RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Fourierreihen

Katja Breitenstein, Daniel Fritscher

Ausarbeitung zum Vortrag im *Proseminar Analysis*
(Wintersemester 2008/09, Leitung PD Dr. Gudrun Thäter)

Zusammenfassung: In der vorliegenden Ausarbeitung über Fourierreihen ist eine ausführliche Herleitung der Formel enthalten. Wir beginnen mit einer Einführung, die den Sinn, die Idee und das Auftreten der Fourierreihe deutlich machen soll. Über die sogenannten Schwingungen leiten wir zur Formel der Fourierreihe und der Fourierkoeffizienten hin. Zur Verinnerlichung und Anschauung sollen die drei praktischen Beispiele dienen, mit denen konkrete Funktionen fourier-entwickelt werden. Abschließend wird das Thema dahingehend abgerundet, als dass die Konvergenz und somit die Bestätigung des Systems der Fourierreihe diskutiert wird.

Die Schwierigkeit bei diesem Thema ist mit Sicherheit nicht das Konzept, das hinter der Fourierreihe steht. Dieses scheint von Anfang an sehr klar und praktisch zu sein. Vielmehr benötigt es einiger Anstrengungen um zu verstehen, warum die Fourierreihe tatsächlich das bewirkt, was sie verspricht. Umso faszinierender und packender ist es nachzuvollziehen, wie mit dieser Formel tatsächlich sämtliche periodische Funktionen entwickelt werden können.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Motivation

1.1 Schwingungen in der Musik

Jeden Tag nimmt unser Gehirn eine Vielzahl akustischer Reize wahr. Wir hören Musik oder hören einem Menschen zu, der gerade spricht. Doch woraus besteht ein Ton, der Baustein für Musik (sei es von Musikinstrumenten oder der Stimme eines Menschen) ist? Wenn wir einen Ton wahrnehmen, so hören wir in der Tat nicht nur den Grundton, sondern ein Gemisch von Grundton und mehreren Obertönen. Erst das Zusammenklingen dieser Töne gibt dem Ton die von uns wahrgenommene Klangfarbe. Sowohl der Grundton selbst als auch die Obertöne bestehen aus periodischen, reinen Schwingungen und werden mit Hilfe der uns gut bekannten Sinus- und Kosinusfunktionen mathematisch beschrieben.

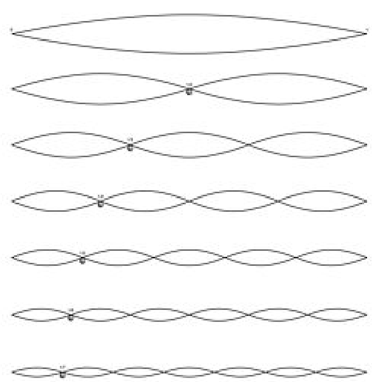

Abbildung 1.1: Schwingungen

1.2 Idee der Fourierreihe

Die Grundidee der Fourierreihe geht von der Annahme aus, dass die trigonometrischen Funktionen eine sehr bedeutende Rolle für alle periodischen Funktionen spielen. Es handelt sich sozusagen um die *Atome* unter den periodischen Funktionen, in dem Sinn, dass man so gut wie alle praktisch wichtigen periodischen Funktionen aus geeignet skalierten Sinus- und Kosinusbausteinen „zusammensetzen“ kann. Diese Tatsache spielt eine kaum zu überschätzende Rolle für theoretische und praktische Untersuchungen.

Der Gedanke eine Funktion mit Hilfe einer Linearkombination anderer darzustellen ist in der Mathematik nicht neu. Am bekanntesten dürfte wohl die Darstellung mittels Taylorreihe sein, bei der eine Funktion in eine Potenzreihe entwickelt wird.

Die Fourierreihe verwendet hierzu nun keine Potenzfunktionen, sondern bildet eine unendliche Reihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen.

