Algebra a diskrétna matematika Prehľad z 3. týždňa Determinanty, Cramerovo pravidlo

Determinant štvorcovej matice M, označovaný ako |M| alebo $\det(M)$, je funkcia, ktorá matici M priradí reálne číslo, pričom platia nasledovné axiómy:

A1: Ak matica N vznikne z matice M výmenou poradia dvoch riadkov (stĺpcov), tak |N| = -|M|.

A2: Ak matica N vznikne z matice M vynásobením niektorého riadku (stĺpca) konštantou k, tak |N| = k|M|.

A3: Ak matica N vznikne z matice M **pripočítaním násobku** jedného riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu), tak |N| = |M|.

A4: Pre **jednotkovú** maticu platí |I| = 1.

Takto definovaný determinat je určený jednoznačne.

Z definície determinantu sa dajú odvodiť ďalšie vlastnosti:

V1: Ak sa v matici nachádzajú dva **rovnaké riadky** (stĺpce), tak jej determinant je **nulový**.

V2: Ak sa v matici nachádza nulový riadok (stĺpec), tak jej determinant je nulový.

V3: Determinat hornej (dolnej) trojuholníkovej matice sa rovná súčinu prvkov na hlavnej diagonále.

V4: Determinant **transponovanej** matice sa rovná determinantu **pôvodnej** matice, tj. $|A| = |A^T|$.

V5: Pre l'ubovol'né dve štvorcové matice rovnakého typu platí, že determiant súčinu matíc je súčin ich determinantov, t. j.

$$|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$$

Upozornenie: Determinat súčtu matíc sa nerovná súčtu determinantov! $|M+N| \neq |M| + |N|$

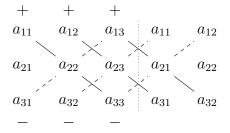
Vzorce na výpočet determinantov rádu 1, 2, 3:

$$|A_{1\times 1}| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_{3\times3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sarrusovo pravidlo na výpočet determinantu matice $A_{3\times 3}$:



Rozvoj determinantu podľa riadku alebo stĺpca

Výrazom A_{ij} označujeme maticu typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorú dostaneme z matice $A_{n\times n}$ vynechaním *i*-teho riadka a *j*-teho stĺpca.

Determinant matice Amôžeme potom vypočítať aj pomocou

- rozvoja podľa *i*-teho riadku

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

- rozvoja podľa j-teho stĺpca

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |A_{2j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$$

Determinant a inverzná matica

Štvorcovú maticu A nazývame **regulárnou**, ak $|A| \neq 0$.

K štvorcovej matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Ak matica A je regulárna, tak

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ak |A| = 0, maticu A nazývame **singulárnou.**

K singulárnej matici neexistuje inverzná matica.

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

Ak A je regulárna matica rádu n a A_{ij} vznikne z A vynechaním i-teho riakdu a j-teho stĺpca, potom pre **inverznú** maticu platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (b_{ij})_{n \times n}, \text{ kde } b_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|$$

Matica $(b_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva **adjungovaná** a označuje sa adj(A);

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

Ak
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
, tak $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Cramerovo pravidlo

Ak AX = B je systém pozostávajúci z n lineárnych rovníc o n neznámych taký, že $|A| \neq 0,$ potom systém má jediné riešenie.

Toto riešenie má tvar

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, \ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

pričom maticu A_i získame z matice A náhradou j-teho stĺpca stĺpcom pravých strán $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$.

$$\operatorname{strán} B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$