

Fourier Reihen und Fourier Transformation

Contents

Mathematische Beschreibung periodischer Funktionen	3
Darstellung mit reellen Funktion	3
Berechnung der Koeffizienten	4
Beispiel Fourier Reihe der Rechteckfunktion	6
Fourierreihen in der komplexen Zahlenebene	7
Fourier Zerlegung nichtperiodischer Funktionen	8
Ein bisschen Mathematik	9
Interpretation der Ergebnisse	11
Gleichung 10.2.....	11
Gleichung 10.1.....	11
Beispielfunktionen	14
Frequenzspektrum der Funktion $\cos(\omega t)$	14
Frequenzspektrum der Delta- Funktion $\delta(t)$	15
Fourierreihe einer periodischen Dirac-Impulse Folge	16
Anhang	17
Bestimmung der komplexen Koeffizienten aus reellen Fourierreihen	17
Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten von $\cos(\omega t)$	18



Abbildung 1 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Mathematische Beschreibung periodischer Funktionen

Darstellung mit reellen Funktion

Periodische Funktionen können, laut Fourier, als Summe von ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz von trigonometrischen Funktionen beschrieben werden. Die Abszisse ist dabei nicht zwingend auf die Zeit beschränkt, trotzdem werden wir hier ausschließlich zeitabhängige Funktionen untersuchen. (Die Fourier Zerlegungen für ortsabhängige Funktionen haben bei Laufzeitröhren wie Magnetrons und Wanderfeldröhren eine große Bedeutung).

Wenn $f(t)$ eine periodische Funktion ist, also

$$f(t) = f(t + nT), \quad \text{für beliebige ganzzahlige } n \geq 0$$

kann $f(t)$, wie in der Einleitung beschrieben, als Reihe ganzzahliger harmonischer trigonometrischer Funktionen dargestellt werden.

$$f(t) = A_0 + A_1 * \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + A_2 * \cos\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right) + A_3 * \cos\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots + A_n * \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_1 * \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \dots + B_n * \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \quad [1]$$

Etwas kompakter in Summenschreibweise sieht obige Gleichung so aus:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) \quad [2]$$

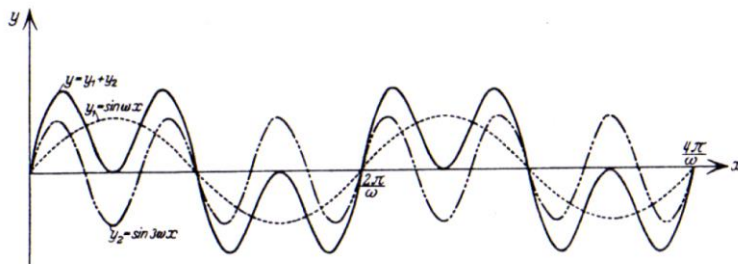


Abbildung 2 Addition von zwei sin-Funktionen mit ganzzahligen Vielfachen (X entspricht der Zeit t)
<<https://docplayer.org/45756903-Fourierreihen-katja-breitenstein-daniel-fritscher.html>>

Die Idee, eine Funktion aus Linearkombinationen anderer Funktionen darzustellen wurde schon von Taylor eingeführt (Taylor beschreibt eine Funktion wird als Summe von Polynomfunktionen).

Fourier verfolgt den Ansatz, eine periodische Funktion als Summe von periodischen (Kernfunktionen) also trigonometrischen Funktionen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz darzustellen. Mit Hilfe des Superpositionsprinzips können wir komplizierte Kurvenformen erzeugen, wobei die Periodendauer des Summensignals weiterhin T ist, da die Frequenz jeder Oberwelle ein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz der Grundwelle betragen muss. (<<https://docplayer.org/45756903-Fourierreihen-katja-breitenstein-daniel-fritscher.html>>).

