# Algebra a diskrétna matematika
# Prehľad zo 6. týždňa
# Prehľadávacie algoritmy, minimálna kostra, eulerovské grafy, hamiltonovské kružnice

## Prehľadávanie grafov

Často v grafoch chceme zistiť určitú vlastnosť (napr. súvislot', priemer, maximálny stupeň, existenciu kružníc, atď). Zo zoznamu susedov alebo matice susednosti to nie je ľahké hneď identifikovať. Mnohé takéto úlohy si preto vyžadujú efektívne a systematické preskúmanie grafu, kedy postupne navštevujeme všetky vrcholy a hrany grafu.

Uvedieme neformálny opis dvoch najviac používaných metód podľa spôsobu prehľadávania.

## Prehľadávanie grafu do hĺbky (depth-first search DFS)

Hlavná myšlienka tohto prehľadávania je, že postupujeme cez susedov vrcholov tak hlboko, ako je možné.
Začneme prehľadávanie vo zvolenom vrchole, navštívime jedného jeho suseda, potom suseda tohto suseda, atď. Ak sa ďalej takto nedá pokračovať a ešte existujú nenavštívené vrcholy, tak postupujúc naspäť nájdeme prvý vrchol s ešte nenavštíveným susedom a opakujeme postup, až kým nepreskúmame všetky vrcholy.

## Prehľadávanie grafu do šírky (breadth-first search BFS)

V tomto prípade najprv skúmame zvolený vrchol a potom všetkých jeho susedov, potom všetkých susedov týchto susedov, atď, kým nenavštívime všetky vrcholy grafu (prípadne komponentu).

Algoritmus prechádza vrcholy podľa vzrastajúcej vzdialenosti od zvoleného vrchola. Je preto vhodný na nájdenie najkratšej cesty medzi zvoleným vrcholom a ľubovoľným iným vrcholom.

V oboch algoritmoch každá hrana dostane šípku označujúcu smer jej prvého prechodu. Hrany rozdeľujeme na stromové, ak nás dovedú k novým vrcholom, a inak na spätné.

Výstupom oboch algoritmov je (DFS alebo BFS) kostra v každom komponente súvislosti a usporiadanie vrcholov v poradí, v akom boli navštívené.

**Problém minimálnej kostry:** Pre súvislý graf $G = (V, E)$ s kladným ohodnotením hrán $w$ nájdite kostru $T = (V, E')$ grafu $G$ s najmenšou možnou hodnotou $w(T)$.

**Kruskalov algoritmus:** Minimálnu kostru v grafe konštruujeme postupným pridávaním hrán s najmenšou váhou tak, aby sme nevytvorili žiaden cyklus.

Vstup: Súvislý hranovo ohodnotený graf $G = (V, E)$ s $n$ vrcholmi

Výstup: Podmnožina hrán $A \subseteq E$ taká, že graf $(V, A)$ je minimálna kostra grafu $G$.

Algoritmus

• Krok 1: Polož $A = \emptyset$.

• Krok 2: Polož $F = E$.

• Krok 3: Ak $F$=$\emptyset$ alebo graf $(V, A)$ je strom, ukonči, inak choď na Krok 4.

• Krok 4: Odstráň z množiny $F$ hranu $e$ s minimálnym ohodnotením (ak ich je viac, začni ľubovoľnou z nich). Ak graf $(V, A \cup \{e\})$ neobsahuje kružnicu, pridaj hranu $e$ do množiny $A$. Choď na Krok 3.

**Eulerovské grafy**

Úloha: Nakreslite daný graf jedným uzavretým ťahom bez zdvihnutia tužky z papiera, pričom žiadna hrana sa neobkreslí viackrát.

**Uzavretý eulerovský ťah** v grafe je uzavretý sled hrán a vrcholov, v ktorom sa každá hrana vyskytuje práve raz a každý vrchol aspoň raz.

Graf je **eulerovský** práve vtedy, keď má aspoň jeden uzavretý eulerovský ťah.

**Charakterizácia eulerovských grafov:** Graf je eulerovský práve vtedy, keď je súvislý a všetky jeho vrcholy sú párneho stupňa.

**Mostom** grafu $G = (V, E)$ je taká hrana $e \in E$, pre ktorú platí, že graf $G - e$ má väčší počet komponentov ako graf $G$.

