Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

3. prednáška

Vyplývanie a ekvivalencia

4. marca 2019

Obsah 3. prednášky

Opakovanie

Sémantika výrokovej logiky

Ohodnotenie výrokových premenných

Definícia 2.19

Nech (t, f) je usporiadaná dvojica ***pravdivostných hodnôt***, $t \neq f$, pričom hodnota t predstavuje pravdu a f nepravdu.

Ohodnotením množiny výrokových premenných $\mathcal{V}$ nazveme každé zobrazenie v množiny $\mathcal{V}$ do množiny $\{t, f\}$ (teda každú funkciu $v\colon \mathcal{V} \to \{t, f\}$).

Výroková premenná p je ***pravdivá*** pri ohodnotení v, ak $v(p) = t$.

Výroková premenná p je ***nepravdivá*** pri ohodnotení v, ak $v(p) = f$.

Splnenie formuly ohodnotením premenných

Definícia 2.22

Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných, nech (t, f) je dvojica pravdivostných hodnôt a nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Vzťah ***ohodnotenie v spĺňa formulu X*** (skrátene $v \models X$) definujeme pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ nasledovne:

- $v \models p$ vtt $v(p) = t$;
- $v \models \neg A$ vtt $v \not\models A$;
- $v \models (A \land B)$ vtt $v \models A$ a $v \models B$;
- $v \models (A \lor B)$ vtt $v \models A$ alebo $v \models B$;
- $v \models (A \rightarrow B)$ vtt $v \not\models A$ alebo $v \models B$.

Dohoda

V ďalších definíciách a tvrdeniach predpokladáme, že sme si *pevne zvolili* nejakú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a hodnoty t, f.

Splňanie formuly ohodnoteniami

Tvrdenie 2.25

Splnenie výrokovej formuly pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia (konečného počtu) výrokových premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.

Presnejšie: *Pre každú formulu X a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine výrokových premenných vyskytujúcich sa v X, platí $v_1 \models X$ vtt $v_2 \models X$.*

Dôsledok

Na preverenie všetkých možností splnenia a nesplnenia formuly X postačuje preveriť konečne veľa ohodnotení ($2^{|\mathrm{vars}(X)|}$), ktoré sa vzájomne líšia iba na množine výrokových premenných $\mathrm{vars}(X)$ vyskytujúcich sa v X.

2.4

Tautológia, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

Tautológia, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

Definície 2.24, 2.27, 2.28, 2.29

- Formulu X nazveme ***tautológiou*** (skrátene $\models X$) vtt je splnená pri každom ohodnotení výrokových premenných.
- Formulu X nazveme ***splniteľnou*** vtt je splnená pri aspoň jednom ohodnotení výrokových premenných.
- Formulu X nazveme ***nesplniteľnou*** vtt každé ohodnotenie výrokových premenných nespĺňa X.
- Formulu X nazveme ***falzifikovateľnou*** vtt je nesplnená pri aspoň jednom ohodnotení výrokových premenných.

Tautológie a (ne)splniteľnosť

Tvrdenie 2.30

Formula X je tautológia vtt keď $\neg X$ je nesplniteľná.

Dôkaz.

($\Rightarrow$) Nech X je tautológia, teda je splnená pri každom ohodnotení výrokových premenných. To znamená, že $\neg X$ je nesplnená pri každom ohodnotení (podľa definície splnenia formuly ohodnotením), a teda $\neg X$ je nesplniteľná.
($\Leftarrow$) Opačne, nech $\neg X$ je nesplniteľná. To znamená, že pri každom ohodnotení výrokových premenných je $\neg X$ nesplnená. Podľa definície spĺňania je teda X pri každom ohodnotení splnená, a teda je tautológia. $\square$

Teórie

Neformálne slovom *teória* označujeme nejaký súbor presvedčení o fungovaní sveta alebo jeho časti.

Definícia 2.31

(Výrokovologickou) teóriou nazývame každú množinu výrokových formúl.

Dohoda

Teórie budeme označovať písmenami T, S, podľa potreby s indexmi.

