Smithdiagramm

1 Inhalt

2 Allgemeines

Das Smithdiagramm bietet die Möglichkeit Impedanztransformationen graphisch auf einfache Weise zu überblicken. Der gefundene Weg wird anschließend Bauteiltypen (L,C,Leitungen (R*)) und Werten zugeordnet.

*I.a. wird eine verlustfreie Transformation angestrebt, daher wird eine Transformation mit Widerständen vermieden. Widerstände werden in Ausnahmefällen verwendet, um z.B: Stabilitätsprobleme in den Griff zu bekommen.

3 Die Ortskurven des Reflexionsfaktors (Smithdiagramm)

Der Reflexionsfaktor

$$\rho = \frac{Z_L - Z_W}{Z_L + Z_W}$$

stellt eine 1:1 Beziehung zur Lastimpedanz Z_L dar. D.h. dass durch ablesen des Reflexionsfaktors die Impedanz bestimmt werden kann. Wir erstellen folgende drei Kurven:

- Wir bestimmen eine Funktion zwischen Imaginärteil und Realteil von ρ und halten dabei den Wirkwiderstand der Last konstant. Die daraus entstandene Kurve durchläuft verschiedene X (Imaginärteil der Lastimpedanz)
- Wir bestimmen eine Funktion zwischen Imaginärteil und Realteil von ρ und halten dabei den den Blindwiderstand X der Last konstant. Die daraus entstandene Kurve durchläuft verschiedene R (Realteil der Lastimpedanz)
- Kurven mit konstantem Betrag von ρ. (|ρ| = constant)

3.1 Ortskurven mit konstanten Lastwiderstand R

Um das Diagramm unabhängig von der Bezugsimpedanz zu erstellen beziehen wir die Lastimpedanz auf den Bezugswiderstand (Wellenwiderstand Z_W).

$$\rho = \frac{Z_L - Z_W}{Z_L + Z_W} = \frac{Z_L/Z_W - 1}{Z_L/Z_W + 1} = \frac{z-1}{z+1} \text{ mit}$$

$$z = Z_L/Z_W$$

Wir halten von der Beziehung

$$\rho = \rho_x + j\,\rho_y = \frac{z-1}{z+1} = \frac{r + jx - 1}{r + jx + 1}$$

r = constant und bezeichnen den auf Z_W fest gehaltenen Wirkwiderstand mit (r = $\mathbf{r_0}$)

$$\rho_x + j\,\rho_y = \frac{\boldsymbol{r_0} + jx - 1}{\boldsymbol{r_0} + jx + 1}$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $\boldsymbol{r_0} + jx + 1$ und erhalten

$$(\rho_x + j\,\rho_y) * (\boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{jx} + \mathbf{1}) = \boldsymbol{r_0} + jx - 1$$

$$\rho_x * \boldsymbol{r_0} + j\,\rho_y * \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{\rho_x} * \boldsymbol{j\,x} - \boldsymbol{\rho_y} * \boldsymbol{x} + \rho_x + j\,\rho_y = \boldsymbol{r_0} + jx - 1$$

Die Gleichung wird in Realteil und Imaginärteil zerlegt.

(1) $\rho_x * \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{\rho_y} * \boldsymbol{x} + \rho_x = \boldsymbol{r_0} - 1$

(2) $\rho_y * \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{\rho_x} * \boldsymbol{x} + \rho_y = x$

Wir versuchen aus dem Gleichungssystem (1) (2) eine Gleichung zu extrahieren die die Variable Größe **x** nicht mehr enthält. Jeder Punkt der so erzeugten Kurve ist exakt einem Wert **x** zugeordnet. Diese Kurve wird Ortskurve genannt.

