

Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Klúka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

1. prednáška

O logike a tomto kurze
Syntax výrokovkej logiky

18. februára 2019

Obsah 1. prednášky

1 Úvod

- O logike
- O tomto kurze

2 Výroková logika

- Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku
- Syntax výrokovej logiky

1.1

O logike

Čo je logika

- Logika je vedná disciplína, ktorá študuje formy usudzovania
 - ▶ filozofická, matematická, informatická, výpočtová
- Tri dôležité predmety záujmu:
 - Jazyk** zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií
 - Syntax* pravidlá zápisu tvrdení
 - Sémantika* význam tvrdení
 - Usudzovanie (inferencia)** odvodenie nových dôsledkov z doterajších poznatkov
 - Dôkaz** presvedčenie ostatných o správnosti záverov usudzovania

Poznatky a teórie

- V logike slúži **jazyk** na zápis tvrdení, ktoré vyjadrujú informácie — poznatky o svete
- Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**

Príklad 1.1 (Party time!)

Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.

Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.

Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

- P1** Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
- P2** Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
- P3** Sarah nepôjde bez Jima.

Možné stavy sveta a modely

Tvrdenie (teória) rozdeľuje triedu **možných stavov sveta** (interpretácií) na dve podtriedy:

\models stavy, v ktorých je pravdivé — **modely** tvrdenia (teórie),

$\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivé.

Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 1.2

Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty.
Zistíme, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.



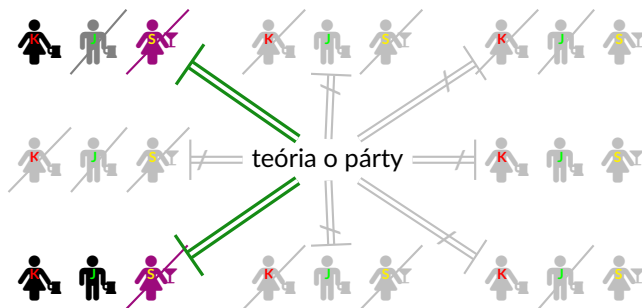
Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia,
ktoré sú pravdivé vo **všetkých modeloch** teórie

Príklad 1.3

Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad:

Sarah nepôjde na párty.



Logické usudzovanie

- Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné
- Logické dôsledky môžeme *odvodzovať* **usudzovaním** (*inferovať*)
- Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*)
a postupnosťou **úsudkov** dospievame k **záverom**

Príklad 1.4

Vieme, že (P1) ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah,
a že (P2) ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.

Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.

Teda podľa (P2) pôjde aj Kim.

Teda podľa (P1) nepôjde Sarah.

Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

- Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho **dôkazom** z premís

Usudzovacie pravidlá

Už Aristoteles zistil, že niektoré
správne úsudky sa dajú rozpoznať podľa svojej formy,
 bez ohľadu na konkrétny obsah

Ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.

Pôjde Jim.

Pôjde Kim.

Ak je dilítium dekryštalizované,
 tak antihmota neprúdi.

Dilítium je dekryštalizované.

Antihmota neprúdi.

Usudzovacie (inferenčné) pravidlo je *vzor* úsudkov
 daný formou tvrdení, s ktorými pracuje

Ak A, tak B.	}	vzory premís
A.		
<hr/>		
B.		vzor záveru

Korektné usudzovacie pravidlá a dedukcia

Korektné pravidlo odvodí z pravdivých premís pravdivý záver

Príklad 1.5

Pravidlo *modus ponens*

Ak A , tak B .

A .

B .

je korektné.

Dôkaz je teda **postupnosť použitia korektných usudzovacích pravidiel** (najlepšie *samozrejmych* pre čitateľa dôkazu)

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba korektné pravidlá

Nededuktívne pravidlá

Niektoré **nie korektné** usudzovacie pravidlá sú prakticky užitočné:

Indukcia — zovšeobecnenie:

Videl som tisíc havranov.

Žiaden nebol inej farby ako čiernej.

Všetky havrany sú čierne.

Platí aj pre biele bicykle?

Abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov:

Ak je batéria vybitá, auto nenašartuje.

Ak je nádrž prázdna, auto nenašartuje.

Nádrž nie je prázdna.

Auto nenašartovalo.

Batéria je vybitá.

Čo ak nám kuna
prehrýzla káble?

Usudzovanie na základe analógie (podobnosti)

Venuša má atmosféru, podobne ako Zem.

