Convolutia Semnalelor

Definitii

- Convolutia este un concept de baza in cadrul teoriei sistemelor liniare
- Teorema convolutiei afirma ca raspunsul unui sistem (aflat in conditii initiale de repaos / zero) la un semnal de intrare arbitrar este format din convolutia intre acel semnal de intrare si functia pondere (raspunsul la impuls) a sistemului considerat.

Convolutia in timp continuu a doua semnale $x_1(t)$ si $x_2(t)$ este definita de relatia:

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \ \ ; \ -\infty < t < \infty$$

In relatia anterioara τ este variabila de integrare si t este un parametru. Durata unui semnal $x_i(t)$ este definit de momentele de timp t_i si T_i astfel incat pentru orice valoare t in afara intervalului $[t_i , T_i]$ semnalul sa fie zero, adica $x_i(t) = 0, t \notin [t_i , T_i]$

Proprietatile integralei de convolutie sunt:

1. Comutativitate
$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

2. Distributivitate
$$x_1(t) * \{x_2(t) + x_3(t)\} = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$$

3. Asociativitate
$$x_1(t) * \{x_2(t) * x_3(t)\} = \{x_1(t) * x_2(t)\} * x_3(t)$$

4. Durata
$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \begin{cases} 0, t \le t_1 + t_2 \\ \displaystyle\int_{t_1+t_2}^{T_1+T_2} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau \ \ ; \ t_1 + t_2 \le t \le T_1 + T_2 \\ 0, t \ge T_1 + T_2 \end{cases}$$

5. Deplasarea in domeniul timp
Fie $x(t) = x_1(t) * x_2(t)$. Atunci convolutia semnalelor deplasate in timp este caracterizata de urmatoarele relatii:
$$x_1(t-\tau_1) * x_2(t) = x(t-\tau_1)$$
$$x_1(t) * x_2(t-\tau_2) = x(t-\tau_2)$$
$$x_1(t-\tau_1) * x_2(t-\tau_2) = x(t-\tau_1-\tau_2)$$

Pentru a intelege convolutia mai bine, se pot defini trei etape importante in calculul integralei de convolutie:

Pasul 1. Se aplica proprietatea ce caracterizeaza durata convolutiei, pentru definirea / identificarea intervalelor in care aceasta este zero.

Pasul 2. Se oglindeste – raportat la axa verticala (Oy) – unul dintre semnale, adica se reprezinta unul dintre semnale raportat la coordonata de timp $-\tau$.

Pasul 3. Se variaza parametrul t de la $-\infty$ la ∞ => adica se va deplasa semnalul simetrizat (oglindit) fata de axa Oy de la stanga la dreapta pe axa timpului, fiind observate intervalele de suprapunere cu celalalt semnal (cu care se calculeaza convolutia) si se va evalua integrala produsului celor doua semnale pe aceste intervale de suprapunere. Cu alte cuvinte, convolutia poate fi interpretata ca o masura a „similitudinii“ sau „suprapunerii“ celor doua semnale pe intervalele lor de definitie .

