

Teubner Studienskripten Elektrotechnik

- Baur, Einführung in die Radartechnik
253 Seiten. DM 18,80
- Ebel, Regelungstechnik
4., überarbeitete Auflage
207 Seiten. DM 16,80
- Ebel, Beispiele und Aufgaben zur Regelungstechnik
2., überarbeitete Aufl. 151 Seiten. DM 14,80
- Eckhardt, Numerische Verfahren in der Energietechnik
208 Seiten. DM 16,80
- Fender, Fernwirken
112 Seiten. DM 14,80
- Freitag, Einführung in die Zweitorttheorie
3., neubearbeitete und erweiterte Auflage
168 Seiten. DM 15,80
- Frohne, Einführung in die Elektrotechnik
Band 1 Grundlagen und Netzwerke
4., durchgesehene Aufl. 172 Seiten. DM 15,80
Band 2 Elektrische und magnetische Felder
4., durchgesehene Aufl. 281 Seiten. DM 18,80
Band 3 Wechselstrom
4., durchgesehene Aufl. 200 Seiten. DM 16,80
- Gad, Feldeffektelektronik
266 Seiten. DM 18,80
- Gerdzen, Hochfrequenzmeßtechnik
223 Seiten. DM 17,80
- Gerdzen, Digitale Übertragungstechnik
322 Seiten. DM 19,80
- Goerth, Einführung in die Nachrichtentechnik
184 Seiten. DM 15,80
- Haack, Einführung in die Digitaltechnik
4. Auflage. 232 Seiten. DM 17,80
- Harth, Halbleitertechnologie
2., überarbeitete Aufl. 135 Seiten. DM 16,80
- Heidermanns, Elektroakustik
138 Seiten. DM 14,80
- Hilpert, Halbleiterelemente
3., erweiterte Aufl. 184 Seiten. DM 15,80
- Höhnle, Elektrotechnik mit dem Taschenrechner
228 Seiten. DM 16,80
- Kirschbaum, Transistorverstärker
Band 1 Technische Grundlagen
3., durchgesehene Aufl. 215 Seiten. DM 16,80
Band 2 Schaltungstechnik Teil 1
3., durchgesehene Aufl. 231 Seiten. DM 17,80
Band 3 Schaltungstechnik Teil 2
2., durchgesehene Aufl. 247 Seiten. DM 17,80
- Morgenstern, Farbfernsehtechnik
2., überarbeitete und erweiterte Auflage
260 Seiten. DM 18,80
- Morgenstern, Technik der magnetischen Videosignalaufzeichnung
200 Seiten. DM 16,80

Fortsetzung auf der 3. Umschlagseite

Zu diesem Buch

Dieses Skriptum enthält den Stoff einer Vorlesung, die der Verfasser an der Fachhochschule München für Studenten der Elektrotechnik über die Analyse und Synthese linearer Netzwerke und die Theorie der Leitungen gehalten hat. Dabei werden Kenntnisse vorausgesetzt, die in den Vorlesungen Technische Elektrizitätslehre I und II erworben wurden. Das Skriptum ist für Studenten an Fachhochschulen und Universitäten geeignet. Es wendet sich jedoch auch an in der Praxis tätige Ingenieure und Techniker, die ihre Kenntnisse in der Netzwerk- und Leitungstheorie erweitern und vertiefen wollen.

Netzwerkanalyse, Netzwerksynthese und Leistungstheorie

Von Dipl.-Phys. G. Ulbricht
Professor an der
Fachhochschule München

Mit 109 Bildern, 10 Tafeln
und zahlreichen Beispielen
und Übungsaufgaben



B. G. Teubner Stuttgart 1986

Prof. Dipl.-Phys. Gerhard Ulbricht

1935 in Olpe geboren. 1953 bis 1958 Studium der Physik an der Humboldt-Universität Berlin. 1959 bis 1970 in der Halbleiter- und Dünnschichtenentwicklung bei den Firmen Intermetall, Telefunkens und Siemens. Seit 1970 Dozent, seit 1971 Professor an der Fachhochschule München.

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Ulbricht, Gerhard:
Netzwerkanalyse, Netzwerksynthese und
Leistungstheorie / von G. Ulbricht. -
Stuttgart : Teubner, 1986.
(Teubner-Studienskripten ; 110 :
Elektrotechnik)

ISBN-13: 978-3-519-00110-2 e-ISBN-13: 978-3-322-82960-3
DOI: 10.1007/978-3-322-82960-3

NE: GT

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, besonders die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Bildentnahme, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege, der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei Verwertung von Teilen des Werkes, dem Verlag vorbehalten.

Bei gewerblichen Zwecken dienender Vervielfältigung ist an den Verlag gemäß § 54 UrhG eine Vergütung zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© B. G. Teubner Stuttgart 1986

Gesamtherstellung: Beltz Offsetdruck, Hemsbach/Bergstr.
Umschlaggestaltung: M. Koch, Reutlingen

Vorwort

Das vorliegende Skriptum stellt die Niederschrift einer Vorlesung des Verfassers im Fachbereich Elektrotechnik an der Fachhochschule München dar. Das Skriptum soll eine Einführung in die Analyse und Synthese linearer Netzwerke und in die Theorie der Leitungen geben. Vorausgesetzt werden Kenntnisse in der Netzwerkberechnung mittels komplexer Rechnung und in der Berechnung von Einschwingvorgängen mittels Laplace-Transformation. Eine Anzahl ausführlich durchgerechneter Beispiele und Übungsaufgaben soll das Einarbeiten in den behandelten Stoff erleichtern. Das Skriptum wendet sich in erster Linie an Studenten von Fachhochschulen und Technischen Universitäten, darüber hinaus jedoch auch an den in der Praxis tätigen Ingenieur, der seine Kenntnisse in der Theorie der Netzwerke und Leitungen vertiefen will.

