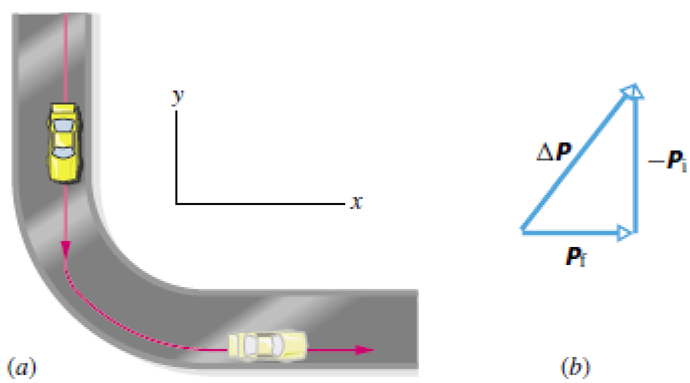
Zákon zachovani hybnosti ZZH (príklady)

Opakovanie: Konzervatívne sily. Sila pôsobiaca na časticu je konzervatívna, ak jej celková práca, ktorú vykoná pri pohybe častice po ľubovoľnej uzavretej trajektórií nulová. Ekvivalentné vyjadrenie – Sila pôsobiaca na časticu je konzervatívna, ak práca, ktorú vykoná pri premiestnení častice medzi dvoma zadanými bodmi nezávisí na trajektórií, po ktorej sa častica pohybovala. Tiažová sila a pružná sila sú konzervatívne. Dynamická trecia sila je nekonzervatívna.

Hybnosť častice **p** je vektorová veličina definovaná vzťahom **p** = m**v**

Ak je sústava izolovaná, t.j. nepôsobia na ňu žiadne vonkajšie sily je jej hybnosť **p** konštantná: **p**=konšt. T.j. **P**i=**P**f indexy (i) a (f) označujú hybnosť sústavy **p** v počiatočnom a v koncovom moment, v ktorom sústavu sledujeme.

Príklad 1.



OBR. 1

Obrázok 1 zachytáva detské autíčko s hmotnosťou 2,0 kg pred a po zátačke. Veľkosť jeho rýchlosti pred zátačkou je 0,50 $m.s^{-1}$, za zátačkou 0,40 $m.s^{-1}$. Určte odpovedajúcu zmenu hybnosti.

Riešenie:

Na vyjadrenie počiatočnej a výslednej hybnosti auta použijeme vzťah P = $m.v_T$. Najskôr ale musíme vyjadriť vector jeho rýchlosti v_i a vector rýchlosti v_f potom ako auto prešlo zátačkou. Ak zvolíme sústavu súradnic podľa obrázku 1 a dostaneme:

v_i =´-(0,50 $m.s^{-1}$)j a v_f = (0,40m.s-^{1})i pre odpovedajúce hybnosti Pi a Pf potom platí:

Pi = Mv_i = (2,0 kg)(-0,50 m.s^{-1})j = (-1,0 kg.m.s^{-1})j a Pf = Mv_f = (2,0 kg)(-0,40 m.s^{-1})i = (0,80 kg.m.s^{1})i

Tieto hybnosti majú rôzny rozmer. Preto nemožeme vyjadriť zmenu hybnosti Δ**P** iba ako rozdiel velkosti vektorov **P**i a **P**f. Zmena hybnosti je daná vektorovým vzťahom Δ**P = P**f **– P**i. (konečný minus počiatočný stav)

Preto ΔP = (0,80 kg.m.s^{-1})i – (-1,0 kg.m.s^{-1})j = (0,8i + 1,0j) kg.m.s^{-1}

Príklad 2.

Záhadná bedňa s hmotnosťou m = 6,0 kg kĺže po dokonale hladkej vodorovnej podlahe pozdĺž kladnej osi x. Veľkosť jej rýchlosti je v = 4,0 m.s^{-1}. Náhle bedňa vybuchne a rozpadne san a dve časti: Jedna z nich o hmotnosti m1 = 2,0 kg sa ďálej pohybuje pozdĺž kladnej osi x rýchlosťou v_1 = 8,0 m.s^{-1}. Aká je rýchlosť druhej časti ?

