LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul XII

Claudia MUREȘAN
cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2015–2016, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Am văzut că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ (alte notații: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$), avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Latici mărginite, latici distributive

$(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ (alte notații: $(L, \leq, 0, 1)$, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$) se numește *latice mărginită* ddacă:

- $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este latice;
- $0 = \min(L, \leq)$ și $1 = \max(L, \leq)$.

O latice $(L, \vee, \wedge)$ se zice *distributivă* ddacă satisface următoarele condiții echivalente, numite *legile de distributivitate*:
(d_1) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(d_2) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ o latice mărginită.

- Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$, numit *complement al lui* x, astfel încât: $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0. \end{cases}$
- Laticea mărginită L se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.
- Dacă L este distributivă, atunci orice $x \in L$ are cel mult un complement în L.
- Așadar, dacă L este distributivă și complementată, atunci orice $x \in L$ are **exact** un complement în L (i. e. unul și numai unul).
- Întotdeauna, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Latici complete

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă satisface următoarele condiții echivalente:

- pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ (notat și $\displaystyle\bigwedge_{x \in A} x$) în posetul $(L, \leq)$;
- pentru orice $A \subseteq L$, există $\sup(A)$ (notat și $\displaystyle\bigvee_{x \in A} x$) în posetul $(L, \leq)$.

- Orice latice completă este mărginită.
- Orice latice finită și nevidă este completă.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Algebra produs direct al familiei vide

Amintesc că:

- **Produsul direct al familiei vide** de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
- În consecință, **algebra produs direct al familiei vide de algebre** este **un singleton: o algebră cu un singur element**, deci cu toate operațiile întorcând drept rezultat acel element.
- Pentru orice mulțime A, $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide: un singleton).

Operații zeroare ≡ constante

Definiție

Dacă $\mathcal{A}$ este o structură algebrică, având mulțimea suport A, iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n–ară* (*operație de aritate n*, *operație cu n argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^n \to A$.

- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație* 0–*ară* (*operație de aritate* 0, *operație fără argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^0 \to A$, deci o funcție $f : \{a\} \to A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din** A.
- Constantele 0 și 1 dintr–o latice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr–un inel unitar etc..

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate

Definiție

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarcă

În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg x$).
Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{} : B \rightarrow B$ (sau $\neg : B \rightarrow B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notație

O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{}$ este operația ei de complementare.

Exemple de algebre Boole

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $(\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $(\mathcal{L}_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $(\mathcal{L}_2^I = \{f | f : I \rightarrow \mathcal{L}_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$:

- pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^I$, $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in \mathcal{L}_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:
  - $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
  - $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$
  - $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
  - $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$
- iar $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ dacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $(\mathcal{L}_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $(\mathcal{L}_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathcal{L}_2$:

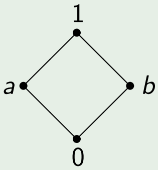
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, ..., $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0,0)$, $1 = (1,1)$, $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

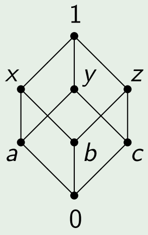
- $(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$,
- $(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$,
- $(0,1)$ și $(1,0)$ sunt incomparabile ($(0,1) \nleq (1,0)$ și $(1,0) \nleq (0,1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0,1) \vee (1,0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1,1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Exercițiu (temă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Propoziție (temă)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Operații și operații derivate ale unei algebre Boole

Definiție

Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarcă (complementarea este autoduală (autoinversă, idempotentă))

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\overline{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\overline{\overline{x}}$ al lui $\overline{x}$: x satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ x \wedge \overline{x} = 0, \end{cases}$ iar $\overline{\overline{x}}$ este unicul element al lui B cu proprietățile: $\begin{cases} \overline{\overline{x}} \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$ Așadar $x = \overline{\overline{x}}$.

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

Înainte de a trece mai departe, amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\ }$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\ }$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{\ }, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{\ }$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{\ }$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm:* $\vee$ *cu* $\wedge$, $\leq$ *cu* $\geq$, 0 *cu* 1 *(iar operația* $\bar{\ }$ *rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

Legile lui de Morgan pentru algebre Boole arbitrare

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.
- Următoarea propoziție conține o proprietate aritmetică foarte importantă a algebrelor Boole, pe care o cunoaștem deja pentru cazul particular al algebrei Boole a părților unei mulțimi.

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$:

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: (1) Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$.
Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că:
$(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.
Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:
$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$
$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$
(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *o latice și* $a, b, x, y \in L$.
Dacă $a \leq b$ *și* $x \leq y$, *atunci:* $a \vee x \leq b \vee y$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge y$.
În particular (aplicând proprietatea de mai sus și reflexivitatea unei relații de ordine): dacă $a \leq b$, *atunci* $a \vee x \leq b \vee x$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Atunci, pentru orice* $x, y \in B$, *au loc următoarele echivalențe:*

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform autodualității complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.
(3) $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat lema anterioară, definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Acum aplicăm faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$): dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$.
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și autodualitatea complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.

(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă $[a = 1$ și $b = 1]$. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă $[x \leq y$ și $y \leq x]$ ddacă $[x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1]$ ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.

Propoziție (legea de reziduație)

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B, au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operațiile $\vee$, $\wedge$ și $\bar{}$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.
- *Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operațiile $+$ și $\cdot$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ (unde am notat cu $-$ operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).
- *Aplicațiile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{I}$ sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$, și, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.*

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Subalgebre Boole

Definiție

O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$* ddacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$**, i. e.:

1. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
2. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
3. pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
4. $0, 1 \in S$.

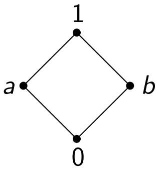
Propoziție

Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Subalgebre Boole

Demonstrație: Fie $\emptyset \neq S \subseteq B$.
"$(1) \Leftarrow (2), (3):$" Presupunem că S satisface (2) și (3). Fie $x, y \in S$. Conform (3), (2), **legilor lui de Morgan** și autodualității complementării, rezultă că $\overline{x}, \overline{y} \in S$, deci $\overline{x} \wedge \overline{y} \in S$, deci $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \in S$, dar $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y$, așadar $x \vee y \in S$.
"$(2) \Leftarrow (1), (3):$" Prin dualitate, din implicația anterioară.
"$(4) \Leftarrow (1), (2), (3):$" Fie $x \in S$, arbitrar. Atunci, conform (3), (1) și (2), rezultă $\overline{x} \in S$, deci $1 = x \vee \overline{x} \in S$ și $0 = x \wedge \overline{x} \in S$.
"$(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4):$" De exemplu, în $\mathcal{L}_2^2$ (rombul, cu diagrama Hasse figurată mai jos), considerând $S := \{0, a, 1\}$, se observă că S satisface (1), (2) și (4), dar nu satisface (3), întrucât $\overline{a} = b \notin S$.



Subalgebre Boole

Remarcă

Proprietatea **(4)** din definiția unei subalgebre Boole arată că orice subalgebră Boole S este nevidă, fapt implicat și de remarca de mai jos.

Remarcă

Este imediat că o subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Notație

Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$ restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Este imediat că orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operațiile derivate $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui $\mathcal{B}$).

Morfisme booleene

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$.

Definiție

Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \perp, \top)$, o funcție $f : A \to B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B**, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfășurat, o funcție $f : A \to B$ este *morfism boolean* ddacă:

1. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
2. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
3. pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$
4. $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Morfisme booleene

Propoziție

Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \to B$:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Demonstrație: Fie $f : A \to B$ o funcție.
"$(1) \Leftarrow (2), (3)$:" Dacă f satisface (2) și (3), atunci, pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(\overline{\overline{x \vee y}}) = f(\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = \neg f(\overline{x} \wedge \overline{y}) = \neg(f(\overline{x}) \sqcap f(\overline{y})) = \neg(\neg f(x) \sqcap \neg f(y)) = \neg\neg f(x) \sqcup \neg\neg f(y) = f(x) \sqcup f(y)$. Am aplicat autodualitatea complementării și legile lui de Morgan.
"$(2) \Leftarrow (1), (3)$:" Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.
"$(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (4), atunci, pentru orice $x \in A$, $\perp = f(0) = f(x \wedge \overline{x}) = f(x) \sqcap f(\overline{x})$ și $\top = f(1) = f(x \vee \overline{x}) = f(x) \sqcup f(\overline{x})$, ceea ce, conform definiției și unicității complementului, arată că $f(\overline{x})$ este complementul lui $f(x)$ în algebra Boole B, adică $f(\overline{x}) = \neg f(x)$.

Morfisme booleene

"$(4) \Leftarrow (1),(2),(3):$" Dacă f satisface (1), (2) și (3), atunci, pentru orice $x \in A$, $\perp = f(x) \sqcap \neg f(x) = f(x) \sqcap f(\overline{x}) = f(x \wedge \overline{x}) = f(0)$ și, dual, $\top = f(1)$.

Remarcă (temă)

Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.
Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.
Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

- Următoarea propoziție conține un exemplu foarte important de algebre Boole izomorfe.

Algebre Boole izomorfe

Propoziție

Pentru orice mulțime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, I)$ și $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Demonstrație: Dacă $I = \emptyset$, atunci cele două algebre Boole din enunț coincid cu algebra Boole trivială, așadar sunt izomorfe, cu izomorfismul boolean dat de identitatea algebrei Boole triviale.
În cele ce urmează, vom considera I nevidă.
Putem considera $L_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$, ceea ce ne permite să exprimăm operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ în funcție de operațiile aritmetice $+$, $-$ și $\cdot$ de pe $\mathbb{N}$, astfel: pentru orice $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} x \vee y = \max\{x, y\} = x + y - x \cdot y, \\ x \wedge y = \min\{x, y\} = x \cdot y, \\ \overline{x} = 1 - x. \end{cases}$$

Aceste egalități pot fi verificate ușor, de exemplu prin considerarea tuturor cazurilor privind valorile posibile ale lui $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$.

Algebre Boole izomorfe

Așadar, în algebra Boole $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$, unde $L_2^I = \{f | f : I \to L_2\} = \{f | f : I \to \{0, 1\}\}$, operațiile sunt definite punctual pe baza celor ale lui $\mathcal{L}_2$, astfel:

- $0 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $0(i) := 0$;
- $1 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $1(i) := 1$;
- pentru orice $f : I \to L_2$, $\overline{f} : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $\overline{f}(i) := \overline{f(i)} = 1 - f(i) = (1 - f)(i)$, unde 1 este funcția constantă de mai sus; așadar $\overline{f} = 1 - f$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \vee g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i) = f(i) + g(i) - f(i) \cdot g(i) = (f + g - f \cdot g)(i)$; așadar $f \vee g = f + g - f \cdot g$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \wedge g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i) = f(i) \cdot g(i) = (f \cdot g)(i)$; așadar $f \wedge g = f \cdot g$.

Algebre Boole izomorfe

Amintim că am demonstrat că următoarea funcție este o bijecție:
$\varphi : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0,1\}^I = L_2^I$, definită prin: oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A) := \chi_A \in \{f | f : I \rightarrow \{0,1\}\} = \{0,1\}^I = L_2^I$ (funcția caracteristică a lui A raportat la I).
În cele ce urmează, vom aplica proprietățile funcțiilor caracteristice.
$\varphi(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0$ și $\varphi(I) = \chi_I = 1$.
Pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, $\varphi(\overline{A}) = \chi_{\overline{A}} = \chi_{I \setminus A} = 1 - \chi_A = 1 - \varphi(A) = \overline{\varphi(A)}$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cup B) = \chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cap B) = \chi_{(A \cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$.
Așadar φ este un morfism boolean, iar faptul că este și bijectivă arată că φ este un izomorfism boolean.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. **Filtre ale unei algebre Boole**
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Filtre ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, arbitrară.
- Vom nota $\geq := \leq^{-1}$.

Definiție

O submulțime nevidă F a lui B se numește *filtru* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in B$, următoarele condiții sunt satisfăcute:

(F_1) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;
(F_2) dacă $x \in F$ și $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Notație

Mulțimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $Filt(\mathcal{B})$.

Remarcă

Orice filtru al lui $\mathcal{B}$ îl conține pe 1. Într–adevăr, dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci F este nevid prin definiție, deci există un element $x \in F$; dar, ca orice element al lui B, x satisface $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Filtre ale unei algebre Boole

Remarcă

Este imediat că $\{1\}$ și B sunt filtre ale lui $\mathcal{B}$, iar aceste filtre sunt respectiv minimul (a se vedea remarca anterioară) și maximul posetului $(Filt(\mathcal{B}), \subseteq)$.

Definiție

$\{1\}$ se numește *filtrul trivial* al lui $\mathcal{B}$, iar B se numește *filtrul impropriu* al lui $\mathcal{B}$. Orice filtru $F \neq \{1\}$ se numește *filtru netrivial*, și orice filtru $F \neq B$ se numește *filtru propriu* al lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ este $\{1\}$ (filtrul trivial). Acest lucru rezultă imediat din faptul că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ în sensul incluziunii.

