Wellenausbreitung auf einer Leitung

1 Inhalt

2 Der Wellenwiderstand

2.1 Definition

Der Wellenwiderstand ist jener Lastwiderstand, der von der Leitung nicht transformiert wird. Wird die Leitung mit Wellenwiderstand abgeschlossen, erscheint dieser Widerstand wieder an den Klemmen der Leitung.

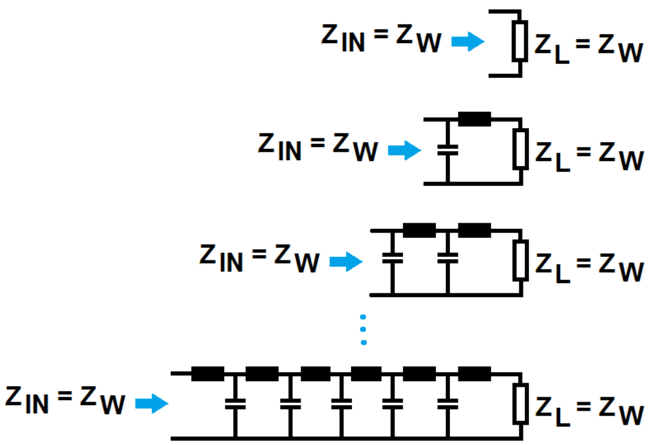


Abbildung 1 Eine mit Wellenwiderstand abgeschlossene Leitung

2.2 Bestimmung des Wellenwiderstandes

Wir nehmen ein Stück „Leitung“ irgendwo zwischen Anfang und Ende heraus. Wir schließen am „Ende“ die Leitung mit Wellenwiderstand ab. An diesem Ende können wir aber statt des Widerstandes dieselbe Leitung anschließen (da $Z_{in} = Z_w$). Solange das betrachtete Leitungselement vom Ende nichts mitbekommt (durch die rücklaufende Welle) sieht es den Wellenwiderstand Zw auch wenn die Leitung am Ende anders belastet ist.

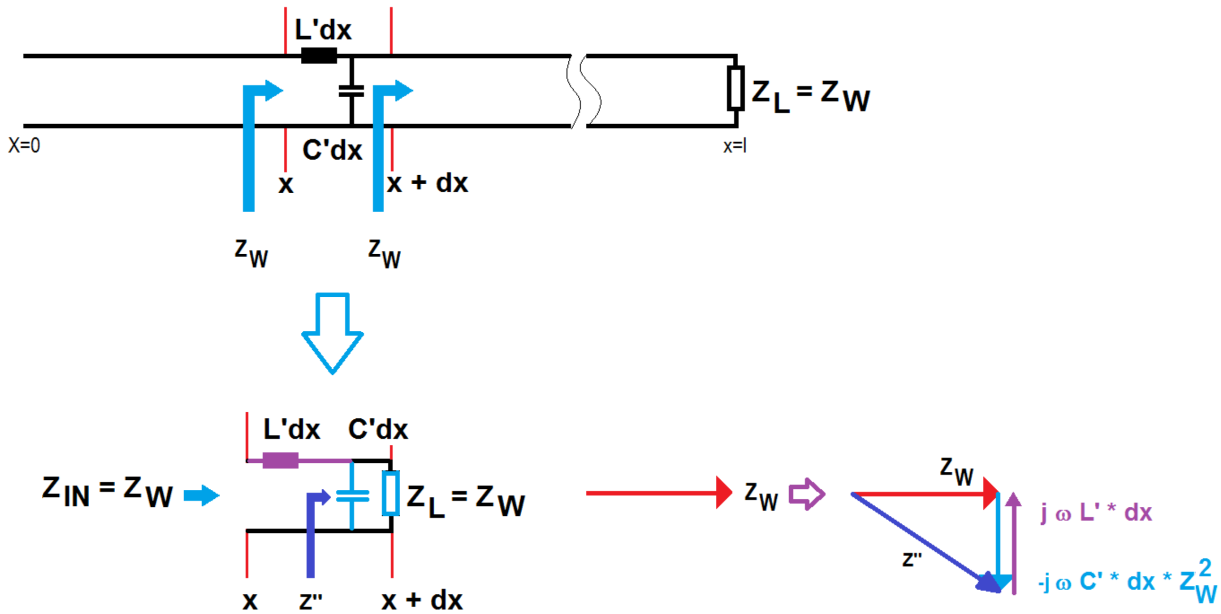


Abbildung 2 Leitungselement mit Zw belastet

Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich

$$Z_{IN} = Z_W = j\omega L'dx + Z'' = j\omega L'dx + \left(\frac{1}{j\omega C'dx} \,||\, Z_W\right) = j\omega L'dx + \frac{\frac{1}{j\omega C'dx} Z_W}{\frac{1}{j\omega C'dx} + Z_W}$$

