Normierte Frequenz

Contents

Periodic Sampling

A Sequence of Samples x[n] is obtained from a continuous signal $x_c(t)$ according to the relation

$$x[n] = x_c(nT) \quad -\infty < n < +\infty$$

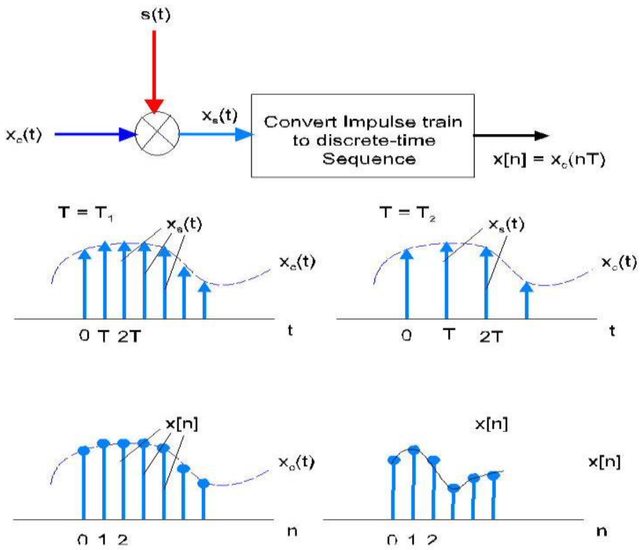


Figure 1 Sampling with a periodic impulse train s(t) (Oppenheim Schafer 1989)

In der digitalen Welt existiert für uns der Zeitbegriff nicht mehr. Ein Array wird mit Samples gefüllt, wie die obigen Darstellungen zeigen. Ob wir innerhalb eines Zeitintervalls mehr oder weniger Samples in das Array füllen, blenden wir für unsere Überlegungen aus. Eine geringere Samplerate befüllt das Array langsamer, **das heißt nicht, dass sich im eingeschwungenen Zustand weniger Samples im Array befinden**!

Aus Sicht der digitalen Signalverarbeitung berechnen wir <M> Output Samples aus <N> Eingangssamples (Im Filter Design ist M üblicherweise 1). Intuitiv wissen wir, dass die Berechnung der Output Samples abgeschlossen sein muss, bevor ein neues Eingangssample in unser digitales System eingefügt wird. Das „älteste“ Sample wird aus der Kette genommen, wenn ein neues Sample hinzugefügt wird (Schieberegister). Wenn ein Sample die Kette verlässt steht es natürlich für Berechnungen nicht mehr zur Verfügung, es existiert nicht mehr.

In der digitalen Signalverarbeitung muss davon ausgegangen werden, dass das Einhalten des Timings von der Recheneinheit erfüllt wird. Das Timing selbst ist nicht Gegenstand der digitalen Signaltheorie! Wir gehen davon aus, dass sich die Rechnerei ausgeht, wie das realisiert wird interessiert uns nicht, das ist Sache der Applikationsingenieure (Realisierung im DSP , FPGA, uC ….).

Übergang von der analogen zur digitalen Welt

Die normierte Frequenz

Betrachten wir ein SIN-Signal mit einer Periodendauer T und einer Amplitude A in der analogen Welt.

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \Phi)$$

Wobei Ω eine beliebige (analoge) Frequenz darstellt. Wir sehen ein, dass das Signal periodisch ist, d.h. nach einer Periode T wiederholt sich der Signalverlauf.

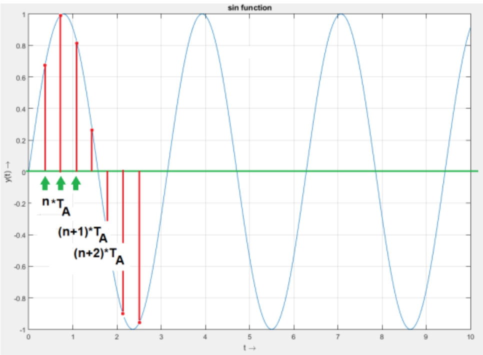
$$x(t) = x(t + kT) = A\sin(\Omega(t + kT) + \Phi) = A\sin(\Omega t + \Omega kT + \Phi)$$

Wir erkennen, dass die (kleinste) Periodendaher über die Beziehung ΩT = 2π (k=1)errechnet werden kann.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

- ⇨ Egal welchen Wert wir für $\Omega \neq 0$ wählen, es wird immer ein T geben, wo sich das Signal $x(t) = A\sin(\Omega t)$ wiederholt.

