

HARMONICKÉ OBVODY

Prednáška

4

Harmonický signál

- **Harmonický signál** – periodický sa opakujúci signál, ktorý môžeme zapísať pomocou *sin* alebo *cos* funkcie

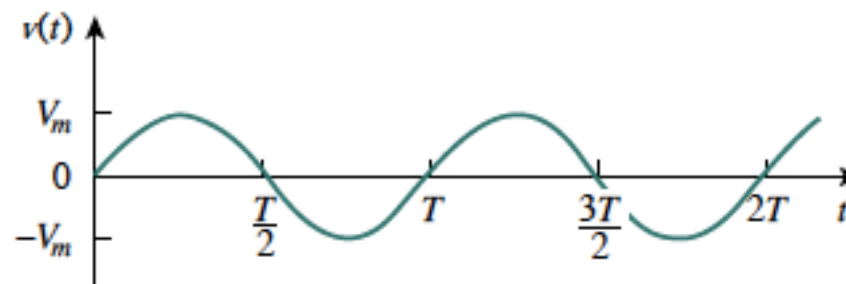
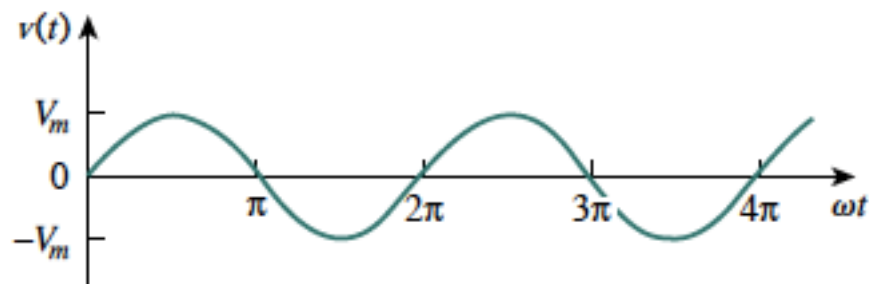


$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t)$$

U_m - amplitúda signálu

ω - uhlová frekvencia v radiánoch

ωt - argument sínusového signálu



Periódá signálu sa opakuje každých T sekúnd:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi f$$

Harmonický signál

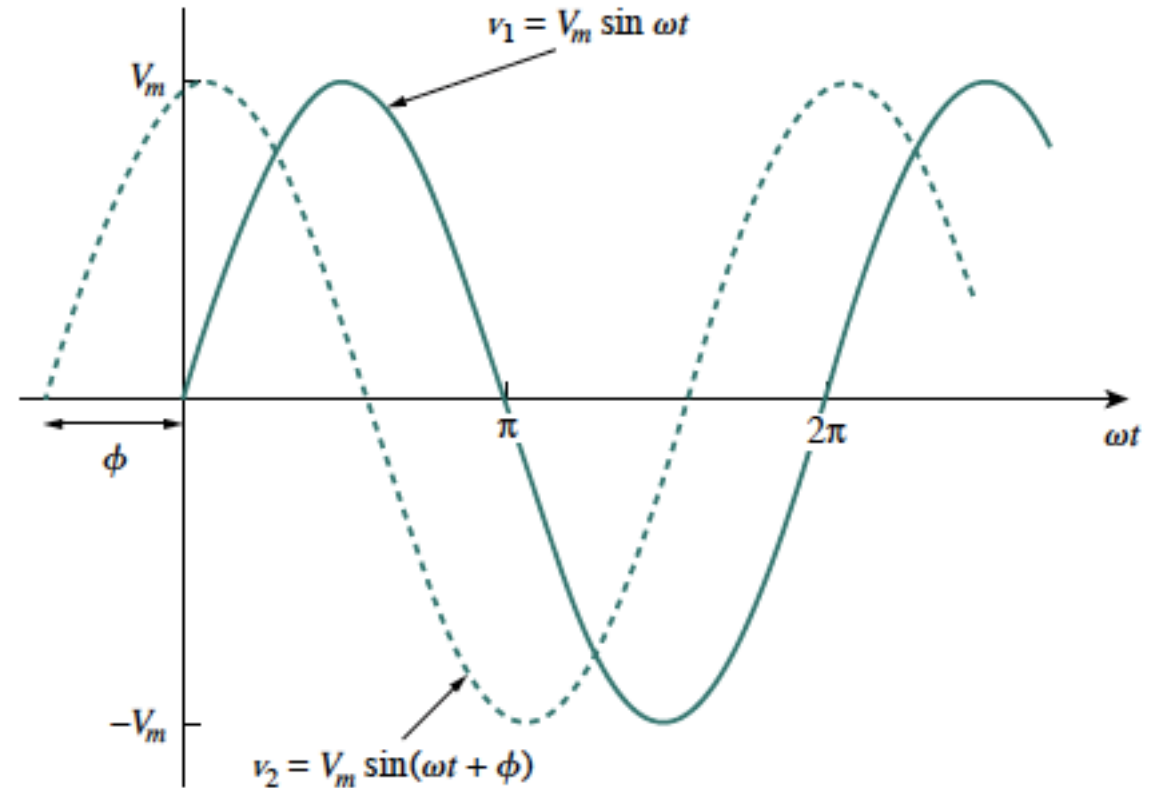
- AC napätie a prúd nie sú vždy vo fáze

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Otázka: Ako sčítame dva harmonické signály, napr. *sin a cos*?

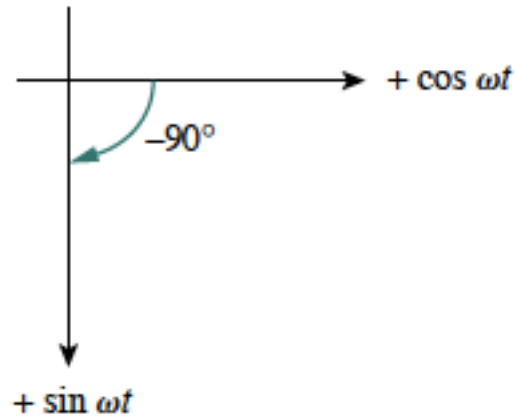


Pomocou tzv. fázorov
(založené na komplexných číslach)

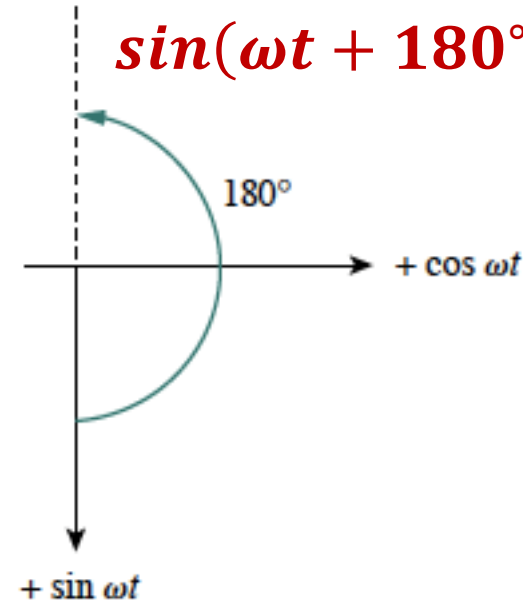


Vzt'ah medzi *sin* a *cos*

$$\cos(\omega t - 90^\circ) = \sin(\omega t)$$



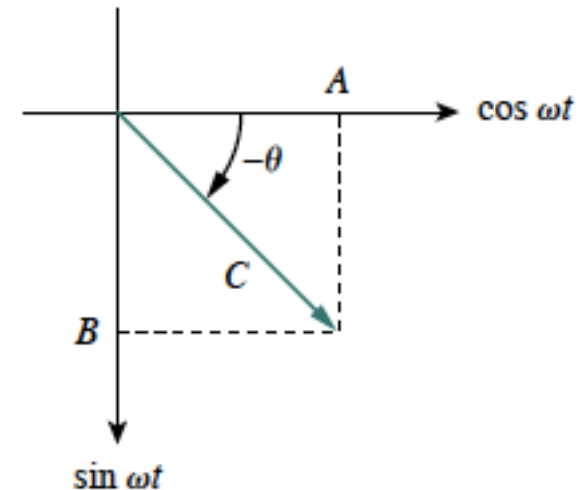
$$\sin(\omega t + 180^\circ) = -\sin(\omega t)$$



$$A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) = C \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$



Fázorový zápis harmonického signálu

- Najjednoduchšie vyjadrenie harmonického signálu

- Používame **komplexné čísla**

- **Regulárny tvar**

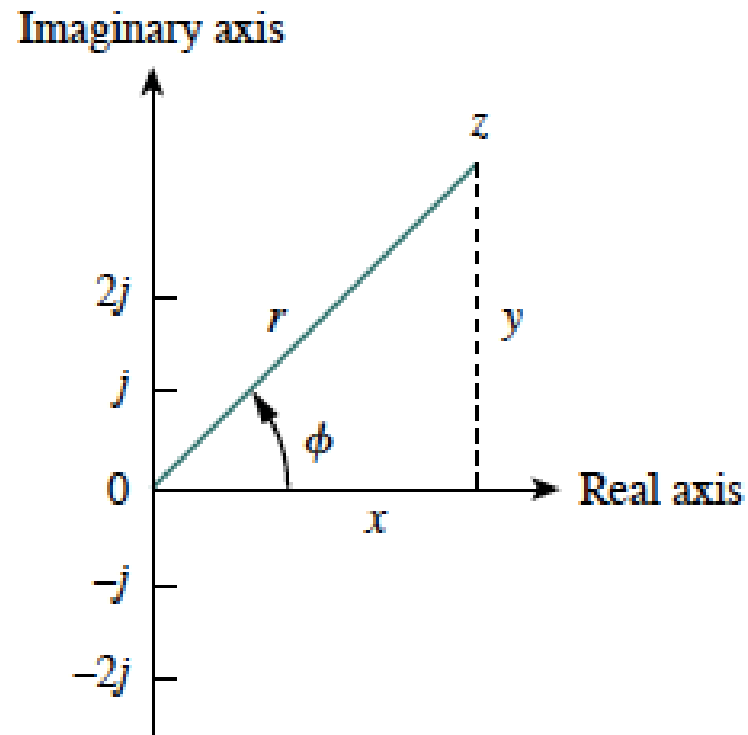
$$z = x + jy$$

- **Fázorový tvar**

$$z = r \angle \phi$$

- **Exponenciálny tvar**

$$z = re^{j\phi}$$



Fázorový zápis harmonického signálu

- Fázorový zápis harmonického signálu pomocou

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi$$



$$\cos\phi = \operatorname{Re}\{e^{\pm j\phi}\} \quad \text{Reálna zložka}$$

$$j\sin\phi = \operatorname{Im}\{e^{\pm j\phi}\} \quad \text{Imaginárna zložka}$$

- Pre napätie $u(t)$ platí

$$u(t) = U_m \cdot \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{U_m \cdot e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

$$u(t) = \operatorname{Re}\{U_m \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$$u(t) = \operatorname{Re}\{U e^{j\omega t}\}$$



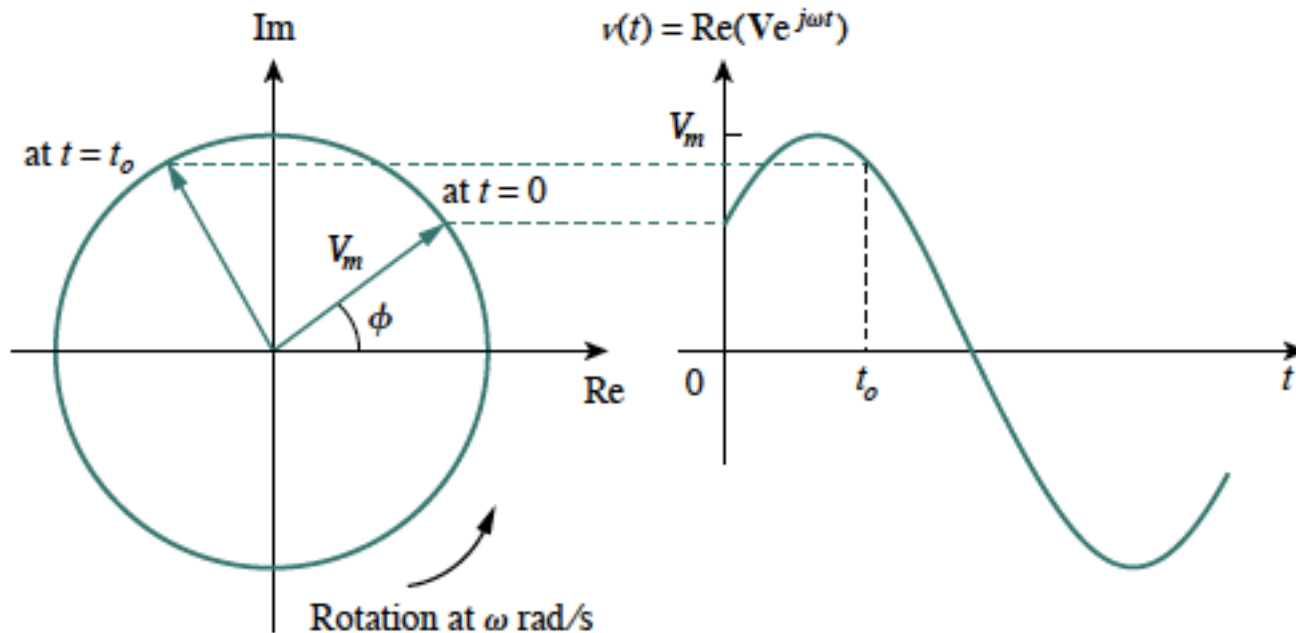
U je fázový zápis signálu $u(t)$.

