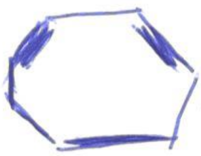
10.05.2016.

AG
CURS 11

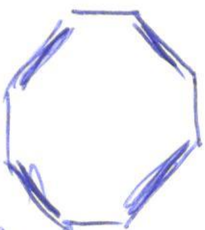
Teorema 1-factorilor a lui TUTTE

1. Def. Notații. Ex

cuplaj



M cuplaj perfect în G



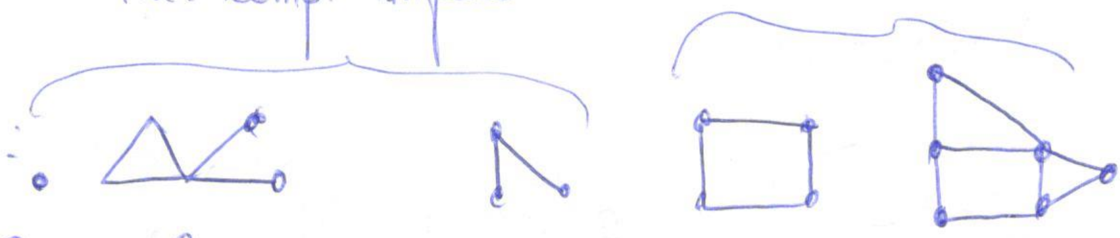
G graf simplu

$c(G) := $ nr. comp conexe

$o(G) := $ nr. comp. impare

ex:

G :



G_1. G_2 G_3 G_4 G_5

$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5$.

$c(G) = 5$ $\qquad o(G) = 3$.

2. $\underline{T_1}$ (TUTTE) Fie $G=(V,E)$ graf simplu. G conț. un cuplaj perf. $\Leftrightarrow \forall S \subsetneq V : o(G-S) \leq |S|$

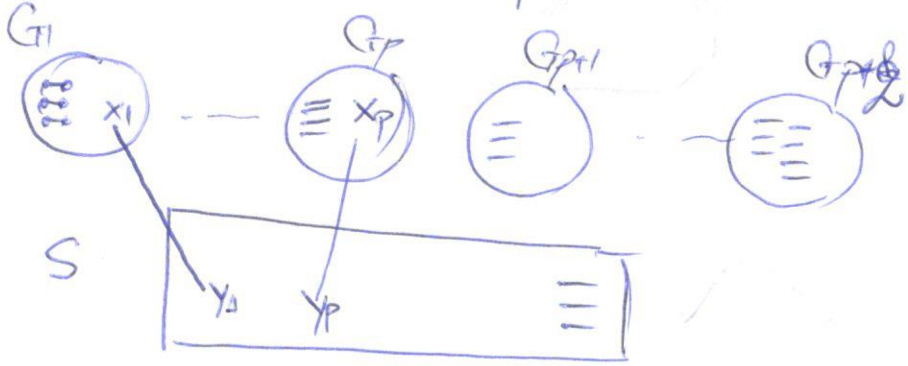
Dem

"$\Rightarrow$" Fie M cuplaj perf. în G

Fie $S \subsetneq V$

Fie $G - S = \overbrace{G_1 + \dots + G_p}^{\text{comp. con. impare}} + \overbrace{G_{p+1} + \dots + G_{p+q}}^{\text{comp. con. pare}}$

desc. în comp. conexe.



Notăm

$M_i = M \cap E_i \quad 1 \le i \le p+q$

Pt. $1 \le i \le p$: $|V_i| \equiv 1 (2) \Rightarrow \exists x_i \in V_i$: x_i M_i - nesaturat.

Deci x_i este M - saturat $\Rightarrow \exists y_i \in S$:

: $x_i y_i \in M$

$\Rightarrow |S| \ge |\{y_1, \dots y_p\}| = p = o(G-S)$

"$\Leftarrow$" $\forall S \subsetneq V$: $o(G-S) \le |S|$ (1) $\qquad n = |V|$

R.A.G nu conține un cuplaj perfect (2)

Fie G^* un graf obținut din G prin adaug. de muchii cu păstrarea proprietății de a nu avea cuplaj perfect cât este posibil

Obs 1: (1) $\underline{S = \emptyset}$ $\Rightarrow$ $o(G) \le |S| = 0$

$o(G) = 0$

$\Rightarrow |V| \equiv 0 (2)$

G^* nu este cupl. perf

$\Rightarrow |V| \equiv 0(2)$

$n =$

$\Downarrow$

$(V, V^{(2)}) \sim K_n$

K_n conține cupl. perf.