Berechnung der Koeffizienten

Für die Bestimmung der Koeffizienten für eine „beliebige“ **periodische** Funktion $f(t)$ ist die **Orthogonalitätsrelation** der trigonometrischen Funktionen von entscheidender Bedeutung. Wer sich damit genauer beschäftigen möchte, liest sich in die Theorie der Hilberträume ein. Fourier beschränkt sich auf trigonometrische Funktionen, es gibt aber auch noch andere orthogonale Funktionenkörper (Besselfunktionen, Legendrefunktionen) die eine Zerlegung analog zur Methode von Fourier erlauben.

Leicht beweisbar sind die folgenden drei Beziehungen die für die Berechnung der Fourier Koeffizienten benötigt werden.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = 0 && \text{falls } n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi && \text{falls } n = m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \sin(nx) dx &= 0 \end{aligned}$$

Abbildung 3 Orthogonalität der Trigonometrischen Funktionen (<https://docplayer.org/45756903-Fourierreihen-katja-breitenstein-daniel-fritscher.html>)

Abbildung 4 zeigt qualitativ, dass für trigonometrische Funktionen u_1 und u_2 , dessen Frequenzen sich um einen konstanten Faktor $k \in \mathbb{N}$ und $k \neq 1$ unterscheiden,

- $u_1(t) = \sin(\omega t)$
- $u_2(t) = 0.5 \sin(3\omega t)$,

folgendes Integral $\int_0^T u_1(t) * u_2(t) dt$ zu null wird.

$$\int_0^T u_1(t) * u_2(t) dt = \int_0^T 1 * \sin(\omega t) * 0.5 * \sin(3\omega t) dt = 0$$

Für die **vier blau** eingezeichneten Bereiche liefert $u_1(t) * u_2(t)$ zu jedem Zeitpunkt einen „kleinen“ positiven Wert, entsprechend ergeben sich für die **beiden roten** Bereiche „größere“ negative Produkte. Das Integral $u_1(t) * u_2(t) * dt$ kann über eine Periode gerechnet, + Zugabe einer kleinen Prise Phantasie, mit 0 abgeschätzt werden.

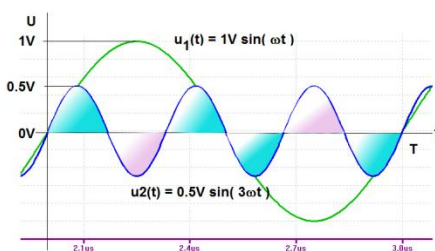


Abbildung 4 Exemplarische Darstellung für die beiden Funktionen $\sin(\omega t)$ und $\sin(3\omega t)$

Für 90° verschobene sin Funktionen gleicher Frequenz ergibt sich eine ähnliche Graphik. ... Wir verzichten drauf.

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation aus Abbildung 3 lassen sich die Koeffizienten aus der Summe extrahieren.

Mit

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + B_k \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right)) \right] * \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{T}{2} A_n$$

wegen:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} A_n * \cos^2\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt &= \int_{-n\pi}^{n\pi} A_n * (\cos^2\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) d\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) * \frac{T}{2\pi n} \\ &= A_n * \frac{1}{2} (n\pi - (-n\pi)) * \frac{T}{2\pi n} = \frac{T}{2} A_n \end{aligned}$$

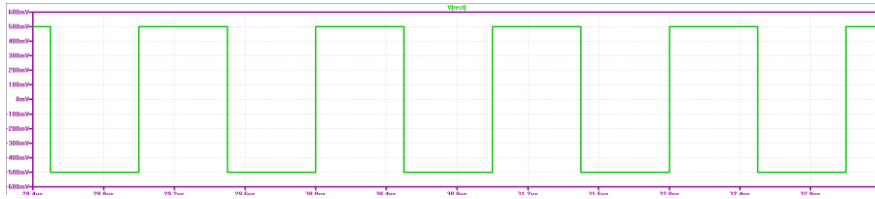
Nochmal zusammengefasst die Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n .