Fázor - komplexný zápis amplitúdy a fázy sínusového signálu

$$U = U_m \cdot e^{j\phi} = U_m \angle \phi$$

Fázorový zápis harmonického signálu

$$u(t) = \operatorname{Re}\{\mathbf{U}e^{j\omega t}\}$$



*Reprezentácia v
časovej oblasti*

Rozdiel medzi $u(t)$ a \mathbf{U}

- $u(t)$ reprezentácia signálu v časovej oblasti, \mathbf{U} reprezentácia vo frekvenčnej oblasti
- $u(t)$ je časovo závislé, \mathbf{U} nie je
- $u(t)$ reálne bez komplexného člena, \mathbf{U} je komplexné

*Reprezentácia vo
frekvenčnej oblasti*

Vzt'ah medzi fázormi U a I

■ Rezistor

- Ak cez rezistor tečie prúd i

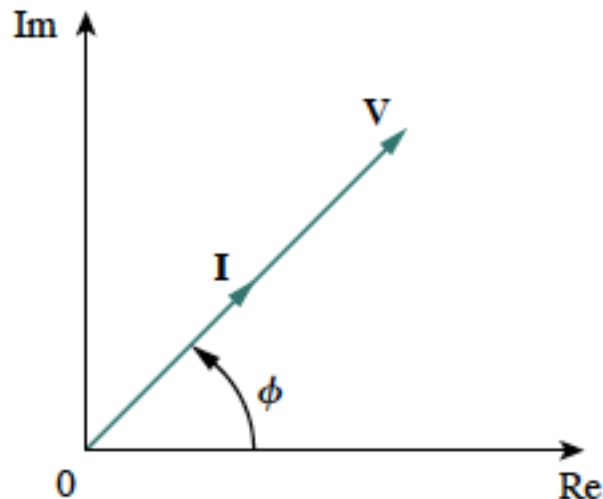
$$i = I_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



$$u = iR = R \cdot I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$U = R \cdot I_m \angle \phi \quad \Leftrightarrow \quad U = R \cdot I$$

Fázorový diagram pre rezistor



V prípade rezistora sú
napätie a prúd vždy vo fáze

Vzt'ah medzi fázormi U a I

■ Cievka

○ Ak cez cievku tečie prúd i

$$i = I_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



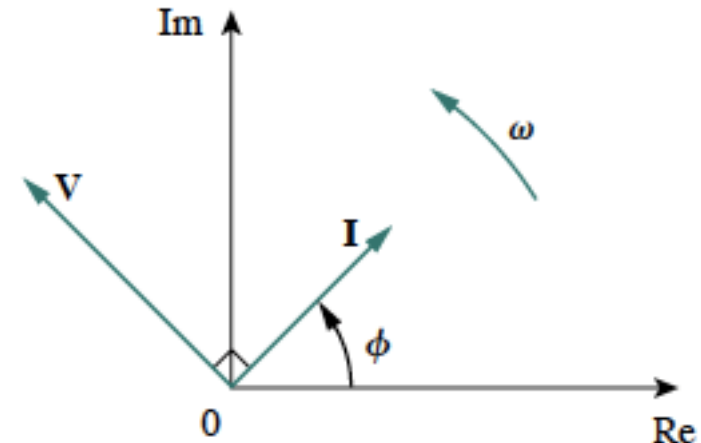
$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sin(\omega t + \phi) \\ &= \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \end{aligned}$$

$$U = \omega L I_m e^{j(\phi + 90^\circ)} = \omega L I_m \angle \phi e^{j90^\circ}$$

$$e^{j90^\circ} = j$$

$$U = j\omega L \cdot I$$

Fázorový diagram pre cievku



V prípade cievky **napätie**
predbieha **prúd** o **90°**

Vzt'ah medzi fázormi U a I

▪ Kondenzátor

- Na kondenzátore je napätie u

$$u = U_m \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



Podobne ako pri cievke

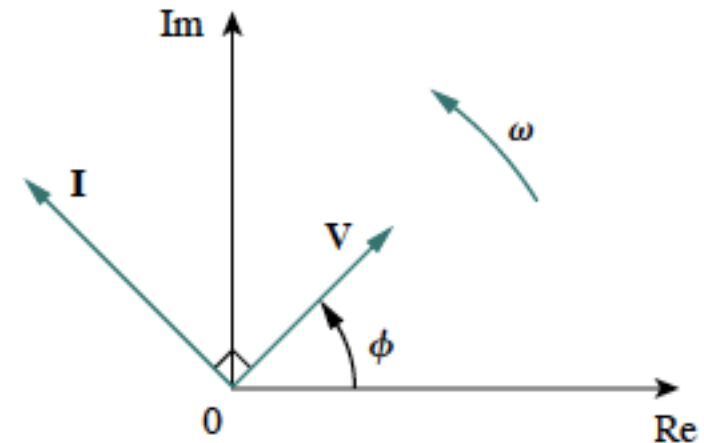
$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$I = j\omega C \cdot U$$



V prípade kondenzátora **prúd predbieha napätie o 90°**

Fázorový diagram pre kondenzátor



Impedancia a admitancia

- Otázka: Platí Ohmov zákon aj pri harmonických (AC) signáloch?



Impedancia obvodu Z predstavuje vzťah medzi
fázorom napätia U a fázorom prúdu I

Rezistor

$$Z_R = \frac{U}{I} = R$$

Rezistor = frekvenčné
nezávislá súčiastka

Cievka

$$Z_L = \frac{U}{I} = j\omega L$$

Cievka a Kondenzátor = frekvenčné závislé súčiastky

Kondenzátor

$$Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$



Prevrátenú hodnotu impedancie nazývame admitancia $Y=1/Z$

Kirchoffové zákony a zapojenie impedancií

- Kirchoffové zákony platia aj vo frekvenčnej oblasti – pomocou fázorov

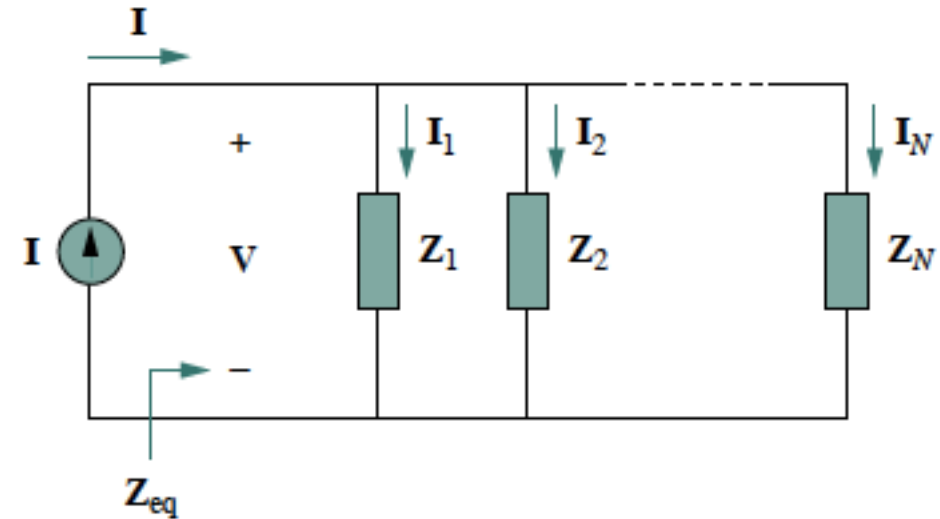
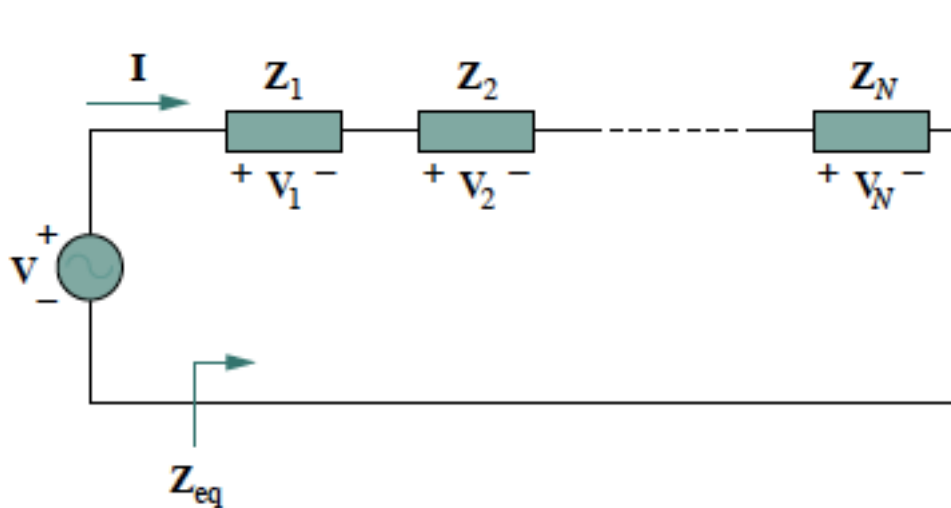
KZ I

