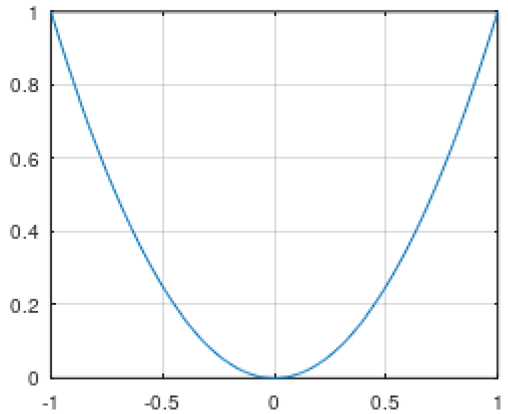
CAPITOLUL II

Introducere in teoria seriilor Fourier

A. Definitii

- Se defineste o functie *para* ca fiind o functie pentru care f(-x) = f(x)
  Matlab / Octave: >> x = -1:0.01:1; plot(x, x.*x)
- Se defineste o functie *impara* ca fiind o functie pentru care f(-x) = -f(x)
  Matlab / Octave: >> x = -1:0.01:1; plot(x, x.*x.*x)



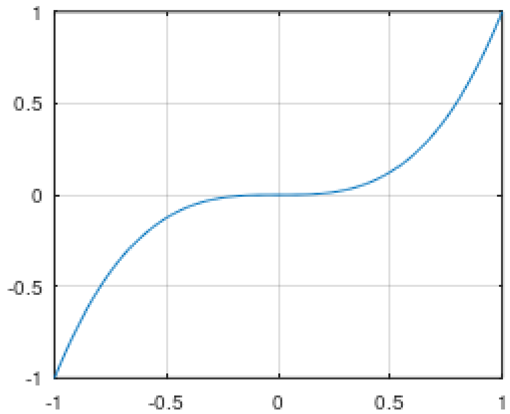


Fig. 2.1 (stanga) – functie para; (dreapta) – functie impara

Din punct de vedere grafic, functiile pare au simetrie fata de axa „y“ iar functiile impare au simetrie fata de origine.

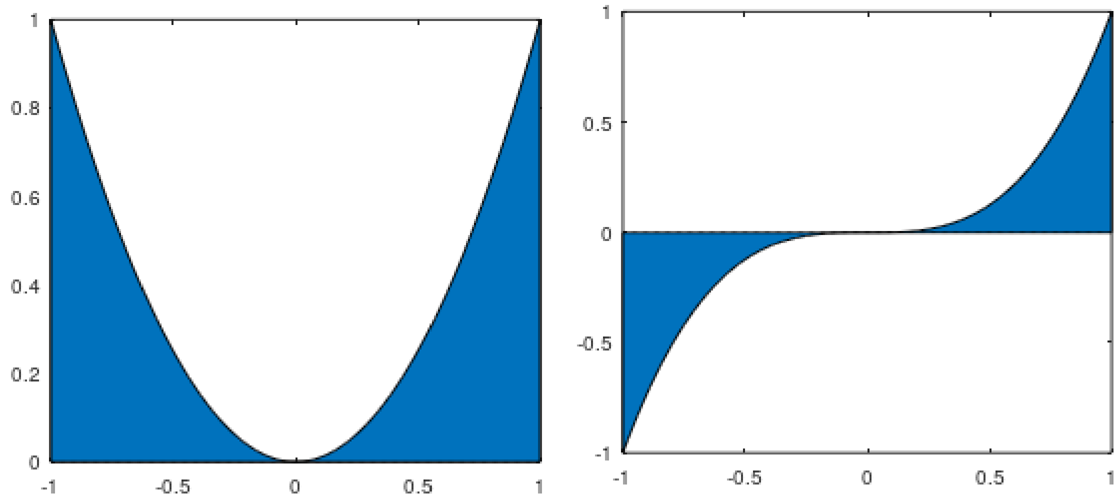
Exemple:

- Suma de functii, puteri impare ale lui x, este functie impara: $7 * x^3 - 5 * x$
- Suma de functii puteri pare ale lui x, este functie para: $-x^4 + 2 * x^2 - 5$
- Produsul a doua functii impare este functie para: $x * \sin(x)$ este para
- Produsul a doua functii pare este para: $x^2 * \cos(x)$ este para
- Produsul unei functii pare cu o functie impara este o functie impara: $\sin(x) * \cos(x)$ este impara

1. Integrarea functiilor impare si pare pe domenii simetrice

Fie p>0 un numar intreg.