Im Skriptum wird neben der Netzwerkanalyse, die ein gegebenes Netzwerk auf seine Eigenschaften hin untersucht, besonders die Netzwerksynthese eingehend behandelt, mit deren Hilfe Netzwerke mit bestimmten, von der Anwendung vorgegebenen Eigenschaften entworfen werden können. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht dabei die Pol-Nullstellen-Darstellung einer Netzwerkfunktion. Die Methode der Pol-Nullstellen-Darstellung einer Funktion besitzt den Vorteil, daß sie dem Bedürfnis des Ingenieurs nach anschaulicher Behandlung und Interpretation eines Problems entgegenkommt. Mit Hilfe der behandelten Betriebsfiltersynthese können gewünschte Betriebseigenschaften eines Filters optimal angenähert und der erforderliche Schaltelementeaufwand minimal gehalten werden. Dies kann mit Hilfe der Wellenparametertheorie, nach der in den Filterschaltungen nur jeweils gleiche Wellenwiderstände aneinanderstoßen dürfen, nicht erreicht werden. Die Dimensionierung von Filtern wird deshalb heute gewöhnlich unter Zugrundelegung der behandelten Betriebsparametertheorie vorgenommen. Aus diesem Grund wurde auf die

Behandlung der Wellenparametertheorie der Filter verzichtet.
Der Abschnitt "Leitungen" ist von grundlegender Bedeutung
für die Übertragungstechnik, da die Leitung den Prototyp
eines Nachrichtenübertragungssystems darstellt.

Meinem Fachkollegen Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Götz von der
FH München danke ich für die kritische Durchsicht des Ab-
schnittes "Digitale Filter".

Dem Verlag danke ich für wertvolle Anregungen und für die
gute Zusammenarbeit.

München, im Dezember 1985

Gerhard Ulbricht

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
1. Zweipole. Duale Netzwerke	11
1.1 Allgemeine Zweipoleigenschaften. Zweipolfunktion	11
1.1.1 Komplexe Frequenz	11
1.1.2 Passiver und aktiver Zweipol. Starre Quellen	12
1.1.3 Zweipolfunktion	14
1.2 Reaktanzzweipol und Partialbruchschaltungen	16
1.2.1 Reaktanzzweipol. Reaktanzfunktion	16
1.2.2 Partialbruchschaltungen	17
1.2.3 Reaktanztheorem	19
1.3 Kettenbruchschaltungen	23
1.3.1 LC-Kettenbruchschaltung, 1.Cauer-Form	23
1.3.2 LC-Kettenbruchschaltung, 2.Cauer-Form	24
1.4 Duale Netzwerke	28
2. Zweitore	30
2.1 Allgemeine Zweitoreigenschaften. Grundgleichungen des linearen Zweitors	30
2.1.1 Eigenschaften eines Zweitors	30
2.1.2 Passives und aktives Zweitör. Gesteuerte Quellen	31
2.1.3 Grundgleichungen und Parameter des linearen Zweitors	32
2.2 Bedeutung und Umrechnung der Zweitorparameter	36
2.2.1 Bedeutung der Zweitorparameter	36
2.2.2 Umrechnung der Zweitorparameter	38
2.3 Zusammenschaltung von Zweitoren	41
2.3.1 Serienschaltung	41
2.3.2 Parallelschaltung	41
2.3.3 Kettenschaltung	42
2.4 Reziprozitätstheorem und Zweitorklassen	43
2.4.1 Reziprozitätstheorem. Übertragungssymmetrische Zweitore	43
2.4.2 Widerstandssymmetrische Zweitore	45

	Seite
2.5 Matrizen wichtiger Zweitore	46
2.5.1 Längs- und Querwiderstand	46
2.5.2 Idealer Übertrager	47
2.5.3 Gyrator	48
2.5.4 T- und Π -Schaltung	49
2.6 Betriebsparameter des Zweitors	51
2.6.1 Eingangs- und Ausgangswiderstand, Spannungs- und Stromübertragungsfaktor	51
2.6.2 Betriebsübertragungsfaktor und Betriebs- dämpfungsmaß	53
2.6.3 Gruppen- und Phasenlaufzeit. Signal- verzerrungen	57
2.7 Streuparameter des Zweitors	59
2.7.1 Normierte Wellen. Streugleichungen	59
2.7.2 Bedeutung der Streuparameter	61
Übungsaufgaben zu Abschn. 2	63
3. Übertragungsfunktion. Filtersynthese	65
3.1 Übertragungsfunktion und Pol-Nullstellen- Darstellung	65
3.1.1 Übertragungsfaktor und Übertragungs- funktion	65
3.1.2 Darstellung der Übertragungsfunktion durch Pole und Nullstellen. PN-Plan	66
3.1.3 Eigenschaften der Zweitorübertragungs- funktionen	69
3.2 Frequenzgänge und Bode-Diagramme	71
3.2.1 Frequenzgänge von Übertragungsgrößen	71
3.2.2 Bode-Diagramme	72
3.3 Betriebseigenschaften der Filter	76
3.3.1 Durchlaßbereich und Sperrbereich eines Filters	76
3.3.2 Leistungsbilanz eines Reaktanzfilters	78
3.3.3 Verluste in Reaktanzfiltern	79

	Seite
3.4 Normierung und Entnormierung eines Tiefpasses	80
3.4.1 Tiefpaß-Normierung	80
3.4.2 Tiefpaß-Entnormierung	81
3.5 Potenztiefpaß (Butterworth-Tiefpaß)	82
3.5.1 Butterworth-Approximation	82
3.5.2 Synthese von Potenztiefpässen	86
3.6 Tschebyscheff- und Cauer-Tiefpaß	91
3.6.1 Tschebyscheff-Tiefpaß	91
3.6.2 Cauer-Tiefpaß	97
3.7 Bessel-Tiefpaß	100
3.8 Frequenztransformationen	103
3.8.1 Tiefpaß-Hochpaß-Transformation	103
3.8.2 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation	104
3.8.3 Bandsperre	107
3.9 Aktive RC-Filter	107
3.10 Digitale Filter	110
Übungsaufgaben zu Abschn. 3	116
4. Leitungen	118
4.1 Leitungsbeläge und Ersatzschaltbild des Leitungselementes	118
4.1.1 Ausführungsformen von Leitungen.	118
Leitungsbeläge	
4.1.2 Ersatzschaltbild des Leitungselementes	121
4.2 Übertragungsgrößen und Leitungsgleichungen	122
4.2.1 Wellenwiderstand und Ausbreitungskoeffizient der Leitung	122
4.2.2 Leitungsgleichungen	123
4.3 Verlustbehaftete Leitung	125
4.3.1 RC-Leitung	125
4.3.2 Verlustarme Leitung	125
4.4 Verlustlose Leitung. Leitungswellen	127
4.4.1 Eigenschaften und Gleichungen der verlustlosen Leitung	127
4.4.2 Wellenausbreitung auf der verlustlosen Leitung	129

