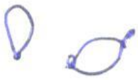
ALG & GRAFURI

CURS 3)

ARBORI

1. Def: Notații. Exemple



$T=(V,E)$ graf. simplu

T s.n. arb $\iff$ T conex și aciclic (fără cicluri)

$n=|V|=1$

$n=2$

$n=3$

$n=4$

 și 

2. Proprietăți $\quad |V|\geq 2$

P_1: $T=(V,E)$ arbore $\Rightarrow \exists\, a,b \in T : d_T(a)=d_T(b)=1$.

P_2: $T=(V,E)$ arbore $\Rightarrow |V|-|E|=1$ ($n-1$ muchii)

P_3: $T=(V,E)$ arbore $\iff$ T conex și $|V|-|E|=1$

P_4: $T=(V,E)$ arbore $\iff$ T aciclic și $|V|-|E|=1$

P_5: $T=(V,E)$ arbore $\iff$ T conex cu muchie minimală

$\Updownarrow$

T conex și $\forall e=ab\in E$

$T-e$ neconex.

$(V,E-\{e\})$

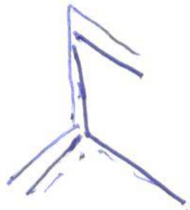
P_6 : $T=(V,E)$ arbore $\Leftrightarrow$ T aciclic muchie maximal

T aciclic și $\forall\, a \neq b \in V$ cu $ab \notin E$:

$\longrightarrow$ $T + ab$ conține un ciclu.

P_7: $T=(V,E)$ arbore $\Rightarrow$ T este conex prin lanțuri unice

Dem P1



Fie P lanț elementar de lungime maximă $\Rightarrow$ P este maximal (nu este inclus în niciun alt lanț diferit) (*)

a, b capetele lui P $\quad a \neq b$

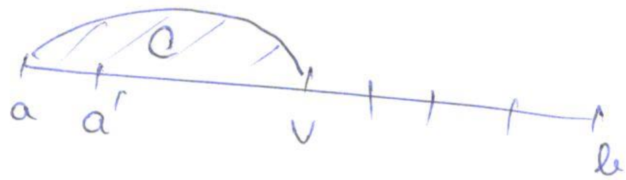
Dem că $d_T(a) = 1$

$$N_T(a) = \{ v \mid v \in V,\ av \in E \} \subseteq V(P) \text{ (din (*))}$$

~~Fie $v \in$~~ Dacă $\underbrace{|N_T(a)|}_{= d_T(a)} \geq 2 \Rightarrow$ Fie $v \in N_T(a)$ cu

$v \neq a'$ $\quad a'$ = vf. adiacent în P lui a.

Am $C = [a \longrightarrow v, a]$ este ciclu elem $\Rightarrow\!\Leftarrow$, T - aciclic.



Din $\underbrace{|N_T(a)|}_{= d_T(a)} = 1$

Analog $d_T(b) = 1$ $\square$

Dem P_2

$n = |V|$

$J(n)$

$J(1)$ adev $T \circ$ $|V| - |E| = 1 - 0 = 1.$

$J(2)$ adev. $T \circ\!-\!\circ$ $|V| - |E| = 2 - 1 = 1.$

$J(3)$ adv. $T \circ\!-\!\circ\!-\!\circ$ $|V| - |E| = 3 - 2 = 1$

$J(n-1) \longrightarrow J(n-1)$

Fie $T = (V, E)$ un arb cu $n \geq |V| \geq 4$

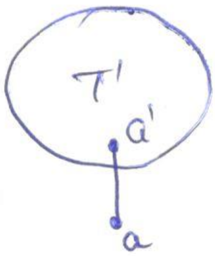
Conf $P_1 \Rightarrow \exists\, a \in V : d_T(a) = 1.$

Fie $a' \in V$ cu $a'a \in E$

Notăm $T' = T - a$

Avem T' aciclic (deoarece T aciclic și $T' \subset T$) $\Rightarrow$

T' conex



$\Rightarrow T'$ arbore $n-1$ vf.

$J(n-1) \Rightarrow |V'| - |E'| = 1.$

Avem $|V| - |E| = (|V'| + 1) - (|E'| + 1) = |V'| - |E'| = 1 \square$

Dem P_3

$\Rightarrow$ conform P_2. (clar)

$\Leftarrow$ T conex, $|V| - |E| = 1$ $\overset{?}{\Rightarrow} T$ arb $\left\{ \begin{array}{l} \text{conex } \checkmark \\ \text{aciclic ?} \end{array} \right.$

Alg: Dacă $\exists$ ciclu C în T ~~[illegible]~~ selectăm $e \in E(C)$ — mult. muchiilor graf. C.

și $T - e \to T$

~~Dacă~~ Dem $\not\exists$ stop T

Notăm T' rezultatul

$T' = (V, E')$ $\begin{cases} \text{conex} \\ \text{aciclic} \end{cases}$ $\Rightarrow |V| - |E'| = 1.$

$\Downarrow$ $E' \subseteq E$, $|V| - |E| = 1.$

$E' = E \Rightarrow T = T' \Rightarrow T$ arbore.