Príklad 2.32

Formalizácia problému pozývania známych na párty je teóriou:

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{\, & ((\mathrm{kim} \lor \mathrm{jim}) \lor \mathrm{sara}), && (\mathrm{kim} \to \neg\mathrm{sara}), \\ & (\mathrm{jim} \to \mathrm{kim}), && (\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sara}) \,\} \end{aligned}$$

Splnenie teórie, model

Definícia 2.33

Nech T je teória, nech v je ohodnotenie výrokových premenných.
Ohodnotenie v ***spĺňa teóriu T*** (skrátene $v \models T$) vtt v spĺňa každú formulu X z množiny T.
Spĺňajúce ohodnotenie nazývame ***modelom*** teórie T.

Príklad 2.34

Aké ohodnotenie spĺňa (teda je modelom) T_{party}?

Tvrdenie 2.35

Splnenie teórie T pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú vo formulách v T.

Presná formulácia je podobná ako pri spĺňaní formúl. Dôkaz sporom, lebo množina formúl môže byť nekonečná.

2.5

Výrokovologické vyplývanie

Splniteľnosť teórie

- Kedy je teória „zlá“?
- Keď nepopisuje žiaden svet (stav sveta).
- „Dobrá“ je teda taká teória, ktorá má aspoň jeden model.

Definícia 2.36

Teória T je ***súčasne výrokovologicky splniteľná*** (skrátene *splniteľná*) vtt existuje aspoň jeden model T.
Teória je ***nesplniteľná*** vtt nie je splniteľná.

Príklad 2.37

T_{party} je súčasne splniteľná množina formúl.
$T_{\text{party}} \cup \{\text{sara}\}$ je súčasne nesplniteľná množina formúl.

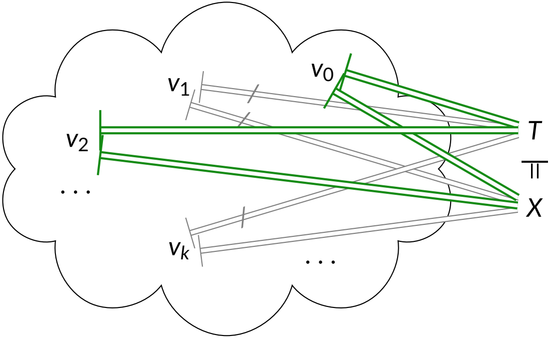
Logické dôsledky a vyplývanie

- Aký je *účel* teórií? Kedy je teória užitočná?
  - Keď z nej dokážeme *odvodiť* (uvažovaním alebo počítaním) *doteraz neznáme skutočnosti* (teda nezapísané v teórii), ktoré platia vo všetkých stavoch sveta spĺňajúcich teóriu.
- Takéto skutočnosti nazývame **logickými dôsledkami teórie** a hovoríme, že z nej *vyplývajú*.

Príklad 2.38

Všimnime si, že v *každom* ohodnotení, ktoré spĺňa T_{party},
je splnená aj premenná *kim*.
Ktorá ďalšia formula vyplýva z T_{party}?

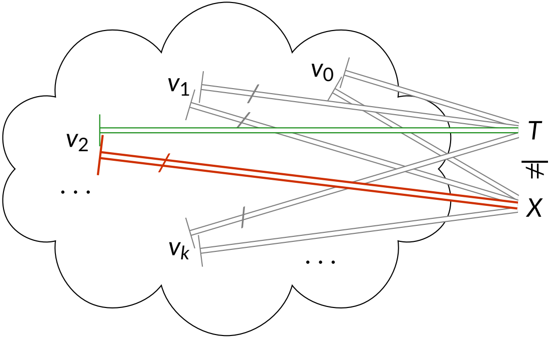
Výrokovologické vyplývanie



Definícia 2.39 (Výrokovologické vyplývanie)

Z teórie T ***výrokovologicky vyplýva*** formula X
(tiež X je ***výrokovologickým dôsledkom*** T, skrátene $T \models X$) vtt
každé ohodnotenie výrokových premenných, ktoré spĺňa T, spĺňa aj X.

