K odpovedi pridajte len +1oho či ANO alebo NIE.

1. Pre ľubovoľný náhodný vektor (X, Y) s kovarianciou $cov(X,Y)$ platí: Ak X, Y sú nezávislé, potom $cov(X,Y) = 0$.

ANO +7 / NIE

Pre strednú kvadratickú chybu $MSE(h)$ ľubovoľnej štatistiky $h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ s varianciou $var(h)$ je $var(h) \leq MSE(h)$.

2.

ANO +5 / NIE

3.

Existuje náhodná premenná X so strednou hodnotou μ a s varianciou σ^2, pre ktorú platí: Štatistika

$$S(\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

nie je nevychýlenou odhadovou štatistikou pre varianciu σ^2 náhodnej premennej X.

ANO / **NIE** +8

// pozri príklad 23, dôkaz že je výchýlenou a teda nie je nevychýlenou… // Pozor, μ a ¯X nie je to isté. ¯X je samo o sebe odhadom μ, preto ten istý vzorec s ¯X je vychýlený a s μ nie je.
// je nevychylena ked je mi znama hodnota (?!)
-+

Existuje náhodná premenná X so strednou hodnotou μ a s varianciou σ^2, pre ktorú platí: Štatistika

$$S(\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

nie je nevychýlenou odhadovou štatistikou pre varianciou σ^2 náhodnej premennej X.

Nie
Áno

4. Pre ľubovoľné tri udalosti A, B, C platí: ak A, B sú nezávislé a B, C sú nezávislé, tak aj A, C sú nezávislé.

ANO / **NIE**+9 //urcite nie, ved to dokazal *.Olejcek.* na konzultacii pred skuskou.

5. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:
Ak $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ a $P(A|B) = P(B|A)$, potom A, B sú nezávislé.

ANO / **NIE** **+7**

6. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí: $P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

ANO **+10** / NIE

7. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:
Ak A, B sú disjunktné a nezávislé, tak $P(A) = 0$ alebo $P(B) = 0$.

ANO **+5** / NIE
//preco ? +1 //disjunktne znamena ze nemozu nastat naraz, to znamena aspon jedno z nich by malo mat nulovu pravdepodobnost /+1

8.

Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak A, B sú disjunktné a nezávislé, tak $P(A) = 0$ a $P(B) = 0$.

ANO / **NIE** **+6**

9

Pre ľubovoľnú náhodnú premennú X so strednou hodnotou platí: Štatistika

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

je nevychýlenou odhadovou štatistikou pre strednú hodnotu $E(X)$.

ANO **+6** / NIE

10. Pre ľubovoľnú náhodnú premennú X platí $|E(X)| \leq E(|X|)$.

ANO **+5** / NIE // preco?// lebo ked to je cele v absolutnej hodnote tak to je mensie //+2 // aha uz chapem dik

11.

Pre strednú kvadratickú chybu $MSE(h)$ ľubovoľnej odhadovej štatistiky $h(X_1, X_2, ..., X_n)$ funkcie parametra $\tau(\vartheta)$ s varianciou $var(h)$ je $MSE(h) < var(h) + (E(h) - \tau(\vartheta))^2$.

Pre strednú kvadratickú chybu $MSE(h)$ ľubovoľnej odhadovej štatistiky $h(X_1, X_2, ..., X_n)$ funkcie parametra $\tau(\vartheta)$ s varianciou $var(h)$ je $MSE(h) < var(h) + (E(h) - \tau(\vartheta))^2$.

0 z 3 b.

Nie

Áno

ANO +10 / NIE

12. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak $P(A) \neq 0$ a $P(B|A) = P(B)$, tak A, B sú nezávislé.

ANO **+5** / NIE

13. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí: ak A, B sú nezávislé, tak aj A^C, B^C sú nezávislé.

