ALG & GRAFURI

CURS 6.

Arbori parțiali în grafuri cu muchiile ponderate

1. Def. Not. Ex

$G=(V,E)$ graf. conex, $E \neq \emptyset$

$w: E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pondere

$G' \leq G \longleftrightarrow \begin{cases} V' \subseteq V \\ E' \leq E \end{cases}$

$w(G') := \sum_{e \in E'} w(e)$

P x,y lanț.

$x,y \in V$

$d(x,y) = \min\{w(P) / P \ x,y\text{-lanț în } G\}$

Obs: Dacă G nu este conex

$d(x,y)=\infty$ dacă x,y aparțin la două comp. conexe diferite.

Prop 1:

$G=(V,E)$ și w pondere, și fct d.

1) $d(x,x)=0 \ \forall x \in V$

2) $d(x,y)=d(y,x) \ \forall x,y \in V$

3) $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z)$

D

1., 2.

3.

P — lanț $\quad d(x,y) = w(P)$

Q : $d(y,z) = w(Q)$

$$d(x,y) + d(y,z) = w(P) + w(Q) = w(x \xrightarrow{P} y \xrightarrow{Q} z)$$

$$\geq d(x,z) \quad \square$$

$x \in V$: $e(x) = \max\{d(x,y) \mid y \in V\}$

raza lui G $\quad rad(G) = \min\{e(x) \mid x \in V\}$

$diam(G) = \max\{e(x) \mid x \in V\} = \max\limits_{x} \max\limits_{y} \{d(x,y) \mid x, y \in V\}$

$centr(G) = \{x \mid e(x) = rad\ G\}$

(P2) $G = (V, E), w, d$

$$\boxed{rad(G) \leq diam(G) \leq 2\, rad\ G}$$

Dem: Fie $u, v \in V$ cu $d(u,v) = \text{diam } G$
$w \in \text{centr } G$.

$$\text{diam}(G) = \underbrace{d(u,v)}_{\substack{\text{enunțat} \\ \text{rad } G \leq}} = d(u,w) + d(w,v) \leq \text{rad}(G) + \text{rad}(G)$$
$$= 2\,\text{rad}(G)$$

2. Arbori parțiali

$G = (V, E)$ gf. conex.

$$\mathcal{T}(G) = \{T \mid \underbrace{T \text{ arbore parțial în } G}\} \neq \emptyset$$

$$\begin{cases} \text{arbore} \\ V(T) = V(G) \\ E(T) \subseteq E(G) \end{cases}$$

$T \in \mathcal{T}(G)$
$w(T)$

$|\mathcal{T}(G)| < \infty$

Alg Prim
$T \in \mathcal{T}(G)$ T arbore parțial optim / economic / de pond. minimă
$\Rightarrow w(T) = \min\{w(T') \mid T' \in \mathcal{T}(G)\}$.
$v \in V$, fixat
$T \in \mathcal{T}(G)$ T arbore parțial al distanțelor vf. v $:\Leftrightarrow$
$d_T(v,x) = d_G(v,x)$, $\forall x \in V$.
$\geq$