Abbildung 1.2: Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830)

1.3 Historischer Hintergrund

Bereits im **18. Jahrhundert** kannten Mathematiker wie Euler, Lagrange oder die Bernoullis „Fourierreihen" (nach heutiger Definition) für einige Funktionen. Das sind Reihen der Form

$$F_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad mit\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\,.$$

Sie wurden zur Beschreibung periodischer Vorgänge in der Astronomie und zur Behandlung der Bewegungsgleichung einer schwingenden Saite verwendet. 1807 benutzte der französische Mathematiker **Jean Baptiste Joseph Fourier**(1768-1830) diese, später nach ihm benannten, trigonometrischen Reihen zur Darstellung von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Zu Beginn des **19. Jahrhunderts** behauptete er nun in seinem Werk „Théorie analytique de la chaleur", dass es für alle periodischen Funktionen solche Reihenentwicklungen gebe. Diese Behauptung stieß zunächst bei führenden Mathematikern wie Cauchy und Abel auf Ablehnung, da Fourier mit Argumenten arbeitete, die stark in der Anschauung verhaftet waren. Erst der Mathematiker P. Lejeune Dirichlet (1805-1859) konnte 1829 beweisen, dass Fouriers Behauptung zumindest für Lipschitz-stetige Funktionen richtig ist. Du Bois-Reymond fand 1873 eine stetige Funktion, deren Fourierreihe divergiert.

Im 20. Jahrhundert gelangte man schließlich zur Erkenntnis, dass es auch für stetige oder stückweise stetige Funktionen konvergente Fourierreihen gibt, wenn der Konvergenzbegriff geeignet abgeschwächt wird [1]. Die Fragestellungen der Fourieranalysis, d.h. der Darstellung von Funktionen durch harmonische Schwingungen, leiteten Dirichlet zum modernen Funktionsbegriff, standen am Beginn der Mengenlehre G. Cantors (1845-1918) und waren Ausgangspunkt der Integrationstheorie von B. Riemann (1826-1866) und H. Lebesgue (1875-1941). Auch heute noch erhalten Funktionalanalysis und die moderne numerische Mathematik für ihre abstrakten Begriffe starke Anregungen aus der Theorie der Fourierreihen. Dies alles machte den Fourierschen Gedanken zu

[1] aus http://www.wikipedia.de, Stichwort: John Baptiste Joseph Fourier

einem der wirkungsvollsten mathematischen Hilfsmittel der Ingenieur- und Naturwissenschaften.[2]

2 Hinführung

2.1 Analyse einer Schwingung

Zurück zum Beispiel aus der Musik. Die von uns wahrgenommenen Töne sind zusammengesetzt aus reinen, harmonischen Schwingungen. Diese Funktionen besitzen folgende zwei charakteristischen Eigenschaften:

(i) Es gibt eine Zahl T, die *Periode* oder *Schwingungsdauer* der Funktion $f(x)$ mit

$$f(x+T) = f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Ist also die Funktion in einer Periode bekannt, so kann sie beliebig fortgesetzt werden.

(ii) Das Integral einer periodischen Funktion über ein Intervall der Periodenlänge $T =: 2l$ hat stets denselben Wert:

$$\int_{-l-a}^{l-a} f(x)\, dx = \int_{-l}^{l} f(x)\, dx \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}\,.$$

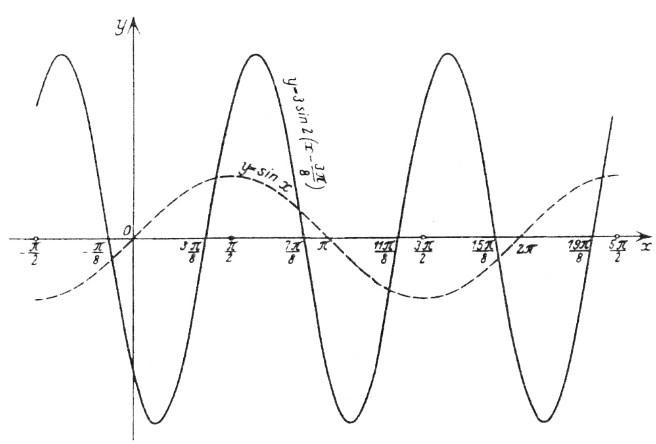

Abbildung 2.1: Reine Schwingungen

Uns bekannte periodische Funktionen sind die trigonometrischen Funktionen. In der Tat werden alle Vorgänge, die sich in der Form