ANO +6 / NIE // pozri príklad 19

14. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) - 1$

ANO +1 / **NIE +6**

- vysvetlenie? // pretoze P(A zjednotenie B) sa da zapisat ako P(A) + P(B) a tym padom ti vznikne P(A) + P(B) <= P(A) + P(B) - 1 , a kedze na pravej strane od toho odcitas este 1tku tak vzdy to bude mensie a nie vacsie … // +1 //zabudol si odcitat prienik. P(A ∪ B) = P(A) + P(B) **- P(A ∩ B).** Samozrejme, P(A ∩ B) <= 1, takze odpoved je stale NIE // Mas pravdu +1

- tento priklad bol vo vzorovej skuske - tak to je potom jasne, vo vzorovej skuske bolo < naopak

15. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak A, B sú nezávislé a P(A) = 0, tak aj P(B) = 0.

ANO / **NIE +5**

16. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak A, B sú nezávislé a $P(B) \neq 0$, tak $P(A|B) = P(A)$.

ANO +7 / NIE

17. Pre ľubovoľnú náhodnú premennú X s varianciou σ^2 platí: Štatistika

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

je nevychýlenou odhadovou štatistikou pre varianciou σ^2 náhodnej premennej X.

ANO / **NIE +5**

//je toto ok ? na konzultackach bolo ze je nevychylenou odhadovou statistikou (teda asi to iste) a bolo to za ANO je to preto lebo tam chyba asymptoticky ?

// pozri príklad 3 a 23, asymptotický je nevychýleny, tento je vychýlený… na konzultaciach bol normujuci faktor podľa všetkého 1/(n-1)

// na konzultaciach nebol normujuci faktor 1/(n-1) bol tam iba 1/n to iste ako tuto

Pre ľubovoľné dve náhodné premenné X, Y so strednými hodnotami platí: Ak X, Y sú nezávislé, potom E(XY) = E(X)E(Y).

18.

ANO +5 / NIE

19. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí: ak A, B sú nezávislé, tak aj A, B^c sú nezávislé.

1.6.2 Príklad. Ukážme, že ak A, B sú nezávislé, tak nezávislé sú aj dvojice udalostí A a B′, aj A′, B a tiež A′ a B′.
Riešenie. Ukážme, napríklad, že A, B′ sú nezávislé, teda, že $P(A \cap B') = P(A)P(B')$. Zrejme

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)\,P(B').$$

ANO +5/ NIE

20. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak P(A) = 0 alebo P(B) = 0, tak A, B sú nezávislé.

ANO +6 / **NIE** +5

//ich prienik je tiez 0, preto plati:
//P(A prienik B) = P(A) * P(B)
//0 = 0 => su nezavisle, podla mna ANO

// Toto ma olejcek v prednaske , posledna veta , takze suhlasim s modrym ANO

Pozn.

NEZÁVISLOSŤ $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ DISJUNKTNOSŤ

A, B sú disjunktné a $P(A) \neq 0 \neq P(B)$

$\Rightarrow$ A, B sú závislé

lebo $P(A \cap B) = 0$

$P(A)P(B) \neq 0$

$P(A) = 0$ alebo $P(B) = 0 \Rightarrow$ A, B sú nezávislé

21.

Pre ľubovoľnú náhodnú premennú X platí $E^2(X) \leq E(X^2)$.

ANO +6 / NIE

// E^2(X) - to vobec existuje? - ako sa to potom pocita?+999

//ty si varianciu este nepocital co?

//normálne vyrátaš E(x) a dáš to na druhu

// zelený font je môj hrdina

22.

Pre ľubovoľné tri udalosti A, B, C platí: ak A, B sú nezávislé a A, C sú nezávislé, tak aj A, B ⋃ C sú nezávislé.

ANO +1 / **NIE** +3+2+1

// toto nikto nevie? nasiel som pripad kedy to neplati (tabulkou, podobne ako to ratal on na prednaske), podla mna teda NIE

//ak je A nezavisle s B aj C tak potom je nezavisle aj s ich zjednotenim, alebo prosím ťa môžeš sem hodiť tú tabuľku, z prednášky, či už tú upravenú na tento príklad.

