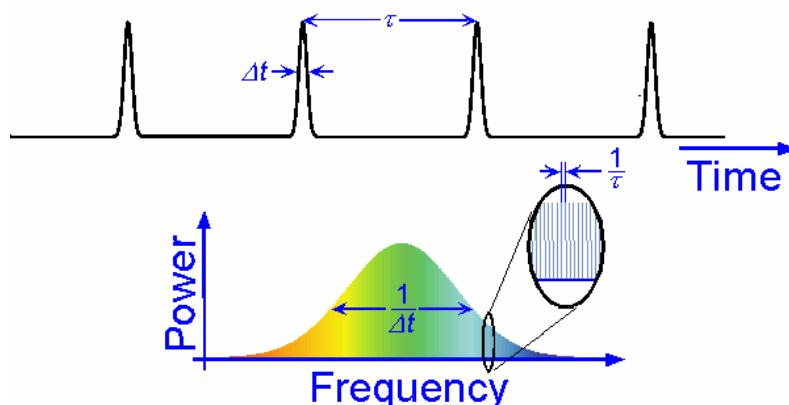


Kapitel 2: Fourieranalyse

Periodische und nichtperiodische Signale



Inhaltsverzeichnis

1. EINLEITUNG	2
2. LINEARER MITTELWERT	3
3. LEISTUNG UND EFFEKTIVWERT	3
4. WINKELFUNKTIONEN	4
5. FOURIERREIHE	4
6. LEISTUNG IM FREQUENZBEREICH UND KLIRRFAKTOR	7
7. FOURIERTRANSFORMATION.....	7
8. EIGENSCHAFTEN DER FOURIERTRANSFORMATION	8
8.1. LINEARITÄT	8
8.2. FALTUNG	8
8.3. ZEITSKALIERUNG	9
8.4. DUALITÄT (SYMMETRIE).....	10
8.5. ZEITVERSCHIEBUNG	11
8.6. FREQUENZVERSCHIEBUNG.....	11
8.7. DIFFERENTIATION UND INTEGRATION.....	12
9. SIGNALENERGIE	12
10. SYMMETRIEN.....	12
11. DIRAC-IMPULS.....	13
12. FOURIERTRANSFORMATION PERIODISCHER SIGNALE	14
13. LITERATUR- BZW. QUELLENVERZEICHNIS	14

1. Einleitung

Ein analoges Signal kann als Funktion mit kontinuierlichem Definitions- und Wertebereich aufgefasst werden.

In der Nachrichtentechnik hat man es meistens mit kontinuierlichen Amplitudenwerten (z.B. Spannung oder Strom) in Funktion der Zeit zu tun, siehe Abbildung 1.

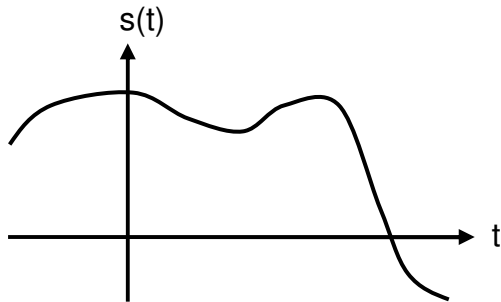


Abbildung 1: Analoges (Zeit-) Signal.

In diesem Kapitel wird die Signalbeschreibung von zeitkontinuierlichen, periodischen Signalen repetiert.

Zeitkontinuierliche, periodische Signale sind wichtige Test-, Hilfs- und Trägersignale in der Nachrichtentechnik. Sie können einfach generiert und gemessen werden (mit dem KO im Zeitbereich oder dem Spektrumanalysator im Frequenzbereich). Sie tragen aber selbst keine Information.

Für ein zeitkontinuierliches, periodisches Signal $s(t)$ mit der Periode T gilt

$$s(t) = s(t-kT) \quad k = \dots -1, 0, 1 \dots, \quad (1)$$

siehe auch Abbildung 2. Häufig wird an Stelle der Periodendauer T [s] die Wiederhol- bzw. Grundfrequenz

$$f_0 = 1/T \text{ [Hz]} \quad (2)$$

angegeben.

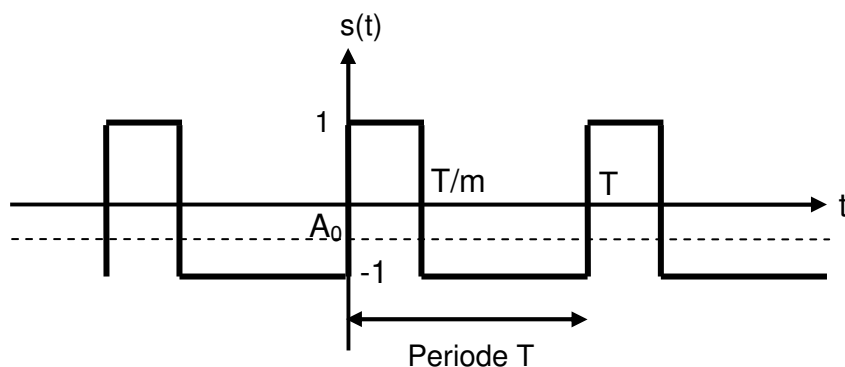


Abbildung 2: Zeitkontinuierliches, periodisches Signal.