- Daca f(x) este o functie impara, atunci $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$
- Intuitiv: aria de sub graficul functiei pe domeniul [-p, 0] este identica cu aria de sub graficul functiei pe intervalul [0, p], dar de semn contrar => se anuleaza reciproc.
- Daca f(x) este o functie para, atunci $\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2\int_{0}^{p} f(x)dx$
- Intuitiv: aria de sub graficul functiei pe domeniul [-p, 0] este identica cu aria de sub graficul functiei pe intervalul [0, p], de acelasi semn => se dubleaza aria de sub graficul aferent zonei [0, p]



2. Functii periodice

O functie este periodica daca exista un numar T>0 astfel incat f(x+T) = f(x) pentru fiecare valoare a lui x. Cea mai mica valoare T pentru care este indeplinita conditia precedenta se numeste *perioada* functiei f(x). In mod intuitiv, functiile periodice au un comportament repetitiv. O functie periodica poate sa fie definita pe un interval finit, dupa care valorile acestea se pot copia si reinsera astfel incat sa se repete.

Exemple:

- sin(x) si cos(x) sunt periodice cu perioada 2π
- Daca M este un numar fix, atunci $\sin\left(\frac{2\pi x}{M}\right)$ *si* $\cos\left(\frac{2\pi x}{M}\right)$ sunt periodice cu perioada M.

2.1. Serii Fourier

Fie p>0 un numar fix si f(x) o functie periodica cu perioada 2p, definita pe intervalul (-p, p).

Seria Fourier a functiei f(x) este un mod de reprezentare (dezvoltare) a lui f(x) ca o serie infinita de functii sinus si cosinus.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

Unde a_0, a_n si b_n sunt numiti coeficientii seriei Fourier asociate functiei f(x), si sunt definiti de formulele urmatoare:

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx\ ;\ a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx\ ;\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

Observatii:

- Pentru a genera seria Fourier este suficient sa fie calculate integralele care definesc coeficientii a_0, a_n si b_n si mai apoi inlocuirea lor in suma Fourier de mai sus.
- Deseori f(x) este o functie definita pe ramuri.
- Spre deosebire de o dezvoltare in serie Taylor, pentru seria Fourier functia f(x) poate sa aibe discontinuitati.

Identitati utile:

$$\sin(n\pi) = 0\ ;\ cos(n\pi) = (-1)^n = \begin{cases} 1, n\ par \\ -1, n\ impar \end{cases}\ ;\ n \in N$$

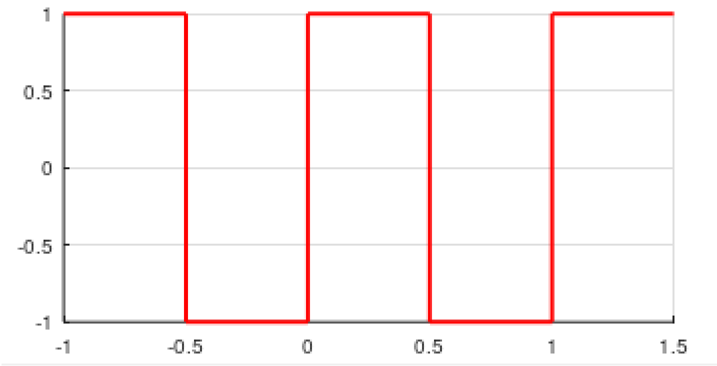
- Daca f(x) este o *functie para*, formula pentru coeficienti se simplifica. In mod particular, daca f(x) este para, $f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$ este functie impara => $b_n = 0$. Deci, pentru functii pare coeficientii $b_n$sunt zero
- Daca f(x) este o *functie impara,* coeficientii a_0 si a_n sunt zero ($a_0 = a_n = 0$)

B. Exemple de functii cu seriile lor Fourier

Exemplul 1 – Semnal dreptunghiular

Fie f(x) o functie periodica si definita pe o perioada in felul urmator:

$$f(x) = \begin{cases} -1; & -0.5 < x < 0 \\ 1; & 0 < x < 0.5 \end{cases}$$



Deoarece f(x) este functie impara, rezulta ca a_0 = a_n = 0 pentru oricare n. Prin calcul rezulta valoarea coeficientilor b_n:

$$b_n = \frac{1}{0.5}\int_{-0.5}^{0.5} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{0.5}\right)dx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

De aici se poate scrie seria Fourier a lui f(x), dupa cum urmeaza:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin\left(\frac{n\pi x}{0.5}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{0.5}\right) + \frac{4}{3\pi}\sin\left(\frac{3\pi x}{0.5}\right) + \cdots$$

Pentru a general seria Fourier corespunzatoare functiei mai sus definite, pentru primele valori ale lui n, se poate folosi urmatorul cod:

```
clc;
clear all;
close all;

x=linspace(0,2.5,2000);
f=0;
k=0;

 % Semnalul dreptunghiular ideal
X=[0,0,0.5,0.5,1.0,1.0,1.5,1.5,2,2,2.5,2.5];
Y=[0,1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,1,1,0];

figure(1)

 for n=1:2:17
    k=k+1;
    f=f+(4/(n*pi))*sin(2*pi*n*x);
    error=mean((abs(f)-1).^2);

    subplot(3,3,k),  line(X,Y,'color','r','linewidth',2)
    hold on;
    subplot(3,3,k), plot(x,f,'k','linewidth',2)
    title(['n = ', num2str(n), ' Eroare = ' ,num2str(error)]),grid
 end