//ľudia, logika. Vyberáme číslo 1-10, A - je párne, B - je to 4 alebo 5, C - 5 alebo 6. Ak nastane B, stále 50% šanca párneho. To isté C. Ak nastane B U C (padne 4, 5, alebo 6), P(A) = ⅔, čiže to nie je nezávislé

//to čo si napísal, že A je párne nie je nezávislé od B a C. A prienik B = 6, A prienik C = 4. môže to teda byť? //P(A) = 0.5, P(B) = 0.2, P(A prienik B) = 0.1, P(A)*P(B) = 0.1. Sú nezávislé

23.

Existuje náhodná premenná X s varianciou σ^2, pre ktorú platí: Štatistika

$$S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

nie je nevychýlenou odhadovou štatistikou pre varianciou σ^2 náhodnej premennej X.

ANO +2 / **NIE** +6

// dal som ano a mal som 0 z 3 //+2 dík za feedback

// hovorite ze je to vychyleny odhad variancie, avsak v knihe je jednoduchy dokaz ze je to stale nevychylene, tak ako teda? z tohto si myslim ze NIE:

//Som mal priklad ze “je nevychilenou” a odpoved je spravne ze ano, takze pri “nie je nevychylenou” je automaticky NIE!

// NIe je nevychylena neznamená to isté ako že áno je vychýlená? //ano, ale otazka je, ci existuje premenna pre ktoru to tvrdenie (ze je vychylena) plati. Cize nie = neexistuje premenna pre ktoru nie je nevychylenou = je vzdy nevychylenou. Vysomarit sa z tej formulacie je tazsie nez samotna otazka

7.1.11 Veta. Ak $X_1, X_2, \dots, X_n$ je náhodný výber z rozdelenia, ktorého stredná hodnota sa rovná m, tak výberový priemer $\bar{X}$ je nevychýlený odhad strednej hodnoty m, pretože

$$\mathrm{E}\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = m.$$

Ak rozdelenie má varianciu σ^2, t. j. $var(X_i) = \sigma^2$, pre $i = 1, 2, \dots, n$, tak výberová variancia S^2 je nevychýlený odhad variancie σ^2, pretože

$$\mathrm{E}\left[\tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \sigma^2.$$

Dôkaz. Prvá časť vety je jednoduchá. Využijeme vlastnosti strednej hodnoty z vety 4.2.3.

$$\mathrm{E}\left(\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \tfrac{1}{n}\mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} m = \tfrac{1}{n}\, n\, m = m.$$

V dôkaze druhej časti vety využijeme rovnosť $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$, ktorú sme odvodili v 6.3.4. Počítajme

$$\mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) = \mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\mathrm{E}(\bar{X}^2) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2) - n\mathrm{E}(\bar{X}^2).$$

Teraz potrebujeme určiť $\mathrm{E}(X_i^2)$ a $\mathrm{E}(\bar{X}^2)$. V oboch prípadoch použijeme známy vzťah

$$var(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}X)^2, \text{ v podobe } \mathrm{E}(X^2) = var(X) + (\mathrm{E}X)^2.$$

Najprv za X vezmeme X_i (na výpočet $\mathrm{E}(X_i^2)$) a potom $\bar{X}$, na výpočet $\mathrm{E}(\bar{X}^2)$. Takto

$$\mathrm{E}(X_i^2) = var(X_i) + m^2 = \sigma^2 + m^2, \quad \text{resp.} \quad \mathrm{E}(\bar{X}^2) = var(\bar{X}) + (\mathrm{E}\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2.$$

Nakoniec,

$$\mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i^2) - n\mathrm{E}(\bar{X}^2) = n(\sigma^2 + m^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + m^2\right) = (n-1)\sigma^2,$$

odkiaľ už máme

$$\mathrm{E}\left(\tfrac{1}{n-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \sigma^2.$$

Zrejme štatistika $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ je síce vychýlený odhad σ^2, ale je aspoň asymptoticky nevychýlený, pretože

$$\mathrm{E}\left[\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \tfrac{1}{n}\mathrm{E}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right) = \tfrac{1}{n}(n-1)\sigma^2 = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\sigma^2.$$

24. Pre ľubovoľný náhodný vektor X, Y s kovarianciou cov(X,Y) platí var(X - Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y).

