CURS 9
AG

CUPLAJE ~~CURS~~ și TRANSVERSALE
(MULȚIMI DE ACOPERIRE)

19.04.2016

1. Def. Notații. Ex

1.1. $G=(V,E)$ graf simplu

$M \subseteq E$

M cuplaj

$\forall\, e, f \in M: e \cap f = \emptyset$ $\quad e \neq f$

M^* cuplaj de card max.

T_1 (Berge)

T_2 (Hall) $\quad G=(A \cup B, E)$

G conține cupl. al lui A în B $\Leftrightarrow \forall\, \emptyset \neq S \subseteq A$: $|N(S)| \geq |S|$

1.2 $K \subseteq V$

K m. de acoperire (transversală) $\Leftrightarrow \forall\, e \in E: e \cap K \neq \emptyset$

ex: $K = V$

$\tilde{K}$ o mulț de acop. de card minim

L. K mulț. de acop. / M cuplaj $\Rightarrow |K| \geq |M|$

Dem $|K| \geq \sum_{e \in M} \underbrace{|e \cap K|}_{\geq 1} \geq |M|$

Consecință K - mulț de acop.

M cuplaj

$|M| = |K| \Rightarrow M$ cupl. de card. maxim
K m. de acop. de card. minimă.

Dem: $|M| \le |M^*| \le |\tilde{K}| \le |K| \Rightarrow |M| = |M^*|$
$|K| = |\tilde{K}|$ □.

2. T_1 (KÖNIG) $G = (A \cup B, E)$
Avem $|M^*| = |\tilde{K}|$

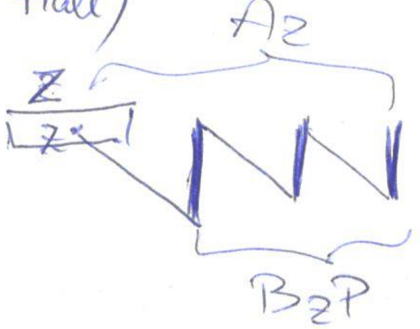
Dem: "$\le$" conf. Lemei
"$\ge$" Fie M^* cuplaj de card. maxim
Vom construi o mult. de acoperire K cu
$|K| = |M^*|$. De aici va rezulta $|\tilde{K}| \le |K| \le |M^*|$ □

Fie $Z \subset A$, Z m. vârfurilor M^*-nesaturate

1. $Z = \emptyset$ $K = A$ K m de acop.
$|K| = |A| = |M^*|$ □

2. $Z \ne \emptyset$ (v. dem. Th Hall)

$z \in Z$ A_z, B_z



$A_Z = \bigcup_{z \in Z} A_z$

$B_Z = \bigcup_{z \in Z} B_z$

Știm (v dem. Th Hall)

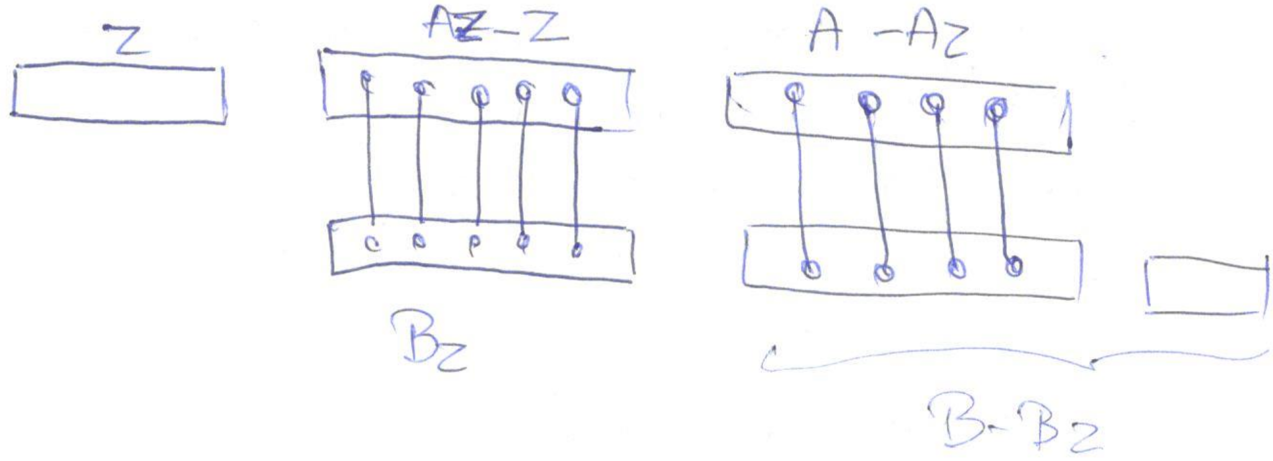
$A_z - \{z\} \xleftrightarrow{M^*} B_z$. $\forall z \in Z$

$\Rightarrow A_Z - Z \overset{M^*}{\longleftrightarrow} B_Z$ (1)

