

Meno : J. DURICA

1. Uvažujme o náhodnom pokuse, ktorý pozostáva z opakovaného hodu normálnou hracou kockou dovtedy, kým sa nedočkáme padnutia čísla väčšieho ako 4. Nech  $X$  je náhodná veličina, ktorá predstavuje počet hodov v tomto pokuse. Vypočítajte  $P(3 \leq X < 5)$ .

0,2499

2. Nech  $X$  je náhodná veličina s hustotou  $f$  a distribučnou funkciou  $F$ .

$$\text{Nájdite } F(2), \text{ pričom } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{4}) & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}.$$

0,75

3. Nech  $X \sim Bi(6; 0.3)$ ,  $Y = \sin(\frac{\pi}{2}X)$ . Určte  $P(-0.5 \leq Y < 6)$ .

0,0274

4.  $X \sim N(2, 4^2)$ , vypočítajte  $P(|X| \leq 6)$ .

0,8186

5. Nech chyba merania má rozdelenie  $N(0, 1)$ . Aká je pravdepodobnosť toho, že chyba žiadneho z 10 takýchto meraní nepresiahne hodnotu 2 a je kladná (pričom predpokladáme nezávislosť jednotlivých meraní)?

0,7944

6. Nech  $X \sim R\{1; 2; 3\}$  a  $Y \sim Bi(3; 0.5)$ , pričom  $X$  a  $Y$  sú nezávislé náhodné veličiny. Vypočítajte  $P(2 \leq X + Y < 5)$ .

0,75

7. Nech  $X \sim N(-5, 3^2)$ ,  $Y \sim N(1, 4^2)$ , pričom  $X$  a  $Y$  sú nezávislé.

Nech  $Z = X + Y$ . Vypočítajte  $E(Z)$  a  $var(Z)$ .

$E(Z)$  -4

$var(Z)$  25

8. Nech  $X \sim Bi(6; 0.3)$ , vypočítajte  $E(X^2)$ .

4,5

9. Nech  $X$  je náhodná veličina z príkladu č.2.

Vypočítajte  $med(X)$  (tj. medián).

0,4375

10.  $E(X) = 3$ ,  $var(X) = 1$ ,  $E(Y) = 5$ ,  $var(Y) = 4$ ,  $\rho(X, Y) = 0.5$ .

Vypočítajte  $var(2X - Y + E(2X - Y))$ .

0

Zápočet 2013 od: Jurek

Vypracovala: Nat. May the force be with you!

- ① Náhodný pokus, čím nepadne číslo větší jak 4.

$$P(3 \leq x < 5) \rightarrow \text{z intervalu}$$

$$P(x=3) + P(x=4)$$

Počet zlých hodů · počet dobrých

$$\left(\frac{4}{6}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{4}{6}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{20}{81} = 0,2469$$

- ② Najdi  $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

určitý integrál místo poč

však počítáš len do ②

$$\int_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \frac{3}{4} = 0,75$$

- ③ Z předchozího příkladu vypočítat medián.

Medián vypočítáš jednoduše. Nejprve vyřátáš neurčitý integrál a potom ho dáš do rovnice 0,5.

(medián = střed)

$$\int \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4}\right) dx = \frac{1}{2} \left( \int 1 dx - \frac{1}{4} \int x dx \right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^2}{2} = \left[ \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} \right] \text{ do rovnice}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} = \frac{1}{2}$$

$$-x^2 + 8x - 8 = 0$$

$x_1 = 6,82$  (mimo interval takže sčítajeme  $0 < x < 4$ )

$$x_2 = 1,1754$$



③  $X \sim Bi(6; 0,3)$   $P(-0,5 \leq Y < 6)$   
 $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2} X\right)$

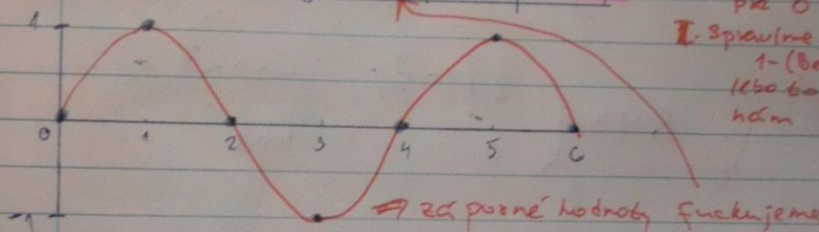
tieho hodnoty dosahat  
 ko rovnice (treba dat)  
 v x-osiach alebo miesto T použiť 180°