2. Linearer Mittelwert

Der lineare Mittelwert A_0 eines zeitkontinuierlichen, periodischen Signals $s(t)$ ist wie folgt definiert:

$$\text{Linearer Mittelwert: } A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad (3)$$

Der Startwert der Integration t_0 kann dabei beliebig gewählt werden.

Beispiel

Der lineare Mittelwert des in Abbildung 2 dargestellten Signals $s(t)$ beträgt $A_0 = 2/m-1$. Für $m=2$ ist das Signal mittelwertfrei. Für $m=4$ resultiert ein Mittelwert von $A_0 = -0.5$.

Die Mittelwertbildung durch Integration übt eine Glättungs- oder Tiefpassfunktion aus. A_0 kann also auch durch Filterung von $s(t)$ mit einem Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_g \ll f_0$ bestimmt werden. Wir werden bei der Fourierreihe unten noch sehen, dass A_0 dem DC-Wert bzw. der DC-Komponente von $s(t)$ entspricht.

Beispiel

Wenn das in Abbildung 2 dargestellte Signal $s(t)$ auf einem KO dargestellt wird, springt es um $|A_0|$ nach oben, wenn man von DC- auf AC-Kopplung umschaltet, d.h. wenn man die DC-Komponente mit einem Serie-C unterdrückt. Mit der AC-Kopplung wird nur das DC-freie Signal $s(t) - A_0$ angezeigt.

Der lineare Mittelwert A_0 kann auch mit N äquidistanten Stützwerten einer Periode ($T=N \cdot \Delta t$) von $s(t)$ numerisch approximiert werden:

$$A_0 \approx \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s(t_0 + n \cdot \Delta t) \quad (4)$$

Wieder ist t_0 beliebig. Die Approximation ist natürlich umso genauer, je grösser N bzw. je kleiner Δt ist.

3. Leistung und Effektivwert

Die normierte Momentan-Leistung an 1Ω ist gegeben durch $p(t)=s^2(t)$. Für die mittlere normierte Leistung eines zeitkontinuierlichen, periodischen Signals $s(t)$ folgt

$$\text{Mittlere Leistung an } 1\Omega: P_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t) dt \quad (5)$$

Beispiel

Für das in Abbildung 2 dargestellte Signal $s(t)$ gilt $P_T=1$, unabhängig von m .

Der Effektivwert bzw. der rms-Wert ist wie folgt definiert

$$\text{Effektivwert: } S_{\text{eff}} = S_{\text{rms}} = \sqrt{P_T} \quad (6)$$

„rms“ steht dabei für *root-mean-square* und sagt, wie der Wert berechnet werden muss.

Beispiel

Für das harmonische Signal $s(t) = S_p \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ gilt: $P_T = S_p^2/2$ bzw. $S_{rms} = S_{eff} = S_p/\sqrt{2}$.
Bei einem cos-Signal ist also der *peak-Wert* S_p um $\sqrt{2}$ grösser als der rms-Wert.

4. Winkelfunktionen

Die bekanntesten periodischen Signale sind die harmonischen Funktionen bzw. die Winkelfunktionen $\sin(2\pi f_0 t)$, $\cos(2\pi f_0 t)$ und $e^{j2\pi f_0 t}$.

Der Zusammenhang zwischen den reellen und den komplexen Winkelfunktionen ist durch die Eulerformeln

$$\cos(\varphi) = (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) / 2 \quad (7)$$

$$\sin(\varphi) = (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}) / 2j \quad (8)$$

und die Polarkoordinatendarstellung in Abbildung 3 gegeben:

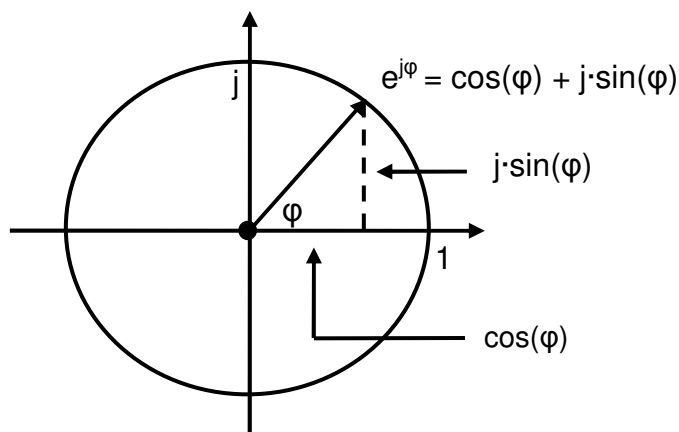


Abbildung 3: Polarkoordinatendarstellung von $e^{j\varphi}$.

