Wozu, warum?

1. Definition des Messfehlers[1]

Messwerte, z.B. Spannung U, Strom I und aus diesen Werten berechnete Ergebnisse, z.B. Widerstand R, Leistung P, sind immer mit Fehlern behaftet.
Der absolute Fehler Δx ist der Unterschied zwischen dem gemessenen Istwert der Messgröße, dem Messwert x, und dem wahren Wert der Messgröße x_w

$$\Delta x = x - x_w$$

Der absolute Fehler hat immer die gleiche Einheit wie die Messgröße.
Häufig wird jedoch mit dem relativen Fehler gerechnet

$$relative\ Fehler = \frac{absolute\ Fehler}{wahrer\ Wert} = \frac{\Delta x}{x_w}$$

Da der wahre Wert x_w einer Messgröße nie genau bestimmt werden kann, wird der Fehler meist auf den Messwert x bezogen:

$rel. Fehler = \frac{\Delta x}{x};$ bzw. $rel. Fehler\ [\%] = \frac{\Delta x}{x} * 100$

1.1. Systematische Fehler

Sind Fehler, die ihre Ursache im Messsystem haben.
Sie sind reproduzierbar und treten bei Wiederholung der Messung in gleicher Richtung (gleiches Vorzeichen)und Größe auf.
Als Beispiele sind zu nennen: falsche Kalibrierung, ungenaue Justierung, falsche Eichung, Nullpunktfehler, Fehler im Messaufbau…
Diese Messabweichungen sind vorhersehbar und können korrigiert werden.
Als Beispiel ist die strom- oder spannungsrichtige Messung mit Korrekturrechnung zu nennen.

$R_{x,kor} = \frac{U_V - U_A}{I_A}$ bzw. $R_{x,kor} = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_{iV}}}$

Systematische Fehler sind korrigierbar, weil sie in Größe, Vorzeichen und Zeitpunkt ihres Auftretens reproduzierbar sind.
Messergebnisse sollten immer um die systematischen Fehleranteile korrigiert werden. Nicht korrigierte systematische Fehleranteile werden automatische den zufälligen Fehlern zugerechnet. [2]

1.2. Zufällige Fehler

Diese Fehler sind nicht reproduzierbar, d.h. sie sind bei der Wiederholung der Messung nach Größe und Betrag verschieden.
Sie entstehen durch die Unzulänglichkeit der Messenden (Fehler beim Messen und Ablesen), statistisch wirkende äußere Einflüsse (Spannungsschwankungen, Erschütterungen), Alterung vernachlässigte Temperaturschwankungen, Reibung, usw.
Zufällige Fehler haben einen statistischen Charakter und können beiderlei Vorzeichen annehmen.
Wird die Messung unter gleichen Bedingungen wiederholt, so streuen die Messwerte um einen Mittelwert.
Zufällige Fehler können durch eine große Anzahl von Messungen verringert werden; sie sind theoretisch erfassbar.

---

[1] Hartwig G.: Einführung in die Fehler und Ausgleichsrechnung, Carl Hanser Verlag, München
[2] Hoffmann j.: Taschenbuch der Messtechnik, Carl Hanser Verlag, Seite 526

1.3. Berechnung zufälliger Fehler und deren Messabweichungen[3]

1.3.1. Rechnersicher Erfassung zufällig verteilter Fehler

Die statistische Fehlerrechnung befasst sich mit folgenden Fragen:

- Wie weit ist der einzelne Messwert vom durchschnittlichen Mittelwert entfernt? Mittlere Fehler der Einzelmessung
- Wie weit ist der Mittelwert vom wahren Wert entfernt?
  Vertrauensbereich des Mittelwertes
- Wie weit ist der Funktionswert vom wahren Wert entfernt (wobei der wahre Wert aus fehlerbehafteten Größen berechnet wurde)?
  Mittlerer und größter Fehler des Funktionswertes

1.3.2. Gaußsche Normalverteilung

Die Darstellung der relativen Häufigkeit der Fehler h in Abhängigkeit vom absoluten Fehler $x_w - \mu$ nennt man Fehlerverteilung.
In der Praxis ist es üblich und auch sinnvoll, als Verteilungsform die Gaußsche Normalverteilung anzunehmen. Diese Annahme ist gültig, wenn genügend viele und voneinander unabhängige Einflussgrößen wirksam sind und genügend viele Einzelmessungen durchgeführt werden.
Die Gaußsche Normalverteilung sagt aus, dass einzelne Messwerte symmetrisch um den arithmetischen Mittelwert streuen. Kleine Abweichungen treten dabei häufiger auf als große.