$$= j\omega L'dx + \frac{Z_W}{1 + Z_W * j\omega C'dx} \approx j\omega' Ldx + Z_W * (1 - Z_W * j\omega\, C'dx)$$

$$= \boldsymbol{j\omega L'dx} + \boldsymbol{Z_W} - j\, Z_W^2 * \omega\, C'dx$$

Wir lösen die Gleichung nach Z_W auf.

$$\cancel{Z_W} = j\omega L'dx + (\cancel{1} - Z_W * j\omega C'dx) * Z_W$$

Daraus ergibt sich

$$Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

2.3 Bestimmung des Wellenwiderstandes über die Energiebilanz

Laut Abbildung 2 fließt im Zeitraum t und t + dt die Energie dW in das Leitungselement.

$$dW = \frac{1}{2}\, L'dx * I_V^2 + \frac{1}{2}\, C'dx * U_V^2 = \frac{1}{2}\, L'dx \left(\frac{U_0}{2Z_W}\right)^2 + \frac{1}{2}\, C'dx \left(\frac{U_0}{2}\right)^2 = \frac{U_0^2}{8}\, dx \left(C' + \frac{L'}{Z_W^2} \right)$$

$$dW = \frac{U_0^2}{8\, Z_W}\, dx \left(C'Z_W + \frac{L'}{Z_W} \right) = \frac{U_0^2}{8\, Z_W}\, dx \left(\sqrt{L'C'} + \sqrt{L'C'} \right) = \frac{U_0^2}{4\, Z_W}\, dx \sqrt{L'C'} = \frac{U_0^2}{4}\, C'dx$$

$$dW = P * dt = \frac{U_0}{2}\, I_V * dt = \frac{U_0}{2} * \frac{U_0}{2\, Z_i} * dt = \frac{U_0^2}{4\, Z_i} * dt$$

➔

$$\frac{\cancel{U_0^2}}{4\, Z_i} * dt = \frac{\cancel{U_0^2}}{4}\, C'dx$$

➔

$$\frac{1}{Z_i} = C'\frac{dx}{dt} = C'\frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \sqrt{\frac{C'}{L'}}$$

$$Z_i = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Wir sehen, dass über die Energiebilanz die Eingangsimpedanz des Leitungselements bestimmt werden kann. Unter der Annahme eines kontinuierlichen Energieflusses ergibt sich für das Leitungselement eine Eingangsimpedanz $Z_i = Z_W$.

Wir schließen eine Spannungsquelle mit $R_i = Z_W$ and die Leitung an. Die Leitung stellt (vorerst) eine Last $Z_L = Z_W$ für die Quelle dar.

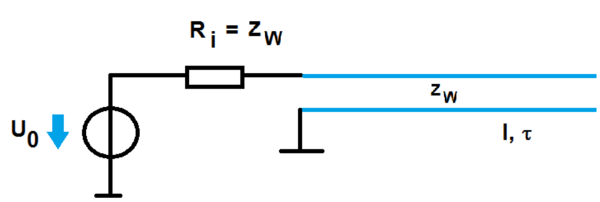


Abbildung 3 Eine an eine leerlaufende Leitung angeschlossen e reale Spannungsquelle

- **t = 0**

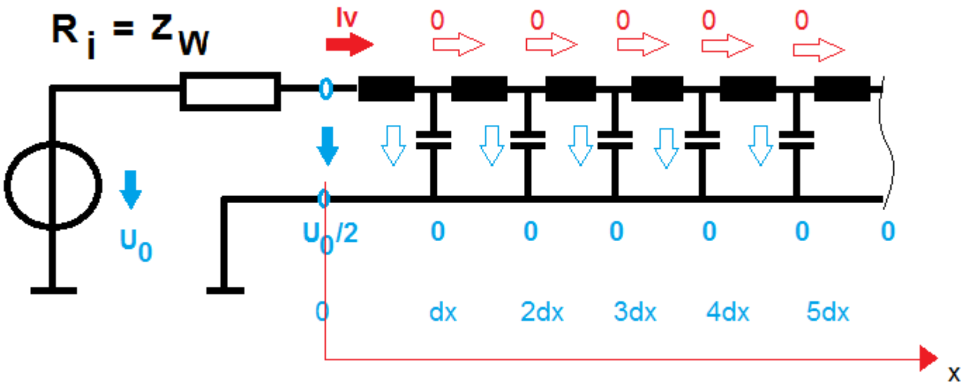


Abbildung 4 Spannungsverlauf zum Zeitpunkt t = 0

Zum Zeitpunkt t = 0 liegt $U_0/2$ an der Leitung, da die Eingangsimpedanz der Leitung Z_W beträgt. Daher ergibt sich für I_V:

$$\mathrm{I_v} = \frac{\frac{U_0}{2}}{Z_W} = \frac{U_0}{2Z_W}.$$

- **t = 0 + dt**

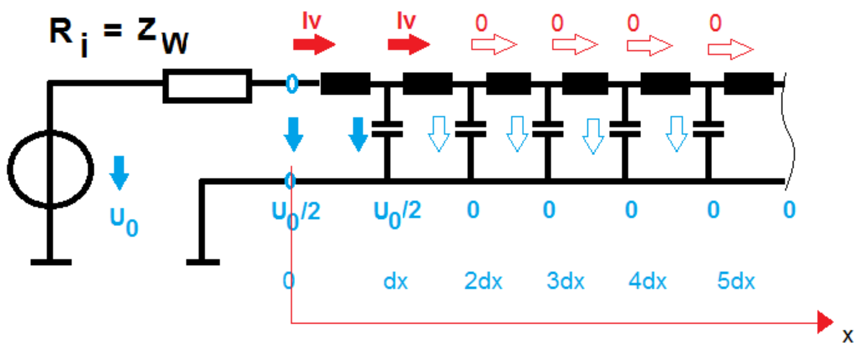


Abbildung 5 Spannungsverlauf zum Zeitpunkt t = 0 + dt

- **t = 0 + 2 dt**

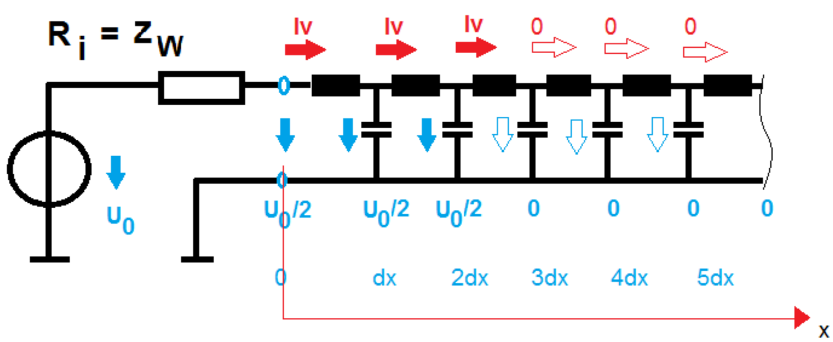


Abbildung 6 Spannungsverlauf zum Zeitpunkt t = 0 + 2dt

Die vorlaufende Welle füllt die Kette mit $U_V = U_0/2$ und Iv auf. Beachte, dass zwischen zwei ungeladenen Kondensatoren über die Induktivität keine Stromänderung erfolgen Kann. (Kirchhoff).

Im Zeitraum 0 und 0 + dt, 0 + dt und 0 + 2dt usw. fließt die Ladung

$$dQ = I_V * dt = \frac{U_0}{2Z_W}\, dt$$

in die Leitung. Dies bewirkt, dass der nächste noch ungeladene Kondensator der Kette (C'dx) auf $U_0/2$ aufgeladen wird. Beachte, dass eine differentiale Ladung an einem differentiell kleinen Kondensator einer reellen Spannung entspricht. Mit Q = C*U folgt.

$$dQ = I_V * dt = \frac{U_0}{2Z_W}\, dt = \frac{U_0}{2} * C'dx$$

Nach Kürzen von $U_0/2$ wird

$$\frac{dt}{Z_W} = \frac{dt}{\sqrt{\frac{L'}{C'}}} = C' * dx$$

Aufgelöst nach dx/dt ergibt sich

$$\frac{dx}{dt} = c = \frac{1}{\sqrt{\frac{L'}{C'}}\,C'} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

Die vorlaufende Spannung und Stromwelle breitet sich mit c entlang der Leitung aus.

- **$t = t_E - dt$**

  Die gesamte Leitung ist mit $U_0/2$ aufgeladen.

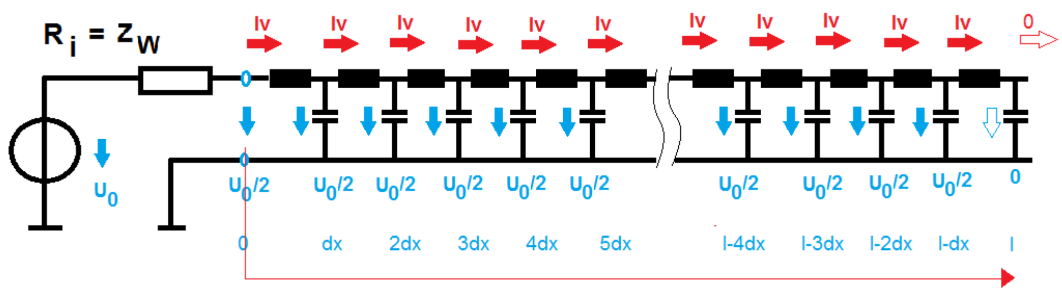


Abbildung 7 Die vorlaufende Welle hat den letzten noch ungeladenen Kondensator erreicht

- **$t = t_E$**

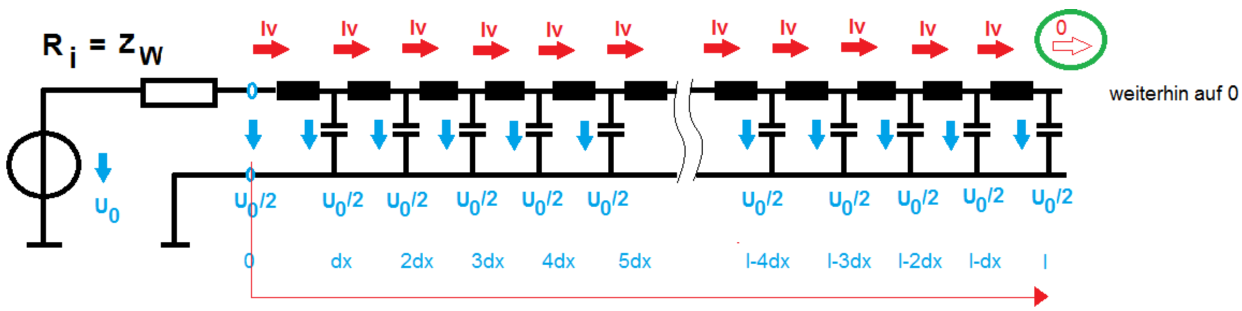


Abbildung 8 Die vorlaufende Welle hat den letzten Kondensator augerladen

- Welche Ladung ist in die Leitung geflossen?
- Welche Zeit ist dabei vergangen?

$$Q = C' * l * \frac{U_0}{2} = I_V * t_E = \frac{U_0}{2Z_W} * t_E$$

$C' * l * \frac{\cancel{U_0}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{U_0}}{\cancel{2}Z_W} * t_E$ daraus folgt

$C' * l = \frac{\cancel{1}}{Z_W} * t_E$ mit

$$c = \frac{l}{t_E} = \frac{1}{C' * Z_W} = \frac{1}{C' * \sqrt{\frac{L'}{C'}}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

2.3.1 Die rücklaufende Welle

Die Quelle pumpt weiter Ladung in die Kette, da die Eingangsspannung der Leitung weiterhin auf $U_0/2$ liegt.

$$\mathrm{I_v} = \frac{\frac{U_0}{2}}{Z_W} = \frac{U_0}{2Z_W}$$

$$dQ = I_V * dt = \frac{U_0}{2Z_W} dt$$

Die Ladung dQ kann in **keinen inneren Kondensator** fließen, da bis auf den letzten Kondensator die angeschlossene Last (der Rest der Leitung) den Strom aufnimmt.

