Tema 3

Exerciţiul 1

Fie X o variabilă aleatoare repartizată geometric de parametru p ($X \sim Geom(p)$). Arătaţi că

a) pentru $i, j > 0$ avem

$$\mathbb{P}(X > i + j \mid X > i) = \mathbb{P}(X > j)$$

b) avem

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = -\frac{p}{1-p}\log(p)$$

c) pentru $r \geq 2$ avem

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \frac{r!p^r}{(1-p)^r}$$

Exerciţiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
   ii) Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinaţi
   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

Exerciţiul 3

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exerciţiul 4

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7 - X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \dots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

Exerciţiul 5

Un proces Bernoulli de parametru p este un şir de variabile aleatoare independente $(X_n)_{n\geq 1}$ cu $X_n \in \{0,1\}$ şi $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$.

a) Arătaţi că v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ este repartizată $\mathcal{B}(n,p)$ şi calculaţi media şi varianţa acesteia.

b) Fie L cel mai mare număr natural pentru care $X_1 = X_2 = \cdots = X_L$ şi M cel mai mare număr natural aşa incat $X_{L+1} = X_{L+2} = \cdots = X_{L+M}$. Găsiţi distribuţiile v.a. L şi M.

c) Arătaţi că $\mathbb{E}[L] \geq \mathbb{E}[M]$, $\mathbb{V}[L] \geq \mathbb{V}[M] \geq 2$ şi calculaţi $Cov[L,M]$.

d) Calculaţi $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbb{P}(M = n \,|\, L = k)$.