$$a \sin(\omega(x - \xi)) \tag{2.1}$$

[2]aus http://www.fkg-wuerzburg.de/schule/faecher/physik/facharb/friedr/friedr.php

darstellen lassen, *reine Schwingungen* genannt (man legt hierbei die x-Achse so, dass die „Ruhelage“ mit $f(x) = 0$ zusammenfällt). Die Konstante $a \geq 0$ in (2.1) ist die *Amplitude* der Schwingung, welche den maximalen Wert angibt, den die Funktion annehmen kann. Die Zahl $\omega > 0$ heißt die *Frequenz* der Schwingung. Sie ist gleich der Schwingungszahl in der Zeit 2π. Die *Schwingungsdauer* beträgt $T = 2\pi/\omega$. Die Zahl $\omega(x-\xi)$ wird *Phase* genannt und die Zahl $\omega\xi$ *Phasenverschiebung*. Die Konstante ξ ist die Anfangsphase der Schwingung. Die Kosinusfunktion läßt sich ebenfalls als phasenverschobener Sinus in (2.1) subsumieren. Nach den Additionstheoremen für trigonometrische Funktionen:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta\,, \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

lassen sich die reinen Schwingungen auch in folgender Gestalt darstellen:

$$\begin{aligned} a\sin\omega(x-\xi) &= a(\sin\omega x\cos\omega\xi - \sin\omega\xi\cos\omega x) \\ &= \underbrace{-a\sin\omega\xi}_{=:\alpha} cos\omega x + \underbrace{a\cos\omega\xi}_{=:\beta}\sin\omega x \\ &= \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Funktionen der Form (2.2) sind offensichtlich reine Schwingungen mit der Amplitude[3] $a := \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Die Phasenverschiebung ist „versteckt“ in den Größen α und β. Insbesondere kann man sich mit Hilfe von (2.2) leicht überlegen, dass die Summe

$$a_1\sin\omega(x-\xi_1) + a_2\sin\omega(x-\xi_2) = (\alpha_1+\alpha_2)\cos\omega x + (\beta_1+\beta_2)\sin\omega x$$

mit $\alpha_i := -a_i\sin\omega\xi_i$ und $\beta_i := a_i\cos\omega\xi_i$ $(i = 1,2)$ wieder eine reine Schwingung mit der Frequenz ω darstellt.

2.2 Superposition von Schwingungen

Wir möchten nun zunächst zwei periodische Funktionen geometrisch übereinanderlegen, das bedeutet wir bilden ihre Summe. Diesen Vorgang nennt man **Superposition** von reinen Schwingungen. Wie wir in 2.1 gesehen haben, ergibt die Übereinanderlagerung zweier reiner Schwingungen mit derselben Frequenz ω wiederum eine reine Schwingung mit derselben Frequenz, nur mit veränderter Amplitude und Phase. Wir werden nun Superpositionen mit verschiedenen Frequenzen betrachten. Wir finden dabei heraus, dass es einen fundamentalen Unterschied macht, ob die Frequenzen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen oder nicht, in der Fachsprache als *kommensurabel*, bzw. *inkommensurabel* bezeichnet.

Betrachten wir nun als erstes Beispiel die Frequenzen ω_1 und ω_2, die im Verhältnis $\omega_2 = 2\omega_1$ stehen. Somit wird die Schwingungsdauer der zweiten Schwingung

$$T_2 = \frac{2\pi}{2\omega_1} = \frac{T_1}{2}$$

halb so groß wie T_1 sein. Man nennt eine solche Schwingung mit der doppelten Frequenz der Schwingung auch die **erste harmonische Oberschwingung**.

[3]denn $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \sqrt{a^2 sin^2\omega x + a^2\cos^2\omega x} = \sqrt{a^2(\sin^2\omega\xi + \cos^2\omega\xi)} = \sqrt{a^2} = a.$

Ganz Entsprechendes gilt, wenn wir nun noch eine weitere Schwingung mit der Frequenz $\omega_3 = 3\omega_1$ hinzufügen. Auch hier wird die Schwingungsfunktion $\sin 3\omega_1 x$ ganz von selbst sich mit der Periode der ersten Schwingung T_1 wiederholen. Eine solche Schwingung heißt **zweite harmonische Oberschwingung**. Ebenso können wir eine dritte, vierte, usw. Oberschwingung betrachten, im übrigen mit beliebigen Phasenverschiebungen. Da sich jede dieser Oberschwingungen nach der Schwingungsdauer T_1 periodisch wiederholt, wird jede Superposition von Oberschwingungen wiederum eine periodische Funktion mit der Periode T_1 sein.