Nevyplývanie



Príklad 2.40

Ktoré atomické formuly a ich negácie nevyplývajú z T_{party}?
Vyplýva z T_{party} formula $(kim \rightarrow jim)$?

Vyplývanie a (ne)splniteľnosť

Použitie SAT solvera na rozhodovanie vyplývania je založené na:

Tvrdenie 2.41

Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt množina $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.

Prečo je to tak?

Vyplývanie a (ne)splniteľnosť — dôkaz

Dôkaz.

Nech $T = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$.
($\Rightarrow$) Predpokladajme, že X vyplýva z množiny T. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie $\mathcal{V}$. Potrebujeme ukázať, že v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$. Máme dve možnosti:

- Ak v nespĺňa T, tak nespĺňa niektorú formulu X_i z T. Formula X_i patrí aj do $T \cup \{\neg X\}$, preto v nespĺňa ani $T \cup \{\neg X\}$.
- Ak v spĺňa T, tak v musí spĺňať aj X (definícia vyplývania). Potom ale v nespĺňa $\neg X$, a teda v nespĺňa ani $T \cup \{\neg X\}$.

V oboch prípadoch v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme zovšeobecniť, že žiadne v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$, teda $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.
($\Leftarrow$) Opačne, nech $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná a nech v je ľubovoľné ohodnotenie $\mathcal{V}$. Potrebujeme ukázať, že ak v spĺňa T, tak potom v spĺňa aj X. Ak v spĺňa T, potom spĺňa každé X_i. Keďže ale $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná, v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$, preto v musí nespĺňať $\neg X$ (jediná zostávajúca formula z $T \cup \{\neg X\}$), čo znamená, že v spĺňa X. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme zovšeobecniť, že pre každé v platí, že ak v spĺňa T, tak v spĺňa aj X, teda X vyplýva z T. $\square$

Nezávislosť

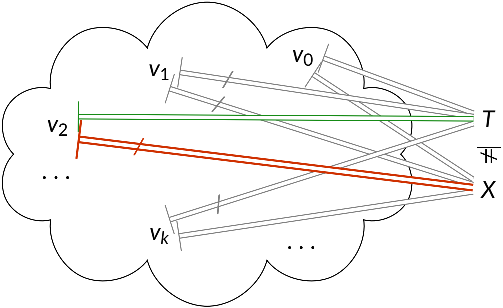
Definícia 2.42

Formula X je ***nezávislá*** od teórie T, ak existuje dvojica ohodnotení v_1, v_2 spĺňajúcich T, pričom v_1 spĺňa X, ale v_2 nespĺňa X.

Príklad 2.43

Ktorá atomická formula je nezávislá od T_{party}?
Je aj jej negácia nezávislá od T_{party}?

Nevyplývanie a negácia formuly



Otázka

Ak z T **ne**vyplýva formula X, je pravda, že z T vyplýva formula $\neg X$?

Vzťahy vyplývania, implikácií a tautológií

Tvrdenie 2.44

Nech S a T sú teórie, $S \subseteq T$, A je formula.
Ak $S \models A$, tak $T \models A$.

Tvrdenie 2.45

Nech T je teória, nech A, B, A_1, A_2, …, A_n sú formuly.

- a $T \cup \{A\} \models B$ *vtt* $T \models (A \to B)$.
- b $\{\} \models A$ *vtt* A *je tautológia* ($\models A$).
- c *Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*
  - i $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$
  - ii $\{((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n)\} \models B$
  - iii $\{\} \models ((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$
  - iv $\models (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$

Hlasujte

Spomeňte si III.1

Formula X vyplýva z teórie T vtt každý model T spĺňa X.

Pravda alebo nepravda?

2.6

Ekvivalencia formúl

Ekvivalencia formúl

Ako vieme pomocou doterajších **sémantických** pojmov vyjadriť, že dve formuly sú ekvivalentné?

Definícia 2.46

Dve formuly X a Y sú ***(výrokovologicky) ekvivalentné*** ($X \Leftrightarrow Y$) vtt pre každé ohodnotenie v výrokových premenných platí, že v spĺňa X vtt v spĺňa Y.

