LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul XIV

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2015–2016, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiție

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\,|_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.
În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\to$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{\ }$ și $\to$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.
Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț.

Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.

Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare (**numai una** pentru că, dacă nu se folosesc conectorii logici derivați, atunci două enunțuri coincid ddacă sunt **literal identice** ca șiruri de simboluri peste alfabetul lui $\mathcal{L}$, exceptând, eventual, folosiri diferite ale parantezelor, care nu influențează regulile de mai jos):

- (E_1) $\varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg\psi$
- (E_3) există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \to \chi$

și φ se obține într–un număr finit de pași pornind de la variabile propoziționale și aplicând cele trei reguli de mai sus.

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \to \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi)$

Semantica lui $\mathcal{L}$

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.
Faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus arată că lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.
Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.
De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei.
Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.
Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\,\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Acum fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat. Vom demonstra prin inducție după conceptul de enunț că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiția unui enunț arată că ne situăm în unul dintre aceste trei cazuri:

- (E_1) $\varphi \in V$; atunci (a) și (a_g) ne dau: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$;
- (E_2) $\varphi = \neg\,\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$; atunci (b) și (b_g) implică: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\,\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\,\psi) = g(\varphi)$;
- (E_3) $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi) = g(\chi)$; atunci (c) și (c_g) arată că: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \rightarrow \chi) = \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \rightarrow g(\chi) = g(\psi \rightarrow \chi) = g(\varphi)$.

Am demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unic cu proprietățile din enunț.

Corolar

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Imediat, din definițiile conectorilor logici derivați și proprietățile operațiilor într–o algebră Boole.

Definiție

- Spunem că un enunț φ este *adevărat într–o interpretare h* sau că *h satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$; φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Faptul că enunțul φ este adevărat într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \varphi$.
- Un enunț φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare; faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$. Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile lui* $\mathcal{L}$.
- Faptul că o mulțime Σ de enunțuri are proprietatea că toate elementele sale sunt adevărate într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \Sigma$; în acest caz, spunem că *h satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ.
- Dacă Σ este o mulțime de enunțuri cu proprietatea că există un model pentru Σ, atunci spunem că Σ *admite un model*.
- Date un enunț φ și o mulțime de enunțuri Σ, spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare h a. î. $h \vDash \Sigma$; acest lucru se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Uneori, funcția $\tilde{h}$ asociată unei interpretări h este numită tot *interpretare*. Valoarea unei interpretări într–un anumit enunț, uneori numită interpretarea acelui enunț, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obține atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziționale care apar în acel enunț. Un enunț universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunț a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale care apar în acel enunț.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** și o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită și **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevărurile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunțurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecințele sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri coincid cu consecințele semantice ale lui Σ, i. e. enunțurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunțurile care se deduc semantic din Σ.

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$)

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \vDash \varphi$.
Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară. Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Procedăm prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că φ se găsește în una dintre următoarele situații:

- (CS_1) φ este o axiomă; aici avem subcazurile:
  axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$; atunci $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi) = 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$;

axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ în $\mathcal{L}_2$,
unde $1 \rightarrow 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1;
așadar, dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \rightarrow c = 0$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = 0 \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$;
dacă $b \rightarrow c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci
$a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \rightarrow c$,
prin urmare $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, deci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1$;

axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$,
pentru că [$b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}$],
și deci [$b \rightarrow a = 1$ ddacă $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = 1$],
iar în caz contrar ambele implicații sunt 0,
pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$,

deci $\bar{a} \to \bar{b} = b \to a$, prin urmare $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (b \to a) = 1$;

- (CS_2) $\varphi \in \Sigma$; atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru că $h \vDash \Sigma$;
- (CS_3) există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$ (aceste două egalități pentru valori ale lui $\tilde{h}$ reprezintă **ipoteza de inducție**); atunci $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Demonstrația implicației directe este încheiată.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că $\Sigma \vDash \varphi$.
Presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$. Atunci $\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1$ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$.
Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1$ în $E/_{\sim_\Sigma}$ și $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq d(1) = 1$, deci $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq 1 (=$ funcția constantă $1)$ în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.

Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.
Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$. Folosim definiția lui $\tilde{h}$.

- (E_1) dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\hat{\alpha}^\Sigma)) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;
- (E_2) dacă $\alpha = \neg\beta$, pentru un $\beta \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\hat{\beta}^\Sigma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\neg\beta}^{\Sigma})(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;

Semantica lui $\mathcal{L}$

- (E_3) dacă $\alpha = \beta \to \gamma$, pentru $\beta, \gamma \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^{\Sigma})(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma}^{\Sigma})(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \to \gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta}^{\Sigma})(x) \to d(\hat{\gamma}^{\Sigma})(x) = (d(\hat{\beta}^{\Sigma}) \to d(\hat{\gamma}^{\Sigma}))(x) = d(\hat{\beta}^{\Sigma} \to_{\Sigma} \hat{\gamma}^{\Sigma})(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma}^{\Sigma})(x) = d(\hat{\alpha}^{\Sigma})(x)$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. Așadar, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^{\Sigma})(x)$.
În particular, pentru $\alpha := \varphi$, $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$.
Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x)$.
Cine este $\hat{\sigma}^{\Sigma}$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_{\Sigma}$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci și $\Sigma \vdash \sigma$, $\hat{\sigma}^{\Sigma} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \to \tau$ și $\Sigma \vdash \tau \to \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau$ și $\Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \hat{\sigma}^{\Sigma}$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_{\Sigma} \sigma$, deci $\hat{\sigma}^{\Sigma} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$ (funcția constantă 1 aplicată în x).
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$)

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Remarcă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$)

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg\,\varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\,\varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg\,\varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg\,\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Notă

A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în $\mathcal{L}_2$, cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, obținerea **Teoremei de completitudine** prin raționamentul de mai sus efectuat pe cazul particular $\Sigma = \emptyset$, folosind algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$ asociată lui $\mathcal{L}$, din care, apoi, se obține **Teorema de completitudine tare**. A se vedea, în aceleași materiale bibliografice, și rezultatele următoare scrise în cazul particular $\Sigma = \emptyset$. Mai mult despre legătura dintre aceste teoreme în lecția despre **sisteme deductive** și **mulțimi consistente** de mai jos.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ și orice $\Sigma \subseteq E$ a. î. $h \vDash \Sigma$, există un unic morfism boolean $\overline{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\overline{h}^{\Sigma}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\overline{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\overline{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\overline{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean. De exemplu, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \hat{\psi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. La fel se demonstrează comutarea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ cu celelalte operații de algebră Boole.

Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\overline{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$. Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \hat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\overline{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\overline{h} : E/_{\sim} \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim} \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
& \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

Sisteme deductive

Definiție

O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma.$$

Remarcă

Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv ddacă $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma$.

Exemplu

În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Exemplu

Mulțimea T a teoremelor formale este sistem deductiv, deoarece se demonstrează că, oricare ar fi $\varphi \in E$:

$$T \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi$$

(amintim că $\vdash \varphi$ este notația pentru: $\varphi \in T$).

Sisteme deductive

Remarcă

Mai mult, se demonstrează că T este cel mai mic sistem deductiv, deci orice sistem deductiv include pe T.

Mai precis:

Propoziție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *$T \subseteq \Sigma$ și, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ (i. e. Σ include mulțimea teoremelor formale și este închisă la* **MP***).*

Exemplu

Conform propoziției anterioare, o submulțime a lui E care nu include pe T nu este sistem deductiv.
De exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv, ceea ce se observă și din faptul că, oricare ar fi $\varphi \in E$, avem:

$$\emptyset \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi \text{ ddacă } \varphi \in T,$$

iar $\emptyset \subsetneq T$.

Sisteme deductive

Exercițiu (temă)

Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv (i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere**).

Remarcă

Afirmația din exercițiul anterior arată că, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, există cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, și acesta este egal cu intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri. Se notează cu $D(\Sigma)$, și se numește *sistemul deductiv generat de* Σ, intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Sisteme deductive

Remarcă

Cele de mai sus arată că:

- pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ;
- $D : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ este un **operator de închidere**, adică, pentru orice $\Sigma, \Delta \subseteq E$:
  1. $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
  2. $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
  3. $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

În plus:

Exercițiu (temă)

Operatorul de închidere D este *finitar*, adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:

$$D(\Sigma) = \bigcup_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \infty}} D(\Gamma).$$

Mulțimi consistente

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Următorul rezultat arată că mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții.

Propoziție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Atunci sunt echivalente:

1. *Σ este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$;*
3. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg \varphi$;*
4. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$;*
5. *pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$.*

Mulțimi consistente

Corolar

Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg\,\varphi$;
2. $\Sigma \cup \{\neg\,\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Exemplu

- $\emptyset$ este consistentă (conform propoziției anterioare și **principiului noncontradicției:** nu există $\varphi \in E$, astfel încât $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\,\varphi$);
- E este inconsistentă, în mod trivial.

Mulțimi consistente

Definiție

Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziție

Orice mulțime consistentă este inclusă într–o mulțime consistentă maximală.

Demonstrația acestei propoziții folosește **Lema lui Zorn**.

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Remarcă

Dacă Σ este o mulțime consistentă, atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ este o mulțime consistentă.

Propoziție

Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *dacă $\varphi, \psi \in E$, astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$; mai precis: pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$];*
3. *oricare ar fi $\varphi \in E$, avem: $\varphi \in \Sigma$ sau $\neg\varphi \in \Sigma$; mai precis, oricare ar fi $\varphi \in E$, au loc:*
    - *$\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$;*
    - *$\varphi \notin \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \in \Sigma$;*
4. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\neg\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$].*

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Spunem că Σ *admite un model* ddacă există o interpretare h cu $h \vDash \Sigma$. O astfel de interpretare se numește *model pentru* Σ.

Propoziție

1. *Orice mulțime consistentă admite un model.*
2. *Orice mulțime care admite un model este consistentă (**temă**).*

Corolar

Mulțimile consistente coincid cu mulțimile care admit modele.

Notă

A se vedea, în cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia cursului, cum se obține **Teorema de completitudine tare** din **Teorema de completitudine**, folosind faptul că orice mulțime consistentă admite un model. De asemenea, a se vedea, în această carte, demonstrațiile pentru toate rezultatele de mai sus.

Rezoluția în calculul propozițional clasic

Pentru această secțiune a cursului, se poate consulta cartea următoare:

- G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*
- traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.

Opțional, se poate studia, din cartea aceasta, rezoluția pentru calculul cu predicate, care stă la baza implementării limbajului Prolog.

FNC și FND

Definiție

- Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:
$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observație

Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Existența FNC și FND pentru orice enunț

Amintesc definiția relației de echivalență $\sim = \sim_{\emptyset}$ pe E, relație care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Folosind definiția lui $\sim$, **TC**, definiția adevărurilor semantice, compatibilitatea oricărei interpretări cu conectorii logici și o proprietate valabilă în orice algebră Boole, obținem:

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele echivalențe:
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\,(\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \to L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Propoziție

Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Punerea unui enunț în FNC

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:**

$$\alpha \to \beta \sim \neg\,\alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\,\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\,\beta \vee \alpha)$$

- **idempotența lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

- **asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Remarcă (continuare)

- **principiul dublei negații:**
$$\neg\neg\alpha \sim \alpha$$
- **legile lui de Morgan:**
$$\neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta \text{ și } \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$
- **absorbția:**
$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$
- **legile de distributivitate:**
$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$
- **proprietățile:**
$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

Referitor la tabele semantice

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga E:

Notație

Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

1. $V(p) = \{p\}$
2. $V(\neg\,\varphi) = V(\varphi)$
3. $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunț φ, ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Satisfiabilitate

Definiție

Fie $M \subseteq E$ și $\varphi \in E$.

- Un *model pentru* M este o interpretare care satisface pe M (i. e. o $h : V \to L_2$ cu $h \vDash M$).
- M se zice *satisfiabilă* ddacă admite un model (i. e. ddacă există $h : V \to L_2$ cu $h \vDash M$).
- φ se zice *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă (i. e. ddacă există $h : V \to L_2$ cu $h \vDash \varphi$).

Să ne amintim următoarea:

Propoziție

O mulțime de enunțuri este satisfiabilă ddacă este consistentă.

Remarcă

Este imediat, din caracterizarea pentru $\sim$ de mai sus, că, dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabilă ddacă ψ e satisfiabilă.

