Conceitos básicos sobre grafos

1. Definição informal: **grafo (*graph*)** é um conjunto de vértices (ou nodos), interconectados dois a dois por arestas (ou arcos).

2. Exemplo ilustrativo: Conjunto de rotas aéreas de uma compania de aviação. Entre no site
http://www.europebyair.com/efp/cheapflightstoeurope.jsp
Aproxime o browser de qualquer cidade para ver as rotas. Isto é um grafo. As cidades são os vértices e as rotas são as arestas.

3. O grafo é dito **não dirigido (*undirected graph, non-directed graph*)** quando as interconexões não tem direção. Neste caso, prefere-se a terminologia **vértice (*vertex*)** e**aresta (*edge*)**, e o conjunto de arestas define uma relação simétrica (conjunto de pares não ordenados) sobre o conjunto de vértices.
4. O grafo é dito **dirigido (*directed graph*)**, abreviado **dígrafo (*digraph*)**, quando as interconexões tem direção. Neste caso, prefere-se a terminologia **nodo (*node*)** e **arco (*arc*)**, e o **conjunto de arestas define uma relação ordinária (conjunto de pares ordenados) sobre o conjunto de vértices.**
5. No entanto, não é raro usar-se vértice e nodo como sinônimos, o mesmo ocorrendo em relação a aresta e arco**.** O livro do CLR usa sempre os termos vértice e aresta para ambos os tipos de grafo.

6. EXEMPLOS:

    1. Mapas de rotas
    2. Diagrams de pré-requisitos
    3. Diagrams de autômatos finitos
    4. Relações de amizade no ORKUT
    5. Circuitos elétricos
    6. Predicados binários em geral (x ama y)
    7. e milhares de outros ...
    8. Grafos de dependência (PERT)

7. Definição mais formal de grafo: Um grafo **G** é um par **(V,E)** onde V é um conjunto finito (conjunto de vértices ou nodos) e E é uma relação binária (pares ordenados ou não) sobre V (conjunto de arestas ou arcos).

8. Um arco (dirigido) que conecta os vértice u e v é representado pelo par orientado (u,v), ou simplemente uv. Uma aresta (não dirigida), pode ser representada da mesma forma que para o dígrafo, desde que se tenha consciência que uv é igual a vu; (u,v) é igual a vu. Alternativamenrte ela pode ser representada pelo conjunto {u,v}.

9. Nos diagramas, os vértices são representados por círculos e as arestas/arcos por linhas conectando os círculos. Se o grafo é dirigido a linha tem uma seta no lado do destino.

10. Se $(u, v) \in E$ em um dígrafo dizemos que v é **adjacente** a u. No caso de grafo não dirigido , v e u são **adjacentes** (também se diz que v e u são **vizinhos (neighbours)**).

11. No dígrafo, se $(u, v) \in E$ (dizemos que (u, v) parte/sai de u e chega/entra em v. Se o grafo é não dirigido, a tal aresta é **incidente**a u e v.

12. **Grau (degree) de um vértice** é o número de arestas/arcos que incidem no mesmo. Em um dígrafo, **grau de saída (out-degree)** é o número de arestas que partem do vértice, enquanto que
grau de entrada (in-degree) é o número de arestas que chegam no vértice.

13. "Self-loops" (laços que partem e chegam no mesmo nodo) podem ser permitidos em dígrafos.

14. **Pergunta importante:** Qual o **maior número de arestas** em um grafo dirigido de n vértices (sem self-loops e com self-loops)? Qual o número máximo de arestas em um grafo não-dirigido com n vértices?

15. Um grafo é dito **valorado** quando existe uma função que associa a cada aresta um valor. Por exemplo: distância, custo do trajeto, tempo de execução da transição, símbolo para transição entre estados, etc.

16. Um **caminho (path)** de u a u´ é uma sequência de vértices $< v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k >$, onde $u = v_0$, $u' = v_k$, e para todo $0 \leq i < k$, v_{i+1} é adjacente à v_i. O**tamanho** deste caminho é k (número de arestas envolvidas no caminho). Por definição, para todo vértice v, <v> é um caminho de tamanho 0. Um caminho é simples se todos os vértices no caminho são distintos. Um subcaminho é qualquer subsequência contígua de um caminho.

17. Um **ciclo** é um caminho em que o vértice inicial e o final são os mesmos. Um ciclo é**simples** se, tirando o vértice inicial, todos os outros são distintos. Um grafo sem ciclos é dito um grafo acíclico. Um caminho contém um ciclo se ele não for um caminho simples.
18. Um **DAG (Directed Acyclic Graph, grafo acíclico dirigido)** é um dígrafo acíclico.

19. Dado um grafo G=<V,E>, o grafo G´=<V´,E´> e um **subgrafo** de G, sse, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
    Note que é necessário coerência: uma aresta só pode estar em E´, se os dois vértices envolvidos estiverem em V´.
    Às vezes a nocão de subgrafo impõe um critério adicional, de que TODO a aresta em E cujos vértices estão em V´ esteja também em E´, isto é, que G´seja uma projeção de G para o subconjunto de vértices. Isto é chamado de "subgrafo de G induzido por V´".

20. Um grafo **não dirigido é dito completo** se para todo vértice u,v, existe uma aresta {u,v}.