ECUAŢII DIFERENŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE

grupa 341, anul III, informatică, 2017-2018

– 26 ianuarie 2018, examen –

1. Fie următoarea problemă Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3t^2 \cos 2x\,, \ (t,x) \in [-1,1] \times \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \subset \mathbf{R}^2 \\ x(0) = \dfrac{\pi}{8}\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) Arătaţi că problema (1) are soluţie unică si determinaţi soluţia problemei.
b) Determinaţi 3 aproximaţii din şirul aproximaţiilor succesive ale soluţiei problemei (1).
c) Precizaţi o metodă de aproximare numerică a soluţiei problemei (1).

2. Fie sistemul

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1 + 2x_2}{t} \\ x_2' = \dfrac{2x_1 + x_2}{t}\,. \end{cases} \quad ;\ t > 0\,. \tag{2}$$

a) Scrieţi sistemul (2) în formă matriceală.
b) Arătaţi că $\varphi_1(t) = \left(\dfrac{1}{t}, -\dfrac{1}{t}\right)^T$ este soluţie a sistemului (2).
c) Folosind metoda de reducere a dimensiunii sistemelor liniare, determinaţi soluţia generală a sistemului (2) şi precizaţi o soluţie φ_2 astfel încât $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ să formeze sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (1).

3. Se consideră ecuaţia

$$x^{(3)} + a_2 x^{(2)} + a_1 x^{(1)} + a_0 x = 0\,, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\,. \tag{3}$$

a) Definiţi sistemul fundamental de soluţii pentru ecuaţii liniare omogene de ordin n şi precizaţi ce tipuri de soluţii conţine un astfel de sistem pentru ecuaţia (3).
b) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x^{(3)} + 5x^{(2)} + 8x^{(1)} + 4x = 0\,, \quad t \in \mathbf{R}$.
c) Să se determine soluţia următoarei probleme

$$x^{(3)} + 5x^{(2)} + 8x^{(1)} + 4x = e^t\,, x(0) = 1\,, x^{(1)}(0) = -1\,, x^{(2)}(0) = 0.$$

4. a) Fie ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea de forma $F\left(t, \dfrac{x'}{x}, \dfrac{x''}{x}\right) = 0$. Arătaţi că prin schimbarea de variabilă $\dfrac{x'}{x} = y$ ecuaţia se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi.
b) Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^2 + (x')^2 - 2x''x = 0$. Câte soluţii ale acestei ecuaţii verifică condiţiile $x(1) = 0$ şi $x'(1) = 0$?

5. Fie a_1, a_2 funcţii continue în $D \subseteq \mathbf{R}^2$ cu $|a_1(x)| + |a_2(x)| \neq 0,\ \forall x \in D$.
a) Să se arate că u este soluţie pentru ecuaţia

$$a_1(x)\,\partial_1 u + a_2(x)\,\partial_2 u = 0$$

dacă şi numai dacă u este integrală primă a sistemului caracteristic asociat.
b) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei:

$$x_2\,\partial_1 u + x_1\,\partial_2 u = 0\,.$$

c) Să se determine soluţia problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x_2\,\partial_1 u + x_1\,\partial_2 u - 2u = 0 \\ u(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^2}{2} \ \text{ pe } S = \left\{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 = 0\right\}. \end{cases}$$

...ŢIALE ŞI CU DERIVATE PARŢIALE
grupa 342, anul III, informatică, 2017-2018
– 30 ianuarie 2018, examen –

1. Fie următoarea problemă Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 - 2e^t x + e^{2t} + e^t, \ (t,x) \in \mathbf{R}^2, \\ x(0) = 2, \end{cases} \tag{1}$$

a) Arătaţi că ecuaţia din problema (1) admite o soluţie particulară de forma $\varphi_0(t) = \alpha e^t$ pentru $\alpha \in \mathbf{R}$ convenabil determinat.
b) Determinaţi soluţia problemei (1).
c) Definiţi şirul aproximaţiilor succesive pentru soluţia unei probleme Cauchy. Determinaţi 3 aproximaţii din şirul aproximaţiilor succesive ale soluţiei problemei (1).

2. Se consideră sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 + e^t \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 2e^{2t}. \end{cases} \tag{2}$$

a) Scrieţi sistemul (2) în formă matriceală $x' = Ax + b(t)$.
b) Definiţi sistemul fundamental de soluţii pentru un sistem liniar omogen de ecuaţii diferenţiale şi precizaţi ce cazuri se pot întâlni în determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru un astfel de sistem în cazul $n = 2$.
c) Determinaţi soluţia sistemului (2).

3. Se consideră ecuaţia

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = 0, \quad a_0, a_1 \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

a) Definiţi sistemul fundamental de soluţii pentru ecuaţii liniare omogene de ordin n şi precizaţi ce tipuri de soluţii conţine un astfel de sistem pentru ecuaţia (3).
b) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x'' - 4x' + 5x = 0, \quad t \in \mathbf{R}$.
c) Să se determine soluţia următoarei probleme

$$x'' - 4x' + 5x = t\ , x(0) = 1\ , x'(0) = -1.$$

4. a) Fie ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea de forma $F\left(t, \dfrac{x'}{x}, \dfrac{x''}{x}\right) = 0$.
Precizaţi prin ce schimbare de variabilă se poate face reducerea ordinului acestei ecuaţii.
b) Fie ecuaţia

$$x'' = a_1(t)x' + a_0(t)x, \quad t > 0, \tag{4}$$

unde $a_0, a_1 : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sunt funcţii continue. Determinaţi ce tip de ecuaţie de ordinul întâi se obţine aplicând reducerea ordinului pentru $x \neq 0$..
c) Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\dot{x}'' = \frac{2t+1}{t} x'\ , t > 0.$$

5. a) Scrieţi sistemul caracteristic asociat problemei Cauchy pentru ecuaţii liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} a_1(x,u)\partial_1 u + \ldots + a_n(x,u)\partial_n u = g(x,u) \\ u(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)) = \varphi(t), \end{cases}$$

şi precizaţi legătura între sistemul caracteristic şi ecuaţia cu derivate parţiale.
b) Determinaţi soluţia problemei Cauchy:

$$\begin{cases} x_2 \partial_1 u + (2x_1 - x_2)\,\partial_2 u = 4x_1(x_1 + x_2) \\ u(2s, -s) = s^2\ , s > 0. \end{cases}$$