```

Discutie a codului:

- Se defineste un vector de 2000 de valori uniform distribuite intre 0 si 2.5 (x – linspace)
- Se initializeaza suma Fourier si contorul de iteratie (f si k - ambele valori zero).
- Se defineste un set de valori pentru semnalul dreptunghiular „ideal“ (X si Y)
- In bucla „for“ sunt generate pe rand:
    - Incrementarea contorului de iteratie, *k*. Acesta este necesar pentru a defini subfereastra in care vor fi reprezentate graficele iteratiei curente.
    - Suma partiala Fourier de la pasul curent, *f*. A se compara cu formulele teoretice descrise mai sus.
    - Eroarea patratica medie pentru pasul de iteratie curent.
    - Reprezentarile grafice
- Deoarece *x* este vector (2000 elemente) si *f* o sa fie vector (tot 2000 de elemente). Se observa iteratia implicita peste valorile vectorului *x* in relatia de calcul al lui *f*.

- La fiecare pas (*n*) suma Fourier este recalculata iterativ, adaugandu-se noul termen.

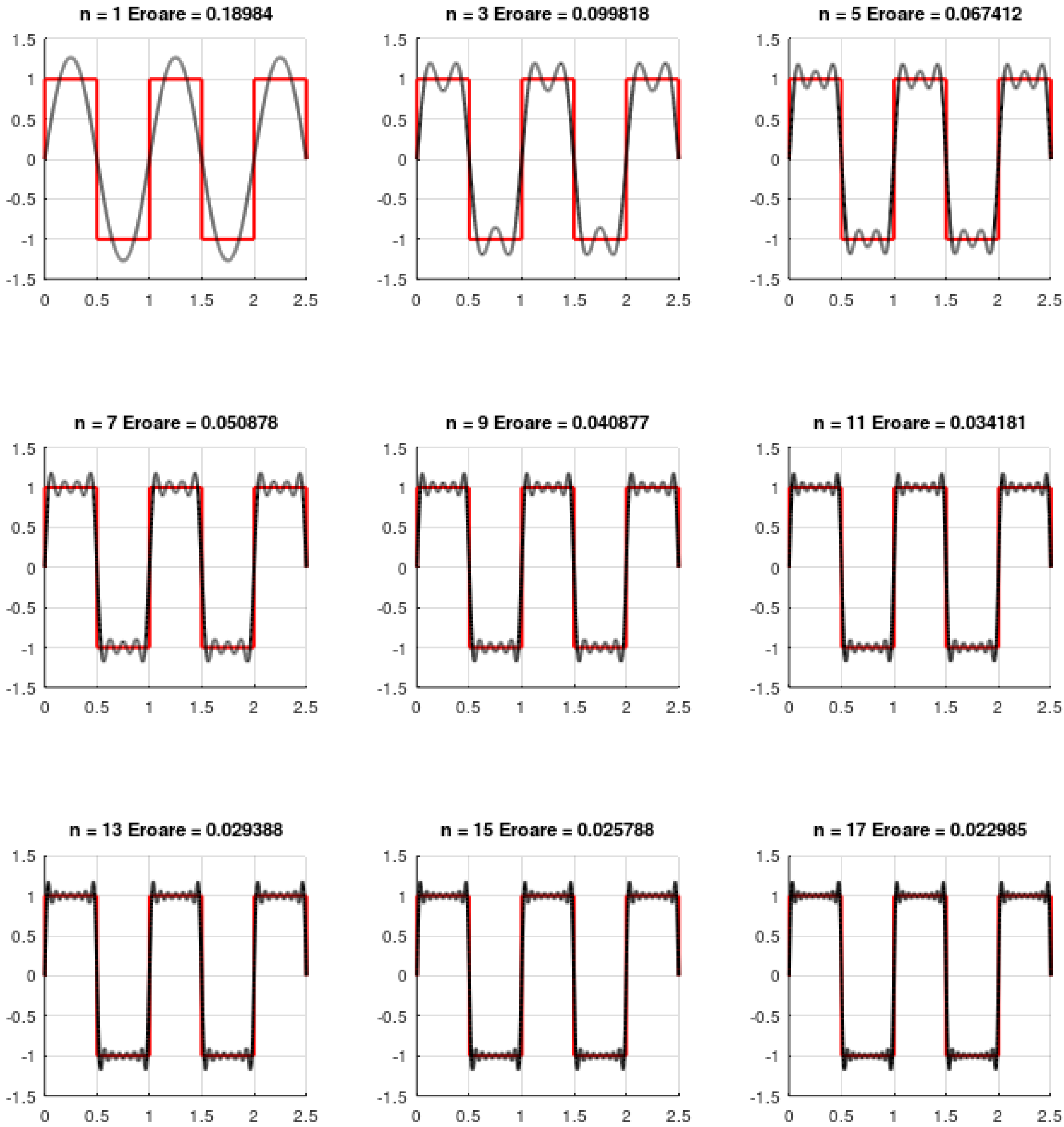


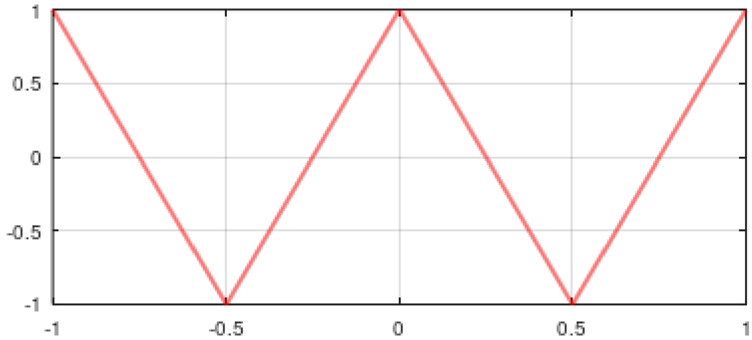
Fig. 2.2 Semnal dreptunghiular – primele noua sume partiale Fourier

In figura 2.2 se observă reprezentarile sumelor partiale Fourier (semnal dreptunghiular) pentru primele 9 iteratii cu termeni nenuli. Peste fiecare grafic este precizata valoarea lui *n* precum si valoarea erorii patratice medii pentru iteratia curenta. Se poate observa ca pe masura ce se adauga termeni noi la seria Fourier, valoarea erorii scade. La inceput mai rapid dupa care – la