p, c), (p, p)\}$ (c =cap; p =pajură)

X indică de câte ori a apărut pajură: $\Rightarrow X : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\}$

$$\Rightarrow P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{2}$$



Notăție 1. *variabilă/variabile aleatoare* \rightarrow *v.a.*

O variabilă aleatoare este:

► **discretă**, dacă ia un număr finit de valori (x_1, \dots, x_n) sau un număr infinit numărabil de valori

(x_1, \dots, x_n, \dots)

► **continuă**, dacă valorile sale posibile sunt nenumărabile și sunt într-un interval (sau reuniune de intervale) sau în \mathbb{R}

V.a. discrete: exemple de v.a. numerice discrete: suma numerelor obținute la aruncarea a 4 zaruri, numărul produselor defecte produse de o anumită firmă într-o săptămână; numărul apelurilor telefonice într-un call center în decursul unei ore; numărul de accesări ale unei anumite pagini web în decursul unei anumite zile (de ex. duminică); numărul de caractere transmise eronat într-un mesaj de o anumită lungime; exemple de v.a. categoriale (\rightarrow se clasifică în categorii): prognoza meteo: ploios, senin, înnorat, cețos; calitatea unor servicii: nesatisfăcătoare, satisfăcătoare, bune, foarte bune, excepționale ...)

V.a. continue sunt v.a. numerice: timpul de funcționare până la defectare a unei piese electronice, temperatura într-un oraș, viteza înregistrată de radar pentru mașini care parcurg o anumită zonă ...

Variabile aleatoare numerice - definiție formală

Def. 10. Fie (Ω, \mathcal{K}, P) spațiu de probabilitate. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare, dacă

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{K} \text{ pentru fiecare } x \in \mathbb{R}.$$

Variabile aleatoare discrete $X : \Omega \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$

Def. 11. Distribuția de probabilitate a v.a. discrete X

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

$I \subseteq \mathbb{N}$ (mulțime de indici nevidă); $p_i = P(X = x_i) > 0, i \in I$, cu $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

► O variabilă aleatoare discretă X este caracterizată de **distribuția de probabilitate** $P[X]$:

(1) $P[X] : \{x_1, x_2, \dots\} \rightarrow [0, 1]$, definită prin $P[X](x) = P(X = x) \forall x \in \{x_1, x_2, \dots\}$.

► Notăm $\{X = x_i\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$; acesta este un eveniment din \mathcal{K} pentru fiecare $i \in I$.

Distribuții discrete clasice

Distribuția discretă uniformă: $X \sim Unid(n), n \in \mathbb{N}^*$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Exemplu: Se aruncă un zar, fie X v.a. care indică numărul apărut

$$\Rightarrow X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Matlab/Octave: `unidrnd(n,...)`, `randi(n,...)` generează valori aleatoare; `unidpdf(x,n)` calculează $P(X = x)$, dacă $X \sim Unid(n)$.

Distribuția Bernoulli: $X \sim Bernoulli(p)$, $p \in (0, 1)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Exemplu: în cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau \bar{A} (*insucces*)

$X = 0 \Leftrightarrow$ dacă \bar{A} apare; $X = 1 \Leftrightarrow$ dacă A apare

$\Rightarrow X \sim Bernoulli(p)$ cu $p := P(A)$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix}$$



generare în Matlab/Octave:

```
n=1000;
p=0.3;
nr=rand(1,n);
X=(nr<=p) % vector de date avand distributia Bernoulli(p)
%%%%%%%%%
Y=floor(rand(1,n)+p)% vector de date avand distributia Bernoulli(p)
%%%%%%%%%
```

Distribuția binomială: $X \sim Bino(n, p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in (0, 1)$

în cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau \bar{A} (*insucces*)

- $A = \text{succes}$ cu $P(A) = p$, $\bar{A} = \text{insucces}$ $P(\bar{A}) = 1 - p$
- se repetă experimentul de n ori
- v.a. $X = \text{numărul de succese în } n \text{ repetări independente ale experimentului} \Rightarrow \text{valori posibile: } X \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

$$X \sim Bino(n, p) \iff X \sim \left(C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \right)_{k \in \{0, \dots, n\}}$$

Exemplu: Un zar se aruncă de 10 ori, fie X v.a. care indică de câte ori a apărut numărul 6
 $\Rightarrow X \sim Bino(10, \frac{1}{6})$.

\rightarrow are loc **formula binomială**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

pentru $a = p$ și $b = 1 - p$ se obține

$$1 = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Matlab/Octave: `binornd(n, p, ...)` generează valori aleatoare; `binopdf(x, n, p)` calculează $P(X = x)$, dacă $X \sim Bino(n, p)$.

▷ Distribuția binomială corespunde modelului cu extragerea bilelor dintr-o urnă cu bile de două culori și cu returnarea bilei după fiecare extragere:

Într-o urnă sunt n_1 bile albe și n_2 bile negre. Se extrag cu returnare n bile; fie v.a. X_1 = numărul de bile albe extrase; X_2 = numărul de bile negre extrase

$\Rightarrow X_1 \sim Bino(n, p_1)$ cu $p_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$, $X_2 \sim Bino(n, p_2)$ cu $p_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2}$.

Exemplu: Fie un canal de comunicare binară care transmite cuvinte codificate de N biți fiecare. Probabilitatea transmiterii cu succes a unui singur bit este p , iar probabilitatea unei erori este $1 - p$. Presupunem, de asemenea, că un astfel de cod este capabil să corecteze până la m erori (într-un cuvânt), unde $0 \leq m \leq N$. Se știe că transmiterea biților succesivi este independentă, atunci probabilitatea transmiterii cu succes a unui cuvânt este $P(A)$, unde

A : cel mult m erori apar în transmiterea celor N biți

$$P(A) = \sum_{k=0}^m C_N^k p^{N-k} (1 - p)^k.$$



Exerciții: 1) Un client accesează o dată pe zi o anumită pagină web, care oferă produse bio, cu probabilitatea 0.4. Cu ce probabilitate clientul accesează această pagină în total de 3 ori în următoarele 6 zile?

2) O rețea de laborator este compusă din 15 calculatoare. Rețeaua a fost atacată de un virus nou, care atacă un calculator cu o probabilitate 0.4, independent de alte calculatoare. Care este probabilitatea ca virusul a atacat a) cel mult 10 computere; b) cel puțin 10 calculatoare; c) exact 10 calculatoare?



Distribuția hipergeometrică: $X \sim Hyge(n, n_1, n_2)$, $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$

Într-o urnă sunt n_1 bile albe și n_2 bile negre. Se extrag **fără returnare** n bile.

Fie v.a. X = numărul de bile albe extrase \Rightarrow valori posibile pentru X sunt $\{0, 1, \dots, n^*\}$ cu

$$n^* = \min(n_1, n) = \begin{cases} n_1 & \text{dacă } n_1 < n \text{ (mai puține bile albe decât numărul de extrageri)} \\ n & \text{dacă } n_1 \geq n \text{ (mai multe bile albe decât numărul de extrageri)} \end{cases}$$

Fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ și notăm $n^* = \min(n_1, n)$.

$$\Rightarrow P(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^n}, \quad k \in \{0, \dots, n^*\}.$$

Matlab/Octave: `hygernd($n_1 + n_2, n_1, n, \dots$)` generează valori aleatoare;

`hygepdf($x, n_1 + n_2, n_1, n$)` calculează $P(X = x)$, dacă $X \sim Hyge(n, n_1, n_2)$.

Exemplu: 1) Într-o urnă sunt $n_1 = 2$ bile albe și $n_2 = 3$ bile negre. Se extrag fără returnare $n = 3$ bile. Fie v.a. X = numărul de bile albe extrase. Vom calcula $P(X = 1)$ cu două metode:

Prima metodă: Pentru $i \in \{1, 2, 3\}$ fie evenimentele

A_i : la a i -a extragere s-a obținut bilă albă

$N_i = \bar{A}_i$: la a i -a extragere s-a obținut bilă neagră.

Scriem

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(A_1 \cap N_2 \cap N_3), \\ P(A_1 \cap N_2 \cap N_3) &= P(A_1)P(N_2|A_1)P(N_3|A_1 \cap N_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \\ P(N_1 \cap A_2 \cap N_3) &= P(N_1)P(A_2|N_1)P(N_3|N_1 \cap A_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \\ P(N_1 \cap N_2 \cap A_3) &= P(N_1)P(N_2|N_1)P(A_3|N_1 \cap N_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow P(X = 1) &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

A doua metodă: O bilă albă din două se poate alege în $C_2^1 = 2$ moduri, două bile negre din trei se pot alege în $C_3^2 = 3$ moduri, trei bile din cinci se pot alege în $C_5^3 = 10$ moduri

$$\Rightarrow P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3} = \frac{2 \cdot 3}{10} = \frac{3}{5}.$$

2) Loto 6 din 49 \rightarrow Care este probabilitatea de a nimeri exact 4 numere câștigătoare?

