Übungszettel 2: **Differentialgleichungen 2. Ordnung** 4. Jhg.

Homogene DGL 2. O.

1. Die Differentialgleichung des frei schwingenden Feder - Masse - Systems lautet
   $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{c}{m}y = 0$, wobei m die schwingende Masse, c die Federkonstante und b die sogenannte Dämpfungskonstante ist.
   Löse diese Differentialgleichung mit m = 1kg und c = 16N/m, wenn die Dämpfungskonstante b den folgenden Wert hat:
   a) b = 0 kg/s b) b = 1 kg/s c) b = 10 kg/s d) b = 8 kg/s
   unter den Anfangsbedingungen y(0) = 0 und y' (0) = v_0 = 1,2 m/s.
   Skizziere in jedem Fall die Lösungskurve.

2. Ein biegsames Seil der Länge l gleitet reibungsfrei über eine Tischkante. Ist x(t) die Länge des überhängenden Seils zur Zeit t, so ist die auf das Seil einwirkende Kraft gleich dem Gewicht des überhängenden Seils also $\frac{x}{l}.mg$. Die Differentialgleichung der Bewegung lautet somit:
   $m.x''(t) = \frac{x}{l}.mg$
   Löse diese Differentialgleichung für ein 1,5m langes Seil, das zu Beginn (t = 0) zur Hälfte überhängt und sich aus der Ruhe heraus in Bewegung setzt.
   Nach welcher Zeit ist das Seil abgerutscht?

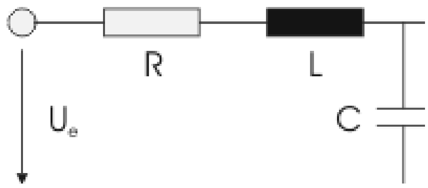
3. An einer kritischen Stelle einer Schi Abfahrtsstrecke wird ein Fangnetz installiert, das auf eine aufprallende Masse folgende Kräfte ausübt:
   Eine Elastizitätskraft F_1, die umso größer ist, je stärker das Netz durch den Anprall gespannt wird: $F_1 = -a_1.y$ (rücktreibend)
   Eine bremsende Kraft F_2 (innere Reibungskraft), die der momentanen Geschwindigkeit proportional ist: $F_2 = -a_2.y'$
   Nach dem 2. Gesetz von Newton ergibt sich folgende Kräftebilanz:
   $m.y'' = -a_2 y' - a_1 y$
   Löse diese Differentialgleichung für die speziellen Werte: m = 100kg; a_1 = 1800N/m; a_2 = 900N/m; unter den Anfangsbedingungen y(0) = 0 und v_0 = 108km/h
   Die Lösungsfunktion modelliert den Aufprall einer Masse von 100kg bei einer Aufprallgeschwindigkeit von 108km/h als Funktion der Zeit.
   Bestimme den maximalen y- Wert sowie die maximale Beschleunigung.

4. Eine Bungee-Sprung-Anlage hat eine Absprungplattform, die 30m über dem Boden liegt. Das verwendete Seil ist 15m lang. Die Rückstellkraft c des Seiles beträgt 250N/m. Wir gehen davon aus, dass der Springer ein Gewicht von 80kg hat.
   Für den freien Fall mit Luftwiderstand gilt der Zusammenhang: $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)$, wobei der Reibungskoeffizient k = 0,3kg/m beträgt.
   a) Berechne die Geschwindigkeit, die der Springer erreicht, während er 15m im freien Fall zurücklegt.
   b) Für ein frei schwingendes Feder-Masse-System gilt die Differentialgleichung
      $m.y'' + b.y' + c.y = 0$
      Die Dämpfungskonstante b soll dem Reibungskoeffizienten k entsprechen.
      Berechne den tiefsten Punkt, den der Springer erreicht. Ist der Sicherheitsabstand zum Boden groß genug?

5. Ein elektrischer Reihenschwingkreis besteht aus einem Ohmschen Widerstand, einem induktiven Widerstand $L = 1H$ und einem kapazitiven Widerstand $C = 100\mu F$. Der mit $U_0 = 100V$ aufgeladene Kondensator beginnt sich zur Zeit $t = 0$ zu entladen. Je nach Größe des Ohmschen Widerstandes R wird der Stromverlauf unterschiedlich ausfallen.
   Berechne für die folgenden 3 Fälle den Stromverlauf durch Aufstellen und Lösen einer DGL:
   a) $R = 50\Omega$ b) $R = 200\Omega$ c) $R = 250\Omega$

Inhomogene DGL 2. O.