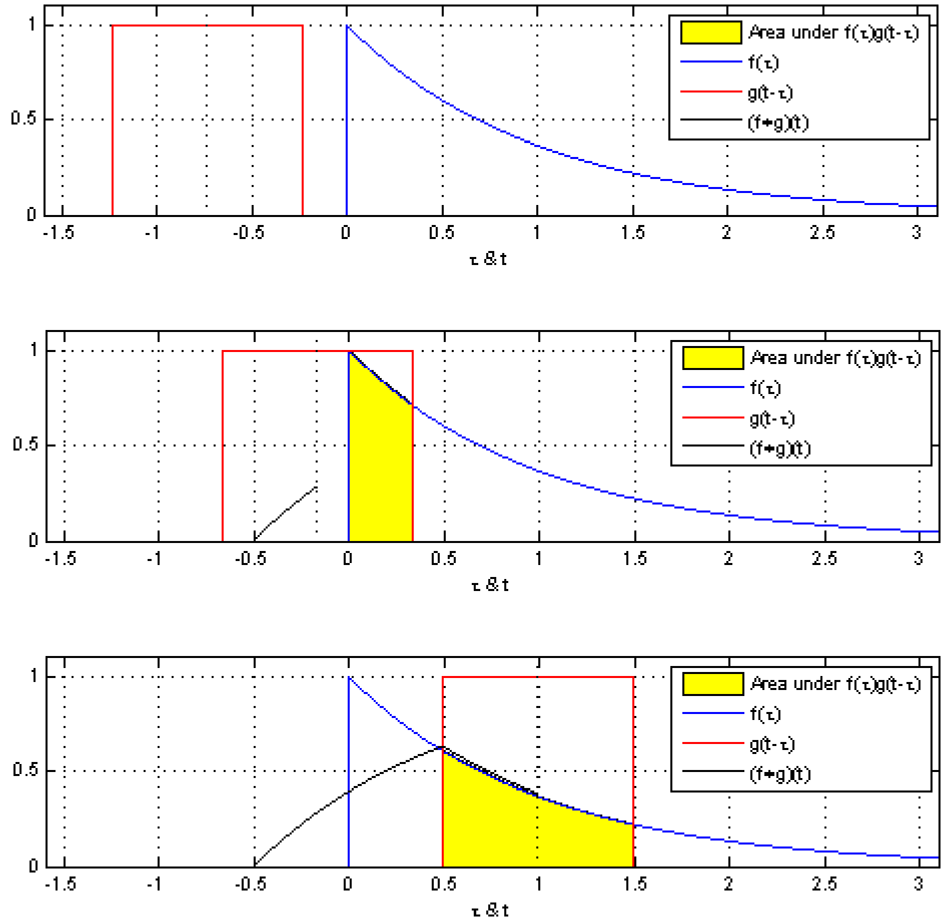

Fig. 1 Convolutia unui semnal dreptunghiular cu unul exponential (parabolic) a- sus; b – mijloc; c-jos

In graficele din *Fig.1* se poate vedea deplasarea dealungul axei timpului a semnalului dreptunghiular (cu rosu) si suprapunerea acestuia cu cel parabolic (albastru). Se observa ca initial produsul de convolutie este zero (*Fig. 1-a*) deoarece cele doua semnale nu se suprapun deloc. Glisand semnalul rosu de la stanga catre dreapta peste semnalul albastru, se observa cum progresiv aria de suprapunere creste (zona marcata cu galben *Fig. 1-b, 1-c*), atingand la un moment dat un maxim, urmand mai apoi o descrestere progresiva a ariei de suprapunere (integralei de convolutie). Simultan cu suprapunerea se observa si o desenare progresiva a graficului functiei de convolutie (linia neagra care incepe in –0.5). Valoarea acestei functii la un moment dat (deci valoarea pe graficul negru) reprezinta aria comuna de suprapunere a celor doua grafice (rosu si albastru) la momentul respectiv – deci valoarea integralei de convolutie calculata in acel moment. Pentru o vizualizare dinamica si completa a graficelor din *Fig. 1* recomandam vizitarea paginii web https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

Exemple de convolutie pentru diferite semnale

Exemplul 1 – Semnal dreptunghiular cu el insusi

Fie f(t) o functie definita in felul urmator:

$$f(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0; & in\,rest \end{cases}$$

Pentru determinarea convolutiei semnalului de mai sus cu el insusi, se poate utiliza urmatorul cod Matlab / Octave.

```
clc;
clear all;
close all;

tstart = 0;
tstop = 0.1;
tpas = 0.0001;

t = tstart : tpas : tstop;
x = ones(1,1001);

subplot(3, 1, 1);
plot( t, x, 'linewidth',3);
axis([-0.102 0.212 0 1.2]); grid;

h= ones(1,1001);
subplot(3, 1, 2);
plot( t, h, 'linewidth',3);
axis([-0.102 0.212 0 1.2]); grid;

t2 = 2*tstart : tpas : 2*tstop;
y = conv(x, h) * tpas;

subplot(3, 1, 3);
plot( t2, y, 'r', 'linewidth',2);
axis([-0.102 0.312]); grid;
```

Fig. 2 Convolutia unui semnal dreptunghiular cu el insusi – cod Matlab / Octave

Explicatia codului:

Liniile 1 la 3 reseteaza mediul de variabile Matlab / Octave, inchide figuri existente etc.

