Übungszettel 1: **Differentialgleichungen 1. Ordnung** 4. Jhg.

1. Bestimme den Typ der folgenden Differentialgleichungen (Ordnung; Grad; homogen/inhomogen; variable/konstante Koeffizienten)
   a) $y''-3y=0$
   b) $4y'+7y^2=\cos x$
   c) $y'''-x^2\cdot y=6$
   d) $y'''-3y=7x$
   e) $y''=y-8y'$
   f) $3\cdot y^{(4)}-2y''+9y-8=0$

(In-)homogene DGL – Trennung der Variablen

2. Ein Ball rollt aus der Ruhelage mit $v_0=7{,}5m/s$. Die Abnahme der Geschwindigkeit mit der Zeit (d.h. die Bremsung oder negative Beschleunigung) beträgt $a=-1{,}8m/s^2$.
   a. Formuliere eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Balls und ermittle die spezielle Lösung.
   b. Formuliere allgemein eine Differentialgleichung für den zurückgelegten Weg des Balls und löse diese Differentialgleichung der Weg-Zeit-Funktion.
   c. Wie weit rollt dieser Ball?

3. Ein Ball wird in 192m Höhe aus einem mit 14,4m/s steigenden Ballon fallengelassen.
   a. Formuliere eine Differentialgleichung für die Geschwindigkeit des Balls und ermittle die spezielle Lösung.
   b. Formuliere allgemein eine Differentialgleichung für die Höhe des Balls und löse die Differentialgleichung der Weg-Zeit-Funktion h(t).
   c. Wie groß ist die maximale Höhe des Balls?
   d. Mit welcher Geschwindigkeit erreicht er den Boden?

4. Eine Stadt hat zu einem Zeitpunkt t = 0 insgesamt 100000 Einwohner/innen. Nach 3 Jahren hat diese Stadt 112000 Einwohner/innen. Die Funktion E beschreibt das Bevölkerungswachstum für einen bestimmten Zeitraum: E(t) ist die Anzahl der Einwohner/innen nach t Jahren. Die 1. Ableitung der Funktion E ist proportional zu E.
   Stelle die zugehörige Differenzialgleichung für E auf.
   Löse diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode Trennen der Variablen.
   Erkläre den Unterschied zwischen allgemeiner und spezieller Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung.

5. Die Beziehung zwischen Luftdruck p und Höhe h lässt sich bei konstanter Temperatur mit der folgenden Gleichung beschreiben:

$$\frac{dp}{dh}=-k.p$$

   p… Luftdruck in Hektopascal (hPa), h … Höhe in Metern (m)

   a. Erkläre, wie man diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode Trennung der Variablen zur allgemeinen Lösung $p(h)=C\cdot e^{-k\cdot h}$ führt.
   b. Der Luftdruck wird am selben Tag zur selben Zeit an 2 verschiedenen Stationen gemessen: in Villach (500 m über dem Meeresspiegel) wird ein Druck p = 962 hPa gemessen, auf dem Dobratsch, einem Berg nahe Villach (2 167 m über dem Meeresspiegel), ergibt die Messung p = 790 hPa.
   Berechne mit diesen Angaben und anhand der in Teilaufgabe a angegebenen allgemeinen Lösung die spezielle Lösung für die Differenzialgleichung.

6. Bei einem Fertigungsprozess werden glühende Metallteile zur Abkühlung über eine steile Rutsche in ein horizontales, mit Wasser gefülltes Becken befördert.
   a. Es wird davon ausgegangen, dass der Reibungswiderstand $F_{R,}$ den der Körper im Auslauf erfährt, proportional zu seiner momentanen Geschwindigkeit ist. Für ein bestimmtes Werkstück wird dieser Zusammenhang durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$$

t … Zeit in Sekunden, v(t) … Geschwindigkeit in m/s, m … Masse in kg, k … Reibungskonstante in kg/s

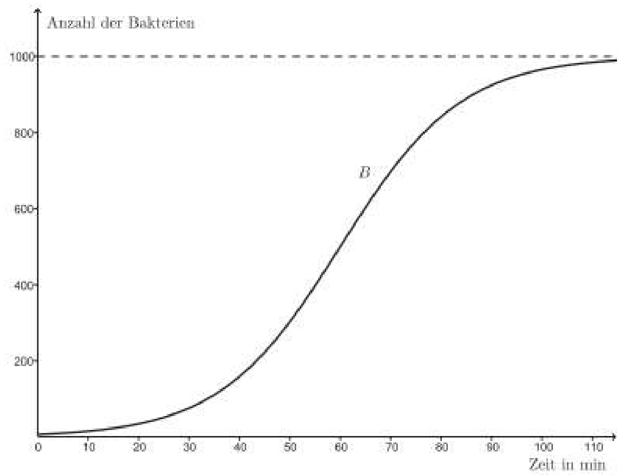
   Löse diese Differentialgleichung Schritt für Schritt durch „Trennen der Variablen".
   Bei einem Metallteil mit einer Masse von 75kg wird zum Zeitpunkt t = 0 eine Geschwindigkeit von 43,2km/h gemessen. Nach 3 Sekunden geradliniger Bewegung hat das Metallteil eine Geschwindigkeit von 13km/h.
   Bestimme die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

