AG

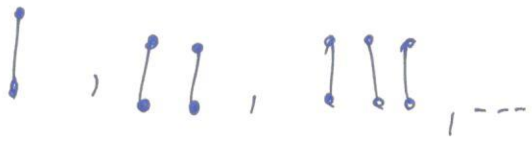
CURS 8

Cuplaje în grafuri bipartite

1. Amintim $G=(V,E)$

Cuplaj $M \subseteq E$

M cuplaj $\Leftrightarrow \forall\, e,f \in M,\ e \neq f \mid \rightarrow e \cap f = \emptyset$



M^*

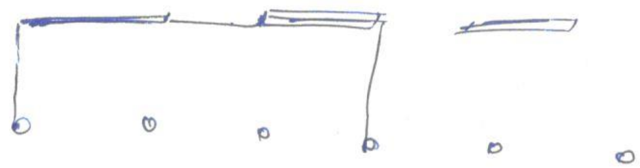
I_1 (Berge) $G=(V,E)$ gf. $M \subseteq E$ cuplaj

M cuplaj de cardinal maxim $\Leftrightarrow$ G nu conț. lanțuri M - alternate deschise

$\underline{M}$

$\underline{M}$

$M \rightarrow$



$\downarrow$

M'

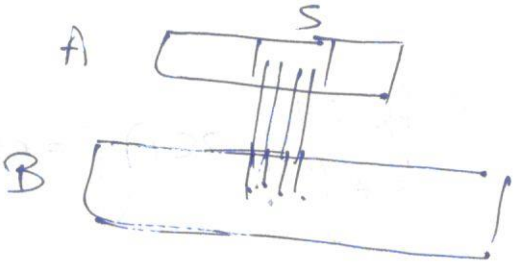
$M' = M \triangle E(P)$

2. $G = (A \dot\cup B, E)$ gf. bipartit.

$S \subseteq A$

$M \subseteq E$

M cuplaj al lui S în $B \iff \begin{cases} M \text{ cuplaj} \\ M \text{ saturează } S \end{cases}$



3. Philip

$\underline{T_2}$ (HALL) Fie $G = (A \dot\cup B, E)$ graf. bipartit.

G conține un cuplaj al lui A în $B \iff \boxed{\forall \emptyset \neq S \subseteq A : |N_G(S)| \geq S}$

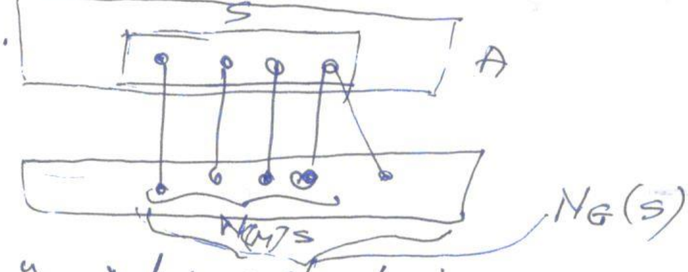
Dem

"$\Rightarrow$" Fie M cuplaj al lui A în B

$\emptyset \neq S \subseteq A$

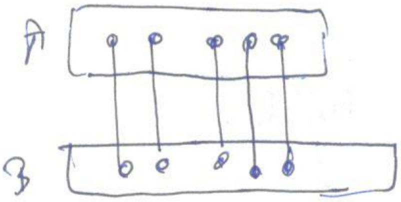
$N_G(S) \supseteq N_{[M]}(S)$

$|N_G(S)| \geq |N_{[M]}(S)| = |S|$



"$\Leftarrow$" $|N_G(S)| \geq |S| \quad \forall \emptyset \neq S \subseteq A \overset{?}{\Rightarrow} G$ conține un cuplaj al lui A în B

52



Fie M^* un cuplaj de card. max. în G

Pp. abs (R.A) M^* nu este cuplaj al lui A în B

$\Rightarrow \exists\ z \in A$, z M^* - nesaturat.

