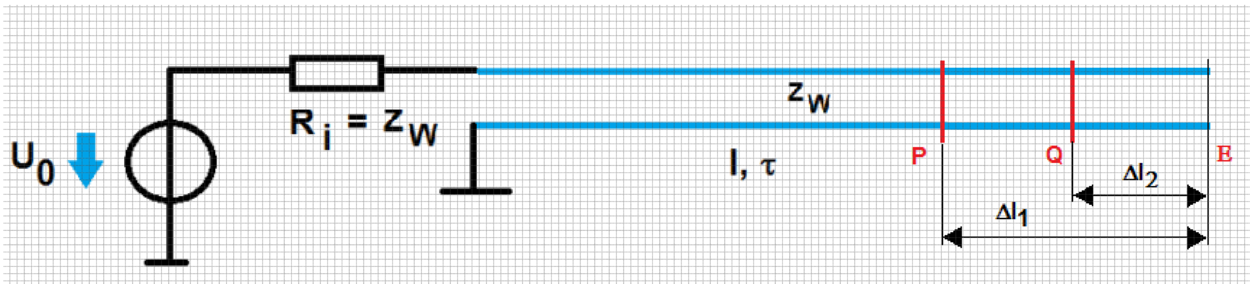
Offene Leitung im Wechselstromkreis

1 Inhalt

2 Offene Leitung bei sin-förmiger Einspeisung

An der leerlaufenden Leitung bildet sich eine stehende Welle aus aber warum?

Betrachten wir eine leerlaufende Leitung die von einer Quelle mit dem Innenwiderstand $R_i = Z_W$ gespeist wird. Wir sehen uns zwei Punkte auf der Leitung an, wobei wir vorerst annehmen, dass beide Punkte P und Q kürzer als $\lambda/4$ vom Ende entfernt sind.



- **Vorlaufende Welle am Punkt P und Q**

Nehmen wir weiter an, die Phase der vorlaufenden Welle am Punkt P ist φ_P und die Spannung der vorlaufenden Welle ist $\widehat{U_V}$. Somit folgt für U_{VP}

$$U_{VP} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P}$$

Die vorlaufende Welle erreicht den **Punkt Q** um die **Laufzeit t_{PQ} später als den Punkt P** daher ist:

$$U_{VQ} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\Delta\varphi_{PQ}}$$

Mit : $\Delta\varphi_{PQ} = \omega * \Delta t_{PQ} = \omega * \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{c}$ folgt

$$U_{VQ} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\Delta\varphi_{PQ}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{j\omega*(-\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{c})}$$

- **Vorlaufende Welle am Ende der Leitung**

Die vorlaufende Welle benötigt noch den Weg Δl_1 um vom Punkt P zum Ende E der Leitung zu gelangen. Daher hat die vorlaufende Welle am Ende der Leitung den Wert:

$$U_{VE} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\Delta\varphi_{PE}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega*\frac{\Delta l_1}{c}}$$

- **Reflexion am Ende der leerlaufenden Leitung**

Mit **ρ = 1** (Leerlauf) folgt.

$U_{RE} = U_{VE}$

- Rücklaufende Welle am Punkt Q und P.

$$U_{RQ} = U_{VE} * \rho_E * e^{-j\Delta\varphi_{EQ}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} * 1 * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_2}{c}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{c}}$$

Die rücklaufende Welle erreicht den **Punkt Q** um die **Laufzeit t_{PQ} früher als den Punkt P** daher ist

$$U_{RP} = U_{VE} * \rho_E * e^{-j\Delta\varphi_{EP}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\Delta\varphi_{PE}} * 1 * e^{-j\Delta\varphi_{EP}}$$
$$= \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} * 1 * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{2\Delta l_1}{c}}$$

Wenn wir die Gesamtspannung am Punkt P und Q berechnen (Addition der vorlaufenden und rücklaufenden Welle) erhalten wir

$$U_P = U_{VP} + U_{RP} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} + \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{2\Delta l_1}{c}} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} \left(1 + e^{-j\omega * \frac{2\Delta l_1}{c}}\right) = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} * \left(e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} + e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}}\right) = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1}{c}} * 2\cos(\omega * \frac{\Delta l_1}{c})$$

$$\Rightarrow \quad U_P = \widehat{U_V} * 2 * \cos(\omega * \frac{\Delta l_1}{c}) * e^{j(\varphi_P - \omega * \frac{\Delta l_1}{c})}$$

$$U_Q = U_{VQ} + U_{RQ} = \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{j\omega * \left(-\frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{c}\right)} + \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{-j\omega * \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{c}}$$
$$= \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * e^{j\omega * \left(-\frac{\Delta l_1}{c}\right)} * \left(e^{-j\omega * \frac{\Delta l_2}{c}} + e^{+j\omega * \frac{\Delta l_2}{c}}\right)$$
$$= \widehat{U_V} * e^{j\varphi_P} * 2\cos\left(\omega * \frac{\Delta l_2}{c}\right) * e^{j\omega * \left(-\frac{\Delta l_1}{c}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad U_Q = \widehat{U_V} * 2\cos(\omega * \frac{\Delta l_2}{c}) * e^{j(\varphi_P - \omega * \frac{\Delta l_1}{c})}$$

Die Phase der beiden Spannungen U_P und U_Q unterscheidet sich nicht, solange der cos nicht das Vorzeichen wechselt. Die Amplitude ist (wie zu erwarten war) vom Abstand zum Ende abhängig (cos Term).

Der Phasensprung entsteht wenn $\boldsymbol{\omega} * \frac{\Delta l_1}{c} > \frac{\pi}{2}$ und $\boldsymbol{\omega} * \frac{\Delta l_2}{c} < \frac{\pi}{2}$ ist.

$$2\pi f \frac{\Delta l_1}{c} > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta l_1 > \frac{c}{4f} = \frac{\lambda}{4}$$

In der Simulation sehen Sie, dass die **Spannung** um 180° springt wenn die Länge $\lambda/4$ (vom Ende gerechnet) überschreitet (oberster Plot rote Linie verglichen mit blau, rosa, braun, grau der ersten vier Plots). Der Strom kann keinen Phasensprung um 180° machen, in diesem Fall würde $\sum I = 0$ nicht mehr passen.

Der Effekt der stehenden Welle kann daher ganz einfach erklärt werden:

Die vorlaufende Welle erreicht den Punkt Q um den Phasenunterschied $\Delta\varphi$ später als den Punkt P. Bei der rücklaufenden Welle ist es umgekehrt. Diese erreicht den Punkt Q um $\Delta\varphi$ früher als dem Punkt P. Wenn beide Wellen dieselbe Amplitude haben (wegen $\rho = 1$ (bzw $\rho=-1$)) ergibt die Addition der beiden Wellen daher keinen Phasenunterschied zwischen P und Q (bei $\Delta l_1 < \frac{\lambda}{4}$).

2.1 Simulation einer offenen Leitung

- f = 100 MHz
- Schaltung

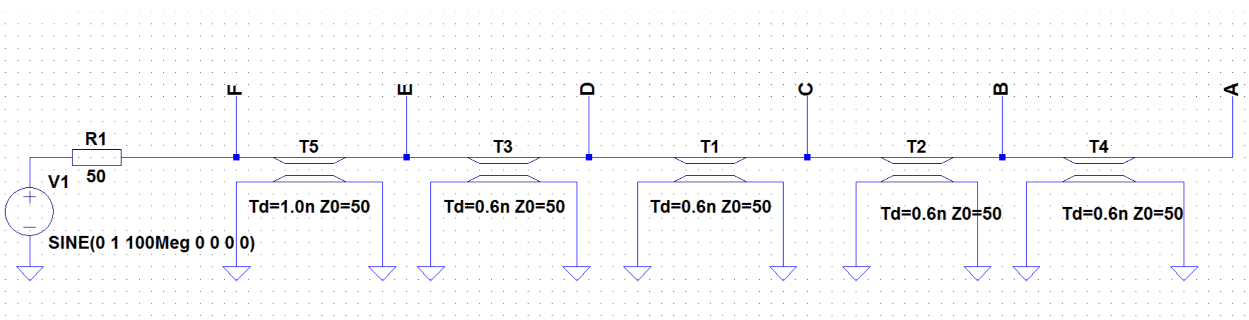
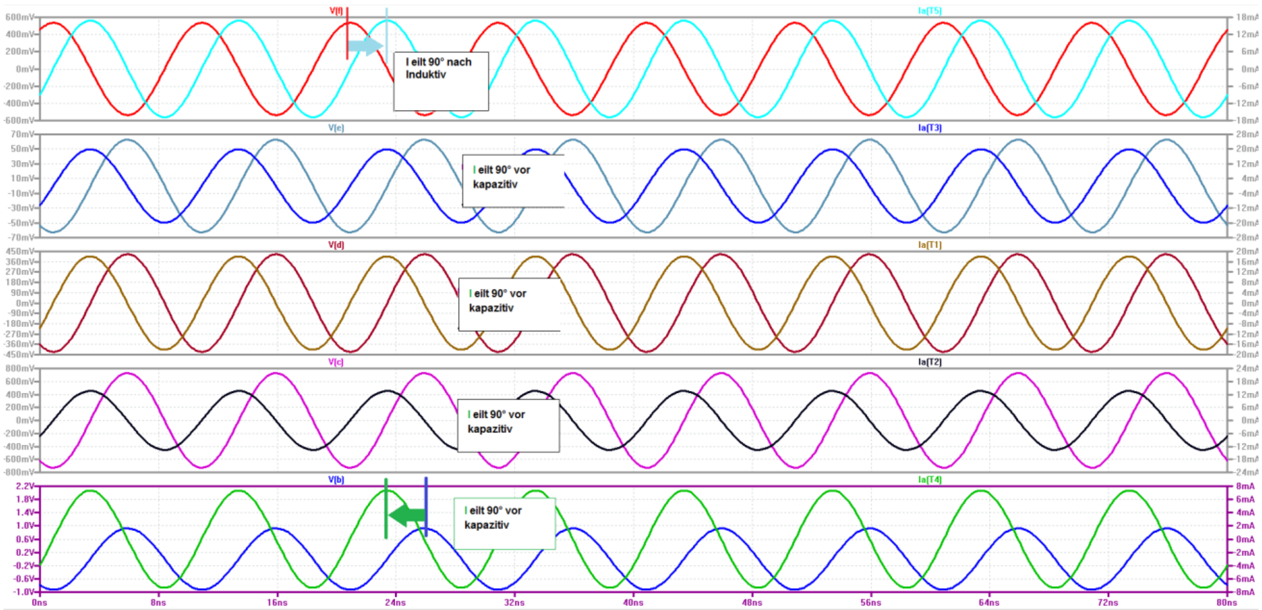