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$$

KZ II

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = 0$$

- Sériové a paralelné zapojenie impedancií – platí ako pre rezistory

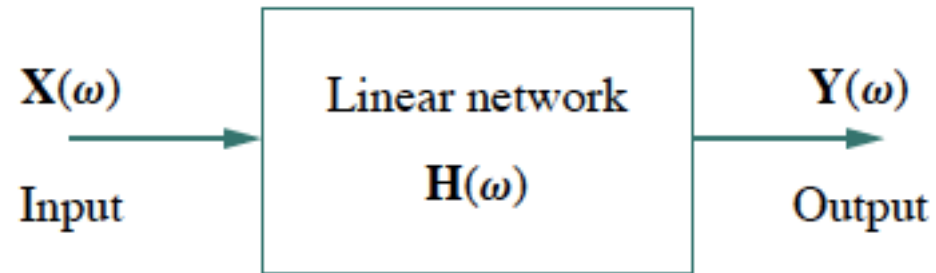


$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$$

Prenosová funkcia obvodu

- Vhodná pre frekvenčnú analýzu obvodu (napr. filtrov)
- Lineárny, frekvenčne závislý obvod

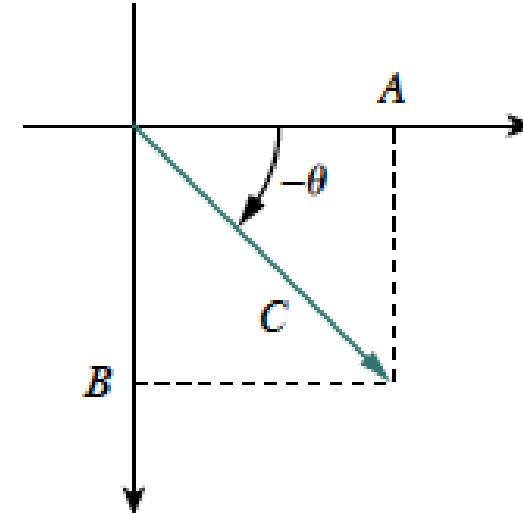


Prenosová funkcia je frekvenčne závislý pomer **výstupného fázora** (napätia alebo prúdu) ku **vstupnému fázoru** (napätia alebo prúdu)

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$



Komplexné číslo



Amplitúda

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Fáza

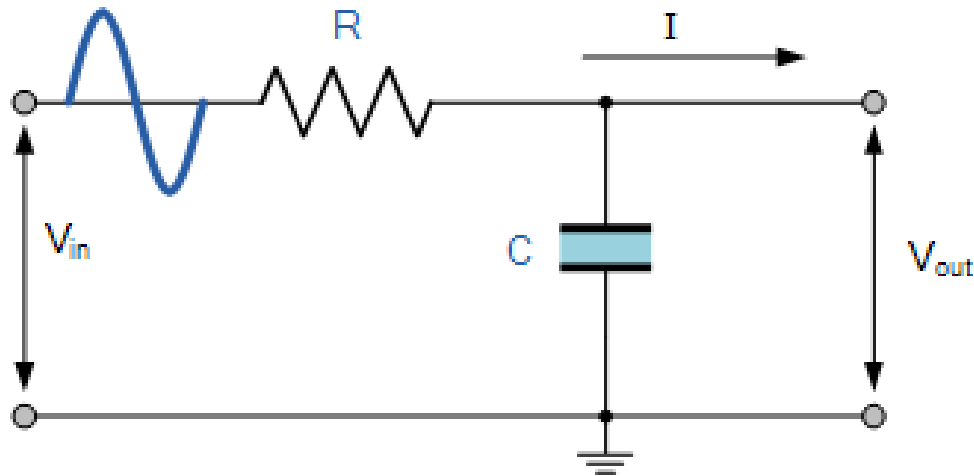
$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$

Pasívne filtre

- Základné stavebné bloky pre spracovanie signálov
- Používajú sa na filtrovanie nežiadúcich a zosilnenie žiadúcich signálov s určitou frekvenciou
- Delenie podľa charakteru:
 - **Pasívne filtre** – používajú iba pasívne súčiastky (R, L, C)
 - **Aktívne filtre** – obsahujú aj aktívne súčiastky alebo obvody (operačný zosilňovač)
- Podľa frekvenčného pásma, ktoré filtrujeme resp. prepúšťame:
 - **horno-priepustné filtre**
 - **dolno-priepustné filtre**
 - **pásmové filtre**

Dolno-priepustný (DP) filter

- Používa sa na filtrovanie **vysokých frekvencií**
 - Nízke frekvencie prepúšťa
 - Obsahuje jeden rezistor a jeden kondenzátor - kondenzátor je zapojený „**dole**“

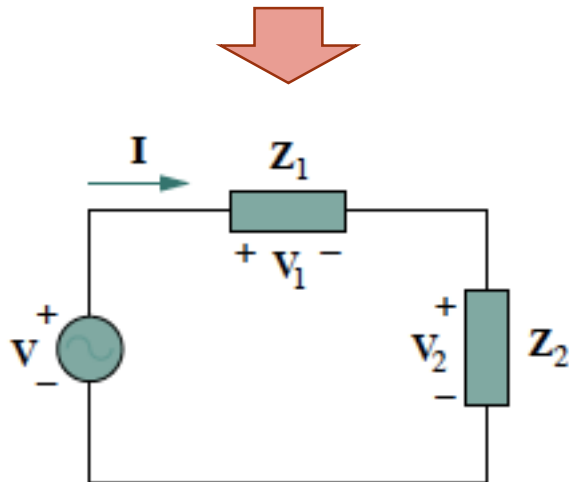
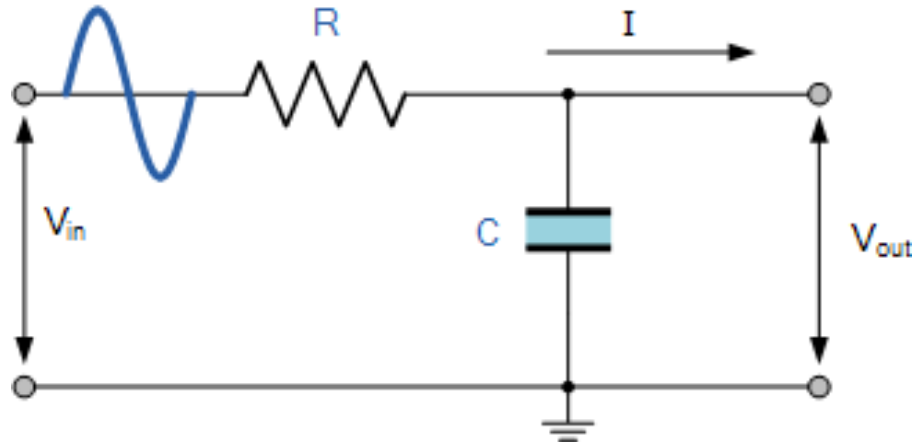


