Algebra a diskrétna matematika

Prehľad z 5. týždňa

Nerovinné grafy, ofarbenia grafov, stromy, kostry a ich konštruktívna enumerácia, ohodnotenia grafov

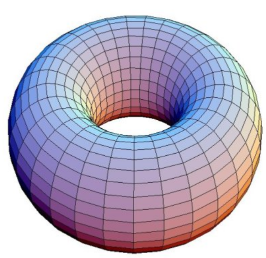
Graf je **rovinný**, ak ho je možné znázorniť v rovine tak, aby žiadne 2 krivky reprezentujúce jeho hrany nemali spoločný bod, ktorý by bol vnútorným bodom jednej z nich.

Graf, ktorý nie je rovinný sa nazýva **nerovinný (neplanárny)**.

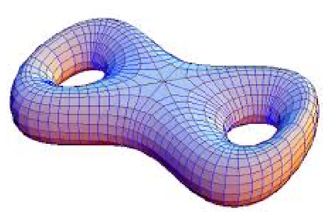
Z minula vieme, že grafy K_5, $K_{3,3}$ a Petersenov graf sú nerovinné.

Nerovinné grafy sa dajú nakresliť tak, aby sa ich hrany nepretínali vo svojich vnútorných bodoch v R^3 alebo na vhodných **plochách**.

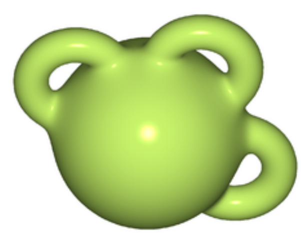
Príklady niektorých plôch:



Torus



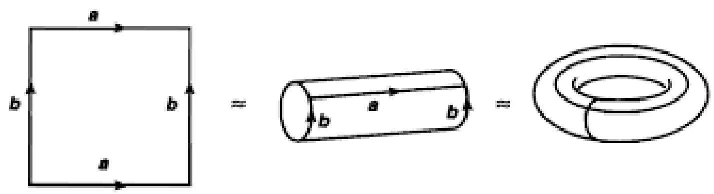
Dvojitý torus



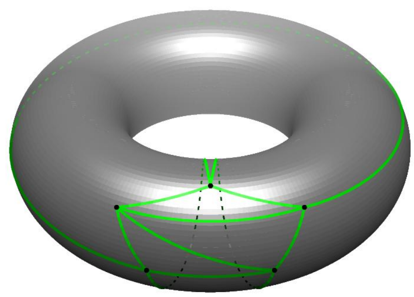
Trojitý torus

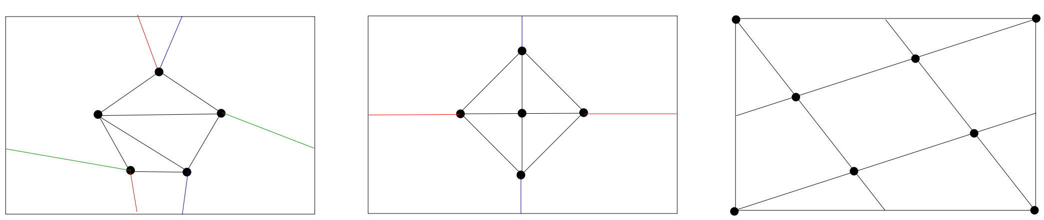
Tvrdenie: Každý graf je možné nakresliť bez priesečníkov na guľu s dostatočným počtom "uší".

Zostrojenie torusu



Príklad: Rôzne spôsoby umiestnenia úplného grafu K_5 na toruse.





Vrcholové ofarbenie grafu G je zobrazenie $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ také, že pre každú $uv \in E(G)$ je $f(u) \neq f(v)$ (susedné vrcholy dostanú rôzne farby).

Najmenšie také k je **chromatické číslo** $\chi(G)$ grafu G.

Príklad: Chromatické číslo Petersenovho grafu je 3.

Hranové ofarbenie grafu je priradenie k farieb hranám grafu, pričom hrany incidentné s rovnakým vrcholom dostanú rôzne farby.

Najmenšie také k je **chromatický index** (hranové chromatické číslo) $\chi'(G)$ grafu G.

Príklad: Chromatický index Petersenovho grafu je 4.

Veta o 5 farbách: Pre každý konečný rovinný graf platí, že $\chi(G) \leq 5$.

Pomerne jednoduchý dôkaz indukciou podľa počtu vrcholov bol prezentovaný na prednáške (aj s ilustráciou). Využíva sa tam fakt, že v rovinnom grafe existuje vrchol stupňa nanajvýš 5.

Slávny problém – Formulovaný r. 1852 – Francis Guthrie

Problém 4 **farieb** Pre každý konečný rovinný graf platí, že $\chi(G) \leq 4$.

