EXAMEN CALCUL NUMERIC 2018

Examenul scris va fi compus din 6 subiecte punctate cu 10 puncte fiecare.

- Două subiecte teoretice din lista de subiecte teoretice;
- Două exerciții asemănătoare cu cele din lista de exerciții;
- Două probleme din lista de probleme de programare.

Listă subiecte teoretice

1. Metoda secantei.
2. Metoda poziției false.
3. Metoda Gauss fără pivotare. Metoda Gauss cu pivotare parțială.
4. Sisteme liniare inferior triunghiulare. Decompunerea LU.
5. Metoda Jacobi. Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii.
6. Metoda directă și metoda Lagrange de determinare a polinomului Lagrange P_n.
7. Interpolare cu funcții spline pătratice.
8. Diferențe finite progresive, regresive și centrale pentru $f'(x)$.
9. Formulele de cuadratură Newton-Cotes. Formula de cuadratură a trapezului. Formula de cuadratură sumată a trapezului ($n = 1$).

Obs. Prezentarea subiectelor teoretice se va face după cum urmează: se va descrie metoda, se vor enunța rezultatele generale fără demonstrații și se va descrie algoritmul.

Listă exerciții

1. Să se rezolve conform metodei Gauss fără pivotare și metodei Gauss cu pivotare parțială sistemul:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \tag{1}$$
2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
   a) Să se verifice dacă A admite descompunere (factorizare) LU;
   b) În caz afirmativ, determinați matricele L, U.
   c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b = (5, 18, 20)^T$, folosind factorizarea LU.
3. Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 14 \end{pmatrix}$
   a) Să se verifice dacă A este simetrică și pozitiv definită;
   b) În caz afirmativ, să se determine factorizarea Cholesky;

   c) Să se rezolve sistemul $Ax = b, b = (10, 6, 11)^T$, folosind descompunerea LL^T.
4. Să se studieze aplicabilitatea metodelor în cazul următoarelor matrice:
   a) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0,04 \\ 0 & 0,02 & 1 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi;
   b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante;
   c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ - Metodele Jacobi și Gauss - Seidel relaxate.
5. Să se afle polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$, conform metodelor Lagrange și Newton cu diferențe divizate, a funcției $f(x) = lnx$ relativ la diviziunea $(1, e, e^2)$.
6. Să se afle funcția de interpolare spline liniară și spline pătratică S pentru funcția $f(x) = lnx$ relativ la diviziunea $(1, e, e^2)$.

Listă probleme de programare

1. Fie ecuația $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$.
   a) Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] =$ **MetBisectie**(f, a, b, ε).
   b) Într-un fișier script să se construiască în Matlab graficul funcției $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$. Să se calculeze soluția aproximativă x_{aprox} cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$, apelând procedura **MetBisectie** pentru fiecare interval în parte: 1. $[0, 1]$; 2. $[1; 3, 2]$; 3. $[3, 2; 4]$.
   c) Să se construiască punctele $(x_{aprox}, f(x_{aprox}))$ calculate la punctul b) în același grafic cu graficul funcției.
2. Să se construiască în Matlab procedura **GaussPivPart** conform sintaxei $[x]$ =**GaussPivPart**(A, b), procedură care returnează soluția sistemului $Ax = b$ conform metodei de eliminare Gauss cu pivotare parțială.

3. Să se construiască în Matlab $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobiR(**$A, a, \varepsilon, \sigma$**)** conform metodei Jacobi relaxată.
4. Fie următoarele date: $f(x) = lnx, n = 3, a = 1, b = e^2$.
   a) Să se construiască în Matlab procedura $y =$**MetNDD**(X, Y, x) conform algoritmului Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n. Vectorii X, Y reprezintă nodurile de interpolare, respectiv valorile funcției f în nodurile de interpolare.
   b) Să se construiască în Matlab în aceeași figură, graficele funcției f pe intervalul $[a, b]$, punctele $(X_i, Y_i), i = \overline{1, n+1}$ și polinomul P_n obținut numeric conform procedurii **MetNDD**. Se va considera diviziunea $(X_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ echidistantă. Pentru construcția graficelor funcției f și P_n, folosiți o discretizare cu 100 noduri.

5. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.
   a) Să se construiască în Matlab procedura **SplineP** având sintaxa $y =$**SplineP**(X, Y, fpa, x), conform metodei de interpolare spline pătratică. Datele de intrare: vectorul X, componentele căruia sunt nodurile de interpolare, i.e. $a = X_1 < X_2 < ... < X_{n+1} = b$; vectorul Y definit prin $Y_i = f(X_i), i = \overline{1, n+1}$; derivata funcției f în capătul din stânga a intervalului, $fpa = f'(a)$; variabila scalară $x \in [a, b]$. Datele de ieșire: Valoarea numerică y reprezentând valoarea funcției spline pătratică $S(x)$ calculată conform metodei spline pătratice.
   b) Fie datele: $f(x) = lnx,\ x \in [1, e^2];\ n = 2, 4, 10$; X - o diviziune echidistantă a intervalului $[1, e^2]$ cu $n + 1$ noduri; $Y = f(X)$. Să se construiască grafic funcția f, punctele de interpolare (X, Y) și un vector S calculat conform procedurii **SplineP**, corespunzător unei discretizări x a intervalului $[1, e^2]$ cu 100 de noduri.
   c) Într-o altă figură să se construiască grafic derivata funcției spline și derivata funcției f calculate numeric cu ajutorul funcției predefinite *diff*.

6. Fie datele: $f(x) = lnx,\ a = 1, b = e^2;\ m = 100;\ y = f(x)$.
   a) Să se creeze în Matlab procedura **DerivNum** cu sintaxa $dy =$**DerivNum**$(x, y, metoda)$. Parametrii de intrare sunt: vectorul x, reprezentând discretizarea echidistantă $x_1 < a = x_2 < \ldots < x_m = b < x_{m+1}$; vectorul y, reprezentând valoarea funcției f în x; $metoda \in \{'diferente\ finite\ progresive', 'diferente\ finite\ regresive', 'diferente\ finite\ centrale'\}$. Parametrul de ieșire este vectorul dy calculat conform Algoritmului (Derivare numerica.)
   b) Să se construiască grafic, derivata funcției f și derivata obținută numeric în baza procedurii **DerivNum** pe intervalul $[1, e^2]$.

Obs. Programele se vor scrie folosind sintaxa specifică programului Matlab. Pentru erori de sintaxă se va scădea din punctaj. Algoritmii vor fi dați în foaia de subiecte.