$$h(x_w) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_w-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ ist der Erwartungswert von x_w und σ die Standardabweichung von x_w (für $n \to \infty$)

Häufigkeit h für unendlich viele Messwerte x_i mit der Standardabweichung σ.
Der Flächeninhalt (Fläche unter der Kurve) ist auf 1 normiert.
Das Maximum dieser Glockenkurve liegt über dem Mittelwert.
Bei dieser Normalverteilung liegen 68,3% aller Messwerte x_i im Bereich $\mu \pm \sigma$.
Wird die Fläche unter der Kurve aufsummiert, so erhält man die Wahrscheinlichkeit 100%, das bedeutet, dass jeder Messwert irgendwo zu finden sein wird.
In der Industrie wird meist die zweifache Standardabweichung genommen $\mu \pm 2 \cdot \sigma$ -> die statistische Sicherheit beträgt somit 95,4% (bei biologischen Messreihen verwendet man die dreifache Standardabweichung-> 99,73% Sicherheit)

[3] Haiml G., Magauer A.: Industrielle Messtechnik, IE3_1 Kennwerte & Messfehler, Seite 6 ff.

1.3.3.Messreihe

Diese stellt immer nur eine endliche Stichprobe aus unendlich vielen möglichen Realisierungen dar.
Die aus einer Messreihe ermittelten Werte sind daher nur Schätzungen für die wahren Werte!

1.3.4. Empirischer Mittelwert $\bar{x}$

Das Adjektiv empirisch drückt die Tatsache aus, dass nur eine begrenzte Anzahl von Einzelmessungen $n < \infty$ zur Verfügung stehen.
In der Praxis wird „empirisch" jedoch oft weggelassen.
Zur Bildung des Mittelwertes werden mehrere Messungen unter völlig gleichen Bedingungen vorgenommen $n \geq 10$.
Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ ergibt sich somit zu:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

n…Anzahl der Messungen
x_i…Ergebnis der Einzelmessung (Messwert)
Der Mittelwert $\bar{x}$ stellt lediglich eine Schätzung für den Erwartungswert μ dar.

1.3.5.Empirische Standardabweichung $s(x_i)$ und Varianz $s^2(x_i)$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Zuverlässigkeit der Einzelwerte innerhalb einer Messreihe (entspricht der „Breite" der Gaußschen Glockenkurve). Wird häufig auch als mittlerer quadratischer Fehler der Einzelmessung bezeichnet.

$$s(x_i) = s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Als Varianz, oder auch Streuung genannt, wird das Quadrat der Standardabweichung bezeichnet.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Eine Vergrößerung der Anzahl der Messungen bringt zwar den Mittelwert näher in Richtung des wahren Wertes, die Standardabweichung s wird jedoch nicht merklich verkleinert, da mit der Anzahl der Messungen die Genauigkeit der Einzelmessung nicht gesteigert werden kann!

1.3.6.Vertrauensbereich des Mittelwerts

Als Ergebnis einer Messreihe wird häufig der Mittelwert $\bar{x}$ angegeben. Dieser muss jedoch nicht mit dem wahren Wert x_w übereinstimmen!
Der wahre Wert liegt in einem bestimmten Bereich $\pm v$ um den Mittelwert.
Den Bereich $\bar{x} \pm v$ nennt man Vertrauensbereich, in welchem mit der Wahrscheinlichkeit P der wahre Wert x_w gefunden wird.
Der Vertrauensbereich $\pm v$, auch mittlerer Fehler des Mittelwertes $\Delta\bar{x}$ genannt, ist ein Maß für die Zuverlässigkeit des Mittelwertes $\bar{x}$

$$v = \Delta\bar{x} = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s$$

Der Faktor t, auch Student- Faktor genannt, hängt von der Anzahl der Messwerte n und der gewählten statistischen Sicherheit P ab und ist aus Tabellen zu entnehmen.
Student-Faktor t in Abhängigkeit von n und P

n	**68,3%**	**95%**	**99,7%**
3	1,32	4,3	19,2
5	1,15	2,8	6,6
10	1,06	2,3	4,1
20	1,03	2,15	3,45
100	1,00	2,00	3,1

