Resumen

En este documento se presentan las fórmulas de distancia entre el punto, la recta y el plano.

Álgebra I

Formulario de distancias

Andrés Miniguano T.
e-mail: andres.miniguano@epn.edu.ec

Milton Torres E.
e-mail: milton.torres@epn.edu.ec

6 de abril de 2017

Notación

En lo que sigue usaremos las letras del alfabeto $a, b, c, \ldots$ para un punto en el espacio con coordenadas dadas por índices; es decir

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Además, se usarán las letras del alfabeto griego para denotar escalares: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.
La única excepción a las reglas anteriores se dará con el vector

$$w = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

que indican los ejes horizontal, vertical y espacial.

Definiciones

- **Punto:** Es cualquier elemento del espacio, el cual consiste en una tripleta ordenada de números reales; es decir, un elemento de R^3. Por ejemplo, si $a \in R^3$, entonces lo escribiremos como

  $$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

- **Recta:** Dados dos puntos a y b, una recta con vector director a y vector constante b consiste en todos los puntos de la forma

  $$t\,a + b;$$

  aquí t es un número real. A esta recta la notamos como

  $$R : [\langle a \rangle + b].$$

- **Plano:** Dados un punto a y un escalar α, un plano de vector normal a consiste en todos los puntos w que satisfacen

  $$a \cdot w = a_1 x + a_2 y + a_3 z = \alpha.$$

  Aquí $\cdot$ indica el producto punto entre a y w; y el plano se nota

  $$H : [\langle a, w \rangle = \alpha].$$

1 Formulario

1. **Distancia entre dos puntos:** Para dos puntos a y b, su distancia $\mathrm{d}(a,b)$ es la norma de su resta:
$$\mathrm{d}(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{a \cdots - b} = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}.$$
2. **Distancia entre un punto y una recta:** La distancia entre un punto a y la recta $R : [\langle b \rangle + c]$ tiene dos fórmulas:
   - *Fórmula de proyección:*
$$\mathrm{d}\left(a,\, R : [\langle b \rangle + c]\right) = \left\| (a-c) - \frac{(a-c)}{\|b\|^2} b \right\|$$
   - *Fórmula del binormal:*
$$\mathrm{d}\left(a,\, R : [\langle b \rangle + c]\right) = \frac{\big\|(a-c) \times b\big\|}{\|b\|}$$
3. **Distancia entre un punto y un plano:** Si a es un punto y $H : [\langle b, x \rangle = \alpha]$ un plano, entonces:
$$\mathrm{d}\left(a,\, H : [\langle b, x \rangle = \alpha]\right) = \frac{a \cdot b - \alpha}{\|b\|}.$$
4. **Distancia entre dos rectas:** Si $R : [\langle a \rangle + c]$ y $S : [\langle b \rangle + d]$ son dos rectas, entonces tenemos dos casos:
   - *Rectas paralelas:*
$$\mathrm{d}\left(R : [\langle a \rangle + c],\, S : [\langle b \rangle + d]\right) = \frac{\big\|(c-d) \times a\big\|}{\|a\|}$$
   - *Rectas que se cruzan:*
$$\mathrm{d}\left(R : [\langle a \rangle + c],\, S : [\langle b \rangle + d]\right) = \frac{\big|\det(c-d, a, b)\big|}{\|a \times b\|}.$$
5. **Distancia entre una recta y un plano:** Para la recta $R : [\langle a \rangle + c]$ y el plano $H : [\langle b, w \rangle = \alpha]$, entonces necesariamente su distancia no se anula si son paralelos con:
$$\mathrm{d}\left(R : [\langle a \rangle + c],\, H : [\langle b, w \rangle = \alpha]\right) = \frac{c \cdot b - \alpha}{\|b\|}$$
6. **Distancia entre dos planos:** Finalmente para los planos $H : [\langle a, w \rangle = \alpha]$ e $I : [\langle b, w \rangle = \beta]$:
$$\mathrm{d}\left(H : [\langle a, w \rangle = \alpha],\, I : [\langle b, w \rangle = \beta]\right) = \frac{|\alpha - \beta|}{\|a\|} = \frac{|\alpha - \beta|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Nota

Las fórmulas anteriores se demuestran usando elementos del álgebra lineal y cálculo vectorial, puesto que en algunos casos basta plantear un problema de minimización, en otros sólo aplicar propiedades del determinante y proyecciones. Algo bastante interesante es que todas las fórmulas anteriores se basan en obtener la norma de un único elemento, dicho elemento viene dado por el siguiente teorema: Proyección sobre un conjunto cerrado, convexo y no vacío

Sea $M \subseteq R^3$ un conjunto cerrado, convexo y no vacío; entonces para todo $a \in R^3$ existe un único $b \in M$ tal que
$$\mathrm{d}(a,b) = \inf \big\{ \mathrm{d}(a,c) : c \in M \big\};$$
a b se lo denomina la proyección de a en M y se nota $\mathrm{proy}_M\, a := b$.

Notemos que este teorema nos permite afirmar que siempre existe un punto que optimiza la distancia entre un conjunto y otro punto.