

### Problema 4.5.

$$M_1(1,2), M_2(3,4), M_3(5,-1)$$

Determ. ecuațiile laturilor.

Fie:  $M_1 = m_{ij} \cdot AB$  (ABC - triunghiul căutat)

$$M_2 = m_{ij} \cdot BC$$

$$M_3 = m_{ij} \cdot AC$$

Metoda 1: Determinăm coordonatele vârfurilor în funcție de coordonatele mijloacelor.

$$M_1(x_{M_1}, y_{M_1}) ; x_{M_1} = \frac{x_A + x_B}{2} ; y_{M_1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Analog  $x_{M_2} = \frac{x_B + x_C}{2} ; y_{M_2} = \frac{y_B + y_C}{2}$

$$x_{M_3} = \frac{x_A + x_C}{2} ; y_{M_3} = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \Rightarrow x_A + x_B = 2$$

$$\frac{x_B + x_C}{2} = 3 \Rightarrow x_B + x_C = 6$$

$$\frac{x_A + x_C}{2} = 5 \Rightarrow x_A + x_C = 10$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_B + x_C = 6 \\ x_A + x_C = 10 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ -x_B - x_C = -6 \\ x_A + x_C = 10 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A - x_C = -4 \\ x_A + x_C = 10 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A - x_C = -4 \\ 2x_A = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 2 & \Rightarrow \boxed{x_B = -1} \\ x_A - x_C = -4 & \Rightarrow \boxed{x_C = 4} \\ 2x_A = 6 & \Rightarrow \boxed{x_A = 3} \end{cases}$$

Analog

$$\begin{cases} y_A + y_B = 4 \\ y_B + y_C = 8 \\ y_A + y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A + y_B = 4 \\ y_A - y_C = -4 \\ y_A + y_C = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y_B = 7} \\ \boxed{y_C = 11} \\ \boxed{y_A = -3} \end{cases}$$



Rezolvăm ecuațiile:

$$(AB): \frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3+1} = \frac{y-7}{-3-7} \Rightarrow -10(x+1) = 4(y-7)$$

$$\Rightarrow -10x - 10 - 4y + 28 = 0$$

$$\Rightarrow -10x - 4y + 18 = 0 \quad / : 2$$

$$\Rightarrow -5x - 2y + 9 = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{5x + 2y - 9 = 0}$$

$$(BC): \frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{-1-7} = \frac{y-1}{7-1}$$

$$\Rightarrow 6(x-7) = -8(y-1)$$

$$\Rightarrow 6x - 42 + 8y - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 6x + 8y - 50 = 0 \quad / :2$$

$$\Rightarrow \boxed{3x + 4y - 25 = 0}$$

$$(AC): \frac{x-x_C}{x_A-x_C} = \frac{y-y_C}{y_A-y_C}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{3-7} = \frac{y-1}{-3-1}$$

$$\Rightarrow -4(x-7) = -4(y-1) \quad / : (-4)$$

$$\Rightarrow x-7 = y-1 \Rightarrow \boxed{x-y-6 = 0}$$



## Metoda 2

Fie  $\triangle ABC$  triunghiul căutat

Aplicăm teorema liniei mijlocii și obținem:

- vectorul director al dreptei  $AB$  este  $\overrightarrow{M_2M_3} (2, -5)$
  - vectorul director al dreptei  $BC$  este  $\overrightarrow{M_1M_3} (4, -3)$
  - vectorul director al dreptei  $AC$  este  $\overrightarrow{M_1M_2} (2, 2)$
- $\Rightarrow AB$  trece prin  $M_1$  și este paralelă cu  $\overrightarrow{M_2M_3} (2, -5)$

$$\Rightarrow (AB): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5}$$

$$\Rightarrow \boxed{5x + 2y - 9 = 0}$$

$\Rightarrow BC$  trece prin  $M_2$  și este paralelă cu  $\overrightarrow{M_1M_3} (4, -3)$

$$\Rightarrow (BC): \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{3x + 4y - 25 = 0}$$

$\Rightarrow AC$  trece prin  $M_3$  și este paralelă cu  $\overrightarrow{M_1M_2} (2, 2)$

$$\Rightarrow (AC): \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x - y - 6 = 0}$$