	Seite
4.4.3 $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Leitung	132
4.5 Reflexionsfaktor. Angepaßte und fehlangepaßte Leitung	134
4.5.1 Last- und Eingangsreflexionsfaktor. Fehlersatz	134
4.5.2 Angepaßte Leitung	135
4.5.3 Fehlangepaßte Leitung mit reellem Abschlußwiderstand. Anpassungs- und Welligkeitsfaktor	136
4.6 Reaktanzleitungen	139
4.6.1 Kurzgeschlossene verlustlose Leitung	139
4.6.2 Offene verlustlose Leitung	140
4.6.3 Stichleitungen	141
4.7 Smith-Diagramm	142
4.7.1 Konforme Abbildung der Z' -Halbebene auf die <u>r</u> -Ebene	142
4.7.2 r- und m-Kreise. $1/\lambda$ -Geraden	145
4.7.3 Inversion von Widerständen und Leitwerten	149
4.7.4 Transformationseigenschaften von Leitungen	149
Übungsaufgaben zu Abschn. 4	151
Anhang	152
Weiterführende Bücher	152
Matrizen	153
Lösungen zu den Übungsaufgaben	156
Formelzeichen	168
Sachverzeichnis	173

1. Zweipole. Duale Netzwerke

1.1 Allgemeine Zweipoleigenschaften. Zweipolfunktion

1.1.1 Komplexe Frequenz

Man gelangt zu einer vorteilhaften Beschreibung des zeitlichen und frequenzmäßigen Verhaltens eines Netzwerkes, wenn man von der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, f Frequenz, zur komplexen Frequenz s übergeht:

$$j\omega \rightarrow s = \sigma + j\omega \quad (1)$$

Die Größe s stellt die komplexe Bildvariable der Laplace-Transformation dar. Die Größe σ in (1) ist eine reelle Zahl. Der Übergang (1) von der $j\omega$ -Achse in die komplexe s-Ebene Bild 1 wird auch als die komplexe Erweiterung bezeichnet.

Wird ein Parallelschwingkreis, dessen Energiespeicher (Induktivität L und

Kapazität C) eine bestimmte Anfangsenergie beinhalten, von der speisenden Quelle abgetrennt (leerlaufender Schwingkreis), so schwingt das Netzwerk mit seiner Eigenschwingung aus. (Das gleiche gilt für einen Serienschwingkreis mit Anfangsenergie, der kurzgeschlossen wird). Der Momentanwert $a(t)$ (t Zeit) einer Eigenschwingung der Spannung oder des Stromes in einem linearen Netzwerk hängt von der Größe der Netzwerkelemente und der Anfangsenergie in den Energiespeichern ab. $a(t)$ kann aus einem komplexen Momentanwert $\underline{a}(t)$ hergeleitet werden, der durch

$$\underline{a}(t) = \hat{A} e^{\sigma t} = \hat{A} e^{\sigma t} e^{j\omega t} \quad (2)$$

gegeben ist. In (2) sind $\hat{A} = \hat{A} e^{j\alpha}$ die komplexe Amplitude und α der Nullphasenwinkel (Anfangsphasenwinkel) der Schwingung. Der physikalische Momentanwert $a(t)$ der Schwingung ist der Realteil von $\underline{a}(t)$:

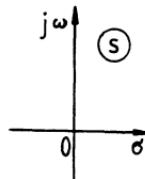


Bild 1 Komplexe s-Ebene

$$a(t) = \operatorname{Re}[\underline{a}(t)] = \hat{A}e^{\sigma t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

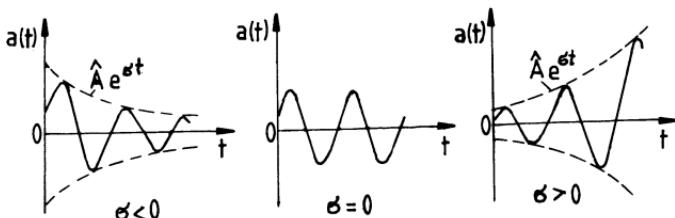


Bild 2 Zeitliche Schwingungsverläufe bei verschiedenen Kennwerten σ

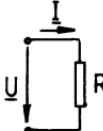
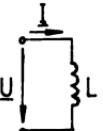
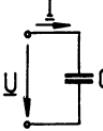
In einem linearen Netzwerk ergeben sich dann gemäß Bild 2 für $\sigma < 0$ eine gedämpfte Schwingung, d.h. ein Ausgleichsvorgang, für $\sigma = 0$ eine sinusförmige (ungedämpfte) Schwingung, d.h. der stationäre (eingeschwungene) Zustand und für $\sigma > 0$ eine angefachte Schwingung, d.h. Selbsterregung (instabiles aktives Netzwerk).

1.1.2 Passiver und aktiver Zweipol. Starre Quellen

Als Zweipol (Eintor) wird ein Netzwerk mit zwei äußeren Anschlußklemmen bezeichnet. Man unterscheidet passive und aktive Zweipole.

Ein passiver Zweipol nimmt elektrische Leistung (bzw. Energie) auf und "verbraucht" sie als Wirkleistung, falls in ihm Wirkwiderstände (ohmsche Widerstände) R enthalten sind. In den drei passiven Netzwerkelementen Wirkwiderstand R, Induktivität L und Kapazität C gelten die in der Tafel 1 dargestellten Zusammenhänge zwischen den Momentanwerten einer sinusförmigen Wechselspannung $u(t)$ und eines sinusförmigen Wechselstromes $i(t)$ der Kreisfrequenz ω und zwischen den zugehörigen komplexen Effektivwerten (Zeigern) $\underline{U} = \hat{U}/\sqrt{2}$ und $\underline{I} = \hat{I}/\sqrt{2}$. Der allgemeine passive Zweipol enthält die Netzwerkelemente R, L und C in beliebiger Anordnung. Ein solcher

Tafel 1 Passive Netzwerkelemente

	Wirkwiderstand	Induktivität	Kapazität
Schaltsymbol			
Gleichung im Zeitbereich	$u(t) = R i(t)$	$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
Komplexe Gleichung	$\underline{U} = R \underline{I}$	$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$	$\underline{I} = j\omega C \underline{U}$

RLC-Zweipol nimmt an seinen Anschlußklemmen die Wechselstromwirkleistung

$$P = \operatorname{Re}(\underline{U}\underline{I}^*) > 0 \quad (4)$$

auf (\underline{I}^* ist der zu \underline{I} konjugiert komplexe Strom) und "verbraucht" sie in seinen Wirkwiderständen, d.h. er setzt die Wirkleistung P dort in Stromwärme (Joulesche Wärme) und Strahlung um.

