26.04.2016.

AG

CURS 10

Matrici dublu stochastice

1. Amintim

(T1) M $n \times n$ matrice de numere ≥ 0 cu propr. că suma elem. oricărei linii și oricărei coloane este egal cu s ($s>0$ fixat), atunci M conține o diag de card. n de elem. nenule.

$\exists$ diagonală

celulă

diag.

Obs 1. Prin permut. liniilor și/ ~~sau~~ sau coloanelor $\forall$...

2. Mărimea diag este cel mult egală cu ....

Caz particular Dacă M este $n \times n$ matr. de 0, 1 cu exact k elemente de 1 pe fiecare linie și fiecare col, atunci $\exists$ o diag. de 1 de card. n.

Matrici de permutări

$\sigma: \{1, ..., n\} \to \{1, ... n\}$ bijecție

$\sigma \longrightarrow M_\sigma$ (lui σ îi asoc o matr)

$$M_\sigma(i,j) = \begin{cases} 1, & \sigma(i) = j \\ 0, & \text{rest.} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. $p, q : \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n\}$ bijecție

$P \qquad Q$

$R = P \times Q$

$r = q \circ p$ (exercițiu)

2.

(T_2) Fie M o $n \times n$ matr. de elem ≥ 0 cu suma elem. egală cu s ($s > 0$ fixat).
pe fiecare l. și coloană

Există $c_1, c_2, c_3 \ldots c_t > 0$ și $P_1, P_2, P_3 \ldots P_t$ matr. de puteri $n \times n$. cu propr:

$$\begin{cases} M = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_t P_t \\ \boxed{c_1 + \ldots + c_t = s} \end{cases}$$

Dem:

Apl. T_1 în etape $\Rightarrow$ M conține o diag. D_1 de elem nenule.

Fie c_1 cel mai mic elem din D_1.

Fie P_1 matr. de permut. coresp. diag. D_1.

$M_1 = M - c_1 P_1$

M_1 este $n\times n$ matr. cu suma $s-c_1$ pe fiecare linie și fiecare coloană.

În plus, M_1 are 0 pe poz pe care se afla elem. c_1 al diag.

M_1 are cel puțin un 0 mai mult decât M.

Repetăm operația anterioară pt. M_1.

$$M \longrightarrow \underbrace{M_1 = M - c_1P_1}_{\text{un zero în plus}} \longrightarrow \underbrace{M_2 = M - c_1P_1 - c_2P_2}_{2\ \text{"0" în plus față de } M} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underbrace{M_3 = M - c_1P_1 - c_2P_2 - c_3P_3}_{3\ \text{de '0' în plus față de } M} \longrightarrow \dots\dots \longrightarrow M_t = M - c_1P_1 - c_2P_2 - \dots - c_tP_t$$

$$\shortparallel$$

Matr. nulă 0

Așadar

$$M = c_1P_1 + c_2P_2 + \dots + c_tP_t$$

$P_1, \dots P_t$ sunt matr. de permut.

Pe o linie ~~inițial~~ suma inițială a fost s, apoi $s-c_1$, apoi $s-c_2 \Rightarrow s-c_1-c_2-\dots-c_t=0$

Așadar $c_1+c_2+\dots+c_t = s$ $\square$

(T3) (Birkhoff – Von Neumann)

$\forall$ matr. dublustochatică M (suma elem $\forall$ lini și col $=1$) se poate exprima ca o combinație convexă de matrici de permut.

Dem: Se utilizează T_2 pt. $s=1$

T_4 Produsul a 2 matr. dublu stochastice este o matr. dublustochastică.

Dem:

Conf. T_3 $\begin{cases} M = \sum a_i P_i \\ N = \sum b_i P_i \end{cases}$ P_i - matr. permut. $\sum a_i = 1$.

$M \times N = \sum a_i b_j P_i Q_j$ — matr. de permutări conf. lemei.