6. In einem elektrischen Reihenschwingkreis mit $R = 200\Omega$; $C = 100\mu F$ und $L = 1H$ befindet sich eine Gleichspannungsquelle $U_0 = 10V$, die zur Zeit $t = 0s$ wirksam wird.



   a) Formuliere die Differentialgleichung der Spannung am Kondensator $u_a(t)$.
   b) Untersuche das Einschwingverhalten des Systems durch Berechnung des Dämpfungsgrads und interpretiere das Ergebnis.
   c) Berechne den Spannungsverlauf u_a am Kondensator, wenn der Reihenschwingkreis anfänglich energielos war. ($u_a(0) = 0$, $u_a'(0) = 0$)
   d) Stelle $u_a(t)$ und die Teillösungen (homogene und partikuläre) für die ersten 100 ms grafisch dar und interpretiere das Ergebnis.
   e) Ermittle den Stromverlauf i(t) und stelle ihn für die ersten 100ms grafisch dar.
   f) Nach wie vielen ms hat der fließende Strom ein Maximum? Wie groß ist die Kondensatorspannung zu diesem Zeitpunkt?

7. Ein gedämpftes Feder-Masse-System der Masse m = 2 kg besitzt eine Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = 25s^{-1}$. Ab $t = 0s$ wird es durch die konstante Kraft F(t)=400N aus dem Ruhezustand zum Schwingen angeregt. Der Dämpfungsgrad D ist miteinzubeziehen.
   a) Ermittle allgemein die Differentialgleichung des Systems mit Hilfe der gegebenen Größen.
   b) Löse die DGL für alle drei Angabefälle 1) bis 3) numerisch mit Geogebra.
   c) Stelle die Graphen in einem Diagramm dar und erkläre den unterschiedlichen Bewegungsverlauf in der Einschwingphase.

   1) $D = \frac{2}{3}$ 2) $D = \frac{5}{4}$ 3) $D = 1$

8. Ein Feder-Masse-System ist durch folgende Daten gekennzeichnet: Masse $m = 20\,kg$, Dämpfungskonstante $b = 600\,kg/s$, Federkonstante $c = 1{,}25 \cdot 10^4\ N/m$. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wirkt eine konstante Kraft $F = 5\,kN$ auf das bis zu diesem Zeitpunkt ruhende System.
   a) Bestimme den zeitlichen Ablauf der Auslenkung durch Lösen der DGL $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{c}{m}y = \frac{F(t)}{m}$.
   b) Bestimme den Dämpfungsgrad D des nicht angeregten Systems.

9. Ein Schwingkreis besteht aus einem induktiven Widerstand von 0,05H, einem Ohmschen Widerstand von 5Ω und einem Kondensator von $4 \cdot 10^{-4}$ F.
   Bestimme unter der Anfangsbedingung q(0)=i(0)=0 Ladung und Strom in Abhängigkeit von t, wenn
   a) eine konstante Spannung von 110V angelegt wird und
   b) eine sich ändernde Spannung von u(t)=200cos100t angelegt ist (komplexer Ansatz).

10. Gegeben ist ein Reihenschwingkreis, dessen Kondensator anfänglich ungeladen ist, mit folgenden Bauteilwerten: $R = 20\Omega$, $L = 40mH$, $C = 200\mu F$, $u_e(t) = 10V \cdot \sin(500s^{-1} \cdot t)$
    a) Formuliere die Differentialgleichung der Spannung am Kondensator.
    b) Gesucht ist die Kondensatorspannung des gegeben elektrischen Reihenschwingkreises als Funktion der Zeit. Löse sowohl mit trigonometrischem als auch mit komplexem Ansatz. (Anfangsbedingungen: $u_C(0)=0$ $u'_C(0)=0$)
    c) Stelle flüchtige und stationäre Lösung mit Geogebra in sinnvoller Weise grafisch dar und kontrolliere die Lösung. (Zeige die grafische Übereinstimmung.)

11. Eine Spule mit der Induktivität 2H, ein Widerstand von 16Ω und ein Kondensator mit 0,02F sind in Reihe an einer Spannungsquelle mit U=100sin3t angeschlossen. Zur Zeit $t = 0$ sind Ladung des Kondensators und Stromstärke gleich 0.
    Bestimme die Ladung und die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit t (komplexer Ansatz).

12. Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus einem Ohmschen Widerstand $R = 20\Omega$, einem induktiven Widerstand $L = 0{,}05H$, einem kapazitiven Widerstand $C = 100\mu F$ und einer Spannungsquelle U=100cos200t. Zur Zeit $t = 0$ sind Ladung des Kondensators und Stromstärke gleich 0.
    Berechne den Strom zu einer beliebigen Zeit t > 0.
    Gib den transienten und den stationären Strom getrennt an und interpretiere das Ergebnis.
    Berechne für den stationären Strom die Amplitude und die Phasenverschiebung.

13. Ein Reihenschwingkreis enthalte den Ohmschen Widerstand $R = 500\Omega$, einen Kondensator mit der Kapazität $C = 5\mu F$ und eine Spule mit der Induktivität $L = 0{,}2H$.
    Wie lautet die stationäre Lösung der zugehörigen DGL für den Strom, wenn das System durch die von außen angelegte Wechselspannung $u(t) = 300V \cdot \sin(500 s^{-1} t)$ angeregt wird? Löse sowohl mit trigonometrischem als auch mit komplexem Ansatz.

