2.2.40 Să se arate că $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este un subinel al lui $\mathbb{C}$. Să se arate că $R=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ este un subinel al lui $(M_{2\times 2}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ și $R\cong\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$. Sunt $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ și/sau R domenii de integritate? Dar corpuri?

$\underline{(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)\leq(\mathbb{C},+,\cdot)}$

a) $\underline{0\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$

Fie $0\in\mathbb{C}$. $0=a+ib \Leftrightarrow a=b=0\in\mathbb{Z} \Rightarrow 0\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

b) $\underline{x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x+y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$

Fie $x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x=a_x+ib_x,\ y=a_y+ib_y,\ a_x,b_x,a_y,b_y\in\mathbb{Z}$

$x+y=a_x+ib_x+a_y+ib_y=\underbrace{(a_x+a_y)}_{\in\mathbb{Z}}+i\underbrace{(b_x+b_y)}_{\in\mathbb{Z}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

c) $\underline{x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow -x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$

Fie $x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x=a+ib,\ a,b\in\mathbb{Z} \Rightarrow -x=-(a+ib)=$

$\left.\begin{array}{l} =-a+i(-b) \\ -a,-b\in\mathbb{Z}\end{array}\right\} \Rightarrow -x\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$

d) $\underline{x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow xy\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}}$

Fie $x,y\in\mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow x=a_x+ib_x,\ y=a_y+ib_y \Rightarrow$

$\Rightarrow x\cdot y=(a_x+ib_x)(a_y+ib_y)=\underbrace{a_xa_y-b_xb_y}_{\in\mathbb{Z}}+i(\underbrace{a_xb_y+a_yb_x}_{\in\mathbb{Z}})$

Deci, $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)\leq(\mathbb{C},+,\cdot)$

$(R,+,\cdot) \leq (M_{2x2}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$

a) $0 \in R$

Fie $0 \in M_{2x2} \Rightarrow 0 = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $O_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0 \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow 0 \in R$

b) $x,y \in R \Rightarrow x+y \in R$

~~Fie $x, y \in R \Rightarrow$~~

Fie $X, Y \in R \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ -b_x & a_x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ -b_y & a_y \end{pmatrix}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{Z}$

$X + Y = \begin{pmatrix} a_x + a_y & b_x + b_y \\ -(b_x + b_y) & a_x + b_y \end{pmatrix}$. Cum $a_x + a_y$ și $b_x + b_y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow X + Y \in R$

c) $x \in R \Rightarrow -x \in R$

Fie $X \in R \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$

$-X = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$ $\Big\} \Rightarrow -X = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

not. $-a = c$, $-b = d$

$\Rightarrow -X \in R$

d) $x, y \in R \Rightarrow xy \in R$

Fie $X, Y \in R \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ -b_x & a_x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ -b_y & a_y \end{pmatrix}$,

$a_x, a_y, b_x, b_y \in \mathbb{Z}$

$X \cdot Y = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ -b_x & a_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ -b_y & a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x a_y - b_x b_y & a_x b_y + a_y b_x \\ -(a_x b_y + a_y b_x) & a_x a_y - b_x b_y \end{pmatrix}$

not. $\cancel{cd}\, c = a_x a_y - b_x b_y$, $d = a_x b_y + a_y b_x \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow X \cdot Y \in R$

Deci, $(R, +, \cdot) \leq (M_{2\times2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$

$\underline{R \cong \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}}$ Fie $f: R \to \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) = a + ib$

a) $\underline{f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in R}$

Fie $X, Y \in R \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ -b_x & a_x \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ -b_y & a_y \end{pmatrix}$, $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{Z}$

$f(X+Y) = f\left(\begin{pmatrix} a_x + a_y & b_x + b_y \\ -(b_x+b_y) & a_x + a_y \end{pmatrix}\right) = a_x + a_y + i(b_x + b_y) =$

$= a_x + ib_x + a_y + ib_y = f(X) + f(Y)$

b) $\underline{f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in R}$

~~Fie Ca~~

Pentru X și Y de la a):

$f(X \cdot Y) = f\left(\begin{pmatrix} a_x a_y - b_x b_y & a_x b_y + a_y b_x \\ -(a_x b_y + a_y b_x) & a_x a_y - b_x b_y \end{pmatrix}\right) =$

$= a_x a_y - b_x b_y + i(a_x b_y + a_y b_x) = (a_x + ib_x)(a_y + ib_y) =$

$= f(X) \cdot f(Y)$

c) $\underline{f \text{ bijectivă}}$

$\underline{f \text{ injectivă}}$: $f(X) = f(Y) \Rightarrow$ ~~$a_x + ib_y = a_y + ib$~~

$\Rightarrow a_x + ib_x = a_y + ib_y \Rightarrow a_x = a_y$ și $b_x = b_y \Rightarrow$

~~$\Rightarrow X$~~ $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ -b_x & a_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y & b_y \\ -b_y & a_y \end{pmatrix} \Rightarrow X = Y$

$\underline{f \text{ surjectivă}}$: Fie $y \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \Rightarrow y = a + ib$, $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists X \in R$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ a.i. $f(X) = y$

Deci, f este bijectivă $\Rightarrow R \cong \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$

Sunt corpuri?

