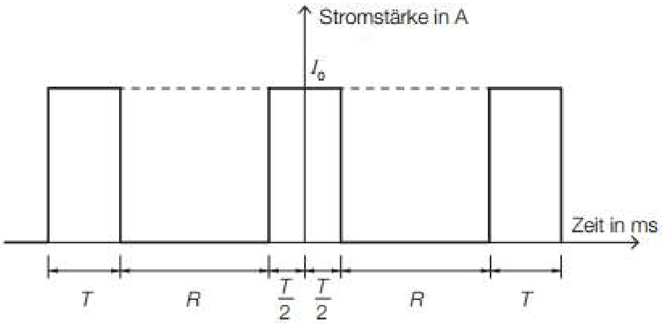
FOURIER-REIHE

1. Bei der transkutanen elektrischen Nervenstimulation (TENS) wird der dargestellte periodische Reiz verwendet.



   a. Erstelle eine Formel für den Gleichanteil.

   b. Für R = 2 ms und T = 0,5 ms berechnet jemand die Frequenz f in Hertz (Hz) folgendermaßen:

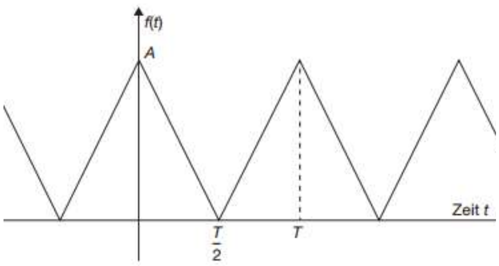
   f = $\frac{1}{2+0{,}5}$Hz

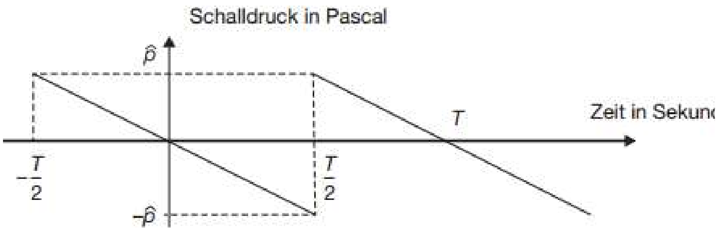
   Erkläre, welcher Fehler gemacht wurde. Stelle diesen Fehler richtig.

   c. Das dargestellte Signal soll in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. <u>Beschreibe</u>, wie sich die Symmetrie auf die Koeffizienten der Fourier-Reihe auswirkt.

2. Der von einem Instrument erzeugte Klang setzt sich aus einem Grundton und Oberschwingungen zusammen. Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Klanganalyse ist die Fourier-Analyse.

   a. Ein Tongenerator erzeugt folgendes Signal (siehe Abb. links unten):





   Erstelle über eine Periodendauer diejenigen Funktionsgleichungen, die dieses Signal beschreiben.

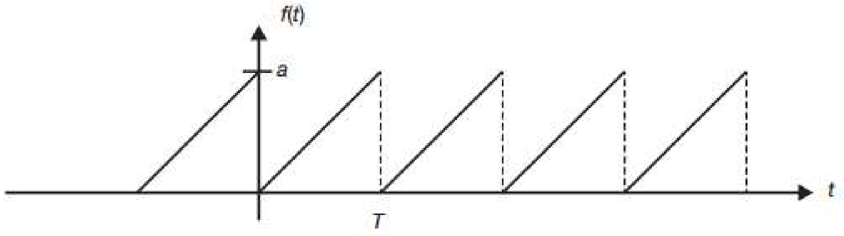
   b. Um einen Ton einer Geige auf einem Analog-Synthesizer zu erzeugen, benötigt jemand die angegebene Sägezahnfunktion (siehe Abb. rechts oben):

$$p(t) = -\frac{2\hat{p}}{T}t \text{ für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

p ... Schalldruck in Pa, T ... Periodendauer in Sekunden

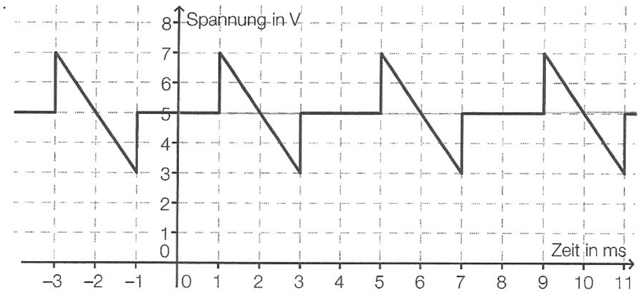
   Zeige mithilfe der Fourier-Reihen-Entwicklung, dass die Amplituden der Obertöne proportional zu 1/n sind.