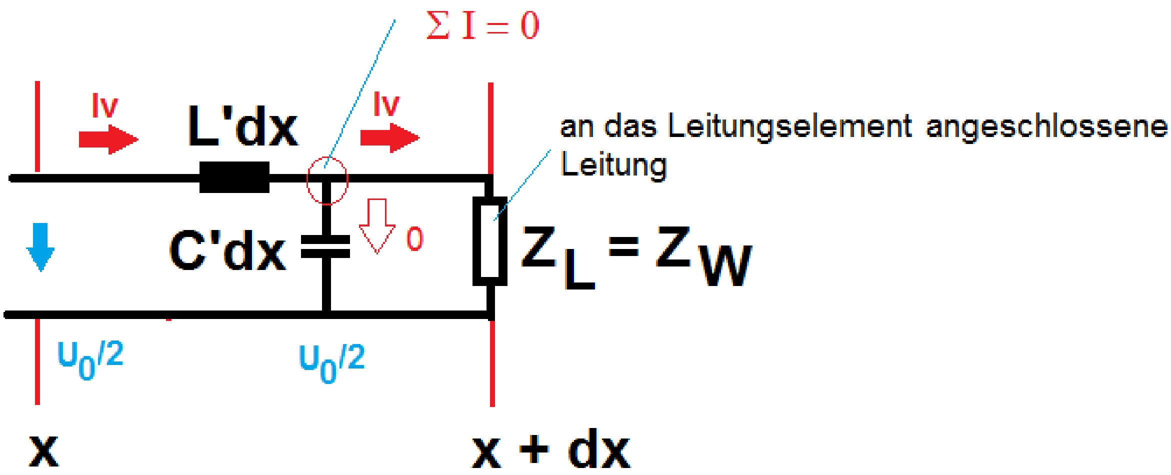


Abbildung 9 Leitungselement innerhalb der Leitung

Der letzte Kondensator ist unbelastet und wird dadurch die Ladung dQ aufnehmen müssen.

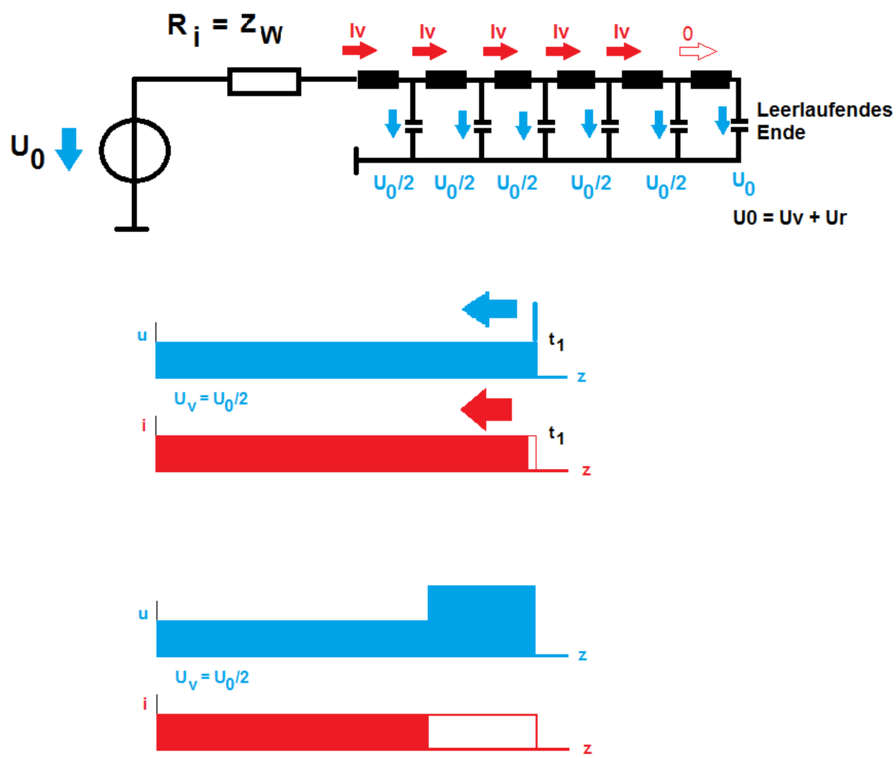
$$dQ = I_V * dt = \frac{U_0}{2Z_W}\,dt = \frac{U_0}{2} * C'dx$$

Der letzte Kondensator bekommt somit erneut die Ladung dQ. Diese Ladung entspricht einem Spannungssprung von $U_0/2$.

- **Wir sehen dass am Ende der Leitung eine Spannungsverdoppelung entstanden ist.**

Die Leitung wird von rückwärts von $U_0/2$ auf U_0 gefüllt. Jener Leitungsteil, der bereits die Spannung U_0 erreicht hat wird stromlos. Beachte, dass der Spannungssprung der sich von der Last zur Quelle bewegt von der Quelle gespeist wird, da die dafür benötigte Ladung nur von der Quelle kommen kann.

- $t = t_E + \delta$



- $t = 2*t_E$

Die Leitung ist mit U_0 aufgeladen. Der Spannungsunterschied zwischen Quelle und Leitung wird 0, daher kann kein weiterer Strom in die Kette fließen.