R.: Între cele 49 de bile exact $n_1 = 6$ sunt câștigătoare ("bilele albe") și $n_2 = 43$ necâștigătoare ("bilele negre"). Care este probabilitatea ca din $n = 6$ extrageri fără returnare, exact $k = 4$

numere să fie câștigătoare?

$$\Rightarrow P(X = 4) = \frac{C_6^4 C_{43}^2}{C_{49}^6}$$

◇

Distribuția geometrică $X \sim \text{Geo}(p), p \in (0, 1)$

În cadrul unui experiment poate să apară evenimentul A (*succes*) sau \bar{A} (*insucces*)

- $A = \text{succes}$ cu $P(A) = p$, $\bar{A} = \text{insucces}$ $P(\bar{A}) = 1 - p$
- se repetă (independent) experimentul până apare prima dată A (“succes”)
- v.a. X arată de câte ori apare \bar{A} (numărul de “insuccese”) până la apariția primului A (“succes”) \Rightarrow valori posibile: $X \in \{0, 1, \dots\}$

$$P(X = k) = p(1 - p)^k \quad \text{pentru } k \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Matlab/Octave: `geornd(p, ...)` generează valori aleatoare; `geopdf(x, p)` calculează $P(X = x)$, dacă $X \sim \text{Geo}(p)$.

Exemplu: X v.a. ce indică numărul de retransmisii printr-un canal cu zgomot (canal cu perturbări) până (înainte de) la prima recepționare corectă a mesajului; X are distribuție geometrică.

♠

Variabile aleatoare independente

Def. 12. Variabilele aleatoare discrete X (care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$) și Y (care ia valorile $\{y_j, j \in J\}$) sunt **independente**, dacă și numai dacă

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall i \in I, j \in J,$$

unde $P(X = x_i, Y = y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) \quad \forall i \in I, j \in J$.

Observație: Fie evenimentele $A_i = \{X = x_i\}, i \in I$, și $B_j = \{Y = y_j\}, j \in J$.

V.a. X și Y sunt independente $\iff \forall (i, j) \in I \times J$ evenimentele A_i și B_j sunt independente (a se vedea Def. ??).

Exemplu: Se aruncă o monedă de 10 ori. Fie X v.a. care indică de câte ori a apărut pajură în primele cinci aruncări ale monedei; fie Y v.a. care indică de câte ori a apărut pajură în ultimele cinci aruncări ale monedei. X și Y sunt v.a. independente. Care este distribuția de probabilitate a lui X , respectiv Y ?

P. 8. Fie variabilele aleatoare discrete X (care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$) și Y (care ia valorile $\{y_j, j \in J\}$). Sunt echivalente afirmațiile:

(1) X și Y sunt v.a. sunt independente;

(2) $P(X = x|Y = y) = P(X = x) \quad \forall x \in \{x_i, i \in I\}, y \in \{y_j, j \in J\}$;

(3) $P(Y = y|X = x) = P(Y = y) \quad \forall x \in \{x_i, i \in I\}, y \in \{y_j, j \in J\}$;

(4) $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Def. 13. $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_m)$ este un **vector aleator discret** dacă fiecare componentă a sa este o variabilă aleatoare discretă.

Fie $K \subseteq \mathbb{N}$ o mulțime de indici și fie date $\mathbb{x}_k := (x_{1,k}, \dots, x_{m,k}) \in \mathbb{R}^m, k \in K$.

Dacă $\mathbb{X} : \Omega \rightarrow \{\mathbb{x}_k, k \in K\}$ este un vector aleator discret, atunci

$$P(\mathbb{X} = \mathbb{x}_k) := P(\{\omega \in \Omega : \mathbb{X}(\omega) = \mathbb{x}_k\}), k \in K,$$

determină **distribuția de probabilitate a vectorului aleator discret** \mathbb{X}

$$\mathbb{X} \sim \left(\begin{matrix} \mathbb{x}_k \\ P(\mathbb{X} = \mathbb{x}_k) \end{matrix} \right)_{k \in K}.$$

▷ Vectorii aleatori sunt caracterizați de distribuțiile lor de probabilitate! De exemplu, un vector aleator cu 2 componente:

$$\mathbb{X} = (X, Y) \sim \left(\begin{matrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{matrix} \right)_{(i,j) \in I \times J}$$

unde $I, J \subseteq \mathbb{N}$ sunt mulțimi de indici,

$p_{ij} := P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}), p_{ij} > 0 \forall i \in I, j \in J$,

iar $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1$.

▷ Uneori distribuția vectorului (X, Y) se dă sub formă tabelară:

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	\dots	y_j	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_i	\dots	p_{ij}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Exemplu: Fie vectorul aleator discret (X, Y) cu distribuția dată de

următorul tabel:

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

 $\implies P(X = -1, Y = 0) = \frac{1}{4}, P(X = -1, Y = 1) = \frac{1}{2}$, etc.

a) Să se determine $P(X = -1)$, $P(X \leq 3)$, respectiv $P(Y = 1)$, $P(Y \leq -1)$.

b) Sunt X și Y v.a. independente?

Observație: Dacă X și Y sunt v.a. independente, atunci

$$(2) \quad p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \quad \forall i \in I, j \in J.$$

▷ Dacă X și Y sunt v.a. independente, și se știu distribuțiile lor, atunci distribuția vectorului aleator (X, Y) se determină pe baza formulei (??).

▷ Dacă se cunoaște distribuția vectorului aleator (X, Y) distribuțiile lui X și Y se determină astfel:

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij} \quad \forall i \in I$$

$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} \quad \forall j \in J.$$

Exemplu:

▷ **Modelul urnei cu r culori cu returnarea bilei după fiecare extragere:** fie p_i probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i , $i = \overline{1, r}$ dintr-o urnă; fie X_i v.a. ce indică numărul de bile de culoarea i , $i = \overline{1, r}$ după n extrageri cu returnarea bilei extrase, iar ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează

$$\begin{aligned} P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) &= \text{probabilitatea de a obține } k_i \text{ bile cu culoarea } i, i = \overline{1, r}, \\ &\quad \text{din } n = k_1 + \dots + k_r \text{ extrageri cu returnarea bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

▷ (X_1, \dots, X_r) este un vector aleator discret.

▷ cazul $r = 2$ corespunde distribuției binomiale (modelul binomial cu bile de două culori într-o urnă, a se vedea pg. ??): (X_1, X_2) este un vector aleator discret, iar $X_1 + X_2 = n$; X_1 și X_2 nu sunt v.a. independente.

Operații cu variabile aleatoare (numerice)

• Cunoscând distribuția vectorului (X, Y) cum se determină distribuția pentru $X + Y$, $X \cdot Y$, $X^2 - 1$, $2Y$?

Exemplu: Fie vectorul aleator discret (X_1, X_2) cu distribuția dată de următorul tabel:

$X_2 \backslash X_1$	0	1	2
1	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$

. Determinați: a) distribuțiile variabilelor aleatoare X_1 și X_2 ;

b) distribuțiile variabilelor aleatoare $X_1 + X_2$ și $X_1 \cdot X_2$, $X_1^2 - 1$;

c) dacă variabilele aleatoare X_1 și X_2 sunt independente sau dependente.

R.: a) $X_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$ și $X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{16} & \frac{6}{16} & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$.

b) $X_1 + X_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{16} & \frac{2}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$ și $X_1 \cdot X_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{3}{16} & \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{5}{16} \end{pmatrix}$, $X_1^2 - 1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ \frac{5}{16} & \frac{11}{16} \end{pmatrix}$

c) X_1 și X_2 nu sunt independente, pentru că $\frac{2}{16} = P(X_1 = 1, X_2 = 0) \neq P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = \frac{5}{16} \cdot \frac{3}{16}$. ♡

• Cunoscând distribuțiile variabilelor aleatoare independente (discrete) X și Y , cum se determină distribuția pentru $X + Y$, $X \cdot Y$?

Exercițiu: Fie X, Y v.a. independente, având distribuțiile

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

a) Care sunt distribuțiile v.a. $2X + 1$, Y^2 , dar distribuția vectorului aleator (X, Y) ?

b) Care sunt distribuțiile v.a. $X + Y$, $X \cdot Y$, $\max(X, Y)$, $\min(X, Y^2)$? ♣

Exercițiu: Se aruncă două zaruri. a) Să se scrie distribuția de probabilitate pentru variabila aleatoare, care este suma celor două numere apărute. b) Să se scrie distribuția de probabilitate pentru variabila aleatoare, care este produsul celor două numere apărute. ♠

Def. 14. Valoarea medie a unei variabile aleatoare discrete (numerice) X , care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$, este

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i),$$

dacă $\sum_{i \in I} |x_i| P(X = x_i) < \infty$.

▷ Valoarea medie a unei variabile aleatoare caracterizează *tendința centrală* a valorilor acesteia.

P. 9. Fie X și Y v.a. discrete. Au loc proprietățile:

→ $E(aX + b) = aE(X) + b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;

→ $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

→ Dacă X și Y sunt v.a. independente, atunci $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$.

→ Dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e o funcție astfel încât $g(X)$ este v.a., atunci

$$E(g(X)) = \sum_{i \in I} g(x_i) P(X = x_i),$$

dacă $\sum_{i \in I} |g(x_i)| P(X = x_i) < \infty$.

Matlab/Octave: `mean(x)`

pentru $x = [x(1), \dots, x(n)]$, se calculează $\text{mean}(x) = \frac{1}{n}(x(1) + \dots + x(n))$

Exemplu: Joc: Se aruncă un zar; dacă apare 6, se câștigă 3 u.m. (unități monetare), dacă apare 1 se câștigă 2 u.m., dacă apare 2,3,4,5 se pierde 1 u.m. În medie cât va câștiga sau pierde un jucător după 30 de repetiții ale jocului?