Ein aktiver Zweipol gibt an seinen Anschlußklemmen elektrische Leistung, an einen äußeren Wirkwiderstand R also Wirkleistung P, ab. Der aktive Zweipol stellt eine starre (unabhängige) Quelle dar, d.i. entweder eine Spannungsquelle (Urspannungs-, Ersatzspannungsquelle) oder eine Stromquelle (Urstrom-, Ersatzstromquelle). Die beiden Typen starrer Quellen sind in Bild 3 dargestellt. Die reale Spannungsquelle besitzt die beiden Kenngrößen Quellenspannung (Urspannung) \underline{U}_o = Leerlaufspannung \underline{U}_1 = const und komplexer Innenwiderstand \underline{Z}_1 . Die ideale Spannungsquelle hat den Innenwiderstand $\underline{Z}_1 = 0$. Die reale Stromquelle besitzt die beiden Kenngrößen Quellenstrom (Urstrom) \underline{I}_o = Kurzschlußstrom \underline{I}_k = const und komplexer Innenleitwert \underline{Y}_1 . Die ideale Stromquelle hat den Innenleitwert $\underline{Y}_1 = 0$ (bzw. den Innenwider-

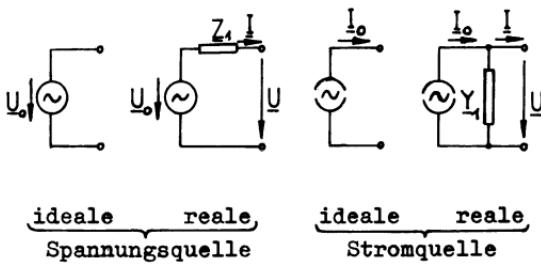


Bild 3 Starre (unabhängige) Quellen

stand ∞). Quellenspannung U_o und Quellenstrom I_o sind "eingrapierte" Größen, d.h. von der Belastung der Quellen unabhängig. Die beiden Zweipolquellen sind äquivalent, wenn $Y_1 = 1/Z_1$ bzw. $I_o = U_o/Z_1$ gilt.

1.1.3 Zweipolfunktion

Enthält ein Zweipol nur lineare, d.h. spannungs- und strom-unabhängige Bauelemente (bzw. können die Krümmungen der Bauelementekennlinien vernachlässigt werden), so wird der Zweipol als linear bezeichnet. Für lineare Zweipole gilt der Überlagerungssatz: Die Wirkungen verschiedener Ursachen (Erregungen) in einem linearen Zweipol überlagern sich linear, d.h. ohne daß sie sich gegenseitig beeinflussen. Hängen die Klemmeneigenschaften eines Zweipols nicht vom (Meß-)Zeitpunkt ab, so wird der Zweipol als zeitinvariant bezeichnet. (Man vernachlässigt dann z.B. die Alterung seiner Bauelemente). Wir betrachten im folgenden nur lineare, passive, zeitinvariante Zweipole.

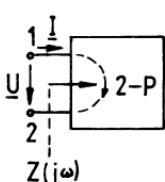


Bild 4 Allgemeiner passiver Zweipol

Die frequenzabhängige Impedanz (komplexer Widerstand) des linearen, passiven Zweipols Bild 4 ("schwarzer Kasten", engl. "black box", 1,2 Anschlußklemmen) ist für den Fall einer sinusförmigen Erregung mit der Kreisfrequenz ω definiert durch

$$Z(j\omega) = U(j\omega)/I(j\omega) \quad (5)$$

Die drei Grundimpedanzen in einem Netzwerk sind R , $j\omega L$ und $1/j\omega C$ (vgl. Tafel 1). Die frequenzabhängige Admittanz (komplexer Leitwert) des Zweipols ist definiert durch

$$\underline{Y}(j\omega) = \underline{I}(j\omega)/\underline{U}(j\omega) = 1/\underline{Z}(j\omega) \quad (6)$$

Die drei Grundadmittanzen in einem Netzwerk sind $G = 1/R$, $1/j\omega L$ und $j\omega C$.

Verallgemeinern wir die Beziehung (5) durch den Übergang (1) so gelangen wir zur Zweipolfunktion $\underline{Z}(s)$:

$$| j\omega \rightarrow s: \underline{Z}(j\omega) \rightarrow \underline{Z}(s) = \underline{U}(s)/\underline{I}(s) \quad (7)$$

Die drei Grundimpedanzfunktionen in einem Netzwerk sind R , sL und $1/sC$ ("Operatoren"). Die Zweipolfunktion kann statt einer Impedanzfunktion $\underline{Z}(s)$ auch eine Admittanzfunktion $\underline{Y}(s) = \underline{I}(s)/\underline{U}(s)$ darstellen. Die Zweipolfunktion besitzt keine unmittelbare physikalische Bedeutung mehr, sondern sie stellt nur eine Rechenhilfe dar.

Die Zweipolfunktion $\underline{Z}(s)$ (bzw. $\underline{Y}(s)$) ist eine gebrochen rationale Funktion von s , d.h. $\underline{Z}(s)$ ist als Quotient zweier Polynome in s mit konstanten, reellen Koeffizienten a_μ , b_ν darstellbar:

$$| \underline{Z}(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (8)$$

oder bei Zerlegung der Polynome in Linearfaktoren

$$| \underline{Z}(s) = K \frac{(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{om})}{(s - s_{x1})(s - s_{x2}) \dots (s - s_{xn})} \quad (9)$$

mit der Konstante $K = a_m/b_n$, den Nullstellen $s_{o\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) und den Polen (Singularitäten, Unendlichkeitsstellen) $s_{x\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Die $s_{o\mu}$ sind die Nullstellen des Zählerpolynoms (8) (Lösungen der Gleichung Zählerpolynom = 0) und die $s_{x\nu}$ die Nullstellen des Nennerpolynoms (8) (Lösungen der Gleichung Nennerpolynom = 0). $\underline{Z}(s)$ nähert sich bei hohen Frequenzen dem Wert Ks^{m-n} . Ein passiver Zweipol kann sich daher bei hohen Frequenzen nur entweder wie eine Induktivi-

tät ($m-n=1$), wie eine Kapazität ($m-n=-1$) oder wie ein Wirkwiderstand ($m-n=0$) verhalten. Die Grade m und n des Zähler- und Nennerpolynoms von $Z(s)$ unterscheiden sich also höchstens um 1, d.h. es gilt $m-n=0, \pm 1$.

