Logică Matematică şi Computaţională
Cursul X

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2015–2016, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Am văzut că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ (notații alternative: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$), avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Exemple de latici

Exemplu

Următoarele structuri sunt latici:

- $(\emptyset, (\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, pentru că $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ este unica relație binară pe $\emptyset$, iar unica operație binară pe $\emptyset$, adică funcție definită pe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ cu valori în $\emptyset$, este $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, și toate aceste componente satisfac, în mod trivial, condițiile din definiția unei latici;
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T;
- $(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$;
- $(D_n, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n;
- orice lanț $(L, \max, \min, \leq)$, de exemplu: $\mathcal{L}_n = (L_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$.

Alte proprietăți ale laticilor

- Proprietatea următoare generalizează compunerea incluziunilor nestricte și de același sens de mulțimi cu $\cup$, precum și cu $\cap$, membru cu membru.

Propoziție (două inegalități nestricte și de același sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum și cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ și cu $\wedge$)

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.
$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.
Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = x \wedge a \wedge y \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.
Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = x \vee a \vee y \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$, deci $x \vee y \leq a \vee b$.
Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$. (Asociativitatea acestor operații ne–a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: $\vee$ și $\wedge$, $\leq$ și $\geq$, respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.

Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.

Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$ *și* $\leq$ *cu* $\geq$.

Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.

De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate“.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită de mai sus)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se numește *morfism de poseturi* (sau *funcție izotonă*, sau *funcție crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ o funcție.
f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

1. $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
   și
2. $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici. Întradevăr, dacă $(L, \vee, \wedge)$, $(M, \sqcup, \sqcap)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge)$ sunt latici, iar $f : L \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow N$ sunt morfisme de latici, atunci $g \circ f : L \rightarrow N$ satisface următoarele egalități, pentru orice $a, b \in L$:

$$(g \circ f)(a \vee b) = g(f(a \vee b)) = g(f(a) \sqcup f(b)) = \\ g(f(a)) \curlyvee g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlyvee (g \circ f)(b) \qquad \text{și}$$

$$(g \circ f)(a \wedge b) = g(f(a \wedge b)) = g(f(a) \sqcap f(b)) = \\ g(f(a)) \curlywedge g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlywedge (g \circ f)(b).$$

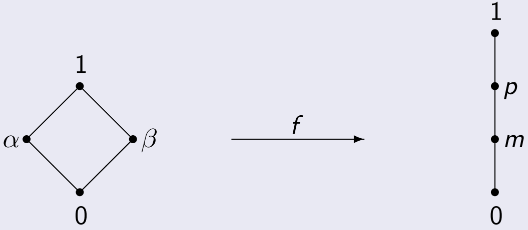
Remarcă

Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.
Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \rightarrow M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă (continuare)

În ce privește implicația reciprocă, să considerăm următorul contraexemplu, în care f este funcție izotonă, dar nu este morfism de latici, pentru că $f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p = f(\alpha) \vee f(\beta)$:



rombul: $(R, \vee, \wedge)$ $\qquad$ $\mathcal{L}_4 = (L_4, \vee, \wedge)$

x	0	α	β	1
$f(x)$	0	m	p	1

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici.
Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiție

Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.
În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici este simultan un morfism de latici și o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.
f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \rightarrow L$ inversa funcției f.
Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.
Rezultă că
$f^{-1}(a \sqcup b) = f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

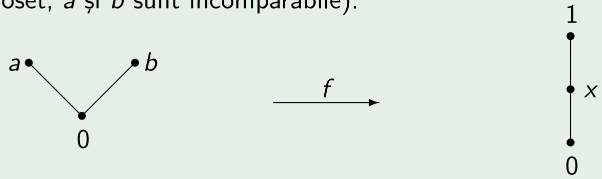
Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin $f(0) = 0$, $f(a) = x$ și $f(b) = 1$, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei, care are valorile: $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(x) = a$ și $f^{-1}(1) = b$, nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \rightarrow M$ un izomorfism de ordine între poseturile $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$, adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \rightarrow L$, este, de asemenea, izotonă.
Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.
Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui $(M, \sqsubseteq)$, prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.
Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.
De aici, demonstrația poate continua în mai multe moduri.
De exemplu, să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.
Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și
$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică $a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui $(L, \leq)$.
Acum aplicăm din nou definiția supremumului, și obținem:
$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.
Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.
În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat–o, înlocuim $u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.
Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.
Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.
Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.

