Формальные языки

домашнее задание до 23:59 05.03

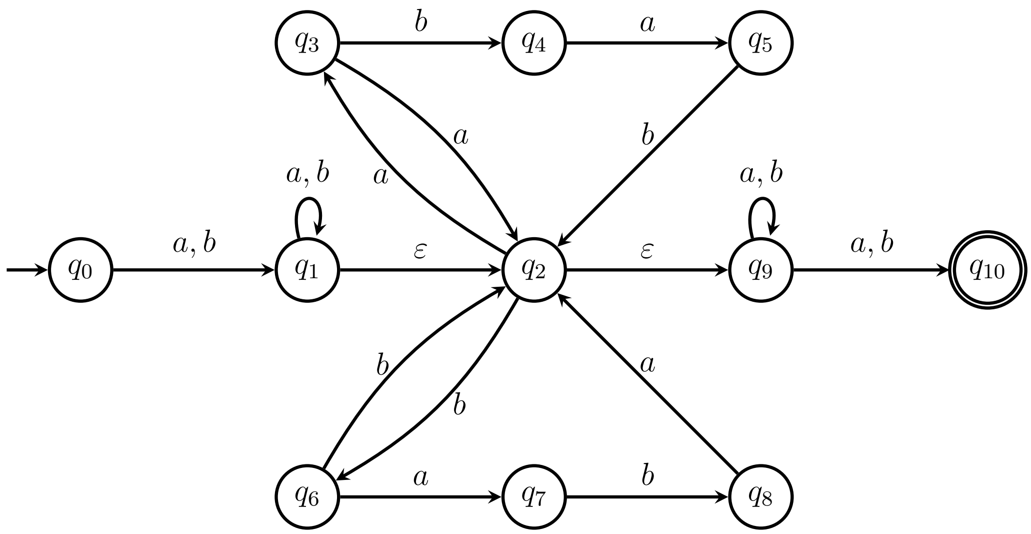
1. Доказать или опровергнуть утверждение: произведение двух минимальных автоматов всегда дает минимальный автомат (рассмотреть случаи для пересечения, объединения и разности языков).

2. Для регулярного выражения:

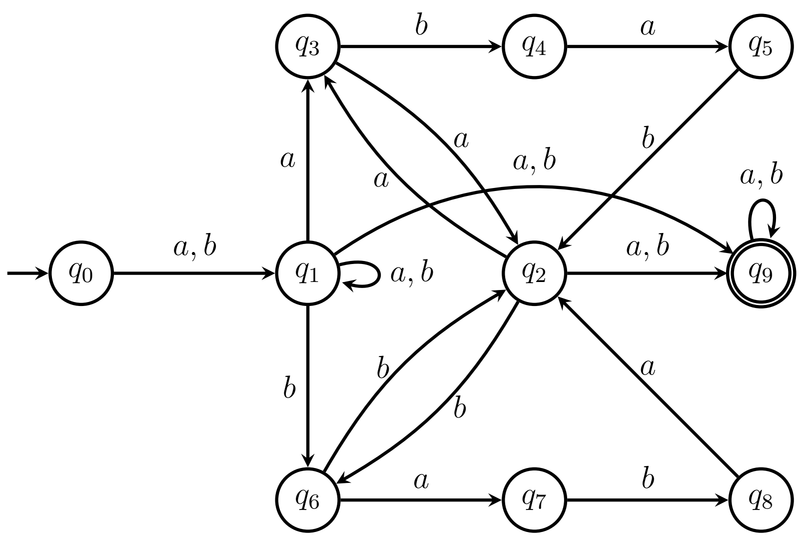
$$(a \mid b)^{+}(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^{*}(a \mid b)^{+}$$

   Построить эквивалентные:

   (a) Недетерминированный конечный автомат
   РЕШЕНИЕ:



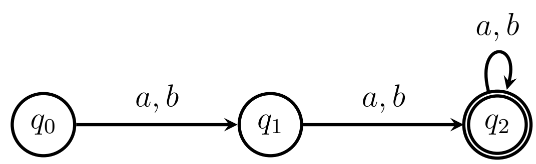
   (b) Недетерминированный конечный автомат без ε-переходов
   РЕШЕНИЕ:



(c) Минимальный полный детерминированный конечный автомат
РЕШЕНИЕ:
Рассмотрим любое слово из языка, соответсвующего выражению

$$(a \mid b)^{+}(a \mid b)^{+}$$

. Тогда заметим, что оно входит в наш язык. С другой стороны, любое слово нашего языка может быть выражено конкатенацией какого-то числа a-шек и b-шек(длины не менее два), то есть как раз таким языком. То есть нашему изначальному выражению соответсвует автомат



3. Построить регулярное выражение, распознающее тот же язык, что и автомат:
РЕШЕНИЕ:

