

# Alg & Grafuri

## CURS 1

Popescu

Examen + note:

1 notă seminar 1,5p max } putem începe cu max 3.  
1 notă laborator 1,5p max.

în rest 7 puncte examen final.

0 puncte în lab + seminar = max 7 nota.

3 puncte în lab + seminar = max 10 nota.

examen:

teorie - sub. desprins de la curs (o să fie o listă)  
ex. și probleme (de la seminar o să fie)

teorie cu demonstratie (noțiuni, enunțuri, demonstrații)

Bibliog.

1. Combinatorică și th. grafurilor 2005 - a profului (soc. de nucleu)
2. Combinat & th grafurilor ex și prob - tot prof. + Rux. Morărescu Ghermei.

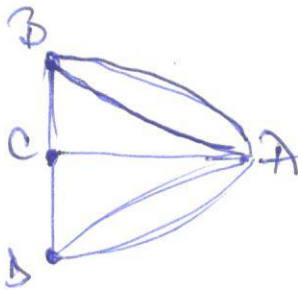
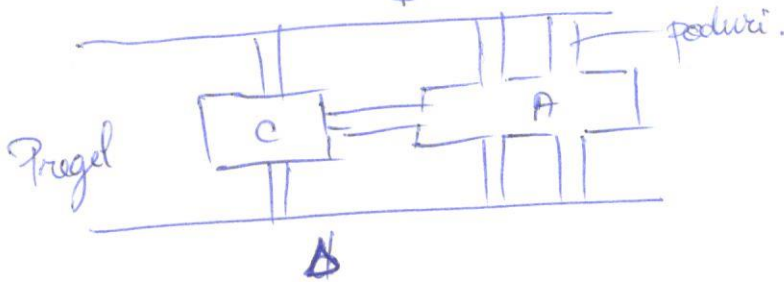
(ed. Matrix 2014).

# Notiuni de baza Notati. Definitii. Exemple. Repere istorice

## 1. Repere istorice

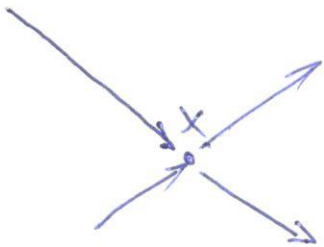
1736 L. Euler.

↳ Problema podurilor din Königsberg (7 poduri)

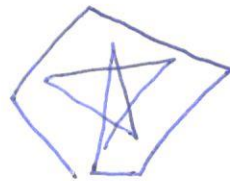
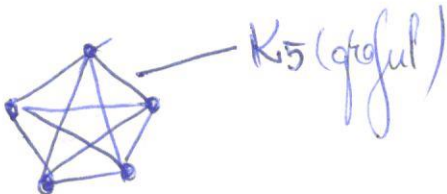


Nu putem să parcurgem muchiile o singură dată  
fără să ridicăm pixul.

Nu merge pt că niciun vf. nu are  
un nr. par de vf.



Că să meargă toate vf. treb să aibă  
un nr. par de muchii.



— cam așa îl desenează  
fără să ridice pixul de  
pe foaie.

$$G = (V, E)$$

$V = \{A, B, C, D\}$  - mult. v.f.

$E = \{\underbrace{AB, AB, AB, AB}_{AD^2}, BC, CD, AC\}$  - asta e pt desenul  
multiset.  
dile pate !  
indice de multiplicatie

## 2. Multiseturi (ex: mult. bancnotele)

Fie  $S$  - multime. finita

$n: S \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$  multiplicitate

$R = (S, n)$  multiset este.  $S$  (multiplicitate a lui  $S$ )

$$|R| = \sum_{x \in S} n(x) \neq$$

Obs !

Dacă  $n(x) \in \{0, 1\} \forall x \in S$  - mult.

$$x \in R \Leftrightarrow n(x) \geq 1$$

---

ex:  $S = \{a, b, c\}$

$$n(a) = 2$$

$$n(b) = 3$$

$$n(c) = 2$$

$$R = (S, n) = \underline{aa} \underline{bbb} \underline{cc} = a^2 \cdot b^3 \cdot c^2$$

notatie alternativă

### 3. Puteri ale unei multimi

$$S - \text{m. finit. } p \in \mathbb{N}$$

$$p > 0$$

$S^p$  - prod. cart. al lui  $S$  de  $p$  ori

$$S^p = \{(x_1, \dots, x_p) \text{ unde } x_1, \dots, x_p \text{ parc. pe } S\} \text{ m. } p\text{-vect.}$$

multimea  
 $p$  - coordonate

$$S^{(p)} = \{x \mid x \subseteq S, |x| = p\} - \text{mult. } p\text{-partilor.}$$

$$S^{<p>} = \{x \mid x \text{ } p\text{-multiplicat peste } S\}$$

$$\begin{aligned} & \text{Def.} \\ & |x| = p \\ & \sum_{x \in S} \pi(x) \end{aligned}$$

$$p=0. \quad S^0 = \{\emptyset\} \text{ curenul vid.}$$

$$S^{(0)} = \{\emptyset\}$$

$$S^{<0>} = \{\emptyset\}$$

$$S^{(*)} = S^{(0)} \cup S^{(1)} \cup \dots \cup S^{(m)} \text{ unde } m = |S|$$

$$|S^{(*)}| = 2^m \text{ (mult. partilor)}$$

$$|S^k| = \binom{m}{k} \text{ combinari } C_m^k \text{ (cred)}$$



#### 4. Grafuri

Fie  $V \neq \emptyset$  m. vârfuri.