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	0	1	0	-1	0	1	0
H(Y)	-1	0	1	0	-1	0	-1
f(Y)	X	0,502048	0,312432				

Máme 2 možnosti:

I. Budeme dávať Bernoulliho p=0,3

II. Správne kopie 1-(Bernoulli-1)  
 keďže je istina do  
 hám nevyhovuje



I. Bernoulli p=0,3

Bernoulli vzorec:  $P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$P_{x=0}$ :

$$\binom{6}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^6 + \binom{6}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 + \binom{6}{4} \cdot 0,3^4 \cdot 0,7^2 + \binom{6}{6} \cdot 0,3^6 \cdot 0,7^0 = 0,502048$$

$P_{x=1}$ :

$$\binom{6}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^5 + \binom{6}{5} \cdot 0,3^5 \cdot 0,7^1 = 0,312432$$

$n$  = počet pokusov celkom  
 $x$  = počet pokusov kedy jav nastane  
 $h-x$  = -x- kedy jav nenastane  
 $p$  = pravdepodobnosť že jav nastane  
 $q$  = -"- že jav nenastane

Teda už len sečítat:

$$0,502048 + 0,312432 = 0,81448$$

II. 1-Bernoulli

$$1 - \left( \binom{6}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^3 \right) = 1 - 0,18522 = 0,81478$$

4.  $X \sim N(2, 4^2)$

$x = x - \text{miera}$

sigma

odmnožiť

$P(|x| \leq 6)$

$P(-6 < x \leq 6)$

$P\left(\frac{-6-2}{4} < \frac{x-2}{4} < \frac{6-2}{4}\right)$

$FN = F(b) - F(a) = FN(1) - FN(-2)$

$FN(1) - (1 - FN(2))$

$\rightarrow -2$  by si v tabuľke asi

každú hodnotu takto to

musíš zapísať takto

$0,84134 - (1 - 0,97725)$

$= 0,81859$

5.  $N(0, 1)$

$P(x < 2)$

len vyhľadáv v tabuľke  $FN(2) = 0,97725$

10merania  $= 0,97725^{10} = 0,794432$

6.

$X \sim R\{1, 2, 3\}$

$P(2 \leq x + Y < 5)$

$Y \sim Bi(3; 0,5)$

$f(x) = \frac{1}{n}$

$H(x)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$F(1)$	$1/3$	$2/3$	$1/3$

$H(Y)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$f_1(\cdot)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

$\sum_{x=0}^3 \binom{3}{x} \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{3-x}$

$\frac{2 \cdot f_0 + 3 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + f_3}{3}$

$= \frac{2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8}}{3}$

$= \frac{5}{4}$

7.

$X \sim N(-5, 3^2)$

$Z = X + Y$

$E(Z) = -4$  1. parameter

$Y \sim N(1, 4^2)$

very easy:

$var(Z) = 25$  2. parameter

spočítam priet. parametre aduť.

$Z \sim N(-4, 25)$

(2 body zadarmo)



8.  $X \sim \text{Bi}(6; 0,3)$   $E(X^2)$

$$\sum_{x=0}^6 \binom{6}{x} \cdot x^2 \cdot 0,3^x \cdot 0,7^{6-x}$$

→ to line to kalkulace, kto  
nema' nech napise  
je ziskov

$$= \frac{9}{2} = 4,5$$

10.

$$E(X) = 3$$

$$E(Y) = 5$$

$$\text{ro}(X, Y) = 0,5$$

$$\text{var}(X) = 1$$

$$\text{var}(Y) = 4$$

$$\text{var}(2X - Y + E(2X - Y))$$

to sa bude jak konstanta

vzorec:  $\text{var}(X + a) = \text{var}(X)$

takze nevimas si to

vzorec:  $\text{var}(X - Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2 \text{cov}(X, Y)$