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, n = 1, 2, 3, \dots n \quad [3]$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt, n = 1, 2, 3, \dots n \quad [4]$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, n = 0 \quad [5]$$

Beispiel Fourier Reihe der Rechteckfunktion



Über die Fourieranalyse (eines beliebigen Signals) kann LT-Spice das Spektrum der Signalfunktion darstellen.



Abbildung 5 Fourierzerlegung der Rechteckfunktion mit $U_{\text{rect}} = 0.5V$

Die Spektrallinien sind in LT-Spice als Effektivwerte skaliert, daher muss das Signal noch mit $\sqrt{2}$ multipliziert werden, wenn die Amplitude bestimmt werden soll. Wir nehmen als Beispiel die Grundwelle heraus und verifizieren das Ergebnis mit unserem Gleichungssystem.

$$|U^I| = 0.448V * \sqrt{2} = 0.633V$$

Exemplarisch rechnen wir uns einen Faktor über die Gleichung [4] aus

$$B_1 = 1V \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 0.5 * \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} 0.5 * \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt \right) = 1V * \frac{2}{\pi} = 0.637V$$

Das Ergebnis passt sehr gut zur Simulation.

Fourierreihen in der komplexen Zahlenebene

Es ist üblich, Fourierreihen in der komplexen Form zu schreiben. Statt reelle trigonometrische Funktionen zu verwenden, werden paarweise rotierende komplexe Zeiger ($e^{jn\omega_0 t}$, $e^{-jn\omega_0 t}$) der einzelnen Oberwellen betrachtet. Geradesymmetrische Zeigerpaare mit den Amplituden A_n , $A_{-n} = A_n$ und schiefsymmetrische Zeigerpaare mit den Amplituden B_n , $B_{-n} = -B_n$ bzw. Kombinationen davon.

Wir zerlegen die reellen Fourier-Reihe in komplexe Zeiger.

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + B_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \quad [6]$$

Es gilt: $A_n = A_{-n}$, $B_n = -B_{-n}$, $C_n = \frac{A_n - jB_n}{2}$ und $C_n^* = C_{-n}$. Ableitung siehe S17.

Mit

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n + jB_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} + \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn\omega_0 t} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^* e^{-jn\omega_0 t} + C_n e^{jn\omega_0 t} \right)$$

folgt die Fourieranalyse periodischer Funktionen in der komplexen Zahlenebene. Die beiden gegenläufig rotierenden Zeiger können jetzt paarweise zusammengefasst werden, wodurch sich wieder eine reelle Summe $f(t)$ ergibt (wenn alle C_n obigen Bedingungen erfüllen).

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n^* e^{j(-n\omega_0 t)} + C_n e^{j(+n\omega_0 t)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_{-n} e^{j(-n\omega_0 t)} + C_n e^{j(+n\omega_0 t)} \right)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad [7]$$

mit

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * e^{-jn\omega_0 t} dt \quad [7]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Fourier Zerlegung nichtperiodischer Funktionen

Unterschiede zu Fourierreihen

- Die trigonometrischen Funktionen sind auf der Frequenzachse „dicht“, man kann also kein ganzzahliges Vielfaches definieren, es existiert keine Grundwelle mehr!
- Da in einem beliebig kleinen Frequenzintervall unendlich viele Frequenzen auftreten, müssen die einzelnen Amplituden unendlich klein sein (differenziell) daher ist der Übergang zur Frequenzdichte erforderlich.

Aus

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + B_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right)$$

wird:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right\} [9]$$

Die Koeffizienten A_n und B_n bestimmen in der Fourier Reihe die Amplitude der n-ten harmonischen Oberschwingung. Beim Fourier Integral gibt $a(\omega)$ und $b(\omega)$ nicht die zur Frequenz ω gehörende Amplitude, sondern nur die Amplitudendichte an.