Abbildung 1 Leitung knapp über $\lambda/4$

Damit eine Welle den Weg λ/4 zurücklegt, benötigt sie eine Zeit von T/4. Bei 100 MHz beträgt die Periodendauer $T = \frac{1}{100MHz} = 10^{-8}s = 10 * 10^{-9}s = 10\,ns$.

Für einen Weg von λ/4 wird daher eine Zeit von 2.5 ns benötigt. Bis zum Punkt E ist die Leitung daher kapazitiv, am Punkt F ist sie induktiv.

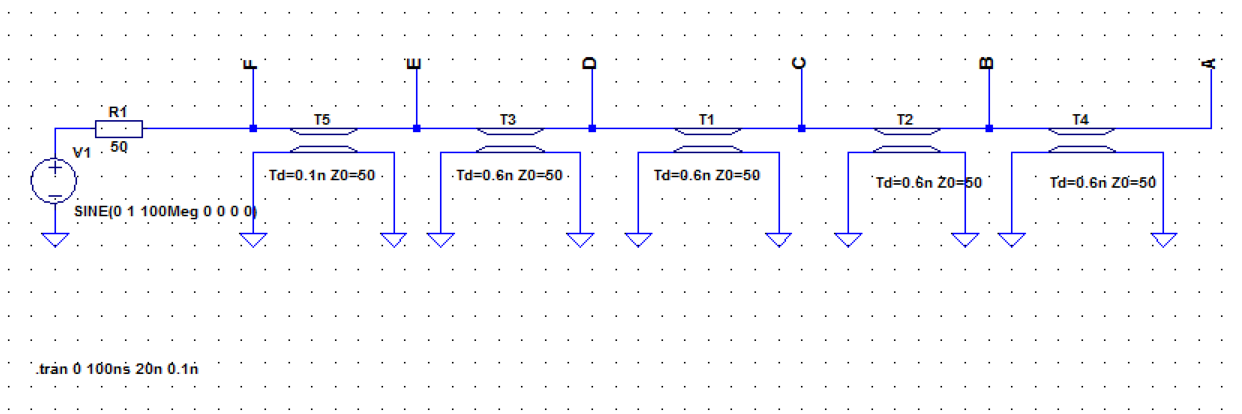


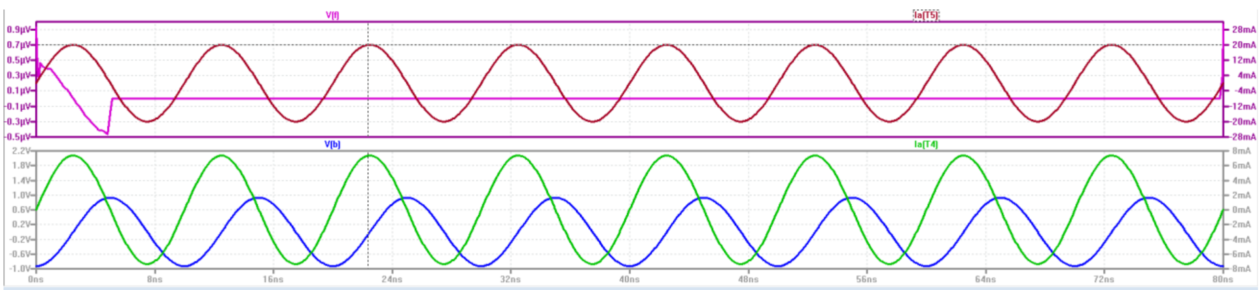
Schön zu erkennen ist auch der Phasensprung für den Punkt F bei der Spannung der jetzt länger als λ/4 vom offenem Ende (A) entfernt ist.

Beachte: Eine Leitungsverlängerung innerhalb von λ/4 bewirkt keine Phasendrehung im Impedanzverlauf, erst wenn λ/4 überschritten wird, kommt es zu einem Phasensprung von 180°, Kapazitiv → Induktiv oder umgekehrt.

Bei einer leitungslänge von λ/4 wird der Eingang ein Kurzschluss wenn der Ausgang offen ist.

2.2 Offene λ/4 Leitung ist am Eingang ein Kurzschluss





I = 1V/50Ω = 20 mA.