5. Fourierreihe

Fourier (1768-1830) hat gesehen, dass jede periodische Funktion $s(t)$ durch eine (unendliche) Reihe harmonischer Schwingungen dargestellt werden kann, d.h.

$$\text{Fourierreihe: } s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(2\pi k f_0 t) + B_k \cdot \sin(2\pi k f_0 t) \quad (9)$$

wobei für die Fourierkoeffizienten gilt:

$$\text{DC-Anteil (lin. Mittelwert)} \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt \quad (10)$$

$$\text{cos-Amplitudenspektrum (gerade)} \quad A_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot \cos(2\pi k f_0 t) dt \quad \text{für } k \geq 1 \quad (11)$$

$$\text{sin-Amplitudenspektrum (ungerade)} \quad B_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) \cdot \sin(2\pi k f_0 t) dt \quad \text{für } k \geq 1 \quad (12)$$

Beispiel

Für das in Abbildung 2 dargestellte (ungerade) periodische Rechtecksignal $s(t)$ gilt im symmetrischen Fall ($m=2$):

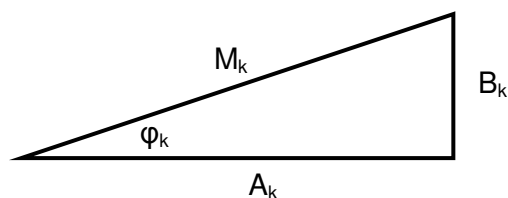
$$s(t) = \frac{4}{\pi} \cdot [\sin(2\pi f_0 t) - \frac{1}{3} \sin(2\pi \cdot 3f_0 t) + \frac{1}{5} \sin(2\pi \cdot 5f_0 t) - \dots] \quad (13)$$

Das symmetrische, periodische Rechtecksignal $s(t)$ hat nur ungerade *Harmonische* bzw. *Oberwellen*. Sie zerfallen mit $1/x$. ■

Die Fourierreihe kann auch in die Betrag-Phasendarstellung gebracht werden

$$\text{Fourierreihe (Betrag/Phase): } s(t) = M_0 + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \cdot \cos(2\pi k f_0 t - \varphi_k) \quad (14)$$

Der Zusammenhang mit den cos- und sin-Koeffizienten kann mit Hilfe der in Abbildung 4 dargestellten trigonometrischen Formel hergestellt werden.



$$M_k \cdot \cos(2\pi k f_0 t - \varphi_k) = \underbrace{M_k \cdot \cos(\varphi_k)}_{A_k} \cdot \cos(2\pi k f_0 t) + \underbrace{M_k \cdot \sin(\varphi_k)}_{B_k} \cdot \sin(2\pi k f_0 t)$$

Abbildung 4: Zusammenhang zwischen (M, φ) - und (A, B) -Fourierkoeffizienten.

$$M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad (13)$$

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) + n\pi \quad (14)$$

Jedes periodische Signal hat also ein einseitiges Betrag-Phasen-*Linienspektrum*!

Beispiel

Das in Abbildung 2 dargestellte symmetrische, periodische Rechtecksignal $s(t)$ hat das unten dargestellte Betrag-Phasen-Spektrum.

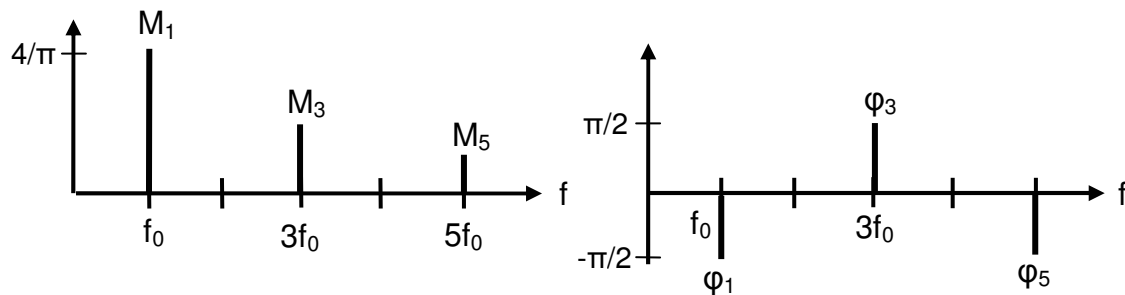


Abbildung 5: Betrag-Phasen-Spektrum des periodischen, symm. Rechtecksignals. ■

Am meisten verwendet bzw. am nützlichsten ist die komplexe Schreibweise der Fourierreihe. Die komplexe Fourierreihe ist wie folgt definiert:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \quad (15)$$

Fourierreihe (komplex):

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad (16)$$

Der Zusammenhang mit den anderen Fourier-Koeffizienten lautet:

$$c_k = \frac{1}{2} (A_k - j \cdot B_k) = c_{-k}^* \quad \text{für } k \geq 1 \quad (17)$$

$$M_0 = c_0 \quad M_k = 2 \cdot |c_k| \quad \text{für } k \geq 1 \quad \varphi_k = \arg(c_k) \quad (18)$$

Beispiel

In Abbildung 6 ist ein symmetrisches periodisches Rechtecksignal $s(t)$ und seine ersten zwei Harmonischen sowie das zweiseitige Betragsspektrum dargestellt.

