Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

2. prednáška

Sémantika výrokovej logiky

25. februára 2019

Obsah 2. prednášky

2.2 Syntax výrokovej logiky

Symboly jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.3

Symbolmi jazyka výrokovej logiky sú:

- ***výrokové premenné*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$, (a), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- ***logické*** symboly (*logické spojky*): $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie* a čítané „*nie*“, „*a*“, „*alebo*“, „*ak …, tak …*“);
- ***pomocné*** symboly: (a) (*ľavá zátvorka* a *pravá zátvorka*).

Spojka $\neg$ je *unárna* (má jeden argument).
Spojky $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ sú *binárne* (spájajú dve formuly).

Symboly jazyka výrokovej logiky

Symboly jazyka sú matematickou formalizáciou

- základných výrokov,
- pomocných slov,
- interpunkcie,

z ktorých môžeme skladať vety/výroky.

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, …, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové formuly

Definícia 2.6

*Množina $\mathcal{E}$ všetkých **výrokových formúl** nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$* je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

1. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (hovoríme jej ***atomická formula*** alebo iba *atóm*);
2. ak A je výroková formula z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (*negácia* formuly A);
3. ak A a B sú výrokové formuly z $\mathcal{E}$, tak aj $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú výrokovými formulami z $\mathcal{E}$
(nazývanými *konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl A a B).

Výrokové formuly

Formuly sú matematickou formalizáciou výrokov (viet a súvetí, o ktorých pravdivosti má zmysel uvažovať).

Dohoda

Formuly označujeme veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby s indexmi.

Vytvárajúca postupnosť

Definícia 2.8

Vytvárajúcou postupnosťou nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen

- je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Tvrdenie 2.9

Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A.

Spomeňte si II.1

Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$?

- **A** $(p \lor \neg q \lor \neg r)$,
- **B** $(p \land \neg(q \to r))$,
- **C** $\neg(\neg(\neg p))$,
- **D** $(p \leftrightarrow \neg q)$.

Ekvivalencia

Dohoda

Pre každú dvojicu formúl $A, B \in \mathcal{E}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A))$.

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“

Množina $\mathcal{E}$ všetkých *výrokových „formúl“* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, kde platí:

i. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;
ii. ak A je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;
iii. ak A a B sú „formuly“ z $\mathcal{E}$, tak aj $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ sú „formulami“ z $\mathcal{E}$;
iv. ak A je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je „formulou“ z $\mathcal{E}$.

- Bola by potom $(jim \to kim \to \neg sarah)$ „formulou“?
- Aký by bol jej význam?

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.11 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}$ nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- *X je výroková premenná z $\mathcal{V}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}$ a jedna spojka $b \in \{\land, \lor, \to\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*

Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$$\mathit{jim}, \mathit{sarah}, \neg\mathit{jim}, \mathit{kim}, \neg\mathit{sarah}, (\neg\mathit{jim} \land \mathit{kim}), ((\neg\mathit{jim} \land \mathit{kim}) \to \neg\mathit{sarah})$$

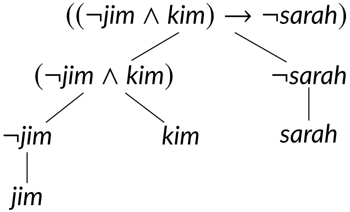
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

Vytvárajúci strom

Konštrukciu si ale vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

Vytvárajúci strom formuly

Definícia 2.12

Vytvárajúci strom T pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A\ b\ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

Syntaktické vzťahy formúl

Uvažujme formulu:

$$((\neg \mathit{jim} \land \mathit{kim}) \to \neg \mathit{sarah})$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$\mathit{sarah}, \neg \mathit{jim}, (\neg \mathit{jim} \land \mathit{kim}), \ldots$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne*/*priamo* vznikla?

$$(\neg \mathit{jim} \land \mathit{kim}) \quad \text{a} \quad \neg \mathit{sarah}$$

- Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

Podformuly

Definícia 2.13 (Priama podformula)

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Definícia 2.14 (Podformula)

Vzťah ***byť podformulou*** je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca:

- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly
  - Atóm má mieru 1, nič nemá mieru 0
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou

Lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*

Príklad 2.15

Aký je stupeň formuly $((p \lor \neg q) \land \neg(q \to p))$?

Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?

Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

Stupeň formuly

Definícia 2.16 (Stupeň formuly)

- Výroková premenná je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.16 (Stupeň formuly stručne, symbolicky)

Stupeň $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}$ definujeme pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}$ nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\deg(p) = 0,\\
&\deg(\neg A) = \deg(A) + 1,\\
&\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1.
\end{aligned}
$$

Indukcia na stupeň formuly

Veta 2.17 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}$). Ak platí súčasne

báza indukcie: *každá formula stupňa 0 má vlastnosť P,*

indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako $\deg(X)$ majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}$).

Množina výrokových premenných formuly

Definícia 2.18 (Množina výrok. prem. formuly [vars(X)])

- Ak p je výroková premenná,
  množinou výrokových premenných atomickej formuly p je $\{p\}$.
- Ak V je množina výrokových premenných formuly A,
  tak V je tiež množinou výrok. prem. formuly $\neg A$.
- Ak V_1 je množina výrok. prem. formuly A
  a V_2 je množina výrok. prem. formuly B,
  tak $V_1 \cup V_2$ je množinou výrokových premenných formúl $(A \land B)$,
  $(A \lor B)$ a $(A \to B)$.

Množina výrokových premenných formuly

Stručná definicia

Definícia 2.18 (Množina výrok. prem. formuly [vars(X)])

- Ak p je výroková premenná, tak $\mathrm{vars}(p) = \{p\}$.
- Ak A a B sú formuly, tak $\mathrm{vars}(\neg A) = \mathrm{vars}(A)$ a $\mathrm{vars}((A \land B)) = \mathrm{vars}((A \lor B)) = \mathrm{vars}((A \to B)) = \mathrm{vars}(A) \cup \mathrm{vars}(B)$.

Spomeňte si II.2

Je nasledujúce tvrdenie pravdivé? Odpovedzte áno/nie.

Vďaka jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

Spomeňte si II.3

Určte pre formulu $((p \lor \neg q) \land \neg(q \to p))$ jej:

1. priame podformuly,
2. podformuly,
3. vytvárajúci strom.

Spomeňte si II.4

Stupeň formuly $((\neg p \leftrightarrow q) \land q)$ je ....

$\mathrm{vars}(((\neg p \leftrightarrow q) \land q)) =$ ....

2.3
Sémantika výrokovej logiky

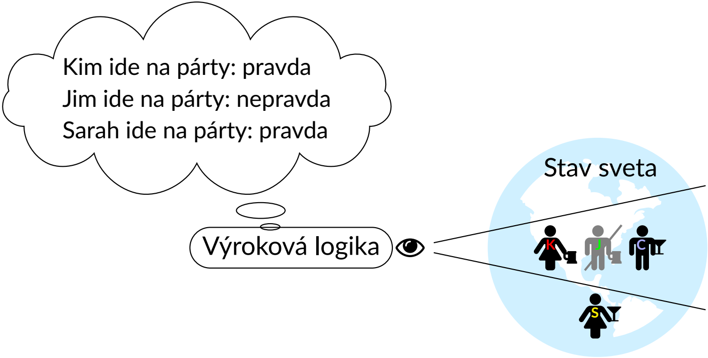
Sémantika výrokovej logiky

- Syntax jazyka výrokovej logiky hovorí iba tom,
  ako sa zapisujú formuly ako postupnosti symbolov.
- Nehovorí nič o *význame* týchto postupností.
- Ten im dáva *sémantika* jazyka výrokovej logiky.
- Za význam výrokov považujeme ich pravdivostnú hodnotu.

Predstava výrokovej logiky o svete

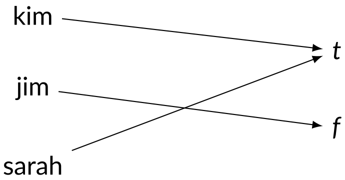
Výroková logika vníma svet *veľmi zjednodušene*.
Zaujíma ju iba

- obmedzené množstvo jednoduchých výrokov,
- ich pravdivosť alebo nepravdivosť v danom stave sveta.



Formalizácia výrokového pohľadu na svet

- V matematickej výrokovej logike jednoduché výroky predstavujú výrokové premenné
- Ako vieme *programátorsky* popísať pravdivosť výrokových premenných v nejakom stave sveta?
- A *matematicky*?



Ohodnotenie výrokových premenných

Definícia 2.19

Nech (t, f) je usporiadaná dvojica ***pravdivostných hodnôt***, $t \neq f$, pričom hodnota t predstavuje pravdu a f nepravdu.

Ohodnotením množiny výrokových premenných $\mathcal{V}$ nazveme každé zobrazenie v množiny $\mathcal{V}$ do množiny $\{t, f\}$ (teda každú funkciu $v\colon \mathcal{V} \to \{t, f\}$).

