Logică Matematică şi Computaţională
Cursul IV

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2015–2016, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Relații n–are, relații binare

Definiție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulțimi. Se numește *relație n–ară* între mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$ o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Observație

Pentru $n = 1$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație unară* pe o mulțime: prin definiție, o *relație unară* pe o mulțime A este o submulțime a lui A.
Pentru $n = 2$ în definiția anterioară se obține noțiunea de *relație binară*.

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se numește *relație binară* între A și B o submulțime R a produsului direct $A \times B$.
Pentru fiecare $a \in A$ și fiecare $b \in B$, faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează cu $a\,R\,b$ și se citește: *a este în relația R cu b*.

Exemplu

Pentru orice mulțimi A și B, produsul direct $A \times B$ este o relație binară între A și B (evident, cea mai mare în sensul incluziunii dintre toate relațiile binare între A și B).

Tipuri de relații binare

Definiție (tipuri de relații binare)

Fie A și B mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i. e. R o relație binară între A și B). R se zice:

- *funcțională* ddacă: pentru orice $a \in A$ și orice $b_1, b_2 \in B$, dacă $a \, R \, b_1$ și $a \, R \, b_2$, atunci $b_1 = b_2$; o relație funcțională între A și B se mai numește *funcție parțială* de la A la B;
- *totală* ddacă: pentru orice $a \in A$, există $b \in B$, a. î. $a \, R \, b$; o relație funcțională totală între A și B se mai numește *funcție* de la A la B;
- *injectivă* ddacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ și orice $b \in B$, dacă $a_1 \, R \, b$ și $a_2 \, R \, b$, atunci $a_1 = a_2$;
- *surjectivă* ddacă, pentru orice $b \in B$, există $a \in A$, astfel încât $a \, R \, b$.

Remarcă

Definiția de mai sus a unei funcții este exact definiția din cursul al doilea, în care identificăm o funcție cu graficul ei: o funcție $f = (A, G, B)$ se identifică cu $G \subseteq A \times B$.

De asemenea, cu această identificare, noțiunea de funcție injectivă, respectiv surjectivă, respectiv bijectivă, coincide cu aceea de relație funcțională totală injectivă, respectiv surjectivă, respectiv injectivă și surjectivă.

Tipuri de relații binare

Într–adevăr:

Remarcă

Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$:

- R este o **relație funcțională (funcție parțială)** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel mult un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație totală** ddacă: pentru orice $a \in A$, există cel puțin un $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- așadar, R este o **funcție** ddacă este o **relație funcțională totală**, i. e.: pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație injectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există cel puțin un $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație injectivă și surjectivă** ddacă: pentru orice $b \in B$, există un unic $a \in A$, a. î. $a\,R\,b$;
- R este o **relație funcțională totală injectivă/surjectivă/injectivă și surjectivă** ddacă este o **funcție injectivă/surjectivă/bijectivă**, respectiv.

Diagonala unei mulțimi

Definiție

Pentru orice mulțime A,

$$\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$$

este o relație binară între A și A, numită *diagonala lui* A.

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este chiar **relația de egalitate pe** A, adică, pentru orice $a, b \in A$, avem:

$$a\, \Delta_A\, b \text{ ddacă } a = b.$$

Remarcă

Pentru orice mulțime A, Δ_A este o funcție, chiar o funcție bijectivă, anume **funcția identică a lui** A **(identitatea lui** A**)**:

$$\Delta_A = id_A : A \to A, \text{ pentru orice } a \in A, \; id_A(a) = a.$$

Operații cu relații binare

- Relațiile sunt mulțimi, așadar li se pot aplica operațiile obișnuite cu mulțimi: reuniunea, intersecția, diferența etc..
- Astfel, pentru orice mulțimi A, B și orice relații binare R și S între A și B: $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $\overline{R} := (A \times B) \setminus R$ (*complementara* lui R) sunt tot relații binare între A și B.

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, A', B' și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $R' \subseteq A' \times B'$, se definește *produsul direct* al relațiilor R și R', notat $R \times R'$, ca fiind următoarea relație binară între $A \times A'$ și $B \times B'$: $R \times R' := \{((a, a'), (b, b')) \mid a \in A, a' \in A', b \in B, b' \in B', (a, b) \in R, (a', b') \in R'\} \subseteq (A \times A') \times (B \times B')$.

Generalizare: pentru orice mulțime I, orice familii de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$ și $(B_i)_{i \in I}$ și orice familie de relații binare $(R_i)_{i \in I}$, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, se definește *produsul direct* al familiei $(R_i)_{i \in I}$, notat $\prod\limits_{i \in I} R_i$, ca fiind următoarea relație binară între $\prod\limits_{i \in I} A_i$ și $\prod\limits_{i \in I} B_i$: $\prod\limits_{i \in I} R_i := \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \mid (\forall\, i \in I)\, (a_i \in A_i, b_i \in B_i \text{ și } a_i \, R_i \, b_i)\} \subseteq \prod\limits_{i \in I} A_i \times \prod\limits_{i \in I} B_i$.