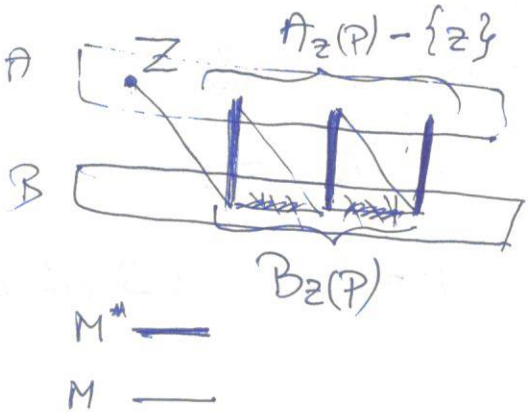
Vom construi $S \subseteq A$ care contrazice (1) ($N(S) < |S|$ etc)

a) $N(z) = \emptyset$ (z vf. izolat)

$S := \{z\}$ $\quad \underbrace{|N(z)|}_{N(S)} = |\emptyset| = 0 < 1 = |\{z\}| = |S|$

b) $N(z) \neq \emptyset$

Notăm $\mathcal{P}(z) = \{P \mid P\ z$ - lanț M^* - alternant maximal$\}$



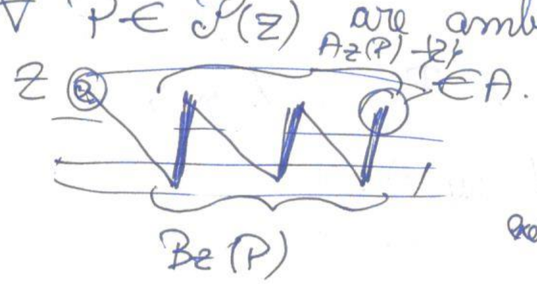
A_z mulț. vf. din A ale lanțurilor din $\mathcal{P}(z)$

B_z - mulț. vf. din B ale lanț. din $\mathcal{P}(z)$

$P \in \mathcal{P}(z)$ notăm $\left[\begin{array}{l} A_z(P) \text{ - mulț. vf. din } A \text{ ale lui } P \\ B_z(P) \text{ mulț. vf. din } B \text{ ale lui } P \end{array}\right.$

Obs!

$\forall\ P \in \mathcal{P}(z)$ are ambele capete în A



Argument: $\left\{\begin{array}{l} P \text{ lanț } M^* \text{ alternant maximal} \\ \text{T. lui Berge} \end{array}\right.$

53

$\Rightarrow A_z(P) - \{z\} \xleftrightarrow{M^*} B_z(P)$ induce o bijecție.

$\Rightarrow A_z - \{z\} \xleftrightarrow{M^*} B_z$

$|A_z| = |B_z| + 1 > |B_z|$

$S := A_z$ Va trb. să dem. că $\underline{N(A_z) = B_z}$

„$\supseteq$" evidentă deoarece $N(A_z(P)) \supseteq B_z(P)$ $\forall P \in \mathcal{P}(z)$

„$\subseteq$" Pp abs: $\exists b \in N(A_z) - B_z$.

Fie $b' \in A_z$ cu $b'b \in E$ (muchie)

Fie P' z, b' - lanț M^* alternant parte a unui lanț din $\mathcal{P}(z)$

Definim: $P = [z \xrightarrow{P'} b', b]$

P lanț M^*-alternant $\Rightarrow b \in B_z$ abs

$\Rightarrow N(A(z)) = B_z$. $S = A_z \Rightarrow N(S) = B_z$.

$|N(S)| = |N(A_z)| = |B_z| = |A_z| - 1 = |S| - 1 < S$ abs cu (1) presup. din ipoteză.

4. Th. 2. (Bernstein)

$G = (A \dot\cup B, E)$ graf bipartit $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$ nevide $M_X, M_Y \subseteq E$ M_X cuplaj al lui X în B M_Y cuplaj al lui Y în A.	$\Rightarrow \exists M \subseteq M_X \cup M_Y$ M cuplaj care saturează X și Y.

