22.03.2016

AG

CURS 5

Grafuri planare

1. Hamiltonitate în grafuri planare

1.1. $M=(V,E,F)$ hartă.

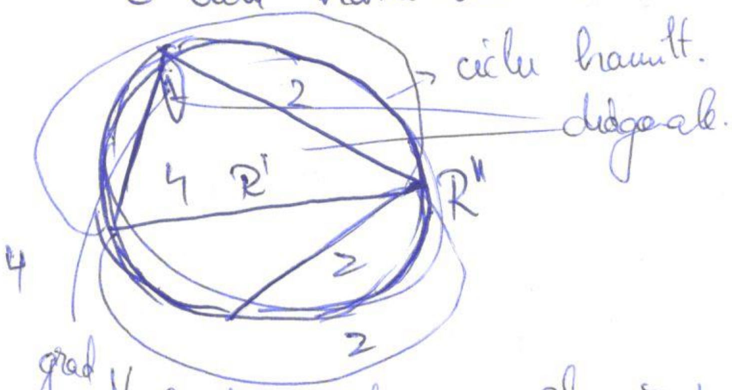
C ciclu hamiltonian în M :⟺ C ciclu elementar

$V(C)=V(G)$

$(E(C)\subseteq E(G))$

Fie $M=(V,E,F)$ hartă.

C ciclu hamiltonian în M



grad (nr. de muchii care îl mărginesc)

$$F_i' = \{f \mid f \subseteq R',\ d_M(f) = i\}$$

$$F_i'' = \{f \mid f \subseteq R'',\ d_M(f) = i\}$$

R'' $$|F| = \underbrace{\sum_{i\geq 1} |F_i'|}_{|F'|} + \underbrace{\sum_{i\geq 1} |F_i''|}_{|F''|}$$

30

Formulă

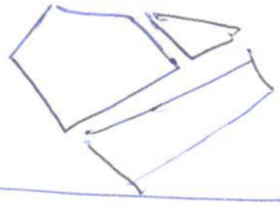
(1) $$\boxed{\sum_{i\geq 1} i|F_i'| = 2|E'| + n}$$

mult muchiilor

$E' = \{e \mid e \in E(M) - E(C), e \subseteq R'\}$ → mult diagonalelor.

$E'' = \{e \mid e \in E(M) - E(C), e \subseteq R''\}$.

$n = |V| = |E(C)|$ ← ciclu hamiltonian.



(2) $$\boxed{\sum_{i\geq 1} i|F_i''| = 2|E''| + n}$$

T_1 (Grinberg) $M = (V, E, F)$ hartă hamiltoniană

Fie C ciclu hamiltonian.

Avem: $\sum_{i\geq 1} (i-2)(|F_i'| - |F_i''|) = 0$.

Dem

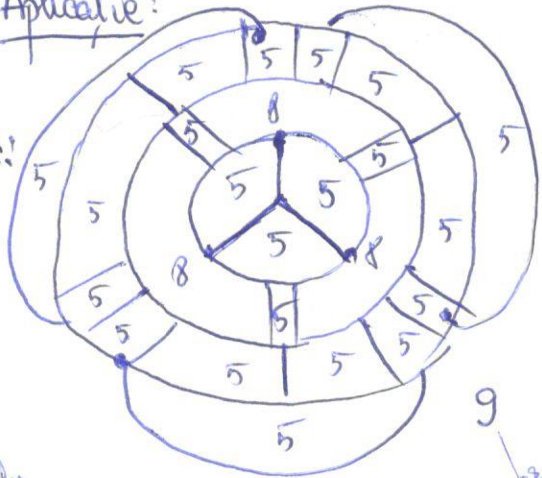
$\sum i|F_i'| = 2|E'| + n$

$\sum_{i\geq 1} |F_i'| = |E'| + 1 \; (= |F'|)$ (nr fețe interne > 1 decât diagonalele - cred).

(3) -2(4): $\sum_{i\geq 1} (i-2)|F_i'| = n - 2$ (5) Analog: $\sum_{i\geq 1} (i-2)|F_i''| = n-2$ (6)

(5)-(6): $\sum_{i\geq 1} (i-2)(|F_i'| - |F_i''|) = 0$ deci gata.

Aplicatie:

G: 

G - nehamiltonian.

9 grade.

pp abs.