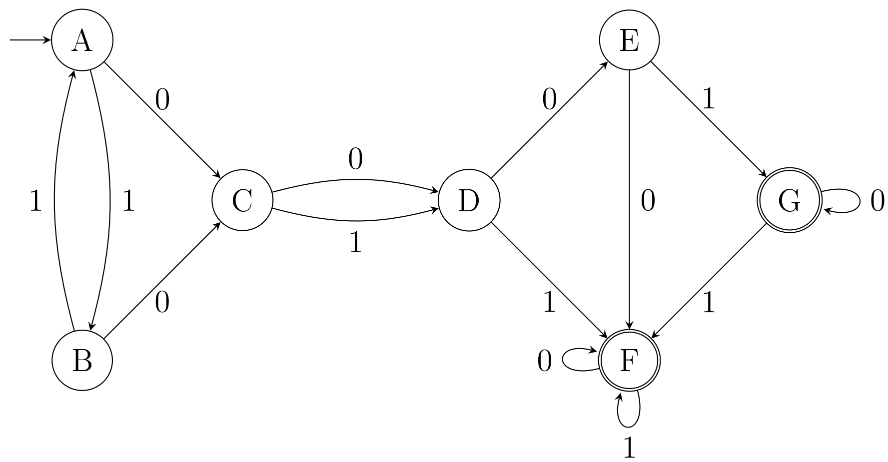
$$(a \mid b \mid c)^{*}((a(b \mid c)^{*}a) \mid (b(a \mid c)^{*}b) \mid (c(a \mid b)^{*}c))$$

4. Определить, является ли автоматным язык $\{\omega\omega^{r} \mid \omega \in \{0,1\}^{*}\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.
РЕШЕНИЕ:
От противного, пусть он автоматный. Воспользуемся леммой о накачке, возьмём n из неё, рассмотрим слово $1^{n}001^{n}$, очевидно из нашего языка. $1^{n}001^{n} = xyz,\ y \neq \varepsilon,\ |xy| \leq n$, а значит в xy есть(а следовательно и в y, т.к. он непустой) только единички. Возьмём $k = 2$, получим слово $xy^{k}z = 1^{n+a}001^{n}$, причём $a > 0$. Очевидно, это слово не палиндром, противоречие.

5. Определить, является ли автоматным язык $\{uaav \mid u, v \in \{a,b\}^{*}, |u|_{b} \geq |v|_{a}\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.
РЕШЕНИЕ:
От противного, пусть он автоматный. Воспользуемся леммой о накачке, возьмём n из неё, рассмотрим слово $b^{n}aa(ba)^{n}$ из нашего языка. $b^{n}aa(ba)^{n} = xyz,\ y \neq \varepsilon,\ |xy| \leq n$, а значит в xy есть(а следовательно и в y, т.к. он непустой) только b-шки. Но тогда возьмём $k = 0$ в предположении $\forall k \geq 0\ xy^{k}z \in L$: Заметим, что колиечество подстрок aa не могло увеличится, то есть осталась только одна. При этом, слева количество b-шек строго уменьшится(мы зачёркиваем непустой y из хотя бы одной b-шки), а количество a-шек справа не изменится, то есть $xy^{k}z$ не входит в язык. Противоречие.

Пример применения алгоритма минимизации

Минимизируем данный автомат:



Автомат полный, в нем нет недостижимых вершин — продолжаем.

Строим обратное δ отображение.

δ^{-1}	0	1
A	—	B
B	—	A
C	A B	—
D	C	C
E	D	—
F	E F	D F G
G	G	E

Отмечаем в таблице и добавляем в очередь пары состояний, различаемых словом ε: все пары, один элемент которых — терминальное состояние, а второй — не терминальное состояние. Для данного автомата это пары

$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G)$

Дальше итерируем процесс определения неэквивалентных состояний, пока очередь не оказывается пуста.

(A, F) не дает нам новых неэквивалентных пар. Для (B, F) находится 2 пары: $(A, D), (A, G)$. Первая пара не отмечена в таблице — отмечаем и добавляем в очередь. Вторая пара уже отмечена в таблице, значит, ничего делать не надо. Переходим к следующей паре из очереди. Итерируем дальше, пока очередь не опустошится.

Результирующая таблица (заполнен только треугольник, потому что остальное симметрично) и порядок добавления пар в очередь.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C	✓	✓					
D	✓	✓	✓				
E	✓	✓	✓	✓			
F	✓	✓	✓	✓	✓		
G	✓	✓	✓	✓	✓		

Очередь:
$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G),$
$(B, D), (A, D), (A, E), (B, E), (C, E), (C, D), (D, E), (A, C), (B, C))$

В таблице выделились классы эквивалентных вершин: $\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{F, G\}$. Остается только нарисовать результирующий автомат с вершинами-классами. Переходы добавляются тогда, когда из какого-нибудь состояния первого класса есть переход в какое-нибудь состояние второго класса. Минимизированный автомат: