

# Algebra a diskrétna matematika

## Úlohy na precvičenie

### 4. týždeň

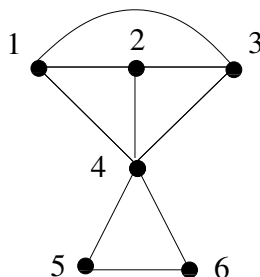
Označenie:  $K_n$  je úplný graf rádu  $n$ ,  $K_{m,n}$  je úplný bipartitný graf rádu  $m+n$ ,  $C_n$  a  $P_n$  je kružnica a cesta rádu  $n$  (t.j. na  $n$  vrcholech). Pod grafom rozumieme obyčajný graf bez slučiek a násobných hrán.

**Úloha 1.** Zostrojte graf, ktorý je daný nasledujúcou maticou susednosti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

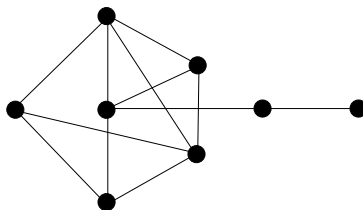
Aký je priemer, najväčší stupeň a obvod tohto grafu? Dokázali by ste odpovede na predchádzajúcu otázku zistiť priamo iba z matice?

**Úloha 2.** Pre daný graf nájdite maticu susednosti  $A$ . Čo reprezentuje matica  $A^2$ ?



**Úloha 3.** Určte počet všetkých grafov na 4 a 5 vrcholech až na izomorfizmus. Koľko z nich je súvislých?

**Úloha 4.** Pre graf z obrázka určte priemer, najväčší stupeň a obvod. Jedná sa o rovinný graf? Je niektorý z grafov  $K_3$ ,  $K_4$  alebo  $K_5$  jeho podgrafom?



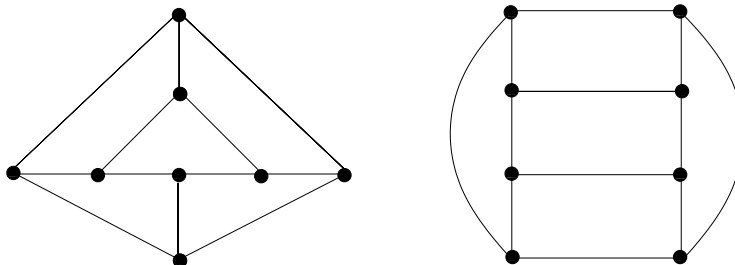
**Úloha 5.** Zostrojte graf, ktorý má

(a) 7 vrcholov, priemer 2 a obvod 4;

(b) 7 vrcholov, stupne vrcholov 3 alebo 4 a obsahuje  $K_4$  ako svoj podgraf.

Sú grafy z oboch prípadov izomorfné? Ak áno, nájdite izomorfizmus. V prípade negatívnej odpovede porovnajte ich priemer, stupne, obvod.

**Úloha 6.** Obrázok znázorňuje dva izomorfné grafy. Nájdite príslušný izomorfizmus. Jedná sa o bipartitný graf?



**Úloha 7.** Koľko kružníc obsahujú grafy  $K_4$ ;  $K_5$ ;  $K_{3,3}$ ;  $K_{3,4}$ ?

**Úloha 8.** Aké sú rôzne dĺžky kružníc v Petersenovom grafe? Koľko päťuholíkov obsahuje?

**Úloha 9.** Pokúste sa o rôzne “čo najsymetrickejšie” zovšeobecnenia Petersenovho grafu, aby výsledný graf bol pravidelný stupňa 3.

**Úloha 10.** Nájdite všetky samokomplementárne grafy na 3, 4, 5 a 6 vrchoch.

**Úloha 11.** Ukážte, že ak existuje samokomplementárny graf na  $n$  vrchoch, tak  $n$  dáva po delení 4 zvyšok 0 alebo 1.

**Úloha 12.** Nájdite aspoň jeden samokomplementárny graf na 8 a 9 vrchoch.

**Úloha 13.** Určte množinu všetkých vzdialeností v grafoch  $C_n$ ,  $K_n$ ,  $K_{m,n}$ ,  $P_n$ .

**Úloha 14.** Pokúste sa zostrojiť pravidelný graf stupňa 3 a obvodu 6 na čo najmenšom počte vrcholov.

**Úloha 15.** Laplaceova matica grafu je matica  $D - A$ , kde  $A$  je matica susednosti grafu a  $D$  je diagonálna matica pozostávajúca zo stupňov vrcholov. Ukážte, že  $\det(D - A) = 0$ .

**Úloha 16.** Nech  $M$  je matica susednosti Petersenovho grafu. Ukážte, že  $M^2 + M - 2I = J$ , kde  $J$  je matica pozostávajúca zo samých jednotiek.

**Úloha 17.** Ukážte, že pre rovinný graf s  $n$  vrcholmi,  $h$  hranami,  $o$  oblasťami a  $c$  komponentami súvislosti platí  $n - h + o = 1 + c$ .

**Úloha 18.** Použitím Eulerovho vzorca ukážte, že grafy  $K_5$  a  $K_{3,3}$  nie sú rovinné. To isté pre Petersenov graf.

**Úloha 19.** Ukážte, že v každom grafe s aspoň dvoma vrcholmi musia existovať 2 vrcholy rovnakého stupňa.

**Úloha 20.\*** Odvodte horný odhad pre najväčší počet vrcholov grafu

- (a) priemeru 2 a maximálneho stupňa  $d$ ,
- (b) priemeru  $k$  a maximálneho stupňa  $d$ .