Riešenie:

Sústava častíc, ktorú sledujeme, je tvorená najskôr bedňou a po jej roztrhnutí oboma jej časťami. Jedna sa síce o sústavu uzavretú nie však o sustavu izolovanú. Na bedňu somotnú aj na každú jej časť pôsobí totíž jednak tiažová sila, jednak tlaková sila podlahy. Všetky tieto sily sú zvislé a neprispievajú preto k zmene vodorovnej zložky celkovej hybnosti sústavy. Sily, ktorými na seba pôsobia jednotlivé časti bedne pri explózií, neovplyvňujú celkovú hybnosť vôbec, pretože sú vnútornými salami sústavy. Vodorovná zložka hybnosti sústavysa teda zachováva a platí: **P**i = **P**f

Počiatočná hybnosť sústavy je určená hybnosťou bedne:

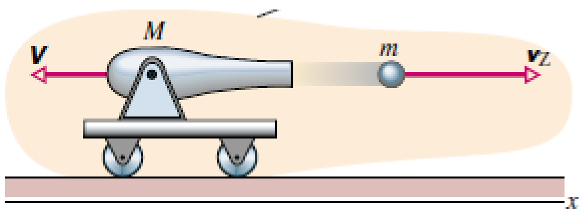
Pi = m**v,** Hybnosť sústavy **P**f po roztrhnutí bedne je daná vektorovým súčtom hybnosti oboch častí:

$\mathbf{P}_{1f} = m_1.v_1$ a $\mathbf{P}_{2f} = m_2.v_2$ $\mathbf{P}f = \mathbf{P}_{1f} + \mathbf{P}_{2f} = m_1.v_1 + m_2.v_2$

Potom platí $mv_x = m_1.v_{1x} + m_2.v_{2x}$

Teda $v_{2x} = (mv_x - m_1.v_{1x})/m_2 = 2,0$ m.s^{-1} Táto časť bedne sa pohybuje rovnako v smere kladnej osi x.

Príklad 3.



Z dela o hmotnosti M = 1300 kg bola vo vodorovnom smere vypálená gula s hmotnosťou m = 72 kg. Rýchlosť gule vzhľadom k delu je **v** a jej veľkosť je v = 55 $m.s^{-1}$. Pri spätnom raze sa delo voľne pohybuje vzhľadom k Zemi rýchlosťou **V.** Určte vektor **V.**

Riešenie :

Uvažujme sústavu zloženú z dvoch telies – dela a gule. Vďaka tejto voľbe budú sily vzájomného pôsobenia dela a gule pri výstrele vnútornými salami sústavy a nie je treba sa nimi zaoberať. Vodorovné zložky vonkajších síl pôsobiacich na sústavu sú nulové a vodorovná zložka celkovej hybnosti sústavy sa pri výstrele zachováva. Rýchlosť gule vzhľadom k Zemi $\mathbf{v}_Z$ je rovná vektorovému súčtu rýchlosti gule vzhľadom k delu a rýchlosti dela vzhľadom k Zemi. t.j. $\mathbf{v}_Z = \mathbf{v} + \mathbf{V}$

V obrázku smeruje rýchlosť **V** doľava, jej skutočnú orientáciu však ale zatiaľ nepoznáme.

Všetky rýchlosti majú smer osi x potom $v_{Zx} = v_x + V_x$

Pred výstrelom má sustava nulovú hybnosť Pi = 0. Vodorovnú zložku jej hybnosti po výstrele označme P_{fx}.

Potom platí : $P_{fx} = M.V_x + m.v_{zx} = M.V_x + m(v_x + V_x)$

Prvý člen na pravej strane rovnosti predstavuje vodorovnú zložku hybnosti dela a druhý vodorovnú zložku hybnosti gule vzhľadom k Zemi. Vodorovná zložka celkovej hybnosti sa ale nemení.

$0 = M.V_x + m(v_x + V_x)$

$V_x = -(m.v_x)/(M+m) = -2{,}9\ m.s^{-1}$ - Záporné znamienko potvrdzuje očakávanie, že delo sa pri spätnom raze pohybuje v opačnom smere než guľa.

A rýchlosť gule vzhľadom na Zem bude:

$v_{Zx} = v_x + V_x = (55\ m.s^{-1})+(-2{,}9\ m.s^{-1}) = 52\ m.s^{-1}$

Príklad 4.

Vesmírna loď sa vzďaluje od Zeme rýchlosťou 4300 km/h. Z lode je odpojený vyhorený raketový motor smerom späť. Jeho rýchlosť vzhľadom k lodi je 82 km/h. Hmotnosť motora je je štyrikrát väčšia ako zbytok lode. Aká je rýchlosť lode vzhľadom k Zemi po odhodení motora.