1) $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)$ corp (comutativ)?

a) comutativitate: $\forall x,y \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $xy=yx$

Fie $x=a+ib$ și $y=c+id \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} xy&=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc) \\ yx&=(c+id)(a+ib)=\cancel{ac}\ ca-db+i(cb+da) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow xy=yx$ (în baza comutativității adunării și a înm.)

$\Rightarrow$ legea „$\cdot$" este comutativă

b) inel unitar

Fie $1 \in \mathbb{C}$. $1=a+ib$, $a,b\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow a=1$ și $b=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z} \\ &(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot) \leq (\mathbb{C},+,\cdot) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{inel unitar}$$

c) $\forall x \in (\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^*$ este inversabil față de „$\cdot$" $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x\in(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^*$, $\exists x^{-1}\in(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^*$ a.i. $x\cdot x^{-1}=1$

Fie $x\in(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^* \Rightarrow x=a+ib$, $x\neq 0+i0$, $a,b\in\mathbb{Z}$

$x\cdot x^{-1}=1 \Rightarrow (a+ib)\cdot x^{-1}=1 \Rightarrow x^{-1}=\dfrac{1}{a+ib} \neq \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}=$

$=\dfrac{a}{a^2+b^2}-i\dfrac{b}{a^2+b^2} \Rightarrow x^{-1}\in(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \mid a \\ a^2+b^2 \mid b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in\{\pm1,\pm i\} \Rightarrow$ nu orice $x\in(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})^*$ este inversabil.

Deci, $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)$ nu este corp

2) $(R,+,\cdot)$ corp (comutativ)?

a) comutativitate:

Fie $X \in R$, $Y \in R \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{aligned} X \cdot Y &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \\ Y \cdot X &= \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ -(cb+da) & ca-db \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow X \cdot Y = Y \cdot X$ (pe baza comutativității adunării și înmulțirii numerelor întregi) $\Rightarrow$ legea „$\cdot$" este comutativă

b) inel unitar

Fie $1 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \Rightarrow 1 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$1 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = 1$ și $b = 0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow 1 \in R \\ &(R,+,\cdot) \leq (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}),+,\cdot) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{inel unitar}$$

c) $\forall X \in R^*$, $\exists X^{-1} \in R^*$ a.i. $X \cdot X^{-1} = 1$

Fie $X \in R^* \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $X \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a,b \in \mathbb{Z}$

~~$X \cdot X^{-1} = 1 \Rightarrow X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

X inversabilă $\Leftrightarrow \det(X) \neq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ și $b \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ inversabilă în $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, $\forall a,b \in \mathbb{Z}$

Dar în R?

${}^{t}X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow X^{*} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} X^{-1} = \dfrac{1}{\det(X)} \cdot X^{*} \Rightarrow X^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\det(X)} & \dfrac{b}{\det(X)} \\ \dfrac{-b}{\det(X)} & \dfrac{a}{\det(X)} \end{pmatrix} \\ \det(X) = a^2+b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

cf. 1

$\Rightarrow$ ~~a X ∈~~ X inversabilă în R $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Deci, $(R,+,\cdot)$ nu este corp.

Sunt domenii de integritate?

1) $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)$ dom. de integritate?

Fie $x \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $x = a+ib$ şi $y \in \mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $y = c+id$

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (a+ib)(c+id) = 0 \Rightarrow ac - bd + i(ad+bc) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac - bd = 0 \mid \cdot a \\ ad + bc = 0 \mid \cdot b \end{cases} \ (+)$$

$$c(a^2+b^2) = 0$$

I $\quad a = b = 0 \Rightarrow x = 0$

II $\quad a^2+b^2 \neq 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \begin{cases} bd = 0 \\ ad = 0 \end{cases}$

~~II.1. d = c=0~~

II.1. $d = 0 + c = 0 \Rightarrow y = 0$

II.2. $d \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow x = 0$

Deci, $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z},+,\cdot)$ dom. de integritate.