   b. Für ein weiteres Metallteil kann die Bewegung im Wasser durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = 12 \cdot e^{-0,4t}$$

   Stelle die Funktion v(t) graphisch dar.
   Beschreibe den Verlauf des Graphen für $t \to \infty$.
   Erstelle eine Formel, mit der der Weg s berechnet werden kann, den das Metallteil innerhalb der ersten 3 Sekunden ab Beginn der Messung zurücklegt.

7. Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zum Zeitpunkt t= 0 Minuten angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: N(t) ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als Wachstumsrate.
   a. Stelle die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
   Löse die Differenzialgleichung mithilfe der Methode Trennen der Variablen.
   Berechne, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
   Gib an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.
   b. Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
B(t) ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t

Lies aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.
Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8{,}35 \cdot 10^{-5} \cdot \mathrm{B} \cdot (1000 - \mathrm{B}) \text{ mit B>0}$$

Argumentiere anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.

8. Die untenstehende Gleichung von Clausius-Clapeyron beschreibt den Dampfdruck p einer Flüssigkeit bei gegebener Temperatur T.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{p \cdot H_v}{R \cdot T^2}$$

p … Druck in Bar (bar), T … Temperatur in Kelvin (K), R … ideale Gaskonstante, R = 8,3144 J · mol^{-1}.K^{-1}
H_V … molare Verdampfungsenthalpie in Kilojoule pro Mol (kJ/mol), konstant

Löse die gegebene Differenzialgleichung mittels „Trennen der Variablen“ und dokumentiere den Lösungsweg.

a. Die spezielle Lösung für das p,T-Zustandsdiagramm von Wasser ist durch folgende Funktion p gegeben:

$$\mathrm{p(T)} = 2{,}52 \cdot 10^6 \cdot e^{-\frac{5418}{T}}$$

Bei höheren Temperaturen weichen die experimentellen Werte von p vom theoretischen Wert ab. Experimentell ermittelte Daten:

Temperatur in Kelvin (K)	Druck in Bar
313,15	0,0736
323,15	0,1230

Berechne durch lineare Interpolation den Druck für T = 318,15 K.
Ermittle für diese Temperatur den prozentuellen Unterschied zum theoretischen Wert.

9. Abkühlungsgesetz von Newton: Eine Flüssigkeit mit der Temperatur T befindet sich in einem Raum mit der Temperatur T_U. Die Änderung der Temperatur mit der Zeit ist proportional zur Temperaturdifferenz.
   a. Formuliere eine DGL für die Temperatur der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Zeit und gib eine allgemeine Lösung an.
   b. Eine bestimmte Flüssigkeit kühlt in 15 Minuten von 100° auf 70° ab. Wie lange dauert es, bis sie nur mehr 40° hat, wenn die Umgebungstemperatur 30° beträgt?

10. Im Jahr 1984 gab es in Westdeutschland 6600 installierte Industrieroboter, 1988 waren es bereits 17700. Eine Schätzung besagt, dass die Sättigungsgrenze bei 59000 Robotern liegt.
Stelle unter der Annahme, dass logistisches Wachstum vorliegt, eine entsprechende DGL auf und löse sie.

11. Newton’sche Bewegungsgleichung: Masse x Beschleunigung = Antrieb – Widerstand
Ein Boot wird mit 20km/h abgeschleppt. Beim Ausklinken beginnt ein Mann zu rudern (Antrieb = 90N, Widerstand = $26{,}25 \cdot v$, m = 225kg, v in m/s).
   a. Formuliere eine DGL für die Geschwindigkeit des Bootes $v(t)$ und löse diese.
   b. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes nach 30 Sekunden?
   c. Berechne die Endgeschwindigkeit des Bootes.