Răspuns: Fie X v.a. care indică venitul la un joc

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Pentru $i \in \{1, \dots, 30\}$ fie X_i venitul la al i -lea joc; X_i are aceeași distribuție ca X . Venitul mediu al jucătorului după 30 de repetiții ale jocului este

$$E(X_1 + \dots + X_{30}) = E(X_1) + \dots + E(X_{30}) = 30 \cdot E(X) = 30 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 - 4 + 3) = 5 \text{ (u.m.)}.$$

Așadar jucătorul *câștigă în medie 5 u.m.*

Exercițiu:

Input: Fie $A(1), \dots, A(200)$ un vector cu 200 de elemente, din care 50 sunt egale cu 0, 70 egale cu 1 și 80 sunt egale cu 2 (ordinea lor este necunoscută).

Output: Să se găsească un 0 în vector, alegând aleator un element din șir și verificând dacă acesta este 0.

Întrebare: În medie câte iterații sunt necesare înainte să apară primul 0?

```
clear all
A=[zeros(1,50), zeros(1,70)+1,zeros(1,80)+2];
index=randperm(length(A));
A=A(index);
c=0;
i=randi(length(A));
while A(i)~=0
    c=c+1;
    i=randi(length(A));
end
fprintf('nr. iteratii inainte sa apara primul 0: %d \n',c)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
A=[zeros(1,50), zeros(1,70)+1,zeros(1,80)+2];
s=[];
N=1000;
for j=1:N
    index=randperm(length(A));
    A=A(index);
```

```

c=0;
i=randi(length(A));
while A(i)~=0
c=c+1;
i=randi(length(A));
end
s=[s,c];
end
fprintf('nr. mediu de iteratii: %4.3f \n',mean(s))

```

Probabilitatea să apară la orice iterație 0 este $p = \frac{50}{200} = 0.25$.

Notăm cu X v.a. care indică numărul de iterații necesare *înainte* să apară primul 0

$\Rightarrow X \sim \text{Geo}(p)$.

Numărul mediu de iterații necesare *înainte* să apară primul 0 este $E(X)$. Se poate arăta că $E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0.25}{0.25} = 3$. ▼

Def. 15. Fie X_1, \dots, X_n cu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, variabile aleatoare discrete, care iau valori în mulțimile $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$. X_1, \dots, X_n sunt **variabile aleatoare independente**, dacă

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n = x_n)$$

pentru fiecare $x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}_n$.

Exemplu: Se aruncă patru zaruri. Fie X_i v.a. care indică numărul apărut la al i -lea zar.

- a) X_1, X_2, X_3, X_4 sunt v.a. independente;
- b) $X_1 + X_2$ și $X_3 + X_4$ sunt v.a. independente;
- c) $X_1 + X_2 + X_3$ și X_4 sunt v.a. independente.

Def. 16. Funcția de repartiție $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ a unei variabile aleatoare X discrete, care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$, este

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i \in I: x_i \leq x} P(X = x_i) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Fie v.a. discretă X dată prin:

$$P(X = -1) = 0.5, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 4) = 0.2.$$

$\Rightarrow X$ are funcția de repartiție $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < -1 \\ 0.5, & \text{dacă } -1 \leq x < 1 \\ 0.5 + 0.3 = 0.8, & \text{dacă } 1 \leq x < 4 \\ 0.5 + 0.3 + 0.2 = 1, & \text{dacă } 4 \leq x. \end{cases}$$

P. 10. Funcția de repartiție F a unei variabile aleatoare discrete X are următoarele proprietăți:

- (1) $F(b) - F(a) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = P(a < X \leq b) \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$
- (2) F este monoton crescătoare, adică pentru orice $x_1 < x_2$ rezultă $F(x_1) \leq F(x_2).$
- (3) F este continuă la dreapta, adică $\lim_{x \searrow x_0} F(x) = F(x_0) \forall x_0 \in \mathbb{R}.$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

Matlab/Octave: `binocdf(x, n, p)`, `hygecdf(x, n1+n2, n1, n)`, `geocdf(x, p)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$ pentru $X \sim \text{Bino}(n, p)$, $X \sim \text{Hyge}(n_1 + n_2, n_1, n)$, respectiv $X \sim \text{Geo}(p).$

```
pkg load statistics
clear all
close all
% X~Bino(n,p)
n=5; % nr. repetari ale experimentului
p=0.4; %probabilitatea de a obtine succes
x=-1:0.001:6;
y=binocdf(x,n,p);
plot(x,y,'r.')
title('FUNCTIA DE REPARTITIE - Distr. binomiala')
```

Variabile aleatoare continue

V.a. continuă: ia un număr infinit și nenumărabil de valori într-un interval sau reuniune de intervale (v.a. poate lua orice valoare din intervalul considerat);

▷ v.a. continue pot modela caracteristici fizice precum timp (de ex. timp de instalare, timp de așteptare), greutate, lungime, poziție, volum, temperatură (de ex. X e v.a. care indică durata de funcționare a unui dispozitiv până la prima defectare; X e v.a. care indică temperatura într-un oraș la ora amiezii)

▷ ea este caracterizată de funcția de densitate.

Def. 17. Funcția de densitate a unei v.a. continue X este funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definită prin

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R},$$

se numește **funcția de repartiție** a v.a. continue X .

P. 11. Fie f funcția de densitate și F funcția de repartiție a unei v.a. continue X . Au loc proprietățile:

(1) $f(t) \geq 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$;

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$;

(3) $F(b) - F(a) = P(a < X \leq b) = \int_a^b f(t) dt \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$;

(4) $P(X = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$;

(5) pentru $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$ au loc

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(t) dt;$$

(6) F este o funcție monoton crescătoare și continuă pe \mathbb{R} ;

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

(8) dacă F este derivabilă în punctul x , atunci $F'(x) = f(x)$.

Observație: Orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care are proprietățile (1), (2) din **P.??** este o funcție de densitate.

Exemple de distribuții clasice continue

➡ **Distribuția uniformă pe un interval $[a, b]$:** $X \sim Unif[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

• funcția de densitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{pentru } x \in [a, b] \\ 0, & \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

Matlab/Octave:

▷ pentru $a = 0, b = 1$: `rand(M, N)` returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare din $[0, 1]$

▷ `unifrnd(a, b, M, N)`, respectiv $(b - a)\text{rand}(M, N) + a$ returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare din $[a, b]$

▷ pentru $X \sim Unif[a, b]$: `unifpdf(x, a, b)` calculează $f(x)$, iar `unifcdf(x, a, b)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$.

➡ **Distribuția normală (Gauss):** $X \sim N(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

• funcția de densitate este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}.$$



Friedrich Gauss și legea normală $N(m, \sigma^2)$ (bancnota de 10 DM)

- Pentru $m = 0, \sigma = 1$: $N(0, 1)$ se numește *distribuția standard normală*.
- Distribuția normală se aplică în: măsurarea erorilor (de ex. termenul eroare în analiza regresională), în statistică (teorema limită centrală, teste statistice) etc.

Matlab/Octave: `normrnd(m, sigma, M, N)` returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;

▷ pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$: `normpdf(x, m, sigma)` calculează $f(x)$, iar `normcdf(x, m, sigma)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$.

➔ **Distribuția exponențială:** $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$

- funcția de densitate este

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{pentru } x > 0 \\ 0, & \text{pentru } x \leq 0 \end{cases}$$

Matlab/Octave: `exprnd(1/lambda, M, N)` returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;

▷ pentru $X \sim \text{Exp}(\lambda)$: `exppdf(x, 1/lambda)` calculează $f(x)$, iar `expcdf(x, 1/lambda)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$.

```
pkg load statistics
clear all
close all
figure
title('Funcția de densitate a legii exponentiale')
hold on
L=[1,2,4]; % lambda parametru
t=[-1:0.01:2];
plot(t, exppdf(t,1/L(1)), 'r*')
plot(t, exppdf(t,1/L(2)), 'b*')
plot(t, exppdf(t,1/L(3)), 'g*')
legend('lambda=1', 'lambda=2', 'lambda=4')
```

➡ **Distribuția Student:** $X \sim St(n), n \in \mathbb{N}^*$

- distribuția Student cu $n \in \mathbb{N}^*$ grade de libertate are funcția de densitate

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, t \in \mathbb{R}$$

unde funcția Gamma este

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} v^{a-1} \exp(-v) dv, a > 0$$

Matlab/Octave: `trnd(n, M, N)` returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;

▷ pentru $X \sim St(n)$: `tpdf(x, n)` calculează $f(x)$, iar `tcdf(x, n)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$.

➡ **Distribuția Chi-pătrat:** $X \sim \chi^2(n), n \in \mathbb{N}^*$

- distribuția χ^2 cu $n \in \mathbb{N}^*$ grade de libertate are funcția de densitate

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right), & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

Matlab/Octave: `chi2rnd(n, M, N)` returnează o matrice $M \times N$ cu valori aleatoare;

▷ pentru $X \sim \chi^2(n)$: `chi2pdf(x, n)` calculează $f(x)$, iar `chi2cdf(x, n)` calculează $F(x) = P(X \leq x)$.