Filtre proprii

Remarcă

Un filtru al lui $\mathcal{B}$ este propriu ddacă nu îl conține pe 0.
Într–adevăr, un filtru este egal cu B ddacă îl conține pe 0, pentru că B conține pe 0, iar, dacă un filtru F îl conține pe 0, atunci F conține toate elementele lui B, conform condiției (F_2).

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci: $F = B$ ddacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$.

Demonstrație: Dacă $F = B$, atunci $0 \in F$ și $\overline{0} = 1 \in F$.
Reciproc, dacă există un element $a \in B$ a. î. $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, atunci, conform condiției (F_1) din definiția unui filtru, rezultă că $0 = a \wedge \overline{a} \in F$, prin urmare $F = B$, conform remarcii anterioare.

Filtrele sunt închise la conjuncții finite nevide

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, \ldots, x_n \in F$, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$.

Demonstrație: Pentru $n = 0$, ne amintim dintr–un curs anterior că $\inf(\emptyset) = \max(B) = 1 \in F$, pentru că orice filtru îl conține pe 1, așa cum am arătat într–o remarcă de mai sus.
Pentru $n \neq 0$, demonstrăm afirmația prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$.
Pentru $n = 1$, afirmația este trivială.
Presupunem afirmația adevărată pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Considerăm $n+1$ elemente $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in F$. Conform ipotezei de inducție, rezultă că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in F$. Acum, asociativitatea lui $\wedge$ și condiția (F_1) din definiția unui filtru arată că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n+1} = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge x_{n+1} \in F$.
Rezultă că afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Așadar, afirmația este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Filtre generate de o mulțime

Propoziție

Intersecția oricărei familii nevide de filtre ale lui $\mathcal{B}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Demonstrație: Fie I o mulțime nevidă și $(F_i)_{i\in I}$ o familie de filtre ale lui $\mathcal{B}$. Să notăm cu F intersecția acestei familii de filtre: $F := \bigcap_{i\in I} F_i$. Conform unei remarci de mai sus, pentru fiecare $i \in I$, $1 \in F_i$, așadar $1 \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$, deci $F \neq \emptyset$.

Demonstrăm că F satisface condiția (F_1). Fie $x, y \in F = \bigcap_{i\in I} F_i$, așadar, pentru orice $i \in I$, $x, y \in F_i$, deci, pentru orice $i \in I$, $x \wedge y \in F_i$, conform condiției (F_1) aplicate filtrelor F_i. Urmează că $x \wedge y \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$. Acum să demonstrăm că F satisface condiția (F_2). Fie $x \in F = \bigcap_{i\in I} F_i$, ceea ce înseamnă că, pentru orice $i \in I$, $x \in F_i$. Acum, fie $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Rezultă că, pentru orice $i \in I$, $y \in F_i$, conform condiției (F_2) aplicate filtrelor F_i. Așadar, $y \in \bigcap_{i\in I} F_i = F$.

Am demonstrat că $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Filtre generate de o mulțime

Corolar

Pentru orice submulțime X a lui B, există un cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X, anume intersecția tuturor filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X.

Demonstrație: Fie X o submulțime arbitrară a lui B. Familia filtrelor lui $\mathcal{B}$ care includ pe X, fie aceasta $\mathcal{F}$, este nevidă, pentru că această familie conține filtrul impropriu, B. Conform propoziției anterioare, rezultă că intersecția familiei *Filt* este un filtru, care, evident, include pe X, fie acesta F. Înseamnă că $F \in \mathcal{F}$, conform definiției familiei $\mathcal{F}$. Dar $F = \bigcap_{G \in \mathcal{F}} G$, așadar F este inclus în fiecare $G \in \mathcal{F}$. Prin urmare, F este minimul posetului $(\mathcal{F}, \subseteq)$, i. e. F este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include pe X.

Definiție

Pentru orice submulțime X a lui B, cel mai mic filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ care include pe X se notează cu $[X)$ sau $< X >$ și se numește *filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X*.

Pentru orice element $x \in B$, filtrul generat de singletonul $\{x\}$ se notează cu $[x)$ sau $< x >$ și se numește *filtrul principal al lui $\mathcal{B}$ generat de x*. (Deci filtrele principale sunt filtrele generate de singletonuri; altfel spus, filtrele principale sunt filtrele generate de câte un singur element.)

Elementele filtrelor generate

Remarcă (caracterizarea filtrelor generate)

Definiția unui filtru generat arată că, pentru orice $X \subseteq B$, $F = [X)$ ddacă mulțimea F satisface următoarele trei condiții:

1. F este un filtru al lui $\mathcal{B}$;
2. $X \subseteq F$;
3. pentru orice filtru G al lui $\mathcal{B}$, dacă $X \subseteq G$, atunci $F \subseteq G$.

Ultima dintre aceste trei condiții afirmă că, dacă un filtru G al lui $\mathcal{B}$ include o submulțime X a lui B, atunci G include filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X.

Remarcă

Conform remarcii care arată că $\{1\}$ este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$, urmează că $[\emptyset) = \{1\}$.

Remarcă

Este imediat, atât direct din definiția unui filtru generat, cât și din caracterizarea anterioară, că, oricare ar fi un filtru F al lui $\mathcal{B}$, are loc egalitatea: $[F) = F$.

Propoziție

Pentru orice submulțime nevidă X a lui B,
$[X) = \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\,(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a)\}$.

Demonstrație: Fie
$F := \{a \in B \mid (\exists\, n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in X)\,(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a_\}$.
Demonstrăm că $F = [X)$, folosind remarca de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate. Pentru început, să arătăm că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$X \neq \emptyset$, așadar există $x \in X$. Luând, în scrierea lui F de mai sus, $n = 1$ și $x_1 = x$, rezultă că toți majoranții lui x din $\mathcal{B}$ se află în F. În particular, $x \in F$, pentru că $x \leq x$. Prin urmare, $F \neq \emptyset$.
Fie $x, y \in F$. Atunci, conform definiției mulțimii F, există $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$ și $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq y$. Conform unui rezultat valabil în orice latice, rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_m \leq x \wedge y$, așadar $x \wedge y \in F$.
Acum, fie $x \in F$ și $y \in B$, a. î. $x \leq y$. Faptul că $x \in F$ înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$, iar de aici, din relația $x \leq y$ și din tranzitivitatea lui $\leq$, obținem $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y$, ceea ce arată că $y \in F$.
Am demonstrat că F este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
Pentru orice $x \in X$, are loc $x \leq x$, așadar $x \in F$. Prin urmare, $X \subseteq F$.

Elementele filtrelor generate

Fie G un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $X \subseteq G$, și fie $x \in F$. Arătăm că rezultă $x \in G$. Faptul că $x \in F$ arată că există $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ a. î. $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \leq x$. Dar $X \subseteq G$, așadar $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \in G$, conform lemei anterioare, și deci $x \in G$ conform proprietății (F_2) din definiția unui filtru.
Așadar, $F \subseteq G$.
Conform remarcii de mai sus privind caracterizarea filtrelor generate, am demonstrat că $F = [X)$.

Corolar

Pentru orice $x \in B$, $[x) = \{a \in B \mid x \leq a\}$.

Demonstrație: Se aplică propoziția anterioară și idempotența lui $\wedge$, din care, prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$, se demonstrează imediat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} x = x$.

Exemplu (temă)

Iată un exemplu de filtru care nu este principal, ceea ce înseamnă că nu este finit generat (vom vedea); astfel, acest exemplu arată și faptul că, în general, filtrele nu sunt închise la conjuncții arbitrare (vom vedea).

Elementele filtrelor generate

Exemplu (temă – continuare)

Fie X o mulțime. Considerăm algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ și următoarea submulțime a ei: $F = \{A \mid A \subseteq X, |\overline{A}| < \infty\}$, unde $\overline{A} = X \setminus A$ pentru orice $A \subseteq X$; i. e. F este mulțimea părților cofinite ale lui X.
Atunci F este un filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ (evident, F este filtru propriu ddacă X este infinită). Și, dacă mulțimea X este infinită, atunci F nu este filtru principal al algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$.

Corolar

Pentru orice filtru F al lui $\mathcal{B}$ și orice element $x \in B$,
$[F \cup \{x\}) = \{a \in B \mid (\exists\, f \in F)\,(f \wedge x \leq a)\}$.

Demonstrație: Fie $G := \{a \in B \mid (\exists\, f \in F)\,(f \wedge x \leq a)\}$.
Fie $a \in [F \cup \{x\})$. Conform propoziției privind forma filtrului generat de o mulțime, aceasta înseamnă că există $n \in \mathbb{N}^*$ și există $x_1, \ldots, x_n \in F \cup \{x\}$, a. î. $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$.
Asociativitatea și comutativitatea lui $\wedge$ ne asigură de faptul că putem presupune că $x_1, \ldots, x_k \in F$ și $x_{k+1} = \ldots = x_n = x$, pentru un $k \in \overline{0, n}$, unde $k = 0$ înseamnă că $x_1 = \ldots = x_n = x$, iar $k = n$ înseamnă că $x_1, \ldots, x_n \in F$.
Idempotența lui $\wedge$ arată că $x_{k+1} \wedge \ldots \wedge x_n = x \wedge \ldots \wedge x = x$, atunci când $k < n$.

Elementele filtrelor generate

Fie $f := x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$, cu $f := 1$ atunci când $k = 0$. Conform unei leme de mai sus, are loc $f \in F$.

Am obținut că $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \begin{cases} f, & k = n, \\ f \wedge x, & k < n. \end{cases}$

Dar $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, așadar, dacă are loc $k < n$, atunci $f \wedge x \leq a$, iar, dacă are loc $k = n$, atunci $f \wedge x = \inf\{f, x\} \leq f \leq a$, prin urmare, și în acest caz, $f \wedge x \leq a$ (datorită tranzitivității lui $\leq$).

Am obținut că $a \in G$, deci $[F \cup \{x\}) \subseteq G$.

Acum fie $a \in G$, adică există $f \in F$ a. î. $f \wedge x \leq a$.

$f \in F$, așadar $f, x \in F \cup \{x\} \subseteq [F \cup \{x\})$, deci $f, x \in [F \cup \{x\})$, iar $[F \cup \{x\})$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $f \wedge x \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_1), și deci $a \in [F \cup \{x\})$, conform condiției (F_2) din definiția unui filtru.

Am obținut și $G \subseteq [F \cup \{x\})$.

Așadar, $[F \cup \{x\}) = G = \{a \in B \mid (\exists f \in F)(f \wedge x \leq a)\}$.

Altă demonstrație: Se putea urma și această cale în demonstrația acestui corolar: este ușor de arătat că mulțimea G definită mai sus este un filtru și că $F \cup \{x\} \subseteq G$; acum, ultimul punct din remarca privind caracterizarea filtrelor generate arată că $[F \cup \{x\}) \subseteq G$; apoi, ca mai sus, se demonstrează cealaltă incluziune.

Filtrele finit generate sunt principale

Remarcă (temă)

Funcția care duce fiecare $M \subseteq B$ în $[M)$ este un operator de închidere pe $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$.

Notație

Pentru orice mulțime M, vom nota cu $|M| < \infty$ faptul că M este finită.

Remarcă

Propoziția următoare arată că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, întrucât reciproca ei este trivială.

Propoziție

Orice filtru finit generat (i. e. generat de o mulțime finită) este principal.

Demonstrație: $[\emptyset) = \{1\} = [1)$.
Rămâne de analizat cazul filtrelor generate de mulțimi finite și **nevide**.
Fie $X := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, și $F := [X)$ (filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de X).
Vom demonstra că $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$ (i. e. că F este filtrul principal generat de conjuncția tuturor elementelor lui X).

Filtrele finit generate sunt principale

$F = [X)$, așadar $X \subseteq F$, adică $x_1, \dots, x_n \in F$. O lemă de mai sus spune că orice filtru conține toate conjuncțiile finite între elemente ale sale. Rezultă că $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \in F$.

Deci F este un filtru care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$. Pe de altă parte, filtrul principal $[x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$ este, prin definiție, cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care include singletonul $\{x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n\}$, adică este cel mai mic filtru al lui $\mathcal{B}$ care conține elementul $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$. Rezultă că $[x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \subseteq F$.

Dar $F = [X)$, deci, conform propoziției anterioare, $F = \{a \in B \mid (\exists\, k \in \mathbb{N}^*)\,(\exists\, y_1, y_2, \dots, y_k \in X)\,(y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_k \leq a)\}$.

Fie $a \in F$, arbitrar, fixat. Atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ și există $y_1, y_2, \dots, y_k \in X$, a. î. $y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_k \leq a$. Dar $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, deci $y_1, y_2, \dots y_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, așadar $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_k$, datorită idempotenței conjuncției. Am obținut că $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \leq y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_k \leq a$, prin urmare $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n \leq a$, ceea ce înseamnă că $a \in [x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$ (a se vedea mai sus forma unui filtru principal).