Výroková premenná p je ***pravdivá*** pri ohodnotení v, ak $v(p) = t$.

Výroková premenná p je ***nepravdivá*** pri ohodnotení v, ak $v(p) = f$.

Ohodnotenie výrokových premenných

Príklad 2.20

Zoberme $t \neq f$ (napr. $t = 1$, $f = 0$), $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{á}, \mathrm{ä}, \ldots, \mathrm{ž}, 0, \ldots, 9, \_\}^+$.
Dnešné ráno by popísalo ohodnotenie v_1 množiny $\mathcal{V}$, kde (okrem iného):

$$v_1(\mathrm{svieti\_slnko}) = t \qquad v_1(\mathrm{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Pondelkové ráno pred týždňom opisuje ohodnotenie v_2, kde okrem iného

$$v_2(\mathrm{svieti\_slnko}) = f \qquad v_2(\mathrm{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Jednu zo situácií v probléme pozývania kamarátov na párty by popísalo ohodnotenie, v ktorom (okrem iného):

$$v_3(\mathrm{sarah}) = t \qquad v_3(\mathrm{kim}) = f \qquad v_3(\mathrm{jim}) = t$$

Prečo „okrem iného“?

Kde v informatickej praxi **nie je** $f = 0$ a $t = 1$?

Splňanie výrokových formúl

- Na formulu sa dá pozerať ako na **podmienku**, ktorú stav sveta buď **spĺňa** (je v tomto stave pravdivá) alebo **nespĺňa** (je v ňom nepravdivá).
- Z pravdivostného ohodnotenia výrokových premenných v nejakom stave sveta, vieme *jednoznačne* povedať, ktoré formuly sú v tomto stave splnené.

Spĺňanie výrokových formúl

Príklad 2.21

Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{a, \dots, z\}^+$, také že

$$v_3(\text{kim}) = t \qquad v_3(\text{jim}) = f \qquad v_3(\text{sarah}) = t.$$

Spĺňa svet s týmto ohodnotením formulu $(\neg\text{jim} \rightarrow \neg\text{sarah})$?
Zoberieme vytvárajúcu postupnosť, prejdeme ju zľava doprava:

Formulu	jim	sarah	$\neg$jim	$\neg$sarah	$(\neg\text{jim} \rightarrow \neg\text{sarah})$
ohodnotenie v_3	nespĺňa	spĺňa	spĺňa	nespĺňa	nespĺňa

Spĺňanie výrokových formúl — vytvárajúci strom

Príklad 2.21 (pokračovanie)

$$v_3(\text{kim}) = t \qquad v_3(\text{jim}) = f \qquad v_3(\text{sarah}) = t.$$

Iná možnosť je použiť vytvárajúci strom:

$(\neg\text{jim} \to \neg\text{sarah})$ …… v_3 nespĺňa

v_3 spĺňa …… $\neg\text{jim}$ $\qquad$ $\neg\text{sarah}$ …… v_3 nespĺňa

v_3 nespĺňa …… jim $\qquad$ sarah …… v_3 spĺňa

Spĺňanie výrokových formúl — program

- Proces zisťovania, či ohodnotenie spĺňa formulu, vieme naprogramovať:

```
def satisfies(v, A):
    ...
```

- Veľmi podobne vieme zadefinovať splnenie matematicky.

Spĺňanie výrokových formúl — definícia

Definícia 2.22

Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- v *spĺňa* atomickú formulu p vtt $v(p) = t$;
- v *spĺňa* formulu $\neg A$ vtt v *nespĺňa* A;
- v *spĺňa* formulu $(A \land B)$ vtt v *spĺňa* A a v *spĺňa* B;
- v *spĺňa* formulu $(A \lor B)$ vtt v *spĺňa* A alebo v *spĺňa* B;
- v *spĺňa* formulu $(A \to B)$ vtt v *nespĺňa* A alebo v *spĺňa* B.

Dohoda

- Skratka *vtt* znamená *vtedy a len vtedy, keď*.
- Vzťah ***ohodnotenie v spĺňa formulu X*** skrátene zapisujeme $v \models X$, *ohodnotenie v nespĺňa formulu X* zapisujeme $v \not\models X$.
- Namiesto v *(ne)spĺňa* X hovoríme aj X *je (ne)pravdivá pri* v.