Definiție

Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Corolar

Orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Lemă

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Deducție semantică versus satisfiabilitate

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ *și* $\Gamma \subseteq E$.
Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil*

În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\vDash \psi$
2. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil*

Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil, sau există* $k \in \mathbb{N}^*$ *și* $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ *astfel încât* $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil*

Problema satisfiabilității

Problemă

Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat corect și complet pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Clauze și mulțimi de clauze

Definiție

- O *clauză* este o mulțime finită de literali ($\{L_1, \ldots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\square$ (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.
- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \ldots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și $C_1, \ldots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă fiecare clauză din componența ei este satisfiabilă.

Satisfiabilitate pentru (mulțimi de) clauze

Remarcă

Sunt imediate următoarele proprietăți:

- o mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

Rezoluția

Propoziție

Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

1. *dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă;*
2. *$C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;*
3. *dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile;*
4. *dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;*
5. *dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabile;*
6. *dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar $C \cup \{p\}$ și $D \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (**regula rezoluției**):*

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}$$

Demonstrații prin rezoluție

Notă

Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Notă

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Remarcă

- Dacă într–o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.

- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*)

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;

$S_1 := S$; $i := 1$;

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;
$U_i := \emptyset$;

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$,
atunci $U_i := \{C_0 \setminus \{\neg v_i\}, C_1 \setminus \{v_i\} \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)\,(p, \neg\, p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
atunci OUTPUT: S *e satisfiabilă*;
altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
atunci OUTPUT: S *nu e satisfiabilă*;
altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Teorema Davis–Putnam

Propoziție

Cu notațiile din algoritmul DP, au loc:

1. *pentru fiecare* i, $V(S_{i+1}) \subsetneq V(S_i)$, *așadar algoritmul DP se termină după cel mult* $|V(S)|$ *execuții ale pașilor* $1-4$, *cu* $S_{i+1} = \emptyset$ *sau* $\square \in S_{i+1}$*;*
2. *pentru fiecare* i, S_i *e satisfiabilă ddacă* S_{i+1} *e satisfiabilă, așadar OUTPUT–ul algorimului DP este corect.*

Corolar (Teorema Davis–Putnam)

Algoritmul DP este corect și complet.

Teoremă

Fie S *o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. S *nu e satisfiabilă;*
2. *există o derivare prin rezoluție a lui* $\square$ *din* S.

Corectitudinea regulii rezoluției

Notație

Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.

Corolar

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \varphi$;
2. $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarcă

În concluzie, regula rezoluției este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic.

Calculul clasic cu predicate

- În a doua parte a acestui curs vom studia **logica clasică a predicatelor**.
- **Predicatele** se mai numesc **propoziții cu variabile**.
- **Exemplu de predicat:** "x este un număr prim" este un predicat cu variabila x; acest predicat nu are o valoare de adevăr; pentru a obține din el un enunț cu valoare de adevăr, trebuie să–i dăm valori variabilei x.
- Variabilei x i se indică un domeniu al valorilor posibile, de exemplu $\mathbb{N}$. Se dorește ca, prin înlocuirea lui x din acest predicat cu o valoare arbitrară din acest domeniu, să se obțină o propoziție adevărată sau falsă.
- Înlocuind în acest predicat pe $x := 2 \in \mathbb{N}$, se obține propoziția adevărată "2 este un număr prim", iar înlocuind $x := 4 \in \mathbb{N}$, se obține propoziția falsă "4 este un număr prim".
- Dacă desemnăm pe $\mathbb{N}$ ca domeniu al valorilor pentru variabila x din predicatul de mai sus, atunci putem să aplicăm un cuantificator acestei variabile, obținând, astfel, tot un enunț cu valoare de adevăr: propoziția $(\forall\, x \in \mathbb{N})$ (x este un număr prim) este falsă, în timp ce propoziția $(\exists\, x \in \mathbb{N})$ (x este un număr prim) este adevărată. De fapt, în enunțuri cuantificate, vom considera domeniul valorilor variabilelor stabilit de la început, și nu–l vom mai preciza după variabilele cuantificate ("$\in \mathbb{N}$").

În ce fel de structuri algebrice pot lua valori variabilele?

- Așadar, pentru a exprima matematic modul de lucru cu predicate, avem nevoie nu numai de noțiunea de propoziție cu sau fără variabile și de conectori logici, ci și de un domeniu al valorilor pentru variabilele care apar în predicate (i. e. în propozițiile cu variabile).
- Pentru a descrie sistemul formal al calculului cu predicate clasic, vom avea nevoie de noțiunea de **structură de ordinul I**, reprezentând un anumit gen de structuri algebrice. Variabilele vor fi considerate ca luând valori în diverse **structuri de ordinul I**, și **clasa structurilor de ordinul I de un anumit tip** va avea asociată propria ei logică clasică cu predicate (îi vom asocia un limbaj, apoi un sistem logic bazat pe acel limbaj).
- Intuitiv, **structurile de ordinul I** sunt structuri algebrice care posedă o mulțime suport și operații, relații și constante (operații zeroare) pe această mulțime suport, i. e. operații și relații care acționează (numai) asupra elementelor mulțimii suport.
- Când, într–o structură algebrică, există operații sau relații care acționează asupra submulțimilor mulțimii suport, i. e. asupra unor mulțimi de elemente din mulțimea suport, atunci spunem că structura respectivă este o **structură de ordinul II**. În același mod (referindu–ne la mulțimi de mulțimi de elemente ș. a. m. d.) pot fi definite **structurile de ordinul III, IV etc.**.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

O *structură de ordinul I* este o structură de forma

$$\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K}),$$

unde:

- A este o mulțime nevidă, numită *universul structurii* $\mathcal{A}$
- I, J, K sunt mulțimi oarecare de indici (care pot fi și vide)
- pentru fiecare $i \in I$, există $n_i \in \mathbb{N}^*$, a. î. $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$ (f_i este o operație n_i–ară pe A)
- pentru fiecare $j \in J$, există $m_j \in \mathbb{N}^*$, a. î. $R_j \subseteq A^{m_j}$ (R_j este o relație m_j–ară pe A)
- pentru fiecare $k \in K$, $c_k \in A$ (c_k este o constantă din A)

În general, operațiilor și relațiilor din componența lui $\mathcal{A}$ li se atașează indicele $\mathcal{A}$, pentru a le deosebi de simbolurile de operații și relații din limbajul pe care îl vom construi în continuare; astfel, structura de ordinul I de mai sus se notează, de regulă, sub forma: $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I}, (R_j^{\mathcal{A}})_{j\in J}, (c_k^{\mathcal{A}})_{k\in K})$.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Tipul sau *signatura* structurii de ordinul I $\mathcal{A}$ din definiția anterioară este tripletul de familii de numere naturale: $\tau := ((n_i)_{i\in I}; (m_j)_{j\in J}; (0)_{k\in K})$.
Orice structură de forma lui $\mathcal{A}$ de mai sus se numește *structură de ordinul I de tipul (sau signatura)* τ.