Deci are loc și cealaltă incluziune: $F \subseteq [x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$.

Așadar, $F = [x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n)$.

Filtrele finite sunt principale

Corolar

Orice filtru finit este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, cu $|F| < \infty$. Conform unei remarci de mai sus, $F = [F)$. Așadar F este un filtru finit generat, prin urmare F este un filtru principal, conform propoziției anterioare.

Corolar

Orice filtru al unei algebre Boole finite este principal.

Demonstrație: Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$, prin urmare $F \subseteq B$. Dacă $|B| < \infty$, atunci $|F| \leq |B| < \infty$, deci F este un filtru finit. Conform corolarului anterior, rezultă că F este un filtru principal.

Remarcă

Demonstrația propoziției anterioare arată că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$,

$$[\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

fapt valabil și pentru $n = 0$, întrucât $\inf(\emptyset) = 1$ (a se vedea un curs anterior).

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. **Ultrafiltre ale unei algebre Boole**
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Filtre prime, ultrafiltre

Definiție

Un filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ se numește *filtru prim* ddacă, pentru orice $a, b \in B$, $a \vee b \in P$ implică $a \in P$ sau $b \in P$.

Definiție

Un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ (raportat la incluziune) se numește *filtru maximal* sau *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U a. î., pentru orice filtru propriu F, $U \subseteq F$ implică $U = F$.
Altfel formulat, un *ultrafiltru* al lui $\mathcal{B}$ este un filtru propriu U cu proprietatea că, pentru orice filtru F, $U \subseteq F$ implică $U = F$ sau $F = B$.

Notație

Mulțimea ultrafiltrelor (filtrelor maximale ale) lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathrm{Max}(\mathcal{B})$.

Filtre, filtre prime

Lemă

Fie P un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $a, b \in B$. Atunci:

1. *$a \wedge b \in P$ ddacă $a \in P$ și $b \in P$;*
2. *dacă P este un filtru prim, atunci: $a \vee b \in P$ ddacă $a \in P$ sau $b \in P$.*

Demonstrație: (1) Implicația directă se obține din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq a$ și $a \wedge b = \inf\{a, b\} \leq b$. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_1) din definiția unui filtru.
(2) Implicația directă se obține din definiția unui filtru prim. Implicația reciprocă rezultă din condiția (F_2) din definiția unui filtru și faptul că $a \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$ și $b \leq \sup\{a, b\} = a \vee b$.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Propoziție (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$;*
3. *orice element $a \in B$ satisface: $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.*

Demonstrație: (1) $\Rightarrow$ (2): Ipoteza acestei implicații spune că U este ultrafiltru. Presupunem prin absurd că U nu este filtru prim, i. e. există $a, b \in B$ a. î. $a \vee b \in U$, $a \notin U$ și $b \notin U$.
Dar $a \in U \cup \{a\} \subseteq [U \cup \{a\})$ și $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $b \in U \cup \{b\} \subseteq [U \cup \{b\})$ și $U \subseteq [U \cup \{b\})$.
Prin urmare, $U \subseteq [U \cup \{a\})$, iar $a \in [U \cup \{a\})$ și $a \notin U$, și, de asemenea, $U \subseteq [U \cup \{b\})$, iar $b \in [U \cup \{b\})$ și $b \notin U$. Rezultă că $U \subsetneq [U \cup \{a\})$ și $U \subsetneq [U \cup \{b\})$, prin urmare $[U \cup \{a\}) = [U \cup \{b\}) = B$, întrucât U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$. Acest fapt este echivalent cu $0 \in [U \cup \{a\})$ și $0 \in [U \cup \{b\})$, în conformitate cu o caracterizare de mai sus a filtrelor proprii.

Ultrafiltrele coincid cu filtrele prime

Conform unui corolar anterior, $[U \cup \{a\}) = \{x \in B \mid (\exists\, e \in U)\,(e \wedge a \leq x)\}$ și $[U \cup \{b\}) = \{x \in B \mid (\exists\, f \in U)\,(f \wedge b \leq x)\}$.
Prin urmare, există $e, f \in U$ a. î. $a \wedge e = b \wedge f = 0$.
Aplicând distributivitatea lui $\mathcal{B}$, obținem:
$0 = 0 \vee 0 = (a \wedge e) \vee (b \wedge f) = (a \vee b) \wedge (a \vee f) \wedge (e \vee b) \wedge (e \vee f) \in U$, pentru că $a \vee b \in U$, $a \vee f = \sup\{a, f\} \geq f \in U$, $e \vee b = \sup\{e, b\} \geq e \in U$, $e \vee f = \sup\{e, f\} \geq f \in U$, și datorită condițiilor (F_2) și (F_1) din definiția unui filtru. Dar acest lucru înseamnă că $U = B$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii la care am apelat și mai înainte. Dar U este un ultrafiltru, deci, în particular, U este un filtru propriu. Am obținut o contradicție.
Prin urmare, U este un filtru prim al lui $\mathcal{B}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Ipoteza acestei implicații spune că U este filtru prim. Pentru orice $a \in B$, $a \vee \overline{a} = 1 \in U$, pentru că orice filtru conține pe 1, iar acum definiția unui filtru prim arată că $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subsetneq F$, așadar există un element $a \in F \setminus U$. Conform ipotezei acestei implicații, faptul că $a \notin U$ implică $\overline{a} \in U \subset F$, prin urmare $a \in F$ și $\overline{a} \in F$, deci $F = B$ conform unei caracterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Dar acest lucru înseamnă că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, datorită chiar definiției ultrafiltrelor.

Corolar (caracterizare a ultrafiltrelor)

Fie U un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$;*
2. *oricare ar fi $a \in B$,* **exact** *unul dintre elementele a și $\overline{a}$ se află în U;*
3. *oricare ar fi $a \in B$, are loc echivalența: $a \in U$ ddacă $\overline{a} \notin U$.*

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (2)$: Fie $a \in B$, arbitrar, fixat. Dacă U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$, atunci, conform propoziției anterioare, $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, și, în plus, U este un filtru prim, așadar nu putem avea simultan $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, cum arată o caracterizare a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Înseamnă că **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.
$(2) \Rightarrow (1)$: Ipoteza acestei implicații arată că nu există $a \in B$, a. î. $a \in U$ și $\overline{a} \in U$, prin urmare U este un filtru propriu, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii dintr–o lemă de mai sus. Deci U este un filtru propriu și, conform ipotezei acestei implicații, oricare ar fi $a \in B$, avem $a \in U$ sau $\overline{a} \in U$, ceea ce înseamnă că U este un ultrafiltru, după cum arată propoziția anterioară.
$(2) \Leftrightarrow (3)$: Afirmația (3) este o simplă transcriere a lui (2), dacă ținem seama de autodualitatea operației de complementare ($\overline{\overline{a}} = a$, pentru orice $a \in B$).

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Mulțimi inductiv ordonate

- În continuare, vom face o serie de preparative pentru demonstrarea celei mai importante teoreme din teoria algebrelor Boole, anume **Teorema de reprezentare a lui Stone**.
- Pentru definițiile elementelor distinse ale unui poset cu care vom lucra în continuare (majorant, element maximal), a se vedea cursurile anterioare.

Definiție

O *mulțime inductiv ordonată* este un poset cu proprietatea că orice parte total ordonată a sa are (cel puțin) un majorant.

- În definiția anterioară, **parte total ordonată** a unui poset $(P, \leq)$ înseamnă submulțime S a lui P care este lanț cu ordinea indusă (**ordinea indusă** este $\leq \cap S^2$), i. e. submulțime $S \subseteq P$ cu proprietatea că oricare două elemente ale submulțimii S sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.

Remarcă

Orice mulțime inductiv ordonată este nevidă, pentru că ea conține măcar un element, anume un majorant al submulțimii $\emptyset$ a ei.

Remarcă

După cum am demonstrat într–un curs anterior, orice element al unui poset nevid este majorant pentru $\emptyset$.

Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn

Remarcă

Cele două remarci anterioare arată că, pentru a demonstra că un poset este mulțime inductiv ordonată, este suficient să demonstrăm că:

- posetul este nevid;
- orice parte total ordonată **nevidă** a sa are (cel puțin) un majorant.

Lemă (Lema lui Zorn)

Orice mulțime inductiv ordonată are (cel puțin) un element maximal.

- Pentru demonstrația **Lemei lui Zorn**, a se consulta cărțile din bibliografia din Cursul I. De asemenea, numeroase cărți de noțiuni de bază de algebră superioară conțin demonstrația acestei leme.
- Acest enunț este uneori întâlnit sub numele de **Axioma lui Zorn**. Motivul este că enunțul acesta este echivalent cu **Axioma alegerii**, și unii autori îl includ în sistemul axiomatic al teoriei mulțimilor în locul **Axiomei alegerii**, care, în acest caz, devine **Lema alegerii**.

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Cunoaștem aceste definiții:

- *algebra Boole trivială* este algebra Boole cu un singur element, i. e. algebra Boole cu $0 = 1$;
- *o algebră Boole netrivială* este o algebră Boole care nu este trivială, i. e. o algebră Boole cu cel puțin două elemente, i. e. o algebră Boole cu $0 \neq 1$.

Remarcă

Este evident, din faptul că filtrul trivial $\{1\}$ este inclus în orice filtru al lui $\mathcal{B}$, că au loc echivalențele: $\mathcal{B}$ are filtre proprii ddacă $\{1\}$ este filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ ddacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole netrivială.

Teoremă (Teorema de existență a ultrafiltrului)

Orice filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ este inclus într–un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Cu alte cuvinte, pentru orice filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$, există un ultrafiltru U al lui $\mathcal{B}$, a. î. $F \subseteq U$.

Demonstrație: Fie F un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ care îl includ pe F:
$\mathcal{P} := \{G \mid G \in Filt(\mathcal{B}), G \neq B, G \supseteq F\}$.
Demonstrăm că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.
Evident, $F \in \mathcal{P}$, așadar $\mathcal{P} \neq \emptyset$.
Fie $\mathcal{T}$ o parte total ordonată nevidă a lui $\mathcal{P}$ (i. e. $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$, și, oricare ar fi $G, H \in \mathcal{T}$, avem: $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$).
Notăm cu $M := \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$. Demonstrăm că M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Evident, pentru orice $G \in \mathcal{T}$, $M \supseteq G$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în mulțimea părților lui $\mathcal{B}$, ordonată cu $\subseteq$. Mai avem de demonstrat că $M \in \mathcal{P}$, i. e. că M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F.
Să nu uităm că $\mathcal{T} \neq \emptyset$.
Fiecare element al lui $\mathcal{P}$ îl include pe F, prin urmare fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ satisface $G \supseteq F$, așadar $M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G \supseteq F$.
Acum să demonstrăm că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$M \supseteq F \neq \emptyset$ (pentru că F este filtru), deci $M \neq \emptyset$.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Să demonstrăm că M satisface condiția (F_1) din definiția unui filtru. Fie $x, y \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G, H \in \mathcal{T}$, a. î. $x \in G$ și $y \in H$. Dar $(\mathcal{T}, \subseteq)$ este total ordonată, deci $G \subseteq H$ sau $H \subseteq G$. Dacă, de exemplu, $G \subseteq H$, atunci rezultă că $x, y \in H$, iar H este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_1), așadar $x \wedge y \in H \subseteq M$, prin urmare $x \wedge y \in M$. Cazul $H \subseteq G$ se tratează analog. Deci M satisface condiția (F_1).

Acum să demonstrăm că M satisface condiția (F_2) din definiția unui filtru. Fie $x \in M$ și $y \in B$, cu $x \leq y$. $x \in M = \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G$, așadar există $G \in \mathcal{T}$ a. î. $x \in G$. Dar G este un filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface condiția (F_2), iar $x \leq y$, așadar $y \in G \subseteq M$, prin urmare $y \in M$. Deci M satisface condiția (F_2).

Am demonstrat că M este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

Fiecare $G \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$ este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, deci $0 \notin G$, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Rezultă că $0 \notin \bigcup_{G \in \mathcal{T}} G = M$, deci M este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$, conform aceleiași caracterizări a filtrelor proprii.

Prin urmare, $M \in \mathcal{P}$, deci M este un majorant al lui $\mathcal{T}$ în posetul $(\mathcal{P}, \subseteq)$.

Am demonstrat că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ este o mulțime inductiv ordonată.