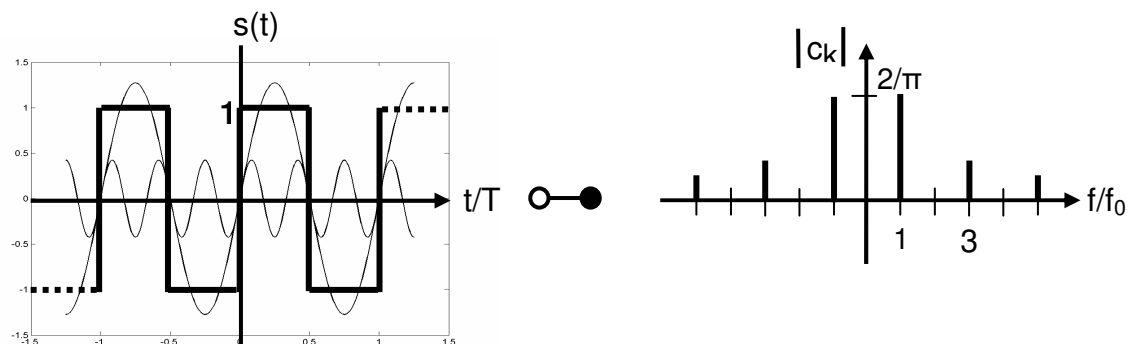


Abbildung 6: Zweiseitiges Betrags-Spektrum des periodischen Rechtecksignals. ■

6. Leistung im Frequenzbereich und Klirrfaktor

Die mittlere Leistung P_T eines periodischen Signals $s(t)$ entspricht der Summe der Leistungen der einzelnen Harmonischen, d.h.

$$\text{Satz von Parseval: } P_T = \sum_{k=0}^{\infty} P_k = M_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2}{2} = A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2 + B_k^2}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (19)$$

weil die einzelnen Harmonischen *orthogonal* zueinander sind. P_T besteht aus der DC-Leistung und der AC-Leistung aller Harmonischen.

Der Zusammenhang zwischen der mittleren normierten Leistung P_T eines periodischen Signals $s(t)$ und seiner Fourierkoeffizienten ist auch als *Satz von Parseval* bekannt.

Mit einem Spektrumanalysator können die Leistungen (oder die Effektivwerte) der einzelnen Spektralkomponenten eines periodischen Signals gemessen und in Form eines einseitigen Leistungsspektrums dargestellt werden.

7. Fouriertransformation

Nicht-periodische bzw. *aperiodische* Signale $s(t)$ können nicht als Fourierreihe dargestellt werden. Damit man das Spektrum von $s(t)$ aber trotzdem mit Hilfe der Fourierreihe bestimmen kann, betrachtet man das periodisch fortgesetzte Signal und lässt die Periodendauer T gegen Unendlich streben, siehe Abbildung 7.

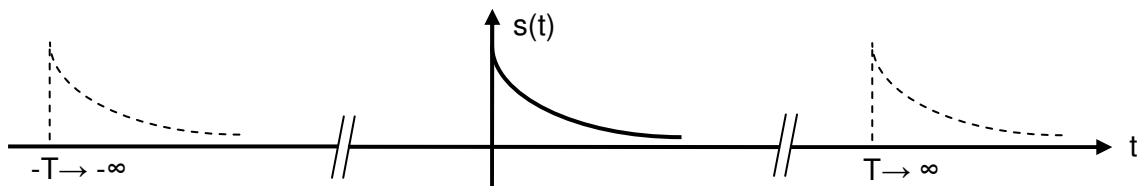


Abbildung 7: (Im Unendlichen) periodisch fortgesetztes aperiodisches Signal.

Dieser Grenzübergang ist gestattet, falls $s(t)$ absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty \quad (21)$$

Die Voraussetzung in (21) trifft für die meisten Signale mit endlicher Energie und für die Impulsantworten stabiler, linearer Systeme (wie z.B. Filter) zu.

Für das periodisch fortgesetzte Signal existiert nun die Fourierreihe. Für $T \rightarrow \infty$ rücken die c_k -Spektrallinien immer näher zusammen (Linienabstand = $1/T$). Es entsteht ein kontinuierliches Spektrum. Allerdings streben die c_k -Spektrallinien gegen Null, weil die mittlere normierte Leistung gegen Null strebt. Die spektrale Dichte

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{c_k}{1/T} \right) \quad (22)$$

hingegen existiert.

Mit Hilfe des Grenzübergangs (22) kann man das Amplituden-Dichtespektrum $S(f)$ [V/Hz] bzw. die Fouriertransformierte $S(f)$ des aperiodischen Signals $s(t)$ bestimmen. Die Transformation und die entsprechende Rücktransformation lauten,

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (23)$$

wobei wir im Folgenden Spektren mit Grossbuchstaben kennzeichnen.

Die Fouriertransformation kann übrigens auch aus der Laplace-Transformation hergeleitet werden, indem man einfach $s = j\omega$ setzt. Die Herleitung oben gibt uns aber mehr Einblick in die „Natur“ der Fouriertransformation.

8. Eigenschaften der Fouriertransformation

Im Folgenden werden einige Eigenschaften der Fouriertransformation besprochen (ohne Beweis). Sie sind wichtig für das Verständnis vieler nachrichtentechnischer Prinzipien.