Exemplu: Fie $X \sim Exp(0.5)$ v.a. care indică timpul de funcționare a unei baterii (câte luni funcționează bateria). Folosind simulări, să se estimeze a) $P(2 \leq X \leq 4)$; b) $P(X > 3)$ și să se compare rezultatele obținute cu rezultatele teoretice.

```
pkg load statistics
N=10000;
X=exprnd(2,1,N);
p=sum((2<=X) & (X<=4))/N
q=sum(X>3)/N
> p=0.23280
> q=0.22060
```

$$P(2 \leq X \leq 4) = \int_2^4 0.5e^{-0.5t} dt = -e^{-0.5t} \Big|_2^4 = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.23254$$

$$P(X > 3) = 1 - \int_{-\infty}^3 0.5e^{-0.5t} dt = \int_3^{\infty} 0.5e^{-0.5t} dt = -e^{-0.5t} \Big|_3^{\infty} = e^{-1.5} \approx 0.22313$$



Matlab/Octave:

Distribuția v.a. discrete X	Generare valori aleatoare	Funcția de repartiție $F_X(x) = P(X \leq x)$	Probabilitate $P(X = x)$
$Bino(n, p)$	<code>binornd(n, p)</code>	<code>binocdf(x, n, p)</code>	<code>binopdf(x, n, p)</code>
$Unid(n)$	<code>unidrnd(n)</code>	<code>unidcdf(x, n)</code>	<code>unidpdf(x, n)</code>
$Hyge(n, n_1, n_2)$	<code>hygernd(n_1+n_2, n_1, n)</code>	<code>hygecdf(x, n_1+n_2, n_1, n)</code>	<code>hygepdf(x, n_1+n_2, n_1, n)</code>
$Geo(p)$	<code>geornd(p)</code>	<code>geocdf(x, p)</code>	<code>geopdf(x, p)</code>

Distribuția v.a. continue X	Generare valori aleatoare	Funcția de repartiție $F_X(x) = P(X \leq x)$	Funcția de densitate $f_X(x)$
$Unif[a, b]$	<code>unifrnd(a, b)</code>	<code>unifcdf(x, a, b)</code>	<code>unifpdf(x, a, b)</code>
$N(m, \sigma^2)$	<code>normrnd(m, σ)</code>	<code>normcdf(x, m, σ)</code>	<code>normpdf(x, m, σ)</code>
$Exp(\lambda)$	<code>exprnd($\frac{1}{\lambda}$)</code>	<code>expcdf($x, \frac{1}{\lambda}$)</code>	<code>exppdf($x, \frac{1}{\lambda}$)</code>

Observație: Dacă în cadrul aceluiași program Matlab/Octave se generează valori aleatoare (de exemplu cu `rand`, `randi`, `binornd`, `hygernd`, `unidrnd`, `geornd`, `unifrnd`, `normrnd`, `exprnd`, etc.) atunci acestea pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare independente.

Proprietăți

V.a. discretă

- caracterizată de distribuția de probabilitate discretă

$$X \sim \left(P(X = x_i) \right)_{i \in I}$$

- $\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$
- $P(X \in A) = \sum_{i \in I: x_i \in A} P(X = x_i)$
- funcția de repartiție $F(x) = P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$
- $F(x) = \sum_{i \in I: x_i \leq x} P(X = x_i) \forall x \in \mathbb{R}$
- F este funcție continuă la dreapta
- F este discontinuă în punctele $x_i, \forall i \in I$
- $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{i \in I: a \leq x_i \leq b} P(X = x_i)$$
- $P(X = a) = 0$ dacă $a \notin \{x_i : i \in I\}$

V.a. continuă

- caracterizată de funcția de densitate f

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$
- $P(X \in A) = \int_A f(t) dt$
- funcția de repartiție $F(x) = P(X \leq x) \forall x \in \mathbb{R}$
- $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- F este funcție continuă în orice punct $x \in \mathbb{R}$
- $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(t) dt$$
- $P(X = a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- dacă F este derivabilă în punctul x
 $\Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Exemplu: Fie X v.a. care indică timpul de funcționare neîntreruptă (în ore) până la prima defectare a unui aparat, pentru care $P(X > x) = 2^{-x}, x > 0$ și $P(X > x) = 1, x \leq 0$. Să se determine f_X și $P(2 < X < 3)$.

Vector aleator continuu

Def. 18. (X_1, \dots, X_n) este un **vector aleator continuu** dacă fiecare componentă a sa este o variabilă aleatoare continuă.

Def. 19. $f_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este **funcția de densitate a vectorului aleator continuu** (X, Y) , dacă

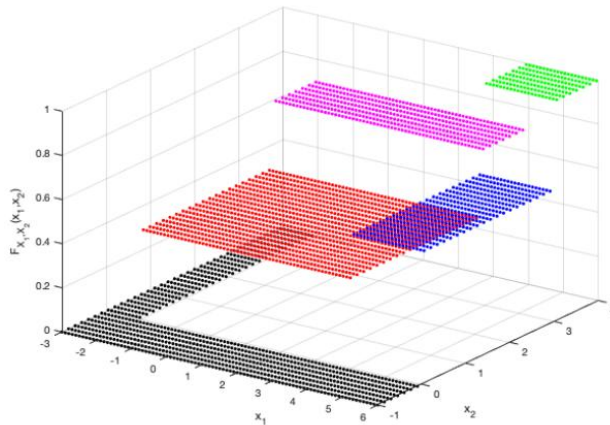
$$P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f_{(X,Y)}(s, t) dt \right) ds \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Def. 20. $F_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ este **funcția de repartiție a vectorului aleator** (X, Y) (discret sau continuu), dacă

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: Vectorul aleator discret (X_1, X_2) este dat prin următorul tabel de contingență:

$X_1 \backslash X_2$	0	3
-2	0.4	0.3
4	0.2	0.1



Funcția de repartiție $F_{(X_1, X_2)}$

$\Rightarrow (X_1, X_2)$ are funcția de repartiție $F_{(X_1, X_2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x_1 < -2 \text{ sau } x_2 < 0 \\ 0.4, & \text{dacă } -2 \leq x_1 < 4 \text{ și } 0 \leq x_2 < 3 \\ 0.7, & \text{dacă } -2 \leq x_1 < 4 \text{ și } 3 \leq x_2 \\ 0.6, & \text{dacă } 4 \leq x_1 \text{ și } 0 \leq x_2 < 3 \\ 1, & \text{dacă } 4 \leq x_1 \text{ și } 3 \leq x_2. \end{cases}$$



P. 12. Pentru un **vector aleator continuu** (X, Y) au loc proprietățile:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u, v) dv \right) du = 1.$$

2. $F_{(X,Y)}$ este funcție continuă.

3. Dacă $F_{(X,Y)}$ este derivabilă parțial în (x, y) , atunci are loc:

$$\frac{\partial^2 F_{(X,Y)}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{(X,Y)}(x, y).$$

$$4. P((X, Y) \in A) = \underbrace{\int \int}_A f_{(X,Y)}(u, v) du dv, \quad A \subset \mathbb{R}^2.$$

► Dacă se cunoaște funcția de repartiție $F_{(X,Y)}$ pentru vectorul aleator (X, Y) (discret sau continuu), atunci F_X , respectiv F_Y , se determină cu

$$(3) \quad F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{(X,Y)}(x, y).$$

Exemplu: Funcția de repartiție a vectorului aleator (X, Y) este $F_{(X,Y)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \text{ sau } y < 1 \\ x(y-1), & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \text{ și } 1 \leq y < 2 \\ x, & \text{dacă } 0 \leq x < 1 \text{ și } 2 \leq y \\ y-1, & \text{dacă } 1 \leq x \text{ și } 1 \leq y < 2 \\ 1, & \text{dacă } 1 \leq x \text{ și } 2 \leq y. \end{cases}$$

Ce distribuție au X , respectiv Y ?

R.: Se determină F_X, F_Y cu (??) și se calculează $f_X = F'_X, f_Y = F'_Y$; se obține $X \sim Unif[0, 1], Y \sim Unif[1, 2]$. ♣

► Dacă se cunoaște funcția de densitate $f_{(X,Y)}$ pentru vectorul aleator continuu (X, Y) , atunci f_X , respectiv f_Y , se determină cu

$$(4) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

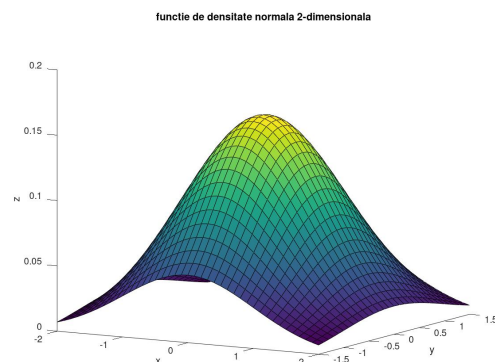
Exemplu pentru o distribuție normală bidimensională: (X, Y) are funcția de densitate (graficul acestei funcții este dat în figura alăturată)

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow X, Y \sim N(0, 1).$$



$f_{(X,Y)}$ pentru distribuția normală bidimensională



Def. 21. X_1, \dots, X_n sunt ***n* variabilele aleatoare independente** (discrete sau continue), dacă

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Observație ($n = 2$ în definiția de mai sus): X_1 și X_2 sunt **două variabilele aleatoare independente** (discrete sau continue), dacă

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1) \cdot P(X_2 \leq x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

adică

$$F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

P. 13. Variabilele aleatoare continue X_1 (cu funcția de densitate f_{X_1}) și X_2 (cu funcția de densitate f_{X_2}) sunt independente, dacă și numai dacă

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

unde $f_{(X_1, X_2)}$ este funcția de densitate a vectorului aleator (X_1, X_2) .