Teorema de existență a ultrafiltrului

Conform **Lemei lui Zorn**, rezultă că $(\mathcal{P}, \subseteq)$ are (cel puțin) un element maximal. Fie U un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$.
Atunci $U \in \mathcal{P}$, deci U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și $U \supseteq F$.
Fie P un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ a. î. $U \subseteq P$. Cum $F \subseteq U$, rezultă că $F \subseteq P$.
Așadar P este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ care îl include pe F, adică $P \in \mathcal{P}$. Dar U este un element maximal al lui $(\mathcal{P}, \subseteq)$, iar $P \in \mathcal{P}$ și $U \subseteq P$. Conform definiției unui element maximal al unui poset, rezultă că $U = P$.
Așadar, U este un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$ și, pentru orice filtru propriu P al lui $\mathcal{B}$ cu $U \subseteq P$, rezultă că $U = P$. Deci U este un element maximal al mulțimii filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$, adică U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$.
Am demonstrat că U este un ultrafiltru al lui $\mathcal{B}$ și $F \subseteq U$.

Corolar

Orice algebră Boole netrivială are (cel puțin) un ultrafiltru.

Demonstrație: Conform remarcii care precedă **Teorema de existență a ultrafiltrului**, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este netrivială, atunci $\mathcal{B}$ are cel puțin un filtru propriu, de exemplu filtrul trivial $\{1\}$. Aplicând **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că $\mathcal{B}$ are (cel puțin) un ultrafiltru care include acest filtru propriu.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. **Teorema de reprezentare a lui Stone**
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm două algebre Boole arbitrare $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ și $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$.

Remarcă

Pentru orice morfism boolean $f : A \to B$, au loc:

- $f(0) = 0$, deci $0 \in f^{-1}(\{0\})$, adică $\{0\} \subseteq f^{-1}(\{0\})$;
- $f(1) = 1$, deci $1 \in f^{-1}(\{1\})$, adică $\{1\} \subseteq f^{-1}(\{1\})$.

Propoziție

Fie $f : A \to B$ un morfism boolean. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *f este injectiv;*
2. $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$*;*
3. $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$*.*

Demonstrație: $(1) \Rightarrow (3)$: Fie $x \in f^{-1}(\{1\})$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \in \{1\}$, i. e. $f(x) = 1$. Dar $f(1) = 1$, așadar faptul că f e injectivă implică $x = 1$, i. e. $x \in \{1\}$. Deci $f^{-1}(\{1\}) \subseteq \{1\}$, iar cealaltă incluziune are loc pentru orice morfism boolean, prin urmare $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$.

Caracterizare a injectivității morfismelor booleene

$(3) \Rightarrow (1)$: Fie $x, y \in A$, a. î. $f(x) = f(y)$, ceea ce este echivalent cu $f(x) \leftrightarrow f(y) = 1$, conform unei proprietăți aritmetice a algebrelor Boole demonstrate mai sus. Dar orice morfism boolean comută cu echivalența booleană, prin urmare $f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y)$. Am obținut: $f(x \leftrightarrow y) = 1$, i. e. $x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, deci $x \leftrightarrow y = 1$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform aceleiași proprietăți aritmetice la care am făcut apel și mai sus. Am demonstrat că f este injectivă.

Echivalența $(1) \Leftrightarrow (2)$ rezultă, prin dualitate, din echivalența $(1) \Leftrightarrow (3)$, pe care tocmai am demonstrat–o.

Un alt mod de a încheia demonstrația acestei propoziții este demonstrarea echivalenței $(2) \Leftrightarrow (3)$, care poate fi efectuată astfel: pentru orice $x \in A$, au loc echivalențele: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $f(x) = 0$ ddacă $\overline{f(x)} = \overline{0}$ (conform unei alte proprietăți aritmetice a algebrelor Boole demonstrate mai sus) ddacă $f(\overline{x}) = 1$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\})$. Așadar, dacă $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x = \overline{\overline{x}} \in f^{-1}(\{1\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ ddacă $\overline{x} = 0$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{0} = 1$ ddacă $x \in \{1\}$; deci $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$. Reciproc, dacă $f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, atunci, pentru orice $x \in A$, avem: $x \in f^{-1}(\{0\})$ ddacă $\overline{x} \in f^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ ddacă $\overline{x} = 1$ ddacă $x = \overline{\overline{x}} = \overline{1} = 0$ ddacă $x \in \{0\}$; deci $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Remarcă

Algebra Boole trivială este izomorfă cu $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ și cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^{\emptyset} = \mathcal{L}_2^0$, care are drept mulțime suport pe $L_2^0 = L_2^{\emptyset} = \{f \mid f : \emptyset \to L_2\} = \{(\emptyset, \emptyset, L_2)\}$ (acest triplet este, după cum știm, unica funcție de la $\emptyset$ la L_2).

- Pentru o formulare clară a următoarelor două rezultate, vom renunța, în cele ce urmează, la fixarea algebrei Boole $\mathcal{B}$.

Teoremă (Teorema de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \bar{}, \emptyset, X)$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ o algebră Boole netrivială și $X := \mathrm{Max}(\mathcal{B})$ (X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$).
Conform corolarului **Teoremei de existență a ultrafiltrului**, $X \neq \emptyset$.
Să definim o funcție $d : B \to \mathcal{P}(X)$, prin: pentru orice $a \in B$, $d(a) := \{U \in X \mid a \in U\}$.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Fie $a, b \in B$ și $U \in X$, toate arbitrare și fixate. Din lema care succede definiția ultrafiltrelor și faptul că ultrafiltrele coincid cu filtrele prime, cunoscut din propoziția privind caracterizarea ultrafiltrelor, obținem:

$$\begin{array}{lll} U \in d(a \wedge b) & \text{ddacă} & a \wedge b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in U \text{ și } b \in U \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \text{ și } U \in d(b) \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \cap d(b) \end{array}$$

și

$$\begin{array}{lll} U \in d(a \vee b) & \text{ddacă} & a \vee b \in U \\ & \text{ddacă} & a \in U \text{ sau } b \in U \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \text{ sau } U \in d(b) \\ & \text{ddacă} & U \in d(a) \cup d(b). \end{array}$$

Am obținut: $d(a \wedge b) = d(a) \cap d(b)$ și $d(a \vee b) = d(a) \cup d(b)$, pentru orice $a, b \in B$.

Cum orice filtru îl conține pe 1, are loc: $d(1) = X$. Întrucât orice ultrafiltru este filtru propriu, iar niciun filtru propriu nu îl conține pe 0, are loc: $d(0) = \emptyset$.

Conform unei propoziții de mai sus despre morfisme booleene, rezultă că d comută și cu operația de complementare (fapt care putea fi demonstrat și folosind corolarul privind caracterizarea ultrafiltrelor), așadar d este un morfism boolean.

Teorema de reprezentare a lui Stone

Pentru încheierea demonstrației, a rămas de arătat că d este injectiv. Fie $a \in d^{-1}(\{\emptyset\})$, ceea ce este echivalent cu: $d(a) = \emptyset$. Presupunem prin absurd că $a \neq 0$. Atunci filtrul principal $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ nu îl conține pe 0, prin urmare $[a)$ este un filtru propriu, conform unei caracterizări a filtrelor proprii. Din **Teorema de existență a ultrafiltrului**, rezultă că există un ultrafiltru U cu $[a) \subseteq U$. Dar $a \in [a)$, prin urmare $a \in U$, adică $U \in d(a) = \emptyset$; am obținut o contradicție. Așadar, $a = 0$, adică $d^{-1}(\{\emptyset\}) \subseteq \{0\}$, deci $d^{-1}(\{\emptyset\}) = \{0\}$, întrucât cealaltă incluziune este satisfăcută de orice morfism boolean de la $\mathcal{B}$ la $\mathcal{P}(X)$. Această egalitate arată că morfismul boolean d este injectiv, conform propoziției anterioare.

Corolar (reformulare a Teoremei de reprezentare a lui Stone)

Pentru orice algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X$.

Demonstrație: Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole netrivială. Conform **Teoremei de reprezentare a lui Stone**, există o mulțime nevidă X și un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Conform unei propoziții din cursul anterior, există un izomorfism boolean $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{L}_2^X$. Prin urmare, compunerea $\varphi \circ d : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}_2^X$ este un morfism boolean injectiv.

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă

Algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială, i. e., oricare ar fi o algebră Boole netrivială $\mathcal{B}$, de la $\mathcal{L}_2$ la $\mathcal{B}$ există un morfism injectiv de algebre Boole, anume morfismul care duce pe 0 în 0 și pe 1 în 1. (Morfismele injective se numesc *scufundări*.)

Remarcă

Cu terminologia menționată în remarca anterioară, **Teorema de reprezentare a lui Stone** poate fi formulată și astfel: orice algebră Boole netrivială se scufundă în algebra Boole a părților unei mulțimi (sau, echivalent, într–o putere a algebrei Boole standard).

Remarcă

Teorema de reprezentare a lui Stone arată că toate proprietățile aritmetice ale algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$, cu X mulțime arbitrară (proprietățile din calculul cu mulțimi demonstrate la seminar sau date ca temă) sunt valabile în orice algebră Boole (cu operațiile booleene corespunzătoare). A se vedea, de exemplu, mnemonicul din aritmetica booleană de la începutul acestui curs; proprietățile din acel mnemonic erau cunoscute, pentru algebra Boole $\mathcal{P}(X)$, din primele seminarii.

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă

O altă consecință a **Teoremei de reprezentare a lui Stone** și a faptului că algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, se scufundă în orice algebră Boole netrivială este că orice **identitate** pentru elementele unei algebre Boole (arbitrare) este satisfăcută în orice algebră Boole ddacă este satisfăcută în algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, ddacă este satisfăcută într–o algebră Boole netrivială fixată.

Atenție: este vorba de *identități*, adică proprietăți privitoare la elementele unei algebre Boole arbitrare în care apar doar variabile cuantificate universal (variabile care denumesc elementele algebrei Boole), operații ale algebrei Boole și relația de egalitate. Desigur, poate apărea în aceste proprietăți și relația de ordine a algebrei Boole, întrucât, după cum știm, pentru orice elemente x și y ale unei latici, au loc echivalențele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$, cu notațiile uzuale.

În cele ce urmează, x, y și z vor fi elemente ale unei algebre Boole arbitrare, iar notațiile componentelor structurii de algebră Boole vor fi uzuale.

De exemplu, proprietatea $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$ este o identitate, și, întrucât este satisfăcută în $\mathcal{L}_2$, rezultă că este satisfăcută în orice algebră Boole, ceea ce rezulta și dacă observam că această identitate este satisfăcută în $\mathcal{L}_2^3$ (cubul), de exemplu.

Consecință a Teoremei de reprezentare a lui Stone

Remarcă (continuare)

Dar proprietatea $x \vee y = 1 \Rightarrow [x = 1 \text{ sau } y = 1]$ nu este o identitate, pentru că $\Rightarrow$ apare în această proprietate. După cum se observă, proprietatea aceasta este satisfăcută în $\mathcal{L}_1$ și în $\mathcal{L}_2$, dar nu este satisfăcută în $\mathcal{L}_2^2$ sau $\mathcal{L}_2^3$, de exemplu, de fapt nu este satisfăcută în nicio algebră Boole diferită de algebra Boole trivială și de algebra Boole standard, pentru că această proprietate spune că orice element x al algebrei Boole fie este egal cu 1, fie îl are drept complement pe 1, și deci este egal cu 0, așadar $\{0, 1\}$ sunt singurele elemente ale algebrei Boole care satisface proprietatea, deci această algebră Boole poate fi doar $\mathcal{L}_1$ (pentru cazul în care $0 = 1$) sau $\mathcal{L}_2$ (pentru cazul în care $0 \neq 1$).
Pentru doritori, a se vedea și Corolarul 20 de la pagina 65 din cartea *General Lattice Theory* de G. Grätzer.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. **Congruențe ale unei algebre Boole**
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Congruențe ale unei algebre Boole

- Pentru cele ce urmează, fixăm o algebră Boole arbitrară, $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$.
- Știm că o relație de echivalență pe o mulțime este o relație binară reflexivă, simetrică și tranzitivă (adică o preordine simetrică) pe acea mulțime.

Definiție

Se numește *congruență a algebrei Boole* $\mathcal{B}$ o relație de echivalență $\sim$ pe B care este compatibilă cu operațiile algebrei Boole $\mathcal{B}$, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

1. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$;
2. dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$;
3. dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$.

Congruențe ale unei algebre Boole

Remarcă

Dacă, în definiția anterioară, veți generaliza cele trei relații dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operațiile binare $\vee$ și $\wedge$ și operația unară $\bar{}$, pentru a obține relația care dă compatibilitatea unei relații de echivalență cu o operație de aritate oarecare, atunci veți observa că: compatibilitatea cu operațiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$, i. e. constantele 0 și 1, se scrie astfel: $0 \sim 0$ și $1 \sim 1$. Deci compatibilitatea cu operațiile zeroare este satisfăcută de orice relație binară reflexivă pe B, în particular de orice relație de echivalență pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 și 1 nu a apărut ca o cerință în definiția de mai sus.

Remarcă

O congruență a lui $\mathcal{B}$ este o relație de echivalență pe B care este și subalgebră Boole a algebrei Boole produs direct $B^2 = B \times B$.
Pentru doritori, a se vedea și o observație de la pagina 20 din cartea *A Survey on Congruence Lattice Representations*, de E. T. Schmidt.