c. Argumentiere, warum in der Fourier-Reihe der skizzierten periodischen Funktion alle Amplituden der Cosinus-Anteile null sein müssen.



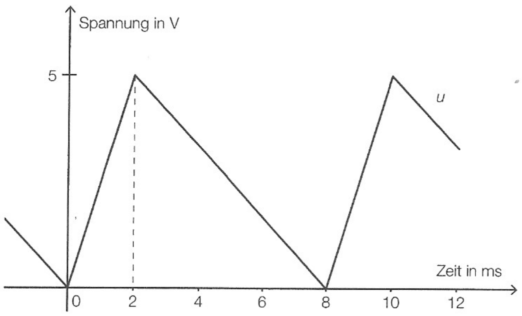
3. Periodische Spannungen

a. Die nachstehende Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf einer periodischen Spannung:



Begründe mithilfe der obigen Grafik warum der Gleichanteil der dargestellten Spannung 5V beträgt.
Der dargestellte Spannungsverlauf soll in eine Fourier Reihe entwickelt werden. Argumentiere, warum die Cosinusanteile dieser Fourier Reihe Null sein müssen.

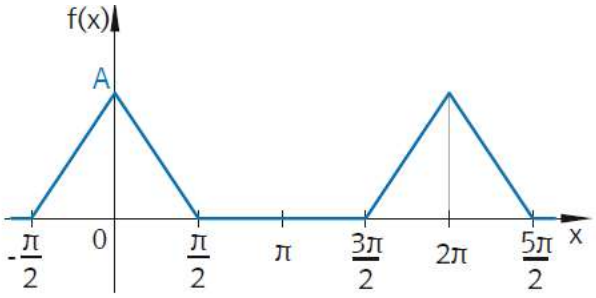
b. Die nachstehende Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf einer periodischen Spannung:



Erstelle eine Funktionsgleichung der dargestellten Funktion u auf geeigneten Teilintervallen des Bereichs 0ms bis 8ms.

Berechne den Fourierkoeffizienten a_3 der Funktion.

4. Gegeben ist der Graph einer periodischen Funktion:

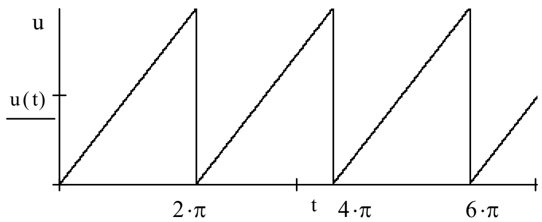


a. Gib die Funktionsgleichung an
b. Welche Art von Symmetrie liegt hier vor?
c. Berechne die Fourierkoeffizienten dieser Funktion und schreibe die Fourier Reihe an.

5. Gegeben ist die Funktion f(t) = $\begin{cases} t & \text{für } 0<t<1 \\ 1 & \text{für } 1<t<3 \\ 4-t & \text{für } 3<t<4 \end{cases}$

a. Zeichne die Funktion in ein Koordinatensystem
b. Bestimme die Periode und die Grundkreisfrequenz.
c. Welche besondere Eigenschaft weist das Signal auf? Wie lässt sich diese Eigenschaft bei der Fourierreihenentwicklung nutzen?
d. Ermittle die Koeffizienten der Fourierzerlegung.
e. Nähere das Signal durch eine Fourierzerlegung bis zur 4 Oberschwingung an.
f. Bestimme den Klirrfaktor und interpretiere ihn im Hinblick auf die Güte der Reihe.