1976 – Appel a Haken - prvý dôkaz, nie všetkými matematikmi prijatý

1991 – Robertson, Seymour, Thomas - všeobecne prijatý dôkaz

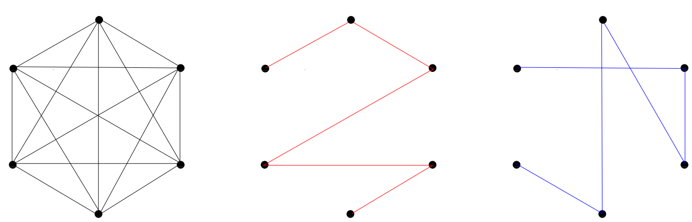
Strom je súvislý graf neobsahujúci kružnicu.

Nesúvislý graf bez kružníc sa nazýva **les**.

List grafu je vrchol stupňa jeden.

Kostra grafu G je strom, ktorý je jeho podgrafom a obsahuje všetky vrcholy grafu G.

Príklad dvoch rôznych, ale izomorfných kostier grafu K_6



Húsenica je graf, v ktorom po odstránení listov (vrcholov stupňa 1) ostane iba cesta.

Cayleyho veta: Pre každé $n \geq 2$ je počet všetkých kostier úplného grafu K_n (počet stromov na daných n vrcholoch) rovný n^{n-2}.

Hlavné myšlienky dôkazu

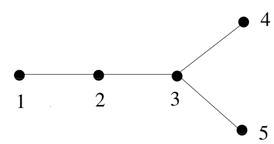
Ukážeme, že každú kostru K_n vieme zakódovať $(n-2)$-člennou postupnosťou čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Také kódovanie definuje bijekciu medzi všetkými kostrami a všetkými postupnosťami tohto typu. Z toho vyplýva, že počet všetkých kostier je n^{n-2}.

Uvažujme kostru T grafu K_n s vrcholmi označenými číslami $1, 2, \ldots, n$.

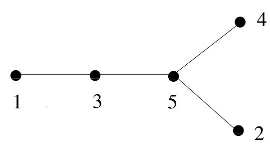
Kostre T priradíme **Prüferov kód** $P(T) = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-2})$ nasledovne:

- Z kostry postupne odstraňujeme listy, až kým neostane jedna hrana.
- V každom kroku odstránime list s najmenším číslom.
- Do postupnosti pridáme číslo vrchola, ktorý je susedom odstráneného listu.

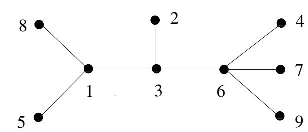
Príklad:



$P = (2, 3, 3)$



$P = (3, 5, 5)$



$P = (3, 6, 1, 6, 1, 3, 6)$

Spätná rekonštrukcia kostry

Uvedomme si najprv, že každý vrchol, ktorý nie je v P, je list.

Prvý vrchol bol odstránený list, ktorý susedil s prvým vstupom p_1 v P a mal najmenšie číslo ℓ_1 nevyskytujúce sa v P.
Ako druhý bol odstránený list susediaci s druhým vstupom p_2 v P a s najmenším číslom nevyskytujúcim sa v $P - \{p_1\}$ a rôznym od ℓ_1.
V ďalšom kroku budeme podobne vyšetrovať kód o dva vstupy kratší. Tak pokračujeme ďalej.
Po $n-2$ krokoch prejdeme celý kód. Ostáva určiť poslednú hranu. Jeden jej koniec je posledný vstup p_{n-2} v kóde P a druhý ten, ktorý sa nevyskytuje medzi odstránenými listami $\ell_1, \ldots \ell_{n-2}$ a je rôzny od p_{n-2}.

Algoritmus spätnej rekonštrukcie kostry

Vstup: Prüferov kód $P = (p_1, p_2, \ldots p_{n-2})$

Algoritmus

- Krok 1: Nakresli n vrcholov a označ číslami od 1 do n.
- Krok 2: Zostav **zoznam** čísel $Z = (1, 2, \ldots, n)$.
- Krok 3: Ak sú v zozname dve čísla, spoj vrcholy s týmito číslami hranou a ukonči, inak prejdi na Krok 4.

- Krok 4: Nájdi najmenšie číslo v zozname, ktoré nie je v kóde a prvé číslo v kóde. Spoj vrcholy s týmito číslami hranou.
- Krok 5: Vymaž čísla z Kroku 4 zo zoznamu aj z kódu. Choď na Krok 3.

Dá sa ukázať, že vzniknutý graf je vždy strom a že spätným prekódovaním dostaneme pôvodný kód.

Vrcholovo ohodnotený graf je graf, v ktorom sú vrcholom priradené čísla z nejakej množiny (tradične, $1, 2, ...$) .

Hranovo ohodnotený graf je graf, v ktorom sú hrany ohodnotené číslami $1, 2, ...$

Graciózne ohodnotenie (graceful labeling) stromu rádu n je ohodnotenie jeho vrcholov číslami $1, 2, \ldots, n$ tak, aby absolútne rozdiely ohodnotení susedných vrcholov vyčerpali celú množinu $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Ringel-Kotzigova hypotéza: Každý strom má graciózne ohodnotenie.

Hypotéza je stále otvorená.