Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen de licenţă

Sesiunea februarie 2013

Subiecte teoretice – discipline fundamentale.

T.Al. 1. Indicele unui subgrup într-un grup finit (relaţii de echivalenţă definite de un subgrup; definiţia indicelui unui subgrup într-un grup finit). Teorema lui Lagrange (enunţ şi demonstraţie).

T.Al. 2. Definiţia spaţiului vectorial şi a noţiunii de *bază într-un spaţiu vectorial.* Existenţa bazei în cazul finit generat (demonstraţie).

T.Ge. 1. Definiţi noţiunea de formă normală pentru o formă pătratică reală şi demonstraţi teorema lui Sylvester: *numărul termenilor cu coeficienţi pozitivi ai unei forme normale a unei forme pătratice reale nu depinde de reperul canonic ales.*

T.Ge. 2. Izometrii ale planului vectorial euclidian real: definiţie, matrice asociate în raport cu repere ortonormate, interpretări geometrice.

T.An. 1. Teorema lui Lagrange (enunţ şi demonstraţie).

T.An. 2. Formula Leibniz-Newton (enunţ şi demonstraţie).

Probleme – discipline fundamentale.

P.Al. 1. Se consideră grupurile $G_1 = (\mathbb{Z}_{20}, +)$ şi G_2 grupul elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}_{33}$.

1. Să se calculeze ordinul lui $\overline{6}$ în G_1.
2. Să se calculeze ordinul lui $\hat{2}$ în G_2.
3. Sunt cele două grupuri izomorfe?
4. Să se arate că orice grup comutativ cu 20 de elemente este izomorf cu G_1 sau G_2.

P.Al. 2. Fie $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, rădăcinile polinomului $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$. Pentru orice număr natural n, fie $S_n = \sum_{j=1}^{4} x_j^n$.

1. Să se calculeze S_2 şi S_3.
2. Să se calculeze S_{2013}.
3. Pentru ce valori ale lui n avem că $S_n = 0$?
4. Considerăm polinomul f de mai sus ca având coeficienţi în corpul $K = \mathbb{Z}_{23}$. Are acest polinom vreo rădăcină în K?

P.Ge. 1. Arătaţi că orice conică afină nedegenerată se poate obţine ca intersecţia unui con circular cu un plan.

P.Ge. 2. Fie $V = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de $\mathbb{R}$–spaţiu vectorial şi $f : V \to V$ aplicaţia definită prin

$$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 3x_2 - 3x_3, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3, x_3).$$

1. Arătaţi că f este un izomorfism de spaţii vectoriale.
2. Decideţi dacă f este diagonalizabilă şi, în caz afirmativ, determinaţi o bază de diagonalizare.

P.An. 1. Se consideră funcţia $f : (0, \infty) \to (-\infty, 0)$ dată de $f(x) = \ln(1 + x) - x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

1. Să se studieze monotonia funcţiei f.
2. Este f bijectivă? Argumentaţi.

P.An. 2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ se consideră

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x^n + 1} dx$$

1. Să se calculeze I_2.
2. Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$
3. Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} I_n$.

Subiecte discipline de specialitate

S.Al. 1. Inele factoriale, principale, euclidiene (definiţii). Să se demonstreze că orice inel euclidian este principal. Să se dea exemplu de inel factorial care nu este principal (justificare).

S.Al. 2. Indicatorul lui Euler (definiţie şi formulă de calcul). Teorema lui Euler (enunţ şi demonstraţie). Mica teoremă a lui Fermat (enunţ şi demonstraţie).

S.Ge. Geodezicele varietăţilor riemanniene (definiţie, exemple, proprietăţi).

S.An. 1. Teorema graficului închis (enunţ şi demonstraţie).

S.An. 2. Teorema lui Liouville (enunţ şi demonstraţie).

S.As. Problema celor două corpuri.

S.ED. Lema Bellman-Gronwall (enunţ şi demonstraţie). Teorema Cauchy-Lipschitz (enunţ şi demonstraţie).

S.EDP. Principii de maxim pentru operatorul lui Laplace (definiţie, enunţuri şi demonstraţie).

S.MMC. Tensorii viteză de deformaţie şi viteză de rotaţie: definire şi proprietăţi. Mişcarea de corp rigid.

S.Me. Viteza şi acceleraţia punctului material în mişcarea absolută şi mişcarea relativă.

S.Pr. 1. Definiţi noţiunile: probabilitate, variabilă aleatoare, probabilitate condiţionată.

2. Enunţaţi (fără demonstraţii): formula de transport, teorema privind asociativitatea independenţei.
3. Enunţaţi şi demonstraţi teorema de unicitate a probabilităţilor (fără demonstraţiile rezultatelor pregătitoare).

S.St. Calculul estimatorului de verosimilitate maximă pentru parametrul $\theta = (\mu, \sigma^2)$ al repartiţiei normale $N(\mu, \sigma^2)$.

S.CO. 1. Definiţi noţiunile: soluţie admisibilă, soluţie optimă, optim infinit.

2. Enunţaţi (fără demonstraţii): teorema fundamentală a optimizării liniare, teorema fundamentală a dualităţii.
3. Enunţaţi şi demonstraţi teorema de optim infinit de la algoritmul simplex primal.