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + b^2 \text{var}(Y) + 2ab \text{cov}(X, Y)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(2X - Y) &= \text{var}(2X) + \text{var}(Y) - 2 \text{cov}(2X, Y) \\ &= 4 \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2 \cdot 2 \cdot 1 \text{cov}(X, Y) \\ &= 4 \cdot 1 + 4 - 4 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$= 4$$

vzorec:

$$\text{ro}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

$$0,5 = \frac{\text{cov}(X, Y)}{1 \cdot 2}$$

$$\text{cov}(X, Y) = 1$$

Meno :

1. Nech  $X \sim Bi(5; 0.25)$ , vypočítajte  $E(X^2)$ .
2. Nech chyba merania má rozdelenie  $N(0, 1)$ . Aká je pravdepodobnosť toho, že chyba každého z 5 takýchto meraní je aspoň 0.1 a kladná (pričom predpokladáme nezávislosť jednotlivých meraní) ?
3. Nech  $X$  je náhodná veličina s hustotou  $f$  a distribučnou funkciou  $F$ .  
Nájdite  $F(3)$ , pričom  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - \frac{x}{6}) & 0 < x < 6 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$ .
4. Nech  $X$  je náhodná veličina z príkladu č.3.  
Vypočítajte  $med(X)$  (tj. medián).
5. Nech  $X \sim R\{0; 1; 2\}$  a  $Y \sim Bi(4; 0.5)$ , pričom  $X$  a  $Y$  sú nezávislé náhodné veličiny. Vypočítajte  $P(-1 \leq X \cdot Y < 3)$ .
6. Nech  $X \sim Bi(5; 0.25)$ ,  $Y = 2\cos(\frac{\pi}{2}X)$ . Určte  $P(-4 \leq Y < 0.5)$ .
7.  $E(X) = -2$ ,  $var(X) = 2$ ,  $E(Y) = 3$ ,  $var(Y) = 8$ ,  $\varrho(X, Y) = -0.5$ .  
Vypočítajte  $var(3Y - 2X + E(2X - 3Y))$ .
8. Uvažujme o náhodnom pokuse, ktorý pozostáva z opakovaného hodu normálnou hracou kockou dovtedy, kým sa nedočkáme padnutia čísla menšieho ako 4. Nech  $X$  je náhodná veličina, ktorá predstavuje počet hodov v tomto pokuse. Vypočítajte  $P(2 \leq X < 5)$ .
9. Nech  $X \sim N(6, 6^2)$ ,  $Y \sim N(8, 8^2)$ , pričom  $X$  a  $Y$  sú nezávislé.  
Nech  $Z = X + Y$ . Vypočítajte  $E(Z)$  a  $var(Z)$ .  
 $E(Z)$    
 $var(Z)$
10.  $X \sim N(1, 10^2)$ , vypočítajte  $P(|X| \leq 4)$ .



Zápočet 2013

Příkladů ve rovnání jako v předchozím zápočtu, takže už toliko nekomplikujem.

Vypracovala: Nat. *May the force be with you!*

①  $X \sim \text{Bi}(5; 0,25)$

$$\sum_{x=0}^5 \binom{5}{x} \cdot x \cdot 0,25^x \cdot 0,75^{5-x} = \frac{5}{2} = 2,5$$

doplnok do 1

② jedno meranie:  $P(X > 0,1) = 1 - P(X \leq 0,1)$

$$= 1 - F_n(0,1)$$

5 meraní: 0,46014

$$= 1 - 0,53983 = 0,46017 = 0,020634$$

③  $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6}\right) & 0 < x < 6 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

$$\int_0^3 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6}\right) dx = \frac{3}{4}$$

④ Mediana

$$\int \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6}\right) dx = \frac{1}{3} \left( \int 1 dx - \frac{1}{6} \int x dx \right)$$

$$= \left[ \frac{1}{3} x - \frac{x^2}{36} \right]$$

$$\frac{x}{3} - \frac{x^2}{36} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 36$$

$$-x^2 + 12x - 18 = 0$$

$$x_1 = 10,8426$$

$$x_2 = 1,15735$$

⑤  ~~$X \sim \text{Bi}(5; 0,25)$~~   $X \sim R(0; 1; 2)$

$$P(-1 \leq X \leq 3)$$

$Y \sim \text{Bi}(4; 0,5)$

$H(X)$	$x_0$	$x_1$	$x_2$
$F_n(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$H(Y)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$F_2(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$\sum_{x=0}^4 \binom{4}{x} \cdot 0,5^x \cdot 0,5^{4-x}$$

$$1 - (F(1,3) + F(2,2) + F(2,3) + F(2,4))$$

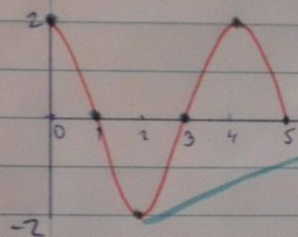
$$= 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{3}$$