Maximálna frekvencia, ktorú DP filter prepustí je daná hodnotou rezistora R a kondenzátora C

Aby sme zistili, aká bude amplitúda a fáza signálu na výstupe DP filtra v závislosti od vstupnej frekvencie, musíme vyjadriť jeho **prenosovú funkciu**

Dolno-priepustný filter

- Namiesto R a C budeme počítať s impedanciami



$$Z_1 = R$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

Prenosová funkcia

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{U_2}{U_1}$$



Musíme vyjadriť $\frac{U_2}{U_1}$
(napäťový delič)

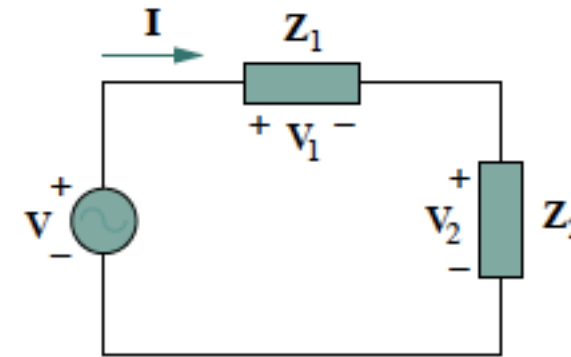
Prenosová funkcia DP filtra

- Výpočet prenosovej funkcie

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{U_2}{U_1}$$

$$I = \frac{U}{Z_1 + Z_2} \quad U_1 = IZ_1 \quad U_2 = IU_2$$

$$U_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_1 \Rightarrow \frac{U_{out}}{U_{in}} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



$$Z_1 = R$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Z prenosovej funkcie môžeme nájsť **amplitúdu a fázu**

Prenosová funkcia DP filtra

- Amplitúdová a fázová charakteristika DP filtra

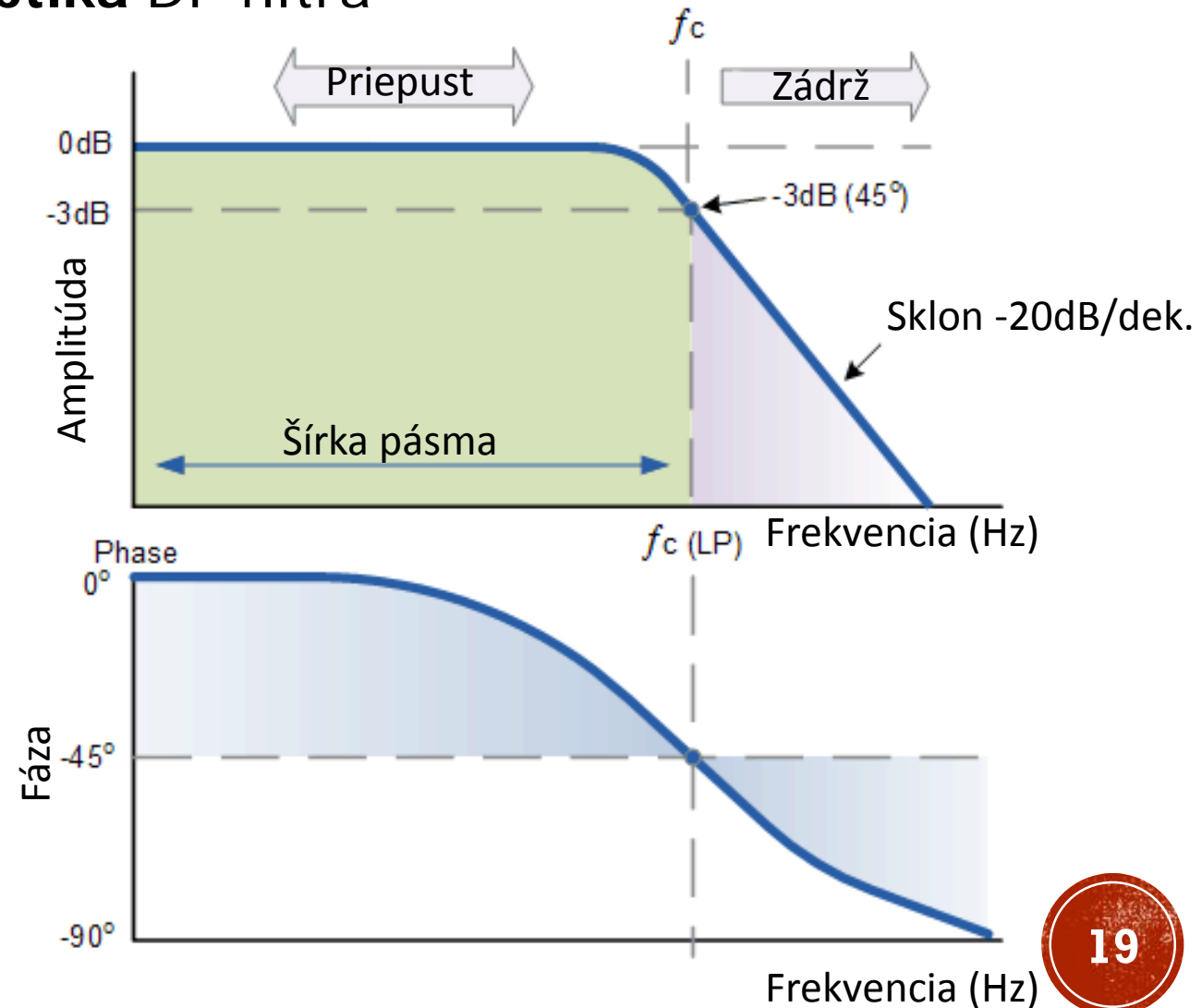
$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Amplitúda	Fáza
$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$	$\phi = -\tan^{-1}(\omega RC)$

