**NUMELE:** **GRUPA:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

**Logică matematică şi computaţională**

**Subiectul 1. ( 15 pct)** Pe $\mathbb{N}$ se defineşte relaţia binară $R = \{(x, 2x) | x \in \mathbb{N}\}$. Determinaţi $\mathcal{T}(R)$ (închiderea tranzitivă a lui $R$).

**Subiectul 2. (10 pct)** Fie $A$ şi $B$ două algebre Boole şi $h : A \to B$ un morfism boolean. Demonstraţi că dacă $F$ este un filtru în $B$ atunci $h^{-1}(F)$ este un filtru în $A$.

**Subiectul 3. ( 20 pct)** Demonstraţi completitudinea calcului propoziţinonal clasic: $\Gamma \models \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

**Subiectul 4. ( 10 pct)** In calculul propoziţional clasic, demonstraţi corectitudinea următoarei reguli de deducţie: $\dfrac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \gamma, \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \gamma}{\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \gamma}$.

**Subiectul 5. (15 pct)** In calculul propoziţional clasic, demonstraţi că pentru orice formule $\varphi, \psi$ şi $\chi$, mulţimea de formule

$$\Sigma = \{\varphi \wedge (\psi \leftrightarrow \neg\chi), ((\varphi \wedge \psi) \vee \neg\neg\chi) \to ((\varphi \to \chi) \leftrightarrow \psi)\}$$

nu este satisfiabilă.

**Subiectul 6. (15 pct)** Fie $\mathcal{S}$ forma clauzală a formulei

$$(p \vee r) \wedge (r \to q) \wedge \neg q \wedge (p \to t) \wedge \neg s \wedge (s \to t)$$

unde$p, r, q, s, t$ sunt variabile propoziţionale. Arătaţi că există o derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\Box$ din $\mathcal{S}$.

**Subiectul 7.** (a) **(10 pct)** Determinaţi $\mathcal{L}$, un limbaj de ordinul I şi o mulţime de enunţuri $\Gamma$ astfel încât modelele lui $\Gamma$ să fie structuri $(A, +, \sim)$ unde $+$ este o operaţie binară şi $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $A$.
(b) **(10 pct)** Determinaţi un enunţ $\delta$ astfel încât modelele lui $\Gamma \cup \{\delta\}$ să fie modelele lui $\Gamma$ în care $\sim$ este congruenţă.

**Subiectul 8. ( 25 pct)** Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, $\Gamma$ o mulţime de formule şi $\varphi$ un enunţ. Demonstraţi că, pentru orice formulă $\psi$,
$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ implică $\Gamma \vdash \varphi \to \neg\psi$.
*Pentru demonstraţia în calculul propoziţional se acordă* **15 pct**.

**Nota** $n$ **corespunde intervalului** $[10n - 5, 10n + 4)$