Știm (v. din Th Hall)

$N(A_Z) = B_Z \quad \forall z \in Z$

$\Rightarrow N(A_Z) = B_Z$ (2)



$K = (A - A_Z) \cup B_Z$

Avem $|K| = |A - A_Z| + |B_Z| = |M^*|$

K mulțime acop / deoarece ∄ muchie cu un capăt în A_Z și celălalt în $B - B_Z$ din $N(A_Z) = B_Z$ (f(2))

3. Sisteme de reprezentanți distincți SRD

Th: $X_1, \ldots, X_n$ mulțimi finite nevide

$\exists\, x_i \in X_i \quad i \in \{1 \ldots n\} \quad x_i \neq x_j \quad \forall 1 \le i < j \le n$

$\Leftrightarrow \forall\, \emptyset \neq S \subseteq \{1 \ldots n\} : \left|\bigcup_{i \in S} X_i\right| \geq |S|$

Dem $G = (A \cup B, E)$

$A = T = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ $\cancel{A = \{1 \ldots n\}}$ $\cancel{E = \{\{t, x_j\} / t \in X_j\}}$

$\cancel{B = \{X_1 \ldots X_n\} = U}$

$B = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ $\qquad E = \{\{i, x\} \mid i \in A, x \in B, x \in X_i\}$.

4. Teorema lui KÖNIG - variantă matricială

4.1. Def. Notații

Fie M o matrice de nr. reale cu a linii și b coloane

Mult. liniilor $l_1, l_2 \dots l_a$.

Mult. coloanelor $c_1, c_2 \dots c_b$.

D. Diagonală de elemente nenule = o mulțime de celule

cu: { elemente coresp. celulelor sunt nenule.

{ ∀ două celule ~~cu~~ nu se află pe aceeași linie sau pe aceeași coloană.

	1		
2			
~~2~~		3	
		~~3~~	

$\Delta = \{(2,1), (1,2), (3,3)\}$

∀ subdiag. a unei diag. form. o diag.

Obs $|\Delta| \leq \min\{a, b\}$

Δ^* - o diag. de card maxim de el. nenule

Mult. de acoperire

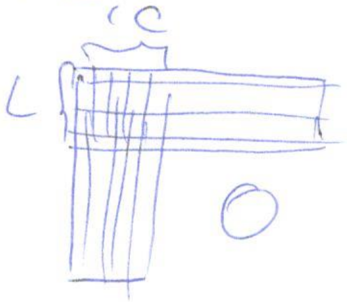
$K = L \cup C$ cu propr.

L nr de linii

C nr de coloane.

∀ el. nenul ∃ fie pe o linie din L fie pe o col din C sau şi pe o lin şi pe o col.

Obs Prin permut ~~lin~~ lin/col. diag se păstrează. Prin permut lin/col. se păstrează caract de acoperire al unei mult.



Th. KÖNIG $|D^*| = |\tilde{K}|$ (var matriceală)

Dem

$G = (A \cup B, E)$

$A = \{l_1 \ldots l_a\}$

$B = \{c_1 \ldots c_a\}$

$E = \{\{l_i, c_j\} \mid M_{ij} \neq 0\}$.

Diagonală e cuplaj în graf.

nr de cupl - mult. de acoperire

~~muchii~~ el. menul — muchie

Aplicatie

(T) M ~~mult~~ matr. $n \times m$ de nr reale poz. sau 0 ~~cu a linii şi c col.~~

$s > 0$. Se cunoaşte propr:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = s, \ \forall 1 \le i \le n$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} = s \quad \forall 1 \le j \le n.$$

Avem $|\Delta^*| = n$. (1)

Dem Fie Δ^* o diag. de card. max de el. nenule

$\tilde{K}$ o m. de acoperire a elem. nenule.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = ns$$

$$\sum_{i\in L} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} + \sum_{j\in C} \sum_{i=1}^{n} M_{ij} = |L|\cdot s + |C|\cdot s =$$

$$= (|L| + |C|) s =$$

$$= |\tilde{K}| s \overset{\text{KÖNIG}}{=} |\Delta^*| s$$

$$|\Delta^*| s \geq ns.$$

$$\Big\downarrow s>0$$

$$|\Delta^*| \geq n \ (1)$$

Dem $|\Delta^*| \leq n$ (2)

1 și 2 $\Rightarrow$ T $\square$.

Pt $s=1$ M s.n. matr. dublu-stochastică

Def. Matr. de permutări : $n\times n$ $\sigma : [n] \to [n]$ permut

$\sigma \to P_\sigma$ $n\times n$ matr. de 0 și 1.

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \sigma(i) = j \\ 0 & \text{în contr.} \end{cases}$$

ex:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \longleftrightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ex: Prod. a 2 ~~permut~~ matr. de permut este o matr de permut $P_\alpha \times P_\beta = P_{\beta\alpha}$.