Latici mărginite

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.
Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.
Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.
O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.
O latice mărginită se mai numește *latice cu* 0 *și* 1 sau *latice cu prim și ultim element*.

Observație

$\emptyset$ este latice (organizată ca într–un exemplu de mai sus), dar nu este latice mărginită, pentru că $\emptyset$ nu are minim și nici maxim.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.
Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ două latici mărginite și $f : L \rightarrow M$ o funcție. f se numește *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici și $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$.
Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.
Într–adevăr, să considerăm trei latici mărginite, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge, \triangle, \triangledown)$ și două morfisme de latici mărginite $f : L \rightarrow M$ și $g : M \rightarrow N$.
Atunci f și g sunt morfisme de latici, deci $g \circ f$ este un morfism de latici, conform unui rezultat de mai sus. În plus:

- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\perp) = \triangle$ și
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\top) = \triangledown$,

așadar $g \circ f : L \rightarrow N$ este un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.
Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiție

Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Demonstrație: Implicația directă este trivială.
Dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ sunt latici mărginite și $f : L \to M$ este un morfism bijectiv de latici mărginite, atunci:

- f este un morfism bijectiv de latici, prin urmare, conform unui rezultat de mai sus, inversa $f^{-1} : M \to L$ a lui f este un morfism de latici;
- în plus, conform definiției unui morfism de latici mărginite, $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$, deci $f^{-1}(\perp) = f^{-1}(f(0)) = 0$ și $f^{-1}(\top) = f^{-1}(f(1)) = 1$, așadar f^{-1} este un morfism de latici mărginite.

Așadar, f este un morfism de latici mărginite inversabil cu inversa morfism de latici mărginite, i. e. f este un izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarcă (temă)

Orice funcție izotonă păstrează minimurile și maximele arbitrare.
Prin urmare, orice funcție izotonă surjectivă între două poseturi mărginite

Morfisme de latici mărginite

Remarcă (temă – continuare)

păstrează minimul și maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de–al doilea poset, și duce maximul primului poset în maximul celui de–al doilea poset.

Remarcă

Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulțimii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A, dacă $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt ordini totale pe A, atunci poseturile (laticile) $(A, \leq)$ și $(A, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

Sublatici și sublatici mărginite

Definiție

Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Observație (temă)

A se deduce, din faptul că produsul direct al familiei vide de mulțimi este un singleton, faptul că operațiile zeroare, adică fără argumente, sunt constantele structurilor algebrice.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L, adică restricțiile operațiilor lui L la M:

- restricția lui $\vee$ la M este operația binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui $\wedge$ la M este operația binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite:
  - restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente);
  - restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L:

- operația $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operația $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 și 1, respectiv.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricția lui $\leq$ la M, și $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Remarcă

Orice submulțime a unei latici $\mathcal{L}$ este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatice, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din $\mathcal{L}$ ale perechilor de elemente ale sale.

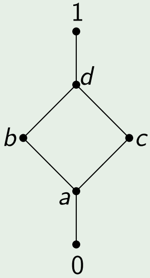
Exercițiu (temă)

Orice submulțime total ordonată a unei latici $\mathcal{L}$ este sublatice a lui $\mathcal{L}$.

Sublatici și sublatici mărginite

Exemplu

Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



Se observă, direct din această diagramă Hasse, că submulțimea $M := \{a, b, c, d\}$ este o **sublatice** a lui L, pentru că este închisă la infimumurile și supremumurile perechilor de elemente ale ei.
Evident, M este o **latice mărginită**, cu primul element a și ultimul element d.
Dar $0, 1 \notin M$ (primul și ultimul element din L nu aparțin lui M), așadar M **nu** este o **sublatice mărginită** a lui L.
Exemple de submulțimi ale lui L care **nu sunt sublatici** ale lui L: $\{b, c\}$ sau $\{0, b, c, 1\}$ etc..

