Logică Matematică şi Computaţională
Cursul VI

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2015–2016, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Relații de ordine

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică. Într–adevăr, dacă $R \subseteq A^2$, atunci:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este simetrică ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- prin urmare, dacă R este simetrică și antisimetrică, atunci $R = R \cap R \subseteq \Delta_A$;
- dacă $R \subseteq \Delta_A$, atunci este imediat că R e simetrică și antisimetrică;
- așadar: R e simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- în concluzie: R este reflexivă, simetrică și antisimetrică ddacă $\Delta_A \subseteq R$ și $R \subseteq \Delta_A$ ddacă $R = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este singura relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine. Acest fapt rezultă din remarca anterioară și faptul că Δ_A este tranzitivă.

O teoremă despre relații de echivalență și relații de ordine

Remarcă (continuare)

Însă plus, cum Δ_A este cea mai mică relație reflexivă pe A, în sensul incluziunii (i. e. Δ_A este reflexivă și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A), rezultă că Δ_A este cea mai mică relație de echivalență pe A și cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Remarcă

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație de preordine pe A.
Fie $\sim := R \cap R^{-1}$ (i. e. $\sim \subseteq A^2$, pentru orice $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă $[xRy$ și $yRx]$).
Se demonstrează că $\sim$ este o relație de echivalență pe A.
Considerăm mulțimea factor $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$, unde $\hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\} = \{y \in A \mid y \sim x\}$, pentru fiecare $x \in A$. Pe $A/_\sim$ definim relația binară $\leq$, astfel: pentru orice $x, y \in A$, $\hat{x} \leq \hat{y}$ ddacă xRy.
Se demonstrează că $\leq$ este **bine definită**, adică este **independentă de reprezentanți**, i. e., pentru orice $x, y, z, t \in A$ a. î. $\hat{x} = \hat{z}$ (ceea ce este echivalent cu $x \sim z$) și $\hat{y} = \hat{t}$ (ceea ce este echivalent cu $y \sim t$), are loc echivalența: xRy ddacă zRt. Și se demonstrează că $\leq$ este o relație de ordine pe $A/_\sim$.

Ordine versus ordine strictă

Remarcă

Dacă A e o mulțime nevidă, atunci nu există nicio relație binară pe A care să fie și reflexivă, și ireflexivă, prin urmare nu există nicio relație binară pe A care să fie și relație de ordine, și relație de ordine strictă.
Într–adevăr, dacă ar exista $R \subseteq A^2$ a. î. R să fie și reflexivă, și ireflexivă, atunci $\Delta_A \subseteq R$ și $\Delta_A \cap R = \emptyset$, deci $\emptyset = \Delta_A \cap R = \Delta_A$, prin urmare $\Delta_A = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu $A \neq \emptyset$.

Exemplu

Δ_A este cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii.

Ordine versus ordine strictă

Exercițiu (temă)

Fie A o mulțime, O mulțimea relațiilor de ordine pe A și S mulțimea relațiilor de ordine strictă pe A.

Să se demonstreze că aplicațiile $\varphi : O \rightarrow S$ și $\psi : S \rightarrow O$, definite prin:

- pentru orice $\leq \in O$, $\varphi(\leq) = \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$,
- pentru orice $< \in S$, $\psi(<) = < \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$,

sunt:

- corect definite, i. e. într-adevăr $Im(\varphi) \subseteq S$ și $Im(\psi) \subseteq O$, i. e.:
  - scăzând din orice relație de ordine pe A diagonala lui A, se obține o relație de ordine strictă pe A;
  - reunind orice relație de ordine strictă pe A cu diagonala lui A, se obține o relație de ordine pe A;
- inverse una alteia, i. e. $\psi \circ \varphi = id_O$ și $\varphi \circ \psi = id_S$ (acest din urmă fapt poate fi verificat foarte ușor pornind de la observația că orice relație de ordine pe A include Δ_A și orice relație de ordine strictă pe A este disjunctă de Δ_A, și văzând cum se comportă și proprietățile de tranzitivitate, antisimetrie și asimetrie vizavi de operațiile de scădere a diagonalei mulțimii, respectiv reuniune cu diagonala mulțimii), ceea ce înseamnă că φ și ψ sunt bijecții între O și S.

Ordine versus ordine strictă

Definiție

Fie A o mulțime, $\leq$ o relație de ordine pe A și $<$ o relație de ordine strictă pe A. Atunci:

- $\leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x \leq y \text{ și } x \neq y\}$ se numește *relația de ordine strictă asociată lui* $\leq$;
- $< \cup \Delta_A = \{(x, y) \in A^2 \mid x < y \text{ sau } x = y\}$ se numește *relația de ordine asociată lui* $<$.

(A se vedea exercițiul anterior.)

Remarcă

Relația de ordine strictă asociată unei relații de ordine totale este o relație totală (desigur, nu completă, decât în cazul în care mulțimea pe care este definită este $\emptyset$).

Notație

Pentru orice mulțime A, orice $R \subseteq A^2$ și orice $a_1, a_2, a_3, \ldots \in A$, vom nota faptul că $a_1 R a_2,\ a_2 R a_3, \ldots$ și prin: $a_1 R a_2 R a_3 \ldots$.

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Se verifică ușor (**temă**) că:

- $\leq$ este o relație de ordine totală (i. e. liniară) pe fiecare dintre mulțimile: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, numită *relația de ordine naturală* pe aceste mulțimi (desigur, am notat cu $\leq$ relația de ordine "uzuală" pe fiecare dintre aceste mulțimi, definită prin: $x \leq y$ ddacă există un număr nenegativ a, a. î. $y = x + a$, unde numerele nenegative și adunarea pot fi definite în diverse moduri în fiecare dintre aceste mulțimi; de exemplu, se poate porni de la construcția cu numere cardinale pentru numerele naturale și operațiile cu ele, apoi, pe baza numerelor naturale, se pot construi $\mathbb{Z}$, apoi $\mathbb{Q}$, apoi $\mathbb{R}$, în modurile cunoscute)
- fie relația binară pe $\mathbb{C}$ pe care o vom nota cu $\sqsubseteq$ și pe care o definim prin: pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b\mathbf{i} \sqsubseteq c + d\mathbf{i}$ ddacă $a \leq c$ și $b \leq d$, unde $\leq$ este ordinea naturală pe $\mathbb{R}$; atunci $\sqsubseteq$ este o relație de ordine pe $\mathbb{C}$ care nu este totală (pentru că, de exemplu, $(2 + 5\mathbf{i}, 5 + 2\mathbf{i}) \notin \sqsubseteq$ și $(5 + 2\mathbf{i}, 2 + 5\mathbf{i}) \notin \sqsubseteq$)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{N}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$) este o relație de ordine care nu este totală (pentru că, de exemplu, 3 nu divide 7 și 7 nu divide 3)
- $|$ (divizibilitatea) pe $\mathbb{Z}$ ($| = \{(n, a \cdot n) \mid a, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}^2$) este o preordine care nu este relație de ordine (pentru că, de exemplu, $5|(-5)$ și $(-5)|5$, dar $5 \neq -5$, prin urmare $|$ pe $\mathbb{Z}$ nu este antisimetrică)

