FREIE SCHWINGUNG

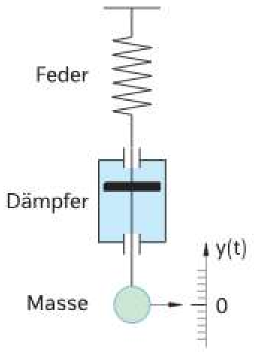
(durch einmaliges Anregen)

oder

homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(vgl. Timischl et al, Ingenieur-Mathematik 4, Dorner Verlag 2018, S. 72ff)

gedämpftes Feder-Masse-System



Körper mit Masse m ist mit Feder und Dämpfer verbunden

y(t) … Auslenkung der Masse m aus der Ruhelage zur Zeit t

es wirken:

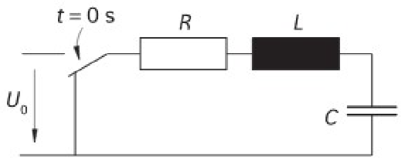
- Rückstellkraft der Feder $F_F = -c \cdot y$
  c … Federkonstante
- Reibungskraft $F_R = -b \cdot y'$
  b … Dämpfungskonstante

➔ nach dynamischen Grundgesetz: $m \cdot a = F_F + F_R$

$$y" + \frac{b}{m}\, y' + \frac{c}{m} y = 0$$ DGL für Auslenkung y(t)

Anfangsbed.: (1) $y(0) = 0$ (2) $y'(0) = v_0$

elektrischer Reihenschwingkreis



Kondensator ist mit Spannung U_0 aufgeladen, zur Zeit t=0s wird der Schalter geschlossen und Strom i(t) fließt.

Spannungsabfälle:

$u_R = R \cdot i$

$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

$u_C = \frac{q}{C}$

➔ nach 2. Kirchhoff´schen Gesetz:

$$u_R + u_L + u_C = 0$$

$$R \cdot i + L \cdot i' + \frac{q}{C} = 0$$

$$i" + \frac{R}{L}\, i' + \frac{1}{CL}\, i = 0$$ DGL für Strom i(t)

Anfangsbed.: (1) $i(0) = 0$ (2) $i'(0) = \frac{1}{L} U_0$

Beide DGL formal ident mit:

$$y" + 2\delta \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

δ … *Abklingkoeffizient* ω_0 … *Kennkreisfrequenz* D … *Dämpfungsgrad* mit $\delta = D \cdot \omega_0$

Zusammenhang

gedämpftes Feder-Masse-System		elektrischer Reihenschwingkreis
m	Konstante	L
b	Konstante	R
c	Konstante	1/C
$\sqrt{\frac{c}{m}}$	Kennkreisfrequenz ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
$\frac{b}{2m}$	Abklingkoeffizient $\delta = D \cdot \omega_0$	$\frac{R}{2L}$
$\frac{b}{2\sqrt{c\,m}}$	Dämpfungsgrad D	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$

Art der Bewegung: abhängig vom Dämpfungsgrad bzw. vom Ergebnis der charakteristischen Gleichung

Schwingfall: $D < 1$ $(\lambda_1, \lambda_2 \epsilon\, \mathbb{C})$ **Aperiodischer Grenzfall:** $D = 1$ $(\lambda_1 = \lambda_2 \epsilon\, \mathbb{R})$ **Kriechfall:** $D > 1$ $(\lambda_1, \lambda_2 \epsilon\, \mathbb{R})$