Observație

Definiția produsului direct de relații binare este diferită de definiția produsului direct de mulțimi al acelorași relații binare, adică de produsul lor direct ca mulțimi. Mulțimile obținute prin cele două tipuri de produs direct sunt în bijecție, dar nu sunt egale, dacă nu considerăm produsul direct de mulțimi ca fiind comutativ, prin asimilarea bijecției în cauză cu identitatea.

Exemplu

Dacă $R := \{(1,1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ și $S := \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, atunci:

- produsul direct al relațiilor binare R și S este: $R \times S = \{((1,0),(1,0)),((1,0),(-1,0))\} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$;
- produsul direct al mulțimilor R și S este: $R \times S = \{((1,1),(0,0)),((1,-1),(0,0))\} = \{(1,1,0,0),(1,-1,0,0)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (două scrieri alternative, dintre care este folosită, de obicei, a doua, fără paranteze redundante).

Operații cu relații binare

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă avem încă o pereche de relații binare $S \subseteq A \times B$ și $S' \subseteq A' \times B'$, atunci:

- $R \times R' = S \times S'$ ddacă $R = S$ și $R' = S'$.

În general, dacă avem încă o familie de relații binare $(S_i)_{i \in I}$, cu $S_i \subseteq A_i \times B_i$, pentru orice $i \in I$, atunci:

- $\prod\limits_{i \in I} R_i = \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă $R_i = S_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Într–adevăr, dacă ne referim la cazul general, echivalența de mai sus rezultă, prin dublă implicație, din faptul că:

- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} R_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$;
- $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ ddacă $(a_i, b_i) \in S_i$ pentru fiecare $i \in I$;

Operații cu relații binare

Remarcă (continuare)

- $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} S_i$ ddacă are loc echivalența:
  $((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i \Leftrightarrow ((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} S_i$;
- pentru fiecare $i \in I$, $R_i = S_i$ ddacă are loc echivalența:
  $(a_i, b_i) \in R_i \Leftrightarrow (a_i, b_i) \in S_i$.

Operații cu relații binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B, C și orice relații binare $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$, se definește *compunerea lui* S *cu* R ca fiind relația binară între A și C notată $S \circ R$ și definită prin:
$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, (\exists\, b \in B)\, [(a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S]\} \subseteq A \times C$.

Remarcă (temă)

Diagonala unei mulțimi este element neutru la compunere și la dreapta, și la stânga, i. e., pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.
Demonstrația folosește faptul că diagonala unei mulțimi este relația de egalitate pe acea mulțime, și este imediată.

Remarcă

Compunerea ca relații binare a două funcții coincide cu compunerea lor ca funcții. În particular, rezultatul ei este tot o funcție. Aceste fapte sunt ușor de observat.

Operații cu relații binare

Definiție

Pentru orice mulțimi A, B și orice relație binară $R \subseteq A \times B$, se definește *inversa lui* R, notată R^{-1}, ca fiind următoarea relație binară între B și A: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$. Altfel scris: prin definiție, $R^{-1} \subseteq B \times A$, a. î., pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, $b\, R^{-1}\, a$ ddacă $a\, R\, b$.

Remarcă

A se observa faptul că, pentru orice relație binară R, se definește inversa ei R^{-1}, spre deosebire de cazul inverselor de funcții, care se definesc numai pentru funcțiile bijective, această restricție provenind atât din constrângerea ca relația binară să fie funcție, cât si din constrângerea ca inversa ei să fie tot funcție (a se vedea o remarcă de mai jos, care arată că definiția funcției este exact definiția bijectivității (i. e. a injectivității și surjectivității) în oglindă).

Remarcă

Este imediat faptul că inversa ca relație a unei funcții bijective este inversa ei ca funcție (a se vedea și remarca următoare).

Operații cu relații binare

Remarcă (temă)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Atunci:

- R este injectivă ddacă R^{-1} este funcțională;
- R este surjectivă ddacă R^{-1} este totală;
- prin urmare: R este injectivă și surjectivă ddacă R^{-1} este funcție.

Remarcă

A se observa că o relație binară injectivă și surjectivă nu este neapărat o funcție (bijectivă), pentru că nu i se impune condiția de a fi funcțională, și nici cea de a fi totală.

Exercițiu (temă)

Fie A, B mulțimi și $R \subseteq A \times B$. Dacă R este injectivă, atunci:

- $R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R = \Delta_A$ ddacă R este totală.

Operații cu relații binare

Remarcă (asociativitatea compunerii de relații binare)

Fie A, B, C, D mulțimi, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ și $T \subseteq C \times D$. Atunci:

- $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Într-adevăr, $T \circ (S \circ R) = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, c \in C)\, ((a, c) \in S \circ R$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, c \in C)\, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, b \in B)\, (\exists\, c \in C)\, ((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S$ și $(c, d) \in T)\} = \{(a, d) \mid a \in A, d \in D, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R$ și $(b, d) \in T \circ S)\} = (T \circ S) \circ R$. Am aplicat faptul că doi cuantificatori de același fel comută (aici avem doi cuantificatori existențiali).