Wir extrahieren aus Gleichung 2 das x

$$x = \frac{\rho_y * \boldsymbol{r_0} + \rho_y}{1 - \boldsymbol{\rho_x}}$$

und setzen es in Gleichung 1 ein

$$\boldsymbol{\rho_x} * \boldsymbol{r_0} - \boldsymbol{\rho_y} * \frac{\rho_y * \boldsymbol{r_0} + \rho_y}{1 - \boldsymbol{\rho_x}} + \boldsymbol{\rho_x} = \boldsymbol{r_0} - 1$$

$$\boldsymbol{\rho_x} * (\boldsymbol{r_0} + \mathbf{1}) - \boldsymbol{\rho_y} * \frac{\rho_y * (\boldsymbol{r_0} + 1)}{1 - \boldsymbol{\rho_x}} = \boldsymbol{r_0} - 1$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit $1 - \rho_x$ und erhalten

$$\rho_x * (\boldsymbol{r_0} + \mathbf{1}) * (1 - \boldsymbol{\rho_x}) - \boldsymbol{\rho_y} * \rho_y * (\boldsymbol{r_0} + 1) = (\boldsymbol{r_0} - 1) * (1 - \rho_x)$$

Nach dem ausmultiplizieren entsteht:

$$\rho_x(r_0 + 1 - r_0 * \rho_x - \rho_x) - \rho_y^2 * (r_0 + 1) = (r_0 - 1) - (r_0 - 1) * \rho_x$$

$$-\rho_x^2(r_0 + 1) - \rho_y^2 * (r_0 + 1) + \rho_x * (r_0 + \cancel{1}) = (r_0 - 1) - (r_0 - \cancel{1}) * \rho_x$$

$$-\rho_x^2(r_0 + 1) - \rho_y^2 * (r_0 + 1) + 2 * \rho_x * r_0 = r_0 - 1$$

$$-\rho_x^2(r_0 + 1) + 2 * \rho_x * r_0 - \rho_y^2 * (r_0 + 1) = r_0 - 1 \ldots | * (-1)$$

$$\rho_x^2(r_0 + 1) - 2 * \rho_x * r_0 + \rho_y^2 * (r_0 + 1) = 1 - r_0 \ldots | * \frac{1}{(r_0 + 1)}$$

→

$$\rho_x^2 - \rho_x * \frac{2 * r_0}{(r_0 + 1)} + \rho_y^2 = \frac{1 - r_0}{(1 + r_0)} \ldots |$$ Addition von 0

$$\boldsymbol{\rho_x^2} - \boldsymbol{\rho_x} * \frac{\mathbf{2} * \boldsymbol{r_0}}{(\boldsymbol{r_0} + 1)} + \left\{ \left(\frac{\boldsymbol{r_0}}{(\boldsymbol{r_0} + 1)}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\frac{\boldsymbol{r_0}}{(\boldsymbol{r_0} + 1)}\right)^{\mathbf{2}} \right\} + \boldsymbol{\rho_y^2} = \frac{1 - \boldsymbol{r_0}}{(1 + \boldsymbol{r_0})}$$

Wir gruppieren zu $(A - B)^2$ und erhalten daraus die gewünschte Ortskurve

$$\boldsymbol{\rho_x^2} - \boldsymbol{\rho_x} * \frac{\mathbf{2} * \boldsymbol{r_0}}{(\boldsymbol{r_0} + 1)} + \left(\frac{\boldsymbol{r_0}}{1 + \boldsymbol{r_0}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\rho_y^2}$$

$$= \frac{1 - \boldsymbol{r_0}}{(1 + \boldsymbol{r_0})} + \left(\frac{\boldsymbol{r_0}}{1 + \boldsymbol{r_0}}\right)^{\mathbf{2}}$$

→

$$\left(\boldsymbol{\rho_x} - \frac{\boldsymbol{r_0}}{1 + \boldsymbol{r_0}}\right)^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\rho_y^2} = \frac{(1 - \boldsymbol{r_0})(1 + \boldsymbol{r_0}) + \boldsymbol{r_0^2}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_0})^2} = \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \boldsymbol{r_0})^2}$$

- **Ergebnis**

$$\left(\rho_x - \frac{r_0}{1+r_0}\right)^2 + \rho_y^2 = \left(\frac{1}{1+r_0}\right)^2$$	**Kreisgleichung mit konstantem Wirk-Widerstand R** **Mittelpunkt** $M_X = \frac{r_0}{(1+r_0)}$ $M_Y = 0$ **Radius** $R = \frac{1}{1+r_0}$