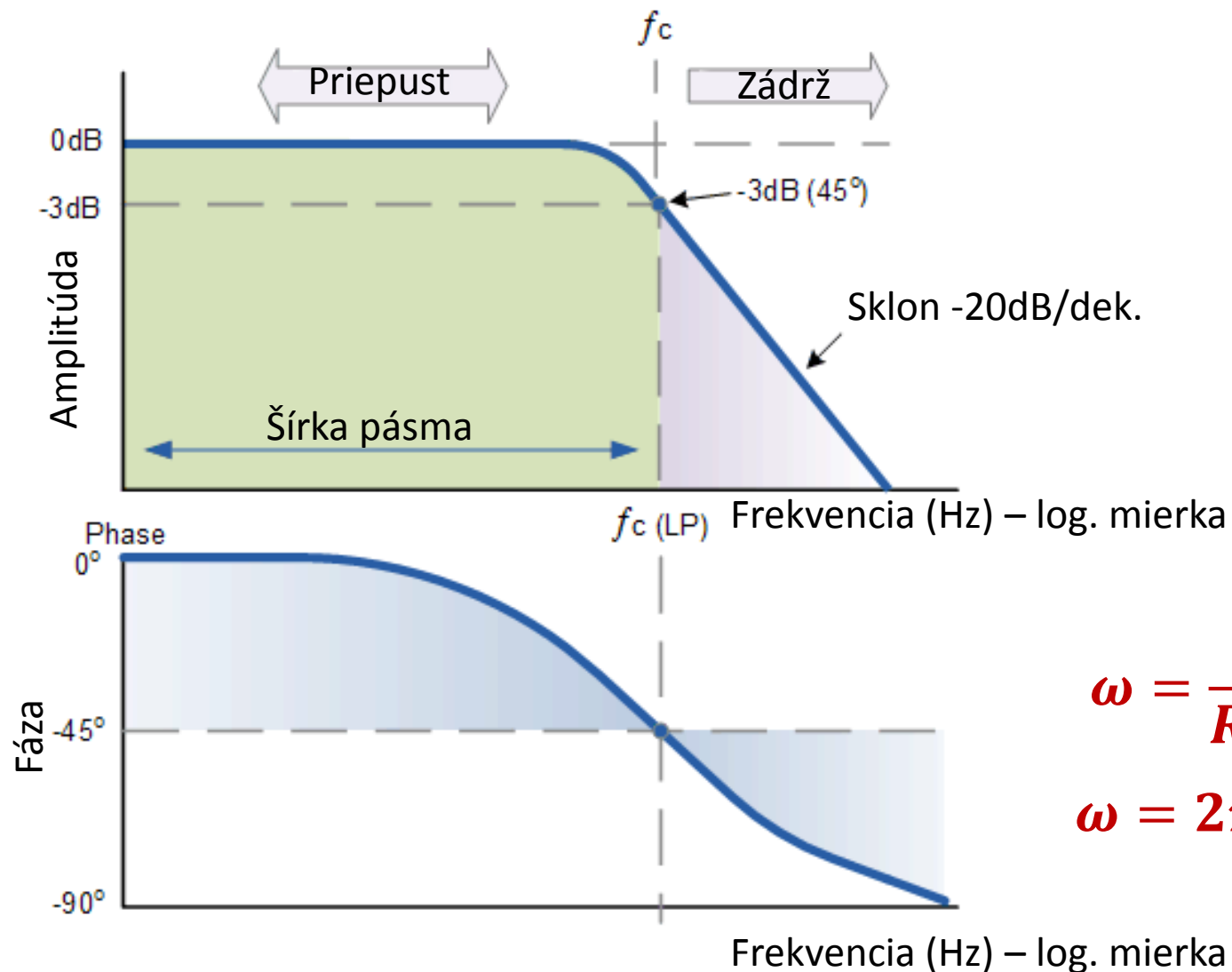
Amplitúdová charakteristika v dB:

$$A[\text{dB}] = 20\log(H)$$



Prenosová funkcia DP filtra

■ Amplitúdová a fázová charakteristika DP filtra



Frekvencia, pri ktorej dochádza k poklesu amplitúdy o 3dB nazývame **medzná frekvencia filtra**

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Medzná frekvencia DP filtra

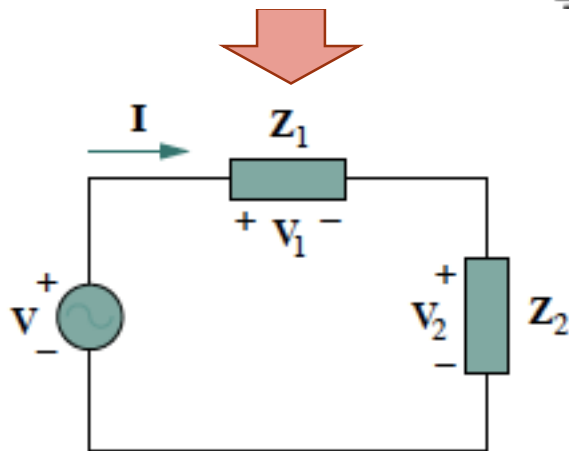
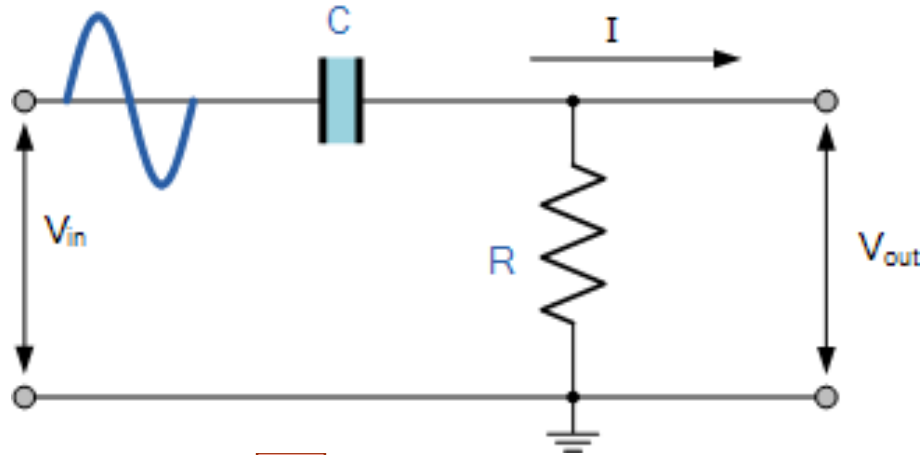
$$\omega = \frac{1}{RC}$$
$$\omega = 2\pi f$$



$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Horno-priepustný (HP) filter

- Používa sa na filtrovanie **nízkyh frekvencií**
 - Vysoké frekvencie prepúšťa
 - Obsahuje jeden rezistor a jeden kondenzátor – kondenzátor je zapojený „*hore*“