Exemple de relații de ordine

Exemplu

Pentru orice mulțime T, $\subseteq$ este o relație de ordine pe $\mathcal{P}(T)$, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$; într–adevăr:

- dacă $T = \emptyset$, atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că $\emptyset \subseteq \emptyset$
- dacă $T = \{\star\}$ (*singleton*, i. e. mulțime cu un singur element, mulțime de cardinal 1), atunci $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(\{\star\}) = \{\emptyset, \{\star\}\}$, iar relația de ordine $\subseteq$ pe $\{\emptyset, \{\star\}\}$ este totală (i. e. liniară), pentru că: $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \subseteq \{\star\}$ și $\{\star\} \subseteq \{\star\}$
- dacă $|T| \geq 2$, adică T are cel puțin două elemente distincte, atunci: alegând (la întâmplare, i. e. arbitrar) două elemente $a, b \in T$ cu $a \neq b$, rezultă că $\{a\} \in \mathcal{P}(T)$, $\{b\} \in \mathcal{P}(T)$, și $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ și $\{b\} \nsubseteq \{a\}$

Observație

Vom folosi adesea notația $\leq$ pentru relații de ordine, chiar dacă nu este vorba de relația de ordine uzuală pe o mulțime de numere.

Mulțimi ordonate

Definiție

- O mulțime A înzestrată cu o relație de ordine $\leq \subseteq A^2$ se notează $(A, \leq)$ și se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set“).
- Dacă, în plus, $\leq$ este o relație de ordine totală, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.

Exemplu

- Posetul $(\mathbb{N}, \leq)$ este lanț (unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{N}$).
- Posetul $(\mathbb{N}, |)$ nu este lanț.

A se vedea și celelalte exemple de relații de ordine de mai sus.

Observație

Poseturile sunt un tip de **structuri algebrice**, diferite de cele studiate în liceu, precum monoizii, grupurile, inelele, corpurile etc., prin faptul că sunt înzestrate nu cu **operații**, ci cu o **relație binară.**

Mulțimi ordonate

Observație (continuare)

Terminologia cunoscută pentru structurile algebrice studiate până acum se păstrează: cu notațiile din definiția anterioară, A se numește *mulțimea elementelor*, sau *mulțimea suport*, sau *mulțimea subiacentă* posetului $(A, \leq)$; vom vedea și noțiunile de **substructură** a unui poset și **morfism** de poseturi.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<:=\leq \setminus \Delta_A = \{(a, b) \in A^2 \mid a \leq b$ și $a \neq b\}$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq$.
Relației de ordine $\leq$ pe A i se asociază *relația de succesiune* (numită și *relația de acoperire*), notată $\prec$ și definită astfel:
$\prec := \{(a, b) \in A^2 \mid a < b$ și nu există $x \in A$ a. î. $a < x < b\} \subseteq A^2$.
Pentru orice $a, b \in A$ cu $a \prec b$:

- b se numește *succesor al lui a* (se mai spune că *b acoperă pe a*)
- a se numește *predecesor al lui b* (sau se spune că *a este acoperit de b*)

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, $\prec$ e asimetrică (deci și ireflexivă) și nu e tranzitivă.

Mulțimi ordonate

Notație (notații uzuale într–un poset)

Cu notațiile din definiția anterioară: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Exemplu (temă)

- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{N}$ este relația "sunt numere consecutive", i. e. relația $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Relația de succesiune asociată ordinii naturale pe $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ este $\emptyset$, pentru că, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$ (sau $a, b \in \mathbb{R}$) cu $a < b$, există $x \in \mathbb{Q}$ (sau $x \in \mathbb{R}$), a. î. $a < x < b$.

- Proprietatea observată mai sus a mulțimilor ordonate $(\mathbb{Q}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ se numește *densitate* și, de obicei, se enunță pentru mulțimi **total** ordonate, dar poate fi definită și în cazul general al poseturilor, astfel:

Definiție

Fie $(A, \leq)$ un poset și $<$ ordinea strictă asociată lui $\leq$. Spunem că mulțimea A este *densă raportat la ordinea* $\leq$, sau că $\leq$ este o *ordine densă pe* A ddacă, oricare ar fi $a, b \in A$ cu $a < b$, există $x \in A$ a. î. $a < x < b$.

- Așadar, $\leq$ este o ordine densă pe $\mathbb{Q}$ și pe $\mathbb{R}$.

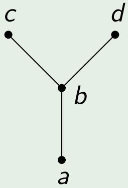
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Amintim că relațiile binare (pe mulțimi finite și nevide) se pot reprezenta grafic prin grafuri orientate.
- Relațiile de ordine, însă, beneficiază de o reprezentare grafică mai avantajoasă, minimală în sensul că ține seama de proprietățile de reflexivitate, tranzitivitate și antisimetrie ale unei relații de ordine pentru a elimina redundanțele create în reprezentarea grafică de aceste proprietăți. Această reprezentare grafică a unei relații de ordine se numește *diagramă Hasse*.
- Și această reprezentare grafică este, de obicei, folosită pentru relații (de ordine) pe mulțimi finite și nevide.
- Dacă $(A, \leq)$ este un poset finit și nevid (i. e. cu A finită și nevidă), atunci diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ este graful neorientat având mulțimea nodurilor egală cu A și mulțimea muchiilor egală cu relația de succesiune $\prec$ asociată lui $\leq$ și a cărui reprezentare grafică respectă regula:
    - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre succesorii săi** (i. e., pentru orice $a, b \in A$ a. î. $a \prec b$, a va fi reprezentat dedesubtul lui b),
- prin urmare:
    - **orice nod se va afla dedesubtul fiecăruia dintre nodurile cu care se găsește în relația de ordine strictă $<$ asociată lui $\leq$, i. e. nodurile "strict mai mari" decât el**.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Exemplu

Posetul $(A, \leq)$ dat de $A = \{a, b, c, d\}$ și
$\leq = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$ are următoarea diagramă Hasse:



Observație (diagrama Hasse: reprezentare minimală, fără redundanțe)

Într–o diagramă Hasse, buclele sunt eliminate (orice ordine este reflexivă, deci nu e nevoie să se deseneze arce între un vârf și el însuși), și orice arc care rezultă prin tranzitivitate din altele este, de asemenea, eliminat. Mai mult, antisimetria unei ordini arată că nu există circuite în graful orientat asociat unei ordini (graf orientat asociat la fel ca în cazul relațiilor binare oarecare), iar acest fapt permite reprezentarea printr–un graf neorientat, cu acea convenție privind poziționarea nodurilor.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Faptul că, într–un poset finit și nevid $(A, \leq)$, două elemente $x, y \in A$ satisfac $x < y$ (cu $<:=\leq \setminus \Delta_A$) este reprezentat în diagrama Hasse a posetului $(A, \leq)$ prin următoarele caracteristici:

- elementul x este reprezentat dedesubtul elementului y și
- x și y sunt conectate printr–un lanț (mai precis, prin cel puțin un lanț; aici, **lanț** în sensul de **drum** în graful neorientat dat de diagrama Hasse; dar sigur că submulțimea lui A formată din elementele ce corespund nodurilor de pe un astfel de drum este o submulțime total ordonată a posetului $(A, \leq)$, adică este un lanț cu ordinea indusă).