R.A. $\exists$ C. ciclu hamiltonian

i	$\lvert F_i\rvert = \lvert F_i'\rvert + \lvert F_i''\rvert$
5	
9	3
9	1

$$\sum_{i\geq 1}(i-2)(\lvert F'_i\rvert + \lvert F_i''\rvert) = 0$$

$$= \underset{3}{(5-2)}(\lvert F_5'\rvert - \lvert F_5''\rvert) + \underset{6}{(8-2)}(\lvert F_8'\rvert - \lvert F_8''\rvert) + \underset{7}{(9-2)}\underbrace{(\lvert F_9'\rvert - \lvert F_9''\rvert)}_{-1} = 0.$$

$\underset{0}{\lvert F_9'\rvert} + \underset{1}{\lvert F_9''\rvert} = 1$

$\to 3 \mid 7$ ab.

2. Colorării ale grafurilor planare

2.1 Fie $M = (V, E, F)$

$c : V \to \{0, 1, 2 \ldots p-1\}$

c. p - vf. propriu $c(x) \neq c(y)$ $\forall x \neq y$ $xy \in E$

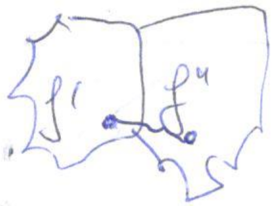
$c : F \to \{0, 1, 2 \ldots p-1\}$.

c p - față colorare proprie $c(f') \neq c(f'')$ $\forall f' \neq f'' \in F$

f', f'' colorar.

$\chi_v(M) := \min\{p \mid \exists\ c$ v. col. prop$\}$.

$\chi_f(M) := \min\{p \mid \exists\ c$ fețe-col prop$\}$.



<u>C4C</u>: $\chi_v(M) \le 4, \forall M$

$\chi_f(M) \le 4\ \forall M$.

2.2. (T2) (Teorema celor 2 culori)

$M = (V, E, F)$ hartă ~~conexă~~ culori ?? punte

a) $\chi_v(M) = 2 \iff \forall f \in F: d_M(f) \equiv 0(2)$

b) $\chi_f(M) = 2 \iff \forall v \in V: d_M(v) \equiv$

a) $\iff$ b) enunț

<u>Dem</u>:

a) $\Rightarrow$ $\chi_v(M) = 2 \Rightarrow \exists\ c: V \to \{0,1\}$ bicolorare proprie

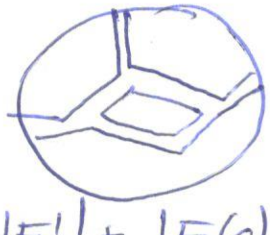
$\xRightarrow{König}$ $\forall$ ciclu elem. este par

$\forall f \in F$ f este mărg de un ciclu elem.

$d_M(f) \equiv 0(2)$

$\Leftarrow$ $d_M(f) \equiv 0(2) \overset{?}{\Rightarrow}$ M bipartită.

Vom dem. $\forall$ (ciclu elem este par și conf König $\Rightarrow$ M bipartită.



$\sum_{i \ge 1} i|F_i'| = \underbrace{2|E'|}_{\equiv 0(2)} + |E(C)|$

$\sum_{i\ par} i|F_i'| \equiv 0(2)$

$\Rightarrow |E(C)| \equiv 0(2) \to C$ ciclu par.

$\underline{T_3}$ (T. AIT)

Fie $M = (V, E, F)$ hartă hamiltoniană

$\Rightarrow \chi_f(M) \leq 4$

Dem Fie C ciclu hamiltonian

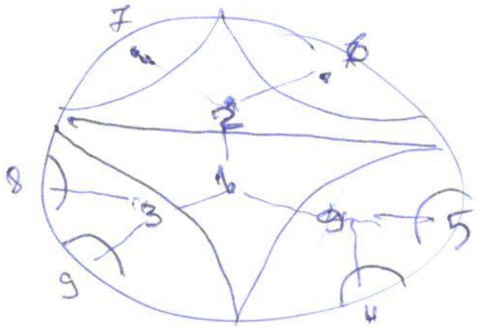
R', R''