Exemplu: (X_1, X_2) are distribuție uniformă pe $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, cu $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < b_1, a_2 < b_2$ dacă

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} & \text{dacă } (x_1, x_2) \in I \\ 0 & \text{dacă } (x_1, x_2) \notin I. \end{cases}$$

Cu (??) se calculează

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{b_1 - a_1} & \text{dacă } x_1 \in [a_1, b_1] \\ 0 & \text{dacă } x_1 \in \mathbb{R} \setminus [a_1, b_1]. \end{cases} \quad \text{și } f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{b_2 - a_2} & \text{dacă } x_2 \in [a_2, b_2] \\ 0 & \text{dacă } x_2 \in \mathbb{R} \setminus [a_2, b_2]. \end{cases}$$

$$\implies X_1 \sim \text{Unif}[a_1, b_1], X_2 \sim \text{Unif}[a_2, b_2];$$

se observă $f_{(X_1, X_2)} = f_{X_1} \cdot f_{X_2} \implies X_1$ și X_2 sunt v.a. independente! ❀

Exemplu: Fie (X, Y) vector aleator continuu, având funcția de repartiție

$$F_{(X, Y)}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y}) & \text{dacă } x > 0 \text{ și } y > 0 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Sunt X și Y v.a. independente? Să se calculeze $P(1 \leq X \leq 2 \leq Y \leq 3)$.

R.: Se calculează $F_X(x) = 1 - e^{-x}$ pentru $x > 0$ și $F_X(x) = 0$ pentru $x \leq 0$, precum și $F_Y(y) = 1 - e^{-2y}$ pentru $y > 0$ și $F_Y(y) = 0$ pentru $y \leq 0$. Se verifică

$$F_{(X, Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deci, X și Y sunt v.a. independente.

$$P(1 \leq X \leq 2 \leq Y \leq 3) = \int_1^2 \int_2^3 f_X(u) f_Y(v) du dv = (e^{-1} - e^{-2})(e^{-4} - e^{-6}) \approx 0.00368. \quad \text{❀}$$

Def. 22. Valoarea medie a unei v.a. continue X , care are funcția de densitate f , este

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt, \text{ dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt < \infty.$$

▷ Valoarea medie a unei variabile aleatoare caracterizează tendința centrală a valorilor acesteia.

P. 14. Proprietăți ale valorii medii; fie X, Y v.a. continue:

$$\rightarrow E(aX + b) = aE(X) + b \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{R};$$

$$\rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y);$$

$$\rightarrow \text{Dacă } X \text{ și } Y \text{ sunt variabile aleatoare } \textbf{independente}, \text{ atunci } E(X \cdot Y) = E(X)E(Y).$$

$$\rightarrow \text{Dacă } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e o funcție, astfel încât } g(X) \text{ este o v.a. continuă, atunci}$$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx,$$

$$\text{dacă } \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x) dx < \infty.$$

Exemplu: Durata drumului parcurs de un elev dimineața de acasă până la școală este o v.a. uniform distribuită între 20 și 26 minute. Dacă elevul pornește la 7:35 (a.m.) de acasă și are ore de la 8 (a.m.), care este probabilitatea ca elevul să ajungă la timp la școală? *În medie* cât durează drumul elevului până la școală?

Răspuns: fie X (v.a.) = durata drumului parcurs până la școală (în minute) $\Rightarrow X \sim Unif[20, 26]$

$$\Rightarrow f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{26-20} = \frac{1}{6}, & \text{dacă } 20 \leq t \leq 26 \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

$$P(\text{"elevul ajunge la timp la școală"}) = P(X \leq 25) = \int_{-\infty}^{25} f_X(t) dt = \int_{20}^{25} \frac{1}{6} dt = \frac{25-20}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_{20}^{26} t \cdot \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{20}^{26} = 23 \text{ (minute).}$$



Def. 23. Varianța (dispersia) unei variabile aleatoare X (discrete sau continue) este

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right),$$

(dacă valoarea medie $E\left((X - E(X))^2\right)$ există). Valoarea $\sqrt{V(X)}$ se numește **deviația standard** a lui X și o notăm cu $Std(X)$.

► **Varianța unei variabile aleatoare caracterizează împrăștierea (dispersia) valorilor lui X în jurul valorii medii $E(X)$.**

P. 15. Proprietăți ale varianței (pentru v.a. discrete sau continue):

$$\rightarrow V(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

$$\rightarrow V(aX + b) = a^2 V(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\rightarrow \text{Dacă } X \text{ și } Y \text{ sunt variabile aleatoare } \textbf{independente}, \text{ atunci } V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

Exemple: 1) Fie $X \sim Bino(n, p)$. Să se arate că $E(X) = np$ și $V(X) = np(1 - p)$.

R.: Pentru $i \in \{1, \dots, n\}$ fie $X_i \sim Bernoulli(p)$ (adică $P(X_i = 1) = p$, $P(X_i = 0) = 1 - p$), astfel încât X_1, \dots, X_n sunt v.a. independente. Observăm că $X_1 + \dots + X_n \sim Bino(n, p)$. Deci, $X_1 + \dots + X_n$ și X au aceeași distribuție, așadar ele au aceeași valoare medie și aceeași varianță

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = p + \dots + p = np.$$

V.a. X_1, \dots, X_n sunt independente și folosind P.??, obținem

$$V(X) = V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) = np(1 - p) = np(1 - p).$$

2) Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ să se arate că $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$.

R.: Funcția de densitate a lui X este

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Când $m = 0$ și $\sigma = 1$ obținem *funcția de densitate a distribuției normale standard*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\}, x \in \mathbb{R}.$$

Din P.??-(2) rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 1.$$

În calculele de mai jos utilizăm schimbarea de variabilă $t = \frac{x-m}{\sigma}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt + m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt \\ &= 0 + m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = m. \end{aligned}$$

Folosind aceeași schimbare de variabilă și apoi integrare prin părți, avem

$$\begin{aligned} V(X) &= E[(X-m)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \exp \left\{ -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \left(-\exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \right)' dt \\ &= t \left(-\exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \right\} \right) dt \\ &= 0 - 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \sigma^2. \end{aligned}$$

3) Vectorul aleator (X, Y) are funcția de densitate

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x - y, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \text{ și } -1 \leq y \leq 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Să se calculeze $E(X)$ și $E(X^2)$.

R.:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \begin{cases} \int_{-1}^0 (x-y) dy = x + \frac{1}{2}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{7}{12}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{5}{12}.$$



► Matlab/Octave: `mean`, `var`, `std`

Fie $x = [x_1, \dots, x_n]$ valorile unei v.a. X

$$mean(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

$mean(x) \approx E(X)$ pentru n suficient de mare

$$var(x, 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - mean(x))^2, \quad var(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - mean(x))^2$$

$var(x, 1) \approx V(X)$, $var(x) \approx V(X)$ pentru n suficient de mare

$$std(x, 1) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - mean(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad std(x) = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - mean(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$std(x, 1) \approx Std(X)$, $std(x) \approx Std(X)$ pentru n suficient de mare

Def. 24. $(X_n)_n$ este **șir de v.a. independente**, dacă $\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \mathbb{N}$ v.a. X_{i_1}, \dots, X_{i_k} sunt independente, adică

$$P(X_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, X_{i_k} \leq x_{i_k}) = P(X_{i_1} \leq x_{i_1}) \cdots P(X_{i_k} \leq x_{i_k})$$

$\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$.

Exemplu: a) $X_n =$ v.a. care indică numărul apărut la a n -aruncare a unui zar $\Rightarrow (X_n)_n$ șir de v.a. independente.

b) Se aruncă o monedă

$$X_n = \begin{cases} 0 & : \text{la a } n\text{-a aruncare a apărut cap,} \\ 1 & : \text{la a } n\text{-a aruncare a apărut pajură.} \end{cases}$$

$\Rightarrow (X_n)_n$ șir de v.a. independente.

c) $X_n =$ v.a. care indică numărul apărut la al n -lea joc de ruletă

$\Rightarrow (X_n)_n$ șir de v.a. independente.



Def. 25. Șirul de v.a. $(X_n)_n$ **converge aproape sigur (a.s.)** la v.a. X , dacă

$$P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$$

Notăție: $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$

► Cu alte cuvinte, **convergența aproape sigură** $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ impune ca $(X_n(\omega))_n$ să convergă la $X(\omega)$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$, cu excepția unei mulțimi “mici” de probabilitate nulă;

dacă $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$ atunci evenimentul

$$M = \{\omega \in \Omega : (X_n(\omega))_n \text{ nu converge la } X(\omega)\} \text{ are } P(M) = 0.$$

Exemple: 1) În spațiul de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) fie $A \in \mathcal{K}$ cu $P(A) = 0.4$ și $P(\bar{A}) = 0.6$:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{pentru } \omega \in A \\ -\frac{1}{n}, & \text{pentru } \omega \in \bar{A}. \end{cases} \Rightarrow P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = ???\}) = 1.$$

Definim

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega \in A \\ 0, & \text{pentru } \omega \in \bar{A}. \end{cases} \Rightarrow P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Așadar $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$.