Observație

În diagramele Hasse nu există muchii orizontale, ci numai muchii verticale sau oblice.

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Observație

Diagrama Hasse a unei **mulțimi liniar ordonate** este "liniară".
Amintim că o **mulțime liniar ordonată** se mai numește **mulțime total ordonată** sau **lanț**.

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, vom nota **lanțul cu** k **elemente** prin $\mathcal{L}_k$ (articolul hotărât va fi explicat în remarca următoare). De obicei, mulțimea suport a lanțului $\mathcal{L}_k$ se notează cu L_k. Evident, orice mulțime cu exact k elemente poate servi drept suport pentru lanțul cu k elemente.

Remarcă

Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, lanțul cu k elemente este unic, modulo o permutare a elementelor, i. e. pe o mulțime cu k elemente se poate defini o unică ordine totală, modulo o permutare a elementelor.

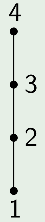
Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

Remarcă (continuare)

Mai precis, dacă L_k este o mulțime cu exact k elemente, iar $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt două ordini totale pe L_k, atunci poseturile $(L_k, \leq)$ și $(L_k, \sqsubseteq)$ sunt **izomorfe**, i. e. există între ele un **izomorfism de poseturi**. Vom vedea ce este un izomorfism de poseturi. Deocamdată, ne mulțumim cu explicația intuitivă: două poseturi finite și nevide sunt **izomorfe** ddacă **au aceeași diagramă Hasse.**

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente: $\mathcal{L}_4 = (L_4, \leq)$, cu $L_4 := \{1, 2, 3, 4\}$ și $\leq = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2,),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$, are următoarea diagramă Hasse:



Elemente distinse într–un poset

- Până în momentul în care se va specifica altfel, fie $(A, \leq)$ un poset și $X \subseteq A$.

Remarcă

Este imediat faptul că relația binară pe X dată de mulțimea de perechi $\{(x, y) | x \in X, y \in X, x \leq y\} = \leq \cap X^2$ este o ordine pe X, și că, dacă ordinea $\leq$ pe A este totală, atunci această ordine pe X este, de asemenea, totală.

Definiție

Ordinea pe X din remarca anterioară se numește *ordinea indusă de $\leq$ pe X* și se notează tot cu $\leq$.
Posetul $(X, \leq)$ se numește *subposet* sau *submulțime (parțial) ordonată a lui $(A, \leq)$.*
Dacă $(X, \leq)$ este un lanț (i. e. are fiecare două elemente comparabile), atunci $(X, \leq)$ se numește *submulțime total ordonată a lui $(A, \leq)$.*

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $a \in A$ se numește:

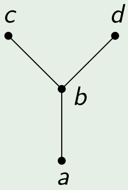
- *minorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $a \leq x$
- *majorant pentru* X ddacă, pentru orice $x \in X$, $x \leq a$

Remarcă

X poate avea mai mulți minoranți (majoranți), și poate să nu aibă niciun minorant (majorant).

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minoranții a și b și nu are niciun majorant.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

- Un minorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $m \in X$ cu $m \leq x$ pentru orice $x \in X$) se numește *minim al lui* X sau *prim element al lui* X sau *cel mai mic element al lui* X și se notează cu $\min(X)$ sau $\min(X, \leq)$.
- Un majorant al lui X care aparține lui X (i. e. un element $M \in X$ cu $x \leq M$ pentru orice $x \in X$) se numește *maxim al lui* X sau *ultim element al lui* X sau *cel mai mare element al lui* X și se notează cu $\max(X)$ sau $\max(X, \leq)$.

Remarcă

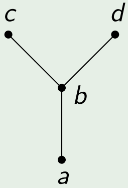
După cum arată primul exemplu de mai jos, minimul nu există întotdeauna. Dar antisimetria lui $\leq$ implică faptul că minimul (dacă există) este unic (ceea ce justifică notația de mai sus pentru minim, care indică faptul că minimul lui X este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru maxim.

Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit*. (Minimul și maximul trebuie să fie ale întregului poset, deci trebuie luat $X := A$ în definiția anterioară.)

Exemplu

În posetul având diagrama Hasse:



submulțimea $\{b, c, d\}$ are minimul b și nu are maxim, iar întreaga mulțime $\{a, b, c, d\}$ (întregul poset) are minimul a și nu are maxim.

Exemplu

Lanțul cu 4 elemente este un poset mărginit (la fel ca orice lanț finit și nevid; a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*).

Remarcă

O mulțime care are minim sau maxim are cel puțin un element (pentru că minimul unei mulțimi aparține acelei mulțimi și la fel și maximul), deci nu poate fi vidă.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Un element $x \in X$ se numește:

- *element minimal al lui* X ddacă este minimul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $y \leq x$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y < x$
- *element maximal al lui* X ddacă este maximul submulțimii lui X formată din elementele comparabile cu x, sau, echivalent, ddacă, oricare ar fi $y \in X$ cu $x \leq y$, rezultă $x = y$, sau, echivalent, ddacă nu există $y \in X$ cu $y > x$

Remarcă

Din definiția anterioară, rezultă imediat, pentru orice $x \in X$:

- x este simultan element minimal al lui X și minorant pentru X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element minimal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \min(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și majorant pentru X ddacă $x = \max(X)$
- x este simultan element maximal al lui X și element comparabil cu orice element al lui X ddacă $x = \max(X)$

Reprezentarea grafică a ordinilor: diagramele Hasse

- Reprezentarea prin diagrame Hasse a poseturilor finite se bazează pe următoarele rezultate, care pot fi demonstrate simplu, prin reducere la absurd și inducție matematică, ajungându–se la contradicție cu finitudinea posetului (a se vedea și: Sergiu Rudeanu, *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*); a treia remarcă de mai jos arată că orice diagramă Hasse corespunde unui unic poset:

Remarcă (temă)

Orice poset finit și nevid are elemente maximale și elemente minimale, mai precis, pentru orice element $a \in A$ al unui poset finit și nevid $(A, \leq)$, există un element minimal e și un element maximal E în posetul $(A, \leq)$, cu proprietatea că $e \leq a \leq E$.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, orice element care nu este element maximal are cel puțin un succesor, și orice element care nu este element minimal are cel puțin un predecesor.