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că:

1. imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
2. mai general: imaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
3. preimaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (3) este trivial.)

Latici distributive

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate*, sunt echivalente:*
(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*;*
(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*.*

Demonstrație: $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Din (d_1), comutativitatea lui $\wedge$ aplicată de două ori, absorbția, din nou (d_1), asociativitatea lui $\vee$, din nou comutativitatea lui $\wedge$, apoi absorbția, și, în final, încă o dată comutativitatea lui $\wedge$, avem: pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) = (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = x \vee (y \wedge z)$, deci $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$.
$(d_2) \Rightarrow (d_1)$: Prin dualitate, din implicația precedentă.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Latici distributive

Remarcă

A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

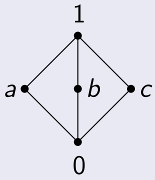
Remarcă

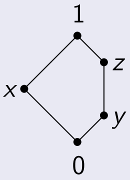
Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă. Acest fapt este cunoscut de la seminar: $\cup$ și $\cap$ sunt distributive una față de cealaltă.

Remarcă (temă)

Diamantul și pentagonul nu sunt latici distributive. Acest fapt se poate verifica prin considerarea, în fiecare dintre aceste latici, a celor trei elemente diferite de maximul și minimul laticii respective ca poset, și așezarea lor într–o anumită ordine într–o lege de distributivitate, astfel încât acea lege să nu fie satisfăcută.

(diamantul)





(pentagonul)

Latici distributive

Remarcă

Orice lanț este o latice distributivă.
Într–adevăr, dacă $(L, \leq)$ este un lanț (i. e. o mulțime total ordonată), atunci știm că $(L, \leq)$ este o latice în care, pentru orice $x, y \in L$,
$x \wedge y = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.
Atunci, considerând trei elemente arbitrare $x, y, z \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț ne asigură de existența unei ordonări între aceste elemente, de exemplu $x \leq y \leq z$; în acest caz, din definițiile lui $\vee$ and $\wedge$ de mai sus ($\vee = \max$ și $\wedge = \min$), obținem: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x = x \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Celelalte cazuri, privind alte ordonări posibile între x, y and z, se tratează similar, și, din analiza tuturor acestor cazuri, rezultă că laticea $(L, \leq)$ este distributivă.

Remarcă

Remarca anterioară arată că, de exemplu, $\mathcal{L}_n$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat), $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sunt latici distributive.

Am dat mai sus un exemplu de latice distributivă care nu este lanț: după cum știm dintr–un curs anterior, $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$ nu este lanț dacă mulțimea T are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Latici distributive

Rezultatul următor pune în evidență un alt exemplu de latice distributivă care nu este lanț.

Corolar

$(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$ *este o latice distributivă.*

Demonstrație: Acest fapt rezultă din distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \leq)$. Într–adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor prime naturale, observăm că fiecare număr natural nenul n se scrie sub forma: $n = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{e_p(n)}$, unde $e_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k | n\} \in \mathbb{N}$ pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, iar produsul anterior este finit, i. e. familia $(e_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ este *de suport finit*, adică doar un număr finit de elemente din această familie sunt nenule.

Se mai observă că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$\mathrm{cmmmc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{e_p(m), e_p(n)\}}$ și

$\mathrm{cmmdc}\{m, n\} = \prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(m), e_p(n)\}}$.

