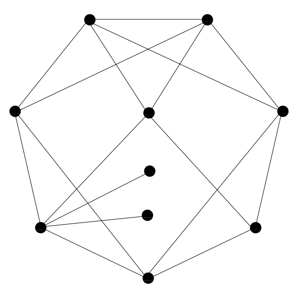
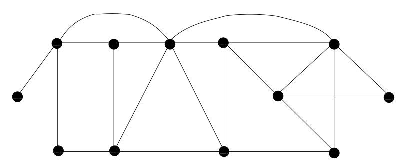
Algebra a diskrétna matematika
Úlohy na precvičenie
6. týždeň

Úloha 1. Zostrojte kostru Petersenovho grafu pomocou
(a) prehľadávania do hĺbky
(b) prehľadávania do šírky.
Riešte analogickú úlohu pre K_n pre ľubovolné $n \geq 3$.

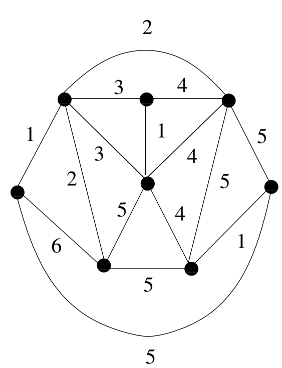
Úloha 2. Pre dané grafy zostrojte kostru pomocou prehľadávania do hĺbky a taktiež pomocou prehľadávania do šírky.

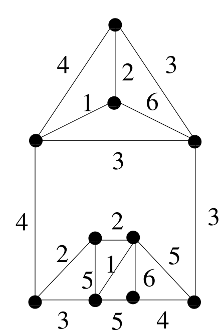




Úloha 3. Ukážte, že ak G je súvislý graf, tak kostra vybudovaná z vrchola v prehľadávaním do šírky nám určuje vzdialenosť vrchola v v grafe G a ľubovoľného iného vrchola v G (ako?).

Úloha 4. Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdite najlacnejšiu kostru v daných grafoch.





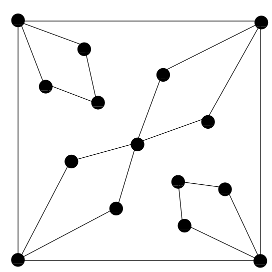
Úloha 5. Nájdite perfektné párovanie ku grafom z príkladu 2.

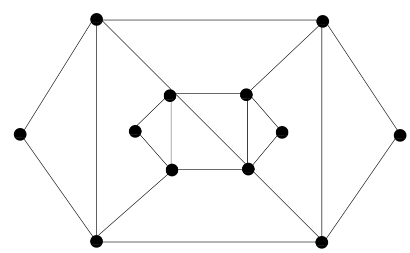
Úloha 6. Ukážte, že ak v strome existuje perfektné párovanie, tak je jediné.

Úloha 7. Zostrojte graf na $\leq 3t$ vrcholoch, v ktorom má každý vrchol stupeň aspoň 2 a ktorého najväčšie párovanie obsahuje nanajvýš $2t$ vrcholov.

Úloha 8. Zistite, či Petersenov graf má
(a) hamiltonovskú kružnicu,
(b) hamiltonovskú cestu.

Úloha 9. Nakreslite dané grafy jedným ťahom.





Úloha 10. Nech G je graf s vrcholom v stupňa 3 a nech okolie bodu v tvoria vrcholy x, y, z. Nech H je graf, ktorý z G vznikne vynechaním vrchola v a hrán incidentných s ním a pridaním 3 nových vrcholov a, b, c a 6 nových hrán ax, by, cz, ab, bc, ca. Ukážte, že G má hamiltonovskú kružnicu práve vtedy, keď ju má H. Ukážte, že analogické tvrdenie platí pre hamiltonovské cesty.

Úloha 11. Pomocou Petersenovho grafu zostrojte pre každé párne $n \geq 10$ súvislý graf na n vrcholoch bez hamiltonovskej kružnice, v ktorom má každý vrchol stupeň 3.

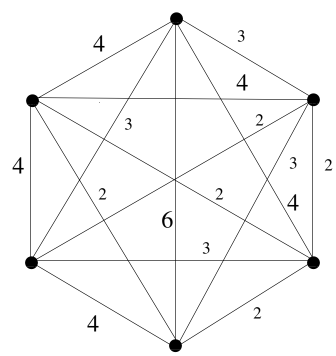
Úloha 12. Nech G je graf s hamiltonovskou cestou. Ukážte na príklade, že kostra v G zostrojená pomocou prehľadávania do hĺbky nemusí nutne byť hamiltonovskou cestou.

Úloha 13. Ukážte, že každý súvislý graf na aspoň 2 vrcholoch obsahuje aspoň 2 vrcholy v také, že graf $G - v$ je súvislý.

Úloha 14. Ukážte, že v pravidelnom grafe G stupňa d platí: G má chromatický index d vtedy a len vtedy, keď jeho hranovú množinu možno rozlozit' na d perfektných párovaní.

Úloha 15. Graf G nazveme maximálny nehamiltonovský, ak nemá hamiltonovskú kružnicu, ale zároveň ak pre každé 2 nesusedné vrcholy u, v platí, že $G + uv$ (pridáme 'novú' hranu uv) má hamiltonovskú kružnicu. Ukážte, že Petersenov graf je maximálny nehamiltonovský.

Úloha 16. V danom grafe nájdite najlacnejšiu hamiltonovskú kružnicu.



Úloha 17.* Dokážte Oreho vetu: Ak v n-vrcholovom grafe G pre každé 2 nesusedné vrcholy u, v platí, že $deg(u) + deg(v) \geq n$, tak G má hamiltonovskú cestu.