Exemplu

- Orice poset nevid este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{P} = (P, \leq)$, de tipul (signatura) $\tau_1 = (\emptyset; 2; \emptyset)$ ($\leq$ este o relație binară). **Nu orice** structură de ordinul I de signatura τ_1 este un poset.
- Orice latice nevidă este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$, de tipul (signatura) $\tau_2 = (2, 2; 2; \emptyset)$ ($\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare (i. e. de aritate 2, i. e. cu câte două argumente), iar $\leq$ este o relație binară). **Nu orice** structură de ordinul I de signatura τ_2 este o latice.
- Orice algebră Boole este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$, de tipul (signatura) $\tau_3 = (2, 2, 1; 2; 0, 0)$ ($\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare, $\bar{\ }$ este o operație unară, $\leq$ este o relație binară, iar 0 și 1 sunt constante (operații zeroare, i. e. de aritate zero, i. e. fără argumente)). **Nu orice** structură de ordinul I de signatura τ_3 este o algebră Boole.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

- Fiecărei signaturi τ a unei structuri de ordinul I (fiecărei clase de structuri de ordinul I de o anumită signatură τ) i se asociază un limbaj, numit **limbaj de ordinul I** și notat, de obicei, cu $\mathcal{L}_\tau$, în care pot fi exprimate proprietățile algebrice ale structurilor de ordinul I de signatura τ.
- Să considerăm o signatură $\tau := ((n_i)_{i \in I}; (m_j)_{j \in J}; (0)_{k \in K})$, pe care o fixăm.
- **Alfabetul limbajului de ordinul I** $\mathcal{L}_\tau$ este format din următoarele **simboluri primitive**:
  1. o mulțime infinită de **variabile**: $V = \{x, y, z, u, v, \dots\}$;
  2. **simboluri de operații**: $(f_i)_{i \in I}$; pentru fiecare $i \in I$, numărul natural nenul n_i se numește *ordinul* sau *aritatea* lui f_i;
  3. **simboluri de relații**: $(R_j)_{j \in J}$; pentru fiecare $j \in J$, numărul natural nenul m_j se numește *ordinul* sau *aritatea* lui R_j;
  4. **simboluri de constante**: $(c_k)_{k \in K}$;
  5. **simbolul de egalitate**: $\mathbf{=}$ (un semn egal îngroșat) (*a nu se confunda cu egalul simplu!*);
  6. **conectorii logici primitivi**: $\neg$ (*negația*), $\rightarrow$ (*implicația*);
  7. **cuantificatorul universal**: $\forall$ (*oricare ar fi*)
  8. paranteze: $(,), [,]$, precum și virgula.
- Pentru comoditate, vom spune uneori: "operații", "relații" și "constante" în loc de "simboluri de operații", " simboluri de relații" și " simboluri de constante", respectiv.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Termenii limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. variabilele și simbolurile de constante sunt termeni;
2. dacă f este un simbol de operație n–ară și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este un termen;
3. orice termen se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Definiție

Formulele atomice ale limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică;
2. dacă R este un simbol de relație m–ară și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_m)$ este o formulă atomică;
3. orice formulă atomică se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație

Majoritatea autorilor consideră virgula ca având semnificație implicită, subînțeleasă, în scrierea termenilor și a formulelor atomice, și nu includ virgula în limbajul $\mathcal{L}_\tau$.

Definiție

Formulele limbajului $\mathcal{L}_\tau$ se definesc, recursiv, astfel:

1. formulele atomice sunt formule;
2. dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă;
3. dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \rightarrow \psi$ este o formulă;
4. dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\varphi$ este o formulă;
5. orice formulă se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Notație

Se notează cu $Form(\mathcal{L}_\tau)$ mulțimea formulelor limbajului $\mathcal{L}_\tau$.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație

Și aici ne vom întâlni cu **inducția după un concept**, care va putea fi privită, ca și până acum, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție obișnuită după un număr natural (dat de numărul de pași necesari pentru a obține acel concept printr–o recursie).
De exemplu, inducția după termeni sau formule ne asigură de faptul că mulțimile variabilelor sunt definite pentru toți termenii, respectiv toate formulele, prin recursiile de mai jos.

Notație

Introducem abrevierile: pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x:

- **conectorii logici derivați** $\vee$ (*disjuncția*), $\wedge$ (*conjuncția*) și $\leftrightarrow$ (*echivalența*) se definesc astfel:
  $\varphi \vee \psi := \neg \varphi \rightarrow \psi$
  $\varphi \wedge \psi := \neg (\varphi \rightarrow \neg \psi)$
  $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- **cuantificatorul existențial** $\exists$ (*există*) se definește astfel:
  $\exists x \varphi := \neg \forall x \neg \varphi$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație (convenție privind scrierea conectorilor logici, a cuantificatorilor și a simbolului de egalitate)

- $\neg, \forall, \exists$ vor avea prioritate mai mare;
- $\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, =$ vor avea prioritate mai mică.

Notație (mulțimile din această notație vor fi definite recursiv mai jos)

Pentru orice termen t și orice formulă φ, notăm:

- $V(t) :=$ mulțimea variabilelor termenului t
- $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor *libere* ale formulei φ

Definiție

Pentru orice termen t:

- dacă $t = x$, unde x este o variabilă, atunci $V(t) := \{x\}$
- dacă $t = c$, unde c este o constantă, atunci $V(t) := \emptyset$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol de operație n–ară și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $V(t) := \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Pentru orice formulă φ:

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, unde t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := V(t_1) \cup V(t_2)$
- dacă $\varphi = R(t_1, \ldots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m–ară și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := \bigcup_{i=1}^{m} V(t_i)$
- dacă $\varphi = \neg\, \psi$, pentru o formulă ψ, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi)$
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x, atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \setminus \{x\}$

Remarcă

Este imediat, din definiția anterioară și definiția conectorilor logici derivați și a cuantificatorului existențial, că, pentru orice formule ψ, χ și orice variabilă x:

- $FV(\psi \vee \chi) = FV(\psi \wedge \chi) = FV(\psi \leftrightarrow \chi) = FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- $FV(\exists x \psi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Pentru orice variabilă x și orice formulă φ:

- dacă $x \in FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă liberă a lui* φ;
- dacă $x \notin FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă legată a lui* φ;
- dacă $FV(\varphi) = \emptyset$ (i. e. φ nu are variabile libere), atunci φ se numește *enunț*.