2) Fie $\Omega := [0, 1]$ spațiul de selecție, P probabilitatea pe $[0, 1]$ indusă de măsura Lebesgue pe $[0, 1]$, adică pentru $\forall \alpha < \beta$ din $[0, 1]$ are loc

$$P([\alpha, \beta]) = P(([\alpha, \beta]) = P((\alpha, \beta]) = P((\alpha, \beta)) := \beta - \alpha \text{ (lungimea intervalului)}$$

2a) $X_n(\omega) = \omega + \omega^n + (1 - \omega)^n$, $\omega \in [0, 1]$, $n \geq 1 \Rightarrow X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} ???$

R.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \begin{cases} \omega & \text{pentru } \omega \in (0, 1) \\ 1 & \text{pentru } \omega = 0 \\ 2 & \text{pentru } \omega = 1. \end{cases}$$

Fie $X(\omega) = \omega$ pentru fiecare $\omega \in \Omega$

$$\Rightarrow \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \omega\} = (0, 1)$$

$$\Rightarrow P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = \omega\}) = P((0, 1)) = 1.$$

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X.$$

2b) $X_n(\omega) = (-1)^n \omega$, $\omega \in [0, 1]$, $n \geq 1$; converge $(X_n)_n$ a.s.?

R.: $(X_n)_n$ nu converge a.s. spre o v.a.; șirul $(X_n(\omega))_n$ este convergent doar în $\omega = 0$, iar $P(\{0\}) = 0$. ▲

Frecvențe relative și absolute (a se vedea Def.??): Fie A un eveniment asociat unei experiențe, repetăm experiența de n ori (în aceleași condiții date) și notăm cu r_n numărul de realizări ale evenimentului A ; **frecvența relativă** a evenimentului A este numărul

$$f_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

$r_n(A)$ este **frecvența absolută** a evenimentului A .

Experiment: Se aruncă o monedă de n ori; A : se obține *pajură*

n	frecvență absolută $r_n(A)$	frecvență relativă $f_n(A)$
100	48	0.48
1000	497	0.497
10000	5005	0.5005

$$f_n(A) \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{2} \text{ (a se vedea P.??)}$$

Legea tare a numerelor mari (LTNM)

Legea numerelor mari se referă la descrierea rezultatelor unui experiment repetat de foarte multe ori. Conform acestei legi, rezultatul mediu obținut se apropie tot mai mult de valoarea așteptată, cu cât experimentul se repetă de mai multe ori. Aceasta se explică prin faptul că abaterile aleatoare se compensează reciproc.

Legea numerelor mari are două formulări: **legea slabă a numerelor mari (LSNM)** și **legea tare a numerelor mari (LTNM)**.

▲ **Scurt istoric:** Jacob Bernoulli (1655 -1705) a formulat LSNM pentru frecvența relativă a unui experiment și a dat răspunsul la întrebarea “*Putem aproxima empiric probabilitățile?*” (în opera publicată postum, în 1713, *Ars conjectandi*); ▷ Teorema lui Bernoulli afirmă: “*Frecvențele relative converg în probabilitate la probabilitatea teoretică.*”

Def. 26. Șirul de v.a. $(X_n)_n$ cu $E|X_n| < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ verifică **legea tare a numerelor mari (LTNM)** dacă

$$P \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k(\omega) - E(X_k)) = 0 \right\} \right) = 1,$$

adică

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - E(X_k)) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

P. 16. Fie $(X_n)_n$ șir de v.a. independente având aceeași distribuție și există $m = E(X_n) \forall n \in \mathbb{N}$.
 $\Rightarrow (X_n)_n$ verifică **LTNM**, adică

$$\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} m.$$

În simulări: $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \approx m$, dacă n este suficient de mare.

Exemplu 1: Fie $X_1, \dots, X_n, \dots \sim Unid(6)$ v.a. independente; are loc $E(X_n) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5 \forall n \geq 1$. Folosind P.?? rezultă că $(X_n)_n$ verifică **LTNM**, adică $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} 3.5$.
 Simulare LTNM (Matlab/Octave):



Fig. 5. Jacob Bernoulli (timbru emis în 1994 cu ocazia Congresului Internațional al Matematicienilor din Elveția)

```

pkg load statistics
clear all
close all

n=1000;
x=unidrnd(6,1,n);
for i=1:n
    s(i)=mean(x(1:i)); %media primelor i valori
end
fprintf('valoarea medie din simulari %5.3f\n', mean(x))
    % este egala cu s(n)
vmt=mean([1:6]); % val medie teoretica in acest exemplu
fprintf('valoarea medie teoretica %5.3f\n',vmt)
figure
hold on
plot([1:n],vmt*ones(1,n),'g-')
plot([1:n],s,'r-')
plot([1:n],s,'b.')
xlabel('Nr. aruncari zar')
ylabel('Media numerelor aparute')

```

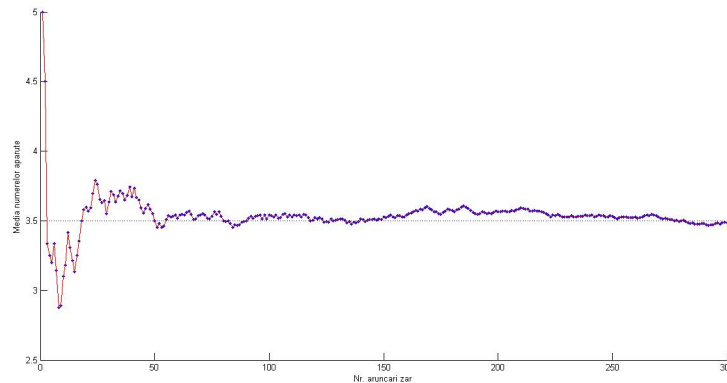


Fig. 4. Simulare LTNM

Exemplu 2: Fie $(X_n)_n$ șir de v.a. independente, având aceeași distribuție ca v.a. X și varianță finită: $E(X_n) = E(X) \in \mathbb{R}$, $V(X_n) = V(X) \in \mathbb{R}$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$.

Definim $Y_n = (X_n - E(X))^2 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (Y_n)_n$ este șir de v.a. independente, având aceeași distribuție ca v.a. $(X - E(X))^2$ și $E(Y_n) = E((X - E(X))^2) = V(X) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

P.?? $\Rightarrow (Y_n)_n$ verifică **LTNM**

$$\frac{1}{n} \left(Y_1 + \dots + Y_n \right) \xrightarrow{a.s.} V(X),$$

adică

$$\frac{1}{n} \left((X_1 - E(X))^2 + \dots + (X_n - E(X))^2 \right) \xrightarrow{a.s.} V(X).$$

Caz particular: Fie $X_1, \dots, X_n, \dots \sim Unid(6)$ v.a. independente; are loc $E(X_n) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$, $V(X_n) = E(X_n^2) - E^2(X_n) = \frac{35}{12} \approx 2.91666 \forall n \geq 1$. Folosind **P.??** rezultă că $(Y_n)_n = ((X_n - 3.5)^2)_n$ verifică **LTNM**, adică $\frac{1}{n} \left((X_1 - 3.5)^2 + \dots + (X_n - 3.5)^2 \right) \xrightarrow{a.s.} \frac{35}{12}$.

```
pkg load statistics
clear all
close all
n=1000;
x=unidrnd(6,1,n);
for i=1:n
    z(i)=var(x(1:i),1); %varianta primelor i valori
end
fprintf('varianta din simulari %5.3f\n', var(x,1))
    % este egala cu z(n)
v=[1:6];
vt= mean(v.^2)-(mean(v))^2;
fprintf('varianta teoretica %5.3f\n', vt)
figure
hold on
plot([1:n],vt*ones(1,n),'g-')
plot([1:n],z,'r-')
plot([1:n],z,'b.')
xlabel('Nr. aruncari zar')
ylabel('Varianta numerelor aparute')
```

Exemplu 3: Fie $X_1, \dots, X_n, \dots \sim Unif[-1, 1]$ v.a. independente. Spre ce valoare converge a.s. șirul

$$Z_n = \frac{1}{n} (X_1^2 + \dots + X_n^2), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ?$$

R.: Aplicăm **P.??** pentru șirul de v.a. independente $(X_n^2)_n \Rightarrow Z_n \xrightarrow{a.s.} E(X_1^2)$. Calculăm

$$E(X_1^2) = \int_{-1}^1 t^2 \frac{1}{1 - (-1)} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{3}. \quad \blacktriangle$$

P. 17. Fie A un eveniment asociat unei experiențe, repetăm experiența de n ori (în aceleași condiții date și independent unele de altele). **LTNM**: cu cât repetăm mai des un experiment ($n \rightarrow \infty$), cu atât mai bine aproximează frecvența relativă $f_n(A)$ a evenimentului A probabilitatea sa teoretică de apariție $P(A)$:

$$f_n(A) \xrightarrow{a.s.} P(A), \text{ dacă } n \rightarrow \infty.$$

În simulări: $f_n(A) \approx P(A)$, dacă n este suficient de mare.

