

Формальные языки, HW05

2.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow RS|R \\ R &\rightarrow aSb|cRd|ab|cd|\epsilon \end{aligned}$$

Добавим новый начальный нетерминал

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow RS|R \\ R &\rightarrow aSb|cRd|ab|cd|\epsilon \end{aligned}$$

Избавимся от неоднозначных терминалов

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow RS|R \\ R &\rightarrow ASB|CRD|AB|CD|\epsilon \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \\ D &\rightarrow d \end{aligned}$$

Удаляем длинные правила

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S \\ S &\rightarrow RS|R \\ R &\rightarrow AQ|CP|AB|CD|\epsilon \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \\ D &\rightarrow d \\ Q &\rightarrow SB \\ P &\rightarrow RD \end{aligned}$$

Элиминируем ϵ -правила

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow S|\epsilon \\ S &\rightarrow RS|R|S \\ R &\rightarrow AQ|CP|AB|CD \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \\ D &\rightarrow d \\ Q &\rightarrow SB|B \\ P &\rightarrow RD|D \end{aligned}$$

Уничтожаем цепные правила

$$\begin{aligned} S_0 &\rightarrow RS|AQ|CP|AB|CD|\epsilon \\ S &\rightarrow RS|AQ|CP|AB|CD \\ R &\rightarrow AQ|CP|AB|CD \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow c \\ D &\rightarrow d \\ Q &\rightarrow SB|b \\ P &\rightarrow RD|d \end{aligned}$$

– НФХ.

3. КС грамматика, задающая язык

$$S \rightarrow aaS|aSb|Sbb|ab|aa|bb$$

Пусть есть слово $a^m b^n$ при $m + n > 0, 2|(n + m)$

- $m = 0 \Rightarrow n > 0$ – чётное. Тогда $\frac{n}{2} - 1$ раз применив правило $S \rightarrow Sbb$ и один $S \rightarrow bb$ получим
 $S \rightarrow Sbb \rightarrow \dots \rightarrow Sbb\dots bb \rightarrow b^n$
- $n = 0$ аналогично
- $m, n > 0$, чётные. Применим $\frac{n}{2}$ раз правило $S \rightarrow Sbb$, $\frac{m}{2} - 1$ раз $S \rightarrow aaS$, и одно $S \rightarrow aa$
- $m, n > 0$, нечётные. Применим $\frac{n-1}{2}$ раз правило $S \rightarrow Sbb$, $\frac{m-1}{2}$ раз $S \rightarrow aaS$, и одно $S \rightarrow ab$

С другой стороны по индукции легко понять, что слово из языка грамматики имеет вид $a^p b^q$, а чётность $p + q$ не меняется при использовании правил, а изначально она чётная, при этом пустого слова нет $\Rightarrow p + q$.