2. Fehlerfortpflanzung
Häufig wir eine Messergebnis y aus <u>mehreren</u> Messwerten x_i gebildet, die in einem funktionalen Zusammenhang stehen
$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$
z.B. $P = f(U, I) \; \rightarrow P = U \cdot I$ oder
$R = f(U, I) \; \rightarrow R = \frac{U}{I}$
Die Messwerte x_i sind mit systematischen oder zufälligen Fehlern behaftet Δx_i.
Da an die Genauigkeit des Messergebnisses y meist konkrete Anforderungen gestellt werden, ist die Beantwortung der Frage, wie sich die Fehler Δx_i aus y auswirken („Fehlerfortpflanzung"), von entscheidender Bedeutung.
Erst dann kann beurteilt werden, welche Messgröße sehr sorgfältig und welche weniger genau gemessen werden muss -> beides beeinflusst den Messaufwand!

2.2. Fehlerfortpflanzungsgesetz[4]

Wenn die Standardabweichungen der Einzelwerte bekannt sind, dann gilt:

$$s(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2}$$

$s(y)$ Standardabweichung des Gesamtergebnisses

s_i Standardabweichung des Einzelergebnisses

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ partielle Ableitung

In der Praxis geht man oft von der nicht exakten Annahme aus, dass die Einzelfehler Δx_i selbst bereits „mittlere Fehler“ darstellen.

Es wird dann der mittlere zu erwartende Fehler des Gesamtergebnissens gebildet

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 \right)^2 + \cdots}$$

Voraussetzung für obige Gleichung ist, dass $\Delta x_i \ll x_i$

Der Gesamtfehler Δy berechnet sich aus der Summe der Einzelfehler $\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + \cdots$ -man nennt diesen Ausdruck auch das totale Differential.

Bei der Anwendung dieser Formel ist zu unterscheiden, ob es sich um systematische oder zufällige Fehler handelt.

- **Systematische Fehler**

Systematische Fehler sind nach Betrag und Vorzeichen bekannt. Diese müssen daher mit Vorzeichen eingesetzt werden. Daraus kann es sich ergeben, dass sich bei der Addition eine Abweichungsverringerung bzw. sogar eine Aufhebung ergibt. Allerdings sollten Messergebnisse im Normalfall keine bekannten systematischen Fehler mehr enthalten!

In der Gleichung

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)$$

sind die systematischen Fehler mit ihrem Betrag und Vorzeichen einzusetzen.

Beispiel $R = f(U, I)$

Der Strom und die Spannung werden an einem Widerstand gemessen. Die beiden Messungen sind mit einem systematischen Fehler behaftet. $U = 10V + 10mV, I = 5mA + 5\mu A$.

[4] Hoffmann J.: Taschenbuch der Messtechnik, Carl Hanser Verlag, Seite 536 ff.

- **Zufällige Fehler**

Bei zufälligen Fehlern, sind die Vorzeichen nicht bekannt sondern nur die Abweichungsgrenzen. Es ist in vielen Fällen zweckmäßig, bei der Fehlerfortpflanzung den schlimmsten Fall anzunehmen, nämlich den Fall, dass sich alle auftretenden Fehler addieren und nicht gegenseitig aufheben!
Es sind daher von allen Ableitungen die Absolutbeträge zu nehmen. Die tatsächlich auftretende Gesamtabweichung kann dann niemals größer als die berechnete werden.

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right|$$

Beispiel

An einem Spannungsteiler werden 2 Teilspannungen gemessen.
$U_1 = 12V \pm 0{,}2V$ $U_2 = 16V \pm 0{,}1V$
Wie groß ist die Gesamtspannung?

Beispiel $\boldsymbol{R = f(U, I)}$

Der Strom und die Spannung werden an einem Widerstand gemessen.
$U = 100V \pm 0{,}5V$ $I = 2A \pm 20mA$.
Die Einflüsse der Innenwiderstände der Messgeräte werden vernachlässigt.
Wie groß sind die Leistung und der Widerstand?

Beispiel $\boldsymbol{R = f(R_1, R_2)}$

Zwei parallel geschaltet Widerstände haben die Werte $R_1 = 100\Omega \pm 10\Omega$, $R_2 = 200\Omega \pm 2\Omega$
Wie groß ist der Gesamtwiderstand?

Berücksichtigt man die Tatsache, dass entgegen der zuvor gemachten Annahme eine gewisse Wahrscheinlichkeit für den gegenseitigen Ausgleich der Fehler besteht, so ergibt sich anstelle des totalen Differentials folgendes Ergebnis

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \cdots}$$