Die Zweipolfunktion $Z(s)$ kann gemäß Gl.(9) bis auf den konstanten Faktor K durch ihre Pole und Nullstellen in der komplexen s -Ebene eindeutig beschrieben werden. Die grafische Darstellung der Pole und Nullstellen von $Z(s)$ in der s -Ebene wird als der Pol-Nullstellen-Plan (PN-Plan) von $Z(s)$ bezeichnet. Es gilt der Satz (vgl. 3.1.3):

| Die Pole und Nullstellen einer Zweipolfunktion $Z(s)$ liegen in der linken s -Halbebene oder im Grenzfall auf der imaginären ($j\omega$ -)Achse.

1.2 Reaktanzzweipol und Partialbruchschaltungen

1.2.1 Reaktanzzweipol. Reaktanzfunktion

Ein Reaktanzzweipol (LC-Zweipol) enthält nur verlustlos angenommene Spulen und Kondensatoren, also reine Blindelemente. Ein Reaktanzzweipol verbraucht daher keine Wirkleistung ($P = 0$), sondern er setzt in seinem Innern nur induktive und /oder kapazitive Blindleistung um.

Eine Reaktanzfunktion (Reaktanzzweipolfunktion) $Z(s)$ ist eine gebrochen rationale Funktion von s , d.h. sie ist als Quotient zweier Polynome in s mit positiv reellen Koeffizienten darstellbar. Aus den Nullstellen bzw. Polen von $Z(s)$ ergeben sich die Frequenzen seiner Eigenschwingungen, das sind die Eigenfrequenzen des Reaktanzzweipols.

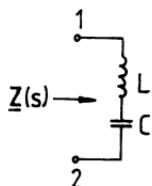


Bild 5 a) Verlustloser
Serienschwingkreis

Beispiel 1: Der verlustlose Serienschwingkreis Bild 5 a besitzt die Reaktanz

$$Z(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

und die Reaktanzfunktion ($j\omega \rightarrow s$)

$$Z(s) = sL + \frac{1}{sC}$$

bzw.

$$\underline{Z}(s) = \frac{s^2 LC + 1}{sC}$$

Die Nullstellen folgen aus

$$s_0^2 LC + 1 = 0, \text{ also } s_{01,2} = \pm j \sqrt{1/LC}.$$

Die Eigenkreisfrequenz (Resonanz-

kreisfrequenz) ist $\omega_1 = |s_{01,2}| = 1/\sqrt{LC}$.

Ein Pol folgt aus $s_x C = 0$, also $s_x = 0$.

Ein zweiter Pol liegt bei $s = \infty$. Der

zugehörige PN-Plan ist in Bild 5 b dar- gestellt (*Pol, • Nullstelle).

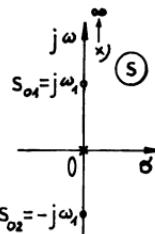


Bild 5 b) PN-Plan von $\underline{Z}(s)$

Die Eigenschwingungen eines Reaktanzzweipols können wegen der angenommenen Verlustfreiheit seiner Reaktanzen nur stationär (sinusförmig) sein. Dann muß aber $\sigma = 0$ gelten (1.1.1). Die Pole und Nullstellen einer Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ liegen daher auf der imaginären ($j\omega$ -)Achse (einschließlich $s = \infty$). Da die Polynomkoeffizienten von $\underline{Z}(s)$ positiv reell sind, treten die Pole und Nullstellen von $\underline{Z}(s)$ in konjugiert komplexen Paaren auf der $j\omega$ -Achse auf. Sie liegen außerdem bei $s = 0$ und $s = \infty$.

1.2.2 Partialbruchschaltungen

Eine Zweipolfunktion kann als gebrochen rationale Funktion auf genau eine Weise in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden. Die allgemeine Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ besitzt konjugiert komplexe Polpaare auf der imaginären Achse bei $s = \pm j\omega_1, \pm j\omega_2, \dots, \pm j\omega_r$. Ein solches Polpaar bei $s = \pm j\omega_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) ist gegeben durch

$$\frac{A_i}{s - j\omega_i} + \frac{A_i}{s + j\omega_i} = \frac{2A_i s}{s^2 + \omega_i^2} \quad (10)$$

Außerdem soll je ein Pol von $\underline{Z}(s)$ bei $s = 0$ und $s = \infty$ vorkommen. Die Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ ist dann darstellbar in der Form

$$\left| \begin{aligned} Z(s) &= \frac{A_0}{s} + \frac{2A_1 s}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{2A_2 s}{s^2 + \omega_2^2} + \dots + \frac{2A_r s}{s^2 + \omega_r^2} + A_\infty s \\ &= \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^r \frac{2A_i s}{s^2 + \omega_i^2} + A_\infty s \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Die Koeffizienten A_v , ($v = 0, i, \infty$) in (11) stellen die Residuen von $Z(s)$ in den Polen $s = 0, \pm j\omega_1, \dots, \pm j\omega_r, \infty$ dar. Sie enthalten die L- und C-Werte des Reaktanzzweipols und sind reell und positiv:

$$A_0 \geq 0, A_i \geq 0, A_\infty \geq 0 \quad (12)$$

Man kann die Werte der Koeffizienten A_v , dadurch bestimmen, daß man die rechte Seite von Gl.(11) auf den Hauptnenner bringt und dann einen Koeffizientenvergleich der Zähler durchführt.

Aus (11) folgt:

$$\frac{A_0}{s} \hat{=} \frac{1}{sC_0}, \quad \text{Kapazität } C_0 = \frac{1}{A_0}$$

$$A_\infty s \hat{=} sL_\infty, \quad \text{Induktivität } L_\infty = A_\infty$$

$$\frac{2A_i s}{s^2 + \omega_i^2} = \frac{1}{\frac{1}{2A_i} s + \frac{\omega_i^2}{2A_i} s} \hat{=} \frac{1}{sC_i + \frac{1}{sL_i}}, \quad \text{Parallelresonanzkreis mit } C_i = \frac{1}{2A_i}, \quad L_i = \frac{2A_i}{\omega_i^2}$$

also

$$\omega_i = \frac{1}{\sqrt{L_i C_i}}$$

($i = 1, 2, \dots, r$).