Alg. Dijkstra

3. Alg lui PRIM și alg lui DIJKSTRA

$v \in V$ fixat $\quad G=(V,E) \quad |V|=n$

$T = \{v, \emptyset\}$

$T_0 = T$

T_1

T_2

$\vdots$

T_k

$T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_{n-1}$

$V_i = \{x_0, x_1, x_2 \dots x_i\}$

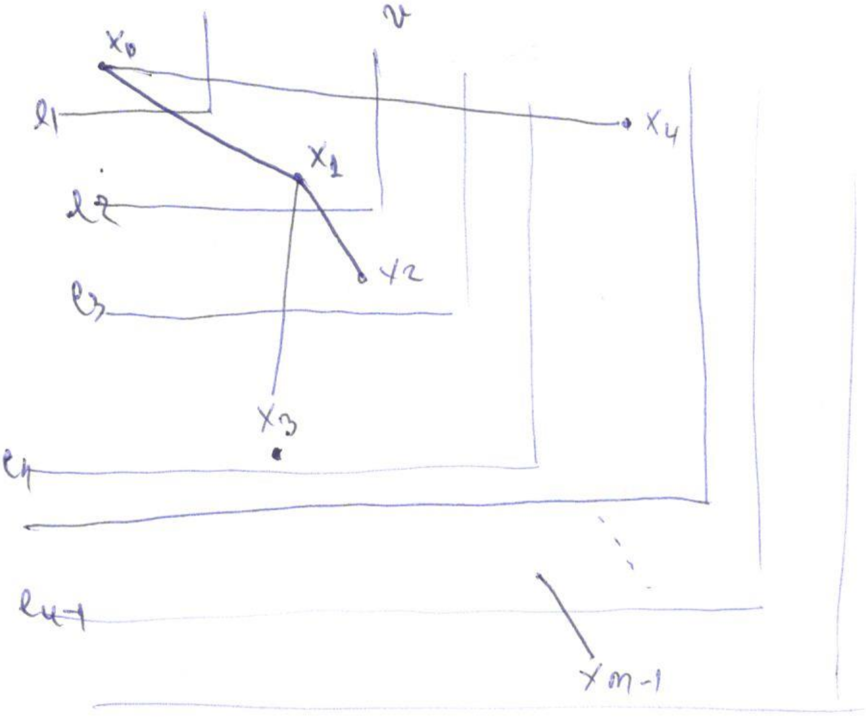
$E_i = \{e_1, e_2 \dots e_i\}$

$T_i = (V_i, E_i)$

$\{x_0\} = V_0 \leq V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_{n-1}$

$\{x_0\} = v$

$\{x_0, x_1 \dots x_{n-1}\} = V(G)$



Alg Prim $T = (\{v\}, \emptyset)$

$V(G) - V(T)$

Se execută de $n-1$ ori:

Pas i

Se selectează $x \in V(T)$ $y \in \overline{V(T)}$

cu $w(xy)$ minimă

$T + [x,y] \longrightarrow T$

$[e]$

Alg. DIJKSTRA $T = (\{v\}, \emptyset)$

Se execută de $n-1$ ori:

Pas i. Se selectează $x \in V(T), y \in \overline{V(T)}$

cu $d_T(v,x) + w(x,y)$ minimă

$T + [x,y] \longrightarrow T$

e.

$\boxed{T_1}$ Arborele T obţinut prin alg lui PRIM este arb. optim.

$\boxed{T_2}$ ... DIJKSTRA este un arbore al distanţelor vârful $x_0 = v$

DT1: Fie T un arb produs prin alg. lui PRIM.

$\tilde{T}$ un arbore economic $V(T) = V(\tilde{T})$

v un dim. $w(T) = w(\tilde{T})$ $|E(T)| = E(\tilde{T})$

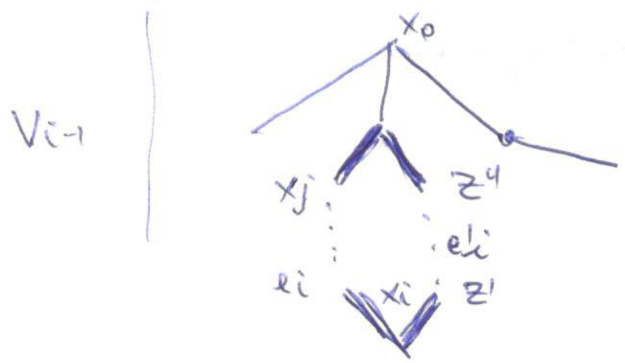
$E(T) = E(\tilde{T})$

a) $E(T) = E(\tilde{T})$ $E(T)$

b) $E(T) \neq E(\tilde{T})$ $\Rightarrow T = \tilde{T}$ ($\Leftarrow T$ arb. econ)