Splňanie výrokových formúl — definícia

Definícia 2.22 (symbolicky)

Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

$$\begin{array}{lll} v \models p & \text{vtt} & v(p) = t; \\ v \models \neg A & \text{vtt} & v \not\models A; \\ v \models (A \land B) & \text{vtt} & v \models A \text{ a } v \models B; \\ v \models (A \lor B) & \text{vtt} & v \models A \text{ alebo } v \models B; \\ v \models (A \to B) & \text{vtt} & v \not\models A \text{ alebo } v \models B. \end{array}$$

Vzťah $\models$ je súčasťou programovacích jazykov — vyhodnocovanie boolovských výrazov

Spĺňanie výrokových formúl — príklad

Príklad 2.23

Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \ldots, \mathrm{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathrm{kim}) = t \qquad v_3(\mathrm{jim}) = f \qquad v_3(\mathrm{sarah}) = t.$$

Zistime, ktoré z formúl

$$((\mathrm{kim} \lor \mathrm{jim}) \lor \mathrm{sarah})$$

$$(\mathrm{kim} \to \neg\mathrm{sarah}) \qquad (\mathrm{jim} \to \mathrm{kim}) \qquad (\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sarah})$$

ohodnotenie v_3 spĺňa a ktoré nespĺňa.

$\deg(X)$	$v_3 \models X$	$v_3 \not\models X$
0	kim, sarah	jim
1	$\neg$jim, (kim $\lor$ jim), (jim $\to$ kim)	$\neg$sarah
2	((kim $\lor$ jim) $\lor$ sarah)	(kim $\to$ $\neg$sarah)
3		($\neg$jim $\to$ $\neg$sarah)

2.4 Tautológie, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

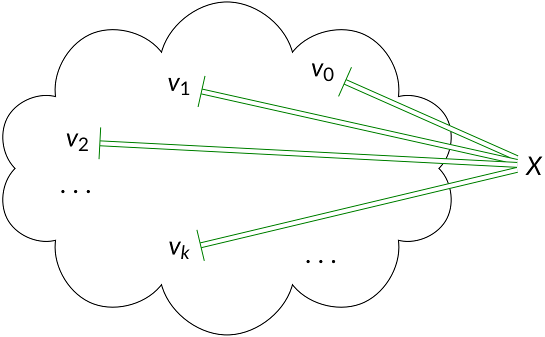
Spĺňanie z hľadiska formuly

- Predchádzajúca definícia a príklad:
  spĺňanie **mnohých formúl jedným ohodnotením** (stavom sveta)
- Obráťme perspektívu:
  spĺňanie **jednej formuly mnohými ohodnoteniami**
- Ktoré stavy sveta vyhovujú podmienke vyjadrenej formulou?

Dohoda

V definíciách a tvrdeniach predpokladáme, že sme si *pevne zvolili* nejakú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a hodnoty t, f.
Formulou rozumieme formulu nad množinou výrok. prem. $\mathcal{V}$.
Ohodnotením rozumieme ohodnotenie množiny výrok. prem. $\mathcal{V}$.

Tautológia



Definícia 2.24

Formulu X nazveme ***tautológiou*** (skrátene $\models X$)
vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** X
(teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných v platí $v \models X$).

Tautológia — testovanie

- Ak máme nekonečne veľa výrokových premenných,
  máme aj nekonečne veľa ohodnotení
- Musíme skúmať **všetky**, aby sme zistili, či je formula X tautológiou?

Tautológia — testovanie

Tvrdenie 2.25

Splnenie výrokovej formuly pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia konečného počtu výrokových premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.

Presnejšie:

Pre každú formulu X a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine $\mathrm{vars}(X)$ *výrokových premenných vyskytujúcich sa v X,*
platí $v_1 \models X$ vtt $v_2 \models X$.

- Takže stačí skúmať ohodnotenia, ktoré sa **líšia** na výrokových premenných **vyskytujúcich** sa v X, ktorých je iba konečne veľa
- **Koľko** je takých ohodnotení?

Tautológia — testovanie

Príklad 2.26

Zistime, či je $X = (\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q))$ tautológiou.
Preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v X:

v							
p	q	$(p \land q)$	$\neg(p \land q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \lor \neg q)$	$(\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q))$
f	f	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
t	f	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$
f	t	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
t	t	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$

Pretože všetky skúmané ohodnotenia spĺňajú X, je X tautológiou.

Ohodnotenia zhodujúce sa na premenných formuly

Dôkaz.