Remarcă (temă)

În orice poset finit și nevid, închiderea tranzitivă a relației de succesiune este relația de ordine strictă, iar închiderea reflexiv–tranzitivă a relației de succesiune (i. e. preordinea generată de relația de succesiune) este relația de ordine.

Elemente distinse într–un poset

Definiție

Infimumul lui X este cel mai mare minorant al lui X, adică maximul mulțimii minoranților lui X, și se notează cu $\inf(X)$ sau $\inf(X, \leq)$.
Supremumul lui X este cel mai mic majorant al lui X, adică minimul mulțimii majoranților lui X, și se notează cu $\sup(X)$ sau $\sup(X, \leq)$.

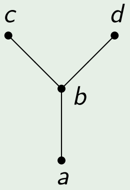
Remarcă

După cum arată exemplele de mai jos, infimumul nu există întotdeauna, nici măcar atunci când mulțimea minoranților este nevidă.
Dar, fiind maximul unei mulțimi, infimumul (dacă există) este unic (ceea ce îi justifică denumirea cu articol hotărât și notația, fiecare dintre acestea indicând faptul că infimumul este unic determinat de X (și $\leq$)).
La fel pentru supremum.

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

În posetul dat de diagrama Hasse:



submulțimea $\{c, d\}$ are infimumul b și nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților lui $\{c, d\}$ este vidă și, deci, nu are minim.

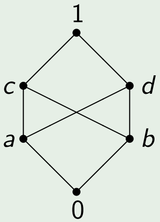
Observație

Într–o diagramă Hasse, nodurile sunt marcate prin cerculețe. Nu toate intersecțiile de muchii sunt noduri, după cum ilustrează următorul exemplu.

Elemente distinse într–un poset

Exemplu

Notăm relația de ordine a posetului dat de următoarea diagramă Hasse cu $\leq$, iar relația de ordine strictă asociată ei cu $<$.



În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c < 1$, $d < 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 < a$, $0 < b$ și a și b sunt incomparabile).

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Infimumul este un minorant, prin urmare infimumul aparține mulțimii ddacă este minimul mulțimii: $\exists \inf(X) \in X$ ddacă $\exists \min(X)$, și atunci $\min(X) = \inf(X)$. Analog, supremumul este un majorant, prin urmare supremumul aparține mulțimii ddacă este maximul mulțimii: $\exists \sup(X) \in X$ ddacă $\exists \max(X)$, și atunci $\sup(X) = \max(X)$.

Remarcă

Din definiția infimumului și a supremumului, rezultă următoarele caracterizări:

- există $\inf(X) = m$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $m \leq x$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $a \leq x$, rezultă că $a \leq m$
- există $\sup(X) = M$ $(\in A)$ ddacă:
  - pentru orice $x \in X$, $x \leq M$ și
  - oricare ar fi $a \in A$ a. î., pentru orice $x \in X$, $x \leq a$, rezultă că $M \leq a$

Lemă

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Demonstrație: Vom folosi definițiile infimumului, supremumului, minimului și maximului unei submulțimi a unui poset, și le vom aplica acestui caz particular al submulțimilor cu 1 sau 2 elemente.

Fie $x, y \in L$.

(1) $\Rightarrow$ (2): Dacă $x \leq y$, atunci $x = \min\{x, y\} = \inf\{x, y\}$ în L.

(1) $\Rightarrow$ (3): Dacă $x \leq y$, atunci $y = \max\{x, y\} = \sup\{x, y\}$ în L.

(2) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\inf\{x, y\}$, atunci $\inf\{x, y\} \leq y$, prin urmare, dacă, în plus, $\inf\{x, y\} = x$, atunci $x \leq y$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Dacă există în L $\sup\{x, y\}$, atunci $x \leq \sup\{x, y\}$, prin urmare, dacă, în plus, $\sup\{x, y\} = y$, atunci $x \leq y$.

Principiul dualității pentru poseturi

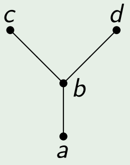
- **Principiul dualității pentru poseturi:** *Orice rezultat privind un poset* **arbitrar (fapt esențial)** $(A, \leq)$ *rămâne valabil dacă înlocuim* $\leq$ *cu* $\leq^{-1}$ *(notată* $\geq$*;* conform definiției inversei unei relații binare, $\geq = \leq^{-1} \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \geq y$ ddacă $y \leq x$; la fel în continuare*),* $<$ *cu* $<^{-1}$ *(notată* $>$*),* $\prec$ *cu* $\prec^{-1}$ *(notată* $\succ$*), toți minoranții cu majoranți (ca noțiuni) și vice–versa, toate elementele minimale cu elemente maximale și vice-versa, toate minimurile cu maximuri și vice-versa și toate infimumurile cu supremumuri și vice–versa.*
- Valabilitatea acestui principiu este ușor de observat din faptul că: pentru orice ordine $\leq$, $\geq$ este tot o ordine, cu ordinea strictă asociată $>$ si relația de succesiune $\succ$, $\leq$ este totală ddacă $\geq$ este totală, pentru orice $X \subseteq A$, minoranții lui $(X, \leq)$ sunt exact majoranții lui $(X, \geq)$ și vice–versa, elementele minimale ale lui $(X, \leq)$ sunt exact elementele maximale ale lui $(X, \geq)$ și vice–versa, $\min(X, \leq) = \max(X, \geq)$ și vice–versa (există simultan, i. e. $\min(X, \leq)$ există ddacă $\max(X, \geq)$ există, și, atunci când există, sunt egale; la fel vice–versa), $\inf(X, \leq) = \sup(X, \geq)$ și vice–versa (de asemenea, există simultan). Se spune că noțiunile de minorant și majorant sunt *duale una alteia*, și la fel pentru noțiunile de element minimal și element maximal, minim și maxim, infimum și supremum, respectiv.

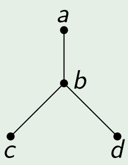
Principiul dualității pentru poseturi

- Posetul $(A, \geq)$ se numește *posetul dual* al posetului $(A, \leq)$.
- Este evident că dualul dualului unui poset $(A, \leq)$ este chiar $(A, \leq)$.
- De acum încolo, ori de câte ori vom face apel la **Principiul dualității pentru poseturi** în demonstrații, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

Exemplu

- Diagrama Hasse a dualului unui poset finit se obține prin "răsturnarea diagramei Hasse" a acelui poset "cu susul în jos".





$(P, \leq)$ $\quad$ $(P, \geq) =$ dualul lui $(P, \leq)$

- Lanțurile finite sunt *autoduale*, i. e. izomorfe (ca poseturi; vom vedea) cu poseturile duale lor.