$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_2 = R$$

$$H(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$



Amplitúda

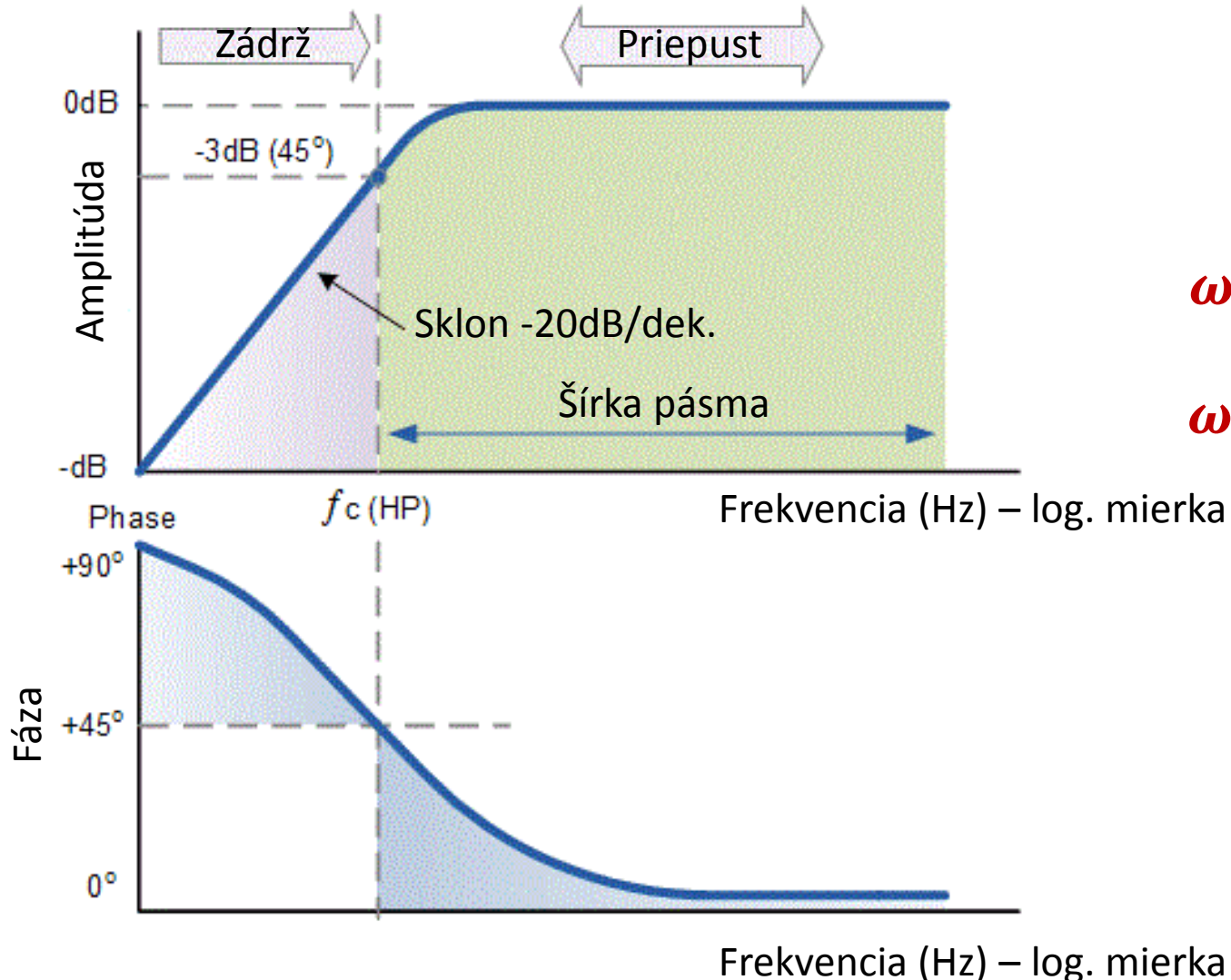
$$A = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

Fáza

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Prenosová funkcia HP filtra

Amplitúdová a fázová charakteristika HP filtra



Medzná frekvencia HP filtra

$$A = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\omega = 2\pi f$$



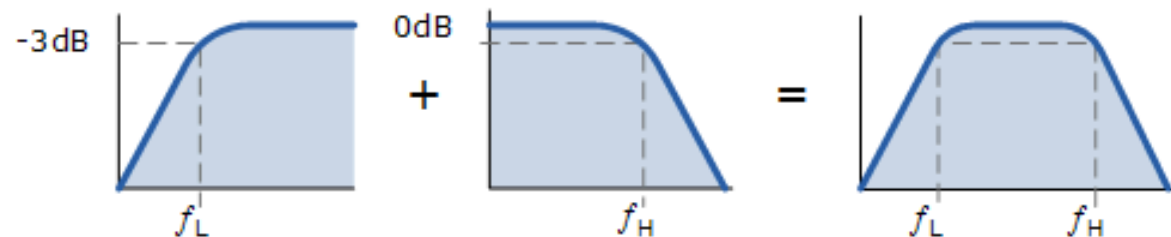
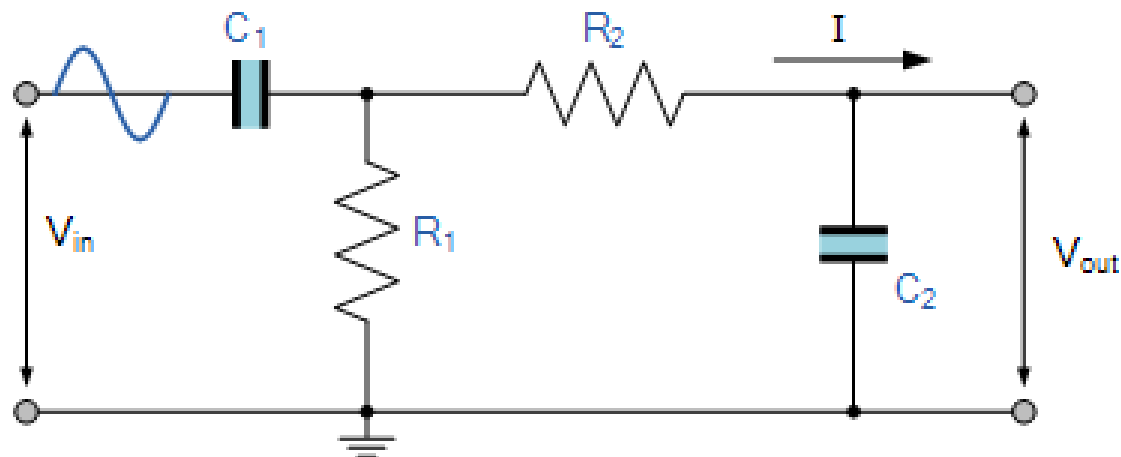
$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Medzná frekvencia DP a HP filtra
je rovnaká, ale jej **hodnota** je
závislá od R a C

Pásmová priepust' (BP)

- Kaskádové zapojenie HP a DP filtra

- Realizácia pomocou R a C



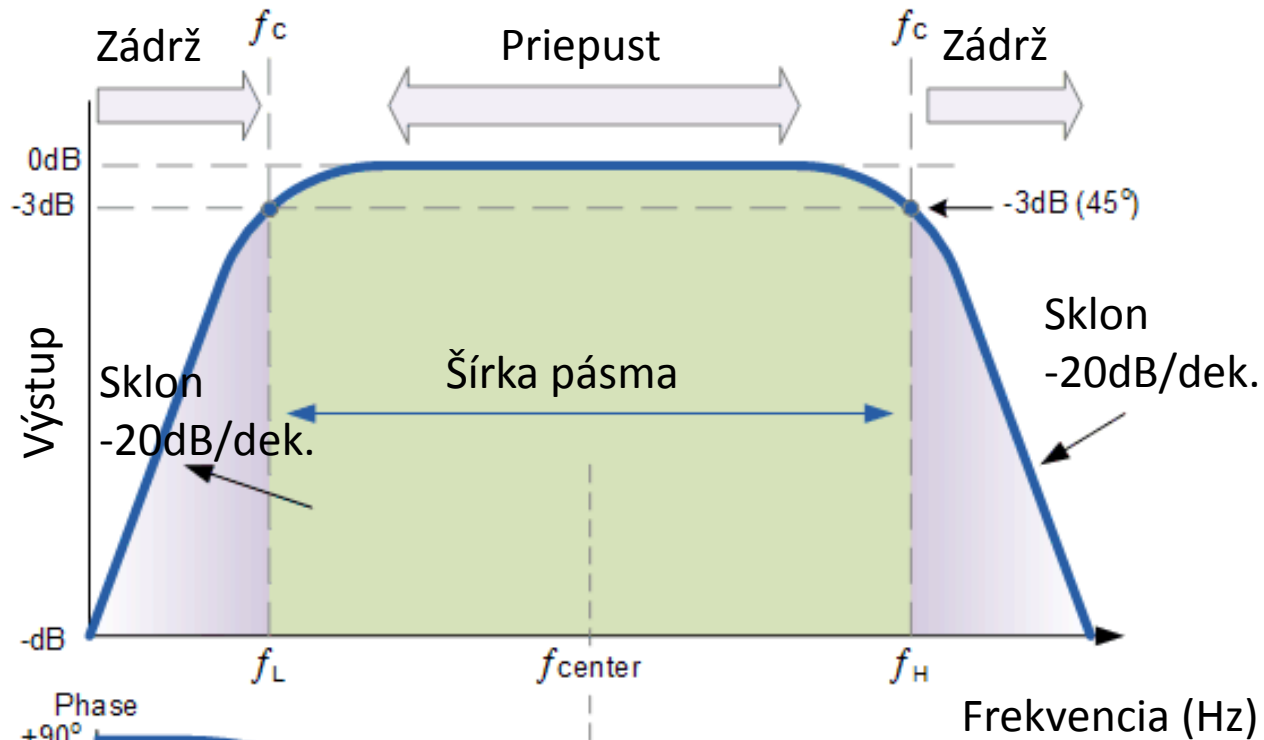
Používame v prípade keď chceme prepustiť iba frekvencie v definovanom rozsahu od f_L po f_H