Propoziție

În definiția de mai sus, a unei congruențe pe o algebră Boole, fiecare dintre condițiile (1) și (2) este implicată de celelalte două condiții.

Demonstrație: $(1) \Leftarrow (2), (3)$: Fie $\sim$ o relație de echivalență pe B compatibilă cu $\wedge$ și cu $\bar{\ }$, și fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Atunci

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } \overline{y} \sim \overline{y'},$$

deci

$$\overline{x} \wedge \overline{y} \sim \overline{x'} \wedge \overline{y'},$$

prin urmare

$$\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \sim \overline{\overline{x'} \wedge \overline{y'}},$$

adică

$$x \vee y \sim x' \vee y',$$

conform **legilor lui de Morgan**.
$(2) \Leftarrow (1), (3)$: Analog, sau prin dualitate, din implicația "$(1) \Leftarrow (2), (3)$".

Propoziție

Orice congruență a unei algebre Boole este compatibilă cu implicația și echivalența booleană.
I. e., pentru orice congruență $\sim$ a lui $\mathcal{B}$ și orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

- *dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'$;*
- *dacă $x \sim x'$ și $y \sim y'$, atunci $x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'$.*

Demonstrație: Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim x'$ și $y \sim y'$. Aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\bar{\ }$ și cu $\vee$, precum și definiția implicației booleene, obținem:

$$\overline{x} \sim \overline{x'} \text{ și } y \sim y',$$

deci

$$\overline{x} \vee y \sim \overline{x'} \vee y',$$

adică

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y'.$$

Congruențe ale unei algebre Boole

Acum, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\rightarrow$, pe care tocmai am demonstrat–o, compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$ și definiția echivalenței booleene, din $x \sim x'$ și $y \sim y'$ obținem:

$$x \rightarrow y \sim x' \rightarrow y' \text{ și } y \rightarrow x \sim y' \rightarrow x',$$

așadar

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \sim (x' \rightarrow y') \wedge (y' \rightarrow x'),$$

adică

$$x \leftrightarrow y \sim x' \leftrightarrow y'.$$

- În secțiunea care urmează în acest curs, vom stabili o bijecție între mulțimea congruențelor unei algebre Boole și mulțimea filtrelor sale. Pentru acest lucru, ne va folosi remarca următoare.

Remarcă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $x, y \in B$. Atunci are loc echivalența: $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$.
Într–adevăr, știm, dintr–o lemă de mai sus, că, pentru orice $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b \in F$ ddacă $a \in F$ și $b \in F$. Aplicând acest rezultat elementelor $a := x \rightarrow y$ și $b := y \rightarrow x$, obținem echivalența de mai sus.

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 **Corespondența bijectivă filtre – congruențe**
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Notație

Notăm prin $Con(\mathcal{B})$ mulțimea congruențelor lui $\mathcal{B}$.

Propoziție

Mulțimea congruențelor unei algebre Boole este în bijecție cu mulțimea filtrelor sale.

Existența unei bijecții se demonstrează construind două funcții între cele două mulțimi, în sensuri opuse, și arătând că sunt inverse una celeilalte, așadar sunt inversabile, deci sunt bijecții.
Iată definițiile celor două funcții pentru o algebră Boole oarecare $\mathcal{B}$:

- funcția de la mulțimea filtrelor la mulțimea congruențelor: oricărui filtru F îi asociem congruența $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcția de la mulțimea congruențelor la mulțimea filtrelor: oricărei congruențe $\sim$ îi asociem filtrul $F^{\sim}$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$ ($F^{\sim}$ este clasa de echivalență a lui 1 raportat la $\sim$).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Așadar, definim funcțiile:

- $\varphi : Filt(\mathcal{B}) \rightarrow Con(\mathcal{B})$, pentru orice $F \in Filt(\mathcal{B})$, $\varphi(F) \overset{\text{notație}}{=} \sim_F \subseteq B^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- $\psi : Con(\mathcal{B}) \rightarrow Filt(\mathcal{B})$, pentru orice $\sim \in Con(\mathcal{B})$, $\psi(\sim) \overset{\text{notație}}{=} F^{\sim} \subseteq B$, definit prin: $F^{\sim} := \{x \in B \mid x \sim 1\}$.

Pentru început, să demonstrăm că φ și ψ sunt corect definite, i. e.:

- pentru orice $F \in Filt(\mathcal{B})$, are loc $\sim_F \in Con(\mathcal{B})$;
- pentru orice $\sim \in Con(\mathcal{B})$, are loc $F^{\sim} \in Filt(\mathcal{B})$.

Să considerăm, așadar, un filtru F al lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că relația binară $\sim_F$ pe B definită mai sus este o congruență a lui $\mathcal{B}$.

Pentru orice $x \in B$, $x = x$, deci $x \leftrightarrow x = 1 \in F$, așadar $x \sim_F x$, deci $\sim_F$ este reflexivă.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$, așadar $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $y \leftrightarrow x \in F$, deci $x \sim_F y$ ddacă $y \sim_F x$, așadar $\sim_F$ este simetrică.

Pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$ ddacă $x \rightarrow y \in F$ și $y \rightarrow x \in F$, conform unei remarci de mai sus.

Fie $x, y, z \in B$, a. î. $x \sim_F y$ și $y \sim_F z$, i. e. $x \rightarrow y, y \rightarrow x, y \rightarrow z, z \rightarrow y \in F$.

Demonstrăm că $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$.

$(x \to y) \wedge (y \to z) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge x) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee 0 \vee 0 \vee (y \wedge z) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge z) \leq \overline{x} \vee z = x \to z$ (pentru că $\overline{x} \wedge \overline{y} \leq \overline{x}$ și $y \wedge z \leq z$, și aplicând o lemă amintită la începutul cursului), așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \leq x \to z$.
Dar $x \to y, y \to z \in F$, așadar $(x \to y) \wedge (y \to z) \in F$, deci $x \to z \in F$, conform condițiilor (F_1) și (F_2) aplicate filtrului F.
Analog, rezultă că $z \to x \in F$.
Am obținut: $x \to z, z \to x \in F$, deci $x \sim_F z$.
Așadar $\sim_F$ este tranzitivă.
Prin urmare, $\sim_F$ este o relație de echivalență.
Fie $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$, deci $x \to x', x' \to x, y \to y', y' \to y \in F$.
Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.
$(x \to x') \wedge (y \to y') = (\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{y} \vee y') \leq (\overline{x} \vee x' \vee y') \wedge (\overline{y} \vee x' \vee y') = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \vee x' \vee y' = \overline{x \vee y} \vee x' \vee y' = (x \vee y) \to (x' \vee y')$. Am folosit faptul că $\overline{x} \vee x' \leq \overline{x} \vee x' \vee y'$, $\overline{y} \vee y' \leq \overline{y} \vee x' \vee y'$, din nou lema la care am apelat și mai sus, și **legile lui de Morgan**. Deci $(x \to x') \wedge (y \to y') \leq (x \vee y) \to (x' \vee y')$.
Cum $x \to x', y \to y' \in F$, rezultă că $(x \to x') \wedge (y \to y') \in F$, deci $(x \vee y) \to (x' \vee y') \in F$, prin aplicarea condițiilor (F_1) și (F_2).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Analog, se obține faptul că $(x' \vee y') \rightarrow (x \vee y) \in F$.
Rezultă că $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, deci $\sim_F$ este compatibilă cu $\vee$.
Să demonstrăm că $\sim_F$ este compatibilă cu $\bar{\ }$.
$\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} = (\overline{x} \rightarrow \overline{x'}) \wedge (\overline{x'} \rightarrow \overline{x}) = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{x'}) \wedge (\overline{\overline{x'}} \vee \overline{x}) = (x \vee \overline{x'}) \wedge (x' \vee \overline{x}) = (\overline{x} \vee x') \wedge (\overline{x'} \vee x) = (x \rightarrow x') \wedge (x' \rightarrow x) = x \leftrightarrow x' \in F$, prin urmare $\overline{x} \leftrightarrow \overline{x'} \in F$, deci $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$.
Așadar $\sim_F$ este compatibilă și cu $\bar{\ }$.
Conform propoziției care succede definiția unei congruențe, rezultă că $\sim_F$ este compatibilă și cu $\wedge$.
Deci $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, i. e. $\varphi(F) = \sim_F \in Con(\mathcal{B})$, așadar φ este corect definită.
Acum să considerăm o congruență $\sim$ a lui $\mathcal{B}$, și să demonstrăm că submulțimea $F^{\sim}$ a lui B definită mai sus este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
$\sim$ este reflexivă, prin urmare $1 \sim 1$, deci $1 \in F^{\sim}$, așadar $F^{\sim} \neq \emptyset$.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Să demonstrăm că $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Dacă $x, y \in F^{\sim}$, i. e. $x \sim 1$ și $y \sim 1$, atunci, aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\wedge$, rezultă că $x \wedge y \sim 1 \wedge 1 = 1$, deci $x \wedge y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface condiția (F_1).
Acum să demonstrăm că $F^{\sim}$ îndeplinește condiția (F_2).

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

Dacă $x \in F^{\sim}$ și $x \leq y$, atunci $x \sim 1$ și $x \vee y = y$, deci, folosind faptul că $y \sim y$, datorită reflexivității lui $\sim$, și aplicând compatibilitatea lui $\sim$ cu $\vee$, rezultă că $y = y \vee x \sim y \vee 1 = 1$, deci $y \in F^{\sim}$. Așadar $F^{\sim}$ satisface și condiția (F_2).
Am demonstrat că $F^{\sim}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, i. e. $\psi(\sim) = F^{\sim} \in Filt(\mathcal{B})$, așadar ψ este corect definită.
În fine, să demonstrăm că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte.
Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $F^{\sim_F} = F$.
Pentru orice $x \in B$, avem: $x \leftrightarrow 1 = (x \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow x) = 1 \wedge (\overline{1} \vee x) = 0 \vee x = x$, așadar $F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = \{x \in B \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} = \{x \in B \mid x \in F\} = F$.
Deci $\psi(\varphi(F)) = F^{\sim_F} = F$.
Fie $\sim$ o congruență a lui $\mathcal{B}$. Demonstrăm că $\sim_{F^{\sim}} = \sim$, prin dublă incluziune.
Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
Dacă $(x, y) \in \sim$, i. e. $x \sim y$, atunci, din compatibilitatea lui $\sim$ cu $\leftrightarrow$, obținem: $x \leftrightarrow y \sim y \leftrightarrow y = 1 \in F^{\sim}$, prin urmare $x \sim_{F^{\sim}} y$, i. e. $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$. Așadar $\sim \subseteq \sim_{F^{\sim}}$.
Calculăm: $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (\overline{x} \vee y) = (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$.
Dacă $(x, y) \in \sim_{F^{\sim}}$, i. e. $x \sim_{F^{\sim}} y$, ceea ce este echivalent (vedeți mai sus) cu $x \rightarrow y \in F^{\sim}$ și $y \rightarrow x \in F^{\sim}$, i. e. $x \rightarrow y \sim 1$ și $y \rightarrow x \sim 1$, atunci, conform calculului din paragraful anterior și compatibilității lui $\sim$ cu $\wedge$, avem:

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

$x \wedge y = x \wedge (x \rightarrow y) \sim x \wedge 1 = x$, deci $x \wedge y \sim x$. Analog, rezultă că și $x \wedge y \sim y$. Deci $x \sim x \wedge y \sim y$, prin urmare $x \sim y$, i. e. $(x, y) \in \sim$. Așadar $\sim_{F_\sim} \subseteq \sim$.
Deci $\varphi(\psi(\sim)) = \sim_{F_\sim} = \sim$.
Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{Filt(\mathcal{B})}$ și $\varphi \circ \psi = id_{Con(\mathcal{B})}$, ceea ce înseamnă că funcțiile φ și ψ sunt inverse una celeilalte, deci sunt inversabile, așadar sunt bijective, prin urmare mulțimile $Con(\mathcal{B})$ și $Filt(\mathcal{B})$ sunt în bijecție.

Propoziție

Fie $a, b, x \in B$ și F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci, cu notațiile de mai sus, au loc:

1. *$a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$;*
2. *$a \sim_F b$ ddacă există un element $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$.*

Demonstrație: A se vedea corespondența dintre filtre și congruențe, forma unui filtru principal, și legea de reziduație pentru echivalențele care urmează.

Corespondența bijectivă filtre – congruențe

(1) $a \sim_{[x)} b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in [x)$ ddacă $x \leq a \leftrightarrow b$ ddacă $x \leq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ ddacă $\begin{cases} x \leq a \rightarrow b \text{ și} \\ x \leq b \rightarrow a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} x \wedge a \leq b \text{ și} \\ x \wedge b \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \text{ și} \\ b \wedge x \leq a \wedge x \end{cases}$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$.