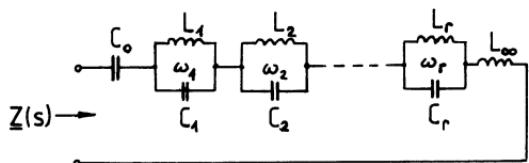


Bild 6 LC-Partialbruchschaltung,
1. Foster-Form

Die Partialbruchzerlegung Gl.(11) wird daher durch die LC-Partial-

bruchschaltung, 1.Foster-Form (Widerstandspartialbruchschaltung) Bild 6 realisiert.

Man kann auch von der Suszeptanzfunktion $\underline{Y}(s)$ ausgehen und diese in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen:

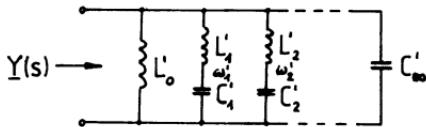


Bild 7 LC-Partialbruchschaltung, 2.Foster-Form

$$\underline{Y}(s) = \frac{A'_0}{s} + \sum_{i=1}^r \frac{2A'_i s}{s^2 + \omega_i^2} + A'_{\infty} s \quad (13)$$

Die Partialbruchzerlegung Gl.(13) wird durch die LC-Partialbruchschaltung, 2.Foster-Form (Leitwertpartialbruchschaltung) Bild 7 realisiert.

Aus (11) folgt:

$$\underline{Z}(-s) = - \underline{Z}(s) \quad (14)$$

Eine Reaktanzfunktion ist also eine ungerade Funktion.

Der beschriebene Entwurf von Partialbruchschaltungen ist ein Beispiel für die Netzwerksynthese, d.i. das Aufstellen einer Netzwerkfunktion auf Grund geforderter Eigenschaften eines Netzwerks und die Realisierung dieser Funktion durch ein entsprechendes Netzwerk.

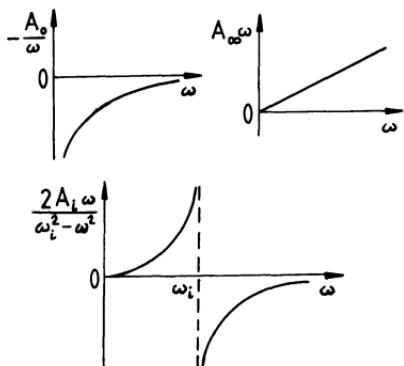
1.2.3 Reaktanztheorem

Bei stationären Schwingungen in einem Reaktanzzweipol gilt $s = j\omega$, und die Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ Gl.(11) geht wieder in die rein imaginäre Reaktanz $\underline{Z}(j\omega)$ über:

$$\underline{Z}(j\omega) = jX(\omega) = \frac{A'_0}{j\omega} + \frac{j2A'_1\omega}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{j2A'_2\omega}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots + jA'_{\infty}\omega \quad (15)$$

Aus (15) folgt der Reaktanzverlauf

$$X(\omega) = \frac{Z(j\omega)}{j} = -\frac{A_0}{\omega} + \frac{2A_1\omega}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{2A_2\omega}{\omega_2^2 - \omega^2} + \dots + A_\infty \omega \quad (16)$$



Der frequenzabhängige Verlauf der einzelnen Terme von Gl.(16) ist in Bild 8 dargestellt. Da alle diese Kurven monoton steigend verlaufen, besitzt auch die Funktion $X(\omega)$ einen grundsätzlich monoton steigenden Verlauf. Der Differentialquotient $dX(\omega)/d\omega$ ist daher stets positiv:

Bild 8 Frequenzabhängiger Verlauf der Reaktanzterme $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (17)$

Gl.(17) beschreibt das

Fostersche Reaktanztheorem (R. M. Foster, 1924):

Der Reaktanzverlauf $X(\omega) = \underline{Z}(j\omega)/j$ (und ebenso der Suszeptanzverlauf $Y(\omega) = \underline{Y}(j\omega)/j$) eines Reaktanzzweipols ist bei allen Frequenzen monoton steigend.

Aus dem Reaktanztheorem folgt:

Die Pole und Nullstellen einer Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ auf der imaginären Achse wechseln einander ab.

Die Gesamtzahl der Pole einer Reaktanzfunktion ist daher gleich der Gesamtzahl der Nullstellen, wenn die Pole und Nullstellen auf der negativ imaginären Achse und bei $s = 0$ und $s = \infty$ mitgezählt werden. Die Zahl der unabhängigen Parameter A_i, ω_i der Partialbruchzerlegung (11) ist gleich der Zahl der Reaktanzen der zugehörigen Partialbruchschaltung Bild 6 und gibt den Grad n der Reaktanzfunktion an. (Ein Polglied $2A_i s/s^2 + \omega_i^2$ z.B. ist durch zwei unabhängige Parameter, nämlich A_i und ω_i , festgelegt und wird durch zwei Reaktanzen realisiert). Es ergibt sich der Satz:

| Der Grad n einer Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ ist gleich der Gesamtzahl der Pole oder der Nullstellen von $\underline{Z}(s)$.

Man kann n unabhängige Vorschriften nicht mit weniger als n Freiheitsgraden erfüllen, z.B. n Unbekannte nicht mit weniger als n Gleichungen bestimmen oder n unabhängige Parameter einer Netzwerkfunktion nicht durch weniger als n Schaltelemente realisieren. Da die Zahl der unabhängigen Parameter einer Reaktanzfunktion gleich der Zahl der Reaktanzen der zugehörigen Partialbruchschaltung ist, kommen die Partialbruchschaltungen also mit der erforderlichen Minimalzahl von Schaltelementen aus. Schaltungen mit der Minimalzahl von Schaltelementen werden als kanonisch bezeichnet. Die Partialbruchschaltungen stellen also kanonische Schaltungen dar.

Beispiel 2: Eine Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ besitzt den in Bild 9 a dargestellten PN-Plan.