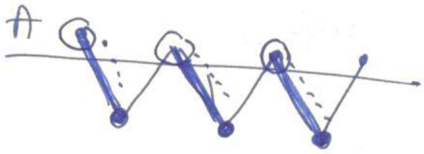
Demonstrație

$$M_X \cup M_Y = (M_X \cap M_Y) \cup (M_X \Delta M_Y)$$

O comp. conexă a grafului $M_X \Delta M_Y$ este de unul din următoarele tipuri:

Tip 1: lanț M_X, M_Y alternant, tip M_X, M_Y cu ambele capete în A.

$M_X \to \|$ $\quad M_Y \to |$



- amb. cap în A

Tip 1'

- ambele capete în B

Tip 2 lanț M_X, M_Y - alternant, tip M_X, M_X.

Tip 3 lanț M_X, M_Y alternant tip M_Y, M_Y.

Tipul 4 ciclu M_X, M_Y alternant

Legendă

M - cuplajul M care saturează (muchie a lui M)

⊙ - vf. din X $\quad$ • - vf. din Y

Definim $M = (M_X \cap M_Y) \cup_{pt} \begin{cases} \cancel{tip1, tip}\ M_X \text{ pt tip } 1, \text{tip } 2, \text{tip } 4 \\ M_Y \text{ pt tip } 1', \text{tip } 3 \end{cases}$

M cuplaj și saturează $X \sqcup Y$

Dem. th. Bernstein încheiată.

Obs: A, B mulț. infinite și $\exists\, f: A \to B$ f injectivă
$\exists\, g: B \to A$ g injectivă

$\Rightarrow h: A \to B$ bijectivă

Th 4: $G = (A \dot\cup B, E)$ gf. compl.

Δ gr. max. al ~~tui~~ unui vf din G.

$A_\Delta = \{a \mid a \in A,\ d(a) = \Delta\}$

$B_\Delta = \{b \mid b \in B,\ d(b) = \Delta\}$.

Avem: $\exists\, M$ cuplaj care saturează $A_\Delta \cup B_\Delta$.

Dem:

$A_\Delta \neq \emptyset$

1. $G_1 = G(A_\Delta \cup N(A_\Delta))$

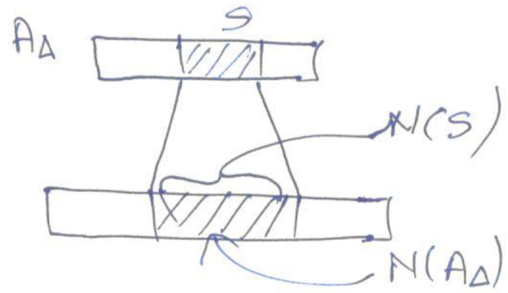
Vom dem. că $\exists\, M_A$ cuplaj al lui A_Δ în $N(A_\Delta)$ (deci în B)

Este suficient să arătăm că este adevărată condiția lui Hall.

$X, Y \subseteq V$

$X \cap Y$ $[X, Y] = \{e \mid e \in E,\ |e \cap X| = |e \cap Y| = 1\}$

$X \cap Y = \emptyset$



Fie $S \subseteq A_\Delta$: $|N_\Delta(S)| \geq |S|$

Am: $[S, N(S)] \subseteq [N(S), N^2(S)]$

$|[S, N(S)]| \leq |[N(S), N^2(S)]|$

$\Delta |S| \leq \Delta |N(S)|$

$|S| \leq |N(S)| \xRightarrow{Hall} \exists M_A$ cuplaj al lui A_Δ in B.

2. Analog $\exists M_B$ cuplaj al lui B_Δ in A (dacă $B_\Delta \neq \emptyset$ deci $B_\Delta = \emptyset$ At. $M := M_A$)

3. T_3 (Bernstein) $\exists$ M cuplaj care saturează $A_\Delta \cup B_\Delta$

Th 5 $G = (A \dot\cup B, E)$ graf bipartit

$\exists M_1, M_2 \ldots M_\Delta$ cupl. disjuncte.

Care partiționează

$$\begin{cases} M_i \cap M_j = \emptyset & 1 \leq i \leq j \leq \Delta \\ \bigcup_{i=1}^{p} M_i = M. \end{cases}$$

Dem: Aplic T_4.