Teoreme examen
Geometrie

① Enunțați și demonstrați Th. Grassmann

Propoziție

$$\dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1\cap U_2)$$

Demonstrație

Fie $p = \dim U_1 \cap U_2$
$q = \dim U_1$
$r = \dim U_2$

$\{e_1, \dots, e_p\}$ o bază în $U_1\cap U_2$. Aceasta este, în particular, un sistem independent U_1, deci poate fi completată la o bază $\{e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_q\}$ a lui U_1. La fel ea poate fi completată la o bază $\{e_1, \dots, e_p, h_{p+1}, \dots, h_r\}$ a lui U_2.

Arătăm acum că $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_q, h_{p+1}, \dots, h_r\}$ este o bază a lui U_1+U_2.

Se consideră o combinație liniară egală cu zero a acestor vectori:

$$\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=1}^{q-p} b_j f_{p+j} + \sum_{k=1}^{r-p} b_k h_{p+k} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=1}^{q-p} b_j f_{p+j} = -\sum_{k=1}^{r-p} b_k h_{p+k}$$

Avem egalitatea unui vector din U_1 cu unul din U_2.
$\Rightarrow$ că amândoi sunt în intersecția $U_1 \cap U_2$.
În particular trebuie să existe scalari c_i a.î.

$$-\sum_{k=1}^{n-p} b_k h_{p+k} = \sum_{i=1}^{p} c_i e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} c_i e_i + \sum_{k=1}^{n-p} b_k h_{p+k} = 0$$

Cum $\{e_i, h_{p+k}\}$, $i=1,\dots,p$, $k=1,\dots,n-p$ formează o bază în B $\Rightarrow$ toți coeficienții combinației de mai sus sunt nuli, deci toți $b_k = 0$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{p} c_i e_i = 0$ care reprezintă o bază în $U_1 \Rightarrow$ <u>s.l.i</u>

Pt a demonstra că B este sistem de generatori folosim:
$x \in U_1 + U_2$ se scrie ca $x = x_1 + x_2$, $x_i \in U_i \Rightarrow$

$$x = x_1 + x_2 = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=1}^{l-p} b_j f_{p+j}\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} a'_i e_i + \sum_{k=1}^{n-p} b_k h_{p+k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (a_i + a'_i) e_i + \sum_{j=1}^{l-p} b_j f_{p+j} + \sum_{k=1}^{n-p} b_k h_{p+k} \Rightarrow \text{s.g}$$

② $\boxed{\text{Enunțați și demonstrați teorema dimensiunii pt aplic. lin.}}$

<u>Propoziție</u>

Pentru o aplicație liniară $f: U \to V$ are loc egalitatea
$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim(U)$

<u>Demonstrație</u>

Pornim cu $\{e_1, \dots, e_p\}$ bază în $\ker(f)$ și o completăm la o bază $\{e_1, \dots, e_p, g_{p+1}, \dots, g_n\}$, $n = \dim U$, a lui U.
E suficient acum să arătăm că $\{f(g_i)\}$ e o bază a lui $\operatorname{Im}(f)$.

Pt. liniar independență: $a_{p+1} f(g_{p+1}) + \dots + a_n f(g_n) = 0$
Atunci $f(a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n) = 0$, deci
$a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n \in \ker(f) \Rightarrow \exists\, b_1, \dots, b_p$ a.î.
$a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n = b_1 e_1 + \dots + b_p e_p \Rightarrow$
$a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n - b_1 e_1 - \dots - b_p e_p = 0$
$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = \overline{p+1, n} \Rightarrow$ <u>s.l.i</u>

Pt. sistem de generatori: dacă $\forall y \in \operatorname{Im}(f)$, $y = f(x)$ și
$x = a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n$
$\Rightarrow y = f(x) = f(a_1 e_1 + \dots + a_p e_p + a_{p+1} g_{p+1} + \dots + a_n g_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i f(e_i) + \sum_{i=p+1}^{n} a_i f(g_i) = \sum_{i=p+1}^{n} a_i f(g_i) \Rightarrow \{f(g_i)\} \text{ s.g}$$

③ Enunțați și demonstrați Th. Gauss

Propoziție

Pentru orice formă pătratică există un repr în care aceasta are o formă canonică.

Demonstrație

Dacă $g=0 \Rightarrow g$ are o formă canonică în orice repr.

