

Algebra a diskrétna matematika

Prehľad z 8. týždňa

Kombinatorika, princíp zapojenia a vypojenia,
systémy rôznych reprezentantov, lineárne rekurencie

Kombinatorika

Variácie k -tej triedy z n prvkov s opakovaním: všetky možné usporiadané výbery k prvkov z n prvkov; prvky sa môžu opakovať

$$V^*(n, k) = n^k$$

Variácie k -tej triedy z n prvkov bez opakovania: všetky možné usporiadané výbery navzájom rôznych k prvkov z n prvkov

$$V(n, k) = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutácia n prvkov: variácia n -tej triedy z n prvkov bez opakovania

$$P(n) = V(n, n) = n! = \prod_{i=1}^n i$$

Kombinácie k -tej triedy z n prvkov: všetky možné neusporiadané výbery navzájom rôznych k prvkov z n prvkov

$$C(n, k) = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Príklad 1: Koľkými spôsobmi možno rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín?

Ekvivalentne, aký je počet nezáporných celočíselných riešení rovnice $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Riešenie:

Predstavme si, že máme $n + k - 1$ vyhradených miest v jednom riadku.

Rozdeliť n identických objektov do k očíslovaných skupín je ekvivalentné umiestneniu $k - 1$ priehradiek do našich $n + k - 1$ vyhradených miest (a n nerozlíšiteľných objektov do zvyšných n miest).

Teda, hľadaný počet je počet kombinácií $k - 1$ miest spomedzi vyhradených $n + k - 1$ miest, čiže

$$C(n + k - 1, k - 1) = \binom{n + k - 1}{k - 1} = \binom{n + k - 1}{n}$$

Kombinácie s opakovaním

Príklad 2: Aký je počet tzv. kombinácií k -tej triedy z n prvkov s opakovaním, t.j. počet všetkých neusporiadaných výberov k prvkov (nie nutne navzájom rôznych) z n prvkov?

Ekvivalentne, aký je počet k -prvkových postupností (x_1, x_2, \dots, x_k) prirodzených čísel takých, že $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq n$?

Riešenie:

Určenie počtu uvedených postupností je ekvivalentné určeniu počtu rastúcich postupností

$$1 \leq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < \dots < x_k + (k - 1) \leq n + k - 1,$$

a tých je toľko, koľko je neusporiadaných výberov k navzájom rôznych čísel z $\{1, 2, \dots, n + k - 1\}$, čo sú kombinácie k prvkov z $n + k - 1$ prvkov, čiže

$$C^*(n, k) = C(n + k - 1, k) = \binom{n + k - 1}{k} = \binom{n + k - 1}{n - 1}$$

Permutácie s opakovaním

Permutácie n objektov rozdelených na s skupiniek z k_i ($1 \leq i \leq s$) nerozlíšiteľných objektov v každej skupinke, t.j. $n = k_1 + k_2 + \dots + k_s$: Ich počet je

$$P^*(n; k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!} = \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s}$$

Multinomická veta Pre ľubovoľné čísla $x_1, x_2, \dots, x_m \in R$ a celé n platí

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Princíp zapojenia a vypojenia (inclusion-exclusion principle)

Pre konečné množiny A_1 a A_2 platí:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Pre 3 konečné množiny platí:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Odvodenie je jednoduché, napr. pomocou Vennových diagramov.

Vo všeobecnosti máme tzv. **princíp zapojenia a vypojenia** pre konečné množiny A_1, \dots, A_n :

$$\begin{aligned} |\cup_{i=1}^n A_i| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &- \sum_{1 \leq i < j < k < \ell \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_\ell| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Kratší zápis:

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|-1} |\cap_{i \in I} A_i|$$

Odvodenie princípu zapojenia a vypojenia

Každý prvok $x \in \cup_{i=1}^n A_i$ je na ľavej strane započítaný presne raz.