Den zugehörigen Reaktanzverlauf $X(\omega) = \underline{Z}(j\omega)/j$ zeigt Bild 9 b. Für die Reaktanzfunktion folgt dann

$$\begin{aligned}\underline{Z}(s) &= \frac{(s - s_{01})(s - s_{02})(s - s_{03})}{(s - s_{x1})(s - s_{x2})} \\ &= \frac{s(s - j2)(s + j2)}{(s - j)(s + j)} = \frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

($K = 1$ gesetzt), also

$$\underline{Z}(s)|_{s \rightarrow 0} = 0, \quad \underline{Z}(s)|_{s \rightarrow \infty} = \infty$$

Zur Ermittlung der zu $\underline{Z}(s)$ gehörigen Partialbruchschaltung machen wir den Ansatz

$$\underline{Z}(s) = \frac{2A_1 s}{s^2 + 1} + A_\infty s$$

(Grad $n = 3$). Dann folgt

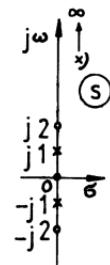


Bild 9 a) PN-Plan von $\underline{Z}(s)$

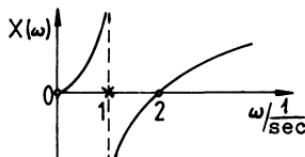


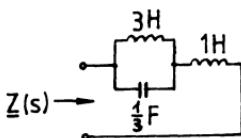
Bild 9 b) Reaktanzverlauf

$$\frac{s(s^2 + 4)}{s^2 + 1} = \frac{2A_1 s + A_\infty s(s^2 + 1)}{s^2 + 1}$$

$$s^3 + 4s = A_\infty s^3 + (2A_1 + A_\infty)s$$

Koeffizientenvergleich liefert: $A_\infty = 1$, $2A_1 + 1 = 4$, $2A_1 = 3$,
also

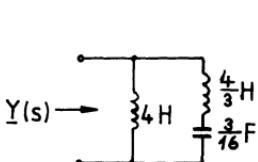
$$\underline{Z}(s) = \frac{3s}{s^2 + 1} + s = \frac{1}{\frac{s}{3} + \frac{1}{3s}} + s$$



Die zugehörige Partialbruchschaltung, 1.Foster-Form, ist in Bild 9 c dargestellt.
Man erhält aus der Suszeptanzfunktion

Bild 9 c) Partialbruch-
schaltung,
1.Foster-Form mit dem Ansatz

$$\underline{Y}(s) = \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 4)}$$



$$\underline{Y}(s) = \frac{A'_0}{s} + \frac{2A'_1 s}{s^2 + 4}$$

durch Koeffizientenvergleich auf
die gleiche Weise wie oben

Bild 9 d) Partialbruch-
schaltung,
2.Foster-Form

$$\underline{Y}(s) = \frac{1}{4s} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{3s}}$$

Die zugehörige Partialbruchschaltung, 2.Foster-Form, zeigt Bild 9 d.

Die beiden Netzwerke Bild 9 c und 9 d sind äquivalent.

1.3 Kettenbruchschaltungen

Ein weiteres wichtiges Beispiel für die Netzwerksynthese ist der Entwurf von Kettenbruchschaltungen. Eine Zweipolfunktion kann statt in eine Summe von Partialbrüchen auch stets in einen Kettenbruch entwickelt werden. Die Kettenbruchentwicklung einer Zweipolfunktion wird durchgeführt, indem die Polynome der Zweipolfunktion nach fallenden oder steigenden Potenzen geordnet werden und anschließend fortwährend dividiert und invertiert wird.

Wir betrachten im folgenden nur Kettenbruchentwicklungen von Reaktanzfunktionen.

1.3.1 LC-Kettenbruchschaltung, 1. Cauer-Form

Man ordnet die Polynome der Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ nach fallenden Potenzen, anschließend wird fortgesetzt dividiert und invertiert. Dann ergibt sich ein Kettenbruch von der Form

$$\underline{Z}(s) = \alpha_1 s + \frac{1}{\alpha_2 s + \frac{1}{\alpha_3 s + \frac{1}{\ddots \frac{1}{\alpha_n s}}}} \quad (18)$$

Der Koeffizient α_1 in (18) kann auch Null sein. Die Zahl der unabhängigen Koeffizienten α_y ($y = 1, 2, \dots, n$) der Kettenbruchentwicklung (18) gibt den Grad n der Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ an und ist gleich der Zahl der Pole der einzelnen Widerstands- und Leitwertfunktionen der Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ Gl. (18) bei $s = \infty$. Die Kettenbruchentwicklung (18) kann daher anschaulich als ein Verfahren gedeutet werden, das aus den folgenden Schritten besteht (Bild 10):

1. Man spaltet von der Widerstandsfunktion $\underline{Z}(s)$ vom Grad n einen Pol $\alpha_1 s = L_1 s$ bei $s = \infty$ (L_1 in Serie) ab und erhält eine Restzweipolfunktion $\underline{Z}_1(s)$ mit $n-1$ Polen bzw. vom Grad $n-1$:

$$\underline{Z}(s) = \alpha_1 s + \underline{Z}_1(s)$$

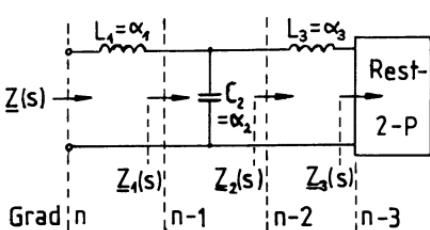


Bild 10 Abspaltung von Polen der Widerstands- und Leitwertfunktion von $Z(s)$

2. Man spaltet von der Leitwertfunktion $\underline{Y}_1(s) = 1/Z_1(s)$ einen Pol $\alpha_2 s = C_2 s$ bei $s = \infty$ (C_2 parallel) ab und erhält eine Restzweipolfunktion $\underline{Y}_2(s)$ mit $n-2$ Polen bzw. vom Grad $n-2$:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_1(s) &= 1/\underline{Z}_1(s) \\ &= \alpha_2 s + \underline{Y}_2(s)\end{aligned}$$

3. Man spaltet von der Widerstandsfunktion $\underline{Z}_2(s) = 1/\underline{Y}_2(s)$ einen Pol $\alpha_3 s = L_3 s$ bei $s = \infty$ (L_3 in Serie) ab und erhält eine Restzweipolfunktion $\underline{Z}_3(s)$ mit $n-3$ Polen bzw. vom Grad $n-3$:

$$\underline{Z}_2(s) = 1/\underline{Y}_2(s) = \alpha_3 s + \underline{Z}_3(s)$$

usw. Man spaltet also von der Reaktanzfunktion $Z(s)$ bei $s = \infty$ abwechselnd den Pol der jeweiligen Widerstandsfunktion (L in Serie) und den Pol der jeweiligen Leitwertfunktion (C parallel)