⑥  $X \sim Bi(5; 0,25)$   
 $Y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right)$

$P(-4 \leq Y < 0,5)$

X	0	1	2	3	4	5
Y	2	0	-2	0	2	0

H <sub>Y</sub>	-2	0	2
F <sub>Y</sub>			



$$1 - \left( \binom{5}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^5 + \binom{5}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75^1 \right) =$$

$$= \frac{383}{512} = 0,748046875$$

⑦  $E(X) = -2$        $E(Y) = 3$        $\rho(X, Y) = -0,5$   
 $\text{var}(X) = 2$        $\text{var}(Y) = 8$   
 $\text{var}(3Y - 2X + E(2X - 3Y))$

~~var(3Y - 2X) = 9var(Y) + 4var(X) - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \rho(X, Y)~~

$$\text{var}(3Y - 2X) = 9 \cdot 8 + 4 \cdot 2 - 12 \cdot (-2)$$

$$= 104$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

$$-0,5 = \frac{\text{cov}(X, Y)}{4}$$

$$\text{cov}(X, Y) = -2$$



8) čakame na padnutie menšie jak 4.

$$P(2 \leq X < 5)$$

$$P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{10} = 0,4375$$

9)  $X \sim N(6, 6^2)$   
 $Y \sim N(8, 8^2)$

$$Z = X + Y$$

$$E(Z) = 14$$

$$\text{var}(Z) = 100$$

$$Z \sim N(14, 100)$$

10.

$$X \sim N(1, 10^2)$$

$$P(|X| \leq 4)$$

$$P(-4 \leq X \leq 4)$$

$$P\left(\frac{-4-1}{10} \leq \frac{X-1}{10} \leq \frac{4-1}{10}\right)$$

$$F_N > F(b) - F(a) = F_N\left(\frac{3}{10}\right) - F_N\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$F_N\left(\frac{3}{10}\right) - \left(1 - F_N\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$0,61791 - (1 - 0,69146)$$

$$= 0,30937$$

## 2. zápočet, Pravdepodobnosť a štatistika, 3.5.2013, skupina C

1. Pokus spočíva v hádzaní normálnou kockou, kockou hádzame pokým dvakrát nepadne šestka (nie nevyhnutne za sebou). Nech  $X$  je náhodná veličina, ktorá predstavuje počet hodov v tomto pokuse.

Vypočítajte  $P(3 \leq X < 5)$ .

{0.10424}

2. Nájdite  $F(1)$ , z funkcie  $f(x) = \frac{1}{6}(4x - 1)$  pre  $0 < x < 2$   
0 inak

{1/6}

3.  $X \sim R(-1; 0; 1)$ ,  $Y \sim Bi(3; 0.25)$  Vypočítajte  $P(-1 \leq X + Y < 3)$ .

{...}

4.  $X \sim R\{1; 2; 3; 4; 5\}$  Vypočítajte  $E(X^2)$ .

{11}

5.  $X \sim N(4, 4^2)$  Vypočítajte  $P(|X| \leq 2)$

{0.2417}

6.  $X \sim \text{Exp}(\lambda = 0.004)$  určuje životnosť výrobku. aká je pravdepodobnosť, že pri piatich výrobkoch  $X$  nepresiahne hodnotu 250,

ak  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$  pre  $x > 0$   
0 inak

{0.1009}

7.  $X \sim Bi(5; 0.3)$ ,  $Y = (X - 2)^2$ . Vypočítajte  $P(-1 \leq Y < 2)$ .