8.1. Linearität

Die Fouriertransformation ist linear. Es gilt das Superpositionsprinzip, d.h. für beliebige reell- oder komplexwertige a und b gilt:

$$a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad a \cdot S_1(f) + b \cdot S_2(f) \quad (24)$$

8.2. Faltung

Der Faltung (*-Operation) im Zeitbereich entspricht die Multiplikation im Frequenzbereich, d.h.

$$s(t) * h(t) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad S(f) \cdot H(f) \quad (25)$$

In Abbildung 8 ist die Faltungseigenschaft dargestellt. Das Ausgangssignal eines linearen Systems kann im Zeitbereich bestimmt werden, indem man das Eingangssignal $s(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ faltet.

Alternativ kann man im Frequenzbereich das Spektrum des Ausgangssignals bestimmen, indem man das Fourierspektrum $S(f)$ des Eingangssignals mit der Übertragungsfunktion $H(f)$ des linearen Systems bzw. der Fouriertransformierten der Impulsantwort $h(t)$ multipliziert.

Zur Konkretisierung ist in Abbildung 2 zusätzlich der RC-Tiefpass 1. Ordnung mit der Impulsantwort $h(t)$ und dem Betragsspektrum $|H(f)|$ dargestellt.

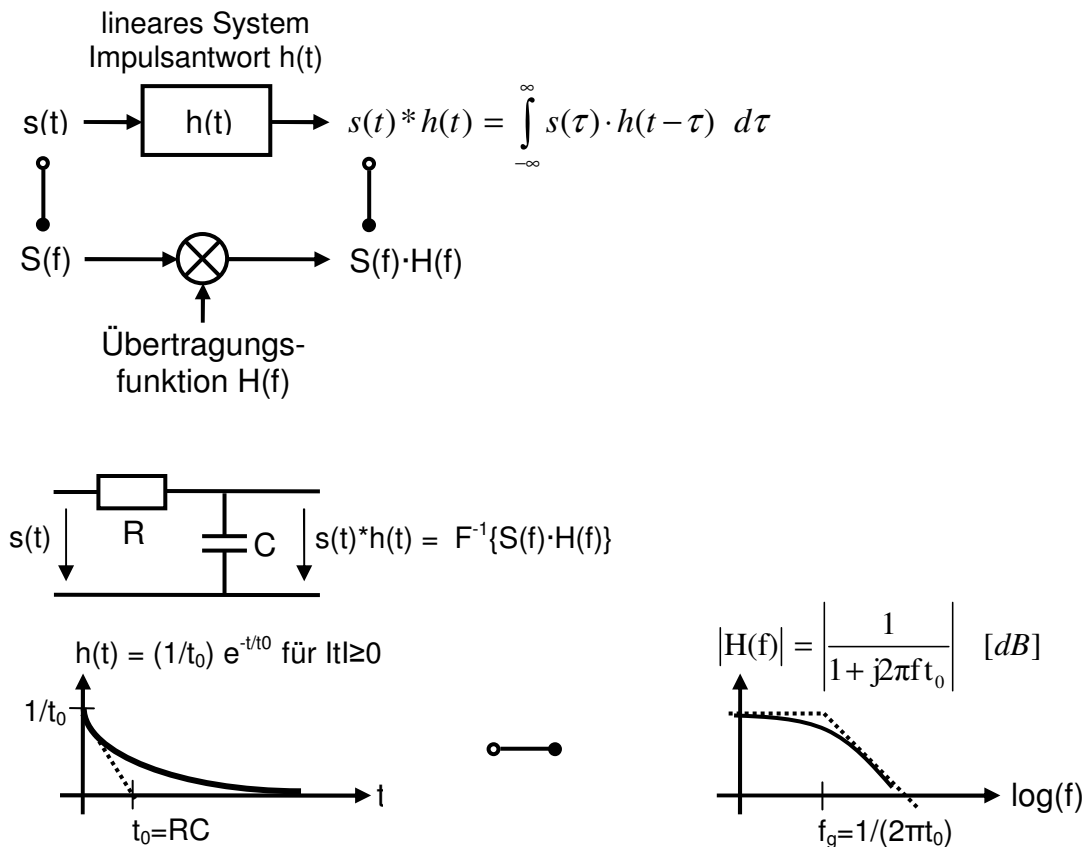


Abbildung 8: Faltungseigenschaft der Fouriertransformation.