fiecare nou termen adaugat – valoarea acesteia devine din ce in ce mai putin influentata, ceea ce indica faptul ca armonicele de rang superior (n mai mare) vor avea un impact mai mic asupra sumei Fourier comparativ cu cele de rang mai mic (n mai mic).

Exemplul 2 – Semnal triunghiular

Fie f(x) o functie periodica si definita pe o perioada in felul urmator:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 1; & -0.5 < x < 0 \\ -4x + 1; & 0 < x < 0.5 \end{cases}$$



Coeficientii serier Fourier (armonice) asociate acestui semnal se pot scrie astfel (E = 1):

$$A_n = \begin{cases} \frac{8E}{\pi^2 n^2}; n\ impar \\ 0; n\ par \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2E sinc^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(n\omega_0 x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8E}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\left(2k+1\right)\omega_0 x$$

Pentru a general seria Fourier corespunzatoare functiei mai sus definite, pentru primele valori ale lui n, se poate folosi urmatorul cod:

```
clc;
clear all;
close all;
x=linspace(-1,1,2000);
f=0; m=0;

figure(1)
for n=1:2:7
    m=m+1;
    T = 2*(1/1);
    fs = 1000;
    t = -T/2:1/fs:T/2-1/fs;
    s = sawtooth(2*pi*1*t-pi,1/2);
    f=f+(8/(n*n*pi*pi))*cos(2*pi*n*x);
    error=mean((abs(f)-abs(s)).^2);

    subplot(4,1,m),  plot(t,s,'r','linewidth',2)
    hold on;
    subplot(4,1,m), plot(x,f,'k','linewidth',2)
    title(['n = ', num2str(n), ' Eroare = ' ,num2str(error)]),grid
end