Mithilfe von Superpositionen gewinnen wir die Möglichkeit recht komplizierte Kurvenbilder zu erzeugen, die teilweise kaum noch an die ursprüngliche Sinusform erinnern (siehe Abbildung 2.2 bis 2.3).

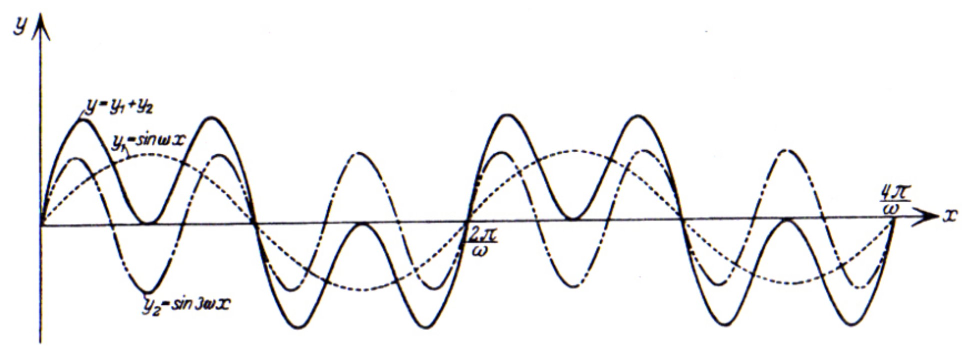

Abbildung 2.2: dritte Oberschwingung

Diesen Effekt der Superposition von Schwingungen, bei denen die Frequenzen in rationalem Verhältnis stehen, nutzen wir für die Approximation periodischer Funktionen durch unsere Fourierreihe aus (siehe 3.1). Bei Schwingungen mit inkommensurablen Frequenzen ω_1 und ω_2 verhält es sich nicht so. Hier entstehen bei der Superposition Vorgänge, die nicht mehr rein periodisch werden, man spricht von „fastperiodisch“. Diese sind für unsere Fourierreihe jedoch nicht zu gebrauchen und deshalb gehen wir hier nicht weiter darauf ein.

3 Die Fourierreihe

3.1 Fourierkoeffizienten

Um für eine konkrete periodische Funktion die *Fourrierreihe*

$$F(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad mit\ a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

bilden zu können, müssen die Koeffizienten a_i, b_i bestimmt werden, die *Fourierkoeffizi-*

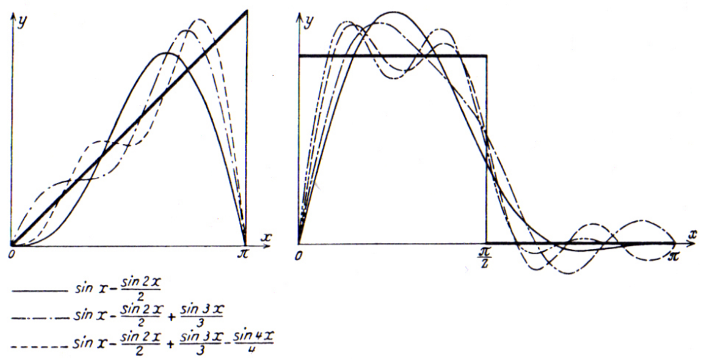

Abbildung 2.3: Zusammensetzung von Schwingungen

enten. Hierzu ist die Benutzung der folgenden Orthogonalitätsrelationen[4] für trigonometrische Funktionen hilfreich:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx \quad \text{falls } n \neq m \tag{3.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx \quad \text{falls } n = m \tag{3.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0 \tag{3.3}$$

Diese Beziehungen wollen wir zunächst beweisen. Als nützlich erweist sich dabei folgendes Additionstheorem

$$\cos(mx + nx) = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx) \tag{3.4}$$

Durch Umstellen und Ersetzen der Sinus-Faktoren erhalten wir aus Gleichung (3.4) nämlich

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x) \tag{3.5}$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x) \tag{3.6}$$

Die rechten Seiten in (3.5) und (3.6) sind nun einfach zu integrieren.