Latici distributive

Distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$ ne asigură de faptul că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și orice $p \in \mathcal{P}$,
$\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\} = \max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}$, de unde rezultă că: $\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\}} =$
$\prod\limits_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}}$, adică:
$\mathrm{cmmdc}\{x, \mathrm{cmmmc}\{y, z\}\} = \mathrm{cmmmc}\{\mathrm{cmmdc}\{x, y\}, \mathrm{cmmdc}\{x, z\}\}$, iar această egalitate este exact prima lege de distributivitate aplicată numerelor naturale nenule x, y, z.
(Dacă nu sunteți obișnuiți cu acest gen de scriere, puteți efectua produsele de mai sus numai după numerele naturale prime p care divid măcar unul dintre numerele naturale nenule x, y, z.)
A rămas de demonstrat faptul că, atunci când numărul 0 apare în prima lege de distributivitate, egalitatea obținută este satisfăcută, fapt ce poate fi arătat foarte ușor, ținând seama de identitățile: $\mathrm{cmmmc}\{0, n\} = 0$ și $\mathrm{cmmdc}\{0, n\} = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv pentru $n = 0$).

Latici distributive

Remarcă (temă)

Este evident că orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarcă (temă)

Este imediat că imaginea oricărei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă.

Propoziție (caracterizare a laticilor distributive)

O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

Notă

Demonstrația propoziției anterioare se găsește în *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*, de Sergiu Rudeanu, precum și în cele două cărți de D. Bușneag și D. Piciu din bibliografia din primul curs.
Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

Complementul unui element într–o latice mărginită

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numește *complement al lui* x.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$.

Remarcă

Este imediat faptul că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente, pentru că, dacă $a \in L$ este un complement al lui 0, atunci $a = a \vee 0 = 1$, iar, dacă $b \in L$ este un complement al lui 1, atunci $b = b \wedge 1 = 0$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Remarcă

În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

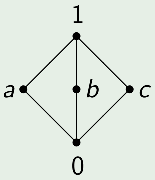
Într–adevăr, fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită și $x, a, b \in L$ a. î. a și b sunt complemente ale lui x, adică:

$$\begin{cases} x \vee a = 1 \\ x \wedge a = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \vee b = 1 \\ x \wedge b = 0 \end{cases}$$

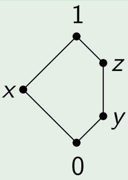
Atunci, conform relațiilor de mai sus (care dau definiția unui complement), distributivității lui L și commutativității lui $\wedge$,
$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$, deci $a = a \wedge b$, ceea ce înseamnă că $a \leq b$ (a se vedea teorema privind echivalența celor două definiții ale noțiunii de latice).
Interschimbând a și b în șirul de egalități de mai sus, obținem $b = b \wedge a$, deci $b \leq a$.
Prin urmare $a = b$, conform antisimetriei relației de ordine $\leq$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Exemplu



diamantul



pentagonul

Aceste două latici mărginite nu sunt distributive, iar acest fapt poate fi demonstrat și prin intermediul remarcii anterioare.
Într–adevăr, în diamant, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente ale celui de–al treilea.
Iar, în pentagon, y și z sunt complemente ale lui x.
Deci aceste două latici mărginite nu satisfac proprietatea de unicitate a complementului, așadar nu sunt distributive, conform remarcii de mai sus.

Latici complete

Definiție

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplu

- Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.
- Considerând $0, 1 \in \mathbb{R}$ și ordinea naturală $\leq$ pe $\mathbb{R}$ (desigur, restricționată la mulțimea suport a fiecăreia dintre cele două latici de mai jos), avem:
  1. laticea $([0,1] \cap \mathbb{Q}, \max, \min, \leq, 0, 1)$ este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\inf\{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$);
  2. laticea $((0,1), \max, \min, \leq)$ nu este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $(0,1)$ $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$).

Latici complete

Remarcă

- Orice latice completă $(L, \leq)$ este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat într–un curs anterior, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide (a se revedea cursurile anterioare).
- O latice $(L, \leq)$ este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$, ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$. Aceste echivalențe rezultă din următorul fapt, cunoscut din curs și de la seminar: în orice poset $(L, \leq)$, următoarele afirmații sunt echivalente:
  1. pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$;
  2. pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$.

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Definiție

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie arbitrară de mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Notație

Dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A, B, C, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și o identificare de indici, adică o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A \coprod (B \coprod C) = (A \coprod B) \coprod C$.