Liniile 5 la 7 initializeaza capetele de interval unde functia este nenula, precum si pasul care va fi considerat pentru calculul valorilor (distanta intre doua puncte in intervalul *tstart... tstop*)

Liniile 9 si 10 definesc vectorul de valori temporale (t) si valorile corespunzatoare (vectorul x si vectorul h, de dimensiune identica cu vectorul t). A se vedea si *Fig. 3* de mai jos

Name	Klasse	Dimension	Wert	Attribut
h	double	1x1001	1:0:1	
t	double	1x1001	0:0.0001:0.1	
t2	double	1x2001	0:0.0001:0.2	
tpas	double	1x1	0.00010000	
tstart	double	1x1	0	
tstop	double	1x1	0.10000	
x	double	1x1001	1:0:1	
y	double	1x2001	[0.00010000, 0.0...	

Fig. 3 Zona Workspace in mediul Octave / Matlab unde sunt definite variabilele alocate

Liniile 12 la 20 reprezinta grafic cele doua fuctii x si h (generata la linia 16)

Liniile 21 si 22 genereaza convolutia y=x*h; se observa suportul t2 – nenul pe un interval diferit de cel al lui t.

Liniile 24 la 26 reprezinta grafic produsul de convolutie (ultimul grafic de mai jos, cu rosu)

Observatii:

Vectorii *h, t* si *x* au 1001 (1x1001) elemente, dupa cum se vede in *Fig. 3*. Acest lucru rezulta din urmatoarele specificatii combinate:

a) tstop – tstart = 0.1
b) (tstop – tstart) / tpas = 0.1 / 0.0001 = 1000
c) Intervalul este inchis la ambele capete in acest exemplu, deci se mai adauga inca o valoare la cele 1000 de elemente deja existente => 1001 elemente in vector.

Vectorii *t2* si *y* contin 2001 elemente. Rationamentul este similar celui descris anterior. Numarul dublu de elemente (2000 fata de 1000) se justifica daca se considera Proprietatea 4 (Durata) a integralei de convolutie, amintita anterior in aceasta platforma.

In *Fig. 4* se vede reprezentarea grafica a semnalelor generate mai sus precum sia convolutiei lor (ultimul grafic din imagine, cu rosu).

Se observa valoarea maxima a convolutiei este 0.1, si aceasta valoare este obtinuta exact in momentul suprapunerii maxime a celor doua semnale (din *Fig. 4* sus si mijloc). Aria comuna in acest caz este 0.1 * 1 = 0.1. „Momentul de timp“ la care se intampla acest lucru este 0.1. Practic, unul din cele doua semnale considerate este „rotit“ si „impins“ peste celalalt pornind din stanga catre dreapta pe grafic (a se vedea si introducerea teoretica de mai inainte). Cand graficul „impins“ depaseste punctul de suprapunere maxima, valoarea de convolutie incepe sa scada (rampa descendenta a triunghiului de convolutie din *Fig. 4*). In momentul in care cele doua semnale se despart definitiv (nu se mai suprapun deloc), convolutia devine 0 (t2 > 0.2).