Na Zemi sa prejavuje skleníkový efekt.

Na Venuši sa prejavuje skleníkový efekt.

A čo: Atmosféra
Zeme je dýchatelná?

Nededuktívne pravidlá

- **Závery nededuktívnych pravidiel** treba považovať za **hypotézy** — plauzibilné, ale **neoverené** tvrdenia
- Hypotézy je **nutné preverovať!**
- Niektoré špeciálne prípady nededuktívnych pravidiel sú korektné, napríklad *matematická indukcia*
- Usudzovanie s nededuktívnymi pravidlami je teda *hypotetické*
- Hypotetické usudzovanie je dôležité pre umelú inteligenciu
 - ▶ Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský predmet)
- **V tomto kurze sa budeme zaoberať iba dedukciou**

Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Miro je v posluchárni F1.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále s *d ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ak sa rozhoduje o nadstavbe alebo o vstavbe v podkroví alebo povale, vyžaduje sa zároveň súhlas všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome na najvyššom poschodí.
— *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom:
Nikto nie je dokonalý.

Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím **formálnych** jazykov

- Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam)
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte:
aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov,
programovacie jazyky, ...
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát

Formalizácia poznatkov

- S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh

Karol je trikrát starší ako Mária.

Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. \rightsquigarrow

Koľko rokov majú Karol a Mária?

$$k = 3 \cdot m$$

$$k + m = 12$$

- Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky

Príklad 1.6

Sformalizujme náš párty príklad:

- P0** Nieкто z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.
- P1** Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.
- P2** Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.
- P3** Sarah nepôjde bez Jima.

Kalkuly — formalizácia usudzovania

- Pre mnohé logiky sú známe **kalkuly** — množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú
korektné — odvodzujú iba logické dôsledky
úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky
- Kalkuly existujú aj v iných častiach matematiky
 - ▶ na počítanie s číslami, zlomkami (násobilka, aritmetika),
 - ▶ riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
 - ▶ derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

...

Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy
Sú korektné, ale nie vždy úplné

Výpočtová logika — automatizácia usudzovania

- Základná idea **výpočtovej logiky**:
 - ▶ Napíšeme program,
ktorý systematicky aplikuje pravidlá logického kalkulu,
kým neodvodí želaný dôsledok,
alebo nevyčerpá všetky možnosti (nie vždy je ich konečne veľa!)
- Skutočnosť je komplikovanejšia, ale existuje množstvo automatických usudzovacích systémov
- *Jeden z prienikov informatiky a logiky*

Výpočtová logika — aplikácie

- Overovanie, dopĺňanie, hľadanie dôkazov matematických viet
- Špecifikácia a verifikácia hardvérových obvodov, programov, komunikačných protokolov
 - ▶ Špecifikácia a verifikácia programov (3. ročník)
 - ▶ Formálne metódy tvorby softvéru (magisterský)
- Logické programovanie
 - ▶ Programovacie paradigmy (3. ročník)
 - ▶ Výpočtová logika (magisterský)
 - ▶ Logické programovanie ASP (magisterský)
- Databázy — odvodzovanie neuložených faktov, optimalizácia dopytov
 - ▶ Deduktívne databázy (3. ročník)
- Sémantický web a integrácia dát z rôznych zdrojov
 - ▶ Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský)
 - ▶ Ontológie a znalostné inžinierstvo (magisterský)
- Analýza zákonov, regulácií, zmlúv

Spomeňte si I.1

Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých svetoch, v ktorých je pravdivá teória, je jej

- | | |
|------------------------------|-----------------------|
| A premisou, | C záverom, |
| B logickým dôsledkom, | D implikáciou. |

Spomeňte si I.2

Účelom dôkazu je presvedčiť ostatných o správnosti nášho úsudku. Preto musí pozostávať z

Spomeňte si I.3

Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodí pravdivé závery, sa nazýva:

- | | | |
|-------------------------|------------------------|----------------------|
| A abdukcia, | C formalizácia, | E indukcia, |
| B interpretácia, | D dedukcia, | F inferencia. |

1.2

O tomto kurze

Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

- | | |
|--------------------|--|
| Teoreticky | <ul style="list-style-type: none">• Jazykmi výrokovkej a predikátovej logiky, ich syntaxou a sémantikou• Korektnosťou usudzovacích pravidiel• Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulo• Automatizovateľnými kalkulmi |
| Prakticky | <ul style="list-style-type: none">• Vyjadrovaním problémov v jazyku logiky• Automatizovaním riešenia problémov použitím SAT-solverov• Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)• Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov |
| Filozoficky | <ul style="list-style-type: none">• Zamýšľanými a nezamýšľanými okolnosťami platnosti tvrdení• Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania |

Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

2.1

Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Výroky a pravdivostné hodnoty

Výrok – veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať (zväčša oznamovacia).