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$? Putem considera că familia de mulțimi {A,B} este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$: $\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dotplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dotplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \dotplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus: $\leq \dotplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Observație

Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într–un curs anterior.

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \dot{+} \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dot{+} \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.
Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).
În cazul sumei directe și a sumei ordinale, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \coprod B$ vizavi de mulțimile "din care provin" acestea: sunt ambele din A, ambele din B, sau unul din A și unul din B.
În cazul produsului direct, acest fapt se obține dintr–un rezultat mai general, dintr–un curs anterior, rezultat privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă** și **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

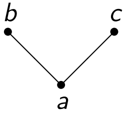
1. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
2. Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
3. Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$ sunt izomorfe.
4. Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
5. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarcă

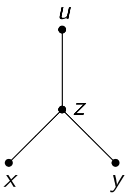
Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite**.
Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:

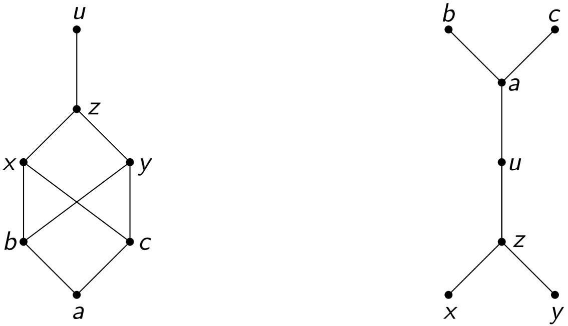


$(A, \leq)$



$(B, \sqsubseteq)$

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$, apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B:

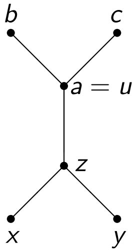


$(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq) = (A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ $\quad$ $(B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq) = (B \coprod A, \sqsubseteq \oplus \leq)$

După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ și $(B \coprod A, \sqsubseteq \oplus \leq)$, suma directă de poseturi nu este comutativă, întrucât aceste două poseturi nu sunt izomorfe.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

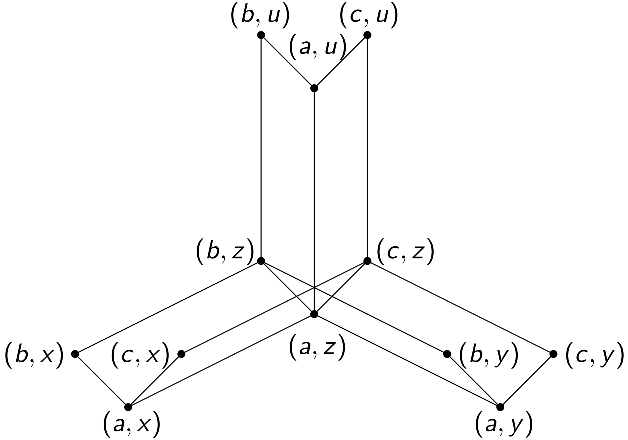
Se poate efectua suma ordinală între $(B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$, **nu și invers**. **Diagrama Hasse a sumei ordinale** $(B, \sqsubseteq) \dot{+} (A, \leq)$, se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$, se identifică maximul lui $(B, \sqsubseteq)$ cu minimul lui $(A, \leq)$, astfel obținându–se un punct comun, și cele două diagrame Hasse se unesc în acest punct comun:



După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru suma directă și suma ordinală a acestor poseturi, prima dintre ele are o muchie în plus față de cea de–a doua.