Ekvivalencia formúl a skratka $\leftrightarrow$

Ako súvisí sémanticky zadefinovaná ekvivalencia formúl so skratkou $\leftrightarrow$?

Podľa dohody z 2. prednášky je $(X \leftrightarrow Y)$ je skráteným zápisom $((X \rightarrow Y) \land (Y \rightarrow X))$.

Tvrdenie 2.47

Formuly X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné vtt formula $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

„je tautológia“

Skrátene: Pre všetky formuly X a Y platí, že $X \Leftrightarrow Y$ vtt $\models (X \leftrightarrow Y)$.

sémantická ekvivalencia formúl („X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné“, teda „pre každé ohodnotenie v platí, že $v \models X$ vtt $v \models Y$“)

ekvivalencia slovenských výrokov („vtedy a len vtedy, keď“)

syntaktická ekvivalencia (postup. symbolov $((X \rightarrow Y) \land (Y \rightarrow X))$)

Ekvivalencia a vyplývanie

Ako súvisí ekvivalencia formúl s vyplývaním?

Tvrdenie 2.48

Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$.

Dôkaz.

($\Rightarrow$) Nech X a Y sú ekvivalentné formuly. Chceme dokázať, že $\{X\} \models Y$, teda že (podľa definície vyplývania) pre každé ohodnotenie v platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$.
Nech v je ľubovoľné ohodnotenie, nech $v \models \{X\}$. Potom $v \models X$ (podľa definície splnenia teórie), a teda $v \models Y$ (z predpokladu a podľa definície ekvivalencie). Teda platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda $\{X\} \models Y$.
Dôkaz $\{Y\} \models X$ je podobný.
($\Leftarrow$) Nech X a Y sú formuly a nech $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$. Chceme dokázať, že X a Y sú ekvivalentné.
Nech v je ľubovoľné ohodnotenie. Ak $v \models X$, tak $v \models \{X\}$ a podľa prvého predpokladu $v \models Y$. Ak $v \models Y$, tak $v \models \{Y\}$ a podľa druhého predpokladu $v \models X$. Teda $v \models X$ vtt $v \models Y$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda X a Y sú ekvivalentné. $\square$

Tranzitivita ekvivalencie

Tvrdenie 2.49 (Tranzitivita ekvivalencie)

Nech X, Y a Z sú formuly.
Ak X je ekvivalentná s Y a Y je ekvivalentná so Z,
tak X je ekvivalentná so Z.

Dôkaz.

Nech X, Y a Z sú formuly. Nech X je ekvivalentná s Y a Y je ekvivalentná so Z. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie.
Ak $v \models X$, tak $v \models Y$ podľa prvého predpokladu, a teda $v \models Z$ podľa druhého predpokladu.
Nezávisle od toho, ak $v \models Z$, tak $v \models Y$ podľa druhého predpokladu, a teda $v \models X$ podľa prvého predpokladu.
Preto $v \models X$ vtt $v \models Z$. Zovšeobecnením na všetky ohodnotenia dostávame, že X a Z sú ekvivalentné. $\square$

2.6.1
Ekvivalentné úpravy

Ekvivalentné úpravy

- Už ste určite ekvivalente upravovali formuly
- Aké kroky ste pri tom robili?

Príklad 2.50 (Nahradenie podformuly ekvivalentnou)

$$A = \neg\neg(r \land q) \qquad B = (r \land q) \qquad X = (p \to \neg \neg\neg(r \land q))$$

$$\Downarrow$$

$$Y = (p \to \neg (r \land q))$$

Nahradenie podformuly A vo formule X formulou B, ktorá je ekvivalentná s A

Pravidlá ekvivalentných úprav

Príklad 2.50 (Nahradenie podformuly ekvivalentnou)

$$A = \neg\neg(r \land q) \qquad B = (r \land q) \qquad X = (p \to \neg\,\neg\neg(r \land q)\,)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$(p \to \neg\,(r \land q)\,)$$