Príklady 2.1

- Miro je v posluchárni F1.
- Slnčná sústava má deviatu planétu.
- Mama upiekla koláč, ale Editka dostala z matematiky štvorku.
- Nieкто zhasol.

Negatívne príklady

- Toto je čudné.
- Píšte všetci modrým perom!
- Prečo je obloha modrá?

Výrokom priradujeme *pravdivostné hodnoty*

Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Operácie s výrokmi

Operácie s výrokmi – *logické spojky*

- Vytvárajú nové výroky, zložené (súvetia).
- Majú povahu *funkcií* na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov (*boolovských funkcií*), teda pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.2

Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

Negatívny príklad

Spojku „pretože“ nepovažujeme za *logickú* spojku.

Pravdivostná hodnota výroku „Emka ochorela, pretože zjedla babôčku“ sa nedá určiť funkciou na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.



(Meta) matematika výrokovkej logiky

- Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** samotný jazyk výrokovkej logiky od jeho významu a vlastne ani jednu stránku nedefinuje jasne
- V tomto kurze sa budeme snažiť byť **presní**
 - ▶ Zdanlivo budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito
- Pojmy z výrokovkej logiky budeme **definovať matematicky**
 - ▶ ako množiny, postupnosti, funkcie, atď. ←-- Matematika (1), (3)
- Na praktických cvičeniach veľa pojmov **zadefinujete programátorsky**
 - ▶ ako reťazce, slovníky, triedy a ich metódy ←-- Programovanie (1), (2)
- Budeme sa pokúšať **dokazovať** ich vlastnosti
- Budeme teda hovoriť o *formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku*
- Matematickej logike sa preto hovorí aj *meta* matematika, matematika o logike (a v konečnom dôsledku aj o matematike)

2.2

Syntax výrokovkej logiky

Syntax výrokovkej logiky

- Syntax sú pravidlá budovania viet v jazyku
- Pri formálnych jazykoch sú popísané matematicky
- Nedajte sa tým odradiť, nie je to oveľa iné ako programovanie
- Viac sa budete formálnymi jazykmi zaoberať na Úvode do teoretickej informatiky
- Naše definície vychádzajú prevažne z kníh  [Smullyan, 1979]
a  [Švejdar, 2002]

Syntax výrokovkej logiky

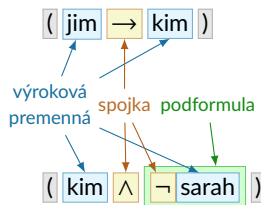
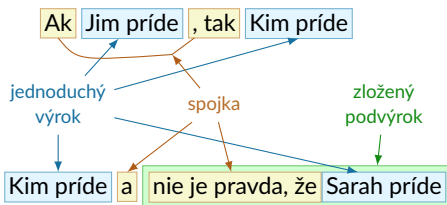
Aké tvrdenia chceme zapisovať vo výrokovkej logike?

- Jednoduché výroky, ktorých štruktúra nás nebude zaujímať

► „Miro sa nachádza v F1“, „Kim príde“

Ich formálnu verziu nazveme **výrokové premenné**

- Zložené výroky, tvorené podvýrokmi a spojkou:



Ich formálnu verziu nazveme **formuly**

- Čo sú *základné* stavebné kamene týchto výrokov?

► ...

Tieto základné prvky nazveme **symboly**

Symbody jazyka výrokovkej logiky

Definícia 2.3

Symbodymi jazyka výrokovkej logiky sú:

- **výrokové premenné** z nejakej spočítateľnej množiny
 $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$, ktorej prvkami nie sú symbody $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (\text{ a })$, ani jej prvky tieto symbody neobsahujú;
- **logické symbody (logické spojky)**: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
(nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie* a čítané „nie“, „a“, „alebo“, „ak ..., tak ...“);
- **pomocné symbody**: (a) (ľavá zátvorka a pravá zátvorka).

