

## Tema 2

### Exercițiul 1

O urnă conține  $r$  bile roșii și  $b$  bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea și este întoarsă în urnă împreună cu alte  $d$  bile de aceeași culoare. Repetăm acest proces la nesfârșit. Calculați:

- Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.
- Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră știind că a doua bilă este albastră.
- Fie  $B_n$  evenimentul ca a  $n$ -a bilă extrasă să fie albastră. Arătați că  $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$ ,  $\forall n \geq 1$ .
- Probabilitatea ca prima bilă este albastră știind că următoarele  $n$  bile extrase sunt albastre. Găsiți valoarea limită a acestei probabilități.

### Exercițiul 2

O companie de asigurări asigură același număr de bărbați și de femei. Într-un an dat, probabilitatea ca un bărbat să facă accident și să aibă nevoie de asigurare este de  $\alpha$ , independent de alți ani. În mod similar, probabilitatea ca o femeie să facă accident și să beneficieze de asigurare este  $\beta$ . Să presupunem că firma de asigurări alege la intamplare o persoană.

- Care este probabilitatea ca șoferul ales să aibă nevoie de o poliță de asigurare anul acesta ?
- Care este probabilitatea ca șoferul ales să aibă nevoie de asigurare doi ani la rând ?
- Fie  $A_1, A_2$  evenimentele prin care șoferul ales are nevoie de asigurare în primul, respectiv cel de-al doilea an. Arătați că  $\mathbb{P}(A_2|A_1) \geq \mathbb{P}(A_1)$ .
- Găsiți probabilitatea ca persoana care are nevoie de asigurare să fie o femeie.

### Exercițiul 3

Fie  $X$  o variabilă aleatoare de densitate:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde  $\theta$  este un număr pozitiv dat. Determinați funcția de repartiție, media și varianța lui  $X$ .

### Exercițiul 4

Fie  $X$  o variabilă aleatoare a cărei funcție de repartiție este

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 1 \\ \ln(x), & \text{dacă } 1 < x \leq e \\ 1, & \text{dacă } e < x \end{cases}$$

Calculați  $\mathbb{E}[X]$  și  $\mathbb{V}[X]$ .

### Exercițiul 5

Fie  $X$  o variabilă aleatoare de densitate:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{dacă } x > \theta \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde  $\theta$  este un număr real dat.

- Determinați funcția de repartiție, media, varianța și mediana acestei variabile
- Fie  $X_1, \dots, X_n$  variabile aleatoare independente de aceeași lege ca și  $X$  și fie  $m_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ .  
Determinați funcția de repartiție și densitatea variabilei aleatoare  $m_n$ .

### Exercițiul 6

Fie  $X$  o variabilă aleatoare de densitate:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1}{\theta}-1}, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

unde  $\theta$  este un număr pozitiv dat. Determinați legea variabilei aleatoare  $Y = -\ln(X)$ .