Principiul dualității pentru poseturi

Exemplu

Se poate demonstra că orice submulțime finită și nevidă a unui lanț are un minim și un maxim, astfel: arătând prin inducție după cardinalul submulțimii existența minimului, iar existența maximului rezultă **prin dualitate**.

Observație

O consecință a remarcii din exemplul anterior este faptul că orice lanț finit și nevid este un poset mărginit (fapt menționat și mai sus).

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un poset și $\emptyset \neq X \subseteq L$, a. î. există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\sup(X)$. Atunci $\inf(X) \leq \sup(X)$.
Într–adevăr, cum $X \neq \emptyset$, rezultă că există $x \in X$. $\inf(X)$ este un minorant al lui X, iar $\sup(X)$ este un majorant al lui X, prin urmare $\inf(X) \leq x \leq \sup(X)$, deci $\inf(X) \leq \sup(X)$ prin tranzitivitate.

Elemente distinse într–un poset

Caracterizarea supremumului si a infimumului de mai sus fac demonstrațiile următoarelor remarci foarte simple.

Remarcă

Pentru orice mulțime T, în posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, oricare ar fi $X \subseteq \mathcal{P}(T)$:

- există $\sup(X) = \bigcup_{A \in X} A$
- există $\inf(X) = \bigcap_{A \in X} A$

Remarcă (temă: scrieți această remarcă pentru posetul $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$)

Fie $(L, \leq)$ un poset și $X \subseteq L$, $Y \subseteq L$, a. î. $X \subseteq Y$. Atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(X)$ și $\sup(Y)$, atunci $\sup(X) \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(X)$ și $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq \inf(X)$

Pentru tratarea cazurilor în care X este vidă, a se vedea remarca următoare.
Cazul în care X este un singleton se scrie astfel: dacă $x \in Y \subseteq L$, atunci:

- dacă există în $(L, \leq)$ $\sup(Y)$, atunci $x \leq \sup(Y)$
- dacă există în $(L, \leq)$ $\inf(Y)$, atunci $\inf(Y) \leq x$

Elemente distinse într–un poset

Remarcă

Într–un poset $(L, \leq)$, $\sup(\emptyset)$ există ddacă $\min(L)$ există, și, dacă acestea există, atunci sunt egale. Dual, la fel se întâmplă pentru $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$.

Într–adevăr, $\sup(\emptyset) \overset{\text{definiție}}{=} \min\{x \mid x \in L, \text{ a. î. } (\forall y)(y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x)\} = \min\{x \mid x \in L\} = \min(L)$ ($\sup(\emptyset)$ și $\min(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale), pentru că, oricare ar fi un element y, afirmația $y \in \emptyset$ este falsă, și deci implicația $y \in \emptyset \Rightarrow y \leq x$ este adevărată pentru orice element x. Dual, $\inf(\emptyset)$ și $\max(L)$ există simultan, și, atunci când există, sunt egale.

Propoziție

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în L;*
2. *pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în L.*

Demonstrație: Condiția (1) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are minim, iar condiția (2) aplicată lui $A := L$ spune că $(L, \leq)$ are maxim. Deci, dacă $(L, \leq)$ satisface una dintre condițiile (1) și (2), atunci L este nevidă.

Elemente distinse într–un poset

$(1) \Rightarrow (2)$: Ipoteza acestei implicații, anume existența în $(L, \leq)$ a infimumurilor tuturor submulțimilor lui L, implică faptul că:

- L este nevidă;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(\emptyset) = \max(L)$, conform remarcii anterioare; deci $(L, \leq)$ are maxim;
- în $(L, \leq)$ există $\inf(L) = \min(L)$; deci $(L, \leq)$ are minim.

Conform remarcii anterioare, rezultă că în $(L, \leq)$ există $\sup(\emptyset) = \min(L)$.
Fie, acum, $\emptyset \neq A \subseteq L$ și $M := \{m \in L \mid (\forall x \in A) x \leq m\} \subseteq L$, i. e. M este mulțimea majoranților lui A. $M \neq \emptyset$, pentru că $\max(L) \in M$.
Faptul că $(L, \leq)$ satisface condiția (1) arată că există $s := \inf(M) \in L$.
Pentru orice $x \in A$ și orice $y \in M$, are loc $x \leq y$, conform definiției mulțimii M.
Deci orice element x al mulțimii nevide A este minorant al lui M. Definiția infimumului arată acum că $x \leq \inf(M) = s$, oricare ar fi $x \in A$. Deci $s = \inf(M)$ este un majorant al lui A, adică $s = \inf(M) \in M$, conform definiției lui M. Dar $s = \inf(M) \in M$ înseamnă că $s = \min(M)$, adică s este cel mai mic majorant al lui A, adică $s = \sup(A)$, conform definiției supremumului.
$(2) \Rightarrow (1)$: Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.

Funcții izotone

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \longrightarrow B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.
Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ și posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Remarcă

Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă. Întradevăr, dacă $(P, \leq)$, $(Q, \sqsubseteq)$ și $(R, \trianglelefteq)$ sunt poseturi, iar $f : P \to Q$ și $g : Q \to R$ sunt funcții izotone, atunci, pentru orice $x, y \in P$: dacă $x \leq y$, atunci $f(x) \sqsubseteq f(y)$, prin urmare $g(f(x)) \trianglelefteq g(f(y))$, adică $(g \circ f)(x) \trianglelefteq (g \circ f)(y)$, i. e. $g \circ f$ este izotonă.

Exercițiu (temă)

Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.
I. e., dacă:

- $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt două poseturi,
- $<:=\leq \setminus \Delta_A$ și $\sqsubset:=\sqsubseteq \setminus \Delta_B$ sunt ordinile stricte asociate lui $\leq$ și, respectiv, $\sqsubseteq$,
- iar $f : A \to B$ este o funcție izotonă injectivă,

atunci, pentru orice $x, y \in A$:

$$x < y \text{ implică } f(x) \sqsubset f(y).$$

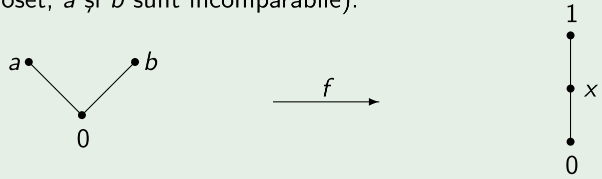
Funcții izotone

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Funcții izotone

Remarcă

Fie $(L, \leq)$ un lanț (adică o mulțime total ordonată, adică o mulțime liniar ordonată). Atunci, pentru orice $a, b \in L$, $a \nleq b$ implică $b < a$, unde $< := \leq \setminus \Delta_L$ este ordinea strictă asociată lui $\leq$. Într–adevăr, pentru orice $a, b \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț implică $a \leq b$ sau $b \leq a$, așadar, dacă $a \nleq b$, atunci $b \leq a$ și $a \neq b$, prin urmare $b < a$.