(2) "$\Rightarrow$": $a \sim_F b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in F$ ddacă există un $f \in F$ astfel încât $a \leftrightarrow b = f$, ceea ce implică $f \leq a \leftrightarrow b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$, ceea ce este echivalent cu $a \sim_{[f)} b$, ceea ce este echivalent cu $a \wedge f = b \wedge f$, conform lui (1).

"$\Leftarrow$": Conform punctului (1), dacă există $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$, atunci $a \sim_{[f)} b$, adică $a \leftrightarrow b \in [f)$. Dar $f \in F$, deci $[f) \subseteq F$ (pentru că F este filtru, deci faptul că îl conține pe f implică faptul că include cel mai mic filtru care îl conține pe f, adică filtrul generat de f), așadar $a \leftrightarrow b \in F$, adică $a \sim_F b$.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. **Algebre Boole factor**
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Algebre Boole factor

Propoziție

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$ și $\sim_F$ congruența asociată lui F.
Pentru fiecare $x \in B$, se notează cu $x/F := \{y \in B \mid x \sim_F y\}$ clasa de echivalență a lui x raportat la $\sim_F$.
Mulțimea factor $B/_{\sim_F} = \{x/F \mid x \in B\}$ (i. e. mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui B raportat la $\sim_F$) se mai notează cu B/F.
Atunci: B/F se poate organiza ca algebră Boole cu următoarele operații, pe care le vom nota la fel ca pe acelea ale lui $\mathcal{B}$:

- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \vee y/F := (x \vee y)/F$*
- *pentru orice $x, y \in B$, $x/F \wedge y/F := (x \wedge y)/F$*
- *pentru orice $x \in B$, $\overline{x/F} := \overline{x}/F$*
- $0 := 0/F$ *și* $1 := 1/F$

Faptul că $\sim_F$ este congruență pe $\mathcal{B}$, i. e. echivalență care comută cu operațiile lui $\mathcal{B}$, arată că operațiile lui B/F sunt **bine definite**. Într–adevăr, să considerăm $x, y, x', y' \in B$, a. î. $x/F = x'/F$ și $y/F = y'/F$, i. e. $x \sim_F x'$ și $y \sim_F y'$. Cum $\sim_F$ este o congruență a lui $\mathcal{B}$, rezultă că:

Algebre Boole factor

- $x \vee y \sim_F x' \vee y'$, i. e. $(x \vee y)/F = (x' \vee y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\vee$ pe B/F;
- $x \wedge y \sim_F x' \wedge y'$, i. e. $(x \wedge y)/F = (x' \wedge y')/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\wedge$ pe B/F;
- $\overline{x} \sim_F \overline{x'}$, i. e. $\overline{x}/F = \overline{x'}/F$, ceea ce arată buna definire a lui $\bar{\ }$ pe B/F.

Buna definire a operațiilor zeroare ale lui B/F este trivială, pentru că 0 din B/F este definit ca fiind constanta $0/F$, iar 1 din B/F este definit ca fiind constanta $1/F$.

Proprietățile acestor operații, care arată că ele determină pe B/F o structură de algebră Boole, se obțin imediat din proprietățile operațiilor algebrei Boole $\mathcal{B}$ și definițiile acestor operații pe B/F. Iată, de exemplu, demonstrația distributivității lui $\vee$ față de $\wedge$: fie $x, y, z \in B$; au loc egalitățile:

$$x/F \vee (y/F \wedge z/F) = x/F \vee (y \wedge z)/F = (x \vee (y \wedge z))/F =$$

$$((x \vee y) \wedge (x \vee z))/F = (x \vee y)/F \wedge (x \vee z)/F = (x/F \vee y/F) \wedge (x/F \vee z/F).$$

Definiție

Algebra Boole $(B/F, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0 = 0/F, 1 = 1/F)$ se numește *algebra Boole factor (sau algebra Boole cât) a lui $\mathcal{B}$ prin filtrul F*.

Algebre Boole factor

Propoziție

Pentru orice filtru F, surjecția canonică $p_F : B \to B/F$, definită prin: pentru orice $x \in B$, $p_F(x) := x/F$, este un morfism boolean surjectiv.

Demonstrație: Surjectivitatea funcției p_F este evidentă (și cunoscută de la mulțimi factor raportat la o relație de echivalență), iar comutarea lui p_F cu operațiile de algebră Boole rezultă din definiția operațiilor algebrei Boole B/F. Într–adevăr, pentru orice $x, y \in B$, avem:

$$p_F(x \vee y) = (x \vee y)/F = x/F \vee y/F = p_F(x) \vee p_F(y);$$

$$p_F(x \wedge y) = (x \wedge y)/F = x/F \wedge y/F = p_F(x) \wedge p_F(y);$$

$$p_F(\overline{x}) = \overline{x}/F = \overline{x/F} = \overline{p_F(x)};$$

$$p_F(0) = 0/F = 0;\ \ p_F(1) = 1/F = 1.$$

Lemă

Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Atunci $F = 1/F$, așadar, pentru orice element $a \in B$, au loc echivalențele: $a \in F$ ddacă $a \sim_F 1$ ddacă $a/F = 1/F$.

Demonstrație: Din demonstrația propoziției privind corespondența bijectivă între filtre și congruențe, avem: $F = F^{\sim_F} = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = 1/F$.

Morfisme, filtre și algebre Boole factor

- Pentru următoarele două rezultate, fixăm încă o algebră Boole arbitrară $\mathcal{A} := (A, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$. A se vedea demonstrațiile acestor rezultate într–o versiune viitoare a cursului.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean, iar F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{A}$ și G un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci:

1. *$f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{A}$;*
2. *dacă f e surjectiv, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.*

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfism boolean. Atunci $f(A)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$.

Indicație: Se notează cu $F := f^{-1}(\{1\})$, care este un filtru al lui $\mathcal{A}$, fiind preimaginea printr–un morfism boolean a filtrului trivial al lui $\mathcal{B}$ (a se vedea propoziția precedentă), apoi se definește funcția $\varphi : A/F \to f(A)$ prin: oricare ar fi $x \in A$, $\varphi(x/F) := f(x)$.

Morfisme, filtre și algebre Boole factor

Folosind definiția congruenței modulo filtrul F și faptul că $F = f^{-1}(\{1\})$, se arată că, pentru orice $x, y \in A$, $x/F = y/F$ ddacă $f(x) = f(y)$. În această echivalență, implicația directă arată că φ este bine definită (i. e. independentă de reprezentantul clasei care constituie argumentul său), iar implicația inversă arată că φ este injectivă. Surjectivitatea lui φ este evidentă. Folosind definiția operațiilor algebrei Boole factor A/F și faptul că f este morfism boolean, deci comută cu operațiile booleene, se arată că φ comută cu operațiile booleene, deci este morfism boolean. Așadar, φ este izomorfism boolean.

Propoziție (temă pentru seminar)

Fie U un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$. Atunci: U este ultrafiltru ddacă algebra Boole factor B/U este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.

Indicație: Se aplică lema anterioară (conform căreia un element $a \in B$ are $a/U = 1/U$ ddacă $a \in U$) și un corolar de caracterizare a ultrafiltrelor de mai sus, care afirmă că un filtru U al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este ultrafiltru ddacă, oricare ar fi $a \in B$, **exact** unul dintre elementele a și $\overline{a}$ aparține lui U.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. **Structura algebrelor Boole finite**
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Atomi ai unei algebre Boole

- Pentru demonstrațiile rezultatelor din această secțiune a cursului de față, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I.

Definiție

Un *atom* al algebrei Boole $\mathcal{B}$ este un succesor al lui 0 din $\mathcal{B}$ (i. e. din posetul $(B, \leq)$). Adică, un *atom* al lui $\mathcal{B}$ este un element $a \in B$ cu proprietățile:

- $a \neq 0$ și
- nu există niciun element $x \in B$ a. î. $0 < x < a$,

unde am notat cu $<:=\leq \setminus \Delta_B$, i. e. $<$ este relația de ordine strictă pe B corespunzătoare relației de ordine $\leq$ de pe B, adică, pentru orice $x, y \in B$,

$$x < y \text{ ddacă } \begin{cases} x \leq y \\ \text{și} \\ x \neq y. \end{cases}$$

Atomi ai unei algebre Boole

Remarcă

- Algebra Boole trivială nu are niciun atom (deci numărul atomilor săi coincide cu numărul ultrafiltrelor sale, anume 0).
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, algebra Boole $\mathcal{L}_2^n = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathcal{L}_2 = \{0, 1\}\}$ are n atomi: atomii săi sunt elementele $e_1, \dots, e_n$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $e_i = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{\substack{\text{vector de lungime } n, \\ \text{cu 1 pe poziția } i \text{ și} \\ \text{0 pe celelalte poziții}}}$.
- Pentru orice mulțime nevidă X (nu neapărat finită), atomii algebrei Boole $\mathcal{P}(X)$ sunt submulțimile lui X cu câte un singur element: $\{a\}$, cu $a \in X$.

- Am văzut la începutul acestui curs că toate filtrele unei algebre Boole finite sunt principale, adică sunt generate de câte un singur element.

Remarcă

Ultrafiltrele unei algebre Boole finite sunt filtrele generate de câte un atom al acelei algebre Boole.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Remarca anterioară arată că, dacă algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită, atunci există o bijecție între mulțimea atomilor lui $\mathcal{B}$ și mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, care duce fiecare atom a al lui $\mathcal{B}$ în $[a)$ (filtrul principal generat de a).

Teoremă (Teorema de structură a algebrelor Boole finite)

Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este numărul atomilor lui $\mathcal{B}$ (care este egal cu numărul ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, conform remarcii anterioare).

Corolar

Orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2 (cu exponentul dat de numărul atomilor săi, care este egal cu numărul ultrafiltrelor sale).

Corolar

Două algebre Boole finite de același cardinal sunt izomorfe.

Structura algebrelor Boole finite

Remarcă

Pentru orice mulțime finită X, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, au loc următoarele izomorfisme între algebre Boole: $\mathcal{L}_2^n \cong \mathcal{L}_2^{\overline{1,n}} \cong \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X) \cong \mathcal{P}(\overline{1,n})$ ($\overline{1,0} = \emptyset$).

Remarcă

- **Teorema de reprezentare a lui Stone** spune că, pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există un morfism boolean injectiv $d : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$. Cu alte cuvinte, orice algebră Boole $\mathcal{B}$ este izomorfă cu o subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (anume subalgebra $d(B)$ dată de imaginea morfismului boolean injectiv d). Ca o paranteză, un morfism injectiv se numește *scufundare* (morfismul injectiv nu trebuie neapărat să fie morfism boolean, ci poate fi orice morfism între două structuri algebrice de același tip). Cu această terminologie, **Teorema de reprezentare a lui Stone** se poate enunța astfel: orice algebră Boole $\mathcal{B}$ se scufundă în algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$.
- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că, în cazul particular al algebrelor Boole finite, are loc proprietatea că orice algebră Boole finită este chiar **izomorfă** cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^X \cong \mathcal{P}(X)$, unde X este mulțimea ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$ (a se vedea remarca anterioară).

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. **Teme obligatorii privind algebrele Boole**
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Teme obligatorii privind algebrele Boole

Amintesc:

Notație

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, se notează cu $\mathcal{L}_k$ lanțul cu (exact) k elemente.

Exercițiu (temă obligatorie)

(a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$, iar $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, astfel încât există (cel puțin) un $i \in \overline{1, n}$ cu $k_i > 2$. Să se demonstreze că $\prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{L}_{k_i}$ nu este algebră Boole. (De exemplu, $\mathcal{L}_4^8$ nu e algebră Boole.)

Indicație: Se poate folosi unicitatea descompunerii unei latici în produs direct de lanțuri, rezultată din indecompozabilitatea lanțurilor raportat la produsul direct de poseturi.

(b) Fie I o mulțime nevidă arbitrară, iar $(T_i)_{i \in I}$ o familie de lanțuri (nu neapărat nevide, nu neapărat finite), date prin mulțimile lor suport, astfel încât $(\exists\, j \in I)\,(|T_j| > 2)$. Să se demonstreze că $\prod\limits_{i \in I} T_i$ nu este algebră Boole.

Exercițiu (temă obligatorie – continuare)

Indicație: Unicitatea descompunerii unei latici în produs direct de lanțuri este valabilă pentru latici arbitrare, nu neapărat finite; ea rezultă din indecompozabilitatea lanțurilor arbitrare (nu neapărat finite) raportat la produsul direct de poseturi. Dar se poate demonstra, ca și la punctul (a), de altfel, utilizând definițiile pe componente ale operațiilor unei structuri algebrice produs direct, că, dacă măcar unul dintre lanțurile din familia $(T_i)_{i\in I}$ nu este mărginit, atunci laticea distributivă $\prod_{i\in I} T_i$ nu este mărginită, iar, dacă toate lanțurile din familia $(T_i)_{i\in I}$ sunt mărginite, atunci laticea distributivă mărginită $\prod_{i\in I} T_i$ nu este complementată, adică are elemente fără complement.