Fie i minim cu $e_i \notin E(\tilde{T})$: $e_i = x_j x_i$

$j \in \{0, 1, 2, \dots, i-1\}$



Fie P x_j, x_i - lanț în $\tilde{T}$

Fie z'' primul vf. din $\overline{V_{i-1}}$ al lanțului P (la o citire de la $x_j \to x_i$)

Fie z'' varful interior lui z' în P. $z'' \in V_{i-1}$

Notăm $e_i' = z''z'$

$\tilde{T}' := \tilde{T} + e_i - e_i'$

$\tilde{T}'$ este arbore $\begin{cases} \text{are } n-1 \text{ muchii} \\ \text{este conex (exerc)} \end{cases}$

(*) $w(\tilde{T}') = w(\tilde{T})$

$\begin{cases} w(e_i) \le w(e_i') \text{ .. crit. de selecție.} \\ w(e_i) \ge w(e_i) \text{ demonstr:} \end{cases}$

$\cancel{w(\tilde{T})} \le w(\tilde{T}') = \cancel{w(\tilde{T})} + w(e_i) - w(e_i')$

$\Rightarrow$ (*) o ___ $\Rightarrow$ $\tilde{T}'$ arbore economic

Avem:

$e_1, e_2, e_3, \ldots e_{i-1}, e_i \in E(T)$

$\in E(\tilde{T}')$

$\tilde{T}'$ arb. economic.

$\tilde{T}, \tilde{T}' \ldots \tilde{T}^{(p)} = T$

$w(T) = w\tilde{T}^{(p)} = \ldots = w(\tilde{T})$ $\square$

DT 2: $T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_i < \ldots < T_{n-1}$

Obs: $x, y \in V_k$ $\quad d_{T_k}(x_0, y) = d_{T_l}(x_0, y)$ $\forall\ k \le l \le n-1$

T_0 conservă distanțele.

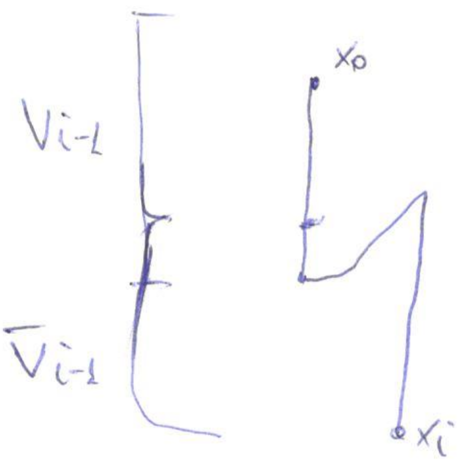
T_1 cons. distanțe.

$\boxed{x_0 = v_1}$

$\mathcal{J}_k$ $\quad d_{T_k}(\cancel{x_0}, b) = d_G(\cancel{x_0}, b)$

$\mathcal{J}(1), \ldots \mathcal{J}(i-1) \Rightarrow \mathcal{J}(i)$ $\quad 3 \le i \le n-1$

$d_{T_i}(x_0, x_i) = d_G(x_0, x_i)$



Fie P x_0, x_i - lanț optim în G

Fie z' primul vf din P care nu aparține lui V_{i-1} ($\exists$, deci $x_i \notin V_{i-1}$)

z'' vf. ~~punctat~~ ponderat în P lui z'

$z'' \in V_{i-1}$.

$d_G(x_0, x_i) \ge d_G(x_0, z'') = w(x_0 \overset{P}{—} z'') + w(z'', z') =$

$= d_{T_{i-1}}(x_0, z'') + w(z'', z') \ge d_{T_i}(x_0, x_i)$

un sublanț al unui lanț economic este economic.

$z'' \in V_{i-1}$

$z' \in \overline{V_{i-1}}$

6