

2. Применим несколько раз первой правило, затем несколько раз второе:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSbbbb|T \\ T &\rightarrow aaaTbb|c \end{aligned}$$

Очевидно, грамматика эквивалентна. Докажем однозначность. Пусть мы применили  $x$  раз первое правило и  $y$  раз второе. Тогда число  $a$ -шек и  $b$ -шек в слове будет равно

$$\begin{cases} a = x + 3y \\ b = 4x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3b-2a}{10} \\ y = \frac{4a-b}{10} \end{cases}$$

Таким образом, однозначно восстановили дерево разбора.

3. Можно так – строка, в которой на любом префиксе которой  $a$ -шек хотя бы в 2 раза больше  $b$ -шек, а на всей строке ровно в 2.
4. Вторая грамматика порождает язык из строк с  $a/c$  на нечётных позициях и  $a/b$  на чётных (и при этом суммарно нечётной длины). Разделим  $F$ -ки из первой грамматики на несколько видов (а именно по чётности длины и тому, какая буква (из  $b/c$ ) может стоять на первом а значит всех нечётных местах –  $B_0, B_1, C_0, C_1$ ).  
 $a$ -шку ставим, если длина нечётная.

$$\begin{aligned} C_1 &\rightarrow a \\ B_1 &\rightarrow a \end{aligned}$$

Если добавили в какой-то момент в начало  $b$ . Это означает, что суффикс после неё ( $F$  из первой грамматики) – это строка из  $a/c$  на нечётных (причём чётность суффикса инвертируется от текущей). Запишем правила

$$\begin{aligned} B_0 &\rightarrow bC_1 \\ B_1 &\rightarrow bC_0 \end{aligned}$$

Для  $c$  правила чуть чуть посложнее, потому что после неё идут две  $F$ -ки. Но их тоже легко охарактеризовать: первая должна иметь  $a/b$  на нечётных, а второй полностью определён первым – если она окончилась на  $a/b$ , то есть первый нечётный длины, то второй начинается  $a/c$ , иначе оба с  $a/b$  на первом. Суммарная длина должна иметь чётность инвернутую к входной. Таким образом следующие правила

$$\begin{aligned} C_0 &\rightarrow cB_0B_1|cB_1C_0 \\ C_1 &\rightarrow cB_0B_0|cB_1C_1 \end{aligned}$$

Итого грамматика:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow C_1 \\ B_0 &\rightarrow bC_1 \\ B_1 &\rightarrow bC_0|a \\ C_0 &\rightarrow cB_0B_1|cB_1C_0 \\ C_1 &\rightarrow cB_0B_0|cB_1C_1|a \end{aligned}$$