$g \neq 0 \Rightarrow$

Fixăm un repr. Vom face inducție după nr. n al coordonatelor de care depinde expresia lui g în acest repr.

pt $n=1$ avem $g(x)=g_{11}x_1^2$ care e o formă canonică

Pp adevărat pt forme pătratice a căror expresie depinde de $n-1$ coordonate.

Fie $g(x)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_ix_j$. Putem presupune existența unui coeficient g_{ii} nenul. Dacă toți $g_{ii}=0$, $\exists$ măcar un $g_{ik}\neq 0, i\neq k$ și facem schimbarea de coordonate

$y_i=x_i+x_k$, $y_k=x_i-x_k$, $y_j=x_j$, $j\neq i,k$

care conduce, în noile coordonate, la un coeficient nenul pentru y_i^2. Mai mult, după o eventuală renumerotare a elementelor reperului, putem presupune $g_{11}\neq 0$. ~~Rescr~~ Rescriem expresia lui g grupând toți termenii care conțin coordonata x_1:

$$g(x)=g_{11}x_1^2+2g_{12}x_1x_2+\dots+2g_{1n}x_1x_n+g'(x)$$

unde g' e o formă pătratică a cărei expresie depinde doar de $n-1$ coordonate: $x_2, \dots, x_n$.

Mai departe avem:

$$g(x) = \frac{1}{g_{11}}(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n)^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{g_{1i}^2}{g_{11}} x_i^2 + g'(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}}(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n)^2 + g''(x)$$

unde g'' e o formă pătratică a cărei expresie depinde doar de $n-1$ coordonate.

Facem schimbarea de ~~reper~~ coordonate.

$$\begin{cases} y_1 = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n \\ y_i = x_i, \ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + g''(x)$$

unde g'' depinde doar de $y_2, \dots, y_n$. Aplicăm ipoteza de inducție pt g'' și o aducem la o formă canonică $g''(x) = \sum_{i=2}^{n} a_i z_i^2$ printr-o schimbare de coordonate de forma $z_i = y_i$ pt $i = 1$ și $i = n+1, \dots, n$ $z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$ pt $i = \overline{2, n}$.

$\Rightarrow$ În acest reper g are formă canonică.

4 $\boxed{\text{Enunțați și demonstrați T4. de inerție Sylvester}}$

Propoziție

Numărul termenilor pozitivi din orice formă normală a unei forme pătratice reale nu depinde de reperul canonic ales.

Demonstrație

$B = \{e_1, \dots, e_n\}$; $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ repere canonice.

Presupunem că în primul reper expresia lui g conține p termeni pozitivi, iar în al doilea p' termeni pozitivi.

Fie $p' < p$. Definim subspațiile $U = L(\{e_1, \dots, e_p, e_{r+1}, \dots, e_n\})$ și $U' = L(\{e'_{p'+1}, \dots, e'_r\})$

Evident $g(x) \geq 0$ pt $x \in U$ și $g(x) < 0$ pt $x \in U' - \{0\}$

~~T. Grassman~~ $\Rightarrow$ $\dim U + \dim U' = (p + n - r) + (r - p') = n + p - p' > n$

T. Grassman $\Rightarrow$ $U \cap U'$ conține cel puțin un vector nenul, fie el y. Dar în această situație $g(y)$ ar trebui să fie simultan pozitiv și negativ. ⨯ $\Rightarrow$ p' nu poate fi strict inferior lui p.

Analog pt $p < p'$ $\Rightarrow$ $p = p'$

(5) Propoziţia privind condiţia necesară şi suficientă de reper ca matricea să fie diagonală.

Propoziţie

Fie f şi h endomorfisme diagonalizabile. Condiţia necesară şi suficientă ca să existe un reper în care f şi h să se diagonalizeze simultan este $fh=hf$.

Demonstraţie

Se observă că proprietatea de comutare a lui f şi h revine la comutarea matricelor lor asociate în acelaşi reper. Cum orice două matrice diagonale comută, necesitatea condiţiei e clară.

Pt suficienţă, remarcăm întâi că dacă x e un vector propriu a lui f, corespunzător valorii proprii λ, atunci şi $h(x)$ e vector propriu al lui f corespunzător aceleiaşi valori proprii λ: $f(h(x)) = h(f(x)) = h(\lambda x) = \lambda h(x)$.