6. Gegeben ist die im Bild dargestellte Kippspannung



a. Bestimme eine allgemeine Termdarstellung für die angegebene Funktion
b. Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion und welche Vereinfachungen ergeben sich daraus?
c. Entwickle die Funktion in eine reelle Fourierreihe und berechne die Fourierkoeffizienten bis n = 5.
d. Gib die Reihe in der Summenschreibweise an.
e. Zeichne das Amplitudenspektrum.
f. Berechne den Klirrfaktor unter Verwendung der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

7. Für eine unbekannte, aber periodische Funktion wurde eine Fourieranalyse durchgeführt. Die sin/cos-Form des Ergebnisses lautet:

$$f(t) = 0{,}75 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n\cdot\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot t}{2}\right) + \frac{3}{n\cdot\pi} \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot t}{2}\right) \right)$$

a. Welchen Wert hat a_0 ?

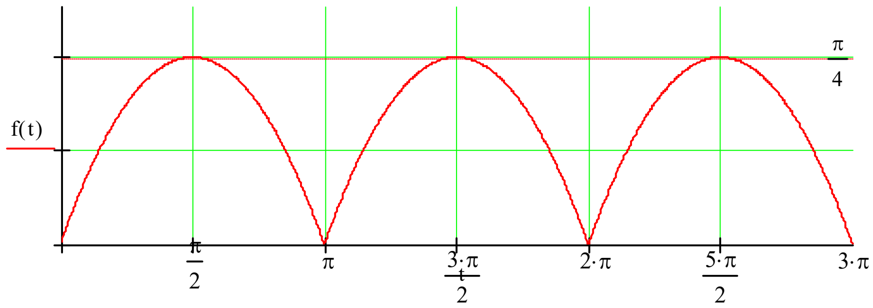
b. Welche Periodendauer hat die Funktion?

c. Wie lauten hier die allgemeinen Formeln für a_n und b_n ?

d. Gib eine Näherung der Funktion bis zur 2. Oberschwingung an

e. Wandle die Näherung aus d) in die Amplituden-Phasen-Form um (Amplitude und Phasenwinkel)

8. Gegeben ist das im folgenden Diagramm ausschnittsweise dargestellte periodische Signal f(t)



a. Gib die Periode des Signals an und formuliere seine mathematische Gleichung. Es handelt sich um eine Polynomfunktion zweiten Grades.

b. Welche besondere Eigenschaft weist diese Funktion auf? Wie lässt sich diese Eigenschaft bei der Fourierreihenentwicklung nutzen?

c. Ermittle die Koeffizienten der Fourierzerlegung.

d. Nähere das Signal durch eine Fourierzerlegung bis zur 4 Oberschwingung an und stelle das Amplitudenspektrum in geeigneter Weise graphisch dar.

e. Gib die allgemeine Darstellung der Fourierreihe dieses Signals in Summenschreibweise an.

f. Gegeben sind die folgenden konvergenten Zahlenreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Verwende die Fourierreihe um die Summen der beiden unendlichen Reihen zu ermitteln.

g. Ein Maß für den Oberschwindungsgehalt einer periodischen Funktion ist der Klirrfaktor k:

$$k = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + \ldots\ldots\ldots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \ldots\ldots\ldots}}$$ Dabei sind die A_i die Amplituden von Grund- und Oberschwingungen.

Berechne den Klirrfaktor von f(t). Verwende dazu die folgende Reihe:

$$1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \ldots\ldots\ldots = \frac{\pi^4}{90}$$

9. Für eine unbekannte, aber periodische Funktion wurde eine Fourieranalyse durchgeführt. Die sin/cos-Form des Ergebnisses lautet:

$$f(t) = \frac{10}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-5}{n\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{n\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot 2\cdot\pi\cdot t}{3}\right) + \frac{-5}{n\cdot\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{n\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) - 1\right)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot 2\cdot\pi\cdot t}{3}\right)\right)$$

a. Welchen Wert hat a_0 ?

b. Welche Periodendauer hat die Funktion?

c. Wie lauten hier die allgemeinen Formeln für a_n und b_n ?