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ cu perechea formată din:
    - eticheta lui din diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$
      și
    - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β), cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ), cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$:



$$(A,\leq)\times(B,\sqsubseteq)=(A\times B,\leq\times\sqsubseteq)\cong(B\times A,\sqsubseteq\times\leq)=(B,\sqsubseteq)\times(A,\leq)$$

Se observă că produsul direct de poseturi este comutativ, adică poseturile $(A,\leq)\times(B,\sqsubseteq)=(A\times B,\leq\times\sqsubseteq)$ și $(B,\sqsubseteq)\times(A,\leq)=(B\times A,\sqsubseteq\times\leq)$ sunt izomorfe, $\varphi : A\times B\rightarrow B\times A$, pentru orice $a\in A$ și orice $b\in B$, $\varphi(a,b)=(b,a)$, fiind un izomorfism de poseturi între ele.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu

$(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2) \oplus \ldots \oplus (A_n, \leq_n)$ sau $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i)$ sau

$(A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n, \leq_1 \oplus \leq_2 \oplus \ldots \oplus \leq_n)$ sau $(\displaystyle\coprod_{i=1}^{n} A_i, \bigoplus_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul

definit, recursiv, astfel: $$\bigoplus_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i)) \oplus (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

La fel pentru suma ordinală a familiei de poseturi $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, pentru cazul în care $(A_1, \leq_1)$ are maxim $(A_n, \leq_n)$ are minim, iar $(A_2, \leq_2), \ldots, (A_{n-1}, \leq_{n-1})$ sunt poseturi mărginite.

Se pot face generalizări și la cazuri infinite.

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \ldots \times (A_n, \leq_n)$ sau $\prod_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \ldots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \prod_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\prod_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notație

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă $(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \ldots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct $(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \ldots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu $(A^n, \leq)$.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I) f(i) \in A_i\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } f(i) \leq g(i), \text{ oricare ar fi } i \in I.$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația $\leq$ definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relația de succesiune asociată lui $\leq_i$, și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relația de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I}, (\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\,[a_k <_k b_k, (\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)]\}$.

Notație

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Produsul direct al familiei vide

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*, *)\}$.
La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).
Într–adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu $\emptyset$ în definiția anterioară.
Reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$, așadar mulțimea $\prod_{i \in \emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \to \emptyset\} = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$ (unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$; a se vedea definiția unei funcții).
Așadar, pentru orice mulțime A, $A^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.
Este admisă și notația A^0 în loc de $A^{\emptyset}$.
Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

Algebre produs direct

Remarcă

După cum știm, în definițiile produsului direct (a două poseturi, al unei familii finite nevide de poseturi, al unei familii arbitrare de poseturi) se pot **înlocui poseturile** cu **mulțimi înzestrate cu relații binare arbitrare**, și se obține noțiunea de *produs direct al unor relații binare*, care este o relație binară pe mulțimea dată de produsul direct al respectivelor mulțimi.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru **structuri algebrice de același tip**, înzestrate cu anumite operații, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.
În cazul laticilor, a căror definiție o vom aminti îndată, **produsul direct al unor latici** este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și **o structură algebrică produs direct**, cu două operații binare (latice Dedekind).
Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații binare**.

Algebre produs direct

Remarcă (temă)

- Să se deducă, din faptul că produsul direct al familiei vide de mulțimi este un singleton, faptul că **operațiile zeroare (nulare, fără argumente) sunt constantele** structurilor algebrice.
- Să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p–ară (de aritate p, cu p argumente)**, unde $p \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă).
Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,

  cu *operațiile produs direct*:

- $\circ \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \circ_i \overset{\text{notație}}{=} (\circ_1, \ldots, \circ_n)$,
- $f \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notație}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,
- $c \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notație}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  și *relația binară produs direct*:

- $\rho \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i \overset{\text{notație}}{=} (\rho_1, \ldots, \rho_n)$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

Algebre produs direct

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \circ y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \circ_1 y_1, \ldots, x_n \circ_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \circ_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \circ_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I)], (h(i) \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\circ$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \circ h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \circ h)(i) = g(i) \circ_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\circ$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, $(a_i)_{i\in I} \circ (b_i)_{i\in I} := (a_i \circ_i b_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I} \in A$, $f((a_i)_{i\in I}) := (f_i(a_i))_{i\in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i\in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i\in I}\rho(b_i)_{i\in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall i \in I) a_i \in B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \circ, f, c, \rho)$, unde:

- A este un singleton: $A = \{*\}$ (a se vedea, mai sus, produsul direct al familiei vide de poseturi);
- operațiile $\circ$, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $* \circ * := *$, $f(*) := *$ și $c := *$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(*, *)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(*, *)\}$; dar ρ este reflexivă, așadar $\rho = \{(*, *)\}$.