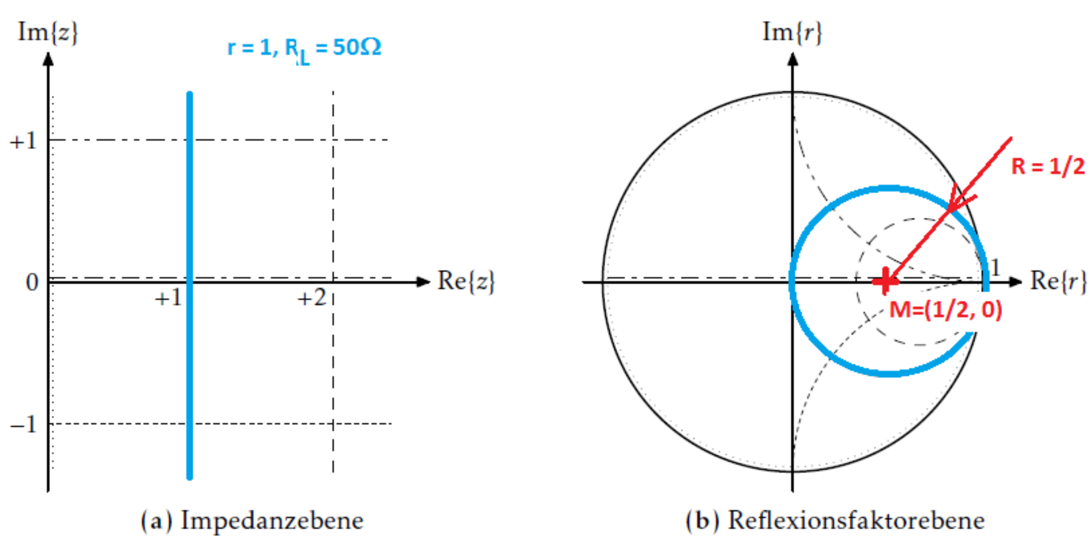

Abbildung 1 Darstellung der Transformation Re{Z} = constant = 1 (http://www.siart.de/lehre/smishort.pdf)

Je größer der Lastwiderstand desto weiter nach rechts wandert der Mittelpunkt des Kreises und umso kleiner wird dessen Radius.

3.2 Ortskurven mit konstanten Blindwiderstand X

Wieder ausgehend von Gleichungssystem für $\boldsymbol{\rho}$ führen wir dieselbe Operation durch wie oben, halten aber diesmal das **x** constant und nennen es **x_0**.

(1) $\rho_x * r - \rho_y * x_0 + \rho_x = r - 1$

(2) $\rho_y * r + \rho_x * x_0 + \rho_y = x_0$

Wir versuchen aus dem Gleichungssystem (1) (2) eine Gleichung zu extrahieren die die Variable Größe **r** nicht mehr enthält. Jeder Punkt der so erzeugten Kurve ist exakt einem Wert **r** zugeordnet. Diese Kurve wird Ortskurve genannt.

Wir errechnen aus Gleichung 2 das r

$$r = \frac{x_0(1-\rho_x) - \rho_y}{\rho_y}$$

und setzen es in Gleichung 1 ein

$$\rho_x * \frac{x_0(1-\rho_x) - \rho_y}{\rho_y} - \rho_y * x_0 + \rho_x = \frac{x_0(1-\rho_x) - \rho_y}{\rho_y} - 1$$

Nach der Multiplikation mit ρ_y erhalten wir

$$\rho_x * \left(x_0(1-\rho_x) - \cancel{\rho_y} \right) - \rho_y^2 * x_0 + \cancel{\rho_x \rho_y} = x_0(1-\rho_x) - \rho_y - \rho_y$$

$$-\rho_x^2\, x_0 + \rho_x * x_0 - \rho_y^2 * x_0 = x_0(1-\rho_x) - 2\rho_y$$

Wir stellen ein wenig um und ergänzen wieder auf $(A-B)^2$, diesmal für $\boldsymbol{\rho}_x$ und für $\boldsymbol{\rho}_y$.