```

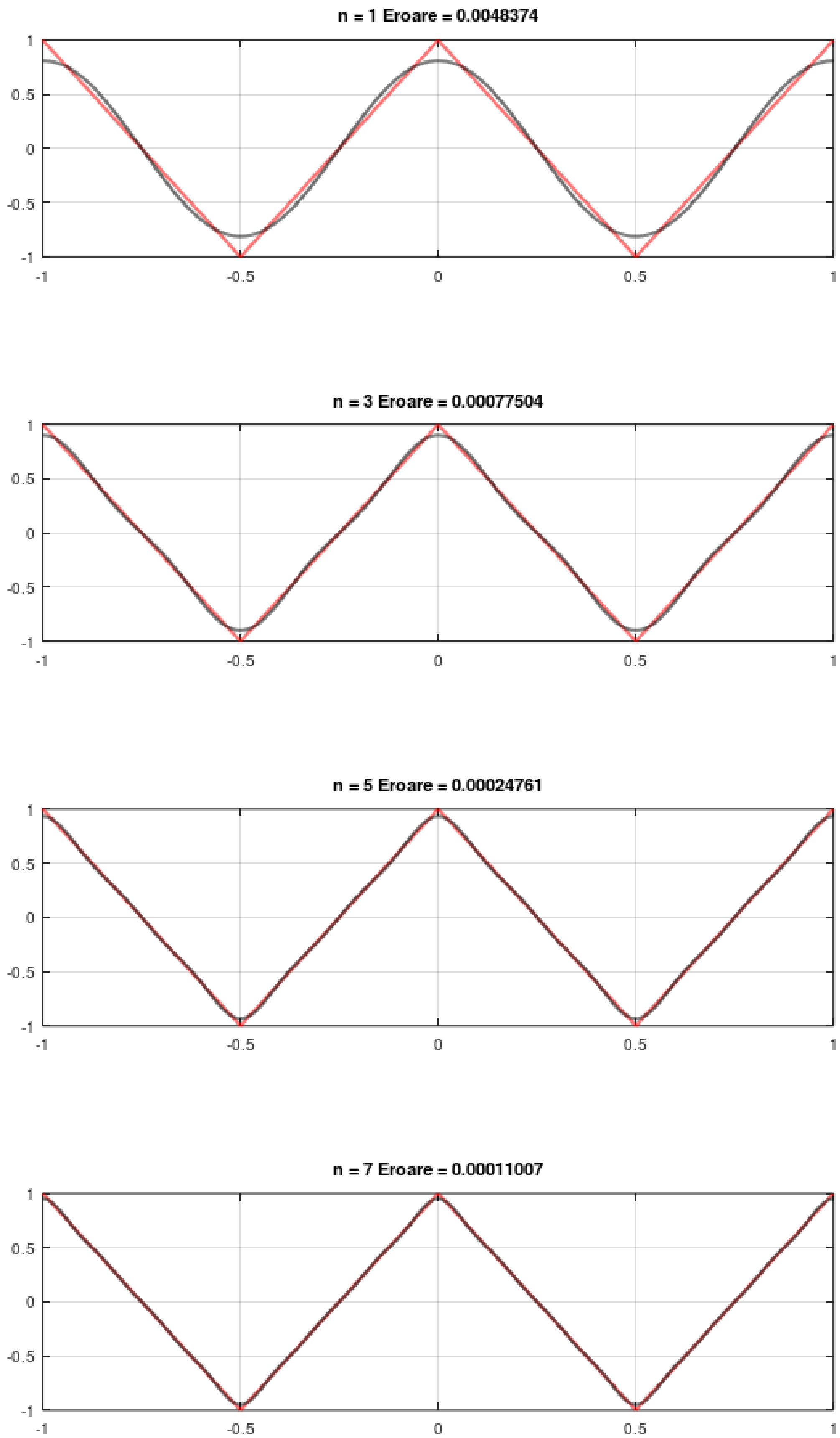


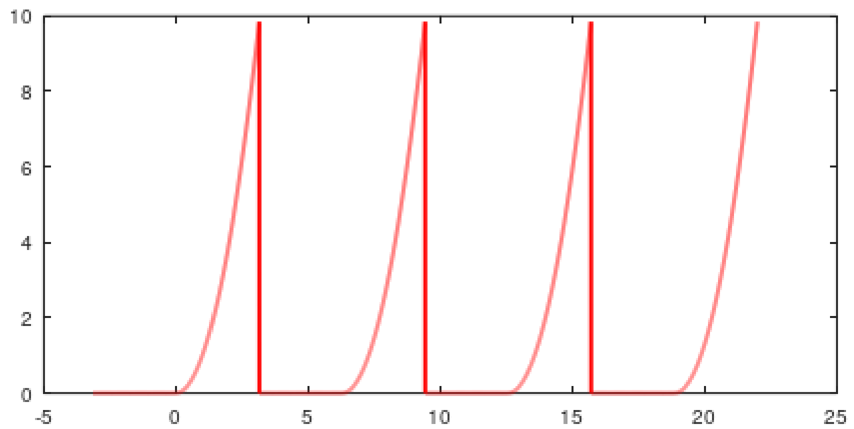
Fig. 2.3 Semnal triunghiular – primele patru sume partiale Fourier

In figura 2.3 se observă reprezentarile sumelor partiale Fourier (semnal triunghiular) pentru primele 4 iteratii cu termeni nenuli. Peste fiecare grafic este precizata valoarea lui *n* precum si valoarea erorii patratice medii pentru iteratia curenta. Se poate observa ca pe masura ce se adauga termeni noi la seria Fourier, valoarea erorii scade mult mai rapid decat in cazul semnalului dreptunghiular. Acest lucru se poate vedea si intuitiv, diferenta (evaluata optic pe grafic) intre prima suma partiala Fourier (practic un singur cosinus) si semnalul „ideal“ triunghiular este mult mai mica decat aceeasi diferenta evaluata in cazul semnalului dreptunghiular. Convergenta serier Fourier catre semnalul „ideal“ (deci numarul de termeni necesari in suma pentru ca eroarea sa fie mai mica decat o anumita valoare) este mai rapida decat la semnalul dreptunghiular.

