Übung 4: ***Zahlensysteme***

in

„Digitaltechnik"

WS 2008/09

Aufgabe 1

(a) *Wie lässt sich allgemein eine n-stellige natürliche Zahl in einem beliebigen Zahlensystem darstellen? Geben Sie jeweils für das duale, dezimale bzw. hexadezimale Zahlensystem die Basis und den Zeichenvorrat an!*

$$(Z)_B = \sum_{i=0}^{n-1} C_i B^i = C_{n-1}B^{n-1} + C_{n-2}B^{n-2} + \ldots + C_1 B^1 + C_0 B^0; \qquad C = Faktor$$

$$B = Basis$$

$$(174)_{10} = 1*10^2 + 7*10^1 + 4*10^0$$

Zahlensystem	***Basis***	***Zeichenvorrat***
Dezimal	*10*	*0,1,2,3,4,5,6,7,8,9*
Dual	*2*	*0,1*
Hexadezimal	*16*	*0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F*
Oktal	*8*	*0,1,2,3,4,5,6,7*

(b) *Notieren Sie die folgenden Zahlen in verschiedenen Zahlensystemen:*

$(375)_{10} \rightarrow (N)_2, (N)_{16}$ $\qquad$ $(1001011)_2 \rightarrow (N)_{10}$

$(375)_{10}$ →	**$(N)_2$**
375 : 2 = 187	Rest 1
187 : 2 = 93	Rest 1
93 : 2 = 46	Rest 1
46 : 2 = 23	Rest 0
23 : 2 = 11	Rest 1
11 : 2 = 5	Rest 1
5 : 2 = 2	Rest 1
2 : 2 = 1	Rest 0
1 : 2 =0	Rest 1

Dezimal → Dual (Binär)

Dezimal → Hexadezimal

$(375)_{10}$ →	**$(N)_{16}$**
$16^3 = 4096 > 375$	0
$16^2 = 256 < 375$	
$375 - 1 * 16^2 = 119$	1
$16^1 = 16 < 119$	
$119 - 7 * 16^1 = 7$	7
$16^0 = 1 < 7$	
$7 - 7 * 16^0 = 0$	7
$(375)_{10}$ →	$(177)_{16}$

$$(1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1)_2$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \underbrace{1*2^8}_{256} + \underbrace{0*2^7}_{0} + \underbrace{1*2^6}_{64} + \underbrace{1*2^5}_{32} + \underbrace{1*2^4}_{16}$$

$$+ \underbrace{0*2^3}_{0} + \underbrace{1*2^2}_{4} + \underbrace{1*2^1}_{2} + \underbrace{1*2^0}_{1}$$

$$= 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 = 375$$

Oder!!!

Dezimal → Hexadezimal

$(375)_{10}$ →	**$(N)_{16}$**
375 : 16 = 23	Rest 7
23 : 16 = 1	Rest 7
1 : 16 = 0	Rest 1
$(375)_{10}$ →	$(177)_{16}$

Dezimal → Oktal

$(375)_{10}$ →	**$(N)_{8}$**
375 : 8 = 46	Rest 7
46 : 8 = 5	Rest 6
5 : 8 = 0	Rest 5
$(375)_{10}$ →	$(567)_{8}$

Dual → Dezimal

$(1001011)_2$ →	**$(N)_{10}$**

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \end{array} = \underbrace{1*2^6}_{64} + \underbrace{0*2^5}_{0} + \underbrace{0*2^4}_{0} + \underbrace{1*2^3}_{8} + \underbrace{0*2^2}_{0} + \underbrace{1*2^1}_{2} + \underbrace{1*2^0}_{1}$$

$$= 64 + 8 + 2 + 1 = 75$$

$(1001011)_2$ → $(75)_{10}$

$(1001011)_2$ → $(N)_{16}$

Dual → Hexadezimal

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$$

$$\left(\underbrace{0\ 1\ 0\ 0}_{4}\qquad \underbrace{1\ 0\ 1\ 1}_{B}\right) = (4B)_{16}$$

$(1001011)_2$ → $(4B)_{16}$

$(1001011)_2$ → $(N)_8$

Dual → Oktal

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1)_2$$

$$\left(\underbrace{0\ 0\ 1}_{1}\ \underbrace{0\ 0\ 1}_{1}\ \underbrace{0\ 1\ 1}_{3}\right) = (113)_8$$

$(1001011)_2$ → $(113)_8$

$(17B)_{16}$ → $(N)_2$

Hexadezimal → Dual

$$1 = \quad 0\ 0\ 0\ 1$$
$$7 = \quad 0\ 1\ 1\ 1$$
$$B = \quad 1\ 0\ 1\ 1$$
$$\Rightarrow (17B)_{16} \rightarrow (0001\ 0111\ 1011)_2$$

$(10011010)_2$ → $(N)_8$

Dual → Hexadezimal

$$(1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)_2$$

$$\left(\underbrace{1\ 0\ 0\ 1}_{9}\quad \underbrace{1\ 0\ 1\ 0}_{A}\right) = (N_{16}) = (9A)_{16}$$

(c) *Welcher Wertebereich positiver, ganzer Dualzahlen kann mit einem Datenwort der Länge 4 Bit dargestellt werden? Welchen Wertebereich erhält man, wenn ganze Dualzahlen dargestellt werden sollen?*
Verallgemeinern Sie auf N Bit lange Datenworte!

