

Tema 1

Camp de probabilitate, operții cu evenimente, probabilitate conditionată și formula lui Bayes

Exercițiul 1

Fie A , B și C trei evenimente. Exprimați în funcție de A , B , C și de operațiile cu mulțimi următoarele evenimente:

- a) A singur se realizează
- b) A și C se realizează dar nu și B
- c) cele trei evenimente se produc
- d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce
- e) cel puțin două evenimente din cele trei se produc
- f) cel mult un eveniment se produce
- g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce
- h) exact două evenimente din cele trei se produc
- i) nu mai mult de două evenimente nu se realizează

Exercițiul 2

Fie Ω mulțimea tuturor cuplurilor căsătorite dintr-un oraș dat. Considerăm evenimentele următoare:

A : “bărbatul are mai mult de 40 de ani”

B : “femeia este mai tânără decât bărbatul”

C : “femeia are mai mult de 40 de ani”

Se cere:

- a) Interpretați în funcție de A , B și C evenimentul “soțul are mai mult de 40 de ani dar nu și soția sa”.
- b) Descrieți în limbaj natural evenimentele: $A \cap B \cap C^c$, $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B^c \cap C$, $A \cup B$
- c) Verificați că $A \cap C^c \subset B$

Exercițiul 3

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un câmp de probabilitate. Diferența simetrică dintre două evenimente $A, B \in \mathcal{F}$ este definită prin $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Arătați că:

- a) funcția $d(A, B) = \mathbb{P}(A \Delta B)$ este o distanță pe \mathcal{F}
- b) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \Delta B)$

Exercițiul 4

Fie $n, r > 1$ numere naturale și considerăm ecuația cu r necunoscute:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n.$$

O soluție a acestei ecuații este un r -tuplu (x_1, \dots, x_r) a cărui sumă a componentelor este n .

- Câte soluții are ecuația de mai sus, cu componente naturale strict pozitive ?
- Câte soluții are ecuația de mai sus, cu componente naturale pozitive ?

Exercițiul 5

Un administrator de spital codifică pacienții cu răni prin împușcare în funcție de asigurarea (D dacă pacientul are asigurare și N dacă nu are) și de starea acestora (b pentru bună, m pentru medie și s pentru serioasă). Considerăm experiența aleatoare care consistă în codificarea pacienților.

- Determinați Ω mulțimea spațiului stărilor acestui experiment
 - Fie A evenimentul *starea de sănătate a pacientului este serioasă*. Descrieți evenimentele elementare care îl compun pe A . Aceeași întrebare pentru evenimentul B *pacientul nu este asigurat* și pentru evenimentul $B^c \cup A$.
- Considerăm echiprobabilitatea pe Ω . Calculați probabilitățile: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ și $\mathbb{P}(B^c \cup A)$
- Aceeași întrebare pentru probabilitatea \mathbb{P}' definită prin

	b	m	s
O	0,2	0,2	0,1
N	0,1	0,3	0,1

Exercițiul 6 (Jocul de Poker)

Considerăm experimentul în care extragem o mână de 5 cărți dintr-un pachet de cărți de 52 de cărți. Să se calculeze probabilitatea ca:

- Să avem careu (patru cărți de același tip) ?
- Să avem full-house (trei cărți de un tip și două de altul) ?
- Să avem trei cărți de același tip ?
- Să avem două perechi ?
- Să avem o pereche ?

Exercițiul 7

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobilistilor. În urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilisti, s-a observat că în general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci când doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci când doza autorizată nu este depășită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit în realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sâmbăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobiliști care au băut prea mult în acest context este de 30%, determinați dacă polițistul are dreptate.

Exercițiul 8

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate și suntem interesați în găsirea probabilității evenimentului ca suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară înaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculați pentru început probabilitatea evenimentului E_n : *în primele $n - 1$ aruncări nu a apărut nici suma 5 și nici suma 7 iar în a n -a aruncare a apărut suma 5*. Concluzionați.
2. Aceeași întrebare, dar înlocuind 5 cu 2.

Exercițiul 9* ¹

Fie (A_1, A_2, \dots, A_n) , $n \geq 0$ un șir de părți ale lui Ω și \mathcal{F} algebra generată de acesta (cea mai mică algebră în sensul incluziunii care conține mulțimile $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$). Fie (c_1, \dots, c_m) un șir de numere reale și (B_1, B_2, \dots, B_m) un șir de elemente din \mathcal{F} ($m \geq 0$). Considerăm inegalitatea

$$\sum_{k=1}^m c_k \mathbb{P}(B_k) \geq 0 \quad (1)$$

unde \mathbb{P} este o măsură de probabilitate pe \mathcal{F} . Următoarele proprietăți sunt echivalente:

- a) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate \mathbb{P} pe \mathcal{F}
- b) Inegalitatea (1) este adevărată pentru toate măsurile de probabilitate \mathbb{P} pe \mathcal{F} care verifică $\mathbb{P}(A_i) = 0$ sau 1, pentru toți $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exercițiul 10*

Fie $S_0^n = 1$, $S_k^n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ și notăm cu V_n^r (respectiv cu W_n^r) probabilitatea ca exact r (respectiv cel puțin r) dintre evenimentele A_1, A_2, \dots, A_n se realizează. Arătați că:

- a) $V_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{k} S_{r+k}^n$
- b) $W_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} S_{r+k}^n$

¹Exercițiile cu * sunt suplimentare și nu sunt obligatorii