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.
Indicație: aplicați metoda reducerii la absurd, remarca anterioară și injectivitatea funcției din enunț.

Funcții izotone

Exercițiu (temă)

Fie $f : L \to M$ o funcție surjectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Arătați că, dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci $(M, \sqsubseteq)$ este lanț.

Exercițiu (Teorema Knaster–Tarski (temă))

Fie $(L, \leq)$ un poset, iar $f : L \to L$ o funcție izotonă.

Dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{\text{not.}}{=} a \in L$, atunci:

1. $f(a) = a$ (i. e. a este *punct fix al lui* f) și $a = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;
2. dacă $b \in L$ a. î. $f(b) = b$, atunci $a \leq b$ (i. e. a este cel mai mic punct fix al lui f).

Și **dual:** dacă există în posetul $(L, \leq)$ $\sup\{x \in L \mid x \leq f(x)\} \stackrel{\text{not.}}{=} c \in L$, atunci :

1. $f(c) = c$ (i. e. c este *punct fix al lui* f) și $c = \max\{x \in L \mid x \leq f(x)\}$;
2. dacă $d \in L$ a. î. $f(d) = d$, atunci $d \leq c$ (i. e. c este cel mai mare punct fix al lui f).

Mnemonic despre mulțimi parțial ordonate (poseturi)

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul "partially ordered set") o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulțime A și o **relație de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.
Relația de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este
$< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relația de succesiune asociată ordinii $\leq$ este
$\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\, (x < a < y)\}$.
Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, avem:

- $\geq$ este o relație de ordine pe A
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relația de succesiune asociată lui $\geq$

- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului $(A, \leq)$.

Operatori și sisteme de închidere

Pe tot parcursul acestei secțiuni a cursului, $(A, \leq)$ va fi un poset mărginit (implicit nevid) arbitrar.
Următoarea definiție o generalizează pe cea din cursul anterior în care posetul de referință era $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$, cu T mulțime arbitrară.
Toate demonstrațiile rezultatelor din această secțiune sunt analoge celor din cazul particular al posetului $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ incluse în cursul anterior. Transpunerea lor la cazul general de aici este un bun **exercițiu (temă)** pentru fiecare student.

Definiție

- Se numește *sistem de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o submulțime a lui A închisă la infimumuri arbitrare, i. e. o mulțime $M \subseteq A$ cu proprietatea că, pentru orice $S \subseteq M$, există în $(A, \leq)$ $\inf(S) \in M$.
- Se numește *operator de închidere pe posetul mărginit* $(A, \leq)$ o funcție $C : A \rightarrow A$, astfel încât, pentru orice $x, y \in A$, au loc proprietățile:
  1. $C(C(x)) = C(x)$ (C este *idempotentă*);
  2. $x \leq C(x)$ (C este *extensivă*);
  3. dacă $x \leq y$, atunci $C(x) \leq C(y)$ (C este *izotonă*).

Operatori și sisteme de închidere

Remarcă

Orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ conține $\inf(\emptyset) = \max(A)$, așadar orice sistem de închidere pe $(A, \leq)$ este nevid.

Exemplu

- id_A este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- Funcția constantă $C : A \to A$, pentru orice $x \in A$, $C(x) := \max(A)$, este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.
- A este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.
- $\emptyset$ nu este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$.

Propoziție

Dacă M este un sistem de închidere pe $(A, \leq)$, atunci, pentru orice $x \in A$, există în $(A, \leq)$ $\min\{m \in M \mid x \leq m\} = \inf\{m \in M \mid x \leq m\}$.
Iar, dacă definim $C_M : A \to A$ prin: oricare ar fi $x \in A$,
$C_M(x) = \min\{m \in M \mid x \leq m\}$, atunci C_M este un operator de închidere pe $(A, \leq)$.

Operatori și sisteme de închidere

Propoziție

Fie $C : A \to A$ *un operator de închidere pe* $(A, \leq)$. *Atunci imaginea lui* C *este un sistem de închidere pe* $(A, \leq)$, *având ca elemente exact punctele fixe ale lui* C: $C(A) = \{x \in A \mid x = C(x)\}$. *Vom nota cu* $M_C = C(A)$.

Propoziție

Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

1. *pentru orice operator de închidere* $C : A \to A$ *pe* $(A, \leq)$, $C_{M_C} = C$;
2. *pentru orice sistem de închidere* M *pe* $(A, \leq)$, $M_{C_M} = M$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $(A, \leq)$ *și mulțimea sistemelor de închidere pe* $(A, \leq)$ *sunt în bijecție.*

Latici

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

  laticile Ore și **laticile Dedekind**,

  și apoi vom demonstra că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.
- Așadar, vom arăta că, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

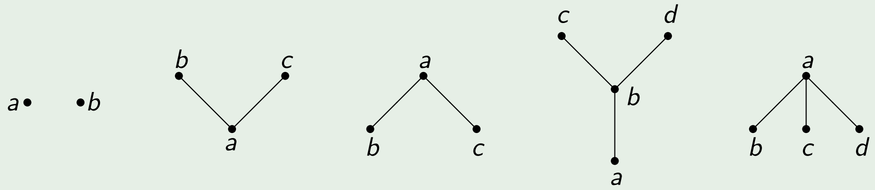
Latice Ore

Definiție

O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Exemplu (poseturi care nu sunt latici Ore)

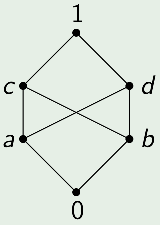
Mulțimile indicate sub aceste diagrame nu au minoranți/majoranți, așadar nu au infimum/supremum.



$\nexists \inf\{a, b\}$, $\nexists \sup\{a, b\}$ | $\nexists \sup\{b, c\}$ | $\nexists \inf\{b, c\}$ | $\nexists \sup\{c, d\}$ | $\nexists \inf\{b, c\}$, $\nexists \inf\{b, d\}$, $\nexists \inf\{c, d\}$

Poset finit și mărginit care nu este latice Ore

Exemplu



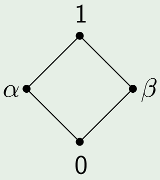
În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c \leq 1$, $d \leq 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 \leq a$, $0 \leq b$ și a și b sunt incomparabile).
Așadar, acest poset nu este o latice Ore, cu toate că este mărginit, așa cum vom vedea că sunt toate laticile finite.

Exemple de latici Ore

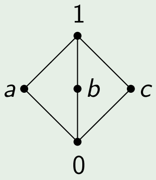
Exemplu

Următoarele poseturi sunt latici Ore, după cum se poate verifica direct:

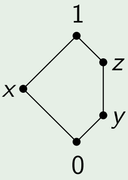
$\mathcal{L}_3$



rombul



diamantul



pentagonul

Primul dintre aceste poseturi este lanțul cu 3 elemente. Denumirile celorlalte trei poseturi se datorează formelor diagramelor lor Hasse.