14. Gegeben ist folgender elektrischer Reihenschwingkreis: : $L = 1H$, $C = 100\mu F$, $R = 20\Omega$, $u(t) = 100V \cdot \sin(\omega s^{-1} t)$
    a) Mit welcher Frequenz muss der Reihenschwingkreis angeregt werden, damit der fließende Strom i(t) eine maximale Amplitude aufweist? Wie groß ist diese?
    b) Finde für die Resonanzfrequenz des Stroms und die maximale Stromamplitude eine einfache Formel!

15. Ein elektrischer Reihenschwingkreis besteht aus einem Ohmschen Widerstand $R = 20\Omega$, einem induktiven Widerstand $L = 0{,}05H$, einem kapazitiven Widerstand $C = 100\mu F$ und einer Spannungsquelle $u(t) = 100 \cdot \cos \omega t$.
    a) Wie lautet die DGL für i(t)?
    b) Ermittle die Resonanzfrequenz für i(t) sowie die Resonanzamplitude.
    c) Überprüfe deine Ergebnisse von b) mithilfe der in 14b) gefundenen Formel.

<u>Lösungen:</u>

1. a) y(t) = 0,3.sin(4t) b) y(t) = o,302.$e^{-0,5t}$ .sin(3,97) c) y(t) 0 0,4.e^{-5t}.sinh(3t) d) y(t) = 1,2t.e^{-4t}
2. a) $x(t) = 0{,}375\left(e^{2{,}557t} + e^{-2{,}557t}\right)$, b) nach 0,515s
3.
4.
5. a) $i(t) = 1{,}033e^{-25t} \cdot \sin 96{,}82t$, b) $i(t) = 100t \cdot e^{-100t}$, c) $i(t) = \frac{2}{3}\left(e^{-50t} - e^{-200t}\right)$
6. a) $u'' + 200u' + 10\,000u = 100\,000$, b) D = 1 aperiod. Kriechfall, c) $u(t) = 10\left(1 - e^{-100t} - 100t \cdot e^{-100t}\right)$,
   e) $i(t) = 10t \cdot e^{-100t}$, f) nach 0,01s / 2,642V
7. a) $y'' + 2D\omega_0 \cdot y' + \omega_0{}^2 \cdot y = \frac{F(t)}{m}$
8. a) $y(t) = e^{-15t}(-0{,}3 \cdot \sin 20t - 0{,}4 \cdot \cos 20t) + 0{,}4$, b) D = 0,6
9. a) $q(t) = e^{-50t}(-0{,}01 \cdot \sin 217{,}94t - 0{,}044 \cdot \cos 217{,}94t) + 0{,}044$, $i(t) = 10{,}09e^{-50t} \cdot \sin 217{,}94t$,
   b) $q(t) = e^{-50t}(-0{,}032 \cdot \sin 217{,}94t - 0{,}094 \cdot \cos 217{,}94t) + 0{,}097 \cdot \cos(100t - 14{,}04°)$
   $i(t) = e^{-50t}(22{,}09 \cdot \sin 217{,}94t - 2{,}27 \cdot \cos 217{,}94t) - 9{,}7 \cdot \sin(100t - 14{,}04°)$
10. a) $u'' + 500u' + 125\,000u = 1{,}25 \cdot 10^6 \cdot \sin 500t$
    b) $u(t) = e^{-250t}(8 \cdot \sin 250t + 4 \cdot \cos 250t) - 2 \cdot \sin 500t - 4 \cdot \cos 500t$
    $= e^{-250t}(8 \cdot \sin 250t + 4 \cdot \cos 250t) + 4{,}47 \cdot \sin(500t - 116{,}57°)$
11. $q(t) = e^{-4t}(0{,}96 \cdot \sin 3t + 1{,}44 \cdot \cos 3t) + 1{,}73 \cdot \sin(3t - 56{,}31°)$,
    $i(t) = e^{-4t}(-8{,}16 \cdot \sin 3t - 2{,}88 \cdot \cos 3t) - 5{,}19 \cdot \cos(3t - 56{,}31°)$
12. $i(t) = e^{-200t}(5{,}5 \cdot \sin 400t - \cos 400t) - 2{,}236 \cdot \sin(200t - 26{,}57°)$; A = 2,236, $\varphi = -26{,}57°$
13. $i_p(t) = 0{,}441 \cdot \sin 500t + 0{,}265 \cdot \cos 500t = 0{,}541 \cdot \sin(500t + 30{,}96°)$
14. a) $\omega_R = 100s^{-1}$, $A(\omega_R) = 5A$, b) $\omega_R = \sqrt{\frac{1}{CL}}$, $A(\omega_R) = \frac{U_0}{R}$
15. a) $i'' + 400i + 20000i = -2000\omega \cdot \sin \omega t$, b) $\omega_R = 447{,}2s^{-1}$, $A(\omega_R) = 5A$