Ist das Spektrum kontinuierlich, so kann eine Schwingung die zu einer ganz bestimmten Frequenz gehört, keine endliche Amplitude besitzen, da in einer beliebigen Nähe dieser Frequenz auch unendlich viele andere Frequenzen auftreten deren Amplituden in die Größen der vorherigen fallen. Dadurch würde $f(t)$ zu einem unendlich großer Wert wachsen. (Károly Simonyi Band 20, S458).

Die Funktion $f(t)$ wird durch die Summe der sin, cos Schwingungen

$$a(\omega)\Delta\omega * \cos(\omega t) \text{ und } b(\omega)\Delta\omega * \sin(\omega t)$$

umso genauer nachgestellt, je feiner wir die Unterteilung $\Delta\omega$ wählen. Sehen wir uns den Übergang zu nichtperiodischen Funktionen an.

Ein bisschen Mathematik

Wir betrachten eine Fourierreihe und lassen die Periodendauer der Grundwelle gegen ∞ laufen.

Ausgehend von Gleichungssystem für reelle Fourierreihen multiplizieren wir Gleichung 4 mit „-j“ und addieren sie zur Gleichung 3 dabei erhalten wir mit

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2}$$

$$A_n = A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

$$A_{-n} = A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * \cos\left(-n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

$$-jB_n = j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * \sin\left(-n \frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

→

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \quad [9]$$

Wir setzen C_n [9] in Gleichung [7] ein (ersetzen t mit τ um in den Gleichungen 7/9 einen Variablenkonflikt zu vermeiden) und erhalten

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) * e^{-j\frac{2\pi}{T}n\tau} d\tau \right) e^{j\omega_0 nt} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) * e^{+j\omega_0 n(t-\tau)} d\tau$$

Diese Darstellung gilt wenn $f(t)$ periodisch ist, mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ = die Periode der Grundschiwingung. (Es liegt immer noch eine Fourier Reihe vor!)

Wir erhöhen die Schwingungsdauer T der Grundschiwingung über alle Grenzen, und bezeichnen diese Grundschiwingfrequenz statt mit ω_0 mit $\Delta\omega$ um hinzuweisen, dass sie beliebig klein gemacht worden ist! (Károlyy Simonyi Band 20, S458).

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) * e^{+j\Delta\omega n(t-\tau)} d\tau$$

Für einen festen Zeitpunkt t ist der Wert des Integrals ausschließlich von $n * \Delta\omega = \omega_n$ abhängig. Wir skalieren die ω Achse (Abszisse) ausgehend von $\Delta\omega$ mit $2\Delta\omega, 3\Delta\omega, \dots n\Delta\omega = \omega$ und summieren die einzelnen Schwingungen (Zeigerpaare) auf.

Nach dem Grenzübergang $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ erhalten wir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) * e^{+j\omega\tau} d\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) * e^{-j\omega\tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega$$

Zerlegt man das Doppelintegral in zwei Integrale, ergibt sich daraus das Fourier Transformationspaar. Beachte, dass der Faktor $1/2\pi$ in der Literatur manchmal zu $S(j\omega)$ hinzugefügt wird, in letzter Zeit hat sich aber mehrfach diese Schreibweise durchgesetzt.