12. Ein Eisstock der Masse m = 5kg wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5m/s$ aufs Eis gesetzt. Die Reibungskraft wird als zur Geschwindigkeit proportional angesehen, wobei $k = 1kg/s$ beträgt.
    a. Gib je eine Gleichung für die Geschwindigkeit und den Weg des Eisstockes in Abhängigkeit von der Zeit an.
    b. Bestimme weiters, ob der Eisstock das 20m weit entfernte Markierungsholz erreicht.

13. Ein Boot bewegt sich mit $v = 10km/h$. Der Motor setzt aus. Nach 20 Sekunden beträgt die Geschwindigkeit des Bootes noch 6km/h.
    a. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Bootes nach einer Minute, wenn der Reibungswiderstand des Wassers proportional zur Geschwindigkeit des Bootes ist?
    b. Welchen Weg legt das Boot in den ersten zwei Minuten zurück?

14. Ein Ruderboot hat einschließlich der Besatzung 150kg. Die Ruderkraft beträgt 70N in der Bewegungsrichtung gegen einen Widerstand, der betragsmäßig gleich der 30-fachen Geschwindigkeit ist.
    Bestimme die Geschwindigkeit des Bootes 15 Sekunden nach dem Start.

15. Ein Schlitten wird übers Eis gezogen. Die Gesamtmasse einschließlich des Schlittens beträgt 35kg. Der Widerstand, den das Eis dem Schlitten entgegensetzt soll vernachlässigt werden, während der Luftwiderstand in Newton gleich der 70fachen Geschwindigkeit des Schlittens sein soll. Zum Zeitpunkt t = 0 sei die Geschwindigkeit ebenfalls gleich 0.
    a. Bestimme die auf den Schlitten einwirkende konstante Kraft, die ihm eine Endgeschwindigkeit von 16km/h verleiht.
    b. Welche Geschwindigkeit hat der Schlitten nach 3s?
    c. Welchen Weg hat er in dieser Zeit zurückgelegt?

16. Am Morgen stellt man fest, dass es geschneit hat und es noch immer gleichmäßig weiterschneit. Man beginnt den Gehsteig freizuschaufeln. Während der 2. Stunde schafft man nur noch halb so viel wie in der 1. Stunde, obwohl man mit gleicher Kraft weitergeschaufelt hat. Wann begann es zu schneien? Man geht davon aus, dass während der beobachteten Zeit kein Schnee verloren geht.
    Es gilt die Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = k \cdot \frac{1}{T+t}$,
    wobei x(t) die freigeschaufelte Gehsteiglänge in Meter ist und t die Zeit in Stunden.
    T ist der Zeitpunkt zu dem es zu schneien begann.
    Außerdem gelten die Bedingungen: x(0) = 0; x(1) = 20, x(2) = 30.
    Löse die Differentialgleichung und berechne
    a. wann es zu schneien begann
    b. wie lange es dauert, bis der 40m lange Gehsteig vom Schnee befreit ist.

17. Ein Fahrzeug beschleunigt gleichförmig nach der DGL
$$m.\frac{dv}{dt} = m \cdot a - \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$
    m = 800kg, a = 1m/s², ρ = 1,25 kg/m³ …Luftdichte, A = 2m² … angeströmte Fläche

    Berechne den c_w Wert, wenn die maximal erreichbare Geschwindigkeit 144km/h beträgt.

Inhomogene DGL – Ansatz je nach Störterm

18. Gesucht ist die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen. Welcher Typ von DGL liegt vor?
    a. $y'+y=x$ b. $y'+2y=x^2$ c. $y'+y=\sin x$

19. In einem Labor wird ein Körper mit der Temperatur 90°C zum Zeitpunkt $t=0$ zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur 10°C gebracht. Die Änderung der Temperatur mit der Zeit ist proportional zur Temperaturdifferenz auf die Umgebungstemperatur und folgt der Differentialgleichung (1): $T_1'(t)=k\cdot(T_1(t)-10)$ für $t\geq 0$. Die Zeit t wird in Stunden gemessen.
    a. Nach einer halben Stunde hat der Körper eine Temperatur von 39,43°C. Löse diese DGL und bestimme die Integrationskonstante C sowie den Proportionalitätsfaktor k mithilfe der Anfangsbedingungen.
    b. Nach einer Stunde wird die Raumtemperatur linear um 20°C pro Stunde zwei Stunden lang erhöht. Die Änderung der Temperatur des Körpers ist immer noch proportional zur Differenz auf die Umgebungstemperatur und folgt der Differentialgleichung (2):
    $T_2'(t)=k\cdot\left(T_2(t)-10-20(t-1)\right)$ für $t\geq 1$.
    Löse diese DGL. Verwende dabei für k den Wert aus der DGL (1) und bestimme die Integrationskonstante C aus der Anfangsbedingung für $T_1(1)=T_2(1)$.
    c. Bestimme die tiefste Temperatur, die der Körper in den Fällen (1) und (2) erreicht. Überprüfe mittels Geogebra-Zeichnung.