ANO / **NIE** **+11**

25. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak A, B sú disjunktné, tak A, B sú nezávislé.

ANO / **NIE** **+5**

26. Pre ľubovoľný náhodný vektor X, Y s korelačným koeficientom $\varrho(X,Y)$ platí: $P(Y = aX + b) = 1$ práve vtedy, keď X, Y sú závislé.

ANO /+2/ **NIE** +6

//myslim ze iba pre a>0, opravte ma //moze byt aj 0. Ak su nezavisle, je vzdy 0, ale opacne nic neplati

27.

Pre ľubovoľné tri udalosti A, B, C platí: ak A, B sú nezávislé a A, C sú nezávislé, tak aj A, $B \cap C$ sú nezávislé.

ANO / **NIE** +2

28. Pre ľubovoľný náhodný vektor (X,Y) s nezávislými zložkami s varianciami var(X) a var(Y) platí var(X - Y) = var(X) - var(Y).

ANO **+4** / **NIE** +11

//zle znamienko podla mna, nemalo by tam byt: var(X) + var(Y)?//+2

//(okrem toho variancia je vzdy kladna, takze cislo na lavej strane rovnice je vzdy kladne,

//ale na pravej, ak var(X) < var(Y) => zaporne cislo na pravej strane)

//on ma pravdu ..// NIE+1

//Urcite nie, nasiel som aj vzorec var(x-y) = var(x) + var(y) - 2cov(x, y)

//Je to urcite NIE, ten vzorec co postol so zelenou je sice pravda ale pri nezavislostiach

//variancie plati vzorec “ked X,Y nezavisle => var(X+-Y) = var(x) + var(y)”

29. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ a $P(B) = P(B|A)$, potom $P(A|B) = P(A)$.

ANO **+4** / NIE

30.

Pre ľubovoľné dve náhodné premenné X, Y platí $E(XY) \leq E(X)E(Y)$.

ANO / **NIE** +4

31. Pre ľubovoľné dve udalosti A, B platí:

Ak $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ a A, B sú nezávislé, potom $P(A|B) = P(B|A)$.

ANO / **NIE** **+4**

32.

Pre strednú kvadratickú chybu $MSE(h)$ ľubovoľnej nevychýlenej štatistiky $h(X_1, X_2, ..., X_n)$ s varianciou $var(h)$ je $var(h) = MSE(h)$.

ANO +6/ NIE +2

//ale to si len matne pamatam ze som dal nie a nedostal som za to body :) // takisto

// Na 1. strane je namiesto rovná sa <= a tam sa 5 ľudí zhodlo na ÁNO. Nemalo by tu byť NIE?

// Kamarat, ktory mal A z PaS povedal ze by dal Nie, tak dam zanho +1

// tiez som mal A z PaS, mal som tam tento priklad, mam ho dobre a daval som Ano

//ta rovnost plati iba v pripade ak je h nevychylena statistika co nieje - v zadani sa pise "lubovolnej nevychylenej statistiky", takze je

viem ze to niekedy plati ale ked lubovolnej to znamena v kazdej… no pravdu ma jeden z vas.

//Podla ucebnice od Volaufa by to malo byt ano, maju tam, ze ak je to nevychylene, tak stredna hodnota je rovna theta pri nevychylenej, a tak je MSE(h) = var(h)//+1

33.

Pre ľubovoľné dve náhodné premenné X, Y platí: Ak $X \leq Y$, potom $E(X) \leq E(Y)$.

ANO +1 // v pdf vlastnosti strednej hodnoty