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n, să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

Algebre Boole – definiție și notații

Definiție

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarcă

În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg\, x$).
Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{}: B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notație

O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{}$ este operația ei de complementare.

Exemple de algebre Boole

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $(\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $(\mathcal{L}_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $(\mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \rightarrow \mathcal{L}_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$:

- pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^I$, $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in \mathcal{L}_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:
  - $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
  - $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$
  - $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
  - $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$
- iar $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ dacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $(\mathcal{L}_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{L}_2$:

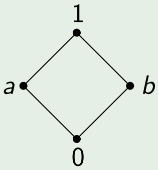
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, ..., $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 1)$, $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

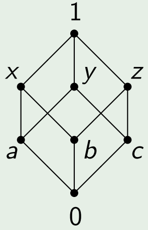
- $(0, 0) \leq (0, 1) \leq (1, 1)$,
- $(0, 0) \leq (1, 0) \leq (1, 1)$,
- $(0, 1)$ și $(1, 0)$ sunt incomparabile ($(0, 1) \nleq (1, 0)$ și $(1, 0) \nleq (0, 1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0, 1) \vee (1, 0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1, 1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Exercițiu (temă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Propoziție (temă)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Operații și operații derivate ale unei algebre Boole

Definiție

Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarcă (complementarea este autoduală (autoinversă, idempotentă))

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\bar{\bar{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\bar{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\bar{\bar{x}}$ al lui $\bar{x}$: x satisface: $\begin{cases} x \vee \bar{x} = 1 \text{ și} \\ x \wedge \bar{x} = 0, \end{cases}$ iar $\bar{\bar{x}}$ este unicul element al lui B cu proprietățile: $\begin{cases} \bar{\bar{x}} \vee \bar{x} = 1 \text{ și} \\ \bar{\bar{x}} \wedge \bar{x} = 0. \end{cases}$ Așadar $x = \bar{\bar{x}}$.

Definiția unei algebre Boole

Înainte de a trece mai departe, amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\ }$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{}$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{}, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{}$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{}$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operația $\bar{}$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

Legile lui de Morgan pentru algebre Boole arbitrare

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.
- Următoarea propoziție conține o proprietate aritmetică foarte importantă a algebrelor Boole, pe care o cunoaștem deja pentru cazul particular al algebrei Boole a părților unei mulțimi.

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$:

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: **(1)** Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$. Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că: $(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.

Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:

$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$

$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$

(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ o latice și $a, b, x, y \in L$.
Dacă $a \leq b$ și $x \leq y$, atunci: $a \vee x \leq b \vee y$ și $a \wedge x \leq b \wedge y$.
În particular (aplicând proprietatea de mai sus și reflexivitatea unei relații de ordine): dacă $a \leq b$, atunci $a \vee x \leq b \vee x$ și $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice $x, y \in B$, au loc următoarele echivalențe:

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform autodualității complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.
(3) $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat lema anterioară, definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Acum aplicăm faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$): dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$.
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și autodualitatea complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.
(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă $[a = 1$ și $b = 1]$. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă $[x \leq y$ și $y \leq x]$ ddacă $[x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1]$ ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.

Propoziție (legea de reziduație)

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, ^{-}, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B*, au loc: pentru orice elemente* $x, y \in B$, $xy = yx$ *și* $x + x = 0$ *(cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul* 2 *în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui* 0 *este* 1, 0 *fiind elementul neutru al acestui grup aditiv:* $0 = 0$*).*

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operațiile $\vee$, $\wedge$ și $\bar{}$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

- *Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operațiile $+$ și $\cdot$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ (unde am notat cu $-$ operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).

- *Aplicațiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{I}$ sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$, și, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.*