Remarcă

Fie A, B, C mulțimi, $R \subseteq A \times B$ și $S \subseteq B \times C$. Atunci:

- $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Într-adevăr, $R^{-1} \circ S^{-1} = \{(c, a) \mid c \in C, a \in A, (\exists\, b \in B)\, ((c, b) \in S^{-1}$ și $(b, a) \in R^{-1})\} = \{(c, a) \mid a \in A, c \in C, (\exists\, b \in B)\, ((a, b) \in R$ și $(b, c) \in S)\} = \{(c, a) \mid (a, c) \in S \circ R\} = (S \circ R)^{-1}$.

Operații cu relații binare

Exercițiu (temă)

Fie A, B, C și I mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $P \subseteq C \times A$, $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq A \times B$ și $T \subseteq B \times C$ relații binare, iar $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare de la A la B, i. e., pentru orice $i \in I$, $R_i \subseteq A \times B$.
Să se demonstreze că:

- $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- $R \subseteq S$ ddacă $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
- $R = S$ ddacă $R^{-1} = S^{-1}$
- **inversa comută cu reuniunea și cu intersecția:**
  1. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
  2. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

  Generalizare:
  1. $(\bigcup\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} R_i^{-1}$
  2. $(\bigcap\limits_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} R_i^{-1}$

Operații cu relații binare

Exercițiu (temă – continuare)

- **compunerea este distributivă față de reuniune, la stânga și la dreapta:**
  1. $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$
  2. $(R \cup S) \circ P = (R \circ P) \cup (S \circ P)$

  Generalizare:
  1. $T \circ (\bigcup\limits_{i \in I} R_i) = \bigcup\limits_{i \in I} (T \circ R_i)$
  2. $(\bigcup\limits_{i \in I} R_i) \circ P = \bigcup\limits_{i \in I} (R_i \circ P)$
- **compunerea nu este distributivă față de intersecție (contraexemplu pentru această distributivitate:** dacă $x \in A$, $y, z \in B$ cu $y \neq z$ și $t \in C$, iar $R := \{(x, y)\}$, $S := \{(x, z)\}$ și $T := \{(y, t), (z, t)\}$, atunci: $T \circ (R \cap S) = T \circ \emptyset = \emptyset \neq \{(x, t)\} = T \circ R = T \circ S = (T \circ R) \cap (T \circ S))$
- **compunerea (la stânga și la dreapta) păstrează incluziunile nestricte:**
  1. $R \subseteq S$ implică $T \circ R \subseteq T \circ S$
  2. $R \subseteq S$ implică $R \circ P \subseteq S \circ P$

Să ne amintim definiția puterilor unei mulțimi

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.
Amintesc definiția **produsului cartezian al familiei** $(A_i)_{i\in I}$ (numit și **produsul direct al familiei** $(A_i)_{i\in I}$):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i\in I)\,(a_i\in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i\in I)\,(f(i)\in A_i)\}.$$

Fie A o mulțime arbitrară.
Amintesc că **puterile unei mulțimi** sunt un caz particular al produsului direct, anume cazul $A_i = A$, pentru orice $i \in I$:

$$A^I = \{f \mid f : I \to A\} = \{(a_i)_{i\in I} \mid (\forall\, i\in I)\,(a_i\in A)\} = \prod_{i\in I} A.$$

Notația următoare, a *puterii a n–a a unei mulțimi A*, A^n, pentru un număr natural nenul n, corespunde cazului particular $I = \overline{1,n}$ și $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$.

Să ne amintim următoarea convenție

Notație

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A, se notează:

$$A^n := A^{\overline{1,n}} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} =$$

$$= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\, (a_i \in A)\} = \prod_{i=1}^{n} A = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}.$$

Caz particular: pentru $n = 2$: $A^2 = A \times A$.

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Relații binare pe o mulțime

- În tot restul acestui curs, când nu se va menționa altfel, A va fi o mulțime arbitrară.

Definiție

Se numește *relație binară pe A* o relație binară între A și A, i. e. o submulțime a produsului direct $A^2 = A \times A$.

Exemplu

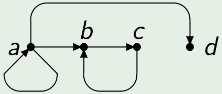
A^2 și Δ_A sunt relații binare pe A.

Remarcă

Dacă A este finită și nevidă, iar R este o relație binară pe A, atunci perechea (A, R) este un graf orientat (cu mulțimea vârfurilor A și mulțimea arcelor R), așadar relația binară R poate fi reprezentată grafic chiar prin acest graf orientat.

Exemplu

Relația binară $R = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (c, b)\}$ pe mulțimea cu exact 4 elemente $A = \{a, b, c, d\}$ poate fi reprezentată grafic astfel:



Operații cu relații binare pe o mulțime

Definiție (puterile naturale ale unei relații binare pe o mulțime)

Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$, se definește *puterea a n–a a lui* R, notată $R^n \subseteq A \times A$, recursiv, astfel:

$$\begin{cases} R^0 := \Delta_A; \\ R^{n+1} := R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Remarcă

Cum Δ_A este element neutru la compunerea de relații binare, din definiția anterioară obținem că, pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$, $R^1 = R$, pentru că:

$$R^1 = R^0 \circ R = \Delta_A \circ R = R.$$

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă

Asociativitatea compunerii de relații binare permite următoarea scriere fără paranteze pentru orice relație binară R pe A și orice număr natural n:

$$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n \text{ de } R},$$

cu **licența de scriere (convenția):**

$$R^0 = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{0 \text{ de } R} = \Delta_A.$$