Exemplu

- În formula $\exists x(x^2 = x)$, x este variabilă legată. Această formulă este un enunț.
- În formula $\forall y \forall z(z \cdot x \leq y \cdot z)$, x este variabilă liberă.

Notație (cum specificăm că nu avem alte variabile libere)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, \ldots, x_n$ variabile.
Dacă t este un termen cu $V(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, atunci vom nota $t(x_1, \ldots, x_n)$.
Dacă φ este o formulă cu $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, atunci vom nota $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație (diferența dintre tipurile de variabile, intuitiv)

- **Variabilele libere** sunt variabilele care nu intră sub incidența unui cuantificator, variabilele cărora "avem libertatea de a le da valori".
- **Variabilele legate** sunt variabilele care intră sub incidența unui cuantificator, deci sunt destinate parcurgerii unei întregi mulțimi de valori.

Definiție

Fie x o variabilă, $\varphi(x)$ o formulă și t un termen.
Formula obținută din φ prin *substituția lui x cu t* se notează cu $\varphi(t)$ și se definește astfel:

- fiecare $y \in V(t)$ se înlocuiește cu o variabilă $v \notin V(t)$ care nu apare în $\varphi(x)$, în toate aparițiile *legate* ale lui y în $\varphi(x)$;
- apoi se înlocuiește x cu t.

Exemplu

Fie variabilele x, y, z, formula $\varphi(x) := \exists y(x < y)$ și termenul $t := y + z$.
Atunci $\varphi(t)$ se obține astfel:

- $\varphi(x) = \exists y(x < y)$ se înlocuiește cu $\exists v(x < v)$;
- prin urmare, $\varphi(t) = \exists v(y + z < v)$.

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Axiomele calculului cu predicate clasic: pentru φ, ψ, χ formule arbitrare, t termen arbitrar, n, i numere naturale nenule arbitrare și $x, y, y_1, \ldots, y_n, v_1, \ldots, v_n$ variabile arbitrare:

- axiomele calculului propozițional:
  (G_1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  (G_2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  (G_3) $(\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- *regula* $(\rightarrow \forall)$:
  (G_4) $\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$
- o regulă privind substituțiile:
  (G_5) $\forall x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \rightarrow \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)$
- *axiomele egalității*:
  (G_6) $x{=}x$
  (G_7)
  $(x{=}y) \rightarrow (t(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n){=}t(v_1, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n))$
  (G_8)
  $(x{=}y) \rightarrow (\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \ldots, v_n){=}\varphi(v_1, \ldots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \ldots, v_n))$

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notație

Faptul că o formulă φ este *teoremă (formală) (adevăr sintactic) a(l) lui* $\mathcal{L}_\tau$ se notează cu $\vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

1. Orice axiomă e teoremă formală a lui $\mathcal{L}_\tau$.
2. Pentru orice formule φ, ψ, $\dfrac{\vdash \psi, \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$ (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
3. Pentru orice formulă φ și orice variabilă x, $\dfrac{\vdash \varphi}{\vdash \forall x \varphi}$ (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
4. Orice teoremă formală se obține prin aplicarea regulilor (1), (2) și (3) de un număr finit de ori.

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notație

Fie Σ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}_\tau$. Faptul că o formulă φ *se deduce (formal) din ipotezele* Σ (φ *este consecință sintactică a mulțimii de ipoteze* Σ) se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

Fie Σ o mulțime de formule ale lui $\mathcal{L}_\tau$.

1. Orice axiomă a lui $\mathcal{L}_\tau$ se deduce formal din Σ.
2. $\Sigma \vdash \varphi$, oricare ar fi $\varphi \in \Sigma$.
3. Pentru orice formule φ, ψ, $\dfrac{\Sigma \vdash \psi, \Sigma \vdash \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
4. Pentru orice formulă φ și orice variabilă x, $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \forall x \varphi}$ (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
5. Orice consecință sintactică a lui Σ se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Remarcă

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

$$\emptyset \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice mulțime de formule Σ, orice enunț φ și orice formulă ψ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

- Fie $\mathcal{A}$ o structură de ordinul I de signatură τ.
- Fixăm pe $\mathcal{A}$ pentru cele ce urmează.
- A va fi universul structurii $\mathcal{A}$ (mulțimea ei suport).
- Pentru fiecare simbol de operație f, fiecare simbol de relație R și fiecare simbol de constantă c din signatura τ, notăm cu $f^{\mathcal{A}}$, respectiv $R^{\mathcal{A}}$, respectiv $c^{\mathcal{A}}$ operația, respectiv relația, respectiv constanta corespunzătoare din $\mathcal{A}$.

Definiție

O *interpretare* (sau *evaluare*, sau *semantică*) a limbajului $\mathcal{L}_\tau$ în structura $\mathcal{A}$ este o funcție $s : V \to A$.
Fiecare variabilă $x \in V$ este "interpretată" prin elementul $s(x) \in A$.