Exemplul 3 – Semnal exponential

Fie f(x) o functie periodica si definita pe o perioada in felul urmator:

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x < 0 \\ x^2; & 0 < x < \pi \end{cases}$$



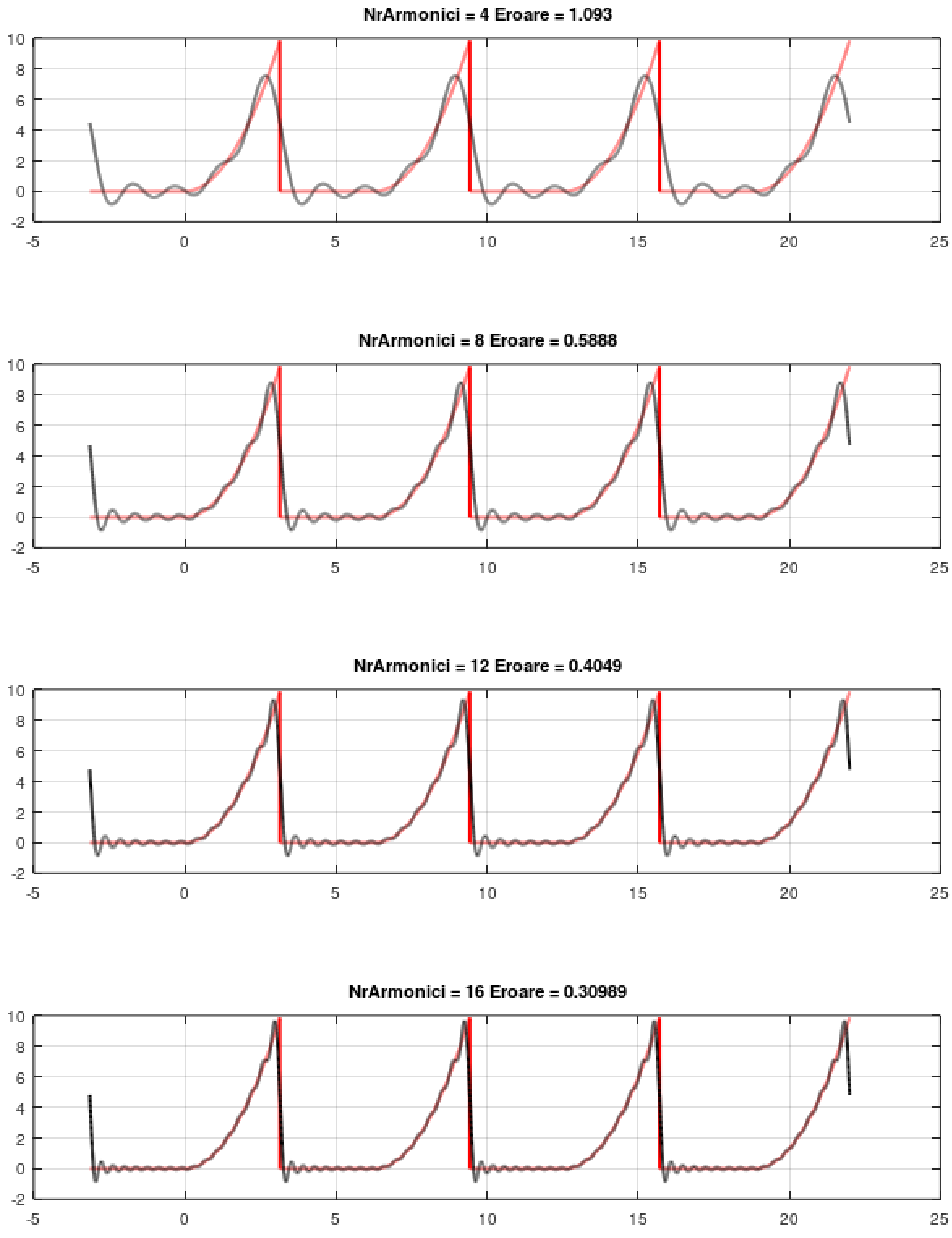
```
clc;
clear all;
close all;

figure(1)
m=0;
for m=1:1:4
    x=linspace(-pi,pi,2000);
    fAll=[];
    t=[];
    s=[];
    n=0;
    t1 = (n-1)*pi:2*pi/2000:n*pi-2*pi/2000;
    s1 = zeros(1,1000);
    t2 = n*pi:2*pi/2000:(n+1)*pi-2*pi/2000;
    s2= t2.^2;
    t=[t, t1, t2];
    s=[s, s1, s2];

    f=pi*pi/6;
    NrArmonici = 4*m;
    for q=1:1:NrArmonici
      f=f+(2*(-1)^q/q^2)*cos(q*x)+(((-1)^q*(2-q^2*pi^2)-2)/(q^3*pi))*sin(q*x);
    end
    fAll=[fAll,f];

    for n=2:2:6
      t1 = (n-1)*pi:2*pi/2000:n*pi-2*pi/2000;
      t2 = n*pi:2*pi/2000:(n+1)*pi-2*pi/2000;
      t=[t, t1, t2];
      s=[s, s1, s2];
      fAll=[fAll,f];
    end

    err=mean((abs(fAll)-abs(s)).^2);
    subplot(4,1,m), plot(t,s,'r','linewidth',2);
    hold on;
    subplot(4,1,m), plot(t,fAll,'k','linewidth',2);
    title(['NrArmonici = ', num2str(NrArmonici), ' Eroare = ' ,num2str(err)]);
    grid;
end
```