Faptul că Δ_A este element neutru la compunere face posibilă această notație unitară (pentru orice n natural, inclusiv pentru 0) în următoarea remarcă.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă (comutarea și adunarea exponenților naturali la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime)

Compunerea de relații binare nu este comutativă, nici în cazul în care relațiile compuse sunt relații binare pe aceeași mulțime, în care ar avea sens comutativitatea compunerii. Știm că, nici în cazul particular al compunerii de funcții (de la o mulțime la aceeași mulțime, ca să aibă sens comutativitatea), compunerea nu este comutativă. Dar, în cazul particular al compunerii puterilor naturale (chiar întregi de același semn – vom vedea) ale unei aceleiași relații binare, are loc comutativitatea compunerii (și, în plus, adunarea exponenților). Asociativitatea compunerii de relații binare implică faptul că două puteri naturale ale aceleiași relații binare comută și se adună la compunere. Într-adevăr, pentru orice $R \subseteq A \times A$ și orice $n, k \in \mathbb{N}$, $R^n \circ R^k = \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} =$

$\underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{k \text{ de } R} \circ \underbrace{(R \circ \ldots \circ R)}_{n \text{ de } R} = R^k \circ R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n+k \text{ de } R} = R^{n+k}$ (am mutat parantezele, apoi le–am eliminat).

Vom vedea că aceste egalități sunt valabile pentru orice n, k întregi de același semn.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă

$$\Delta_A^{-1} = \Delta_A.$$

Într-adevăr, $\Delta_A^{-1} = \{(b, a) \mid a \in A, b \in A, (a, b) \in \Delta_A\} = \{(b, a) \mid a \in A, b \in A, a = b\} = \{(a, a) \mid a \in A\} = \Delta_A$.

Remarcă

Pentru orice relație binară $R \subseteq A \times A$ și orice $n \in \mathbb{N}$:

$$(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n.$$

Aplicăm inducție după $n \in \mathbb{N}$:
Pasul de verificare: Pentru $n = 0$ avem: $(R^0)^{-1} = (\Delta_A)^{-1} = \Delta_A = (R^{-1})^0$.
Pasul de inducție: Presupunem că $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$, arbitrar, fixat. Conform egalității $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$, stabilite în cursul anterior, ipotezei de inducție și adunării exponenților naturali la compunerea puterilor unei relații binare, observate mai sus,
$(R^{n+1})^{-1} = (R^n \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ (R^n)^{-1} = R^{-1} \circ (R^{-1})^n = (R^{-1})^{n+1}$.
Raționamentul prin inducție matematică este încheiat.
Așadar $(R^n)^{-1} = (R^{-1})^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Definiție (puterile întregi negative ale unei relații binare pe o mulțime)

Pentru orice relație binară $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, se definește:

$$R^{-n} := (R^{-1})^n.$$

Remarcă

Din remarca precedentă și faptul că $\Delta_A = \Delta_A^{-1}$, obținem: pentru orice relație binară $R \subseteq A^2$ și orice $n \in \mathbb{N}$:

$$R^{-n} = (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}.$$

Aplicând aceste egalități pentru R^{-1} și un $n \in \mathbb{N}$ arbitrar, alături de faptul că $(R^{-1})^{-1} = R$ (a se revedea Cursul III), rezultă:
$R^{-(-n)} = R^n = ((R^{-1})^{-1})^n = (R^{-1})^{-n} = ((R^{-1})^n)^{-1} = (R^{-n})^{-1}$, așadar egalitățile de mai sus sunt valabile pentru orice n întreg: oricare ar fi $R \subseteq A^2$ și oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$:

$$R^{-n} = (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}.$$

Remarcă (comutarea și adunarea exponenților întregi de același semn la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ și n, k două numere întregi de același semn, adică $n, k \geq 0$ sau $n, k \leq 0$. Atunci:

$$R^n \circ R^k = R^k \circ R^n = R^{n+k}.$$

Aceste egalități au fost stabilite pentru $n, k \in \mathbb{N}$. Folosindu–le, alături de prima egalitate din remarca anterioară (care spune că egalitatea din definiția precedentă este valabilă și pentru $n = 0$), obținem: pentru orice n, k întregi cu $n, k \leq 0$, $R^n \circ R^k = (R^{-1})^{-n} \circ (R^{-1})^{-k} = (R^{-1})^{-k} \circ (R^{-1})^{-n} = R^k \circ R^n = (R^{-1})^{-n-k} = R^{n+k}$.

Remarcă (exponenții întregi de semne diferite (i. e. unul natural nenul, iar celălalt întreg strict negativ) nu comută și nu se adună la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime, în general)

După cum știm, în cazul particular al funcțiilor, orice exponenți întregi comută și se adună la compunerea puterilor unei funcții de la o mulțime la aceeași mulțime, dar numai în cazul în care puterile negative ale unei funcții sunt tot funcții, adică în cazul funcțiilor bijective, pentru care se definește inversa ca funcție, nu numai ca relație binară.