- Ako vieme, že A a B sú ekvivalentné?
  - Môžeme odvodiť sémanticky
  - V skutočnosti ste *dosadili* $(r \land q)$ za p v *známej ekvivalencii* medzi $\neg\neg p$ a p (princíp dvojitej negácie)

Príklad 2.51 (Dosadenie za premennú v ekvivalentných formulách)

$$C = \neg\neg\, p \qquad D = p$$

$$\rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow$$

$$A = \neg\neg\,(r \land q) \qquad B = (r \land q)$$

Korektnosť ekvivalentných úprav

Príklad 2.50

$$A = \neg\neg(r \land q) \qquad B = (r \land q) \qquad X = (p \to \neg\,\neg\neg(r \land q)\,)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$(p \to \neg\,(r \land q)\,)$$

Príklad 2.51

$$C = \neg\neg\,p \qquad D = p$$

$$\rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow$$

$$A = \neg\neg\,(r \land q) \qquad B = (r \land q)$$

- *Prečo* sú tieto úpravy *korektné* (správne)?
- Teda:
  Prečo, ak je C ekvivalentné s D,
  tak je aj A ekvivalentné s B a X ekvivalentné s Y?

Substitúcia

Oba druhy dosadení pri ekvivalentných úpravách sú *substitúcie*

Definícia 2.52 (Substitúcia)

Nech X, A, B sú formuly.
Substitúciou B za A v X (skrátene $X[A|B]$) nazývame formulu, ktorá vznikne nahradením každého výskytu A v X formulou B.

Substitúcia ako cyklus

Substitúciu si vieme predstaviť ako cyklus prechádzajúci cez X:

Substitúcia ako cyklus

def $X[A|B]$:
    $Y =$ “”
    $i = 0$
    while $i < \text{len}(X)$:
        if $X[i : i + \text{len}(A)] == A$:
            $Y += B$
            $i += \text{len}(A)$
        else:
            $Y += X[i]$
            $i += 1$
    return Y

Substitúcia rekurzívne

Substitúciu si vieme predstaviť aj ako rekurzívne definovanú operáciu:

(pu02)

Substitúcia rekurzívne

Pre všetky formuly A, B, X, Y, všetky výrokové premenné p a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \to\}$:

$$
\begin{aligned}
X[A|B] &= B, && \text{ak } A = X\\
p[A|B] &= p, && \text{ak } A \neq p\\
(\neg X)[A|B] &= \neg(X[A|B]), && \text{ak } A \neq \neg X\\
(X\ b\ Y)[A|B] &= ((X[A|B])\ b\ (Y[A|B])), && \text{ak } A \neq (X\ b\ Y).
\end{aligned}
$$

Korektnosť ekvivalentných úprav

Korektnosť ekvivalentných úprav vyjadrujú nasledujúce tvrdenia:

Tvrdenie 2.53 (Dosadenie do ekvivalentných formúl)

Nech A a B sú navzájom ekvivalentné formuly, p je výroková premenná a Y je formula. Potom formuly $A[p|Y]$ a $B[p|Y]$ sú ekvivalentné.

Veta 2.54 (Ekvivalentné úpravy)

Nech X je formula, A a B sú ekvivalentné formuly.
Potom formuly X a $X[A|B]$ sú tiež ekvivalentné.

Sémantické vlastnosti substitúcie

Obe tvrdenia o korektnosti sú dôsledkami nasledujúcej lemy:

Lema 2.55

Nech X je výroková formula, p je výroková premenná, A je formula a v je ohodnotenie výrokových premenných.
Potom $v \models X[p|A]$ vtt $v_{p|A} \models X$, kde $v_{p|A}$ je ohodnotenie, pre ktoré platí:

- $v_{p|A}(r) = v(r)$, *ak r je výroková premenná a $p \neq r$;*
- $v_{p|A}(p) = t$, *ak $v \models A$;*
- $v_{p|A}(p) = f$, *ak $v \not\models A$.*

O jej platnosti sa môžeme presvedčiť indukciou na stupeň formuly X.