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice termen t, definim recursiv elementul $t^{\mathcal{A}}(s) \in A$, ce reprezintă *interpretarea lui t în $\mathcal{A}$*:

- dacă $t = x$, cu x variabilă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := s(x)$
- dacă $t = c$, cu c constantă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol de funcție n–ară, iar $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(s))$

Notație

Pentru orice interpretare $s : V \to A$, orice variabilă x și orice element $a \in A$, notăm cu $s[\frac{x}{a}] : V \to A$ interpretarea definită prin: oricare ar fi $v \in V$,

$$s[\tfrac{x}{a}](v) := \begin{cases} a, & \text{dacă } v = x, \\ s(v), & \text{dacă } v \neq x. \end{cases}$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice formulă φ, *valoarea de adevăr a lui φ în interpretarea s* este un element din algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$, notat cu $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ sau $||\varphi(s)||$, și definit, recursiv, astfel:

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, pentru doi termeni t_1, t_2, atunci
$$||\varphi(s)|| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) = t_2^{\mathcal{A}}(s), \\ 0, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) \neq t_2^{\mathcal{A}}(s) \end{cases}$$
- dacă $\varphi = R(t_1, \ldots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m–ară, iar $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci
$$||\varphi(s)|| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \notin R^{\mathcal{A}} \end{cases}$$
- dacă $\varphi = \neg\psi$, pentru o formulă ψ, atunci $||\varphi(s)|| := \overline{||\psi(s)||}$ în $\mathcal{L}_2$
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ, atunci $||\varphi(s)|| := ||\psi(s)|| \rightarrow ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x, atunci $||\varphi(s)|| := \bigwedge_{a \in A} ||\psi(s[\tfrac{x}{a}])||$ în $\mathcal{L}_2$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Remarcă

Este imediat că, pentru orice interpretare $s : V \to A$, orice formule ψ, χ și orice variabilă x, au loc egalitățile:

- $||(\psi \vee \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \vee ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\psi \wedge \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \wedge ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\psi \leftrightarrow \chi)(s)|| = ||\psi(s)|| \leftrightarrow ||\chi(s)||$ în $\mathcal{L}_2$
- $||(\exists x\psi)(s)|| = \bigvee\limits_{a \in A} ||\psi(s[\substack{x \\ a}])||$ în $\mathcal{L}_2$

Lemă

Fie $s_1, s_2 : V \to A$ două interpretări. Atunci, pentru orice termen t, are loc implicația: $s_1 |_{V(t)} = s_2 |_{V(t)} \Rightarrow t^{\mathcal{A}}(s_1) = t^{\mathcal{A}}(s_2)$.

Propoziție

Fie $s_1, s_2 : V \to A$ două interpretări. Atunci, pentru orice formulă φ, are loc implicația: $s_1 |_{FV(\varphi)} = s_2 |_{FV(\varphi)} \Rightarrow ||\varphi(s_1)|| = ||\varphi(s_2)||$.

Corolar

Dacă φ este un enunț, atunci $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ nu depinde de interpretarea $s : V \to A$.

Notație

Corolarul anterior ne permite să notăm, pentru orice enunț φ și orice interpretare $s : V \to A$, $||\varphi(s)||_{\mathcal{A}}$ cu $||\varphi||_{\mathcal{A}}$ sau $||\varphi||$.

Definiție

Pentru orice enunț φ, notăm:

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \text{ ddacă } ||\varphi||_{\mathcal{A}} = 1.$$

În acest caz, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* φ sau φ *este adevărat în* $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$ *este model pentru* φ.
Pentru orice mulțime Γ de enunțuri, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* Γ sau că $\mathcal{A}$ *este model pentru* Γ ddacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$. Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \vDash \Gamma$.

Semantica logicii clasice a predicatelor

Remarcă

Este imediat, din definiția mulțimii variabilelor libere ale unei formule, că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este o formulă, atunci $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este un enunț.

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice variabile $x_1, \ldots, x_n$ și orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, notăm:

$$\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ ddacă } \mathcal{A} \vDash \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

În acest caz, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sau $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *este adevărată în* $\mathcal{A}$ sau $\mathcal{A}$ *este model pentru* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Pentru orice mulțime Σ de formule, spunem că $\mathcal{A}$ *satisface* Σ sau că $\mathcal{A}$ *este model pentru* Σ ddacă $\mathcal{A}$ este model pentru fiecare formulă din Σ. Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \vDash \Sigma$.

Remarcă

$\mathcal{A} \vDash \emptyset$.

- Renunțăm la fixarea structurii $\mathcal{A}$ (**nu** și la fixarea signaturii τ).

Definiție

Dacă φ este un enunț, atunci spunem că φ este *universal adevărat (adevăr semantic, tautologie)* ddacă $\mathcal{A} \vDash \varphi$, oricare ar fi structura de ordinul I $\mathcal{A}$ de signatură τ. Notăm acest lucru cu $\vDash \varphi$.

Definiție

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este o formulă, atunci spunem că $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este *universal adevărată (adevăr semantic, tautologie)* ddacă enunțul $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este universal adevărat. Notăm acest lucru cu $\vDash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Definiție

Pentru orice mulțime Σ de formule și orice formulă φ, spunem că φ *se deduce semantic din ipotezele* Σ sau că φ *este consecință semantică a mulțimii de ipoteze* Σ ddacă φ este adevărată în orice model $\mathcal{A}$ al lui Σ, i. e., pentru orice structură de ordinul I $\mathcal{A}$ de signatură τ, are loc implicația: $\mathcal{A} \vDash \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \vDash \varphi$. Notăm acest lucru prin: $\Sigma \vDash \varphi$.

Remarcă

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

$$\emptyset \vDash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției semantice)

Pentru orice mulțime de formule Σ, orice enunț φ și orice formulă ψ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vDash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vDash \psi.$$

Teoremă (Teorema de completitudine tare (Teorema de completitudine extinsă))

Pentru orice formulă φ și orice mulțime de formule Σ, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vDash \varphi.$$

În cazul particular în care $\Sigma = \emptyset$, din **Teorema de completitudine extinsă** obținem:

Corolar (Teorema de completitudine)

Pentru orice formulă φ, are loc echivalența:

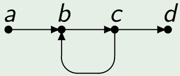
$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vDash \varphi.$$

Exercițiu

Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate clasic. Fie signatura $\tau = (1; 2; \emptyset)$ și structura de ordinul I de această signatură $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, unde $A = \{a, b, c, d\}$ este o mulțime cu 4 elemente, iar funcția $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ și relația binară $R^{\mathcal{A}}$ pe A vor fi notate respectiv cu f și R, și sunt definite prin: $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$ (vezi tabelul de mai jos) și $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\} \subset A^2$ (vezi reprezentarea grafică de mai jos). Să se calculeze valorile de adevăr ale enunțurilor: $\exists x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ și $\exists x\, \forall y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$.

x	a	b	c	d
$f(x)$	b	c	d	a

R :



Rezolvare: Amintim că, pentru orice $t, u \in A$:

$$||R(t,u)|| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t,u) \in R, \\ 0, & \text{dacă } (t,u) \notin R. \end{cases}$$

