

---

## Matematika 4 — Logika pre informatikov

### Teoretická úloha 3

---

Riešenie teoretickej časti tejto sady úloh **odovzdajte** najneskôr v pondelok **11. marca 2019 o 11:30** na prednáške.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh).

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>.

**Cvičenie 1.** (2.4.3) Je daná teória  $T$  nad  $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$ :

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (p \rightarrow (q \wedge r)), \\ ((q \rightarrow p) \vee (s \rightarrow r)), \\ (\neg p \rightarrow (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z  $T$  vyplývajú nasledovné formuly:

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) $((p \wedge q) \rightarrow r),$ | c) $\neg r,$                                       |
| b) $((p \wedge q) \rightarrow s),$ | d) $((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)).$ |

**Cvičenie 2.** (2.4.4) V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil štyroch podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonalda, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

- ( $A_1$ ) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.
- ( $A_2$ ) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.
- ( $A_3$ ) Taylor nikdy nepracuje bez McDonalda.
- ( $A_4$ ) McDonald je vinný, ak je Brown nevinný.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviňovať, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

**Cvičenie 3.** (2.4.6) Nech  $X$  a  $Y$  sú ľubovoľné výrokové formuly, nech  $T$  je ľubovoľná výroková teória. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak  $T \models \neg X$ , tak  $T \not\models X$ .
- b) Ak  $T \models (X \vee Y)$ , tak  $T \models X$  alebo  $T \models Y$ .
- c) Ak  $T \not\models X$  alebo  $T \not\models Y$ , tak  $T \not\models (X \wedge Y)$ .

**Cvičenie 4.** (2.5.1) Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl, ktoré sa zvyčajne používajú na ekvivalentné úpravy formúl, sú (sémanticky) ekvivalentné:

- b) distributívnosť  $\wedge$  cez  $\vee$ :  
 $(p \wedge (q \vee r))$  a  $((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ ;
- k) de Morganovo pravidlo pre  $\vee$ :  
 $\neg(p \vee r)$  a  $(\neg p \wedge \neg r)$ .

**Cvičenie 5.** (2.5.2) Nájdite k nasledujúcim formulám ekvivalentné formuly v CNF:

- a)  $((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p))$ ,
- b)  $((p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \wedge r))$ .

**Cvičenie 6.** (2.5.3) Určte počet klauzúl vo výsledných CNF formulách z úlohy 5.

## Hodnotená časť

**Úloha 1.** (2.4.5) V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Inšpektorka Fishcousová počas vyšetrovania zistila tieto skutočnosti:

- (A<sub>1</sub>) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
- (A<sub>2</sub>) Doyle nikdy nepracuje sám.
- (A<sub>3</sub>) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
- (A<sub>4</sub>) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Zistite, ktorí podozriví sú určite vinní a inšpektorka ich má obviňiť, ktorí sú naopak určite nevinní a inšpektorka ich musí oslobodiť, a o vine ani nevine ktorých nemožno rozhodnúť, takže budú prepustení pre nedostatok dôkazov. Svoje odpovede dokážte.

**Úloha 2.** (2.4.6) Nech  $X$  a  $Y$  sú ľubovoľné výrokové formuly, nech  $T$  je ľubovoľná výroková teória. Dokážte alebo vyvráťte:

- a) Ak  $T \models (X \rightarrow Y)$ , tak  $T \not\models X$  alebo  $T \models Y$ .
- b) Ak  $T \not\models X$  alebo  $T \models Y$ , tak  $T \models (X \rightarrow Y)$ .

**Úloha 3.** (2.5.2) K následující formule najděte ekvivalentní formuly v CNF:

$$(((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s)))$$