8.3. Zeitskalierung

Die Verkürzung des Signals $s(t)$ mit dem Faktor $a > 1$ bzw. die Dehnung des Signals $s(t)$ mit dem Faktor $a < 1$ hat neben einer Normierung eine Dehnung bzw. Verkürzung des Spektrums $S(f)$ mit dem Faktor $1/a$ zur Folge, d.h.

$$s(a \cdot t) \quad \circ - \bullet \quad (1/|a|) \cdot S(f/a) \quad (26)$$

Beispiel

Der in Abbildung 9 dargestellte Rechteckpuls $s(t)$ der Höhe A und der Breite τ besitzt das $\sin(x)/x$ -förmige, zweiseitig unendliche Spektrum

$$S(f) = A \cdot \tau \frac{\sin(\pi \cdot f \cdot \tau)}{\pi \cdot f \cdot \tau} \quad (27)$$

mit Nullstellen bei den ganzzahligen Vielfachen von $1/\tau$, mit Ausnahme $S(0) = A \cdot \tau$. Definieren wir willkürlich die Bandbreite des zweiseitigen Spektrums bei $f = \pm 1/(2\tau)$, so ergibt sich bei den Bandgrenzen ein Abfall von $2/\pi \approx 0.64$ bzw. $20 \cdot \log_{10}(2/\pi) \approx -4$ dB. Die -4 dB Bandbreite $B = 1/\tau$ ergibt ein Zeit-Bandbreite-Produkt $B \cdot \tau = 1$.

Der verkürzte Rechteckpuls $s(2t)$ der Dauer $\tau/2$ hat eine -4 dB Bandbreite $B = 2/\tau$ bzw. auch ein Zeit-Bandbreite-Produkt von 1.

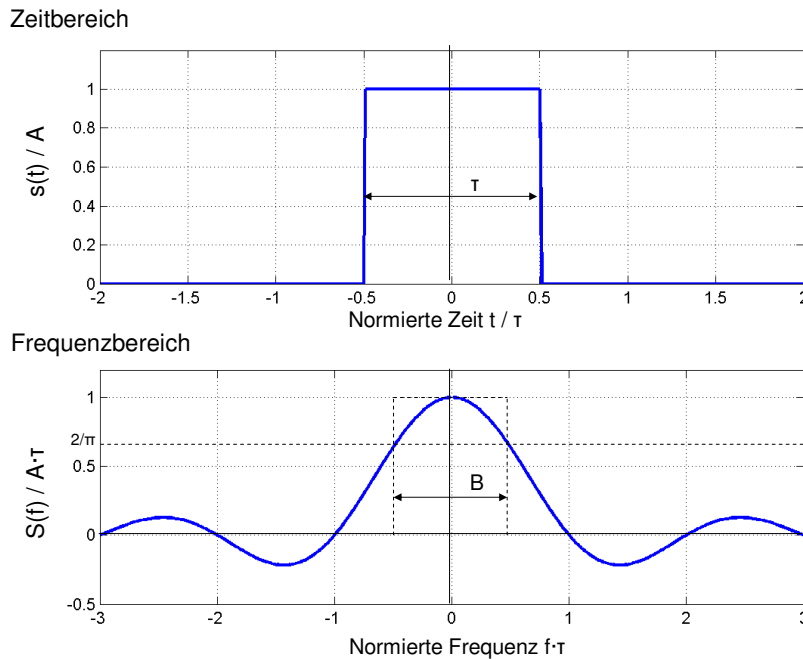


Abbildung 9: Rechteckpuls im Zeit- und Frequenzbereich.

Der im obigen Beispiel festgestellte Zusammenhang zwischen der Pulsdauer und der Bandbreite gilt wegen der Zeitskalierungseigenschaft allgemein für alle Pulssignale.

Je „kürzer“ ein Einzelpuls ist, desto „grösser“ ist die Bandbreite seines Spektrums. Umgekehrt haben „lang“ andauernde Einzelpulse schmale Spektren.

Bandbreite und Dauer eines Pulssignals können also nicht unabhängig voneinander gewählt werden. Das Zeit-Bandbreite-Produkt ist eine Konstante.

8.4. Dualität (Symmetrie)

Wenn ein aperiodisches Signal $s(t)$ das Fourierspektrum $S(f)$ (kurz: Spektrum) besitzt, erhält man sofort eine neue Korrespondenz, indem man im Ausdruck des Spektrums die Frequenz f durch die Zeit t und im Ausdruck des Signals die Zeit t durch die negative Frequenz $-f$ ersetzt.

$$S(t) \leftrightarrow s(-f) \quad (28)$$

Beispiel

Der ideale (rechteckförmige) Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_g/2$ hat die Übertragungsfunktion

$$H(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } |f| \leq f_g/2 \\ 0 & \text{für } |f| > f_g/2 \end{cases} \quad (29)$$

Die Impulsantwort

$$h(t) = f_g \frac{\sin(\pi \cdot t \cdot f_g)}{\pi \cdot t \cdot f_g} \quad (30)$$

ist dual zum Spektrum in Gleichung (27).

Der ideale Tiefpass mit der Grenzfrequenz $f_g/2$ hat also eine $\sin(x)/x$ -förmige, zweiseitig unendliche Impulsantwort mit Nullstellen bei den ganzzahligen Vielfachen von $1/f_g$.

8.5. Zeitverschiebung

Die Verschiebung des Signals $s(t)$ um t_0 im Zeitbereich bewirkt eine Multiplikation des Originalspektrums $S(f)$ mit einer Winkelfunktion, d.h.

$$s(t-t_0) \quad \circ \bullet \quad S(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad (31)$$

Ein Signal $s(t)$ hat das gleiche Betragsspektrum $|S(f)|$ wie das um t_0 zeitverschobene Signal $s(t-t_0)$.