Demonstrație pentru P.??: Aplicăm P.?? pentru șirul de v.a. independente $(X_n)_n$, unde

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } A \text{ apare în a } n\text{-a execuție a experimentului} \\ 0, & \text{dacă } \bar{A} \text{ apare în a } n\text{-a execuție a experimentului} \end{cases}$$

$$\implies X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix} \implies X_n \sim \text{Bernoulli}(P(A))$$

$$\implies E(X_n) = 0 \cdot (1 - P(A)) + 1 \cdot P(A) = P(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{P.??} \implies \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} P(A).$$

$$\text{Dar } \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = f_n(A) \text{ (frecvența relativă a lui } A) \implies f_n(A) \xrightarrow{a.s.} P(A).$$

□

Statistică matematică

► Statistica matematică este o ramură a matematicii aplicate, care se ocupă de *colectarea, gruparea, analiza și interpretarea datelor* referitoare la anumite fenomene în scopul obținerii unor previziuni;

- statistica descriptivă: metode de colectare, organizare, sintetizare, prezentare și descriere a datelor numerice (sau nenumерice) într-o formă convenabilă
- statistica inferențială: metode de interpretare a rezultatelor obținute prin metodele statisticii descriptive, utilizate apoi pentru luarea deciziilor.

► O *colectivitate* sau *populație statistică* \mathcal{C} este o mulțime de elemente care au anumite însușiri comune ce fac obiectul analizei statistice. Numărul elementelor populației se numește *volumul populației*.

Exemple de populații statistice: mulțimea persoanelor dintr-o anumită țară, localitate, zonă etc. într-un anumit an; mulțimea gospodăriilor din România la un moment dat; mulțimea consumatorilor unui anumit produs; mulțimea societăților care produc un anumit produs; angajații unei societăți; studenții unei facultăți.

► *Eșantionul* \mathcal{E} reprezintă o submulțime a unei populații statistice $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$, constituită după criterii bine stabilite:

- a) să fie aleatoare;
- b) toate elementele colectivității să aibe aceeași șansă de a fi alese în eșantion;
- c) eșantionul să fie reprezentativ (structura eșantionului să fie apropiată de structura populației);
- d) volumul eșantionului să fie suficient de mare.

► *Unitatea statistică* (indivizii) este elementul, entitatea de sine stătătoare a unei populații statistice, care posedă o serie de trăsături caracteristice ce-i conferă apartenența la populația studiată. De exemplu: *unitatea statistică simplă*: un salariat, un student, un agent economic, o trăsătură, o părere; *unitatea statistică complexă*: o grupă de studenți sau o echipă de salariați, o familie sau o gospodărie, o categorie de mărfuri.

► *Variabila statistică* sau *caracteristica* reprezintă o însușire, o proprietate măsurabilă a unei unități statistice, întâlnită la toate unitățile care aparțin aceleiași colectivități și care prezintă variabilitate de la o unitate statistică la alta. Caracteristica sau variabila statistică corespunde unei variabile aleatoare.

Exemple de caracteristici: vârsta, salariul, preferințele politice, prețul unui produs, calitatea unor servicii, nivelul de studii.

- a) variabile (caracteristici) continue \rightarrow iau un număr infinit și nenumărabil de valori într-un interval sau reuniune de intervale (de ex.: greutatea, înălțimea, valoarea glicemiei, temperatura aerului)

b) variabile (caracteristici) discrete \rightarrow iau număr finit sau infinit dar numărabil de valori discrete (de ex.: numărul elevi ai unei școli, numărul liceelor existente într-un oraș, valoarea IQ)

▷ caracteristicile de la a) și b) sunt variabile numerice (cantitative)

c) variabile (caracteristici) nominale (de ex.: culoarea ochilor, ramura de activitate, religia)

d) variabile (caracteristici) nominale ordinale (de ex.: starea de sănătate / calitatea unor servicii - precară, mai bună, bună, foarte bună)

e) variabile (caracteristici) dihotomiale (binare) (de ex.: stagiul militar - satisfăcut/nesatisfăcut, starea civilă - căsătorit/necăsătorit)

▷ caracteristicile de la c),d),e) sunt variabile calitative

▷ variabilele nominale mai sunt numite variabile categoriale

► *Datele statistice* reprezintă observațiile rezultate dintr-o cercetare statistică, sau ansamblul valorilor colectate în urma unei cercetări statistice.

De exemplu: un angajat al unei companii are o vechime de 6 ani în muncă. Angajatul reprezintă unitatea statistică, vechimea în muncă este caracteristica (variabila) cercetată, iar 6 este valoarea acestei caracteristici.

O *colectivitate* (populație) \mathcal{C} este cercetată din punctul de vedere al caracteristicii (variabilei statistice) X .

Distribuția caracteristicii X poate fi

1) complet specificată (de ex.: $X \sim \text{Exp}(3)$, $X \sim \text{Bin}(10, 0.3)$, $X \sim N(0, 1)$)

2) specificată, dar depinzând de unul sau mai mulți parametri necunoscuți

(de ex.: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $X \sim \text{Bin}(10, p)$, $X \sim N(m, \sigma^2)$)

3) necunoscută: $X \sim ?$

• în cazul 2) parametrii sunt necunoscuți, iar în cazul 3) distribuția este necunoscută

\hookrightarrow se estimează \rightarrow teoria estimăției / intervale de încredere

\hookrightarrow se testează \rightarrow teste statistice

► Fie $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ un eșantion. Se numesc **date de selecție** relative la caracteristica X datele statistice x_1, \dots, x_n obținute prin cercetarea indivizilor care fac parte din eșantionul \mathcal{E} .

► Datele de selecție x_1, \dots, x_n pot fi considerate ca fiind valorile unor variabile aleatoare X_1, \dots, X_n , numite **variabile de selecție** și care se consideră a fi variabile aleatoare independente și având aceeași distribuție ca X .

► Fie x_1, \dots, x_n datele statistice pentru caracteristica cercetată X , notăm cu X_1, \dots, X_n variabilele de selecție corespunzătoare. Fie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $g(X_1, \dots, X_n)$ este o variabilă aleatoare.

$g(X_1, \dots, X_n)$ se numește **funcție de selecție** sau **estimator**

$g(x_1, \dots, x_n)$ se numește valoarea funcției de selecție sau **valoarea estimatorului**.

• **Exemple de estimatori (funcții de selecție)** sunt: media de selecție, dispersia de selecție, momentul centrat de selecție de ordinul doi, funcția de repartiție empirică.

▷ Estimatorii (funcțiile de selecție) se folosesc în statistică pentru estimarea punctuală a unor parametri necunoscuți, pentru obținerea unor intervale de încredere pentru parametri necunoscuți, pentru verificarea unor ipoteze statistice.

Fie x_1, \dots, x_n datele statistice pentru caracteristica cercetată X , notăm cu X_1, \dots, X_n variabilele de selecție corespunzătoare:

► **media de selecție (empirică)**

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$$

► valoarea mediei de selecție

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n)$$

► **varianța (dispersia) de selecție (empirică)**

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

► valoarea varianței (dispersiei) de selecție

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2$$

► **abaterea standard de selecție (empirică)**

$$S_n = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

► valoarea abaterii standard de selecție

$$s_n = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

► **momentul centrat de selecție (empiric) de ordinul doi**

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$$

► valoarea momentului centrat de selecție (empiric) de ordinul doi

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2$$

► funcția de repartiție empirică $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$\mathcal{F}_n(x, \omega) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : X_i(\omega) \leq x\}}{n}, x \in \mathbb{R}$$

► valoarea (expresia) funcției de repartiție empirice $\mathcal{F}_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{\#\{i \in \{1, \dots, n\} : x_i \leq x\}}{n}, x \in \mathbb{R}.$$

Def. 27. $g(X_1, \dots, X_n)$ este *estimator nedeplasat* pentru parametrul necunoscut θ , dacă

$$E(g(X_1, \dots, X_n)) = \theta.$$

$g(X_1, \dots, X_n)$ este *estimator consistent* pentru parametrul necunoscut θ , dacă

$$g(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{a.s.} \theta.$$

Fie $g_1 = g_1(X_1, \dots, X_n)$ și $g_2 = g_2(X_1, \dots, X_n)$ estimatori nedeplasați pentru parametrul necunoscut θ . $g_1(X_1, \dots, X_n)$ este *mai eficient* decât $g_2(X_1, \dots, X_n)$, dacă $V(g_1) < V(g_2)$.

Observații:

1) Media de selecție \bar{X}_n este un estimator *nedeplasat și consistent pentru media teoretică* $E(X)$ a caracteristicii X ; în simulări $E(X) \approx \bar{x}_n$.

În Octave: `mean(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.

2) Variația de selecție S_n^2 este un *estimator nedeplasat și consistent pentru variația teoretică* $V(X)$ a caracteristicii X ; în simulări $V(X) \approx s_n^2$.

În Octave: `var(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.

2*) Momentul centrat de selecție de ordinul doi M_n nu este un estimator nedeplasat pentru variația teoretică $V(X)$ a caracteristicii X ; el este un *estimator consistent pentru variația teoretică* $V(X)$ a caracteristicii X ; în simulări se folosește și $V(X) \approx m_n$.

În Octave: `var(d, 1)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.

3) Deviația standard de selecție S_n nu este un estimator nedeplasat pentru deviația standard teoretică $Std(X) = \sqrt{V(X)}$ a caracteristicii X ; el este un *estimator consistent pentru deviația standard teoretică* $Std(X)$ a caracteristicii X ; în simulări se folosește $Std(X) \approx s_n$.

În Octave: `std(d)`, unde `d` este vectorul datelor statistice.