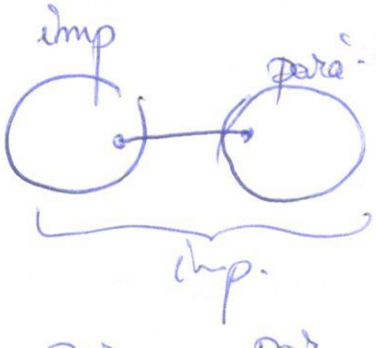
$\boxed{\text{Obs 2}}$ Prop(1) este satisfăcută și de G^*

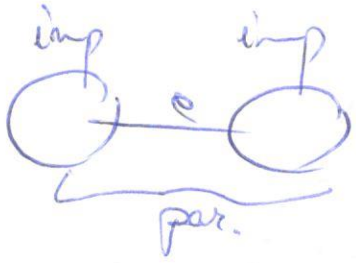
$\forall S \subsetneq V : o(G^* - S) \leq |S|$

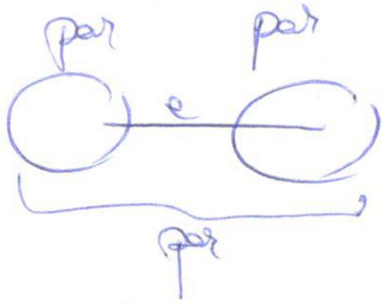
Într-adevăr.

Prin adaug. unei muchii nr. de comp. conexe se conservă sau ~~rămâne~~ scade ~~egală~~ cu 2.

G G+e







Așadar

G^* $\begin{cases} \text{nu are cupl perf.} \\ \text{este maximal cu ac. propr.} \\ \text{are prop(1)} \\ \text{nu este complet} \end{cases}$

2. Fie $S = \{v \mid v \in V \text{ cu } d_G(v) = n-1\}$

Avem $G[S]$ graf complet.

Fie $G - S = G_1 + G_2 + \dots + G_p + G_{p+1} + \dots + G_{p+q}$

Vom dem. că G_i compet $\forall\ 1 \le i \le p+q$

RA 2 $\quad \exists\ i \in \{1, \dots, p+q\}$ cu G_i necomplet

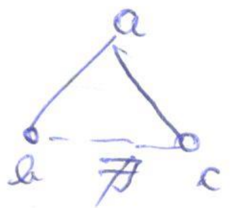
Obs 3 $|V_i| \ge 3$ deoarece : G_i necomplet

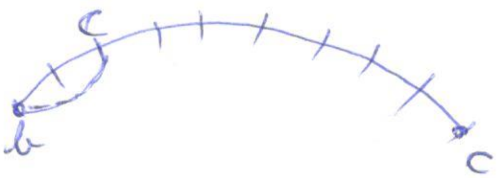
$\Downarrow$

$G_i \not\sim K_1, K_2$

Obs 4 $\exists\ a, b, c \in V_i$ cu $ab, ac \in E_i$

$bc \notin E_i$

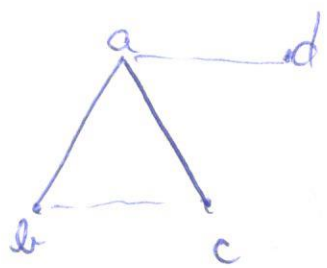




Obs 5 $\exists\ d \in V_1 \cup \dots \cup V_{p+q}$ cu $ad \notin E$

deoarece $a \notin S \Rightarrow$

$\deg(a) < n-1$.



3. $(4) \Rightarrow \begin{cases} G^* + bc \text{ conține un cuplaj perfect, } M_1; \\ G^* + ad \text{ conține un cuplaj perfect, } M_2 \end{cases}$

Am $\quad bc \in M_1 - M_2$

$ad \in M_2 - M_1 \quad \longrightarrow \{bc, ad\} \subseteq M_1 \Delta M_2$.

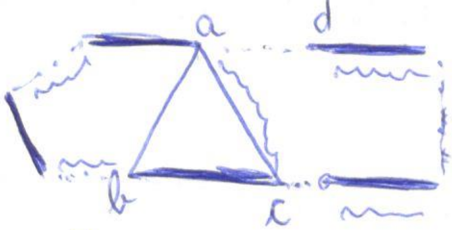
$[M_1 \Delta M_2]$ are comp. conexe, cicluri M_1, M_2 alternante.