Für $n \neq m$ erhalten wir zunächst

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

[4]bezüglich des L^2-Skalarprodukts $< u, v >= \int_{-\pi}^{\pi} uv \; dx$

da der Sinus punktsymmetrisch ist. Ganz analog folgt aus (3.6) die Beziehung $(3.1)_2$.

Für $n = m$ vereinfachen sich (3.5) und (3.6), da $\cos((m-n)x) = 1$. Es ergibt sich dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

und für $(3.2)_2$ ist die Rechnung ganz analog.

Damit sind (3.2) und (3.1) bewiesen. Für den Beweis von (3.3) nutzen wir zweimal partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx &= -\frac{1}{n}\cos(mx)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{m}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\, dx \\ &= (\frac{m}{n})^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\, dx \qquad (3.7)\end{aligned}$$

Offensichtlich kann (3.7) für *jede* Kombination von m und n nur richtig sein, wenn (3.3) gilt. Damit ist der Beweis der Orthogonalitätsrelationen vollständig.

Unter Verwendung unseres Ansatzes

$$f(x) \stackrel{!}{=} F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \qquad (3.8)$$

wollen wir nun herausfinden, wie wir die Fourierkoeffizienten zu bestimmen haben. Multiplikation von (3.8) mit $\cos(mx)$ und Integration über $[-\pi, \pi]$ ergibt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{\pi}\cos(mx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\cos(mx)\, dx$$

Konkret sei zunächst $m = 0$ und $n \neq 0$. Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen entfallen alle Summanden in der unendlichen Summe und wir sehen, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{\pi}\, dx = a_0\pi \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad (3.9)$$

Auch für $m > 0$ verschwinden die Summanden außer denjenigen mit $\cos(mx)\cos(nx)$ falls $n = m$. Also erhalten wir für $m = 1, 2 \ldots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx = a_m\pi \quad \Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\, dx$$

Multiplikation mit $\sin(mx)$ und Integration über $-[\pi, \pi]$ ergibt ganz analog

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)\, dx \quad \text{für } m = 1, 2 \ldots$$

3.2 Fourierreihen für gerade und ungerade Funktionen

Wir betrachten nun speziell „gerade“ (d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x) und „ungerade“ (d.h. $f(x) = -f(-x)$ für alle x) Funktionen.

Ist nämlich das zu approximierende $\boldsymbol{f(x)}$ **eine gerade Funktion**, so wird offenbar $f(x)\sin(nx)$ ungerade, $f(x)\cos(nx)$ gerade und daher die Fourierkoeffizienten:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0$$

was anschaulich aufgrund der Punktsymmetrie der ungeraden Funktion $f(x)\sin(nx)$ einsichtig ist. Ebenso ergibt sich für $\cos(nx)$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx \tag{3.10}$$

Da die Koeffizienten b_n alle null werden, erhalten wir eine reine „Kosinusreihe“.

Ist dagegen $\boldsymbol{f(x)}$ **eine ungerade Funktion**, so wird analog

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \tag{3.11}$$

Wir erhalten also eine reine „Sinusreihe“.

3.3 Beispiele

Beispiel 1: Wir wollen die Sägezahnkurve aus Abb. 3.1 in eine Fourierreihe entwickeln. Sie lässt sich im Intervall $[-\pi, \pi]$ mathematisch beschreiben als $f(x) = x$ und hat die Periode 2π. Diese Funktion ist offensichtlich nicht stetig, sie springt an den Stellen $x = k\pi$ für ungerade k um den Wert 2π.