Exercițiu (temă obligatorie)

Fie $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$ o algebră Boole, iar $\leftrightarrow$ echivalența booleană a lui B. Să se demonstreze că $(B, \leftrightarrow, 1)$ este un grup abelian.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. **Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole**
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Proprietăți aritmetice ale oricărei algebre Boole

În exercițiile din această secțiune, vom folosi notațiile clasice pentru operațiile, relația de ordine și operațiile derivate ale unei algebre Boole, iar algebrele Boole vor fi desemnate prin mulțimile lor de elemente. Să ne amintim că, în algebrele Boole complete, disjuncțiile familiilor arbitrare de elemente sunt supremumurile acelor familii, iar conjuncțiile familiilor arbitrare de elemente sunt infimumurile acelor familii.
A se vedea rezolvările exercițiilor din această secțiune într–o versiune viitoare a cursului.

Exercițiu (temă)

Fie B o algebră Boole, iar $a, b, c \in B$. Să se demonstreze că:

- $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$ și $(a \wedge b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$;
- $a \rightarrow (b \vee c) = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$ și $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \vee (a \rightarrow c)$.

Proprietăți aritmetice în algebre Boole complete

Exercițiu (temă)

Fie B o algebră Boole **completă**, $a, b \in B$, I și J mulțimi arbitrare, iar $(a_i)_{i\in I} \subseteq B$, $(b_j)_{j\in J} \subseteq B$. Să se demonstreze că în B au loc:

- **legile de distributivitate generalizate:**
$a \wedge (\bigvee_{j\in J} b_j) = \bigvee_{j\in J}(a \wedge b_j)$ și $(\bigvee_{i\in I} a_i) \wedge (\bigvee_{j\in J} b_j) = \bigvee_{i\in I}\bigvee_{j\in J}(a_i \wedge b_j)$;
$a \vee (\bigwedge_{j\in J} b_j) = \bigwedge_{j\in J}(a \vee b_j)$ și $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \vee (\bigwedge_{j\in J} b_j) = \bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{j\in J}(a_i \vee b_j)$;
- **legile lui de Morgan generalizate:**
$\overline{\bigvee_{i\in I} a_i} = \bigwedge_{i\in I} \overline{a_i}$ și $\overline{\bigwedge_{i\in I} a_i} = \bigvee_{i\in I} \overline{a_i}$;
- următoarele proprietăți:
$(\bigvee_{i\in I} a_i) \rightarrow b = \bigwedge_{i\in I}(a_i \rightarrow b)$ și $(\bigwedge_{i\in I} a_i) \rightarrow b = \bigvee_{i\in I}(a_i \rightarrow b)$;
$a \rightarrow (\bigvee_{j\in J} b_j) = \bigvee_{j\in J}(a \rightarrow b_j)$ și $a \rightarrow (\bigwedge_{j\in J} b_j) = \bigwedge_{j\in J}(a \rightarrow b_j)$.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- **Logica matematică** este o ramură a matematicii care se ocupă cu exprimarea formalizată (i. e. formală, simbolică) a legilor gândirii și studierea acestora cu mijloace matematice.
- Ne propunem să studiem **logica clasică**, în două forme ale ei: **logica clasică a propozițiilor** și **logica clasică a predicatelor** sau a **propozițiilor cu variabile**. Vom face deosebirea dintre aceste două tipuri de logică clasică mai târziu. Ambele sunt **logici bivalente**, adică operează cu doar două **valori de adevăr**: **fals** și **adevărat**.
- Așadar, în **logica clasică**, toate enunțurile (propozițiile, afirmațiile) sunt presupuse a fi **adevărate** sau **false**. Aceasta nu este o condiție trivială, nici măcar dacă eliminăm din discuție enunțurile interogative și pe cele exclamative, după cum ne amintim din primul curs, din exemplul cu enunțul subiectiv, precum și cel cu **paradoxul mincinosului:** să se determine dacă următoarea afirmație este **adevărată** sau **falsă**: *Această afirmație este falsă.*

- În acest curs vom începe studiul **logicii propoziționale clasice**.
- Vom studia **sistemul formal al calculului propozițional clasic** sub trei aspecte fundamentale:
    1. **sintaxa**, care se ocupă de limbajul formal al calculului propozițional clasic, i. e. de cadrul formal, de exprimarea în simboluri a obiectelor matematice cu care vom lucra;
    2. **algebra**, care asociază o structură algebrică sistemului formal descris în partea de sintaxă și folosește această asociere pentru a transfera proprietățile algebrice ale acelei structuri în proprietăți logice, și invers;
    3. **semantica**, aceasta fiind partea în care, pe baza structurii algebrice atașate logicii, se calculează efectiv **valorile de adevăr** ale enunțurilor (**fals** sau **adevărat**).
- Există și alte aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic, cum ar fi: aspectul **topologic**, cel **probabilist** etc., dar studierea lor depășeste cadrul și scopul acestui curs.
- Toate aceste aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic sunt denumite *dimensiuni ale sistemului logic*.

1. Mnemonic despre latici
2. Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3. Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4. Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5. Echivalența algebre Boole – inele Boole
6. Subalgebre Boole și morfisme booleene
7. Filtre ale unei algebre Boole
8. Filtre generate de o mulțime
9. Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10. Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11. Consecință a Lemei lui Zorn
12. Teorema de reprezentare a lui Stone
13. Congruențe ale unei algebre Boole
14. Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15. Algebre Boole factor
16. Structura algebrelor Boole finite
17. Teme obligatorii privind algebrele Boole
18. Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19. Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20. **Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic**
21. Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Șirurile finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Exemplu

$u \to \neg\, v$, $\neg\,(u \to \neg\, v) \to w$, $\to u \to\to uv\neg\,)$ sunt **cuvinte**.

Observație

Intuiția ne determină să conferim "înțeles" simbolurilor primitive, și ne spune că primele două cuvinte din exemplul anterior "au sens", în timp ce al treilea "nu are sens". Dintre cuvintele peste alfabetul definit mai sus, le vom selecta pe cele care "au sens", și le vom numi *enunțuri*. Definiția lor riguroasă succede această observație.

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț). O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Observație

Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ și prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.

Noțiunea de **prioritate** are aici semnificația obișnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru construirea unui enunț.

Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, de fapt regula (E_2) se va aplica înaintea regulii (E_3), i. e., pentru orice enunțuri α și β, scrierea $\neg\,\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\,\alpha) \rightarrow \beta$.

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), desigur, modulo parantezarea aleasă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Remarcă

Faptul, specificat în definiția unui enunț, că **toate enunțurile** se obțin prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), arată că E este cea mai mică mulțime închisă la regulile (E_1), (E_2) și (E_3), i. e. cea mai mică mulțime cu proprietățile:

1. $V \subseteq E$,
2. pentru orice $\varphi \in E$, rezultă că $\neg\varphi \in E$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in E$,

(cea mai mică în sensul incluziunii, adică E este inclusă în orice mulțime care satisface aceste trei condiții).

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Notație

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\,\varphi \rightarrow \psi$	(*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "sau" ψ)
$\varphi \wedge \psi := \neg\,(\varphi \rightarrow \neg\,\psi)$	(*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "și" ψ)
$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	(*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ "echivalent cu" ψ)

Definiție

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Observație

Conectorii logici derivați se scriu ca niște operatori binari, și le vom acorda aceeași prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv "binar" $\rightarrow$.

Remarcă

În această prezentare a sistemului formal al logicii propoziționale clasice, am considerat negația și implicația ca și conectori logici primitivi, iar disjuncția, conjuncția și echivalența ca și conectori logici derivați, introduși prin notațiile de mai sus, pe baza celor primitivi.

Există prezentări ale sistemului formal al logicii propoziționale clasice care sunt echivalente cu cea din acest curs și care folosesc alți conectori logici primitivi.

Sintaxa sistemului formal al calculului propoziţional clasic

- Am definit limbajul cu care vom lucra. Acum vom defini, tot la acest nivel, formal, sintactic, noţiunea de “adevăr“ în logica pe care o construim. “Adevărurile sintactice“ vor fi “teoremele“ acestei logici, iar, pentru a le obţine, vom da un set de axiome şi vom defini o modalitate prin care, din adevăruri sintactice stabilite până la un moment dat, se deduc alte adevăruri sintactice. Acea modalitate se va numi **regula de deducţie modus ponens**.

Definiţie

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziţionale clasice este un enunţ de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunţuri arbitrare:

$$\begin{array}{ll} (A_1) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) & (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{array}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) şi (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziţionale clasice se obţin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunţurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunţuri precizate (date), adică axiomele sunt enunţuri de una dintre formele (A_1), (A_2) şi (A_3), cu φ, ψ şi χ enunţuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) şi (A_3), simplu, **axiome**.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

- Așa cum am anunțat, acum vom defini **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), adică modalitatea prin care, din aceste axiome, se obțin toate **teoremele** (**adevărurile sintactice**) în acest sistem logic.

Remarcă

Se poate demonstra că schemele de axiome de mai sus sunt **independente**, i. e. niciuna dintre ele nu poate fi dedusă din celelalte două prin modalitatea de deducție sintactică pe care o vom defini.
Acest fapt arată și că, între aceste trei scheme de axiome, nu există două din care să se deducă sintactic **toate** adevărurile sintactice (teoremele) acestui sistem logic, care se deduc din toate cele trei scheme de axiome.
Se pot, însă, defini alte seturi echivalente de scheme de axiome (adică seturi de scheme de axiome din care se deduc sintactic aceleași teoreme), cu aceiași sau cu alți conectori logici primitivi.

Notație

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notație

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.

Notație

Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\vdash \psi, \ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}.$$

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Regula (T_3), chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulțime închisă la regulile (T_1) și (T_2), i. e. cea mai mică mulțime cu proprietățile:

1. T include mulțimea axiomelor, i. e. $T \supseteq \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)),\ (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$,
2. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in T$, atunci $\varphi \in T$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obțină prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2), adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunț obținut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

În scrierea definiției de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiției, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într–o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarcă

Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală ddacă există o demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \to \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_4) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_2) și (CS_3) de un număr finit de ori.

Notație

Vom nota faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție

Regula (CS_3) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}.$$

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Regula (CS_4), chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulțimea consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri este cea mai mică mulțime închisă la regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3), i. e. cea mai mică mulțime M cu proprietățile:

1. M include mulțimea tuturor axiomelor, i. e. $M \supseteq \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$,
2. $M \supseteq \Sigma$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că (CS_4) spune că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ nu conține alte elemente decât cele obținute din regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3).

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O Σ–*demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. $\varphi_i \in \Sigma$;
3. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ–demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarcă

Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstrație formală.

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ–demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstrații formale și poate avea Σ–demonstrații formale de lungimi diferite.

Inducția după un concept

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de **enunț**.

Observație

O tehnică importantă de demonstrație la care vom apela în acest capitol al cursului este ceea ce vom numi *inducție după un concept*, pe care o vom întâlni în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**.
Într–adevăr, să descriem această metodă de demonstrație, în fiecare dintre cele trei forme în care poate să apară într–un raționament matematic în această teorie, și s–o analizăm, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție după un număr natural.

Inducția după enunțuri

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \rightarrow \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea enunțurilor este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de cuvinte care include mulțimea variabilelor propoziționale și care este închisă la regulile (E_2) și (E_3) din definiția enunțurilor, i. e. mulțimea E a enunțurilor este cea mai mică mulțime M de cuvinte care satisface proprietățile:

- $V \subseteq M$;
- *închiderea la* (E_2): dacă $\psi \in M$, atunci $\neg \psi \in M$;
- *închiderea la* (E_3): dacă $\psi, \chi \in M$, atunci $\psi \rightarrow \chi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a cuvintelor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la regulile (E_2) și (E_3), rezultă că $M_P \supseteq E$, i. e. toate enunțurile sunt printre cuvintele care satisfac proprietatea P.

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după enunțuri poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de numărul de pași în care se obține un enunț din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ se obține într–un singur pas, adică φ este o variabilă propozițională, atunci φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ se obține în $n + 1$ pași, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem două cazuri:
  1. $\varphi = \neg\,\psi$, pentru un enunț ψ care se obține în n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ satisface proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P;
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două enunțuri ψ și χ care se obțin, fiecare, în cel mult n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ satisfac proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P.

Întrucât orice enunț se obține într–un număr finit de pași din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), **principiul inducției matematice** (obișnuite, după un număr natural) ne asigură de faptul că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice enunț satisface proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.
Fie P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea teoremelor formale este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea T a teoremelor formale este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei doi pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că $M_P \supseteq T$, i. e. toate teoremele formale sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după teoreme formale poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei demonstrații formale pentru o teoremă formală, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$, iar:
  - teorema formală φ_j admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - teorema formală $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$ admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_{n+1} = \varphi_j \to \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice (obișnuite) arată că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice teoremă formală satisface proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*. Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor. Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.

Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** („pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** („pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** („pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \to \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.

Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor, include mulțimea Σ și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- orice enunț din Σ aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și toate enunțurile din Σ și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că M_P include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i. e. toate consecințele sintactice ale lui Σ sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după consecințele sintactice ale lui Σ poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei Σ–demonstrații formale pentru o consecință sintactică a lui Σ, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă sau un enunț din Σ, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă sau un enunț din Σ, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - φ_j admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice arată că această demonstrație este completă.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Notație

Vom nota acest sistem formal cu $\mathcal{L}$.

Observație

Întreaga prezentare de până acum a fost efectuată la **nivel sintactic**: am pornit de la un **alfabet** (o **mulțime de simboluri**), am definit un tip particular de **cuvinte peste acest alfabet**, numite **enunțuri**, apoi un tip particular de enunțuri, numite **teoreme formale**, și **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), care indică modul în care, din teoreme formale, se obțin alte teoreme formale, cu generalizarea la **consecințe sintactice** ale unor mulțimi de enunțuri.

1 Mnemonic despre latici
2 Produsul direct al familiei vide și operațiile zeroare
3 Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate
4 Principiul dualității, legile lui de Morgan, alte proprietăți aritmetice
5 Echivalența algebre Boole – inele Boole
6 Subalgebre Boole și morfisme booleene
7 Filtre ale unei algebre Boole
8 Filtre generate de o mulțime
9 Ultrafiltre ale unei algebre Boole
10 Mulțimi inductiv ordonate și Lema lui Zorn
11 Consecință a Lemei lui Zorn
12 Teorema de reprezentare a lui Stone
13 Congruențe ale unei algebre Boole
14 Corespondența bijectivă filtre – congruențe
15 Algebre Boole factor
16 Structura algebrelor Boole finite
17 Teme obligatorii privind algebrele Boole
18 Alte proprietăți aritmetice ale algebrelor Boole
19 Ce este logica matematică? Ce sisteme logice vom studia? Care sunt dimensiunile unui sistem logic?
20 Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic
21 Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- În această secțiune vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$, dintre care cea mai importantă este **Teorema deducției**. Acest rezultat ne va conduce la cele mai semnificative teoreme formale ale lui $\mathcal{L}$.
- Demonstrarea următoarei propoziții este un bun prilej de exersare a inducției după un concept.

Propoziție (o numim ad–hoc Propoziția $\star$)

Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. *dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;*
2. *dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demonstrație: (1) Demonstrăm, prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ, că orice consecință sintactică a lui Σ este și consecință sintactică a lui Δ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că ne aflăm în unul dintre cazurile următoare:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\Delta \vdash \varphi$.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Cum $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $\varphi \in \Delta$, prin urmare $\Delta \vdash \varphi$.

Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. au loc: $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Delta \vdash \varphi$ prin (MP).
Demonstrația primului punct este încheiată.

(2) Și aici procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ.
Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci ne situăm în unul dintre următoarele trei cazuri:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\vdash \varphi$, i. e. $\emptyset \vdash \varphi$. $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $\emptyset$ este o mulțime finită, deci, în acest caz, φ satisface proprietatea pe care trebuie să o demonstrăm.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Atunci: $\{\varphi\} \vdash \varphi$, iar $\{\varphi\} \subseteq \Sigma$ și $\{\varphi\}$ este o mulțime finită.
Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. există $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$ și $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$ a. î. Γ_1 și Γ_2 sunt finite și $\Gamma_1 \vdash \psi$ și $\Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \infty$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este o mulțime finită, iar, întrucât $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, prin aplicarea punctului (1) obținem: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ și $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ prin (MP).
Am încheiat demonstrația punctului (2).

(3) Aici vom folosi **Teorema deducției** (vedeți mai jos), în demonstrarea căreia se utilizează numai punctul (1) din această propoziție. Am preferat scrierea punctelor acestei propoziții unul după altul, în același rezultat, dar puteam intercala, undeva între punctele (1) și (3), rezultatul de mai jos numit **Teorema deducției** și abreviat (TD).
Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci, conform punctului (2), există o mulțime finită Γ a. î. $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, adică $\vdash \varphi$, prin urmare $\Sigma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma \neq \emptyset$, atunci fie $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$.
Dacă orice enunț din Δ este consecință sintactică a lui Σ, atunci, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, $\Sigma \vdash \gamma_i$.
$\Gamma \vdash \varphi$ înseamnă că $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, ceea ce, conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \rightarrow \varphi$, ceea ce, din nou conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)$, și, continuând astfel, prin aplicări succesive ale (TD), obținem $\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, așadar $\Sigma \vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_1$, de unde, prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \gamma_2 \rightarrow (\gamma_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)) \ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_2$, și, continuând în acest mod, prin aplicări succesive ale regulii de deducție (MP), se obține $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația punctului (3).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Propoziție (Principiul identității)

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$. *(Vom folosi abrevierea "PI" pentru această teoremă formală.)*

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$. Aceasta este o demonstrație sintactică pentru enunțul $\varphi \rightarrow \varphi$:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash [\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)] & (A_2) \\
\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (MP) \\
\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash \varphi \rightarrow \varphi & (MP)
\end{array}
$$

Observație

Uneori, este convenabil ca **demonstrațiile formale (demonstrațiile sintactice)**, cum este cea de mai sus, dar și multe raționamente care urmează în acest curs, să fie alcătuite "de la coadă la cap" (desigur, "pe ciornă"). Demonstrații ca, de exemplu, cea a punctului (1) din propoziția ce succedă **Teorema deducției**, demonstrație care începe prin considerarea unei mulțimi de ipoteze, ar fi dificil de conceput "de la cap la coadă".

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin "TD" denumirea acestei teoreme.)

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Din punctul (1) din Propoziția $\star$ și (MP), obținem: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$, așadar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$, dar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$": Ipoteza acestei implicații este: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Aici vom proceda prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Faptul că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ arată că ne situăm în unul dintre cazurile următoare, cazuri care dau pașii raționamentului prin inducție:
Cazul 1 (pas de verificare): ψ este o axiomă. Atunci $\vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ conform (A_1), iar o aplicare a regulii (MP) ne dă $\vdash \varphi \to \psi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Cazul 2 (tot pas de verificare): $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Vom împărți acest caz în două subcazuri:
Subcazul 2.1: $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), deci $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Așadar $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ prin (MP).
Subcazul 2.2: $\psi = \varphi$. Conform (PI), $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ și, prin urmare, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Cazul 3 (pasul de inducție): există un enunț α a. î. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \rightarrow \psi$ și α și $\alpha \rightarrow \psi$ satisfac ipoteza de inducție, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$. Conform (A_2), $\vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$, deci $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$. Aplicând (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, și, aplicând (MP) încă o dată, obținem $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
Așadar și cea de–a doua implicație este satisfăcută de orice enunțuri φ și ψ și orice mulțime de enunțuri Σ.

Remarcă

În demonstrațiile pentru (PI) și (TD), schema de axiome (A_3) nu a fost folosită.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Observație

Denumirea de **teoremă** pentru rezultatul anterior este o denumire din **metalimbaj**, pentru că acest rezultat este o proprietate a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Denumirea de **teoremă formală** este din limbajul sistemului formal al logicii propoziționale clasice, ea denumește un tip de obiect cu care lucrează acest sistem formal.

Este importantă această distincție. Similaritatea celor două denumiri se datorează faptului că acest sistem formal (al logicii propoziționale clasice) este o formalizare a unor legi ale gândirii (în special a procedeelor gândirii care sunt, în mod curent, folosite în elaborarea raționamentelor matematice), și conține denumiri care îi sugerează întrebuințarea, destinația.

Aceleași considerații sunt valabile pentru **conectorii logici** din sistemul formal al calculului propozițional clasic: $\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, versus **conectorii logici din metalimbaj**, folosiți în enunțurile referitoare la calculul propozițional clasic, scriși fie prin denumirile lor: “non“ sau “not“ sau “negație“, “implică“ sau “rezultă“, “sau“, “și“, “echivalent“ sau “ddacă“, fie prin simbolurile consacrate, în cazul implicației și echivalenței: $\Rightarrow$ și $\Leftrightarrow$, respectiv.

La fel pentru alți termeni din acest sistem logic, precum și din sistemul formal al calculului cu predicate clasic, prezentat în ultimul curs.

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- (1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Demonstrație: Vom aplica succesiv (MP) și (TD).

$$
\begin{array}{ll}
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(TD)} \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) & \text{(TD)} \\
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{(TD)}
\end{array}
$$

- regula de deducție (R_1): $\frac{\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash \varphi \to \chi}$ și $\frac{\Sigma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash \varphi \to \chi}$

Demonstrație: Din (1) și (MP). Varianta mai generală cu Σ arbitrar rezultă din (MP) și faptul că (1) implică $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

Demonstrații analoge pot fi date pentru rezultatele de mai jos. Vom mai exemplifica prin demonstrații formale în cazul unora dintre acestea. Pentru celelalte, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I. Regulile de deducție sunt numerotate la fel ca în această carte.

- (2) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
- (3) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
- (4) $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$
- (5) $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- regula de deducție (R_3): $\frac{\vdash \varphi \to \chi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$ și $\frac{\Sigma \vdash \varphi \to \chi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$

- (6) $\quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- (7) $\quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- regula de deducție (R_4): $\dfrac{\vdash \chi \rightarrow \varphi, \vdash \chi \rightarrow \psi}{\vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi, \Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
- (8) $\quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- (9) $\quad \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

Demonstrație: Aceasta este o consecință imediată a lui (8).

- regula de deducție (R_0): $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ (această regulă de deducție va fi aplicată, de obicei, fără a fi menționată în mod explicit)

Demonstrație: Din (9) și (MP).

- (10) $\quad \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- (11) $\quad \vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$
- (12) $\quad \vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$
- (13) $\quad \vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$
- $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ (**Principiul terțului exclus**; îl vom abrevia PTE)
- (14) $\quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- regula de deducție (R_5): $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi}{\vdash \neg\psi \to \neg\varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to \psi}{\Sigma \vdash \neg\psi \to \neg\varphi}$

Demonstrație: Această regulă de deducție rezultă din (14) și (MP).

- (15) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash (\neg\neg\varphi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \psi)) & (1)\\
\vdash (\neg\neg\varphi \to \varphi) & (2)\\
\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\neg\varphi \to \psi) & (\text{MP})\\
\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (16) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală pentru această teoremă:

$$\begin{array}{ll}
\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) \to ((\neg\neg\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)) & (1)\\
\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi) & (3)\\
\vdash (\neg\neg\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi) & (\text{MP})\\
\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (17) $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- (18) $\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$

Demonstrație: Pașii următori formează o demonstrație sintactică pentru această teoremă:

$$\begin{array}{ll}
\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi & (6) \\
\vdash \neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi & (7) \\
\vdash \neg\psi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi) & \text{regula de deducție } (R_3)
\end{array}$$

- (19) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație formală pentru teorema de față:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi) & (4) \\
\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\varphi & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi) & (5) \\
\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\psi & \text{regula de deducție } (R_5) \\
\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) & \text{regula de deducție } (R_4)
\end{array}$$

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- regula de deducție (R_6): $\dfrac{\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație: Rezultă din axioma (A_2), prin (MP).

- regula de deducție (R_7): $\dfrac{\vdash \psi \to \chi}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \psi \to \chi & \text{ipoteză} \\
\vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)) & (A_1) \\
\vdash \varphi \to (\psi \to \chi) & (\text{MP}) \\
\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) & (R_6)
\end{array}$$

- regula de deducție (R_8): $\dfrac{\vdash \varphi, \vdash \psi}{\vdash \varphi \wedge \psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi, \Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi}$

Demonstrație: Din (10) și două aplicări ale lui (MP).

- (20) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

Demonstrație: Din (2), (3) și (R_8).

- (21) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație sintactică:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi & (3) \\
\vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) & (R_8) \\
\vdash \neg(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \psi) & (R_5) \\
\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (22) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Demonstrație: Din (19), (21) și (R_8).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- (23) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi & (2) \\
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)] & (1) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (\mathrm{MP}) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi) & (2) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (R_1) \\
\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}
$$

- (24) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Din (18), (23) și (R_8).

Notă

Aveți ca **temă** parcurgerea demonstrațiilor sintactice pentru toate proprietățile de mai sus, din acest curs și din cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, pe care o găsiți la bibliotecă (și la sala de lectură, și la centrul de împrumut).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Notație (abrevieri definite recursiv)

Fie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (prioritățile: ca la operatori unari, deci aceeași prioritate ca $\neg$):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exercițiu (temă)

Folosind (10) și (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, are loc:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu (17) și (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi \in E$, are loc echivalența:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \rightarrow \varphi.$$

A se vedea și Propoziția 7.2.53/pagina 160/cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, precum și demonstrația Propoziției $\star$ de mai sus.