4) Funcția de repartiție de selecție $\mathcal{F}_n(x, \cdot)$ calculată în $x \in \mathbb{R}$ este un **estimator nedeplasat și consistent pentru $F_X(x)$** , care este valoarea funcției de repartiție teoretice calculată în x ; în simulări $F_X(x) \approx \mathcal{F}_n(x)$.

În Octave: $\text{empirical_cdf}(x, d) = \mathcal{F}_n(x)$, unde d este vectorul datelor statistice și $\text{length}(d) = n$.

```
pkg load statistics % exemple de estimatori
clear all
close all
d=randsample([4:10],400,1);
% note (la o anumita materie) in clasa a X-a intr-un anumit oras
% extragere cu repetitie (de 400 de ori) din vectorul [4,5,6,7,8,9,10]
% distributia teoretica X: P(X=k)=1/7 pentru k in {4,5,6,7,8,9,10}
note=[4:10];
m=mean(d) % valoarea mediei de selectie
m_teor=mean(note) %media teoretica E(X)
v=var(d) % valoarea variantei de selectie
v1=var(d,1) % valoarea momentului centrat de selectie de ordinul 2
v1_teor=var(note,1) %varianta teoretica V(X)
% sau altfel: mean(note.^2)-mean(note)^2
st=std(d) % valoarea deviatiei standard de selectie
st1=std(d,1)
st1_teor=std(note,1) %deviatia standard teoretica Std(X)=sqrt(V(X))
figure(1)
hold on
x=4:0.01:10;
y=empirical_cdf(x,d); %valoarea functiei de repartitie de selectie
plot(x,y,'r*') % graficul functiei de repartitie de selectie
y_teor=empirical_cdf(x,note); %valoarea functiei de repartitie teoretice
plot(x,y_teor,'b*')
legend('F. de repartitie de selectie', 'F. de repartitie teoretica')
title('FUNCTIA DE REPARTITIE EMPIRICA / TEORETICA')
figure(2)
h=hist(d,[4:10])
bar([4:10],h/length(d),'hist');
title('HISTOGRAMA FRECVENTELOR RELATIVE')
figure(3)
bar([4:10],h,'hist');
title('HISTOGRAMA FRECVENTELOR ABSOLUTE')
```

Exemplu: Fie $(X_n)_n$ șirul variabilelor de selecție pentru caracteristica cercetată $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, unde $p \in (0, 1)$ este parametru necunoscut. Estimatorul

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \bar{X}_n \text{ (media de selecție)}$$

este un estimator *nedeplasat* și *consistent* pentru parametrul necunoscut p .

R.: $X \sim \text{Bernoulli}(p) \implies E(X) = p$;

$$\implies E(\hat{p}(X_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{n} (E(X_1) + \dots + E(X_n)) = E(X) = p.$$

LTNM (a se vedea P.??) implică

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \xrightarrow{a.s.} p.$$

Deci, $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$ este un estimator nedeplasat și consistent pentru parametrul necunoscut p .

Dacă $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ sunt date statistice, atunci valoarea estimată pentru p este

$$p \approx \hat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) = \bar{x}_n.$$

◇

Metoda momentelor pentru estimarea parametrilor necunoscuți $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ pentru distribuția caracteristicii cercetate X

de exemplu:

$X \sim \text{Exp}(\lambda)$ parametrul necunoscut: $\theta = \lambda$

$X \sim N(m, \sigma^2)$ parametri necunoscuți: $(\theta_1, \theta_2) = (m, \sigma^2)$

$X \sim \text{Unif}[a, b]$ parametri necunoscuți: $(\theta_1, \theta_2) = (a, b)$

Fie x_1, \dots, x_n datele statistice pentru caracteristica cercetată X și fie X_1, \dots, X_n variabilele de selecție corespunzătoare.

Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} E(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, \\ k = \{1, \dots, r\} \end{cases}$$

cu necunoscutele $\theta_1, \dots, \theta_r$.

Soluția sistemului $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_r$ este estimatorul pentru parametrii necunoscuți ai distribuției caracteristicii X .

Exemplu 1: Folosind metoda momentelor, să se estimeze parametrul necunoscut $\theta := a$ pentru $X \sim \text{Unif}[0, a]$; se dau datele statistice: 0.1, 0.3, 0.9, 0.49, 0.12, 0.31, 0.98, 0.73, 0.13, 0.62.

R.: Fie X_1, \dots, X_n variabilele de selecție. Avem cazul: $r = 1$, calculăm $E(X) = \frac{a}{2}$, $n = 10$, $\bar{x}_n = 0.468$. Se rezolvă

$$E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \implies \frac{a}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Estimatorul pentru parametrul necunoscut a este

$$\hat{a}(X_1, \dots, X_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Valoarea estimatorului este

$$\hat{a}(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0.936.$$

Parametrul necunoscut a este estimat cu valoarea 0.936.

► Este $\hat{a}(X_1, \dots, X_n)$ un estimator nedeplasat pentru parametrul a ?

R.: Da, se arată că $E(\hat{a}(X_1, \dots, X_n)) = a$.



Exemplu 2:

Folosind metoda momentelor, să se estimeze parametrii necunoscuți $\theta_1 := m$ și $\theta_2 = \sigma^2$ pentru $X \sim N(m, \sigma^2)$; se dau datele statistice:

0.831, 0.71, -0.2, -0.04, 2.08, -1.2, 0.448, -0.18, -0.27, -0.55.

R.: Fie $n = 10$, iar X_1, \dots, X_n variabile de selecție. Avem cazul: $r = 2$, calculăm $E(X) = m$, $E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \sigma^2 + m^2$ (a se vedea exemplul de pe pg. ??), $\bar{x}_n = 0.1629$ (calculat în Octave cu `mean(x)`, unde x este vectorul datelor statistice), $m_n = 0.7346$ (calculat în Octave cu `var(x, 1)`). Se rezolvă

$$\begin{cases} m &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sigma^2 + m^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases} \implies \text{are soluția} \begin{cases} \hat{m} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \end{cases}$$

Estimatorii sunt

$$\hat{m}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n \text{ (media de selecție),}$$

$$\hat{\sigma}^2(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = M_n \text{ (momentul centrat de selecție de ordinul doi)}$$

Valorile estimatorilor sunt

$$\hat{m}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}_n = 0.1629,$$

$$\hat{\sigma}^2(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = m_n = 0.7346.$$



Metoda verosimilității maxime pentru estimarea parametrului necunoscut θ al distribuției caracteristicii cercetate X

Fie x_1, \dots, x_n datele statistice pentru caracteristica cercetată X și fie X_1, \dots, X_n variabilele de selecție corespunzătoare. Notăm

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} P(X = x_1) \cdot \dots \cdot P(X = x_n), & \text{dacă } X \text{ e v.a. discretă} \\ f_X(x_1) \cdot \dots \cdot f_X(x_n), & \text{dacă } X \text{ e v.a. continuă cu funcție de densitate } f_X. \end{cases}$$

Aceasta este funcția de verosimilitate pentru parametrul θ și datele statistice x_1, \dots, x_n .

Metoda verosimilității maxime se bazează pe principiul că valoarea cea mai verosimilă (cea mai potrivită) a parametrului necunoscut θ este aceea pentru care funcția de verosimilitate $L(x_1, \dots, x_n; \theta)$ ia valoarea maximă:

$$(1) \quad L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta).$$

$\hat{\theta}$ este *punct de maxim global* pentru funcția de verosimilitate. Se rezolvă sistemul $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ și se arată că $\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < 0$.

Deseori este mai practic să se considere varianta transformată

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ cu $\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} < 0$. În unele situații (1) se rezolvă prin alte metode; de exemplu în cazul în care $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ nu are soluție (echivalent cu $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$ nu are soluție).

Observație: Dacă distribuția caracteristicii cercetate depinde de k parametri necunoscuți $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ atunci se rezolvă sistemul

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{1, k} \text{ și se arată că matricea } \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{1 \leq i \leq j \leq k} \text{ este negativ definită.}$$

Se poate lucra și cu varianta transformată:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{1, k} \text{ și se arată că matricea } \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right)_{1 \leq i \leq j \leq k} \text{ este negativ definită.}$$

O matrice M este negativ definită dacă $y^t M y < 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

Reamintire: dacă $a, b > 0$, atunci au loc proprietățile:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \ln(a^b) = b \cdot \ln a, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.$$

Exemplu: Folosind metoda verosimilității maxime să se estimeze parametrul $\theta := p \in (0, 1)$ al distribuției Bernoulli,

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \text{ cu datele statistice: } 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0.$$

$$\Rightarrow n = 10, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0 \dots; P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow L(x_1, \dots, x_n; p) = P(X = x_1) \cdot \dots \cdot P(X = x_n) = p^{x_1 + \dots + x_n} (1-p)^{n - (x_1 + \dots + x_n)}$$

$$\Rightarrow \ln L(x_1, \dots, x_n; p) = (x_1 + \dots + x_n) \ln(p) + (n - (x_1 + \dots + x_n)) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n).$$

$$\text{Are loc: } \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} < 0.$$

Estimatorul de verosimilitate maximă pentru parametrul necunoscut p este

$$\hat{p}(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) = \bar{X}_n,$$

unde X_1, \dots, X_n sunt variabilele de selecție. Valoarea estimată este

$$\hat{p}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \bar{x}_n = \frac{4}{10} = 0.4.$$

► Este $\hat{p}(X_1, \dots, X_n)$ un estimator nedeplasat pentru parametrul p ?