Betrachten wir dasselbe Signal x(t) und tasten es mit T_A ab.



Innerhalb **einer Periode** des analogen Signals x(t), kann man N Samples mit der Abtastrate T_A lesen, wobei aber N nicht zwingend eine natürliche Zahl sein muss.

Nehmen wir an, N wäre eine natürliche Zahl. Innerhalb einer Periode T (des analogen Signals) werden daher N Samples in einem Array abgespeichert. Für diese N Samples benötigen wir die Zeit $T = N*T_A$!

$$T = \frac{1}{f} = N * T_A = \frac{N}{f_A}$$

Ungeformt: $N = {}^{T}\!/_{T_A} = {}^{f_A}\!/_{f}$

In der digitalen Welt entsprechen **N Samples** das, was in der analogen Welt die **Periodendauer T** ist.

Nach N Samples wiederholen sich die Samples, so wie sich das Signal nach der Zeit T wiederholt!

Man definiert daher sinnvoller weise:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{T/_{T_A}} = 2\pi\frac{T_A}{T} = 2\pi\frac{f}{f_A} = 2\pi\frac{\Omega}{\Omega_A}$$

ω_n wird normierte Kreisfrequenz bezeichnet. Man **bezieht** (normieret) die **analoge Frequenz f** auf die **Abtastfrequenz f_A** und machen einen Winkel draus, weil wir eine Kreisfrequenz wollen.

Betrachten wir zwei Grenzfälle.

- Abtastkreisfrequenz Ω_A ist genau doppelt so groß wie die Signalkreisfrequenz Ω. Daraus ergibt sich für ω_n:

  $$\omega_n = 2\pi * \frac{\Omega}{2\Omega} = 2\pi * \frac{f}{2f} = \pi$$

  Beachte: jede normierte („digitale“) Frequenz $\omega_n > \pi$ führt zu Aliasing. Üblicherweise soll Aliasing vermieden werden, daher muss $\omega_n < \pi$ sein.
- Die Abtastkreisfrequenz Ω_A >> Ω. In diesem Fall geht $\omega_n \rightarrow 0$.

In der komplexen Zeigerdarstellung wird daher nur der Bereich $\boldsymbol{-\pi \leq \omega_n \leq +\pi}$ betrachtet.

Eigenschaften des digitalen abgetasteten Signals

Periodizität

In der analogen Welt gibt es keinen Wert für die Frequenz Ω der dazu führen würde, dass das Signal

$x(t) = Asin(\Omega t + \Phi)$

nicht mehr periodisch ist, da für T alle reellen Zahlen zur Verfügung stehen.

In der digitalen Welt wird aus dem t ein Index, der ist leider auf ganze Zahlen beschränkt. (Man kann nicht das Element X[2.25] auslesen, wenn X ein Array ist). Diese eher banale Tatsache hat aber weitreichendere Folgen als es den Anschein hat.

Eine digitale sin-förmige Signalfolge ist nicht mehr zwingend periodisch, weil das Argument im Sinus nur in integer Schritten verändert werden kann. Dabei kann es passieren, dass der Zahlenwert für ein periodisches Signal übersprungen wird und die Periodizität ist im Eimer.

Ein Signal ist dann periodisch wenn ω_n durch den Ausdruck

Normierte Frequenz

$$\omega_n = \frac{2\pi}{N}$$

ersetzt werden kann.

Wegen

$$e^{j\omega_n n} = e^{j\frac{2\pi}{N}n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(n+KM)}$$

folgt, dass für beliebige N ein dazu passendes M bestimmt werden kann:

$$\frac{2\pi}{N} * K * M = K * 2\pi$$

- ⇨ M = N

Oberwellen

Wie viele Oberwellen (Zeiger) existieren für ein Signal der Form

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

wenn man nur Frequenzen betrachtet, die ein ganzzahliges Vielfaches der Grundwelle haben.