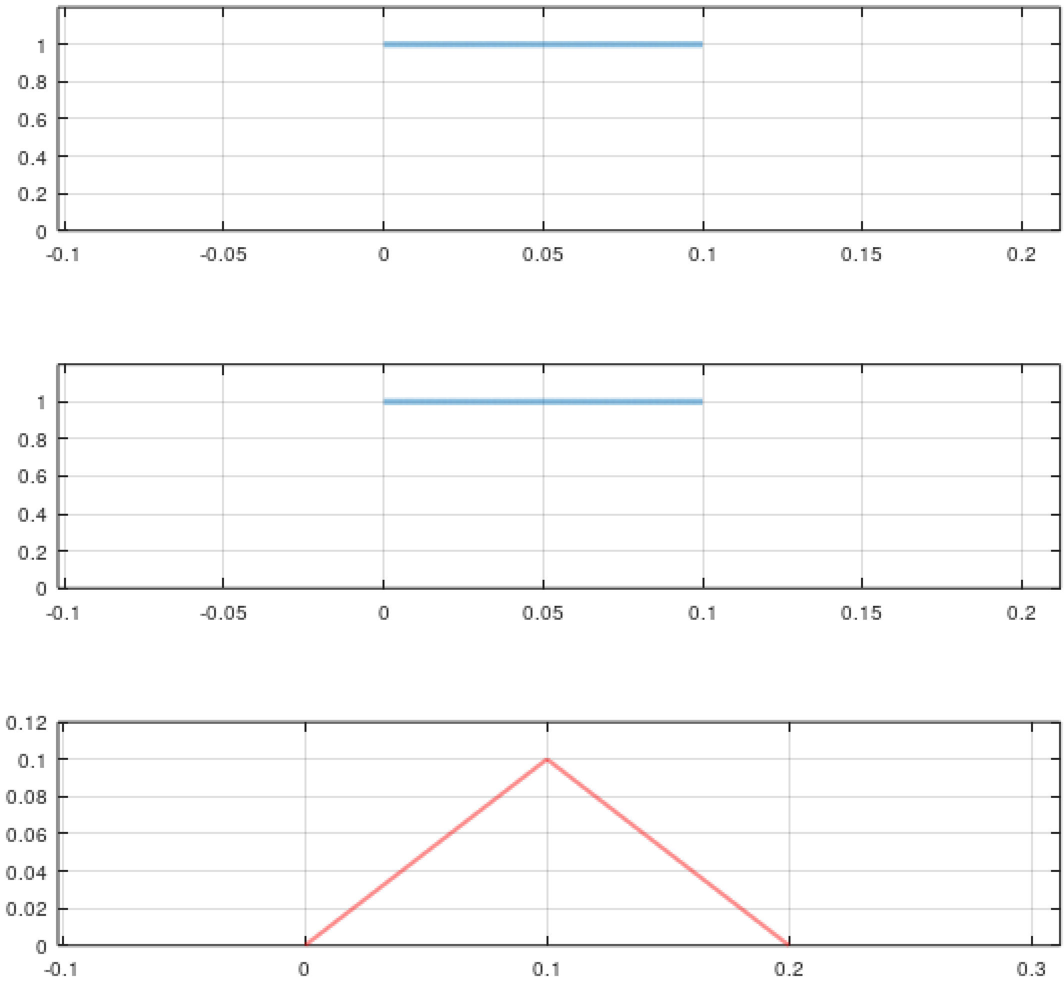

Fig. 4 Convolutia unui semnal dreptunghiular cu el insusi – (sus si mijloc: x si h); jos – convolutia y=x*h

Tema1: Sa se modifice codul din *Fig.2* astfel incat unul dintre semnalele *x* sau *h* sa aibe o durata de 0.05 ($0 \leq t \leq 0.05$). Celalat ramane definit ca mai inainte. Sa se afiseze graficul functiei de convolutie in aceasta noua situatie. Sa se comenteze rezultatul obtinut. Sa se modifice si reprezentarile grafice astfel incat acestea sa se alinieze la zero, pe verticala.

Exemplul 2 – Semnal rampa descrescatoare cu semnal exponential descrescator

Fie x(t) si h(t) doua functii definite in felul urmator:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - 10t; & 0 \le t \le 0.1 \\ 0; & in\,rest \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} e^{-ft}; & 0 \le t \le 0.1 \\ 0; & in\,rest \end{cases}$$

Pentru determinarea convolutiei semnalelor de mai sus, x(t) si h(t), se poate utiliza urmatorul cod Matlab / Octave.

```
1  clc;
2  clear all;
3  close all;
4
5  tstart = 0;
6  tstop = 0.1;
7  tpas = 0.0001;
8  f = 100
9
10 t = tstart : tpas : tstop;
11 x= 1-10*t;
12
13 subplot( 3, 1, 1);
14 plot( t, x, 'linewidth',2);
15 axis([0 0.1001 0 1]); grid;
16
17 h = 1 * exp(-f*t);
18 subplot( 3, 1, 2);
19 plot( t, h, 'linewidth',2);
20 axis([0 0.1001 0 1]); grid;
21
22 t2 = 2*tstart : tpas : 2*tstop;
23 y = conv(x, h) * tpas;
24
25 subplot( 3, 1, 3);
26 plot( t2, y, 'r', 'linewidth',2);
27 axis(); grid;
```

Fig. 5 Convolutia rampa descrescatoare cu exponential descrescator – cod Matlab / Octave

In acest exemplu avem doua functii / semnale distincte pentru care se calculeaza convolutia. Functia Matlab / Octave care implementeaza convolutia se numeste *conv*, apelul acesteia fiind similar cu cel prezentat in primul exemplu. Se observa alinierea pe verticala a axelor, la zero.

Tema 2.1: De ce se inmulteste valoarea de la linia 23 cu tpas?