Fie acum $V_1, \dots, V_k$ subspaţiile proprii ale lui f. corespunzătoare valorilor proprii distincte ale lui f. Remarca anterioară ne spune că fiecare subspaţiu V_i al lui f e subspaţiu invariant al lui h (dar V_i nu e neapărat subspaţiu propriu al lui h, adică nu e asociat unei valori proprii ale lui h.)

Deci putem considera restricţiile $h|_{V_i}$ ca niste endomorfisme ale lui V_i. Acestea sunt diagonalizabile

Fie $B_i = \{e_{i1}, \dots, e_{ik_i}\}$ un reper în care $f|_{V_i}$ se diagonalizează. Cum toți e_{ij} sunt vectori proprii ai lui f => că ambele endomorfisme se diagonalizează în reperul obținut prin alăturarea, în ordine crescătoare după i, a reperelor B_i.

⑥ Enunțați și demonstrați teorema potrivit căreia există un reper format din vectori proprii a.î. matricea să fie diagonală.

Propoziție

Pentru un endomorfism al unui spațiu vectorial finit dimensional V_K, există un reper în care matricea sa are formă diagonală <=> toate rădăcinile polinomului său caracteristic sunt în K și multiplicitățile lor sunt egale cu dimensiunile subspațiilor proprii corespunzătoare.

Demonstrație

Fie $f \in End(V)$. Pp. că $\exists$ un reper $\{e_1, \dots, e_n\}$ în care matricea lui f ia forma diagonală $A = diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$.
În general, nu din aceasta scalare nu sunt distincte.
Notăm $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ elementele distincte de pe diagonală și cu $m_1, \dots, m_r$ nr. corespunzător de apariții. Evident trebuie ca $m_1 + \dots + m_r = n$. Se vede acum că polinomul caracteristic al lui f are forma:

$$P_f = \det(A - x I_n) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$, astfel că rădăcinile sunt $\lambda_i \in K$ cu multiplicitățile m_i, $i = 1, \dots, r$.
În particular valorile proprii ale lui f sunt λ_i, elemente din K.
Din definiția matricei asociate unui endomorfism într-un reper => $f(e_j) = \lambda_1 e_j$ pt $j = 1, \dots, m_1$,
$f(e_l) = \lambda_2 e_l$ pt $l = m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2, \dots$,

$f(e_k) = \lambda_r e_k$ pt $k = m_1+\dots+m_{r-1}+1, \dots, m_r$.

Deci V_{λ_1} conține cel puțin liniar independenți $e_1, \dots, e_{m_1}$, V_{λ_2} îi conține pe $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}$. Astfel că $\dim V_{\lambda_i} \geq m_i$. Cum $\dim V_{\lambda_i} \leq m_i \Rightarrow \dim V_{\lambda_i} = m_i$.

Reciproc, să presupunem că rădăcinile polinomului caracteristic sunt toate în K, au multiplicitățile m_i și $\dim V_{\lambda_i} = m_i$. Fie reperele $B_1 = \{e_1, \dots, e_{m_1}\}$ în V_{λ_1}, $B_2 = \{e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}\}$ în V_{λ_2}, ..., $B_r = \{e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, e_{m_{r-1}+m_r}\}$ în V_{λ_m}. Vom arăta că

$\{e_1, \dots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}, \dots, e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, e_n\}$

e un reper al lui V. Fiind în nr. de n, e suficient să probăm independența liniară a vectorilor e_j. Fie combinația liniară nulă:

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i e_i + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} a_i e_i + \dots + \sum_{i=m_{r-1}+1}^{m_r} a_i e_i = 0.$$

Să observăm că dacă notăm $f_1, \dots, f_r$ sumele parțiale obținem $f_i \in V_{\lambda_i} \Rightarrow f_i$ dacă sunt nuli, sunt independenți. Pe de altă parte e o combinație liniară a lor cu toți coeficienții egali cu 1. Ieșim din contradicție doar presupunând toți $f_i = 0$. Dar fiecare asemenea egalitate reprezintă o combinație liniară nulă a vectorilor din baza B_i, ea trebuie, deci, să fie trivială. În concluzie toți scalarii a_i sunt nuli și sistemul considerat este un reper al lui $V \Rightarrow$ matricea lui f are formă diagonală.

(7) Enunțați teorema de caracterizare a conicelor nedegenerate.

Propoziție

Orice conică nedegenerată ($\Delta \neq 0$) se poate obține prin intersecția unui con cu un plan care nu trece prin vârf.