Remarcă

Orice lanț este latice Ore, pentru că, dacă $(L, \leq)$ este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în $(L, \leq)$ $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Latice Dedekind

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \rightarrow L$ și $\wedge : L^2 \rightarrow L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemplu

Pentru orice mulțime T, se verifică ușor că $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este o latice Dedekind.

Lemă (amintită din cele de mai sus)

Fie $(L, \leq)$ un poset. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $x \leq y$
2. *există în L* $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în L* $\sup\{x, y\} = y$

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci, pentru orice $x, y \in L$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $x \wedge y = x$
2. $x \vee y = y$

Demonstrație: Fie $x, y \in L$.
(1) $\Rightarrow$ (2): În următorul șir de egalități, mai întâi scriem x în concordanță cu ipoteza (1), apoi aplicăm comutativitatea lui $\vee$ și cea a lui $\wedge$, și, în final, absorbția: $x \wedge y = x$ implică $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = y$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Urmărim pașii demonstrației implicației anterioare, sărind peste aplicarea comutativității, pentru că aici nu este necesară: $x \vee y = y$ implică $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$*, unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L*, definite prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$*. Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$*, unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L*, definită prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$*, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$*,* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$*.*
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$*,* $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*, și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$*,* $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*.*

Echivalența celor două definiții ale laticii

Demonstrație: (1) Ca în enunț, să considerăm o latice Ore $\mathcal{L} := (L, \leq)$, și să definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare pe mulțimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Trebuie să demonstrăm că $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
A se observa că identitățile stabilite mai jos sunt valabile în orice poset în care există infimumurile și supremumurile care apar în aceste identități.
Este evident, din definiția maximului și a minimului și din reflexivitatea unei relații de ordine, că orice submulțime a lui L cu un singur element are maxim și minim, ambele egale cu unicul său element. Așadar, pentru orice $x \in L$,
$x \vee x = \sup\{x, x\} = \sup\{x\} = \max\{x\} = x$ și
$x \wedge x = \inf\{x, x\} = \inf\{x\} = \min\{x\} = x$, ceea ce înseamnă că operațiile $\vee$ și $\wedge$ sunt idempotente.
Pentru orice $x, y \in L$, avem egalitatea de mulțimi $\{x, y\} = \{y, x\}$, prin urmare $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$, deci $\vee$ și $\wedge$ sunt comutative.
Fie $x, y, z \in L$. Vom demonstra că există în L $\sup\{x, y, z\}$ și $\sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ (știm că în L există supremumurile mulțimilor de 1 sau 2 elemente, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ există în L).
Să notăm $t := \sup\{y, z\}$ și $u := \sup\{x, t\}$.

Egalitatea $t = \sup\{y, z\}$ și definiția supremumului arată că $y \leq t$ și $z \leq t$.
Similar, faptul că $u = \sup\{x, t\}$ implică $t \leq u$.
$y \leq t$ și $t \leq u$, deci $y \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$. Analog, $z \leq t$ și $t \leq u$ implică $z \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$.
$u = \sup\{x, t\}$, prin urmare $x \leq u$.
Deci $x \leq u$, $y \leq u$, $z \leq u$, așadar u este un majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$. Deci mulțimea $\{x, y, z\}$ are cel puțin un majorant. Vom demonstra că u este cel mai mic majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, adică este supremumul acestei mulțimi.
Fie $s \in L$ un majorant arbitrar (dar fixat) al mulțimii $\{x, y, z\}$.
Întrucât s este majorant pentru $\{x, y, z\}$, avem $y \leq s$ și $z \leq s$, de unde, ținând seama de faptul că $t = \sup\{y, z\}$, obținem $t \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Dar faptul că s este majorant pentru $\{x, y, z\}$ implică și $x \leq s$.
Deci $x \leq s$, $t \leq s$ și $u = \sup\{x, t\}$, de unde obținem $u \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Am arătat că $u \leq s$ pentru orice majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, ceea ce înseamnă că $\sup\{x, y, z\}$ există în L și $\sup\{x, y, z\} = u = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.
Dar această egalitate ne dă și
$\sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = \sup\{z, \sup\{x, y\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\sup\{x, \sup\{y,z\}\} = \sup\{x,y,z\} = \sup\{\sup\{x,y\}, z\}$, deci $\sup\{x, \sup\{y,z\}\} = \sup\{\sup\{x,y\}, z\}$, așadar $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.
(A se observa că, la fel ca mai sus, se poate demonstra, "din aproape în aproape" sau prin inducție matematică, faptul că în L există supremumul oricărei mulțimi finite nevide, și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $x_1, \ldots, x_n \in L$,
$\sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases}$)

Principiul dualității pentru poseturi și identitatea $\sup\{x, \sup\{y,z\}\} = \sup\{\sup\{x,y\}, z\}$ arată că avem și $\inf\{x, \inf\{y,z\}\} = \inf\{\inf\{x,y\}, z\}$, adică $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
Am demonstrat că $\vee$ și $\wedge$ sunt asociative.
Pentru a demonstra absorbția, să considerăm $x, y \in L$. Avem de arătat că $\inf\{x, \sup\{x,y\}\} = x$. Să notăm așadar $s := \sup\{x,y\}$ și $i := \inf\{x,s\}$.
$s = \sup\{x,y\}$, deci $x \leq s$, prin urmare $i = \inf\{x,s\} = \min\{x,s\} = x$, conform unei proprietăți a poseturilor demonstrate mai sus.
Deci $i = x$, ceea ce înseamnă că $\inf\{x, \sup\{x,y\}\} = x$, adică $x \wedge (x \vee y) = x$.
Faptul că $\inf\{x, \sup\{x,y\}\} = x$ și **Principiul dualității pentru poseturi** arată că avem și $\sup\{x, \inf\{x,y\}\} = x$, adică $x \vee (x \wedge y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\vee$ și $\wedge$ satisfac și absorbția, ceea ce încheie demonstrația punctului (1): $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
(2) Ca în enunț, să considerăm o latice Dedekind $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ și să definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relație binară pe mulțimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ddacă $x \wedge y = x$, conform unei leme de mai sus). Trebuie să demonstrăm că $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din idempotența lui $\vee$, avem că, pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$, deci $x \leq x$, adică $\leq$ este reflexivă.
Fie $x, y, z \in L$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, i. e. $x \vee y = y$ și $y \vee z = z$, prin urmare, folosind aceste două egalități și asociativitatea lui $\vee$, obținem: $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, deci $x \vee z = z$, ceea ce înseamnă că $x \leq z$. Așadar $\leq$ este tranzitivă.
Acum fie $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$ și $y \leq x$, adică $x \vee y = y$ și $y \vee x = x$. Dar $x \vee y = y \vee x$ din comutativitatea lui $\vee$, deci $x = y$. Așadar $\leq$ este antisimetrică.
Am demonstrat că $\leq$ este o relație de ordine.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Fie $x, y \in L$, arbitrare, fixate. Trebuie să demonstrăm că există în $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ infimumul și supremumul mulțimii $\{x, y\}$ și că acestea sunt egale cu $x \wedge y$ și respectiv $x \vee y$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\vee$, avem că $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$. Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\vee$, obținem $y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.
Fie $l \in L$, a. î. $x \leq l$ și $y \leq l$, adică $x \vee l = l$ și $y \vee l = l$. Atunci, conform asociativității lui $\vee$, $(x \vee y) \vee l = x \vee (y \vee l) = x \vee l = l$, deci $x \vee y \leq l$.
Caracterizarea supremumului ne dă acum: $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, obținem: $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq x$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, avem: $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq y$.
Fie $l \in L$, a. î. $l \leq x$ și $l \leq y$, adică $l \wedge y = l$ și $l \wedge y = l$. Atunci, conform asociativității lui $\wedge$, $l \wedge (x \wedge y) = (l \wedge x) \wedge y = l \wedge y = l$, așadar $l \leq x \wedge y$.
Caracterizarea infimumului ne dă acum: $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2): $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore.