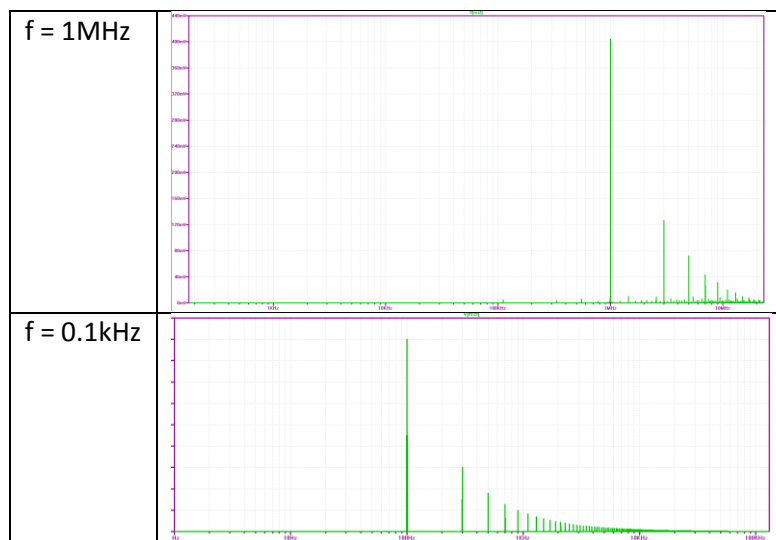
Die Laplace Transformation fügt zu $j\omega$ einen Dämpfungsfaktor $\sigma < 0$ hinzu und lässt den negativen Bereich weg, um für mehr Funktionen das Integralpärchen konvergent zu machen. Mit einer spektralen Dichte nach Fourier hat das aber nichts mehr zu tun.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j\omega t} dt \quad [10.1]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [10.2]$$

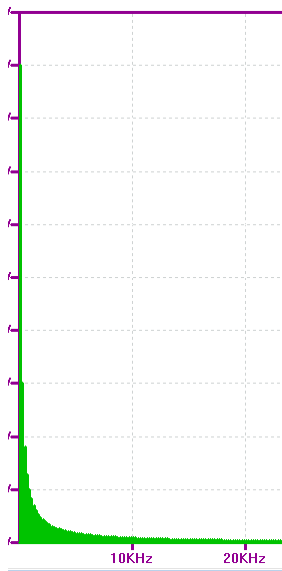
Vergleicht man zwei Rechteckfunktion mit $T = 1\mu s$, $T = 0.1ms$ so erkennt man die Tendenz für

$$T \rightarrow \infty$$



Das Spektrum wird dichter und verschiebt sich zu kleineren Frequenzen. (Beachte, dass die X-Achse logarithmisch skaliert ist, daher ist der Effekt nicht so deutlich zu sehen).

Zur Vollständigkeit noch die lineare Skalierung



Interpretation der Ergebnisse

Gleichung 10.2

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} S(j\omega) d(2\pi f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} S(j2\pi f) df$$

Man erhält den Signalwert $f(t_i)$ indem man alle Zeiger Pärchen, $(e^{j\omega t_i}, e^{-j\omega t_i})$ in möglichst fein unterteilten ω -Schritten (bei konstantem t_i), mit den dazugehörigen differenziellen (komplexen) Amplituden $S(j\omega) df, S(-j\omega) df$ summiert.

Beachte, dass der Zeitpunkt t_i hier als fester Zeitpunkt genommen wird.

Gleichung 10.1

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) * e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt$$

$f(t)*dt$ entspricht einem Impuls mit einer differenziell kleinen Signalfläche $dA = f(t)*dt$ zum Zeitpunkt t . Diese Fläche ist die Amplitude eines Zeigers mit der Frequenz ω_i und der Phasenverschiebung $-\omega_i t$.

Man erhält die Spektraldichte $S(\omega_i)$ indem man alle Zeiger Pärchen, $(e^{j\omega_i t}, e^{-j\omega_i t})$ mit möglichst fein unterteilten t -Schritten (bei konstantem ω_i), summiert.

Nachdem $s(t)*dt$ so etwas wie ein „mini“ Dirac Impuls ist, (Mit der Fläche $s(t)*dt$ statt 1, vergleiche

dazu S15 Frequenzspektrum der Delta- Funktion $\delta(t)$)

hat ein einzelner (sin-förmiger) Verlauf (erzeugt von der Signalfläche $s(t_k)dt$) die Amplitude

$$d^2A = \frac{d\omega}{\pi} * s(t_k)dt.$$

Die Zeitfunktion wird unter Berücksichtigung der Phasenverschiebung zu

$$\tilde{s}(t) = \frac{d\omega}{\pi} * s(\tau_k)d\tau * \cos(n\omega(t - t_k)).$$

Die Amplitude ist zweifach differentiell klein (daher kommt das Symbol d^2).