$$-\rho_x^2\,\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{2}\,\rho_x * \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{\rho_y^2} * \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{2}\rho_y = \boldsymbol{x_0}$$

$$\rho_x^2 - 2\rho_x\,(1 - \cancel{1}) + \boldsymbol{\rho_y^2} - 2\rho_y \frac{1}{\boldsymbol{x_0}} + \left\{ \left(\frac{1}{\boldsymbol{x_0}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\boldsymbol{x_0}}\right)^2 \right\} = -\cancel{1}$$

$$(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - \frac{1}{\boldsymbol{x_0}})^2 = \left(\frac{1}{\boldsymbol{x_0}}\right)^2$$

- Ergebnis

$(\rho_x - 1)^2 + (\rho_y - \frac{1}{\boldsymbol{x_0}})^2 = \left(\frac{1}{\boldsymbol{x_0}}\right)^2$	**Kreisgleichung mit konstantem Blindwiderstand X** **Mittelpunkt** $\boldsymbol{M_X} = \mathbf{1}$ $\boldsymbol{M_Y} = \frac{1}{\boldsymbol{x_0}}$ **Radius** $\boldsymbol{R} = \frac{1}{\boldsymbol{x_0}}$

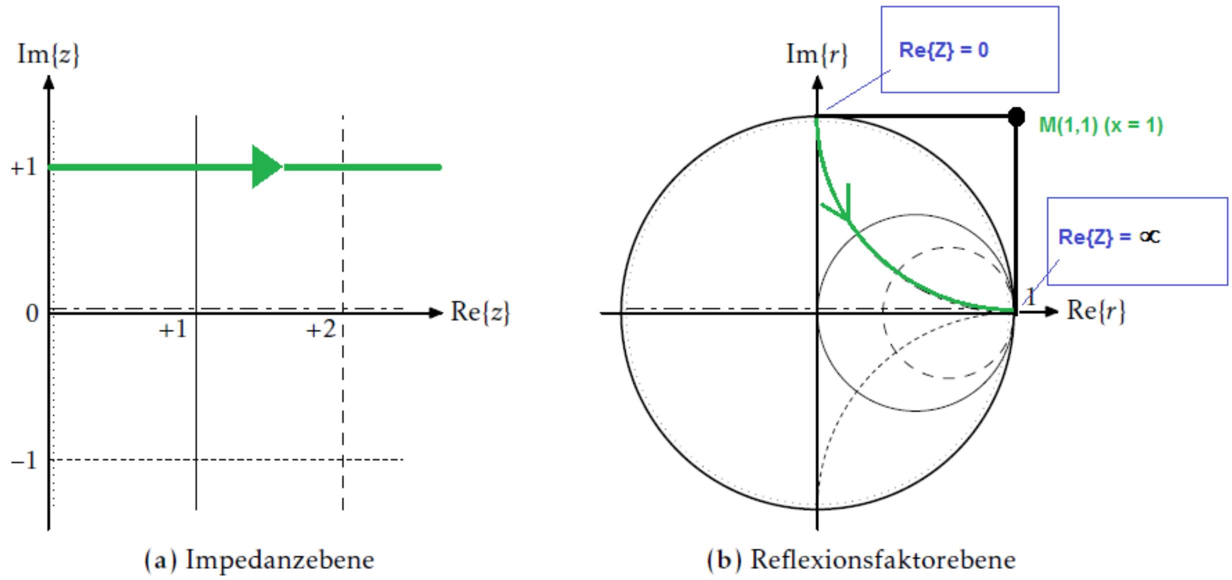

Abbildung 2 Darstellung der Transformation Im{Z} = constant = 1 (http://www.siart.de/lehre/smishort.pdf)

Die grünen Kreise sind für die Transformation nicht geeignet, sie durchlaufen verschiedene Wirkwiderstände. Die Bewgung auf diesen Kreisen kann nur mit Wirkwiderständen erfolgen, was nicht angestrebt wird.

Wir können aber die transformierte Impadenz an diesen Kreisen ablesen.