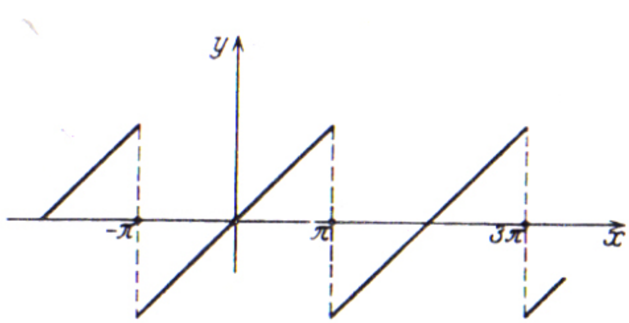

Abbildung 3.1: $f(x)$ aus Beispiel 1

Wir machen uns zunutze, dass die Funktion ungerade ist, also nach (3.11) gilt

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\ dx$$

Wir wenden partielle Integration an:

$$\int_0^\pi x \sin(nx) \ dx = \frac{-\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(n\pi) - \frac{1}{n^2} \sin 0 = \frac{\pi}{n}(-1)^{(n+1)}$$

Dieses Integral in b_n eingesetzt ergibt $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{(n+1)}$ und die Fourierreihe lautet somit

$$F(x) = 2(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ \ldots)$$

Wir sehen, dass die Fourierreihe $F(x)$ nicht mit $f(x)$ übereinstimmt, denn in den Sprungstellen selbst wird jedes Reihenglied Null. Dort wird also das arithmetische Mittel zwischen dem Grenzwert von links und dem von rechts dargestellt.

Beispiel 2: Wir betrachten die Funktion aus Abb 3.2, nämlich $g(x) = x^2$ falls $x \in [-\pi, \pi]$ mit Periode 2π fortgesetzt.

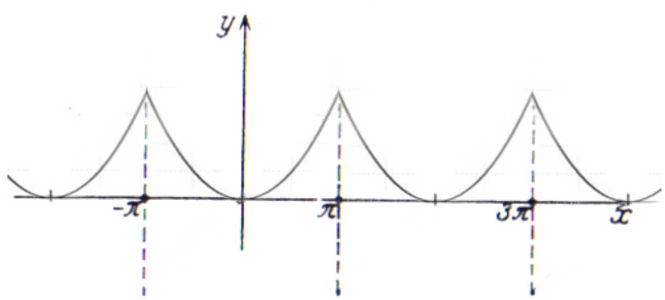

Abbildung 3.2: $g(x)$ aus Beispiel 2

Für diese gerade Funktion sind die Fourierkoeffizienten

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) \ dx$$

Mit partieller Integration folgt für $n = 1$, 2...

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx = -\int_0^\pi \frac{1}{n} 2x \sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n^2}\pi(-1)^n \quad \Rightarrow \quad a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Um a_0 zu bestimmen, setzen wir $n = 0$ direkt in die Formel für die Koeffizienten ein. So ergibt sich $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$ und zusammenfassend gilt, dass die Fourierreihe $G(x)$ für $g(x)$ folgendermaßen lautet

$$G(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \ldots)$$

Bemerkung: Durch gliedweise Differentiation und Division durch zwei, also korrektes Ableiten von $g(x) = x^2$, ergibt sich die Reihe für $f(x) = x$.

Beispiel 3: Wir betrachten nun die Funktion aus Abb 3.3, nämlich $h(x) = x \cos x$ falls $x \in [-\pi, \pi]$ mit Periode 2π fortgesetzt

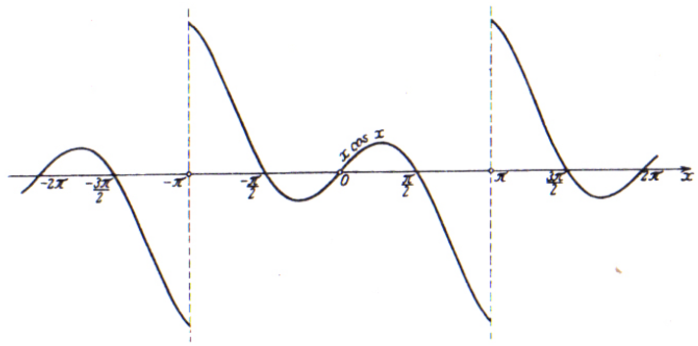

Abbildung 3.3: $h(x)$ aus Beispiel 3

Die Funktion $h(x)$ ist ebenfalls ungerade. Wir berechnen zunächst

$$\int_0^\pi x \sin(nx) \; dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n} \qquad (n = 1,\, 2,\, 3...)$$

