

**Písomný test 1 z AZA, skupina A, dňa 22.III.2016**

**Meno a priezvisko:**

1. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia. Svoje tvrdenie dokažte!

- a)  $3^{\log_3 n} = O(4^{\log_5 n})$
- b)  $3^n = O(2^n)$
- c)  $\log_5 n = O(\log_4 n)$
- d)  $n^2 = \Omega(n^{\log_2 3})$

2. Vypočítajte explicitne  $x_n$  z rekurentnej rovnice:

$$x_n = 2x_{n-1} + n, \text{ kde } x_0 = 0$$

3. Vypočítajte explicitne  $a_n$  z rekurentnej rovnice:

$$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}, \quad n \geq 1, a_0 = 1, a_1 = 10$$

4. Vypočítajte:  $\sum_{m>2}^{\infty} \frac{m^2 - 3m - 2}{m!}$ .

5. Použitím Master Theorem určte asymptoticky tesné hranice pre nasledujúce rekurencie:

a)  $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + e^{3 \ln n}$

b)  $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^3}{\log n}$

6. Predpokladajme, že podprogram  $ZZ(\cdot)$ , ktorého vstupom je binárne číslo  $x$  majúce  $n$ -bitovú reprezentáciu, má čas výpočtu  $O(n^3)$ . Uvažujme nasledujúcu časť kódu:

A: while $x > 1$ :	B: while $x > 1$ :
call $ZZ(x)$	call $ZZ(x)$
$x = x/2$	$x = x - 1$

Predpokladajme, že delenie dvomi potrebuje čas  $O(n)$  a podobne aj odčítanie jednotky potrebuje čas  $O(n)$ .

- a. Nájdite čo najtesnejšiu hranicu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) na počet opakovaní cyklu while v prípade A.
  - b. Nájdite čo najtesnejšiu hranicu celkového času výpočtu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) v prípade A.
  - c. Nájdite čo najtesnejšiu hranicu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) na počet opakovaní cyklu while v prípade B.
  - d. Nájdite čo najtesnejšiu hranicu celkového času výpočtu vyjadrenú pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) v prípade B.
7. Vyjadrite (ako funkciu  $k$ ) koľko hviezdíčiek presne vypíše nasledujúci kód pre dané  $n = 2^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ?

```
for (i=1; i<=n; i*=2)
  for (j=0; j<n; j+=i)
    printf("*");
```

8. Máte si vybrať jeden z troch algoritmov:

- Algoritmus A rieši problém veľkosti  $n$  tak, že ho rozdelí na päť problémov polovičnej veľkosti, rekurzívne vyrieši každý z nich a riešenia skombinuje v čase  $O(n)$ .
- Algoritmus B rieši problémy veľkosti  $n$  rekurzívne riešením dvoch problémov veľkosti  $(n-1)$  a potom ich riešenia skombinuje v konštantnom čase.
- Algoritmus C rieši problémy veľkosti  $n$  rekurzívne riešením deviatich podproblémov veľkosti  $n/3$  a potom ich riešenia skombinuje v čase  $O(n^2)$ .

Vyjadrite čas ich výpočtu pomocou  $\theta$  a napíšte, ktorý z nich by ste si vybrali.

Meno a priezvisko:

1. Zistite, či platia nasledujúce tvrdenia. Svoje tvrdenie dokažte!

- $4^n = O(3^n)$
- $n^2 = \Omega(n^{\log_3 4})$
- $\log_2 n = O(\log_3 n)$
- $2^{\log_2 n} = O(2^{\log_3 n})$

2. Vypočítajte explicitne  $x_n$  z rekurentnej rovnice:

$$x_n = 3x_{n-1} + n, \text{ kde } x_0 = 0$$

3. Vypočítajte explicitne  $x_n$  z rekurentnej rovnice:

$$x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}, \quad n \geq 1, x_0 = 1, x_1 = 3$$

4. Vypočítajte:  $\sum_{k>2}^{\infty} \frac{k^2 + 3k - 6}{k!}$ .

5. Použitím Master Theorem určte asymptoticky tesné hranice pre nasledujúce rekurencie:

a)  $T(n) = 27T\left(\frac{n}{3}\right) + e^{3 \ln n}$

b)  $T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^3}{\log n}$

6. Predpokladajme, že podprogram  $PP(\cdot)$ , ktorého vstupom je binárne číslo  $x$ , má čas výpočtu  $O(n^2)$ , kde  $n$  je počet bitov čísla  $x$ . Uvažujme nasledujúcu časť kódu:

A: while $x > 1$ :	B: while $x > 1$ :
call $PP(x)$	call $PP(x)$
$x = x/2$	$x = x - 1$

Predpokladajme, že delenie dvomi potrebuje čas  $O(n)$  a podobne aj odčítanie jednotky potrebuje čas  $O(n)$ .

- Nájdite čo najtesnejšiu hranicu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) na počet opakovaní cyklu while v prípade A.
  - Nájdite čo najtesnejšiu hranicu celkového času výpočtu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) v prípade A.
  - Nájdite čo najtesnejšiu hranicu pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) a počet opakovaní cyklu while v prípade B.
  - Nájdite čo najtesnejšiu hranicu celkového času výpočtu vyjadrené pomocou  $O$ -notácie (ako funkciu  $n$ ) v prípade B.
7. Vyjadrite (ako funkciu  $k$ ) koľko hviezdíčiek presne vypíše nasledujúci kód pre dané  $n = 3^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

```
for (i=1; i<=n; i*=3)
  for (j=0; j<n; j+=i)
    printf("*");
```

8. Máte si vybrať jeden z troch algoritmov:

- Algoritmus A rieši problém veľkosti  $n$  tak, že ho rozdelí na 4 problémy veľkosti  $n/3$  rekurzívne vyrieši každý z nich a riešenia skombinuje v lineárnom čase  $O(n)$ .
- Algoritmus B rieši problémy veľkosti  $n$  rekurzívne riešením dvoch problémov veľkosti  $(n-1)$  a potom ich riešenia skombinuje v konštantnom čase.
- Algoritmus C rieši problémy veľkosti  $n$  rekurzívne riešením štyroch podproblémov veľkosti  $\frac{n}{2}$  a potom ich riešenia skombinuje v čase  $O(n^2)$ .

Vyjadrite čas ich výpočtu pomocou  $\theta$  notácie a napíšte, ktorý z nich by ste si vybrali.