Valoarea de adevăr a primului enunț este:

$$||\exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))|| =$$

$$\bigvee_{t \in A} (||R(t, f(t))|| \wedge ||R(f(t), t)||) = 1,$$

pentru că:

$$||R(b, f(b))|| \wedge ||R(f(b), b)|| = ||R(b, c)|| \wedge ||R(c, b)|| = 1 \wedge 1 = 1.$$

Al doilea enunț are valoarea de adevăr:

$$||\exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))|| =$$

$$\bigvee_{t \in A} \bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(t)))|| \vee ||R(f(t), u)||) =$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(a)))||\vee||R(f(a),u)||)\right)\vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(b)))||\vee||R(f(b),u)||)\right)\vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(c)))||\vee||R(f(c),u)||)\right)\vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A}(||R(u,f(f(d)))||\vee||R(f(d),u)||)\right)=$$

$$0\vee 0\vee 0\vee 0=0,$$

pentru că:

$$||R(a,f(f(a)))||\vee||R(f(a),a)||=||R(a,c)||\vee||R(b,a)||=0\vee 0=0,$$

deci $\bigwedge\limits_{u\in A}(||R(u,f(f(a)))||\vee||R(f(a),u)||)=0$;

Semantica logicii clasice a predicatelor

$$||R(a, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), a)|| = ||R(a, d)|| \vee ||R(c, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u \in A}(||R(u, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), u)||) = 0$;

$$||R(a, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), a)|| = ||R(a, a)|| \vee ||R(d, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u \in A}(||R(u, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), u)||) = 0$;

$$||R(d, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), d)|| = ||R(d, b)|| \vee ||R(a, d)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u \in A}(||R(u, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), u)||) = 0$.

Observație

Recomand cărțile de G. Georgescu din bibliografia din Cursul I, precum și alte lucrări din acea listă, pentru studiul **logicii clasice a predicatelor**. În aceste materiale bibliografice se găsesc mai multe rezultate decât cele enumerate mai sus, precum și demonstrații pentru toate aceste rezultate.

Teorii deductive Moisil

Observație

- **Teoriile deductive, introduse de matematicianul român Grigore C. Moisil,** sunt o construcție matematică ce generalizează, cuprinde toate sistemele logice.
- Pentru studiul **teoriilor deductive**, recomand cursul tipărit de bazele informaticii al Profesorului Virgil–Emil Căzănescu, indicat în bibliografia din Cursul I.

Definiție

O *teorie deductivă* este o pereche $T = (F, R)$, unde:

- F este o mulțime nevidă, ale cărei elemente se numesc *fraze (ale lui T);*
- $F^+ := \{f_1 f_2 \ldots f_n \mid n \in \mathbb{N}^*, f_1, f_2, \ldots, f_n \in F\}$ este mulțimea succesiunilor finite și nevide de fraze; elementele lui F^+ se numesc *texte*; dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, atunci n se numește *lungimea textului $f_1 f_2 \ldots f_n$;*
- se consideră $F \subseteq F^+$: frazele coincid cu textele de lungime 1;
- $R \subseteq F^+$; elementele lui R se numesc *reguli (ale lui T).*

Vom păstra notațiile din definiția anterioară până la sfârșitul acestui curs.

Teorii deductive Moisil

Notație

- O regulă de lungime mai mare sau egală cu 2, $f_1 f_2 \ldots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F$, se mai notează sub forma $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \rightarrow f$.
- O regulă de lungime 1, f, cu $f \in F$, se mai notează sub forma $\emptyset \rightarrow f$.

Definiție

- Regulile de lungime mai mare sau egală cu 2 se numesc *reguli de deducție (ale lui T)*.
- Regulile de lungime 1 se numesc *axiome (ale lui T)*. Vom nota cu A mulțimea axiomelor lui T.

Remarcă

Conform definiției de mai sus, are loc: $A = F \cap R$.

Observație

Exemplificăm mai jos pentru calculul propozițional clasic.
În mod similar, calculul cu predicate clasic poate fi descris ca teorie deductivă.

Teorii deductive Moisil

Exemplu

Calculul propozițional clasic este o teorie deductivă $T = (F, R)$, unde $F = E$ este mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic, iar R este formată din:

- o mulțime infinită de axiome, anume mulțimea regulilor $\emptyset \to \varphi$, cu $\varphi \in E$, φ enunț de una dintre formele (A_1), (A_2), (A_3) ($\to$ este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive);
- o mulțime infinită de reguli de deducție (toate de lungime 3), corespunzătoare lui (MP), anume mulțimea $\{\{\varphi, \varphi \to \psi\} \to \psi \mid \varphi, \psi \in E = F\}$ ($\to$ din interiorul acoladelor interioare este conectorul logic numit *implicație* al calculului propozițional clasic, în timp ce $\to$ din exteriorul acoladelor interioare este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive).

Definiție

Se numește *demonstrație (în teoria deductivă T)* un text $f_1 f_2 \ldots f_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, cu proprietatea că: pentru orice $i \in \overline{1, n}$, există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, i-1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \to f_i \in R$.

Ca și în calculul propozițional clasic și calculul cu predicate clasic:

Remarcă

Orice demonstrație începe cu o axiomă, i. e.: dacă $f_1 f_2 \ldots f_n$ este o demonstrație, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, atunci $f_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \emptyset \to f_1 \in R$ (desigur, axiomă). Acest fapt rezultă din transcrierea definiției anterioare pentru cazul $i = 1$.

Notație

Dacă $\alpha = f_1 f_2 \ldots f_n, \beta = g_1 g_2 \ldots g_p \in F^+$, cu $n, p \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n, g_1, g_2, \ldots, g_p \in F$, atunci notăm: $\alpha\beta := f_1 f_2 \ldots f_n g_1 g_2 \ldots g_p \in F^+$.

Remarcă

Fie $\alpha, \beta \in F^+$. Atunci:

- dacă α și β sunt demonstrații, atunci $\alpha\beta$ este o demonstrație (prin inducție matematică (obișnuită), acest rezultat poate fi generalizat de la concatenarea a două demonstrații la concatenarea unui număr finit și nevid de demonstrații);
- dacă $\alpha\beta$ este o demonstrație, atunci α este o demonstrație.

Acest fapt rezultă imediat din definiția unei demonstrații.