Cazul 1: ad, bc aparțin ~~unei~~ aceleiași comp. conex, C_1 (ciclii M_1 M_2 - alt)

Cazul 2: ad, bc aparțin la comp. conexe diferite, C_2 respectiv C_3 (ciclului M_1, M_2 alternante)

Avem

Cazul 1:



M_1

M_2

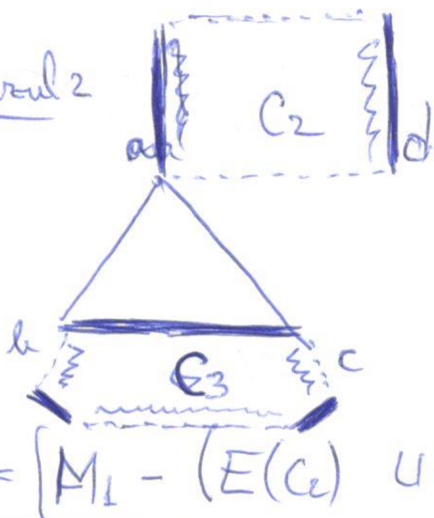
M_3

M

$$\boxed{M = [M_1 - E(C_1)] \cup \{M_1 \cap E[a \xrightarrow{C_1} c]\} \cup \cup \{M_2 \cap E[b \xrightarrow{C_1} a]\}}$$

de pe figură ?

Cazul 2

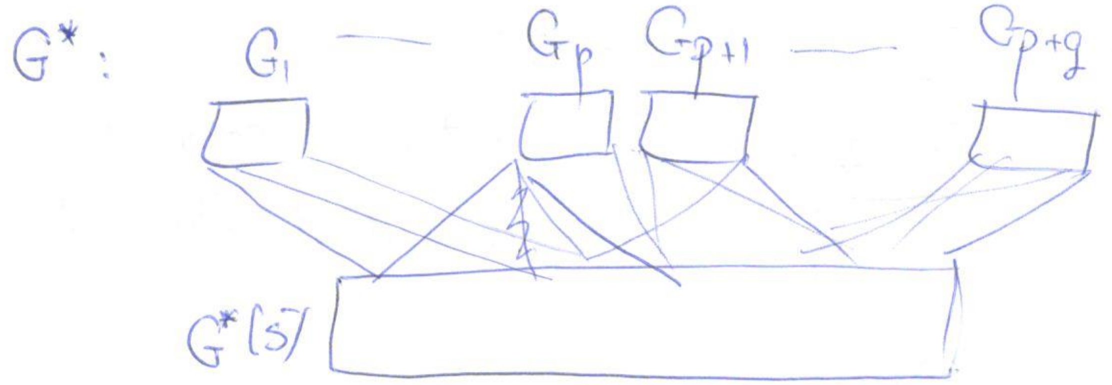


~~M~~

$$\boxed{M = [M_1 - (E(C_2) \cup E(C_3))] \cup [M_1 \cap E(C_2)] \cup [M_2 \cap E(C_3)].}$$

În ambele cazuri ~~M~~ cuplaj perfect în G^* do cu (3) deci RA_2 falsă $\Rightarrow$ G_i complet $\forall i \in \{k — p+q\}$.

4. Așadar



$\begin{cases} G_1, \dots G_{p+g} \text{ complete} \\ G^*[S] \text{ complet } \forall \text{ vf. din } V_i \text{ este conectat de orice vf. din } S \end{cases}$

5. Vom indica în G^* un cuplaj perfect M de RA_1

Pentru $i \in \{1 \dots p+g\}$ .... din M_i cupl. de cardinal. max. în G_i

<u>Obs</u> 6: Pentru $p+1 \le i \le p+g$: $|V_i| \equiv 0(2)$, G_i complet $\}$ M_i este perfect în G_i

Pentru $1 \le i \le p$: $|V_i| \equiv 1(2)$, G_i complet $\} \Rightarrow \exists^* x_i \in V_i$ M_i - nesaturat

(1) $\Leftrightarrow$ (5) $|S| \ge o(G^* - S) = p \Rightarrow \exists y_1 \dots y_p \in S$

<u>Obs</u> 7 : $|S| - p \equiv 0(2)$

ex : $|V| = n \equiv 0(2)$

$|V| = |V_1| + \dots + |V_p| + |V_{p+1}| + \dots + |V_{p+g}|$

$+ p + (|S| - p)$

$\Rightarrow$ În $G^*[S]$ există un cuplaj perfect M' care saturează vârfuri din $S - \{y_1 \dots y_p\}$

Așadar.

<u>Asadar</u>:

$M := M_1 \cup \ldots \cup M_{p+q} \cup \{x_1y_1 \ldots x_py_p\} \cup M'$

M cuplaj perf. în G^* cf. RA1

Deci RA1 falsă $\Rightarrow$ G^* conține cupl perf.

$\Rightarrow$ G cont cupl perf.