Stačí ukázať, že x je presne raz započítaný aj na pravej strane.

Nech x patrí do presne t množín spomedzi A_i . Bez ujmy na všeobecnosti (t.j. až na označenie) môžeme predpokladať, že x je v A_1, \dots, A_t a nie v A_{t+1}, \dots, A_n . Uvedomme si, že x sa vyskytuje v prieniku každého výberu z množín A_1, \dots, A_t .

Prepíšeme binomickú vetu pre $(1 - 1)^t$ do tvaru

$$1 = \binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \dots + (-1)^{t-1} \binom{t}{t}.$$

Číslo $\binom{t}{i}$ vyjadruje počet prienikov i množín z výberu A_1, \dots, A_t , t.j. x sa celkovo započíta len raz na pravej strane v rovnosti zapojenia-vypojenia.

Tento fakt je potrebné aplikovať pre každé $x \in \cup_{i=1}^n A_i$.

Príklad 3: Aký je počet usporiadaní n prvkov na očíslovaných miestach $1, 2, \dots, n$ tak, aby sa žiaden prvok i neocitol na mieste s číslom i ?

Iná formulácia: Koľkými spôsobmi si n pánov môže preusporiadať svoje klobúky, aby žiaden z nich nemal na hlave svoj vlastný klobúk?

Jedná sa o derangement = “rozhádzanie”.

Riešenie:

Nech A_i je množina permutácií fixujúcich i .

$$|A_i| = (n - 1)! \quad |A_1 \cap A_2| = (n - 2)!$$

$$|A_1 \cap A_4 \cap A_7| = (n - 3)! \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots A_{i_k}| = (n - k)!,$$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia máme

$$|A_1 \cup A_2 \dots A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

Odpoved':

$$n! - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right)$$

Príklad 4: S akou pravdepodobnosťou “chaos v šatni” skončí tak, že žiaden z n pánov nedostane svoj vlastný klobúk?

Riešenie:

Pravdepodobnosť chápeme intuitívne ako pomer počtu priaznivých možností (viď vyššie) ku počtu všetkých možností.

V našom prípade je všetkých možností $n!$.

$$P = n! \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) / n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \approx 1/e \approx 0.368 \quad \text{pre } n \rightarrow \infty$$

Príklad 5: Aký je počet všetkých surjektívnych zobrazení $[k] \rightarrow [n]$?

Riešenie: Ak A značí všetky zobrazenia $[k] \rightarrow [n]$, tak $|A| = n^k$.

Nech $A_i = \{f : [k] \rightarrow [n]; f(x) \neq i \text{ pre } x \in [k]\}$.

Potom $|A_i| = (n-1)^k$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_j}| = (n-j)^k$

Podľa princípu zapojenia a vypojenia

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k$$

Počet všetkých surjekcií je

$$|S| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = n^k - \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} (n-j)^k =$$

$$|S| = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

Systemy rôznych reprezentantov

Hovoríme, že sústava množín A_1, A_2, \dots, A_n má **system rôznych reprezentantov**, alebo **transverzálu**, ak existuje n navzájom rôznych prvkov a_1, a_2, \dots, a_n takých, že $a_i \in A_i$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Príklad 6: Nájdite systém rôznych reprezentantov pre $A_1 = \{1, 3, 6\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 8\}$, $A_3 = \{3, 5\}$, $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{1, 5\}$.

Odpoveď: 1, 2, 3, 4, 5 alebo 3, 2, 5, 8, 1, prípadne iné.

Príklad 7: Nájdite transverzálu pre

$A_1 = \{1, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 8\}$, $A_3 = \{3, 5\}$, $A_4 = \{2, 3, 4, 5\}$, $A_5 = \{1, 5\}$,
 $A_6 = \{2, 5, 6, 7, 8\}$, $A_7 = \{2, 4, 6, 7\}$, $A_8 = \{1, 3, 5\}$.

Odpoveď: Nedá sa nájsť.