Riešenie:

m_c – hmotnosť celková

m_r – hmotnosť raketového modulu

m_m – hmotnosť motora $\quad m_c = m_r + m_m \quad m_m = 4m_r$

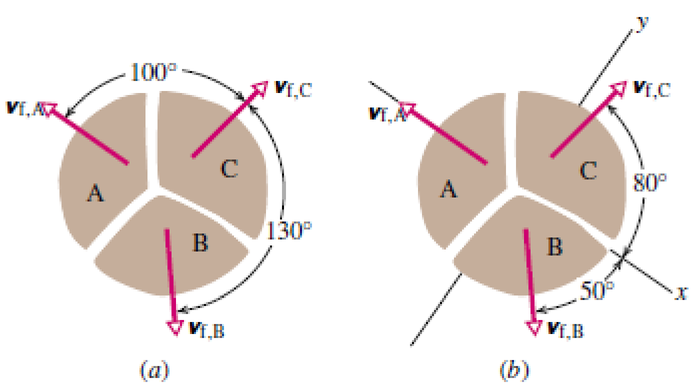
$mc.vc = m_r.v_r + m_m.v_m$

$(m_r + 4m_r).v_c = m_r.v_r + 4m_r.v_m$

Teda $v_r = 5v_c - 4v_m$ = 21172 km/h

Príklad 5.

Vnútri telesa o hmotnosti M, ktoré leží na vodorovne dokonalej hladkej podlahe, je umiestnená rozbuška. Výbuch roztrhne teleso na tri časti, ktoré sa uvedú do pohybu podľa obrázku.



Diel C s hmotnosťou 0,3 M má po výbuchu rýchlosť s veľkosťou v_{fc} = 5 m/s.

a) (Aká je rýchlosť časti B s hmotnocťou 0,20 M?

Riešenie.

Nech záporný smer osi x splýva so smerom vektoru rýchlosti v_{fA}. Os x zviera s vektorom v_{fC} uhol 80°a s vektorom v_{fB} 50 °. Obidve zložkycelkovej hybnosti sústavy, tvorené najskôr telesom a po rozpade všetkými jeho časťami, sa zachovávajú. Sily pôsobiace pri výbuchu sú totiž vnútornými salami sústavi a vonkajšie sily (tiažová a normálová) sú kolmé k súradnicovej rovine x y. Pri výpočte rýchlosti dielu B vychádzame so zákona zachovania pre y-ovu zložku celkovej hybnosti.

$$P_{iy} = P_{fy}$$

Zložky počiatočnej hybnosti Pi sú nulové, pretože teleso bolo spočiatku v kľude. Aby sme získali P_{fy}, vyjadríme y-ové zložky výslednej hybnosti všetkých dielov telesa.

$P_{fAy} = 0$

$P_{fBy} = -0{,}20Mv_{fBy} = -0{,}20M\, v_{fB} \sin 50°$

$P_{fCy} = 0{,}30Mv_{fCy} = 0{,}30M\, v_{fC} \sin 80°$

(Vzhľadom k špecialnej voľbe os sústavy súradníc je $P_{fAy} = 0$ preto môžme napísať :

$P_{iy} = P_{fy} = p_{fAy} + p_{fBy} + p_{fcy}$ dosadením $v_{fc} = 5{,}0$ m/s dostaneme

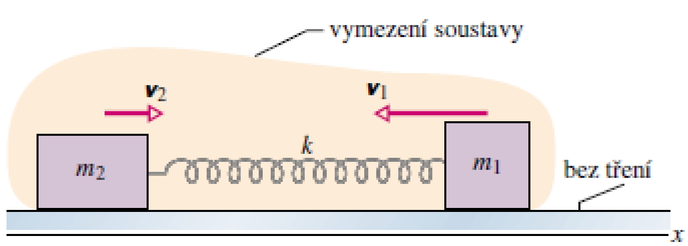
$0=0-0{,}20M\, v_{fB} \sin 50°+0{,}30M\, v_{fC} \sin 80°$ a odtial $\mathbf{v_{fB} = 9{,}64}$ **m/s**

b) Aká je rýchlosť časti A ?
c) $P_{fAx} = -0{,}50Mv_{fA}$
d) $P_{fBx} = 0{,}20Mv_{fBy} = 0{,}20M\, v_{fB} \cos 50°$
e) $P_{fCx} = 0{,}30Mv_{fCy} = 0{,}30M\, v_{fC} \cos 80°$

$P_{ix} = P_{fyx} = p_{fAx} + p_{fBx} + p_{fcx}$ Dosadíme $v_{fc} = 5{,}0$ m/s a $v_{fB} = 9{,}64$ m/s a dosadíme

$0=0 -0{,}50Mv_{fA} + 0{,}20M\, v_{fB} \cos 50° + 0{,}30M\, v_{fC} \cos 80°$ Potom rýchlosť dielu A je $\mathbf{v_{fA} = 3{,}0}$ **m/s**

Príklad 6.