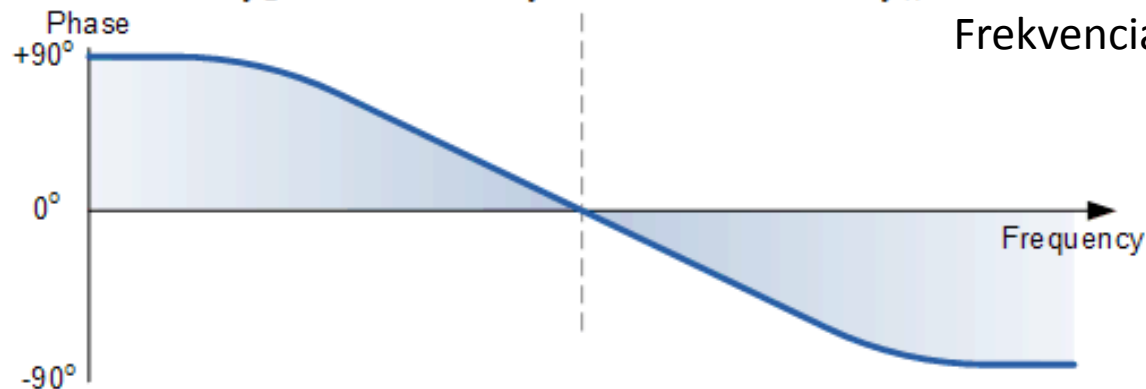
Medzné frekvencie (f_L a f_H) vypočítame ako pre DP a HP filter

Prenosová charakteristika BP filtra

Amplitúdová
charakteristika



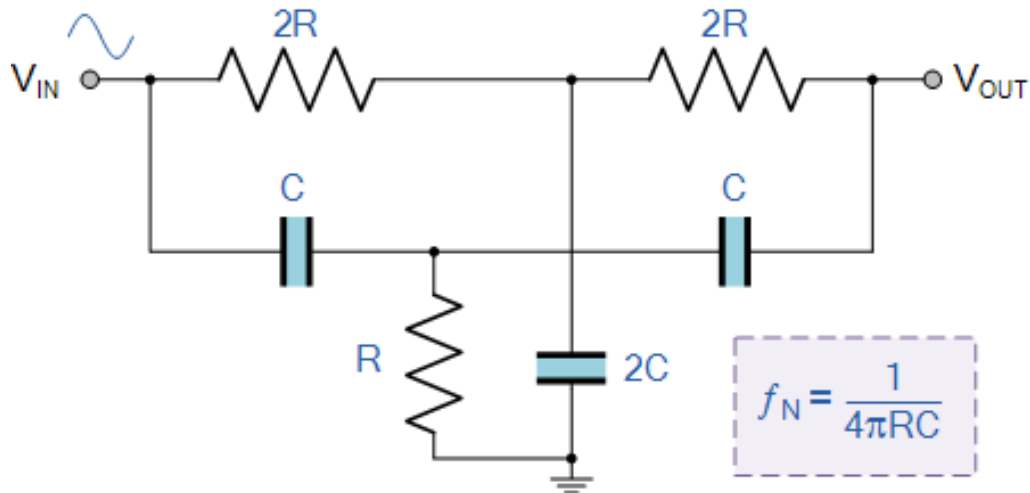
Fázová
charakteristika



Pásmová priepus
*Dochádza k prekrytiu
amplitúdových charakteristík
DP a HP filtra*

Pásmová zádrž

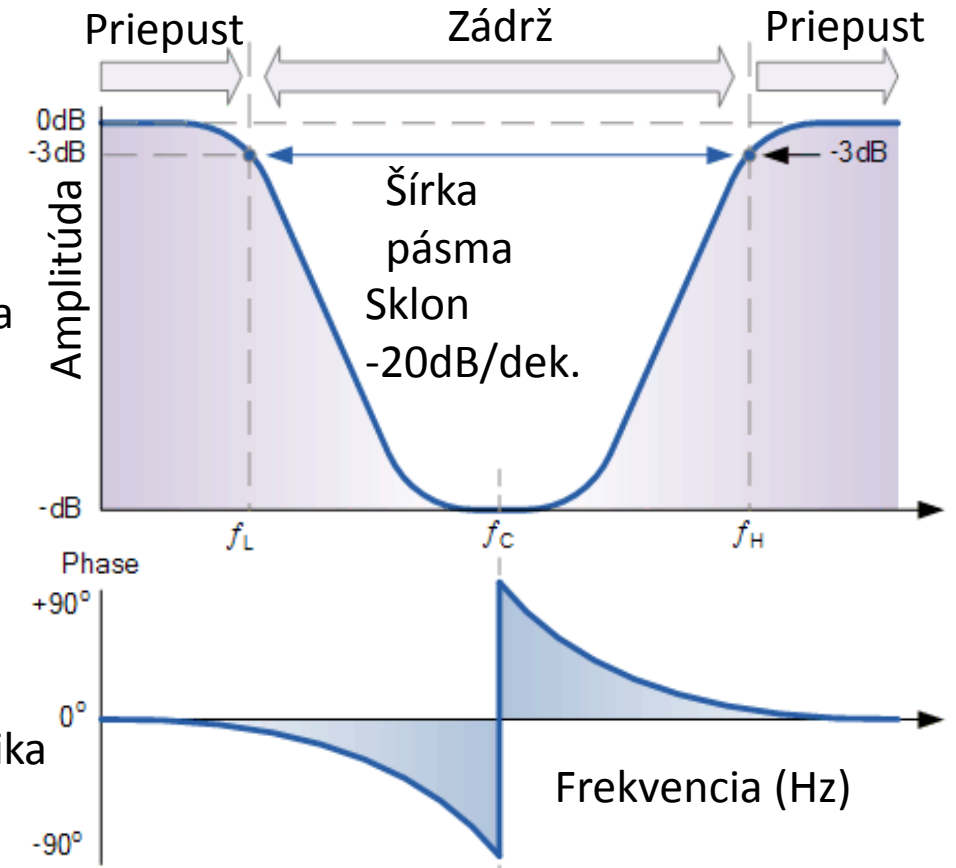
- Kaskádové zapojenie DP a HP filtra
 - Realizácia pomocou R a C



Pásmová zádrž

*Nedochádza k prekrytiu
amplitúdových charakteristík
DP a HP filtra*

Frekvenčná
charakteristika



Fázová
charakteristika