20. Das Verhalten eines so genannten PT_1-Regelkreisgliedes der Regelungstechnik lässt sich durch folgende DGL beschreiben: $T\cdot v'+v=K\cdot u$. Dabei ist $u=u(t)$das Eingangssignal, $v=v(t)$ das Ausgangssignal, T und K sind positive Konstanten (T: Zeitkonstante, K: Beiwert).
    Bestimme den zeitlichen Verlauf des Ausgangssignals, wenn das Eingangssignal eine so genannte Sprungfunktion $u(t)=\hat{u}$ ist und zu Beginn $v(0)=0$ gilt.

21. Ein Widerstand $R=10\Omega$, eine Induktivität von $L=2H$ und eine Batterie von U Volt sind mit einem Schalter S in Reihe geschaltet. Zur Zeit $t=0$ wird der Schalter geschlossen und der Strom $i=0$.
    Berechne i in Abhängigkeit von t , wenn
    a. $U=40V$ b. $U=20\cdot e^{-3t}V$ c. $U=50\cdot\sin 5tV$

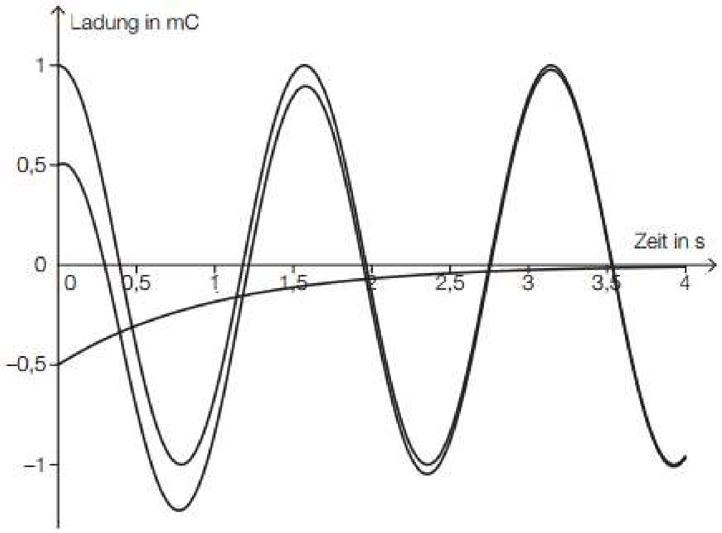
22. Ein Widerstand $R=5\Omega$ und ein Kondensator mit $C=0{,}02F$ sind mit einer Batterie von $U=100V$ in Reihe geschaltet. Berechne q und den Strom i in Abhängigkeit von der Zeit t, wenn zum Zeitpunkt $t=0$ die Ladung des Kondensators 5 Coulomb beträgt.

23. Die an eine Spule angelegte Spannung nimmt in 10s gleichförmig von 2V auf 1V ab. Die Spule hat den Widerstand $R=0{,}12\Omega$ und die Induktivität $L=0{,}1H$.
    Wie groß ist die Stromstärke i am Ende der 10. Sekunde, wenn sie am Anfang 10,67A betrug?

24. An ein RC-Glied wird eine Wechselspannung u mit u(t) = û sin(ω t) angelegt. Die entsprechende Differenzialgleichung für die Ladung q am Kondensator lautet:

$$R.\frac{dq}{dt}+q:C=u$$

a. Löse die zugehörige homogene Differenzialgleichung mithilfe der Methode Trennen der Variablen.
b. Die inhomogene Differenzialgleichung wurde für bestimmte Werte von R, C, ω und û mit der Anfangsbedingung $q(0) = q_0$ gelöst. In der nachstehenden Abbildung sind die Lösung dieser Differenzialgleichung sowie der flüchtige Anteil und der stationäre Anteil dieser Lösung grafisch dargestellt:



Kennzeichne in der obigen Abbildung den Funktionsgraphen des stationären Lösungsanteils. Lies aus der obigen Abbildung den Anfangswert q_0 ab.