Teorii deductive Moisil

Definiție

Se numește *teoremă (a teoriei deductive T)* o frază $f \in F$ cu proprietatea că există o demonstrație care se termină în f, i. e. o demonstrație de forma $f_1 f_2 \ldots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$.
Mulțimea teoremelor lui T se notează cu $Teor(T)$.

Remarcă

$Teor(T)$ este nevidă ddacă A este nevidă.
Într–adevăr, am observat că orice demonstrație începe cu o axiomă, și, evident, o axiomă constituie o demonstrație (de lungime 1), așadar există demonstrații ddacă există axiome, prin urmare există teoreme ddacă există axiome, în conformitate cu definiția de mai sus a teoremelor. În plus, se observă că $A \subseteq Teor(T)$.

Definiție (sisteme deductive: mulțimi de fraze închise la reguli)

O submulțime $X \subseteq F$ se zice *R–închisă* (sau *închisă la regulile din R*) ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F$, are loc:

$$\text{dacă } \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subseteq X \text{ și } \{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \to f \in R, \text{ atunci } f \in X.$$

Teorii deductive Moisil

Remarcă

Orice mulțime R–închisă include mulțimea axiomelor.
Într–adevăr, dacă X este o mulțime de fraze R–închisă, atunci $\emptyset \subseteq X$, prin urmare $A \subseteq X$, în conformitate cu definiția axiomelor și definiția mulțimilor R–închise.

Propoziție

$Teor(T)$ este cea mai mică mulțime R–închisă a lui T (desigur, în raport cu incluziunea).

Demonstrație: Pentru început, să demonstrăm că $Teor(T)$ este R–închisă, folosind definiția mulțimilor R–închise, a teoremelor și a demonstrațiilor, precum și proprietatea care afirmă că o concatenare (finită și nevidă) de demonstrații este demonstrație.
Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(T)$, iar $f \in F$, astfel încât $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \to f \in R$.
Cum $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(T)$, rezultă că, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, există o demonstrație $\alpha_i \in F^+$ pentru f_i.
Atunci $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n f$ este o demonstrație pentru f, ceea ce arată că $f \in Teor(T)$, așadar $Teor(T)$ este R–închisă.

Teorii deductive Moisil

Și acum să demonstrăm că $Teor(T)$ este cea mai mică dintre mulțimile R–închise, adică să considerăm o mulțime R–închisă X, și să arătăm că $Teor(T) \subseteq X$.
Fie $t \in Teor(T)$, arbitrară, fixată. Atunci există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_n t$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$ (demonstrație de lungime $n+1$, care se termină în t).
Avem de demonstrat că $t \in X$. Aplicăm inducție matematică după n.
Pasul de verificare: n=0: Dacă $n = 0$, atunci $t \in A$, prin urmare $t \in X$, conform remarcii precedente.
Pasul de inducție: 0,1,...,n-1,n→n+1: Fie $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că orice demonstrație de lungime cel mult $n+1$ se termină într–o frază din X, și astfel încât există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_{n+1} t$, cu $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1} \in F$.
Rezultă, conform definiției unei demonstrații, că există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, n+1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \rightarrow t \in R$. Dar, pentru fiecare $s \in \overline{1, k}$, $f_1 f_2 \ldots f_{j_s}$ este o demonstrație pentru f_{j_s}, de lungime cel mult $n+1$, așadar, conform ipotezei de inducție, rezultă că $f_{j_s} \in X$.
Prin urmare, $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \subseteq X$, iar $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \rightarrow t \in R$. Cum X este R–închisă, rezultă că $t \in X$.
Rezultă că $Teor(T) \subseteq X$, ceea ce încheie a doua parte a demonstrației propoziției.
Așadar, $Teor(T)$ este cea mai mică mulțime R–închisă.

Teorii deductive Moisil

Definiție

Se numește *consecință (pe F)* un operator de închidere *finitar* pe $\mathcal{P}(F)$, adică un operator de închidere $C : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ cu proprietatea că, oricare ar fi $X \subseteq F$,

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X, \\ |Y| < \infty}} C(Y).$$

Propoziție

Mulțimea consecințelor (pe F) este în bijecție cu $\mathcal{P}(F^+)$ (mulțimea mulțimilor de reguli).

Schița demonstrației: Bijecția căutată duce orice $R \subseteq F^+$ în consecința $C_R : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(F)$, definită prin: oricare ar fi $X \subseteq F$, $C_R(X) := Teor(F, X \cup R)$ (mulțimea teoremelor teoriei deductive cu mulțimea frazelor F și mulțimea regulilor dată de R, la care se adaugă elementele lui X ca axiome).

Inversa acestei bijecții duce orice consecință C în mulțimea $R_C :=$
$\{\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \rightarrow f \mid n \in \mathbb{N}, f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F, f \in C(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})\} \subseteq F^+$.
Se arată că prima dintre aceste funcții este corect definită, adică imaginea ei este o mulțime de consecințe. Este clar că a doua funcție este corect definită.
Apoi se arată ca aceste funcții sunt bijecții, demonstrând că sunt inverse una alteia, adică, pentru orice consecință C, $C_{R_C} = C$, și, pentru orice $R \subseteq F^+$, $R_{C_R} = R$.

Despre examen: regulament și subiecte

Notă (din regulamentul de desfășurare a examenului)

A se citi, de la sfârșitul Cursului II, regulamentul de desfășurare a examenului. Amintesc, din acest regulament:

- la examen nu veți primi subiecte (sau părți de subiecte) de teorie pură;
- examenul se va da cu materialele pe bancă, dar numai în formă scrisă de mână sau tipărită; este interzisă folosirea dispozitivelor electronice în timpul examenului, incluzând aici telefoanele mobile utilizate drept ceasuri; un cronometru al timpului de examen (2 ore) va fi figurat pe tablă;
- fiecare student va avea propriile sale materiale; nu va fi permis schimbul de materiale între doi sau mai mulți studenți, în timpul examenului.

Notă (despre subiectele de examen)

Fiecare grupă va primi, la examen, 3 sau 4 exerciții, din toată materia de la curs și de la seminar, mai puțin rezoluția propozițională, calculul cu predicate clasic și teoriile deductive. Așadar, materia de examen este formată din capitolele:

- mulțimi, funcții, relații binare, operatori de închidere;
- poseturi, latici, algebre Boole;
- logica propozițională clasică, fără rezoluția propozițională.