Operații cu relații binare pe o mulțime

Remarcă (exponenții întregi de semne diferite nu comută și nu se adună la compunerea puterilor unei relații binare pe o mulțime, în general – continuare)

În cazul general al relațiilor binare, aceste proprietăți nu sunt valabile. De **exemplu**, dacă $A = \{a, b, c\}$ este o mulțime cu exact 3 elemente și $R = \{(a, b), (a, c)\}$, atunci:

- $R^{-1} = \{(b, a), (c, a)\}$, așadar:
- $R^{-1} \circ R = \{(a, a)\}$,
- $R \circ R^{-1} = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$,

și, desigur, $\{(a, a), (b, b), (c, c)\} = \Delta_A = R^0 = R^{1-1} = R^{-1+1}$.
Prin urmare (considerând exponenții $n = 1$ și $k = -1$):

- $R^{-1} \circ R^1 = R^{-1} \circ R \subsetneq \Delta_A = R^{-1+1}$;
- $R^1 \circ R^{-1} = R \circ R^{-1} \neq \Delta_A = R^{1-1}$, chiar $R \circ R^{-1}$ și Δ_A sunt incomparabile, adică: $R \circ R^{-1} \nsubseteq \Delta_A$ și $R \circ R^{-1} \nsupseteq \Delta_A$;
- $R^{-1} \circ R \neq R \circ R^{-1}$, chiar $R^{-1} \circ R$ și $R \circ R^{-1}$ sunt incomparabile: $R^{-1} \circ R \nsubseteq R \circ R^{-1}$ și $R^{-1} \circ R \nsupseteq R \circ R^{-1}$, și sunt chiar disjuncte: $(R^{-1} \circ R) \cap (R \circ R^{-1}) = \emptyset$.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se zice:

- *reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *ireflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, $(a, a) \notin R$, i. e. nu există $a \in A$ cu aRa;
- *simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$;
- *asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *totală* (într-un al doilea sens) ddacă, pentru orice $a, b \in A$ cu $a \neq b$, au loc aRb sau bRa;
- *completă* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, au loc aRb sau bRa.

Observație

Acest **al doilea sens** pentru denumirea de **relație binară totală** este specific **relațiilor binare pe o mulțime**. **Primul sens** a fost întâlnit la **relații binare în general (relații binare între două mulțimi)**, și **nu coincide cu sensul de aici** pe acest caz particular al relațiilor binare pe o mulțime.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi – temă)

Fie R o relație binară pe A. Atunci au loc:

- R este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq R$;
- R este ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap R = \emptyset$;
- în cazul în care $A \neq \emptyset$: dacă R este ireflexivă, atunci R nu este reflexivă, dar nu și reciproc;
- R este simetrică ddacă $R \subseteq R^{-1}$ ddacă $R = R^{-1}$;
- R este antisimetrică ddacă $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A$;
- R este simetrică și antisimetrică ddacă $R \subseteq \Delta_A$;
- singura relație binară pe A care este simultan reflexivă, simetrică și antisimetrică este Δ_A;
- R este asimetrică ddacă $R \cap R^{-1} = \emptyset$;
- dacă R este asimetrică, atunci R este antisimetrică, dar nu și reciproc;
- singura relație binară pe A care este simultan simetrică și asimetrică este $\emptyset$;

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă (caracterizarea acestor tipuri de relații binare prin operații cu mulțimi – temă – continuare)

- dacă R este asimetrică, atunci R este ireflexivă, dar nu și reciproc;
- R este asimetrică și tranzitivă ddacă R este ireflexivă și tranzitivă;
- R este tranzitivă ddacă $R^2 \subseteq R$;
- dacă R este reflexivă, atunci $R \subseteq R^2$;
- R este totală ddacă $\Delta_A \cup R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă $R \cup R^{-1} = A^2$;
- R este completă ddacă R este reflexivă și totală.

Observație

Cazul degenerat $A = \emptyset$ este trivial (toate proprietățile de mai sus sunt, evident, satisfăcute pentru $A = \emptyset$) și poate fi eliminat din demonstrație.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine (parțială)* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine totală* ddacă e simultan o relație de ordine și o relație totală (în acest al doilea sens de mai sus);
- *(relație de) ordine strictă* ddacă e asimetrică și tranzitivă.

Remarcă (consecință a remarcii anterioare)

- Întrucât orice relație de ordine este reflexivă, rezultă că o relație de ordine este totală (în acest al doilea sens) ddacă este completă.
- Întrucât Δ_A este tranzitivă, rezultă că Δ_A este unica relație binară pe A care este simultan relație de echivalență și relație de ordine.
- Dacă R este o preordine, atunci $R = R^2$.

Tipuri de relații binare pe o mulțime

Remarcă

Am văzut mai sus că următoarele caracterizări pentru **relațiile de ordine strictă** sunt echivalente: o relație binară pe o mulțime este **asimetrică și tranzitivă** ddacă este **ireflexivă și tranzitivă**.