Dem P_4

$\Rightarrow$ clar (cf. P_2)

$\Leftarrow$ T aciclic, $|V| - |E| = 1$ $\overset{?}{\Longrightarrow}$ T arbore $\begin{cases} \text{conex ?} \\ \text{aciclic } \checkmark \end{cases}$ — Notăm $T = T_1 + \ldots + T_p$

desc. în comp. conexe.

$\forall\ i \in \{1 \ldots p\}$ T_i $\begin{cases} \text{conex} \\ \text{aciclic} \end{cases}$ $\to T_i$ arb $\to |V_i| - |E_i| = 1.$

$\underbrace{|V| - |E|}$ $= 1$ cf. ipotezei.

$\sum_{i=1}^{p} |V_i| - \sum_{i=1}^{p} |E_i|$ $\Big| \Rightarrow p = 1$ $T = T_1$ T conex.

$\sum_{i=1}^{p} \underbrace{(|V_i| - |E_i|)}_{1} = p$

Dem P_5:

$\Rightarrow$ T arbore $\begin{cases} \text{conex} \\ \text{aciclic} \end{cases}$ $\to T \begin{cases} \text{conex } \checkmark \\ \text{m minimal} \end{cases}$ $(V, E - \{e\})$

RA $\exists\ e = ab \in E(T) : T' = T - e$ conex

$\Rightarrow \exists P$ ab. lanț în T'

$\star$ $C = [a \xrightarrow{P} b\, a]$ ciclu în T $\Rightarrow$ T aciclic.

"$\Leftarrow$" T conex, m. minimal $\Rightarrow T$ arbore $\begin{cases} \text{conex } \checkmark \\ \text{ciclic} \end{cases}$

RA $\exists C$ ciclu în T. Fie $e = ab \in E(C)$

red. abs. $T' = T - e$ conex! abs

<u>Dem P6</u>

$\Rightarrow$ T arbore $\begin{cases} \text{conex} \\ \text{acc} \end{cases} \overset{?}{\Longrightarrow} T \begin{cases} \text{acc } \checkmark \\ \text{m maxim (exerc)} \end{cases}$

"$\Leftarrow$" $T \begin{cases} \text{aciclic} \\ \text{much. max} \end{cases} \Rightarrow T$ arbore conex, aciclic $\checkmark$

Fie $a, b \in V$, $a \neq b$, $\exists P$ a, b lanț. $\Leftarrow$ T conex.

1. $ab \in E(T)$: $P = [a, b]$
2. $ab \notin E(T)$

$T + ab$ e

T8 Fie $s_0 = (d_1 \ldots d_n) \in \mathbb{N}^n_{\geq 1}$

$\exists\, T = (V, E)$ arbore cu $s(T) = s_0 \iff d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$

<u>Dem:</u>

$\Rightarrow$ T arbore $s(T) = s_0 \Rightarrow \sum_{x \in V} d_T(x) = d_1 + \ldots + d_n$

$\sum_{x \in V} d_T(x) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n-1)$

$\Leftarrow$ $1 \leq d_1 \leq \ldots \leq d_n$ – ord cresc.

$d_1 + \ldots + d_n = 2(n-1)$

1. $d_1 = 1$

Pp. $d_1 \geq 2 \Rightarrow d_1 - d_n \geq 2$ $\quad \underbrace{d_1 + \dots + d_n}_{2(n-1)} \geq 2n \Big\}$ Ab.

2. Inducție (n)

I(n)

I(2) adv. $\left.\begin{array}{l} 1 \leq d_1 \leq d_2 \\ d_1 + d_2 = 2(2-1) = 2 \end{array}\right| \Rightarrow d_1 = d_2 = 1$

T 

I(3) adev. $\left.\begin{array}{l} 1 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3 \\ \underset{1}{d_1} + \underset{1}{d_2} + \underset{2}{d_3} = 2(3-1) = 4 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 = 1 \\ d_2 = 1 \\ d_3 = 2 \end{array}$

I(n-1) $\Rightarrow$ I(n)

$1 = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq d_n$

$d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n = 2(n-1)$

$s_0' = (d_2, d_3 \dots d_{n-1}, d_n - 1)$

n-1 termeni.

$d_2, d_3 + \dots + d_{n-1} + (d_n - 1) = 2(n-1) - 2.$

I(n-1) $\Rightarrow \exists\, T'$ arbore cu $s(T') = s_0$.

$X' = \{x_2, x_3, \dots x_n\}$

$d_{T'}(x_2) = d_2$

$d_{T'}(x_{n-1}) = d_{n-1}$. $\quad d_{T'}(x_n) = d_n - 1$

Completare

$d_n \geq 2$

$1 = d_1 \leq \text{———} \leq d_m.$

R.A. $\quad d_n = 1 \Rightarrow d_1 = \cdots = d_n = 1.$

$$\left.\Rightarrow \underbrace{d_1 + \text{——} + d_n}_{2(n-1)} = n. \right\} \; n = 2.$$

22