Grundwelle	$e^{j\frac{2\pi}{N}n}$
k=2	$e^{j\frac{2\pi}{N}2n}$
k=3	$e^{j\frac{2\pi}{N}3n}$
…	…
K=N/2	$e^{j\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{N}}\frac{\cancel{N}}{\cancel{2}}n} = e^{j\pi} = e^{-j\pi}$
…	…
k=N-1	$e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)*n} = e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$

Wir sehen

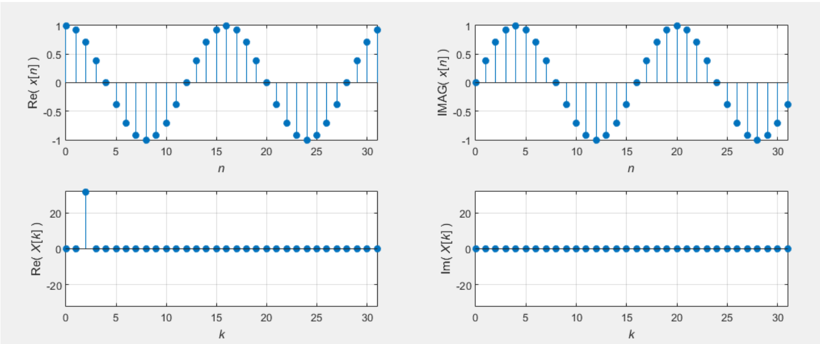
- ⇨ dass es nur N-1 verschiedene Oberwellen-Zeiger gibt, wobei die Frequenz der Zeiger bis N/2 größer wird, ab dieser Frequenz wird die Frequenz wieder kleiner bis bei N-1 die Grundwelle wieder erreicht ist.
- ⇨ Die Drehrichtung kehrt sich ab der Frequenz $\omega_n = \pi$ um!

Beispiele

Rotierender Zeiger mit DFT 32

$x(n) = e^{j\omega_n * n}$

$\omega_n = \frac{\pi}{8}$, DFT mit N = 32 Samples



$e^{j\omega_n n} = e^{j\frac{\pi}{8}n}$

Berechnung der Periode:

$e^{j\omega_n n} = e^{j\frac{\pi}{8}(n+N)}$

$\frac{\pi}{8} * N = 2\pi$

N = 16

In der Frequenzdomäne ist: $X(k) = 32 * \delta(k-2)$.