Ekvivalencie pre ekvivalentné úpravy

Veta 2.56

Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly, $\top$ je ľubovoľná tautológia a $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula.
Nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

$(A \land (B \land C))$ *a* $((A \land B) \land C)$	***asociatívnosť***
$(A \lor (B \lor C))$ *a* $((A \lor B) \lor C)$	
$(A \land B)$ *a* $(B \land A)$	***komutatívnosť***
$(A \lor B)$ *a* $(B \lor A)$	
$(A \land (B \lor C))$ *a* $((A \land B) \lor (A \land C))$	***distributívnosť***
$(A \lor (B \land C))$ *a* $((A \lor B) \land (A \lor C))$	
$\neg(A \land B)$ *a* $(\neg A \lor \neg B)$	***de Morganove***
$\neg(A \lor B)$ *a* $(\neg A \land \neg B)$	***pravidlá***
$\neg\neg A$ *a* A	***dvojitá negácia***

Ekvivalencie pre ekvivalentné úpravy

Veta 2.56 (Pokračovanie)

$(A \land A)$ *a* A	***idempotencia***
$(A \lor A)$ *a* A	
$(A \land \top)$ *a* A	***identita***
$(A \lor \bot)$ *a* A	
$(A \lor (A \land B))$ *a* A	***absorpcia***
$(A \land (A \lor B))$ *a* A	
$(A \lor \neg A)$ *a* $\top$	***vylúčenie tretieho*** *(tertium non datur)*
$(A \land \neg A)$ *a* $\bot$	***spor***
$(A \to B)$ *a* $(\neg A \lor B)$	***nahradenie*** $\boldsymbol{\to}$

2.6.2
Konjunktívna a disjunktívna normálna forma

Konjunkcia a disjunkcia postupnosti formúl

Dohoda

Nech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je konečná postupnosť formúl.

- ***Konjunkciu postupnosti formúl $A_1, \ldots, A_n$***,
  teda $(((A_1 \land A_2) \land A_3) \land \cdots \land A_n)$,
  skrátene zapisujeme $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \cdots \land A_n)$, prípadne $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.
  - Konjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl ($n = 0$) označujeme $\top$.
    Chápeme ju ako ľubovoľnú tautológiu, napríklad $(p_1 \lor \neg p_1)$.
- ***Disjunkciu postupnosti formúl $A_1, \ldots, A_n$***,
  teda $(((A_1 \lor A_2) \lor A_3) \lor \cdots \lor A_n)$,
  skrátene zapisujeme $(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \cdots \lor A_n)$, prípadne $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$.
  - Disjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl označujeme $\bot$ alebo $\Box$.
    Chápeme ju ako ľubovoľnú nesplniteľnú formulu, napríklad $(p_1 \land \neg p_1)$.
- Pre $n = 1$ chápeme samotnú formulu A_1 ako konjunkciu aj ako disjunkciu jednoprvkovej postupnosti formúl A_1.

Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar

Definícia 2.57

Literál je výroková premenná
alebo negácia výrokovej premennej.

Klauzula (tiež „klauza") je *disjunkcia* literálov.

Formula v disjunktívnom normálnom tvare (DNF) je *disjunkcia* formúl,
z ktorých každá je konjunkciou literálov.

Formula v konjunktívnom normálnom tvare (CNF) je *konjunkcia* klauzúl.

Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar

Príklad 2.58

Ktoré z nasledujúcich formúl sú literálmi, klauzulami, sú v CNF, v DNF?

$$A_1 = p \qquad A_6 = ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r))$$

$$A_2 = \neg q \qquad A_7 = ((\neg p \lor q \lor \neg r) \land (q \to r))$$

$$A_3 = \Box \qquad A_8 = ((\neg p \lor \neg q) \land (p \lor r) \land (p \lor q \lor \neg r))$$

$$A_4 = (p \lor \neg q) \qquad A_9 = ((\neg p \lor (p \land r)) \land (p \lor q \lor \neg r))$$

$$A_5 = (p \land \neg q) \qquad A_{10} = ((\neg p \lor p \lor r) \land (\neg(p \lor q) \lor \neg r))$$

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.