Spojka \neg je *unárna* (má jeden argument).

Spojky $\wedge, \vee, \rightarrow$ sú *binárne* (spájajú dve formuly).

Poznámka 2.4

Definícia je **záväzná** dohoda o význame pojmov.

Symbols, výrokové premenné

Symbol je základný pojem, ktorý matematicky nedefinujeme (netvrdíme, že je to množina alebo podobne).
Je o čosi všeobecnejší ako pojem znak.

Príklad 2.5

Ako množinu výrokových premenných \mathcal{V} môžeme zobrať všetky slová (teda konečné postupnosti) nad slovenskou abecedou a číslicami. Výrokovými premennými potom sú aj Jim, Kim, Sarah.

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, \dots , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové premenné formalizujú jednoduché výroky.

Výrokové formuly

- Povedzme, že máme množinu výrokových premenných
 $\mathcal{V} = \{\text{kim, jim, sarah}\}$
- Ako môžu vyzeráť formuly vybudované nad touto množinou?
 - ▶ Samotné premenné, napr. sarah.
 - ▶ Negácie premenných, napr. $\neg\text{sarah}$.
 - ▶ Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. $(\neg\text{kim} \vee \text{sarah})$.
 - ▶ Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr.
 $(\neg(\text{kim} \wedge \text{sarah}) \rightarrow (\neg\text{kim} \vee \neg\text{sarah}))$.
- Ako presne popíšeme, čo je formula?
Induktívnou definíciou:
 - 1 Povieme, čo sú základné formuly,
ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
 - ▶ Podobne ako 0 pri matematickej indukcii
 - 2 Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
 - ▶ Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii

Výrokové formuly

Definícia 2.6

Množina \mathcal{E} všetkých **výrokových formúl** nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- i každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z \mathcal{E} (hovoríme jej **atomická formula** alebo iba **atóm**);
- ii ak A je výroková formula z \mathcal{E} , tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z \mathcal{E} (**negácia** formuly A);
- iii ak A a B sú výrokové formuly z \mathcal{E} , tak aj $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú výrokovými formulami z \mathcal{E} (nazývanými **konjunkcia**, **disjunkcia**, **implikácia** formúl A a B).

Dohoda

Výrokové formuly skráteno nazývame iba *formuly* a označujeme ich veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z , podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové formuly

Príklad 2.7

Nech $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$.

Ako vyzerá množina \mathcal{E} všetkých výrokových formúl nad \mathcal{V} ?

$\mathcal{E} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah},$	podľa (i)
$\neg\text{kim}, \neg\text{jim}, \neg\text{sarah},$	podľa (ii)
$(\text{kim} \wedge \text{kim}), (\text{kim} \wedge \text{jim}), (\text{kim} \wedge \text{sarah}),$	podľa (iii) pre \wedge
$(\text{kim} \wedge \neg\text{kim}), (\text{kim} \wedge \neg\text{jim}), (\text{kim} \wedge \neg\text{sarah}),$	
$(\text{jim} \wedge \text{kim}), (\text{jim} \wedge \text{jim}), (\text{jim} \wedge \text{sarah}),$	
$(\text{jim} \wedge \neg\text{kim}), (\text{jim} \wedge \neg\text{jim}), (\text{jim} \wedge \neg\text{sarah}),$	
$(\neg\text{kim} \wedge \text{kim}), (\neg\text{kim} \wedge \text{jim}), (\neg\text{kim} \wedge \text{sarah}), \dots,$	
$(\neg\text{jim} \wedge \neg\text{sarah}), \dots,$	podľa (iii) pre \rightarrow
$(\text{sarah} \vee (\text{kim} \rightarrow \text{jim})), \dots,$	a potom pre \vee
$(\neg(\text{kim} \wedge \text{sarah}) \vee (\neg\text{jim} \rightarrow \neg\text{sarah})), \dots\}$	podľa (iii) pre $\wedge,$ \rightarrow, \vee

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.8

Vytvárajúcou postupnosťou nad množinou výrokových premenných \mathcal{V} je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen

- je výroková premenná z \mathcal{V} , alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X .

Tvrdenie 2.9

Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A .

Vytvárajúca postupnosť

Príklad 2.10

Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg \text{kim} \rightarrow (\text{jim} \vee \text{sarah}))$.

Literatúra

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnosť, složitost, nutnosť*. Academia, 2002. Prístupné aj na <http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf>.