$\omega_n = \frac{2\pi}{32} * k = \frac{2\pi}{32} * 2 = \frac{\pi}{8}$

$\omega_n = \frac{2\pi}{64} * 4 = \frac{\pi}{8}$

Für den Zeitbereich ergibt sich

$x(n) = \frac{1}{32} * 32 * e^{j\frac{\pi}{8}n} = e^{j\frac{\pi}{8}n}$

Rotierender Zeiger mit DFT 64

$x(n) = \; e^{j\omega_n * n}$

$\omega_n \; = \frac{\pi}{8}$, DFT mit N = 64 Samples

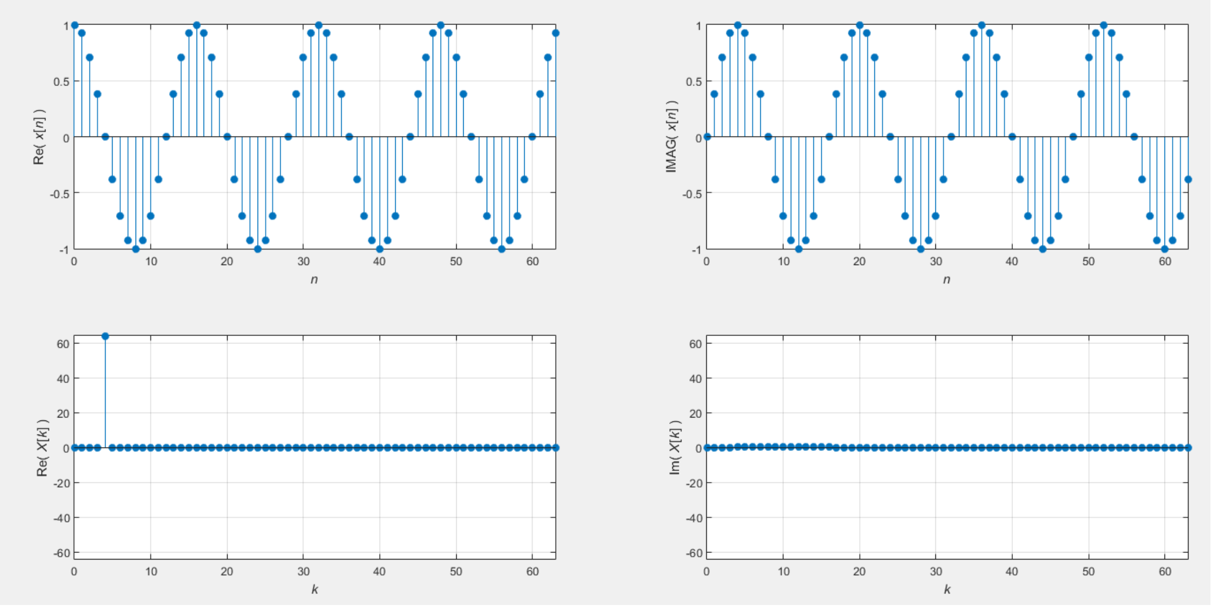


Abbildung 2 DFT mit 64 Samples

K=4

In der Frequenzdomäne sehen wir einen Sample $X(k) = 64 * \delta(k-4)$.

$$\omega_n = \frac{2\pi}{64} * 4 = \frac{\pi}{8}$$

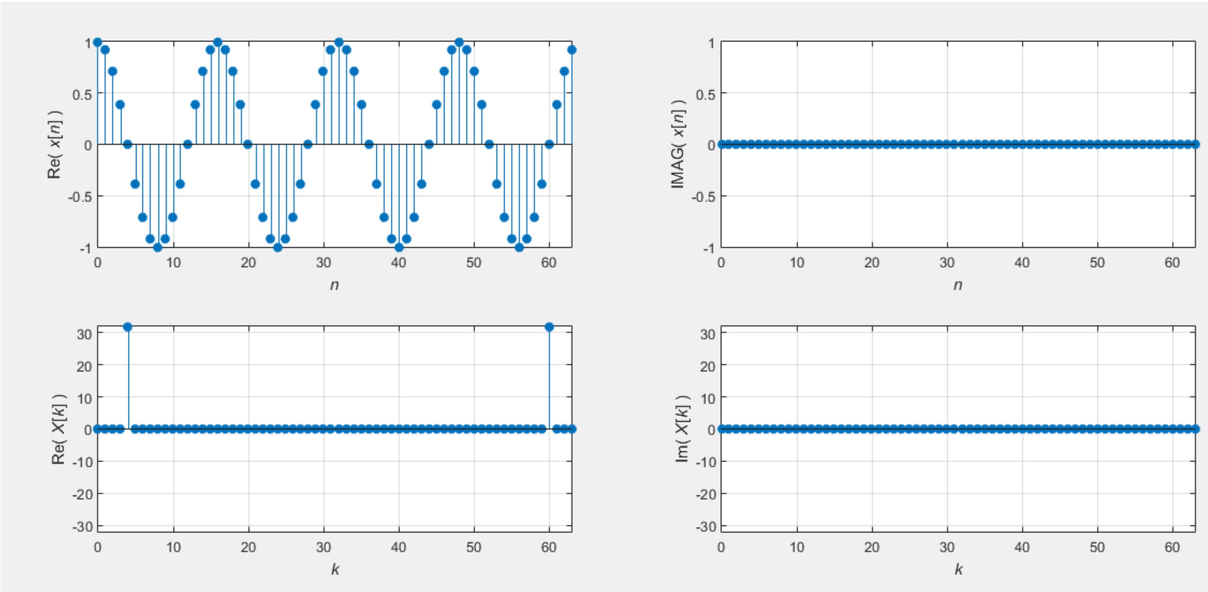
Für den Zeitbereich ergibt sich

$$x(n) = \frac{1}{64} * 64 * \; e^{j\frac{\pi}{8}n} \; = \; e^{j\frac{\pi}{8}n}$$

cos Funktion mit $\omega_n = \pi/8$ mit DFT 64

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\,n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{8}n} + e^{-j\frac{\pi}{8}n}}{2}$$