Zum Zeitpunkt t_k werden sämtliche möglichen Frequenzen (von 0 bis ∞) durch die Signalfläche $s(t_k)*dt$ mit gleicher Amplitude erzeugt, die (alle) zum Zeitpunkt t_k ihr Maximum haben

$$[t = t_k ; \tilde{s}(t_k) = \frac{d\omega}{\pi} * s(\tau_k)d\tau * 1].$$

$$\tilde{s}(t) = d^2A * \cos(n\omega(t - t_k))$$

Die Gesamtamplitude zur Frequenz $\omega = n*d\omega$ wird durch die „phasenrichtigen“ Überlagerungen die alle Signalflächen des Gesamtsignal $s(t_i)*dt$ erzeugen bestimmt. Sie bleibt aber immer noch differentiell klein, es sei denn es sind diskrete Frequenzen enthalten.

$$dA = \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} s(\tau)d\tau * \frac{1}{2} (e^{-j(n\omega)\tau} + e^{+j(n\omega)\tau}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} s(\tau)d\tau * \frac{1}{2} (e^{-j(n\omega)\tau})$$

Dividieren wir die differentielle Amplitude dA die zur Frequenz $n*d\omega$ gehört durch $d\omega$, um zur Spektralen Dichte zu gelangen erhalten wir

$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j(n\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S(\omega) = 2\pi * \frac{dA}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Zur Vollständigkeit sei noch erwähnt, dass die Frequenz ω_i konstant gehalten wird.

Wo sind die Verständnisprobleme „vergraben“

- ⇒ Die Zeitfunktion $f(t_i)$ ist ein reeller i.A. von null verschiedener Wert.
- ⇒ $S(\omega)$ ist eine Dichte und keine physikalische Amplitude. Die tatsächliche Amplitude für die Frequenz ω ist differenziell klein $S(\omega)d\omega$. Intuitiv vergleicht man den Signalwert $f(t)$ (von 0 verschieden) mit der differenziellen Amplitude im Frequenzbereich $S(\omega)d\omega$, **was falsch ist!**

Aus der Energiebetrachtung heraus gilt

Die Energie im gesamten Zeitbereich ist das Integral der Leistung über der Zeit.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 * \frac{1}{R} dt$$

Die gesamte Energie im Frequenzbereich ist das Integral der spektralen Dicht über der Frequenz.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 * \frac{1}{R} d\omega$$

Das Parseval Theorem sagt aus, dass diese beiden Energien gleich sind, daher existieren die Signalfunktion $f(t)$ und die Spektrale Dicht $S(\omega)$ gleichwertig nebeneinander.

Man kann $f(t)$ auch als Dichtefunktion betrachten, da die Energie durch das Integral $|f(t)|^2$ über der Zeitachse bestimmt werden muss, also zu einem bestimmten Zeitpunkt nur als Dichte vorhanden ist. Die Leistung des Signals $P(t_i) = |f(t_i)|^2 * \frac{1}{R}$ kann als Energiedichte zum Zeitpunkt t_i aufgefasst werden!

Beispielfunktionen

Frequenzspektrum der Funktion $\cos(\omega t)$

Betrachten wir folgendes Frequenzspektrum

$$S(j\omega) = \pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} \pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) * e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \\ = \cos(\omega_0 t)$$

$$C_1 = C_{-1} = \frac{1}{2}$$

Sonst gilt: $C_i = 0, i \neq (1, -1)$

Ableitung der Koeffizienten siehe Anhang S18.

Beachte:

In der Betrachtung als Frequenzdichte muss eine diskret vorhandene Frequenz zu einem unendlich hohen Wert führen, da die Amplitude $A = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} S(\omega) d\omega$ ist. Das Integral wird dann mit dieser einzig vorhandenen Frequenz reell da $S(\omega)$ = der Dirac Impuls (in der Frequenzdomäne) ist.