Echivalența celor două definiții ale laticii

(3) Fie $\mathcal{L} = (L, \leq)$ o latice Ore. Atunci $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind, unde, pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ în $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Fie $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = (L, \sqsubseteq)$. Atunci $(L, \sqsubseteq)$ este o latice Ore, cu $\sqsubseteq$ definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\sup\{x, y\} = y \in \{x, y\}$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\} = y$ (a se vedea o proprietate de mai sus) ddacă $x \leq y$. Așadar $\sqsubseteq = \leq$, deci $(L, \sqsubseteq) = (L, \leq)$, adică $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Acum fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, unde relația de ordine $\leq$ este definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$, sau, echivalent, $x \leq y$ ddacă $x \wedge y = x$, iar supremumurile și infimumurile sunt date de: pentru orice $x, y \in L$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ și $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.
Atunci $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = (L, \sqcup, \sqcap)$ este o latice Dedekind, cu $\sqcup$ și $\sqcap$ definite după cum urmează, în funcție de supremumurile și infimumurile din laticea Ore $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqcup y = \sup\{x, y\} = x \vee y$ și $x \sqcap y = \inf\{x, y\} = x \wedge y$, deci $\sqcup = \vee$ și $\sqcap = \wedge$, așadar $(L, \sqcup, \sqcap) = (L, \vee, \wedge)$, ceea ce înseamnă că $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Demonstrația teoremei este încheiată.

Notații alternative pentru latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Exemple de latici

Exemplu

Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\emptyset, (\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, pentru că $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ este unica relație binară pe $\emptyset$, iar unica operație binară pe $\emptyset$, adică funcție definită pe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ cu valori în $\emptyset$, este $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, și toate aceste componente satisfac, în mod trivial, condițiile din definiția unei latici;
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T;
- $(\mathbb{N}, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |)$;
- $(D_n, \text{cmmmc}, \text{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n;
- orice lanț $(L, \max, \min, \leq)$, de exemplu: $\mathcal{L}_n = (L_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$.

Latici

- Proprietatea următoare generalizează compunerea incluziunilor nestricte și de același sens de mulțimi cu $\cup$, precum și cu $\cap$, membru cu membru.

Propoziție (două inegalități nestricte și de același sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum și cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ și cu $\wedge$)

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.
$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.
Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = x \wedge a \wedge y \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.
Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = x \vee a \vee y \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$, deci $x \vee y \leq a \vee b$.
Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$. (Asociativitatea acestor operații ne–a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: $\vee$ și $\wedge$, $\leq$ și $\geq$, respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi** (în Cursul V), am notat $\geq := \leq^{-1}$.
Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$ *și* $\leq$ *cu* $\geq$.
Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.
De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, "prin dualitate".

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită din cursul anterior)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \rightarrow B$ o funcție. f se numește *morfism de poseturi* (sau *funcție izotonă*, sau *funcție crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ o funcție. f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

1. $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
   și
2. $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici. Întradevăr, dacă $(L, \vee, \wedge)$, $(M, \sqcup, \sqcap)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge)$ sunt latici, iar $f : L \to M$ și $g : M \to N$ sunt morfisme de latici, atunci $g \circ f : L \to N$ satisface următoarele egalități, pentru orice $a, b \in L$:

$$(g \circ f)(a \vee b) = g(f(a \vee b)) = g(f(a) \sqcup f(b)) = g(f(a)) \curlyvee g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlyvee (g \circ f)(b) \quad \text{și}$$

$$(g \circ f)(a \wedge b) = g(f(a \wedge b)) = g(f(a) \sqcap f(b)) = g(f(a)) \curlywedge g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlywedge (g \circ f)(b).$$

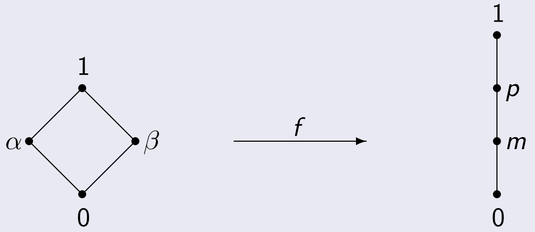
Remarcă

Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.
Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \to M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă (continuare)

În ce privește implicația reciprocă, să considerăm următorul contraexemplu, în care f este funcție izotonă, dar nu este morfism de latici, pentru că $f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p = f(\alpha) \vee f(\beta)$:



rombul: $(R, \vee, \wedge)$ $\qquad$ $\mathcal{L}_4 = (L_4, \vee, \wedge)$

x	0	α	β	1
$f(x)$	0	m	p	1

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici. Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiție

Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.
În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici este simultan un morfism de latici și o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.
f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \to L$ inversa funcției f.
Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.
Rezultă că
$f^{-1}(a \sqcup b)^{=} f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

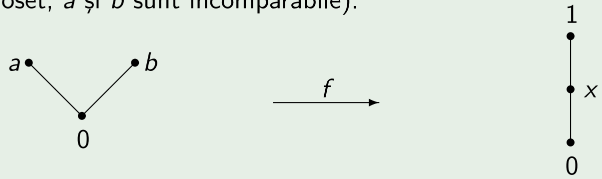
Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \nleq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \to M$ un izomorfism de ordine între poseturile $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$, adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \to L$, este, de asemenea, izotonă.
Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.
Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui $(M, \sqsubseteq)$, prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.
Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.
De aici, demonstrația poate continua în mai multe moduri.
De exemplu, să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.
Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și
$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică $a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui $(L, \leq)$.
Acum aplicăm din nou definiția supremumului, și obținem:
$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.
Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.
În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat–o, înlocuim $u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.
Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.
Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.
Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.