<u>Lösungen</u> (ohne Gewähr):

1. a) 2.O., 1.Gr., hom., konst.Koeff., b) 1.O., 2.Gr., inhom., konst.Koeff., c) 3.O., 1.Gr., inhom., var.Koeff., d) 3.O., 1.Gr., inhom., konst.Koeff., e) 2.O., 1.Gr., hom., konst.Koeff., f) 4.O., 1.Gr., inhom., konst.Koeff.
2. a) $v(t) = 7{,}5 - 1{,}8t$, b) $s(t) = 7{,}5t - 0{,}9t^2$, c) 15,625m
3. a) $v(t) = 14{,}4 - 9{,}81t$, b) $s(t) = -4{,}905t^2 + 14{,}4t + 192$, c) $h_{\max} = 202{,}57m$, d) $v = 226{,}95 km/h$
4. $\frac{dE}{dt} = k.E$; E(t) = $100.000.e^{0{,}0377t}$; Die allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung sind unendlich viele Funktionen, die sich nur durch die Integrationskonstante voneinander unterscheiden. Durch Angabe eines Wertepaares kann aus diesen Funktionen eine bestimmte Funktion ausgewählt werden. Diese nennt man die spezielle Lösung
5. b) $p(h) = 1\,020{,}55.e^{-0{,}000118 \cdot h}$
6. a) v(t) = $C.e^{-\frac{k}{m}t}$, v(t) = $12.e^{-0{,}4.t}$; b) v nähert sich dem Wert 0.; s = $\int_0^3 v(t)dt$
7. a) nach 3 Stunden sind ca 6545 Bakterien vorhanden, wenn k größer ist, wächst die Population schneller.
   c) ca 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung; B wächst, solange dB/dt positiv ist, also bis B = 1000.
8. a) p(t) = $C.e^{-\frac{H_v}{R.T}}$; b) $g(318{,}15) = 9{,}966.10^{-2}$ bar; $p(318{,}15) = 0{,}10127$ bar; ca 1,5%
9. a) $T(t) = T_U - c \cdot e^{-kt}$, b) 52,16 min;
10. $N(t) = \dfrac{7431{,}30}{e^{-0{,}306t} + 0{,}1259}$
11. a) $v(t) = \dfrac{24}{7} + 2{,}127 \cdot e^{-\frac{7}{60}t}$, b) 12,57km/h, c) 12,34km/h

12. a) $v(t) = 5 \cdot e^{-0{,}2t}$, $s(t) = -25 \cdot e^{-0{,}2t} + 25$, b) ja (max. 25m)

13. a) 2,16km/h, b) 103,68m

14. $v(t) = \frac{7}{3}\left(1 - e^{-\frac{t}{5}}\right)$, 2,217m/s

15. a) 311,11N, b) 4,43m/s, c) 11,116m

16. a) vor 37 Minuten, b) nach 3 Stunden und 37 Minuten, Lösung der DGL: x(t) = 20,78.ln($\frac{t+0{,}618}{0{,}618}$)

17. $c_w = 0{,}4$

18. a) $y(x) = c \cdot e^{-x} + x - 1$, b) $y(x) = c \cdot e^{-2x} + 0{,}5x^2 - 0{,}5x + 0{,}25$, c) $y(x) = c \cdot e^{-x} + 0{,}5(\sin x - \cos x)$

19. a) $T_1(t) = 10 + 80 \cdot e^{-2t}$, b) $T_1(t) = 153{,}89 \cdot e^{-2t} + 20(t-1)$, c) $T_1 \to 10°C$ für $t \to \infty$, T_2: 17,336°C

20. $v(t) = K\hat{U} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)$

21. a) $i(t) = 4\left(1 - e^{-5t}\right)$, b) $i(t) = 5\left(e^{-3t} - e^{-5t}\right)$, c) $i(t) = 2{,}5\left(e^{-5t} + \sin 5t - \cos 5t\right)$

22. $q(t) = 3 \cdot e^{-10t} + 2$, $i(t) = -30 \cdot e^{-10t}$

23. 9,0278A

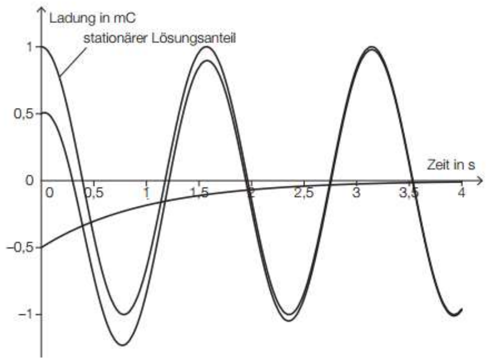
24.

homogene Differenzialgleichung: $R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$

$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$

$\ln|q(t)| = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot t + K_1$

$q(t) = K \cdot e^{-\frac{1}{R \cdot C} \cdot t}$



$q_0 = 0{,}5$ mC