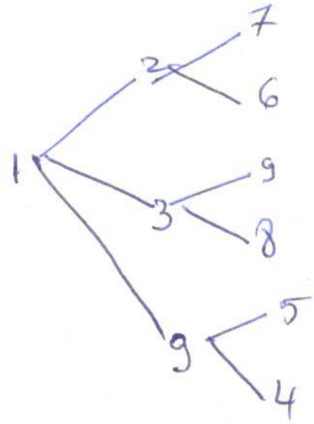
T' graful indus de F' în M^*

T'' — " — F'' în M^*

T', T'' arborescență

$\chi_f(M) \leq \chi_v(T') + \chi_G(T'') = 2+2 = 4$ □





2.3. Amintim

Th(Euler) $M = (V, E, F)$ hartă conexă

$\Rightarrow |V| - |E| + |F| = 2$

T_5 $M = (V, E, F)$ hartă simplă

$\Rightarrow \exists v \in V : d_M(v) \leq 5.$

Dem R.A. $d_M(v) \geq 6, \forall v \in V.$

Am $|V| - |E| + |F| = 2.$

M hartă simplă

$|F_1| = 0, |F_2| = 0$

$$\sum_{i\geq 1} i|F_i| = 2|E|$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i\geq 3} i|F_i| \geq 3\sum_{i\geq 3}|F_i| = 3|F|$$

$2|E| \geq 3|F|$

$|F| \leq \frac{2}{3}|E|$

$\sum i |V_i| = 2|E|$

$\sum_{i\geq 0} i|V_i| \geq 6\sum_{i\geq 0}|V_i| = 6|V|$

$$2 = |V| - |E| + |F| \leq |V| - |E| + \frac{2}{3}|E| \leq \frac{1}{3}|E| - |E| + \frac{2}{3}|E| = 0.$$

$2 \leq 0$ do

$2|E| \geq 6|V|$

$|V| \leq \frac{1}{3}|E|$

T6: (teorema celor 5 culori)

$M = (V, E, F)$ hartă simplă

a) $\chi_v(M) \leq 5$.

b) $\chi_f(M) \leq 5$

Dem: (a) $\Leftrightarrow$ (b) enunț!

a) Inducția după $n = |V|$

$I(1), \ldots\ldots, I(5)$ enunț!

$I(<n) \longrightarrow I(n) \quad n \geq 6$.

Fie $M = (V, E, F)$ hartă conexă simplă $|V| = n \geq 5$

Fie $v \in V : d_M(v) \leq 5$.

$N_M(v) = $ m. vecini.

$M' = M - v \qquad \chi_v(M') \leq 5$.

Fie $c: V' \to \{0,1,2,3,4\}$

a) $|c'(N(v))| < 5$

Fie i culoare nefolosită pt $N(v)$

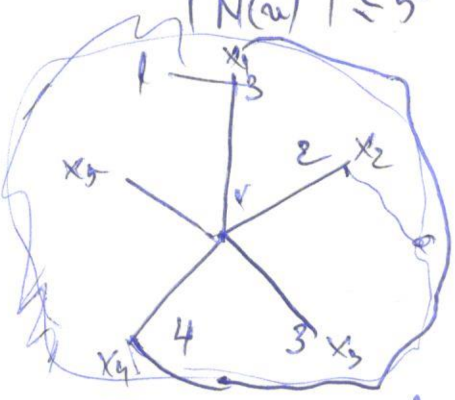
$i \in \{1,2,3,4,5\} - i(N(v))$

Definim $c: V \to 1\,2\,3\,4\,5$

$$\begin{cases} c|_{V'} = c' \\ c(v) = i \end{cases}$$

c - 5 col $\Rightarrow$ $\chi_v(M) \le 5$.

b) $|c'(N(v))| = 5$, $|N(v)| \le 5$ $\Rightarrow$ $|N(v)| = 5$ și $c'(N(v)) = 5$] Notăm $N(v) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ a.î. $c'(x_i) = i$, $1 \le i \le 5$.



Fie $P_{13}(x_1)$ comp conexă a vf de cul 1 și 3 care conține x_1

$P_{24}(x_2)$ analog

Caz 1: $x_3 \in P_{13}(x_1)$ și $x_4 \in P_{24}(x_2)$

$\exists\ z \in V(P_{13}(x_1)) \cap V(P_{24}(x_2))$

$c'(x) \in \{1,3\} \cap \{2,4\} = \emptyset$ ab

Caz 2:

$x_3 \notin V(P_{13}(x_1))$

cu $x_4 \notin V(P_{24}(x_2))$ analog.

$x_3 \notin P_{15}(x_1)$

Definim $c : V \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}$

$c(z) = c'(z) \quad \forall\ z \in V - V(P_{15}(x_1))$

$c(z) = 1$ dc $z \in V(P_{15}(x_1))$

și $c'(z) = 3$

$c'(z) = 3$ dc. $z \in V(P_{13}(x_1))$

și $c'(z) = 1$