positive ganze Dualzahlen (4 – Bit)

	Dual	Dezimal
größter Wert	1111	15
Kleinster Wert	0000	0

$\left.\right\} \left[0,1,\ldots,14,15\right]$

N – Bit $\left[0,1,\ldots,2^N-1\right]$

a) Format mit Betrag & Vorzeichen
MSB(Most Significant Bit = *höchstwertige* Bit)
$0 \mathrel{\hat{=}} +; \qquad 1 \mathrel{\hat{=}} -$

	Dual	Dezimal
größter Wert	0111	7
Kleinster Wert	1111	-7

$\left.\right\} \left[-7,-6,\ldots,+6,+7\right]$

b) MSB(Most Significant Bit = *höchstwertige* Bit)
$0 \mathrel{\hat{=}} +; \qquad 1 \mathrel{\hat{=}} -$

positive Zahlen: Betrag
negative Zahlen: Zweierkomplement (ZK)

Dual	Dezimal	Dual	Dezimal
0| 111	+7	1| 111	-1
0| 110	+6	1| 110	-2
0| 101	+5	1| 101	-3
0| 100	+4	1| 100	-4
0| 011	+3	1| 011	-5
0| 010	+2	1| 010	-6
0| 001	+1	1| 001	-7
0| 000	0	1| 000	-8

Wertebereich: N – Bit= $\left[-\left(2^{N-1}\right),\ldots,+\left(2^{N-1}-1\right)\right]$

Eigenschaften des Komplementären Zahlenraums

$ZK + Z = B^N$ $\qquad$ $N = Bitlänge;\ \ B = Basis; \qquad Z = Zahl$

$EK + Z = B^N - 1$

Bildung Einerkomplement (EK)

Alle Stellen der Zahl werden invertiert $0\ 1\ 0\ 1 \rightarrow 1\ 0\ 1\ 0\,(EK)$

Bildung des Zweierkomplements (ZK)

$EK + LSB \qquad (LSB = Least\ Significant\ Bit)$

ZK von $0\ 1\ 0\ 1$

$$
\begin{array}{llll}
0\ 1\ 0\ 1 & & 1\ 0\ 1\ 0 & (EK) \\
 & + & 0\ 0\ 0\ 1 & (LSB) \\
\hline
 & & 1\ 0\ 1\ 1 & (ZK)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
oder: & & 0\ 1\ 0\ 1 \\
 & & \quad\ \ \ \downarrow \\
 & \rightarrow & 1\ 0\ 1\ 1
\end{array}
$$

1. Fange bei der rechten Stelle (niedrigstwertiges Bit) an.
2.
   a. Wenn diese Stelle eine **0** ist, schreibe eine **0** und gehe zu *Punkt 3*;
   b. Wenn diese Stelle eine **1** ist, schreibe eine **1** und gehe zu *Punkt 4*.
3. Gehe ein Zeichen nach links und wiederhole *Punkt 2*.
4. **Invertiere** alle restlichen Stellen bis zum höchstwertigen Bit.

Aufgabe 2

Führen Sie die folgenden Rechenoperationen durch:

a) $(1100\ 0101)_2 + (0110\ 0110)_2$
Format: positive 8bit-Dualzahlen

$$
\begin{array}{rl}
 & 1\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\
+ & {}_1 0\,1\,1\,0\,{}_1 0\,1\,1\,0 \\
\hline
1| & 0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1
\end{array}
$$

b) $(1101)_2 \cdot (1011)_2$
Format: positive 4bit-Dualzahlen

$$
\begin{array}{r}
\underline{1\,1\,0\,1 \quad \cdot \quad 1\,0\,1\,1} \\
1\,1\,0\,1 \\
0\,0\,0\,0 \\
1\,1\,0\,1 \\
{}_1\ {}_1\ {}_1\quad 1\,1\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1
\end{array}
$$

c) 1) $(00000111)_2 - (00000100)_2$

0 0 0 0 0 1 1 1 |7

0 0 0 0 0 1 0 0 |4
0 0 0 0 0 1 0 ← 0
0 0 0 0 0 1 ← 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0

Alles invertieren!!!

⇒ 1 1 1 1 1 1 0 0 |−4

$$
\begin{array}{rll}
 & 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 & |7 \\
+ & 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0 & |-4 \\
\hline
1| & 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 & |3
\end{array}
$$

Falsche Überlagerung

2) $(00000011)_2 - (00000111)_2$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \quad |\,3$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \quad |\,7$

$0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1$

Alles invertieren!!!

$\Rightarrow 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \quad |\,-7$

$$
\begin{array}{llr}
 & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 & |\,3 \\
+ & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 & |\,-7 \\
\hline
 & 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 & |\,-4
\end{array}
$$

3) $(01111111)_2 - (11111111)_2$

$0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad |\,127$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \quad |\,255$

$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$

Alles invertieren!!!

$\Rightarrow 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \quad |\,1$

$$
\begin{array}{llr}
 & 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & |\,127 \\
+ & 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 & |\,-(-1) \\
 & \ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & \\
\hline
 & 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & |\,-128
\end{array}
$$