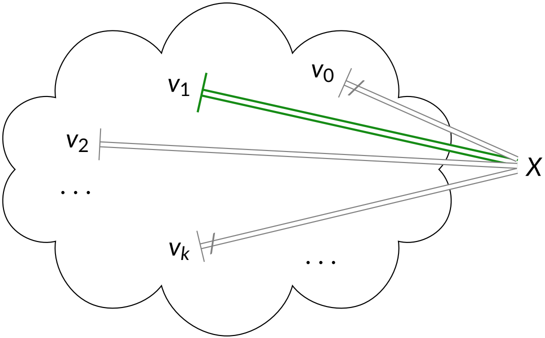
Indukciou na stupeň formuly X.

Báza: Nech X je stupňa 0. Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu a definície stupňa musí byť $X = p$ pre nejakú výrokovú premennú. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X, teda aj na p. Podľa definície spĺňania $v_1 \models p$ vtt $v_1(p) = t$ vtt $v_2(p) = t$ vtt $v_2 \models p$.

Krok: Nech X je stupňa $n > 0$ a tvrdenie platí pre všetky formuly stupňa nižšieho ako n (indukčný predpoklad). Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X. Podľa definície stupňa a jednoznačnosti rozkladu nastáva práve jeden z prípadov:

- $X = \neg A$ pre práve jednu formulu A. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + 1 > \deg(A)$, podľa ind. predpokladu tvrdenie platí pre A. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa zhodujú na premenných v A (rovnaké ako v X). Preto $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models A$, a teda $v_1 \models \neg A$ vtt $v_1 \not\models A$ vtt $v_2 \not\models A$ vtt $v_2 \models \neg A$.
- $X = (A \wedge B)$ pre práve jednu dvojicu formúl A, B. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + \deg(B) + 1 > \deg(A)$ aj $\deg(B)$, podľa ind. predpokladu pre A aj B tvrdenie platí. Podobne pre ďalšie binárne spojky.

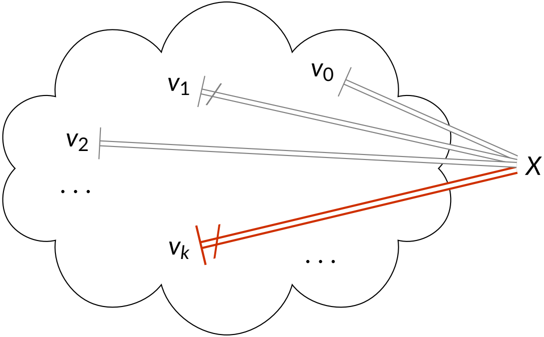
Splniteľnosť



Definícia 2.27

Formulu X nazveme ***splniteľnou***
vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** X
(teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných v, že $v \models X$).

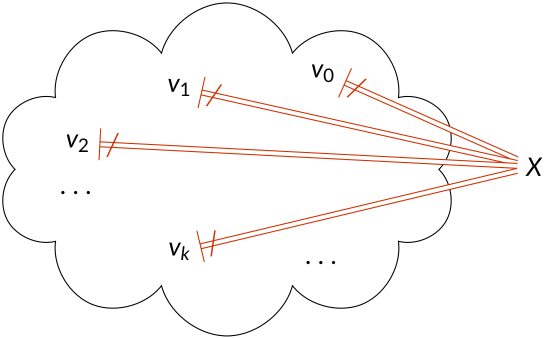
Falzifikovateľnosť



Definícia 2.28

Formulu X nazveme ***falzifikovateľnou***
vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** X
(teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných v, že $v \not\models X$).

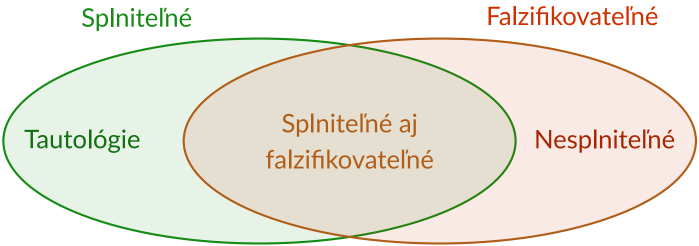
Nesplniteľnosť



Definícia 2.29

Formulu X nazveme ***nesplniteľnou***
vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** X
(teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných v platí $v \not\models X$).

„Geografia“ výrokových formúl podľa spĺňania



- Tautológie sú výrokovologické pravdy. Sú zaujímavé najmä pre klasický pohľad na logiku ako skúmanie správneho usudzovania.
- Vo výpočtovej logike je zaujímavá splniteľnosť a konkrétne spĺňajúce ohodnotenia.

Obrázok podľa [Papadimitriou, 1994]

Zamyslite sa II.5

Ak formula *nie* je falzifikovateľná, je:

A splniteľná,
B nesplniteľná,
C tautológia.

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.