Veta (Ph. Hall, 1935) Sústava množín A_1, A_2, \dots, A_n má **system rôznych reprezentantov** práve vtedy, keď pre každú $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ platí:

$$|\cup_{i \in I} A_i| \geq |I| \quad (\text{Hallova podmienka})$$

V našom príklade 7, kde

$$A_1 = \{1, 3\}, A_2 = \{1, 2, 3, 8\}, A_3 = \{3, 5\}, A_4 = \{2, 3, 4, 5\}, A_5 = \{1, 5\}, \\ A_6 = \{2, 5, 6, 7, 8\}, A_7 = \{2, 4, 6, 7\}, A_8 = \{1, 3, 5\},$$

vezmíme $I = \{1, 3, 5, 8\}$,

vidíme, že $3 = |A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_8| < |I| = 4$,

t.j. nie je splnená Hallova podmienka, a teda v tomto prípade systém rôznych reprezentantov neexistuje.

Lineárne rekurencie

Uvažujme Fibonacciho postupnosť (r. 1202)

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Jej zápis je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Uvedený vzťah nazývame **lineárna rekurencia**.

Hodnoty pre F_0, F_1 sú **počiatočné podmienky**.

Vedeli by sme vyriešiť

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (*)$$

bez hodnôt $F_0 = 1, F_1 = 1$?

Riešenie skúsime hľadať v tvare r^n .

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

$$r^2 = r + 1$$

Máme kvadratickú rovnicu s koreňmi r_1, r_2 .

Ak $b_n = r_1^n, c_n = r_2^n$ spĺňajú rovnicu (*), potom aj $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ ju spĺňa.

Dôvod:

$$r_1^2 = r_1 + 1$$

$$r_1^n = r_1^{n-1} + r_1^{n-2}$$

$$\alpha r_1^n = \alpha r_1^{n-1} + \alpha r_1^{n-2}$$

Podobne

$$\beta r_2^n = \beta r_2^{n-1} + \beta r_2^{n-2}$$

Z uvedeného vyplýva, že $F_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ spĺňa (*).

Teraz chceme vypočítať α, β tak, aby $F_0 = 1, F_1 = 1$.

Pre $n = 0$ a $n = 1$ dostaneme

$$\begin{aligned} F_0 &= \alpha + \beta = 1 \\ F_1 &= \alpha r_1 + \beta r_2 = 1 \end{aligned}$$

Pomocou Cramerovho pravidla nájdeme riešenie

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1}$$

$$F_n = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} r_2^n$$

Aké hodnoty majú r_1, r_2 ?

Platí pre ne $r_i^2 = r_i + 1$.

Sú teda koreňmi **charakteristickej rovnice**

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Príklad Nájdite explicitné riešenie rekurentnej rovnice

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$$

s podmienkami $a_0 = 6, a_1 = -1$.

Riešenie (stručný postup):

$$r^n = 4r^{n-1} - 3r^{n-2}$$

$$r^2 = 4r - 3$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$r_1 = 1, r_2 = 3$$

$$a_n = \alpha 1^n + \beta 3^n$$

Do tohto riešenia dosadíme počiatočné podmienky a vypočítame α a β .

$$6 = \alpha + \beta$$

$$-1 = \alpha + 3\beta$$

$$\alpha = 9,5; \beta = -3,5$$

Riešenie je $a_n = 9,5 - 3,5 \cdot 3^n$.

Lineárne rekurencie - zovšeobecnenie

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k} = 0$$

Riešenie hľadáme v tvare r^n .

$$r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} - \dots - c_k r^{n-k} = 0$$

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Vo všeobecnosti dostaneme k riešení r_1, r_2, \dots, r_k . Ak sú všetky rôzne, tak **všeobecné riešenie** má tvar

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

Hodnoty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dopočítame z počiatočných podmienok pre a_0, a_1, \dots, a_{k-1} .