DFT N = 64



Rücktransformation

$$X(k) = 32 * \delta(k-4) + 32 * \ \delta(k-60).$$

$$\omega_{n1} = \frac{2\pi}{64} * 4 = \frac{\pi}{8}$$

$$\omega_{n2} = \frac{2\pi}{64} * (64-4) = \frac{2\pi}{64} * 60 = \frac{\pi}{8} * 15$$
$$\triangleq -\frac{\pi}{8}\ (Wegen\ der\ Eigenschaft\ der\ komplexen\ e-Funktion)$$

$$e^{j\,\frac{\pi}{8}*15} = e^{j\,\frac{\pi}{8}*(16-1)} = e^{j\left(\frac{\pi}{8}*16-\frac{\pi}{8}\right)} = e^{j(2\pi-j\frac{\pi}{8})} = e^{-j\frac{\pi}{8}}$$

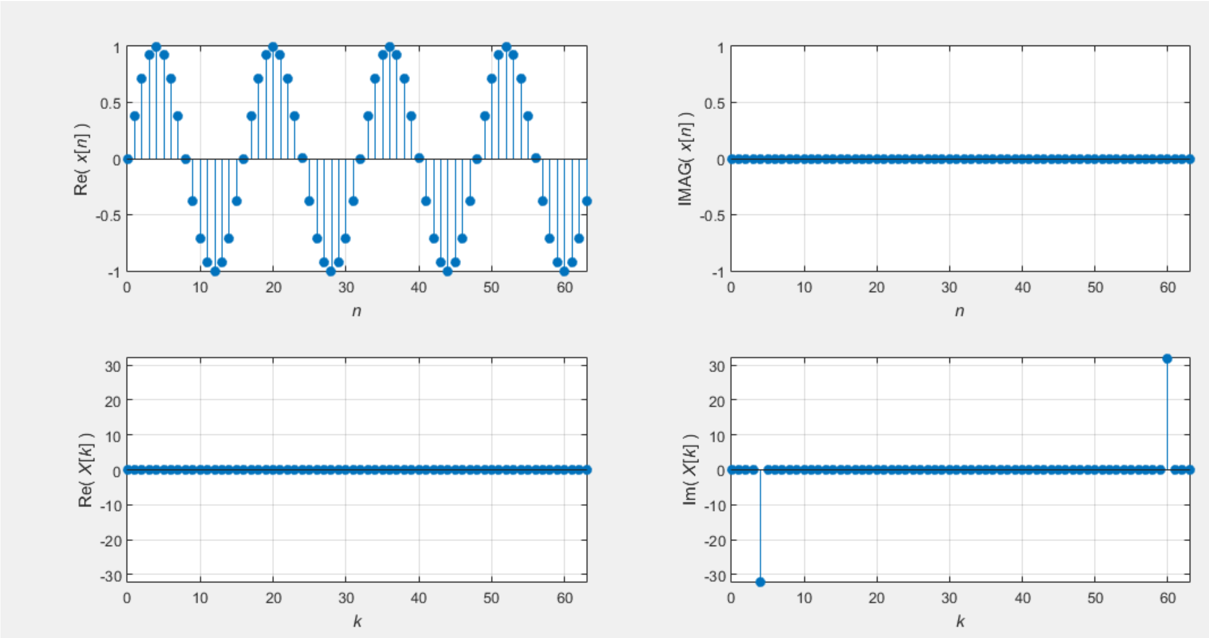
Frequenz $\omega_n = \frac{\pi}{8}$

$$x(n) = \frac{1}{64} * \left(32\ * e^{j\frac{\pi}{8}} + 32 * \ e^{-j\frac{\pi}{8}}\right) = \cos(\frac{\pi}{8}\,n\,)$$

sin Funktion mit $\omega_n = \pi/8$ mit DFT 64

$$x(n) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\,n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{8}n} - e^{-j\frac{\pi}{8}n}}{2j}$$

DFT N = 64



Rücktransformation

$$X(k) = -j * \ 32 * \delta(k-4) + j * 32 * \ \delta(k-60).$$

$$\omega_{n1} = \frac{2\pi}{64} * 4 = \frac{\pi}{8}$$

$$\omega_{n2} = \frac{2\pi}{64} * (64-4) = \frac{2\pi}{64} * 60 = \frac{\pi}{8} * 15$$
$$\triangleq -\frac{\pi}{8}\ (Wegen\ der\ Eigenschaft\ der\ komplexen\ e-Funktion)$$

