

## Examen de licență

Sesiunea iunie 2012

### Subiecte teoretice – discipline fundamentale.

- T.Al. 1.** (1) Definiți noțiunile de grup, subgrup și subgrup normal.  
(2) Dați un exemplu de subgrup care nu este subgrup normal.  
(3) Definiți noțiunea de grup factor și arătați că grupurile factor ale unui grup comutativ sunt comutative.  
(4) Dați un exemplu de grup finit necomutativ care are un grup factor comutativ netrivial.
- T.Al. 2.** (1) Definiți noțiunile de inel, domeniu de integritate și corp.  
(2) Găsiți un exemplu de domeniu de integritate care nu este corp.  
(3) Arătați că orice corp este domeniu de integritate.  
(4) Arătați că orice domeniu de integritate finit este corp.
- T.An. 1.** Fie  $D \subseteq \mathbb{R}$  o mulțime nevidă. Se consideră un șir de funcții  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  și o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că șirul  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniform către  $f$ . Să se arate că, dacă toate funcțiile  $f_n$  sunt continue, atunci și  $f$  este continuă.
- T.An. 2.** Să se enunțe și să se demonstreze Teorema lui Fermat.
- T.Ge. 1.** Teorema dimensiunii sumei a doua subspații vectoriale.
- T.Ge. 2.** Paralelism în spații afine.

### Probleme – discipline fundamentale.

- P.Al. 1.** Notăm cu  $G$  grupul elementelor inversabile din inelul claselor de resturi modulo 100.  
(1) Să se calculeze ordinul lui  $\overline{35}$  în grupul  $(\mathbb{Z}_{100}, +)$ .  
(2) Să se calculeze ordinul lui  $\overline{7}$  în grupul  $G$ .  
(3) Câte elemente are grupul  $G$ ? Este grupul  $G$  ciclic?  
(4) Să se calculeze ultimele două cifre ale numărului  $107^{43}$ .
- P.Al. 2.** Se consideră inelul  $R = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}_{12}$ .  
(1) Să se arate că  $R$  nu este inel integru.  
(2) Să se afle elementele inversabile ale lui  $R$ .  
(3) Să se determine idealele lui  $R$ .  
(4) Să se determine inelele factor ale lui  $R$  (până la un izomorfism).

**P.An. 1.** Fie  $a > 0$  și  $x \in \mathbb{R}$ . Să se studieze natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^x}$  în funcție de parametrii  $a$  și  $x$ .

**P.An. 2.** Să se calculeze  $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$ .

**P.Ge. 1.** Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  aplicația liniară definită prin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2, x_1 + x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3).$$

- (1) Să se determine nucleul și imaginea lui  $f$  și să se verifice teorema dimensiunii pentru aplicații liniare.
- (2) Să se determine valorile proprii și subspațiile vectoriale proprii ale lui  $f$ .
- (3) Să se găsească o bază a lui  $\mathbb{R}^3$  față de care matricea lui  $f$  are forma diagonală.

**P.Ge. 2.** Fie conica

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

- (1) Să se precizeze natura conicei și să se reducă la forma canonică prin transformări ortogonale.
- (2) Să se reprezinte grafic conica.

### Subiecte discipline de specialitate

**S.Al. 1.** (1) Definiți gradul unei extinderi de corpuri comutative.

- (2) Fie  $K \subseteq L$  o extindere de corpuri comutative și  $x \in L$ . Demonstrați că  $x$  este algebric peste  $K$  dacă și numai dacă extinderea  $K \subseteq K(x)$  este finită, iar în acest caz  $[K(x) : K]$  coincide cu gradul polinomului minimal al lui  $x$  peste  $K$ .

**S.Al. 2.** Definiția simbolului Legendre. Scrieți proprietățile simbolului Legendre. Demonstrați formula de calcul pentru simbolul  $(\frac{-1}{p})$ .

**S.An. 1.** Operatori liniari și continui între spații normate. Caracterizări alternative ale continuității lor.

**S.An. 2.** Definiția funcțiilor olomorfe. Caracterizări alternative. Exemple.

**S.Ge.** Conexiunea Levi-Civita a unei varietăți Riemann.

**S.As.** Problema celor două corpuri (mișcare absolută și relativă, determinarea orbitei).

**S.ED.** Existența soluțiilor globale.

**S.EDP.** Problema lui Dirichlet atașată operatorului Laplace (formulare, unicitate, existență și metode de obținere a soluției).

**S.Me.** Teoremele generale în mecanica punctului material. Consecințe. Teoreme de conservare.

**S.MMC.** Ecuații de mișcare.

**S.Pr.** Repartiția binomială.

- (1) Exemple din lumea fizică.
- (2) Deducerea expresiei repartiției binomiale.
- (3) Calculul mediei și dispersiei pentru o variabilă aleatoare repartizată binomial.

**S.St.** Teste statistice pentru ipoteze simple. Teorema Neyman–Pearson. Aplicați această teoremă pentru o repartiție la alegere.

**S.CO.** Enunțați (fără demonstrații): teorema fundamentală a programării liniare, lema Farkas – Minkowski, teorema fundamentală a dualității și testul de incompatibilitate din algoritmul simplex dual.

Enunțați și demonstrați testul de optim infinit din algoritmul simplex primal.