Remarcă

Orice relație de ordine este reflexivă, și orice relație de ordine strictă este ireflexivă. Nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan reflexive și ireflexive.
Prin urmare, nu există relații binare pe o mulțime nevidă care să fie simultan relații de ordine și relații de ordine strictă (i. e. nicio relație de ordine pe o mulțime nevidă nu e relație de ordine strictă, și nicio relație de ordine strictă pe o mulțime nevidă nu e relație de ordine).

Remarcă (temă)

Dată o relație de ordine R pe A, rezultă că $R \setminus \Delta_A$ e o relație de ordine strictă pe A, și, dată o relație de ordine strictă S pe A, rezultă că $S \cup \Delta_A$ e o relație de ordine pe A. (Vom reveni la această remarcă.)

Exemple de diferite tipuri de relații binare pe o mulțime

- Relația $\leq$ pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ este o relație de ordine totală, numită *relația de ordine naturală* pe fiecare dintre aceste mulțimi de numere, iar relația $<$ pe fiecare dintre aceste mulțimi este o relație de ordine strictă.
- Pentru orice mulțime T, relația $\subseteq$ pe $\mathcal{P}(T)$ este o relație de ordine parțială, care este relație de ordine totală ddacă $|T| \leq 1$, iar $\subsetneq$ este o relație de ordine strictă pe $\mathcal{P}(T)$.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relație de ordine parțială.
- Relația de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ este o preordine care nu este antisimetrică (deci nu e relație de ordine), pentru că, de exemplu: $(-3)|3$ și $3|(-3)$, dar $-3 \neq 3$.
- Relația binară de a avea aceeași paritate (sau același rest modulo $n \in \mathbb{N}^*$), pe $\mathbb{N}$ sau $\mathbb{Z}$, este o relație de echivalență.
- Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A, anume cea mai mică și respectiv cea mai mare relație de echivalență pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relația $\subseteq$ (i. e., pentru orice relație de echivalență R pe A, avem $\Delta_A \subseteq R \subseteq A^2$, unde prima incluziune are loc datorită reflexivității lui R, iar cea de–a doua este dată de definiția unei relații binare pe A).
- Δ_A este și o relație de ordine, anume cea mai mică relație de ordine pe A, în sensul incluziunii (datorită reflexivității relațiilor de ordine).
- Relația $\neq = \{(a, b) \mid a, b \in A, a \neq b\} = A^2 \setminus \Delta_A$ este o relație ireflexivă și simetrică.

Matrici caracteristice

- Știm din cursul trecut că, pentru orice mulțime T, are loc: $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T = \{f \mid f : T \to \{0,1\}\}$, cu bijecția care duce fiecare $X \in \mathcal{P}(T)$ în funcția sa caracteristică $\chi_X : T \to \{0,1\}$.
- Relațiile binare pe A sunt părțile lui A^2, prin urmare există o bijecție între mulțimea $\mathcal{P}(A^2)$ a relațiilor binare pe A și $\{0,1\}^{A^2} = \{f \mid f : A^2 \to \{0,1\}\}$, anume bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în funcția sa caracteristică: $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$, pentru orice $a, b \in A$,

$$\chi_R(a,b) = \begin{cases} 0, & (a,b) \notin R \\ 1, & (a,b) \in R \end{cases}$$

- În cazul particular în care $|A| = n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pentru orice $R \subseteq A^2$, funcția caracteristică $\chi_R : A^2 \to \{0,1\}$ a lui R poate fi dată prin matricea valorilor ei, anume: $M(R) := (\chi_R(a_i, a_j))_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, prin urmare mulțimea relațiilor binare pe A se află în bijecție cu mulțimea $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ a matricilor pătratice de dimensiune n peste $\{0,1\}$, prin bijecția care duce fiecare relație binară R pe A în matricea $M(R)$, numită *matricea booleană* sau *matricea caracteristică a relației R*.

Matrici caracteristice

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $M = (m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}, P = (p_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, definim operațiile:

- $M \vee P := (\max\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \wedge P := (\min\{m_{i,j}, p_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $\overline{M} := (1 - m_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$
- $M \circ P = (\min\{1, r_{i,j}\})_{i,j \in \overline{1,n}}$, unde $(r_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}} = M \cdot P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente și R și S două relații binare pe A. Atunci:

1. $M(\Delta_A) = I_n$ *(matricea unitate)*
2. $M(R \cup S) = M(R) \vee M(S)$ *și* $M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S)$
3. $M(\overline{R}) = \overline{M(R)}$
4. $M(R^{-1}) = {}^t M(R)$ *(transpusa lui $M(R)$)*
5. $M(S \circ R) = M(R) \circ M(S)$

Matrici caracteristice

Demonstrație: **(1)** $M(\Delta_A) = (\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = I_n$, pentru că: oricare ar fi $i, j \in \overline{1,n}$, $\chi_{\Delta_A}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $(a_i, a_j) \in \Delta_A$ ddacă $a_i = a_j$ ddacă $i = j$.
(2) Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C - \chi_B \cdot \chi_C = \max\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta + \gamma - \beta \cdot \gamma = \max\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \vee M(S) =$
$(\max\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cup S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cup S)$.
Amintim din cursul II următoarea proprietate a funcțiilor caracteristice: pentru orice $B, C \in \mathcal{P}(A^2)$, $\chi_{B\cap C} = \chi_B \cdot \chi_C = \min\{\chi_B, \chi_C\}$, pentru că $\beta \cdot \gamma = \min\{\beta, \gamma\}$ pentru orice $\beta, \gamma \in \{0, 1\}$, care este codomeniul funcțiilor caracteristice. Avem, așadar: $M(R) \wedge M(S) =$
$(\min\{\chi_R(a_i, a_j)), \chi_S(a_i, a_j)\})_{i,j\in\overline{1,n}} = (\chi_{R\cap S}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = M(R \cap S)$.
(3) $\overline{R} = A^2 \setminus R$. Pentru orice $i, j \in \overline{1,n}$, $[(a_i, a_j) \in \overline{R}$ ddacă $(a_i, a_j) \notin R]$, deci $[\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_i, a_j) = 0$ ddacă $1 - \chi_R(a_i, a_j) = 1]$, așadar $\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j) = 1 - \chi_R(a_i, a_j)$. Prin urmare
$M(\overline{R}) = (\chi_{\overline{R}}(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = (1 - \chi_R(a_i, a_j))_{i,j\in\overline{1,n}} = \overline{M(R)}$.

Matrici caracteristice

(4) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in R^{-1}$ ddacă $(a_j, a_i) \in R]$, adică $[\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = 1$ ddacă $\chi_R(a_j, a_i) = 1]$, deci $\chi_{R^{-1}}(a_i, a_j) = \chi_R(a_j, a_i)$, prin urmare $M(R^{-1}) = {}^t M(R)$.

(5) Pentru orice $i, j \in \overline{1, n}$, $[(a_i, a_j) \in S \circ R$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $(a_i, a_k) \in R$ și $(a_k, a_j) \in S]$, adică $[\chi_{S \circ R}(a_i, a_j) = 1$ ddacă există măcar un $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\chi_R(a_i, a_k) = 1$ și $\chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\min\{\chi_R(a_i, a_k), \chi_S(a_k, a_j)\} = 1$ ddacă există $k \in \overline{1, n}$ a. î. $\chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) = 1$ ddacă $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j) \geq 1$ ddacă $\displaystyle\min\{1, \sum_{k=1}^{n} \chi_R(a_i, a_k) \cdot \chi_S(a_k, a_j)\} = 1]$, de unde rezultă egalitatea din enunț.

Observație

Notația $\circ$ pentru operația de mai sus între matrici caracteristice **nu** este consacrată.

Exercițiu

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente, I o mulțime nevidă și $(R_i)_{i \in I}$ o familie de relații binare pe A. Să se demonstreze că:

1. $M(\bigcup\limits_{i \in I} R_i) = \bigvee\limits_{i \in I} M(R_i)$
2. $M(\bigcap\limits_{i \in I} R_i) = \bigwedge\limits_{i \in I} M(R_i)$

Rezolvare: (1) Folosind rezultatul din cursul al doilea care spune că funcția caracteristică a unei reuniuni arbitrare de mulțimi este egală (punctual, adică în fiecare punct) cu maximul dintre funcțiile caracteristice ale mulțimilor care se reunesc, obținem:

$$\bigvee_{i \in I} M(R_i) = (\max\{\chi_{R_i}(a_j, a_k) \mid i \in I\})_{j,k \in \overline{1,n}} = (\chi_{\bigcup\limits_{i \in I} R_i}(a_j, a_k))_{j,k \in \overline{1,n}} = M(\bigcup_{i \in I} R_i).$$

(2) Analog cu (1). **Temă.**

Exercițiu (temă)

Considerăm $A = \{a_1, a_2\}$ (o mulțime cu exact 2 elemente; și putem lua $a_1 = 1$ și $a_2 = 2$, de exemplu) și R, S următoarele relații binare pe A: $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$, $S = \{(a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$. Să se determine relația binară Q pe A dată de egalitatea: $Q = (R^3 \circ S^{-1}) \cup ((S^2 \circ R) \cap R^{-1})$.

Indicație: $M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Folosind propoziția anterioară, putem calcula:
$M(Q) = ({}^t M(S) \circ M(R) \circ M(R) \circ M(R)) \vee ((M(R) \circ M(S) \circ M(S)) \wedge^t M(R))$, iar Q este unica relație binară pe A care are această matrice caracteristică și poate fi ușor determinată pe baza acestei matrici, folosind definiția matricii caracteristice: pentru fiecare $i, j \in \overline{1, 2} = \{1, 2\}$, $(a_i, a_j) \in Q$ ddacă, în matricea $M(Q)$, componenta de pe linia i și coloana j are valoarea 1.

Matrici caracteristice

Remarcă (temă)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o mulțime cu exact n elemente, iar $R \subseteq A^2$. Atunci:

1. R e reflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 1 pe toată diagonala principală;
2. R e ireflexivă ddacă $M(R)$ are valoarea 0 pe toată diagonala principală;
3. R e simetrică ddacă $M(R)$ e matrice simetrică, i. e. ddacă $M(R) = ^t M(R)$;
4. R e asimetrică ddacă $M(R) \wedge ^t M(R) = \mathbf{0}_n$ (matricea cu toate componentele nule);
5. R e totală ddacă $I_n \vee M(R) \vee ^t M(R) = \mathbf{1}_n$ (matricea cu toate componentele egale cu 1);
6. R e completă ddacă $M(R) \vee ^t M(R) = \mathbf{1}_n$.

Pot fi stabilite mai multe proprietăți de acest gen.

Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime

Lemă (temă)

Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ și $(C_i)_{i\in I}$ familii de mulțimi, iar $(Q_i)_{i\in I}$, $(R_i)_{i\in I}$ și $(S_i)_{i\in I}$ familii de relații binare, cu $R_i \subseteq A_i \times B_i$, $S_i \subseteq A_i \times B_i$ și $Q_i \subseteq B_i \times C_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

- $\prod_{i\in I} R_i \subseteq \prod_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i \subseteq S_i)$;
- $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} S_i$ *ddacă* $(\exists\, i_0, i_1 \in I)\,(R_{i_0} = \emptyset, S_{i_1} = \emptyset)$ *sau* $(\forall\, i \in I)\,(R_i = S_i)$;
- $(\prod_{i\in I} R_i) \cap (\prod_{i\in I} S_i) = \prod_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ *(și la fel pentru* $\cup$, $\setminus$, Δ *în loc de* $\cap$*)*;
- $(\prod_{i\in I} Q_i) \circ (\prod_{i\in I} R_i) = \prod_{i\in I}(Q_i \circ R_i)$;
- $(\prod_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$.

Despre produsul direct de relații binare pe o mulțime

Propoziție

Fie I o mulțime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi și $(R_i)_{i\in I}$ o familie de relații binare, cu $\emptyset \neq R_i \subseteq A_i^2 = A_i \times A_i$, pentru orice $i \in I$. Atunci:

1. $\prod_{i\in I} R_i$ *este reflexivă ddacă* R_i *este reflexivă, pentru fiecare* $i \in I$
2. $\prod_{i\in I} R_i$ *este ireflexivă ddacă* R_i *este ireflexivă, pentru fiecare* $i \in I$
3. $\prod_{i\in I} R_i$ *este simetrică ddacă* R_i *este simetrică, pentru fiecare* $i \in I$
4. $\prod_{i\in I} R_i$ *este antisimetrică ddacă* R_i *este antisimetrică, pentru fiecare* $i \in I$
5. $\prod_{i\in I} R_i$ *este asimetrică ddacă* R_i *este asimetrică, pentru fiecare* $i \in I$
6. $\prod_{i\in I} R_i$ *este tranzitivă ddacă* R_i *este tranzitivă, pentru fiecare* $i \in I$

Prin urmare, $\prod_{i\in I} R_i$ *este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine, respectiv ordine strictă, ddacă* R_i *este o preordine, respectiv echivalență, respectiv ordine, respectiv ordine strictă, pentru fiecare* $i \in I$.

Demonstrație: Conform lemei anterioare, avem următoarele proprietăți (**temă**):

- $\Delta_{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \Delta_{A_i}$
- $(\prod_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$
- pentru orice familie $(S_i)_{i\in I}$, cu $\emptyset \neq S_i \subseteq A_i^2$, pentru fiecare $i \in I$:
  1. $\prod_{i\in I} R_i \subseteq \prod_{i\in I} S_i$ ddacă $R_i \subseteq S_i$, pentru fiecare $i \in I$
  2. $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} S_i$ ddacă $R_i = S_i$, pentru fiecare $i \in I$
  3. $(\prod_{i\in I} R_i) \cap (\prod_{i\in I} S_i) = \prod_{i\in I}(R_i \cap S_i)$ (și la fel pentru $\cup$, $\setminus$, Δ în loc de $\cap$)
  4. $(\prod_{i\in I} R_i) \circ (\prod_{i\in I} S_i) = \prod_{i\in I}(R_i \circ S_i)$; cum $(\prod_{i\in I} R_i)^{-1} = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$, rezultă că:
  5. pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, $(\prod_{i\in I} R_i)^n = \prod_{i\in I} R_i^n$; în particular: $(\prod_{i\in I} R_i)^2 = \prod_{i\in I} R_i^2$

Din proprietățile de mai sus și caracterizările acestor tipuri de relații binare prin operații cu ele, rezultă proprietățile din enunț.

Exemplificăm pentru proprietatea (3) din enunț. Vom folosi faptul că o relație binară este vidă ddacă inversa ei este vidă.

$(\prod_{i\in I} R_i)^{-1} := \{((b_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}) \mid ((a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}) \in \prod_{i\in I} R_i\} =$
$\{((b_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}) \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i, b_i) \in R_i\} = \{((b_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}) \mid (\forall\, i \in I)\,(b_i, a_i) \in R_i^{-1}\} = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$.

Prin urmare, avem: $\prod_{i\in I} R_i$ este simetrică ddacă $\prod_{i\in I} R_i = (\prod_{i\in I} R_i)^{-1}$ ddacă $\prod_{i\in I} R_i = \prod_{i\in I} R_i^{-1}$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i = R_i^{-1}$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i este simetrică.