und folglich gilt für $n = 2,\, 3...$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos x \sin(nx) \; dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(\sin{(n+1)x} + \sin{(n-1)x}) \; dx \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n \frac{2n}{n^2-1} \qquad (n = 2, 3, ...) \\ b_1 &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Reihenentwicklung

$$H(x) = -\frac{1}{2} \sin x + 2\frac{2}{3} \sin 2x - 2\frac{3}{8} \sin 3x + \;\; . . .$$

4 Komplexe Darstellung

Die komplexe Darstellung der Fourierreihe ist hilfreich für zahlreiche Beweise. Darüber hinaus wird sie in der sogenannten *Fouriertransformation* angewendet. Die Fouriertransformation und ihre Varianten wiederum sind in vielen Wissenschaftsbereichen und Technikzweigen von außerordentlich praktischer Bedeutung. Die Anwendungen reichen von der Physik (Akustik, Optik, Gezeiten, Astrophysik) über viele Teilgebiete der Mathematik (Zahlentheorie, Statistik, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie), die Signalverarbeitung und Kryptographie bis zu Ozeanographie und Wirtschaftswissenschaften. Die offensichtlichen Vorteile bestehen darin, dass e-Funktionen meist einfacher zu integrieren sind als Sinus, bzw. Kosinus und zum anderen im Komplexen nur noch ein Koeffizient zu berechnen ist anstatt zwei.

Bisher haben wir eine unendliche Reihe gebildet, im Folgenden werden wir eine obere Grenze m annehmen, das bedeutet wir approximieren die Funktion und es bleibt ein Fehler als Restglied bestehen. Die Formel im Reellen

$$F_m(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

lässt sich in komplexe Schreibweise überführen, indem wir mit Hilfe der Eulerschen Formeln sin und cos ersetzen:

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}\big(\exp(in)) + \exp(-inx)\big) \quad \text{und} \quad \sin(nx) = \frac{1}{2i}\big(\exp(inx) - \exp(-inx)\big)$$

$$F_m(x) = \frac{a_0}{\pi} + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \frac{1}{2}\big(\exp(inx) + \exp(-inx)\big) + b_n \frac{1}{2i}\big(\exp(inx) - \exp(-inx)\big) \right)$$

Wir definieren uns neue Koeffizienten $\alpha_{\pm n}$ mit

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}\,, \qquad \alpha_0 = \frac{a_0}{2}\,, \qquad b_n = i(\alpha_n - \alpha_{-n})$$

Die Formel für F_m mit den neuen Koeffizienten lautet dann

$$F_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{m} (\alpha_n \exp(inx) + \alpha_{-n} \exp(-inx)) = \sum_{n=-m}^{m} \alpha_n \exp(inx)$$

Umgekehrt kann man jeden Ausdruck dieser Form als Superposition komplex geschriebener Schwingungen ansehen. Damit das Ergebnis reell ist, muss nur $\alpha_n + \alpha_{-n}$ reell und $\alpha_n - \alpha_{-n}$ rein imaginär sein, also α_n und α_{-n} konjugiert komplex.

Darüber hinaus können wir entsprechend natürlich auch die Fourierkoeffizienten in komplexer Schreibweise darstellen:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx)\, dx$$

5 Konvergenz der Fourierreihe

Um zu zeigen, dass die Fourierreihe eine gute Approximation für alle periodischen Funktionen ist, muss der Fehler der Approximation klein werden. Es stellt sich also die Frage, wie der Ausdruck

$$F := \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_k(x)|^2 \, dx \tag{5.1}$$

abgeschätzt werden kann, wobei F_k unsere durch die Fourierreihe bis zum k-ten Glied dargestellte Approximation der Funktion f ist. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z|^2 = z\bar{z}$, also ist

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{f}(x)\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\bar{F}_k(x)\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) F_k(x)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} F_k(x)\bar{F}_k(x)\, dx$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=-m}^{m} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\bar{\alpha}_n f(x) \exp(-inx) - \alpha_n \bar{f}(x) \exp(inx)\Big) dx + 2\pi \sum_{n=-m}^{m} \bar{\alpha}_n \alpha_n$$