Exemplul 4 Determinarea coeficienților Seriei Fourier

Pentru a determina coeficienții Seriei Fourier se folosește următorul script folosind ecuațiile din capitolul 2.1

```
%% Functie de determinare a Coeficienților Seriei Fourier
function [Xk,kk,xht,tt]=CSF(x,P,N,nrfig)
%% Functie de determinare a Coeficienților Seriei Fourier.
% x - nume sub forma de string a functiei ce implementeaza semnalul periodic
%     pentru care se vor calcula Coeficienii Seriei F
% P - perioada semalului
% N - numarul de Coeficienti ai Seriei F ce vor fi folosti pentru
%     reconstructia semnalului
% nrfig - numarul de subfiguri in acelasi grafic
% Xk - vectorul coeficientilor seriei fourier
% kk - indexul necesar pentru reconstructia semnaului initial
% xht - semnalul initial recenstruit cu ajutorul coeficientilor
% tt -  indexul necesar pentru semnalul in domeniul timp

if nargin<4, nrfig=221; end
if nargin<3, N=10; end %daca nr argumente pt CTFS este mai mic de 3 N=10
kk=[-N:N];  w0=2*pi/P; %se definesc indexul kk si frecvená unghiulara
T=2*P; tt=[-T:T/100:T]; %se vor vizualiza doua perioade negative si doua
perioade positive
xejkw=[x '(t).*exp(-j*k*w0*t)']; %se defineste un string de forma 'x(t).
*exp(-j*k*w0*t)'

xejkwt=inline(xejkw,'t','k','w0'); %se defineste o functie cu parametrii
t,k,w0
tol=0.001; %o toleranta

for k=0:N
  X(k+1)=quadl(xejkwt,-P/2,P/2,tol,[],k,w0); %calculul integralei pentru
definirea coeficientilor seriei Fourier folosind formula din cap 2.1
end
Xk =[conj(X(N+1:-1:2)) X]; %spectrul simetric

X_mag= abs(Xk);  %Xph= angle(Xk); % modulul si faza
k=1:N; jkw0t=j*k.'*w0*tt;
xht=(2*real(X(k+1)*exp(jkw0t))+X(1))/P; % Semnalul reconstruit folosind
formula din cap 2.1
xt=feval(x,tt); %semnalul initial
subplot(nrfig),plot(tt,xt,'k-', tt,xht,'b:')
set(gca,'fontsize',9), %set(gca,'XLim',[-T T])
axis([tt([1 end]) -0.2 1.2]), title('x(t)(linie solida) si reconstructia
folosind N coeficienti (linie punctata)')
subplot(nrfig+1),stem(kk,X_mag,'MarkerSize',5,'LineWidth',1),
set(gca,'fontsize',9)
axis([kk([1 end]) -0.2 1.2]), title('Spectrul lui x(t)')
```

Pentru a rula acest program vom defini 2 funcții, funcția dreptunghiular(t) și funcția triunghiular(t) după cum urmează.

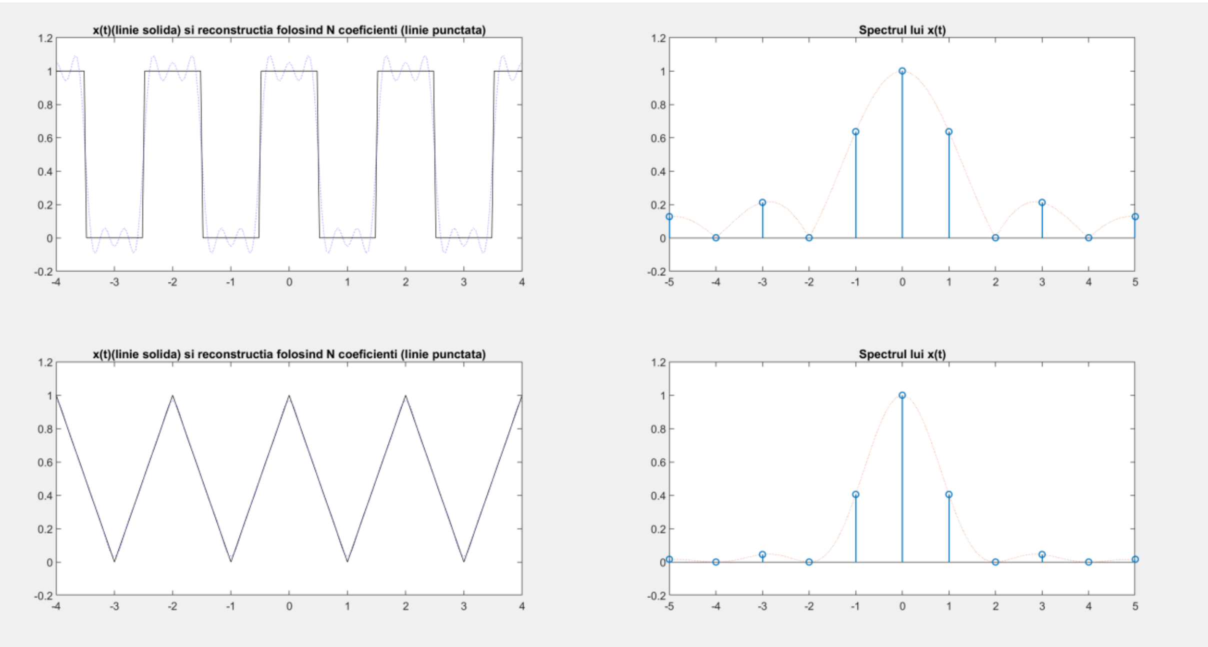
```
function x=dreptunghiular(t)
global P D
tmp=min(abs(mod(t,P)),abs(mod(-t,P)));
x=(tmp<=D/2);
```

```
function x=triunghiular(t)
global P D
tmpp=abs(mod(t,P));   tmpn=abs(mod(-t,P));   tmp=min(tmpp,tmpn);
x=(tmp<=D).*(1-tmp/D);
```