$G = (V, E)$  graf. orientat dacă  $E$  multiset peste  $V^2$

$xx$  - buclă

$xy$  - arce.

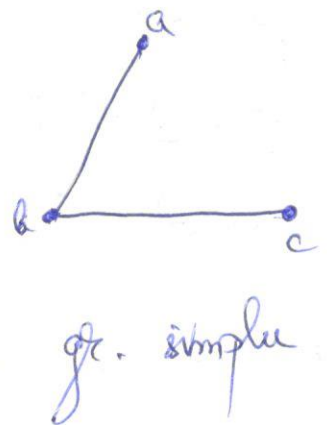
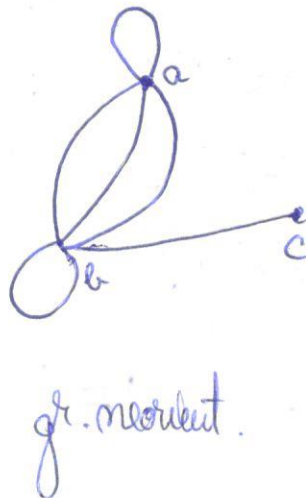
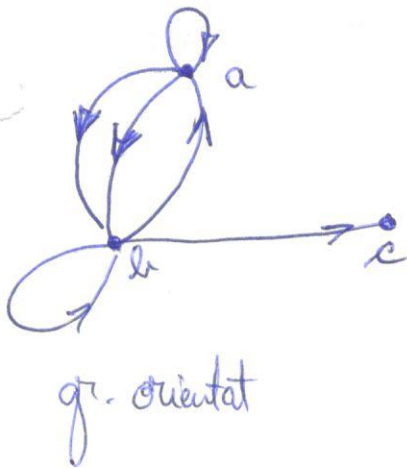
4.1. elem. lui  $G$  se num. arce.

4.2.  $G = (V, E)$  este multigraf sau graf neorientat

$E$  - multiset peste  $V^{(2)}$   
elem. lui  $G$  se num. muchi

4.3.  $G = (V, E)$  s.m. graf. simplu dacă  $\boxed{E \subseteq V^{(2)}}$  muchi  
(adică nu  $\neq$  buclă și arce muchi duble)

ex:  $V = \{a, b, c\}$



## 5. Grade

~~Grade~~  $G = (V, E)$  graf. orientat

$$e = xy \in E$$

$$x \xrightarrow{e} y$$

$$\begin{aligned} e^- &= x \\ e^+ &= y \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{extinitor} \\ \text{terminat} \end{array} \right.$$

$$d_G^+(x) = |\{e \in E, e^- = x\}|$$

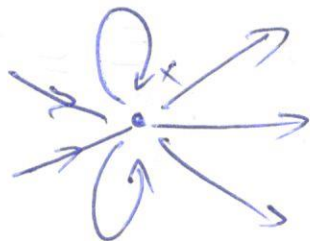
$$d_G^-(x) = |\{e \in E, e^+ = x\}|$$

gr. ext

gr. int.

$$d_G(x) = d_G^-(x) + d_G^+(x)$$

ex:



$$d^+(x) = 5$$

$$d^-(x) = 4$$

$$d(x) = 9$$

$$\Delta^+(G) = \{d^+(x) \mid x \in V\}$$

$$\Delta^-(G) = \{d^-(x) \mid x \in V\}$$

$$\Delta(G) = \{d(x) \mid x \in V\}$$

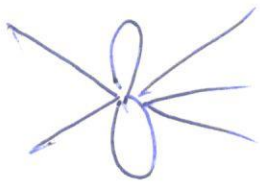
câte intra și câte ies într-un graf (nod).

Obs.  $\sum d^+(x) = \sum d^-(x) = |E|$

$$G = (V, E) \text{ graf. neorientat.}$$

$$x \in V$$

$$d(x) =$$

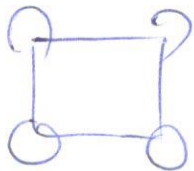


$$d(x) = 9 \quad (2 + 3 + 2 \cdot 2) \quad \text{nr bucle}$$

$s(G)$  - multisetul gradelor.

$s = (d_1, \dots, d_m)$  multiset grafic dacă  $\exists G$  graf simplu  
 dacă  $s(G) = s_0$

2 2 2 2 - multiset grafic



2 2 1 2 - nu e mult grafic.

$$T: \begin{cases} G = (V, E) \text{ graf.} \\ \sum_{x \in V} d(x) = 2|E| \end{cases}$$

Suma gradelor este 2 · muchia

## 6. Adiacență și incidență

$G = (V, E)$  gr. neorientat

$x, y \in V$   $x, y$  adiacente  $\{x, y\} \in E$



# 8. Conexitate

$G = (V, E)$  gr. neorientat.

$G$  conex  $(\Leftrightarrow) \forall x \neq y \in V : \exists x, y$  - lant.



$V, \sim$   
 $x \sim x$   
 $x \sim y \Leftrightarrow \exists x, y$  lant.

$V/\sim = \{v_1, \dots, v_p\}$



$G_i = (V_i, E_i)$

$E_i = \text{mult multib. cu } \{e / e \in E, e \subseteq V_i\}$   
 $i \in \{1, \dots, p\}$ .

$G = G_1 + \dots + G_p$ .

$G_i$  comp. conex.

$\boxed{\omega(G) = p}$  - nr. comp. conex.

ex.

$G_1$