8.6. Frequenzverschiebung

Die duale Aussage zur Gleichung (31) wird in der Nachrichtentechnik häufig verwendet. Die Multiplikation eines Signals $s(t)$ mit einer Winkelfunktion hat eine Frequenzverschiebung des Spektrums zur Folge, d.h.

$$s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ \bullet \quad S(f-f_0) \quad (32)$$

Beispiel

In Abbildung 10 ist die Multiplikation des Basisband-Signals $s(t)$ mit dem Trägersignal $\cos(2\pi f_0 t)$ im Zeit- und im Frequenzbereich dargestellt.

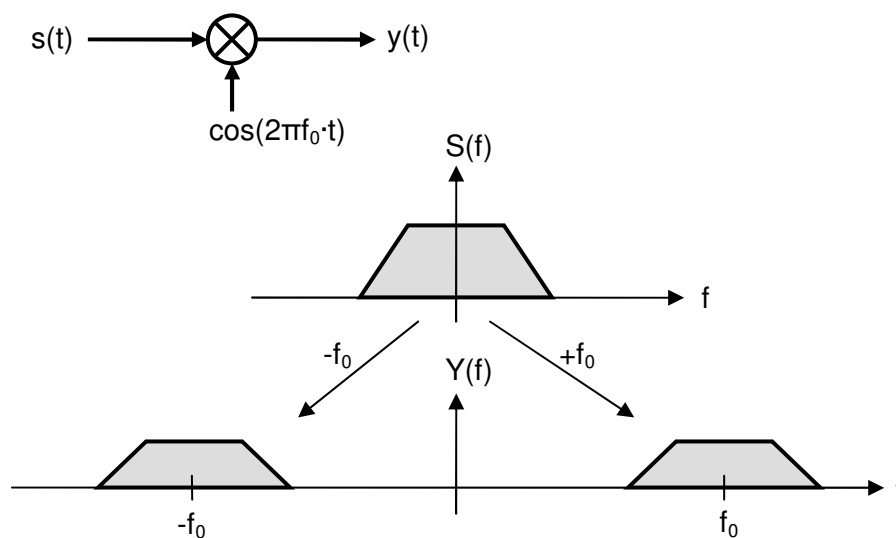


Abbildung 10: Multiplikation eines Basisbandsignals $s(t)$ mit einem \cos -Trägersignal.

Für das Trägersignal gilt mit der Eulerformel $\cos(2\pi f_0 t) = 0.5 \cdot (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$. Damit kann das (amplitudenmodulierte) Bandpass-Signal $y(t)$ wie folgt umgeformt werden

$$y(t) = 0.5 \cdot s(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} + 0.5 \cdot s(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \quad (33)$$

Mit der Frequenzverschiebungseigenschaft (32) folgt, dass das Spektrum $Y(f)$ des BP-Signals bis auf den Normierungsfaktor 0.5 dem um die Trägerfrequenz $\pm f_0$ verschobenen Basisband-Spektrum $S(f)$ entspricht, d.h.

$$Y(f) = 0.5 \cdot [S(f-f_0) + S(f+f_0)] \quad (34)$$

Die Multiplikation mit dem Trägersignal $\cos(2\pi f_0 \cdot t)$ hat also eine Frequenzverschiebung des Spektrums des Eingangssignals $S(f)$ um $\pm f_0$ zur Folge.

8.7. Differentiation und Integration

Der Vollständigkeit halber seien noch die beiden folgenden Korrespondenzen angegeben:

$$d^n/dt^n s(t) \quad \circ \bullet \quad (j2\pi f)^n \cdot S(f) \quad (35)$$

$$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \quad \circ \bullet \quad \frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f) \quad (36)$$

9. Signalenergie

Für die normierte Signalenergie E (an 1Ω) gilt

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt \quad (37)$$

Mit Hilfe des Satzes von Parseval kann die Energie W des nichtperiodischen Signals $s(t)$ auch im Spektrum bestimmt werden, d.h.

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (38)$$

Die Dimension von $|S(f)|^2$ ist übrigens $V^2/Hz^2 = Ws/Hz$ an 1Ω , also die spektrale Energiedichte. Da meist Verhältnisse von Signalenergien betrachtet werden, spielt die Berechnung an 1Ω keine Rolle.

10. Symmetrien

Folgende Symmetrien sind manchmal nützlich:

$$s(t) \text{ reell} \quad \circ \bullet \quad S(-f) = S^*(f) \quad (39)$$

$$s(t) \text{ reell, ungerade} \quad \circ \bullet \quad S(f) \text{ imaginär, ungerade} \quad (40)$$

$$s(t) \text{ reell, gerade} \quad \circ \bullet \quad S(f) \text{ reell, gerade} \quad (41)$$

Reelle Zeitsignale weisen also einen geraden Amplitudengang, d.h. $|S(-f)| = |S(f)|$, und einen ungeraden Phasengang, d.h. $\arg\{S(-f)\} = -\arg\{S(f)\}$, auf.

Sinus und Cosinus sind Beispiele für die Symmetrien (40) und (41).