In *Fig. 6* este reprezentata grafic convolutia semnalelor definite mai sus. Modul de calcul grafic „teoretic“ este similar celui descris la exemplul anterior. Se observa si in acest caz intervalul de definitie al convolutiei (suportul temporal) conform cu Proprietatea 4 (Durata) a integralei de convolutie

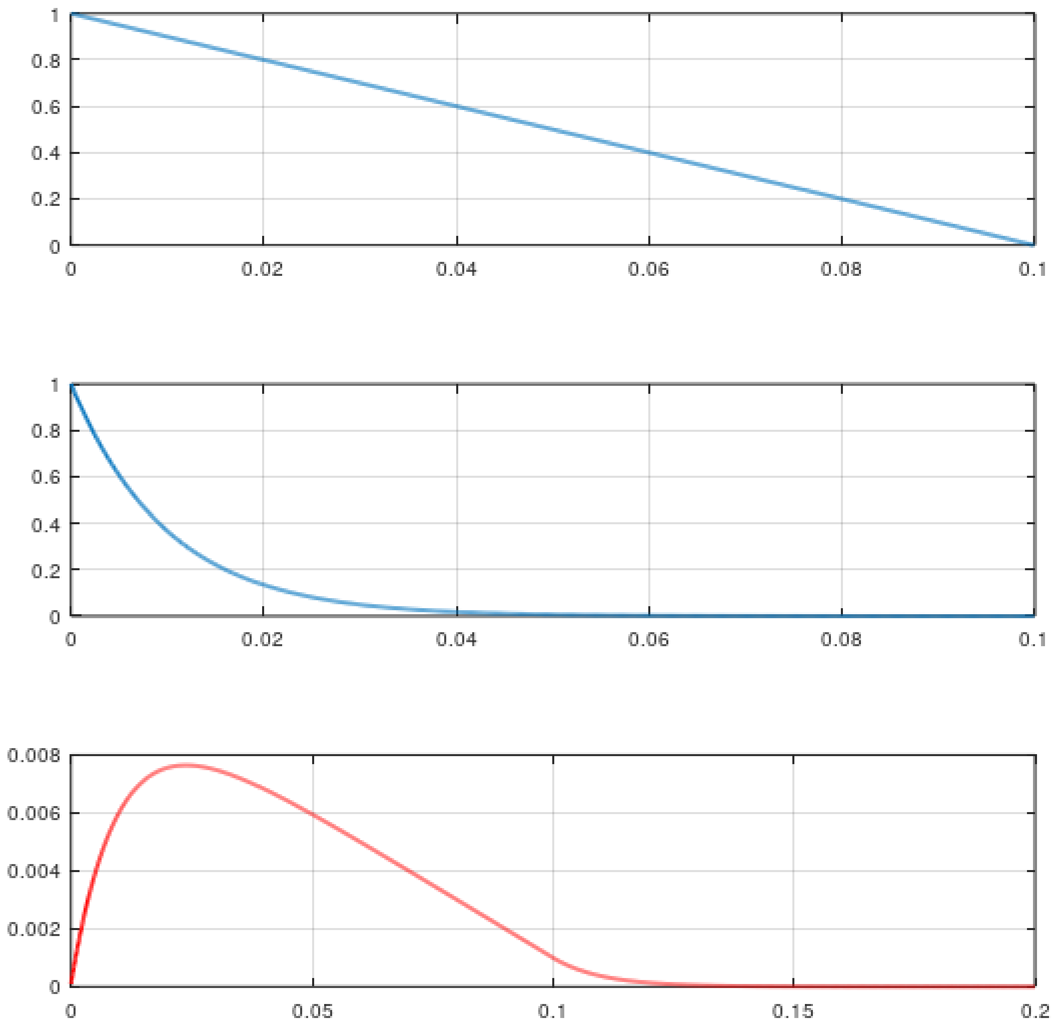

Fig. 6 Convolutia semnal rampa cu semnal exponential – (sus si mijloc: x si h); jos – convolutia y=x*h

Tema 2.2: Sa se modifice codul din *Fig.5* astfel incat unul dintre semnale sa fie rampa crescatoare in loc de rampa descrescatoare (deci are valoarea 0 la t=0 si 1 la t=0.1). Sa se afiseze graficul functiei de convolutie in aceasta noua situatie. Sa se comenteze rezultatul obtinut. Ce trebuie modificat in cod pentru a obtine o variatie exponentiala mai „lina“?

Tema 3 (optional)

Definiti o functie proprie de convolutie.