Nun setzen wir die Fourierkoeffizienten in F ein:

$$\begin{aligned} F = & \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{2\pi} (\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \exp(inx) \, dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) \, dx) \\ & - \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) \, dx \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \exp(inx) \, dx \\ & + 2\pi \sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(inx) \, dx \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \exp(-inx) \, dx \\ = & \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^{m} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) \, dx \right|^2 \end{aligned}$$

Es gilt

$$|\alpha_n|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \exp(-inx) \, dx \right|^2$$

also

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2\pi \sum_{n=-m}^{m} |\alpha_n|^2$$

und somit für die reellen Koeffizienten

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_k(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2\pi \Big(\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)^2 \Big)$$

Die linke Seite der Gleichung ist nichtnegativ, daraus folgt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx - 2\pi \left(\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)^2 \right) \geq 0$$

$$\text{bzw.} \qquad \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)^2 \right) \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx =: \|f\|_2^2$$

Falls $\|f\|_2 < \infty$ bleibt auch die linke Seite beschränkt für $k \to \infty$ und es gilt:

$$\pi \Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \Big) \leq \|f(x)\|^2$$

Dies ist die *Besselsche Ungleichung*.

Man überlegt sich, dass Konvergenz der Fourierreihe gegen die Funktion im Sinn[5] dass in (5.1) gilt $F \to 0$ für $k \to \infty$ gleichbedeutend damit ist, dass in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt. In der Tat läßt sich mit etwas Mühe zeigen, dass dies für hinreichend „gute“ Funktionen f gilt.

[5] das ist im L_2-Sinn bzw. im quadratischen Mittel

Theorem 5.1 *Sei f eine 2π-periodische Funktion, die in $[-\pi, \pi]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f punktweise gegen f und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem f stetig ist. Insbesondere gilt in jeder der Ausnahmestellen ξ, dass*

$$F_k(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi_-) + f(\xi_+)) \qquad \textit{für } k \to \infty\,.$$

Dabei sind $f(\xi_\pm) := \lim_{h \to 0} f(\xi \pm h)$.

6 Resümee

Zunächst konnten wir durch das Beschäftigen mit der Fourierreihe ein für uns unbekanntes Konzept zur Annäherung von Funktionen kennen lernen. Es ist interessant zu erfahren, welche anderen Möglichkeiten es außer dem uns bekannten Taylorpolynom zur Berechnung von Funktionen gibt. Besonders faszinierend war für uns, wie die zunächst sehr technisch erscheinende Formel der Fourierreihe Stück für Stück aufzuschlüsseln war. Die Feststellung, dass uns periodische Funktionen ständig in unserem Alltag begegnen, machte die Art der Funktionen, die durch die Fourierreihe angenähert werden können, vertrauter und greifbarer. Durch den Nachweis der Konvergenz der Reihe kann man sich die Bedeutsamkeit der Fourierreihen in verschiedenen Naturwissenschaften vorstellen. Solche Anwendungsbeispiele würden uns nach dieser Arbeit interessieren. Des Weiteren erkennt man durch das Konzept der Fourierreihen zum einen den Nutzen der komplexen Darstellung (vor allem für Beweise) und zum anderen die trigonometrischen Funktionen als wichtiger Bestandteil der Analysis und deren Anwendung.

Literatur

[1] Ian Stewart: Pentagonien, Andromeda und die gekämmte Kugel. Spektrum Verlag, 2004.

[2] R. Courant: Berlin, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Teil 1 + 2, Springer Verlag, 1964

[3] H. Heuser: Stuttgart, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Vieweg+Teubner Verlag, 1981

[4] W. Kaballo: Heidelberg, Einführung in die Analysis Bd 1, Spektrum Akademischer Verlag, 1996

[5] H. Amann, J. Escher: Basel, Analysis 1, Birkhäuser Verlag, 2006

[6] http://www.fkg-wuerzburg.de/schule/faecher/physik/facharb/friedr/friedr.php, Stand: 14.11.2008