

Úloha	1	2	3	4	5	6	SPOLU
MaxBody	5	4	4	5	4	3	25
Body							

1. Rozhodnite o každom zo vzťahov (\mathcal{O} , o , Ω , ω , Θ) medzi funkciami f, g , resp. F, G a svoje tvrdenie zdôvodnite. Ak napr. platí, že $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, potom do príslušného poľa tabuľky zapíšte \checkmark , inak zapíšte \times .

(a) $f(n) = e^{2 \ln n}$, $g(n) = n^2 + 10^6$

(b) $F(n) = 2^{f(n)}$, $G(n) = 2^{g(n)}$

	\mathcal{O}	o	Ω	ω	Θ
(a)					
(b)					

2. Usporiadajte funkcie podľa asymptotického rastu vzostupne. Svoje tvrdenie dokážte.
 $(\ln n)^n$, e^{n^e} , $n^{\ln n}$, $(\frac{n+1}{n})^{n^4}$
3. Určte výpočtom asymptotický počet hviezdíčiek (pomocou Θ notácie), ktoré vypíše *proc0*.

```
void proc0(int n)
{
    for (int i=0; i<n; i++) {
        for (int j=7; j<i+3; j++)
            for (int k=i+2; k>6; k--)
                printf("***");
    }
}
```

4. Určte výpočtom presný počet hviezdíčiek, ktoré vypíše *proc1*.

```
void proc1(int n) {
    if (n>0) {
        for (int i=0; i<n; i++)
            printf("*");
        proc1(n-1);
        for (int i=0; i<n; i++)
            printf("*");
        proc1(n-1);
        for (int i=0; i<n; i++)
            printf("*");
    }
}
```

5. Určte výpočtom presný počet hviezdíčiek, ktoré vypíše *proc2*.

```
void proc2(int n) {
    if (n<2) printf("*");
    else {
        for (int i=0; i<27; i++)
            proc2(n-2);
        for (i=3; i<9; i++)
            proc2(n-1);
    }
}
```

6. Použitím Master Theorem určte asymptoticky tesné hranice pre nasledujúce rekurencie :

(a) $T(n) = 8T(n/2) + n^n$

(b) $T(n) = 4T(n/3) + n^{\frac{5}{4}} \log^3 n$

(c) $T(n) = 9T(n/3) + n^2 \log^3 n$

①

$$a) f(n) = e^{2 \ln n} = n^2 \quad g(n) = n^2 + 10^6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 10^6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{10^6}{n^2}} = 1 \Rightarrow f(n) \sim g(n)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^2}}{2^{n^2 + 10^6}} = \frac{1}{2^{10^6}} \Rightarrow f(n) = \theta(g(n))$$

	0	o	Ω	ω	θ
(a)	✓	x	✓	x	✓
(b)	✓	x	✓	x	✓

$$(2) (\ln n)^n = e^{\ln(\ln n)^n} = e^{n \ln \ln n} \quad (2)$$

$$e^{n e} \quad (3)$$

$$n^{\ln n} = e^{\ln^2 n} \quad (1)$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^4} = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{n^3} = e^{n^3} \quad (4)$$

$$\frac{(n-5)(n-4)(2n-9)}{3}$$

$$(3) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\max_{j=1}^{i+2} \left(\max_{k=1}^{i+2} \sum_{l=1}^{i+2} 1, 0 \right) \right), 0) = 2 \sum_{i=5}^{n-1} (i-4)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n-5} i^2 \quad 3$$

$$\frac{n^3}{4} \leq \frac{(n-5)^3}{3} = \int_0^{n-5} x^2 dx \leq \sum_{i=1}^{n-5} i^2 \leq \int_1^{n-4} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{n-4} = \frac{(n-4)^3 - 1}{3} \leq n^3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{3} = \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = 1 \Rightarrow$$

$$2 \sum_{i=1}^{n-5} i^2 = \theta(n^3)$$

$$2 \sum_{i=1}^{n-5} i^2 \sim 2 \frac{n^3}{3}$$

$$(4) \quad x_n = 2x_{n-1} + 3n \quad x_0 = 0$$

$$x_n = 2^n y_n \quad y_0 = 0$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{3n}{2^n} \quad y_0 = 0$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{3i}{2^i} = 3 \sum_{i=1}^n i \left(\frac{1}{2}\right)^i = 3 \left(x \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[3x^n \left(\frac{x}{x-1} \right)^n - \frac{3x}{(x-1)^2} \right]_{x=\frac{1}{2}} = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n (-n-2) + 6 =$$

$$= 6 - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n (n+2)$$

$$x_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 3(n+2) = 3(2^{n+1} - n - 2)$$

$$(5) \quad x_n = 6x_{n-1} + 27x_{n-2} \quad x_0 = x_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 27 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 9) = 0$$

$$x_n = C_1(-3)^n + C_2 9^n$$

$$1 = C_1 + C_2$$

$$1 = -3C_1 + 9C_2$$

$$4 = 12C_2$$

$$\frac{1}{3} = C_2$$

$$C_1 = \frac{2}{3}$$

$$x_n = \frac{2}{3}(-3)^n + \frac{1}{3} \cdot 9^n$$

$$x_n = 3^{n-1} (3^n + 2 \cdot (-1)^n)$$

$$(6)_a \quad T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$$

$$n^{\log_2 8} = n^3$$

$$n^n = \Omega(n^{3+\epsilon})$$

$$\epsilon = 1$$

$$8\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq c n^n$$

$$8 \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{n^n} \leq c$$

$$8 \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}} \leq c$$

$$8 \cdot \left(\frac{2^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq c$$

$\downarrow 0$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$T(n) = \Theta(n^n)$$

$$b) \quad T(n) = 4T\left(\frac{n}{3}\right) + n^{\frac{5}{4}} \log^3 n$$

$$n^{\log_3 4} = n^{1.2618\dots}$$

$$\frac{5}{4} = 1.25$$

$$n^{\frac{5}{4}} \log^3 n = O(n^{\log_3 4 - \epsilon})$$

$$\epsilon = 0.001$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$$

$$c) \quad T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 \log^3 n$$

$$n^{\log_3 9} = n^2$$

$$n^2 \log^3 n = \Theta(n^2 \cdot \log^3 n) \Rightarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^2 \log^4 n)$$