Frequenzspektrum der Delta- Funktion $\delta(t)$

Aus 10.1 folgt für das Spektrum der Delta Funktion

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) * e^{-j\omega t} dt = 1$$

Mit 10.2 folgt

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int 1 * e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int e^{j\omega t} d\omega \quad [11]$$

Alle Zeigerpärchen $\frac{1}{2\pi} d\omega * e^{j\omega t_i}, \frac{1}{2\pi} d\omega * e^{-j\omega t_i}$ werden mit möglichst kleinen Frequenzintervallen $d\omega$ aufsummiert. Jedes Zeigerpärchen ist eine cos Funktion mit einer differenziell kleinen Amplitude $\frac{d\omega}{\pi}$ deren Scheitelpunkt immer bei $t=0$ ist.

$$\frac{d\omega}{\pi} * \cos(n(d\omega)t_i).$$

Je mehr dieser cos Funktionen summiert werden, desto näher kommt man an den Dirac'schen Delta Impuls heran.

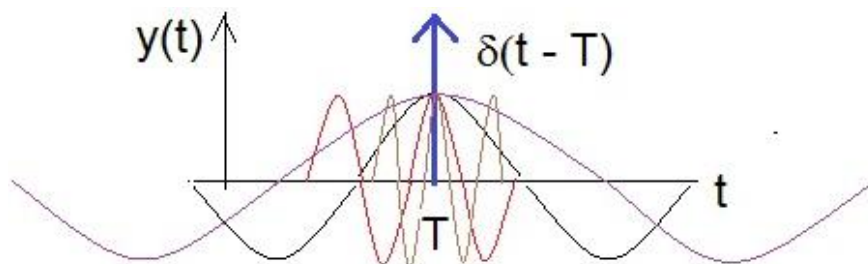
Für einen auf der Zeitachse verschobenem Dirac-Impulse ergibt sich

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T) * e^{-j\omega t} dt = 1 * e^{-j\omega T}$$

Für die Frequenz $\omega = n * d\omega$ (eines cos Signals) gilt folgende Funktion (Amplitude = $\frac{d\omega}{\pi}$), (Phase = $-n * d\omega * T = -\omega T$)

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_n(t) &= \frac{d\omega}{\pi} * \cos(n * d\omega * t - n * d\omega * T) = \frac{d\omega}{\pi} * \cos(n * d\omega * (t - T)) \\ &= \frac{d\omega}{\pi} * \cos(\omega * (t - T)) \end{aligned}$$

Der Scheitel ist immer bei $t = T$. (Der Dirac-Impuls gespiegelt an der Y-Achse ($\delta(t + T)$) ist nicht eingezeichnet)



Fourierreihe einer periodischen Dirac-Impulse Folge

Betrachten wir die Folge der Dirac-Impulse

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Die Fourier Reihe der Dirac-Impulse Folge errechnet sich nach Gleichung [9] mit

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) * e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}$$

Für die Reihe ergibt sich

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Mit:

$S(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ folgt nach Rücktransformation

$$F^{-1}\{S(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) * e^{+j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Daher gilt mit

$$f(t) = F^{-1}\{g(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

:

$$F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

Nach der Multiplikation mit 2π und anschließender Fourier Transformation beider Seiten (+nach verschieben von 2π) erhält man

$$F\{...\} \quad 2\pi * F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = e^{j\omega_0 t}$$

$$F\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi * F\{F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} S(j\omega) = F\{s(t)\} &= F\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi * \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned}$$

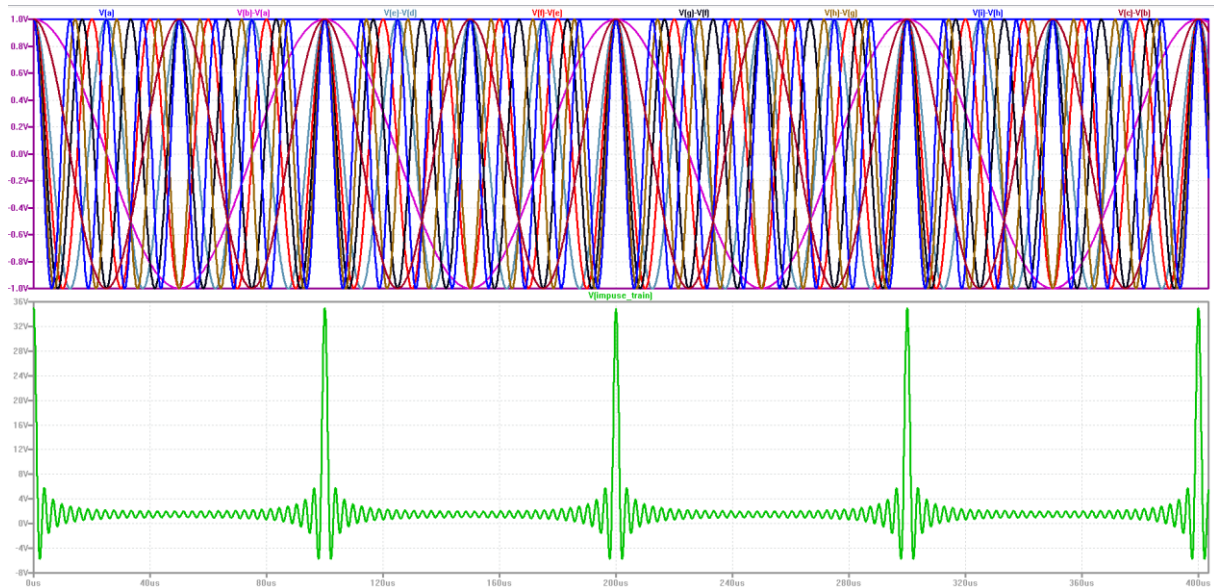


Abbildung 6 LT-Simulation von 10k bis 350kHz in 10kHz Schritten

Anhang

Bestimmung der komplexen Koeffizienten aus reellen Fourierreihen

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + B_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A_n + jB_n}{2} e^{-jn\omega_0 t} + \frac{A_n - jB_n}{2} e^{jn\omega_0 t} \right)$$

$$\frac{A_n - jB_n}{2} = C_n$$

$$\frac{A_n + jB_n}{2} = C_n^*$$

Wegen

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + B_n \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \left(A_{-n} \frac{e^{j(-n)\omega_0 t} + e^{j(-(-n))\omega_0 t}}{2} + B_{-n} \frac{e^{j(-n)\omega_0 t} - e^{j(-(-n))\omega_0 t}}{2j} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \left(A_{-n} \frac{e^{j(-n\omega_0 t)} + e^{jn\omega_0 t}}{2} + B_{-n} \frac{e^{j(-n\omega_0 t)} - e^{jn\omega_0 t}}{2j} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^0 \left(A_{-n} \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} + (-B_{-n}) \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$A_n = A_{-n}, B_n = -B_{-n}$$

$$\rightarrow C_n^* = C_{-n}$$

$$\text{Mit } C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \text{ folgt: } C_n^* = \frac{A_n + jB_n}{2} = \frac{A_{-n} - jB_{-n}}{2} = C_{-n}$$

Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten von $\cos(\omega t)$

$$C_n = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2\pi} * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) * e^{-j\omega_0 n t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} \frac{1}{2\pi} * (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) * e^{-j\omega_0 n t} dt$$

$$C_1 = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) * e^{-j\omega_0 1 t} dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (1 + e^{-2j\omega_0 t}) dt =$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_0} * 2 \right) = \frac{1}{2}$$

$$C_{-1} = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) * e^{-j\omega_0 (-1)t} dt$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} (1 + e^{2j\omega_0 t}) dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_0} * 2 \right) = \frac{1}{2}$$

Alle anderen Koeffizienten sind 0.