Dve telesá na obrázku sú spojené ideálnou pružinou a môžu sa pohybovať po dokonale hladkej vodorovnej podložke. Ich hmotnosti sú m_1 a m_2. Telesá najskôr oddialíme a potom uvolníme.

a) Aký je pomer rýchlostí v_1/v_2 približujúcich sa telies?

Riešenie:

$P_f = m_1v_1+m_2v_2$ so zákona zachovania hybnosti platí $P_i = P_f$ t.j. $0 = m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2$

Teda pomer je : $\mathbf{v_{1x}/v_{2x} = - m_2/m_1}$ Záporné znamienko vyjadruje skutočnosť, že rýchlosti telies majú v každom okamihu opačný smer.

b) Aký je pomer kinetických energií E_{k1}/ E_{k2} približujúcich sa telies?

$\mathbf{E_{k1}/ E_{k2} =((½)m_1v_1^2)/((½)m_2v_2^2)= (m_1/m_2).(v_1/v_2)^2 = m_2/m_1}$

Príklad 7.

Raketa ktorej počiatočná hmotnosť je M_i = 850 kg, spotrebováva palivo rýchlosťou R = 2,3 kg/s. Splodiny opúšťajú raketu relatývnou rýchlosťou u = 2800 m/s.

a) Aký je ťah motora ?
T = Ru= (2,3 kg/s).(2800 m/s) = 6440 N (viď. Rozmerová analýza pretože [N] = kg.m.s^{-2})

b) Aké je počiatočné zrýchlenie rakety ?
Z pohybovej rovnice : **a = F/m=T/M=(6440N)/(850kg)= 7,6 m.s^{-2}**
Pri štarte rakety z povrchu Zeme musí byť Ťah T motorov väčší ako ťiažová sila, ktorou na raketu pôsobí Zem.

c) Predpokladajme, že naša raketa štartuje z vesmírnej lode, ktorá sa nachádza v medziplanetárnom priestore. Gravitačné sily teda môžeme zanedbať. Po vyčerpaní paliva má raketa hmotnosť M_f = 180 kg. Aká je jej rýchlosť vzhľadom k lodi v tomto moment? Predpokladajme, že hmotnosť vesmírnej lode je tak veľká, že štart rakety jej pohyb neovplyvní.

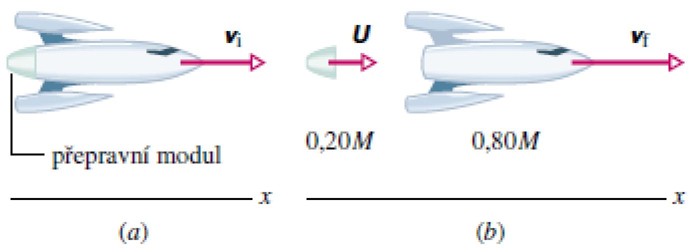
Počiatočná rýchlosť vzhľadom k vesmírnej lodi je $v_i = 0$

- Použijeme Ciolkovského vzorec

$v_f = u.\ln(M_i/M_f)$= (2800m/s)ln(850kg/180kg)= 4300 m/s

Príklad 8.

Predstavte si vesmírnu loď s celkovou hmotnosťou Mvybavenú prepravným modulo, ktorá letí vo vesmíre rýchlosťou v_i = 2100 km/h vzhľadom k Slnku. Potom čo sa prepravný modul s hmotnosťou 0,20 M odputa od lodi pomocou malého výbuchu, pohybuje sa loď o 500 km/h rýchlejšie než modul. (Veľkosť relatívnej rýchlosti lodi voči modulu je teda v_{rel} = 500 km/h.) Určte veľkosť rýchlosti lodi v_f vzhľadom k Slnku.



Riešenie:

Uzavretá sústava takže: $P_i = P_f$

U – rýchlosť uvolneného modulu

1: $P_f = (0{,}20M)U + (0{,}80M)v_f$

Prvý člen na pravej strane odpovedá hybnosti modulu a druhý hybnosti lode. Relatívna rýchlosť $\boldsymbol{v}_{rel}$ lode vzhľadom k modulu je rovná rozdielu rýchlostí, t.j. $v_{rel} = v_f - U \rightarrow U = v_f - v_{rel}$

A dosadením do 1: dostaneme:

$$M.v_i = (0{,}20M)(v_f - v_{rel}) + (0{,}80M)v_f$$

A výsledná rýchlosť lode po dosadení hodnôt je $\mathbf{v_f = 2200}$ **km/h**