**Tvrdenie:** Ak má graf všetky vrcholy párneho stupňa, tak neobsahuje most.

Algoritmus kreslenia grafu jedným ťahom

Vstup: Súvislý graf $G = (V, E)$ so všetkými párnymi stupňami vrcholov a s $m$ hranami.

Algoritmus

- Krok 1: Zvoľ $v_0$ ľubovoľne a polož $T_0 = v_0$.
- Krok 2: Opakuj Krok 3 pre $i = 0, 1, 2 \ldots$, kým je možné. Ak sa Krok 3 nedá uskutočniť, potom $i = m$ a $T_m$ je hľadaný ťah.
- Krok 3: (Predĺženie ťahu)

Nech $T_i = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_i, v_i)$ je už definovaný ťah.
Zvoľ hranu $e_{i+1} \in E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ obsahujúcu vrchol $v_i$ tak,
aby grafy $(V, E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\})$ a $(V, E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i, e_{i+1}\})$
mali rovnaký počet komponentov.

Hovoríme, že graf $G$ s párnym počtom vrcholov $2n$ má **perfektné párovanie**, ak $G$ obsahuje $n$ nezávislých hrán (žiadne 2 nemajúce spoločný vrchol).

**Veta** (König, 1916): Každý pravidelný bipartitný graf s aspoň jednou hranou má perfektné párovanie.

**Veta** (Petersen, 1891) Každý pravidelný graf stupňa 3 bez mostov má perfektné párovanie. (Tu graf nemusí byť bipartitný!)

**Problém obchodného cestujúceho**

Nech v grafe $G$ vrcholy reprezentujú mestá a hrany cesty medzi mestami. Problém obchodného cestujúceho spočíva v určení trasy začínajúcej a končiacej v tom istom meste, pričom cestujúci každé iné mesto navštívi práve raz a súčet prejdených vzdialeností (resp. nákladov, resp. časov) bude minimálny možný.

Kružnica v $G$ je **hamiltonovská**, ak obsahuje všetky vrcholy grafu $G$.

**Ekvivalentná formulácia problému obchodného cestujúceho:** Nájsť v grafe $G$ s kladne ohodnotenými hranami hamiltonovskú kružnicu s najmenším celkovým ohodnotením.

Algoritmy na hľadanie optimálnej hamiltonovskej kružnice sú veľmi komplikované. Nateraz sa uspokojíme s **heuristikou**, t.j. procedúrou, ktorá nájde hamiltonovskú kružnicu s "rozumne malým" ohodnotením.

Budeme uvažovať o ohodnotenom *úplnom* grafe $G$ (aby sme sa vyhli problému

existencie hamiltonovskej kružnice), pričom pre (kladné) ohodnotenie $w$ hrán predpokladáme pre každú hranu $uv$ **trojuholníkovú nerovnosť:**
$w(uv) \leq w(ux) + w(xv)$, pre každý vrchol $x$.

Heuristika zdvojenej kostry.

- Pomocou Kruskalovho algoritmu nájdeme v $G$ najlacnejšiu kostru $T$.
- Na $T$ vytvoríme uzavretý sled $S$, ktorý každú hranu $T$ prejde 2-krát.
- Pomocou $S$ budujeme kružnicu $C$ z ľubovoľného vrchola $u$ rekurzívne:

1. Vydáme sa z $u$ v smere sledu $S$, až kým nie sme nútení prejsť nejakou hranou v opačnom smere, t.j. keď $S = u...vwv....$ Vezmeme dočasne $C = u...vw$.

2. Pokračujeme v traverzovaní sledu $S$, tentoraz z vrchola $w$, až po prvý výskyt nejakého vrchola $x$ (čiže teraz $S = u...vwv...x...$), ktorý nie je v našej dočasnej $C$; do $C$ pridáme vrchol $x$ a hranu $wx$. Ak taký $x$ nie je, tak bola prejdená celá trasa $S$; do $C$ pridáme hranu $wu$ a skončíme.

3. Ak $S = u...vwv...xy...$ a $y \notin C$, budujeme ďalej $C$ ako v 1 ( $x$ preberie rolu vrchola $u$ v bode 1); ak $y \in C$ (a teda $xy$ je prejdená druhýkrát), pokračujeme ako v 2 ( $x$ preberie rolu vrchola $w$ v bode 2).

Z trojuholníkovej nerovnosti máme $w(C) \leq 2 \cdot w(T)$, čo považujeme za "rozumne malé".