ω_{n1}: positiv rotierender Zeiger

ω_{n2}: negativ rotierender Zeiger

$$x(n) = \frac{1}{64}\left(-j\ 32 * \ e^{j\frac{\pi}{8}n} + j32 * \ e^{-j\frac{\pi}{8}n}\right) = \sin(\frac{\pi}{8}n)$$

Digitale Faltung

Linearität und Zeitinvarianz

Impulsantwort = Antwort auf δ[n]

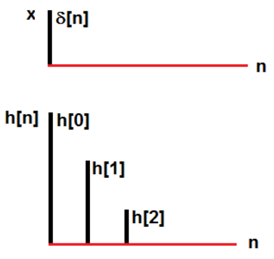
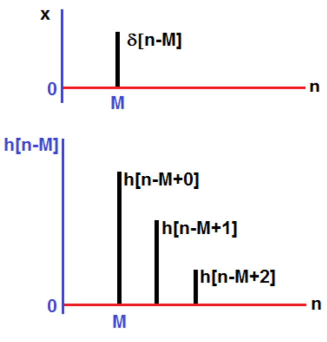
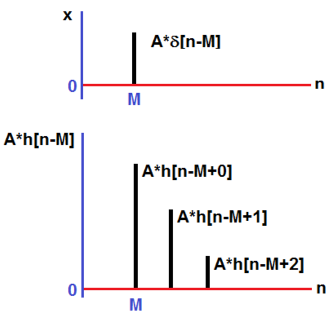


Abbildung 3 h[n] Antwort auf δ[n]

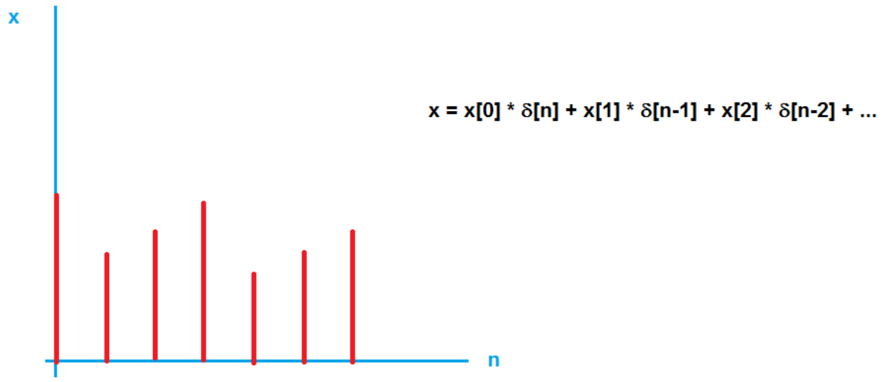
- **Zeitinvarianz**
  Die Antwort auf einen zeitlich verschobenen Sample, liefert eine zeitlich verschobene Impulsantwort



- Linearität
  Die Antwort auf A*δ[n] liefert A*h[n]



Antwort des Systems auf eine beliebige Sequenz X



Beachte:

x[i]	Zahlenwert, (i: fester Index)
$x[i] * \delta[n-i]$	Funktion von n, (i : fester Index)

Summation der Impulsantworten

Eingangsfunktion	Antwort
$x[0] * \delta[n]$	x[0]*h[n]
$x[1] * \delta[n-1]$	x[1]*h[n-1]
$x[2] * \delta[n-2]$	x[2]*h[n-2]
…	…
$x[k] * \delta[n-k]$	x[k]*h[n-k]

Die Ergebnissequenz ist die Summe der einzelnen Impulsantworten multipliziert mit dem Wert des Input Samples!

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x[k] * h[n-k]$$

k	Index eines Input Samples
x[k]	Amplitude des k'ten Samples
$x[k] * \delta[n-k]$	Funktion welche an der Stelle k den Wert x[k] hat und sonst überall 0 ist
h[n]	n'te Sample der Impulsantwort bzw. Impulsantwort
y[n]	n'tes Sample der Ergebnissequenz bzw. Ergebnissequenz