$\sum a_i b_j = \sum a_i \cdot \sum b_j = 1 \cdot 1 = 1$ $\square$

3. Dreptunghi și pătrate latine

3.1. Definiție

$n \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$

D matr. cu l linii și n coloane cu prop

$\begin{cases} D(i,j) \in \{1, \dots n\} & 1 \leq i \leq l. \ (\leq n) \\ \text{pe orice linie și orice coloană toate elem. } \neq \text{ de} & 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Obs $\{M(i,1), \dots M(i,n)\} = \{1, \dots n\}$ $\forall$ $1 \leq i \leq l$.

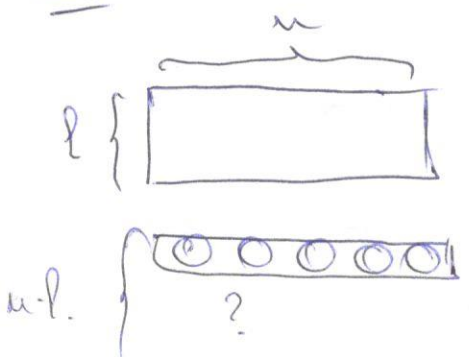
ex: $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3 4 1 2
4 1 2 3.

3.2.

T_5 Fie $n \in \mathbb{N}$ $1 \leq l \leq n$. Orice drept. latin de tip $l \times n$ se poate extinde la un pătrat latin tip $n \times n$.

Dem



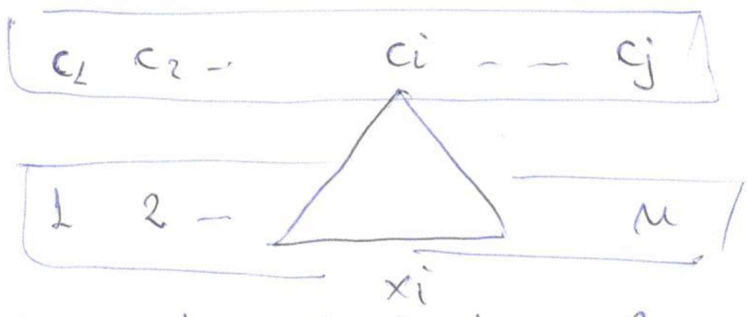
pt. linia $j \in \{1 \ldots m\}$ $X_j = \{x \mid x \in \{1 \ldots n\}$ cu x nu apare pe coloana $j\}$.

Avem $|X_j| = m - l$ $\forall\, 1 \le j \le m$

Construim graful G

$V(G) = \{c_1, c_2 \ldots c_n\} \dot\cup \{1, \ldots, n\}$ (coloane)

$E(G) = \{\{c_i, j\} \mid j \in \{1 \ldots n\}, j$ nu apart. col. $c_j\}$.



Avem $d_G(c_i) = |x_i| = m - l$ (1)

$\forall j \in \{1 \ldots n\}$ $d_G(j) = n - l$. (2)

Dem (2) $d_G(j)$ = nr. coloane în care nu se află j

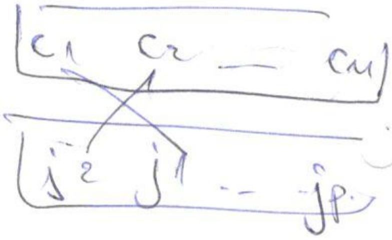
= n − nr col. în care se află j

= m − nr. de linii pe care se află j = m − l.

j se află pe fiecare linie a matricei

G (m−l) - regulat

$\Rightarrow \exists$ cup perfect M_1.



$M_1 = \{\{c_1, j_1\}, \{c_2, j_2\}$ — $c_n j_p$

Definim $D'(l+1, 1) = j_1$, $D'(l+1, 2) = j_2$ —— $D(l+1, n) = j_n$

$D'(i\,j) = D(i\,j)$ pt $1 \le i \le l$.

$1 \le j \le n$.

$\underline{D'}$ are $l+1$ linii şi n coloane.

i este dr. drept latin peste $\{1, \dots, n\}$ să conţină drept lui D.

C— procesul

$D \longrightarrow D' \longrightarrow D'' \longrightarrow$ —— $D^{(n-l)}$ patrat latin.