{...}

8.  $X \sim N(4, 9^2)$ ,  $Y \sim N(4, 12^2)$ ,  $Z = X + Y$ . Vypočítajte  $E(Z)$ ,  $\text{var}(Z)$

{ $E=8$ ;  $\text{var}=225$ }

9. Vypočítajte horný kvartil z funkcie z príkladu 2.

{1.7707}

10.  $E(X) = 5$ ,  $\text{var}(X) = 4$ ,  $E(Y) = 3$ ,  $\text{var}(Y) = 2$ ,  $E(X \cdot Y) = 16$ ,

Vypočítajte  $\text{var}(5X - 2Y + E(5X - 2Y))$

{107}

Pozn. Pri otázkach alebo častiach otázok, ktoré sú kurzívou a sú podčiarknuté si nie som istý či si ich dobre pamätám, takže ak sa to niekomu bude javiť ako nejaký blud tak to bolo asi nejako inak zadané...



Zápočet 2013 3.5. 24. C

Vypracovala: Nat. May the force be with you!

①  $P(3 \leq x < 5)$

$P_3: \begin{matrix} 600 \\ 060 \end{matrix} \} 2$

$P_4: \begin{matrix} 6006 \\ 0066 \\ 0606 \end{matrix} \} 3$

$2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} + 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,1042$

vyhovující dva sestavy nevhovující raz dačo iné

②  $F(1)$

$f_x = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x-1) & \text{pre } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{1}{6}(4x-1) dx = \frac{1}{6}$

③ Horný kvartil ( $3/4$ )

$\int \frac{1}{6}(4x-1) dx = \frac{1}{6} \cdot 4 \int x dx - \int 1 dx =$

$= \left[ \frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} \right]$

$\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} = \frac{3}{4} \quad | \cdot 12$

$4x^2 - 2x - 9 = 0$

$x_1 = 1,77069$

$x_2 = -1,27069$

mimo intervalu

③  $X \sim D(-1, 0, 1)$

$Y \sim Bi(3, 0,25)$

$H_X$	-1	0	1
$f_X(\cdot)$	1/3	1/3	1/3

$H_Y$	0	1	2	3
$f_Y(\cdot)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$\sum_{x=0}^3 \binom{3}{x} \cdot 0,25^x \cdot 0,75^{3-x}$

$P(-1 \leq X+Y < 3)$

1- nevhovujúce

# mimo intervalu

$0+3$

$1+2$

$2+3$

$1 - \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{64} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{64} \right) = \frac{181}{192} = 0,9427$

⑤  $X \sim N(4, 4^2)$

$(P|X| \leq 2)$

$-2 < X \leq 2$

$\frac{-2-4}{4} < \frac{X-4}{4} < \frac{2-4}{4}$

$F_N = F_b - F_a = F_N\left(-\frac{1}{2}\right) - F_N\left(-\frac{6}{4}\right)$

$\left(1 - F_N\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \left(1 - F_N\left(\frac{6}{4}\right)\right)$

$\left(1 - 0,93319\right) - \left(1 - 0,69146\right)$

$= 0,24143$

⑥

$\lambda = 0,004$

$x = 250$

5 učitavkov

$-\lambda \cdot x$

$1 - e$

$= \left(1 - e^{-0,004 \cdot 250}\right)^5$

$= 0,100925$

⑦

$X \sim Bi(5; 0,3)$

$P(-1 \leq Y < 2)$

$Y = (X-2)^2$

X	0	1	2	3	4	5
Y	4	1	0	1	4	9

mimo interval

$\binom{5}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,4^3 + \binom{5}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,4^4 + \binom{5}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,4^2$

$= 0,35634$

⑧

$X \sim N(4, a^2)$

$Z = X + Y$

$Y \sim N(4, 12^2)$

$E(Z) = 8$

$Z \sim N(8, 225)$

$var(Z) = 225$

⑩

$E(X) = 5$

$E(Y) = 3$

$E(X \cdot Y) = 16$

$var(5X - 2Y + E(5X - 2Y))$

$var(X) = 4$

$var(Y) = 2$

$var(5X - 2Y) = var(5X) + var(2Y) - 2cov(5X, 2Y)$

$= 25var(X) + 4var(Y) - 2 \cdot 5 \cdot 2 cov(X, Y)$

$= 25 \cdot 4 + 4 \cdot 2 - 20 \cdot 1$

$cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 16 - 5 \cdot 3 = 1$

$= 88$