Astfel pentru a determina coeficienții seriilor fourier și pentru a reconstrui semnalul inițial folosind acești coeficienți, similar ca în exemplele anterioare vom folosi următorul script

```
clear, clf
global P D
N=10; % Nr de coeficienti fourier
D=1; P=2;  CSF('dreptunghiular',P,N/2,221);
w0=2*pi/P;  k1=linspace(-N/2,N/2);
RD1=sinc(k1*w0*D/2/pi); % Spectrul semnalului dreptunghiular
hold on, plot(k1,abs(RD1),':') % Anvelopa spectrului semnalului
dreptunghiular
axis([-N/2 N/2 -0.2 1.2])
P=2;  CSF('triunghiular',P,N/2,223);
w0=2*pi/P;
Tri=sinc(k1*w0*D/2/pi);  Tri1=Tri.*Tri; % Spectrul semnalului triunghiular
hold on, plot(k1,Tri1,':') % Anvelopa spectrului semnalului triunghiular
axis([-N/2 N/2 -0.2 1.2])
```

Rezultatele rulării scriptului



Tema de casa

1. Se defineste semnalul rampa: $x(t) = t; t \in [-10, 10]$.
    a. Sa se exprime analitic seria sa Fourier si sa se implementeze codul Matlab / Octave care genereaza aceasta serie.
    b. Generati suma Fourier pentru diferite numere de armonici.
    c. Sa se reprezinte grafic comparativ rezultatele obtinute pentru 2, 4, 7 si 10 armonici.
2. Se defineste semnalul redresat dubla alternanta: $x(t) = \sin(\omega_0 t/2); t \in [0, 10]$.
    a. Sa se exprime analitic seria sa Fourier si sa se implementeze codul Matlab / Octave care genereaza aceasta serie.
    b. Generati suma Fourier pentru diferite numere de armonici.
    c. Sa se reprezinte grafic comparativ rezultatele obtinute pentru 2, 4, 7 si 10 armonici.
3. Se defineste semnalul redresat monoalternanta:
$$x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t);\ t \in [-5, 5] \\ 0;\ t \in [-10, -5] \cup\ t \in [5, 10] \end{cases}$$
    a. Sa se exprime analitic seria sa Fourier si sa se implementeze codul Matlab / Octave care genereaza aceasta serie.
    b. Generati suma Fourier pentru diferite numere de armonici.
    c. Sa se reprezinte grafic comparativ rezultatele obtinute pentru 2, 4, 7 si 10 armonici.
4. Se defineste semnalul:
$$x(t) = \begin{cases} t;\ t \in [0, 1) \\ 1;\ t \in [1, 2) \\ -t + 3;\ t \in [2, 3] \end{cases}$$
    a. Generati in Matlab / Octave semnalul definit mai sus in domeniul timp (t)
    b. Sa se exprime analitic seria sa Fourier si sa se implementeze codul Matlab / Octave care genereaza aceasta serie.
    c. Generati suma Fourier pentru diferite numere de armonici.
    d. Sa se reprezinte grafic comparativ rezultatele obtinute pentru 2, 4, 7 si 10 armonici.
5. Se defineste semnalul:
$$x(t) = \begin{cases} -1;\ t \in [-2, -1) \\ t;\ t \in [-1, 1) \\ 1;\ t \in [1, 2] \end{cases}$$
    a. Generati in Matlab / Octave semnalul definit mai sus in domeniul timp (t)
    b. Sa se exprime analitic seria sa Fourier si sa se implementeze codul Matlab / Octave care genereaza aceasta serie.
    c. Generati suma Fourier pentru diferite numere de armonici.
    d. Sa se reprezinte grafic comparativ rezultatele obtinute pentru 2, 4, 7 si 10 armonici.
6. Opțional. Pentru unu din semnalele de la punctele 1-5 să se folosească metoda din Exemplul 4 pentru determinarea coeficienților seriei Fourier.

Toate semnalele de mai sus sunt definite pe o perioada (semnale periodice). Discutati rezultatele obtinute comparativ intre ele. Ce observatii se pot face la fiecare semnal?