d. Gib eine Näherung der Funktion bis zur 2. Oberschwingung an

e. Wandle die Näherung aus d) in die Amplituden-Phasen-Form um (Amplitude und Phasenwinkel)

Lösungen (ohne Gewähr):

1. $a_0 = \frac{I_0 T}{R+T}$; es wurde nicht berücksichtigt, dass R und T in ms angegeben sind; $f = \frac{1}{2.10^{-3}+0{,}5.10^{-3}} Hz$; da f(-x) = f(x) handelt es sich um eine gerade Funktion und somit sind die Amplituden der Sinusanteile gleich Null.
2. a)

$$f_1(t) = -\frac{2A}{T}\cdot t + A \quad \text{für} \quad 0 \le t \le \frac{T}{2}$$
$$f_2(t) = \frac{2A}{T}\cdot t - A \quad \text{für} \quad \frac{T}{2} \le t \le T \quad \text{oder} \quad f_2(t) = \frac{2A}{T}\cdot t + A \quad \text{für} \quad -\frac{T}{2} \le t \le 0$$

b)

$$p(t) = -\frac{2\hat{p}}{T}\cdot t \quad \text{für} \quad -\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$$

$a_0 = a_n = 0$, da $p(t)$ ungerade symmetrisch ist

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\, n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} -\frac{2\hat{p}}{T}\cdot t \cdot \sin(n\cdot\omega\cdot t)\,dt = \frac{2\hat{p}}{\pi}\cdot\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^n\cdot 2\hat{p}}{\pi}\cdot\frac{1}{n}$$

$A_n = |b_n| \Rightarrow$ Die Amplituden fallen mit $\frac{1}{n}$.

c) Die gegebene periodische Funktion unterscheidet sich von einer ungeraden symmetrischen Funktion nur durch eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse. Dieser Verschiebung entspricht der Gleichanteil. Die Fourier-Reihe der skizzierten Funktion enthält daher, wie eine ungerade symmetrische Funktion, nur Sinus-Anteile.

3. a) Die beiden Dreiecke gleich groß sind, beträgt die Fläche des flächengleichen Rechtecks über eine Periodendauer 5V.
   Die gegebene Funktion unterscheidet sich von einer ungeraden Funktion nur durch eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse. Die Fourier Reihe der dargestellten Funktion enthält also, wie eine ungerade Funktion, keine Cosinusanteile.
   b) $u(t) = \begin{cases} \frac{5}{2}t \text{ für } 0 \le t < 2 \\ \frac{40-5t}{6} \text{ für } 2 \le t < 8 \end{cases}$
   a_3 = -0,1501
4.

a. f mit $f(x) = \begin{cases} \frac{2A}{\pi}x + A & \text{für } -\frac{\pi}{2} \le x < 0 \\ -\frac{2A}{\pi}x + A & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

b. $a_0 = \frac{A}{4};\ a_n = \frac{4A}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\left(1-\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right);\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$

$f(x) = \frac{A}{4} + \frac{4A}{\pi^2}\left(\cos(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \frac{1}{18}\cos(6x) + \frac{1}{49}\cos(7x) + \frac{1}{81}\cos(9x) + \ldots\right)$

5. a) b) T = 4; $\omega = \frac{\pi}{2}$;c)gerade, alle b_n = 0; d) e) f(t) = $\frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{1}{4}\cos(\pi t) + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{1}{25}\cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) + \cdots.\right)$g) 45,7%
6. a) f(t) = $\frac{\hat{u}}{2\pi}t$; b)unterscheidet sich von einem punktsymmetrischen Signal nur durch eine Verschiebung entlang der y-Achse, deshalb sind alle a_n gleich Null; c) a_0 = $\hat{u}$; b_n = $-\frac{\hat{u}}{n\pi}$; f) 62,6%
7.
8. a) f(t) = $-\frac{t^2}{\pi} + t$; Periode π; b) achsensymmetrisch, alle Sinusterme fallen weg; c) a_0= $\frac{\pi}{3}$; $a_n = -\frac{1}{n^2\pi}$; f) $\frac{\pi^2}{6}$; $\frac{\pi^2}{12}$; g) 27,57%