Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen de licenţă

Sesiunea iunie 2013

Subiecte teoretice – discipline fundamentale.

T.Al. 1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Definiţi grupul S_n de permutări ale mulţimii $\{1, \ldots, n\}$.
(2) Calculaţi ordinul lui S_n.
(3) Arătaţi că S_n este abelian dacă şi numai dacă $n \in \{1, 2\}$.
(4) Să se arate că un grup G cu n elemente este izomorf cu un subgrup al lui S_n.

T.Al. 2. (1) Definiţi conceptul de ideal într-un inel comutativ.
(2) Care sunt idealele lui $\mathbb{Z}$?
(3) Fie I un ideal în inelul comutativ A. Să se construiască inelul factor A/I.
(4) Fie $A = \mathbb{Z}[i]$ inelul întregilor lui Gauss şi I idealul lui A generat de 3. Determinaţi numărul de elemente ale inelului factor A/I.

T.An. 1. Să se demonstreze următoarea teoremă: *Fie $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcţii derivabile astfel încât $f_n \to f$ şi există $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ astfel încât $f_n' \to g$ uniform pe $[a, b]$. Să se arate că f este derivabilă pe $[a, b]$ şi $f'(x) = g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.*

T.An. 2. Să se demonstreze următoarea teoremă: *Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că f este integrabilă pe $[a, b]$.*

T.Ge. 1. Demonstraţi că dacă U, V sunt spaţii vectoriale finit dimensionale peste un acelaşi corp K iar $T : U \to V$ este o aplicaţie $K-$liniară, atunci

$$\dim_K(\mathrm{Ker}(T)) + \dim_K(\mathrm{Im}(T)) = \dim_K(U).$$

T.Ge. 2. Enunţaţi şi demonstraţi teorema asupra dimensiunii sumei a două subspaţii afine.

Probleme – discipline fundamentale.

P.Al. 1. Fie G grupul multiplicativ al matricelor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ cu $ad - bc = \widehat{1}$.

(1) Ce ordin are G?
(2) Este G abelian? Justificaţi răspunsul.

P.Al. 2. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale ecuaţiei $x^3 + px + q = 0$, unde $p, q \in \mathbb{C}$.

(1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$. Dacă A^t este transpusa lui A, calculaţi $A \cdot A^t$ în funcţie de p şi q.
(2) Să se arate că $(x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -4p^3 - 27q^2$.

P.An. 1. Fie $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n}(x)\, dx$, $n \in \mathbb{N}$.

(1) Să se arate că şirul $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este monoton.
(2) Să se calculeze $I_n + I_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
(3) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

P.An. 2. Fie $a_n > 0$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

(1) Să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ este convergentă.

(2) Utilizând criteriul lui Cauchy, să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ este divergentă.

(3) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă, să se arate că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ este convergentă.

P.Ge. 1. Fie $V = \mathbb{R}^3$ cu structura canonică de $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial, şi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1).$$

(1) Să se determine câte o bază pentru $\mathrm{Ker}(f)$ şi respectiv $\mathrm{Im}(f)$.
(2) Determinaţi subspaţiile proprii ale lui f şi decideţi dacă f este sau nu diagonalizabilă.
(3) Daţi exemplu de aplicaţie liniară $g : V \to V$ care nu este identic nulă, dar astfel încât $f \circ g$ este identic nulă.

P.Ge. 2. În spaţiul $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu structura euclidiană canonică se consideră dreptele

$$\mathcal{D}_1 : \frac{x-1}{2} = y = z \qquad \text{şi respectiv} \qquad \mathcal{D}_2 : \frac{x}{-1} = y = \frac{z-2}{3}.$$

(1) Să se scrie ecuaţia planului π care trece prin $\mathcal{D}_1$ şi este paralel cu $\mathcal{D}_2$.
(2) Să se arate că $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$ sunt necoplanare şi să se calculeze distanţa dintre $\mathcal{D}_1$ şi $\mathcal{D}_2$.

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de Matematică şi Informatică

Examen de licenţă

Sesiunea iunie 2013

Subiecte discipline de specialitate

S.Al. 1. (1) Definiţi conceptul de extindere algebrică de corpuri şi arătaţi că orice extindere finită este algebrică.

(2) Fie corpul $\overline{\mathbb{Q}} = \{x \in \mathbb{C} \mid x \text{ algebric peste } \mathbb{Q}\}$. Să se arate că $\overline{\mathbb{Q}}$ este mulţime numărabilă şi că extinderea $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ nu este finită.

S.Al. 2. Fie p un număr prim.

(1) Arătaţi că există rădăcini primitive modulo p.
(2) Arătaţi că există rădăcini primitive modulo p^2.
(3) Determinaţi o rădăcină primitivă modulo 11.

S.An. 1. Teorema Banach-Steinhaus (Principiul mărginirii uniforme).

S.An. 2. Teorema de identitate a funcţiilor olomorfe.

S.Ge. Varietăţi riemanniene cu curbură secţională constantă: definiţie, exemple, proprietăţi.

S.As. Problema celor două corpuri.

S.ED. Integrale prime.

S.EDP. Ecuaţia undelor. Existenţa soluţiilor clasice pentru problema Cauchy.

S.Me. Viteza şi acceleraţia punctului material în mişcarea absolută şi mişcarea relativă. Formulele de compunere.

S.MMC. Teorema de descompunere polară. Mişcare şi deformare: viteză, acceleraţie, tensorii de deformare şi viteza de deformare.

S.Pr. Repartiţia unei variabile aleatoare.

(1) Repartiţie, funcţie de repartiţie. Arătaţi că dacă două repartiţii au aceeaşi funcţie de repartiţie, atunci ele coincid.
(2) Repartiţii absolute continue, noţiunea de densitate. Arătaţi că dacă două repartiţii au aceeaşi densitate, atunci ele coincid.
(3) O variabilă aleatoare X are densitatea $p(x) = c \cdot \sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$. Găsiţi constanta c şi calculaţi-i funcţia de repartiţie.

S.St. Prezentaţi două proceduri de estimare a parametrilor unei familii de variabile aleatoare. Găsiţi forma concretă a celor doi estimatori considerând o familie oarecare de repartiţii (la alegere). Enunţaţi teorema Rao-Cramér.

S.CO. Enunţaţi (fără demonstraţie): teorema fundamentală a dualităţii, teorema fundamentală a optimizării liniare şi teoremele de schimbare a bazei în algoritmii simplex primal şi dual.

Enunţati şi demonstraţi testul de incompatibilitate (teorema domeniului vid) de la algoritmul simplex dual.