11. Dirac-Impuls

Um die Fouriertransformation von periodischen Signalen zu bestimmen, brauchen wir den Dirac-Impuls $\delta(t)$.

Der Dirac-Impuls $\delta(t)$ kann als genügend kurzer Rechteck-Impuls hoher Amplitude gedeutet werden. Er wird üblicherweise mit einem Pfeil und allenfalls einem „Gewicht“ dargestellt, siehe Abbildung 11.

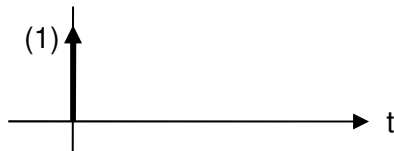


Abbildung 11: Dirac-Impuls $\delta(t)$.

Mathematisch gesehen ist der Dirac-Impuls $\delta(t)$ eine verallgemeinerte Funktion, eine sogenannte Distribution. Er kann durch das folgende Integral definiert werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0) \quad (42)$$

Der Dirac-Impuls verfügt über eine eigentliche *Sieb-* bzw. *Ausblendeigenschaft*. Im Integral oben wird aus dem Signal $s(t)$ genau der Wert an der Impulsstelle $t=t_0$ „herausgesiebt“. Es kann auch gezeigt werden, dass die Siebeigenschaft für ein Produkt von einem Dirac-Impuls $\delta(t)$ mit dem Signal $s(t)$ gilt, d.h.

$$s(t) \cdot \delta(t - t_0) = s(t_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (43)$$

Mit Hilfe der Definition (42) ist es nun einfach, das folgende duale Fouriertransformationspaar zu bestimmen:

$$\delta(t) \quad \circ - \bullet \quad 1 \quad (44)$$

$$1 \quad \circ - \bullet \quad \delta(f) \quad (45)$$

Ein unendlich schmaler Puls hat also ein flaches bzw. weisses Spektrum, in dem alle Frequenzkomponenten vorkommen. Umgekehrt hat ein DC-Signal eine sehr schmale Linie bei $f=0$ im Amplitudendichte-Spektrum.

Nützlich ist auch noch die folgende Korrespondenz: Eine Dirac-Impulsfolge mit Periode T hat ein Kamm-Spektrum mit Linienabstand $1/T$, siehe Abbildung 12.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad \circ - \bullet \quad (1/T) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) \quad (46)$$

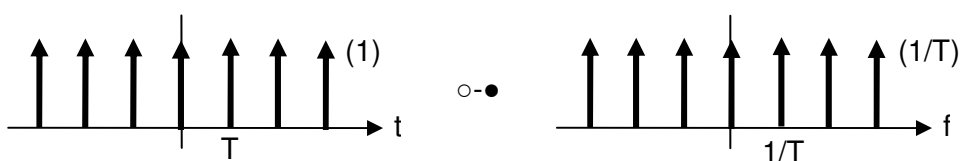


Abbildung 12: Spektrum der periodischen Dirac-Impulsfolge.

12. Fouriertransformation periodischer Signale

Zurück zum Anfang des Kapitels: Periodische Signale $s(t)$ mit Periode $T=1/f_0$ können als komplexe Fourierreihe dargestellt werden, d.h nach (15).

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j2\pi k f_0 t} \quad (47)$$

wobei c_k die komplexen Fourierkoeffizienten darstellen.

Weil die Fouriertransformation linear ist, darf man jeden Summanden in Gleichung (47) einzeln transformieren. Auf jeden Summanden kann der Frequenzverschiebungssatz (32) mit $s(t)=1$ angewendet werden. Die Fouriertransformierte eines periodischen Signals lautet deshalb

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - kf_0) \quad (48)$$

Beispiel

Das periodische Signal $\cos(2\pi f_0 \cdot t) = 0.5 \cdot (e^{j2\pi f_0 \cdot t} + e^{-j2\pi f_0 \cdot t})$ hat die Fouriertransformierte $S(f) = 0.5 \cdot [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$, siehe Abbildung 13. Das Spektrum $S(f)$ ist rein reell, weil $s(t)$ reell und gerade ist.

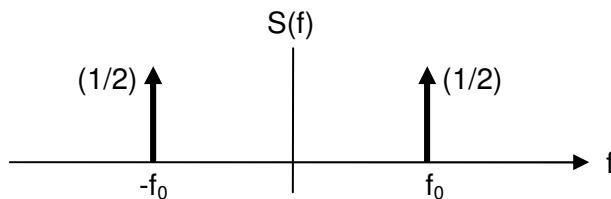


Abbildung 13: Fourier-Amplitudendichtespektrum von $\cos(2\pi f_0 \cdot t)$.

13. Literatur- bzw. Quellenverzeichnis

- [1] J. Proakis, M. Salehi, „Grundlagen der Kommunikationstechnik“, Pearson, 2003.
- [2] M. Meyer, „Signalverarbeitung“, Vieweg, 2000.
- [3] H. Lüke, „Signalübertragung“, Springer Verlag, ISBN 3-540 65197-7, 1999
- [6] Einige nützliche Tutorials, Download <http://www.complextoreal.com/tutorial.htm>