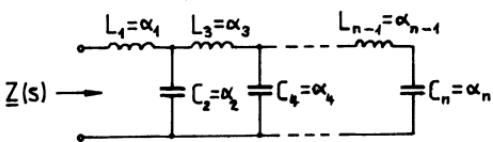


Bild 11 LC-Kettenbruchschaltung, 1. Cauer-Form

ab. Es ergibt sich dann als die Realisierung der Kettenbruchentwicklung (18) die LC-Kettenbruchschaltung (LC-Abzweigschaltung),

1. Cauer-Form Bild 11 (für n gerade).

1.3.2 LC-Kettenbruchschaltung, 2. Cauer-Form

Man ordnet die Polynome der Reaktanzfunktion $Z(s)$ nach steigenden Potenzen, danach wird fortgesetzt dividiert und invertiert. Man erhält in diesem Fall einen Kettenbruch von der Form

$$\underline{Z}(s) = \frac{\beta_1}{s} + \frac{1}{\frac{\beta_2}{s} + \frac{1}{\frac{\beta_3}{s} + \frac{1}{\ddots \frac{\beta_n}{s}}}} \quad (19)$$

Der Koeffizient β_1 in (19) kann auch Null sein. Die Zahl der unabhängigen Koeffizienten β_i , der Kettenbruchentwicklung (19) gibt den Grad n der Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ an. Die Kettenbruchentwicklung (19) kann ebenfalls anschaulich gedeutet werden: Man spaltet von der Reaktanzfunktion $\underline{Z}(s)$ bei $s = 0$ abwechselnd den Pol der jeweiligen Widerstandsfunction (C in Serie) und den Pol der jeweiligen Leitwertfunktion (L parallel) ab. Gl.(19) wird dann durch die

LC-Kettenbruchschaltung (LC-Abzweigsschaltung), 2.Cauer-Form
Bild 12 (für n gerade) realisiert.

Die Abspaltung von n Polen von einer Zweipolfunktion n-ten Grades wird als der Vollabbau der Zweipolfunktion bezeichnet. Die jeweilige Restzweipolfunktion besitzt nach jedem Abbau-Schritt einen Pol weniger als die ursprüngliche Funktion, bzw. der Grad der Restzweipolfunktion nimmt bei jedem Abbau-Schritt um 1 ab (s. Bild 10). Da jeder Abbauschritt der Abspaltung eines Schaltelementes entspricht, ist der Grad n der Zweipolfunktion bzw. die Zahl ihrer unabhängigen Koeffizienten α , bzw. β , gleich der Zahl der Schaltelemente der zugehörigen Kettenbruchschaltung. Die Kettenbruchschaltungen stellen daher wie die Partialbruchschaltungen kanonische Schaltungen dar, d.h. die Zweipolfunktion $\underline{Z}(s)$ kann durch eine Kettenbruchschaltung mit dem Minimum an Schaltelementen

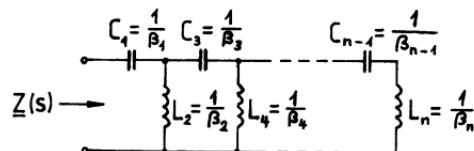


Bild 12 LC-Kettenbruchschaltung,
2.Cauer-Form

realisiert werden.

Die beiden Syntheseverfahren 1.2 und 1.3 führen bei einer gegebenen Reaktanzfunktion $Z(s)$ stets zu realisierbaren (äquivalenten) LC-Zweipolen. Es gibt solche einfachen Syntheseverfahren außerdem noch für RL- und RC-Zweipole. Dann gilt der Satz (vgl. 3.1.3):

| Die Pole und Nullstellen einer RL- oder RC-Zweipolfunktion liegen auf der negativ reellen Achse.

Die Synthese von RLC-Zweipolen ist dagegen beträchtlich komplizierter.

Beispiel 3: Die zur Reaktanzfunktion

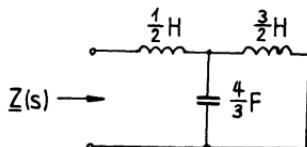
$$Z(s) = \frac{s^3 + 2s}{2s^2 + 1}$$

zugehörigen Kettenbruchschaltungen sollen ermittelt werden.

Zur Ermittlung der 1.Cauer-Form führen wir eine Kettenbruchentwicklung von $Z(s)$ durch:

$$\begin{array}{r} \frac{s}{2} \\ \hline (-) 2s^2 + 1 | s^3 + 2s \\ (-) s^3 + \frac{s}{2} \quad \frac{4s}{3} \\ \hline \frac{3s}{2} | 2s^2 + 1 \\ 2s^2 \quad \frac{3s}{2} \\ \hline 1 | \frac{3s}{2} \\ \frac{3s}{2} \\ \hline 0 \end{array}$$

also



$$Z(s) = \frac{1}{2}s + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{\frac{3}{2}s}}$$

Bild 13 a) Kettenbruchschaltung, 1.Cauer-Form

Die zugehörige Kettenbruchschaltung, 1.Cauer-Form, ist in Bild 13 a dargestellt.

Zur Ermittlung der 2.Cauer-Form führen wir eine Kettenbruchentwicklung von

$$\underline{Z}(s) = \frac{2s + s^3}{1 + 2s^2}$$

durch. Diese liefert u.a. den Term $-1/3s^3$. Da es jedoch keine Impedanz dieser Größe gibt, ist diese Kettenbruchentwicklung von $\underline{Z}(s)$ schaltungsmäßig nicht deutbar. Wir führen deshalb eine Kettenbruchentwicklung von

$$\underline{Y}(s) = \frac{1 + 2s^2}{2s + s^3}$$

durch:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2s} \leftarrow \\ (\because) 2s + s^3 | \overline{1 + 2s^2} \\ \frac{s^2}{2} \leftarrow \\ (-) 1 + \frac{s^2}{2} \quad \frac{4}{3s} \leftarrow \\ \frac{3s^2}{2} | \overline{2s + s^3} \\ \frac{2s}{s^3} \leftarrow \\ \frac{3}{2s^2} | \overline{\frac{3s^2}{2}} \\ \frac{3s^2}{2} \\ 0 \end{array}$$

also

$$\underline{Y}(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{\frac{4}{3}s + \frac{1}{2s}}$$

Die zugehörige Kettenbruchschaltung, 2.Cauer-Form, zeigt Bild 13 b. Die beiden Schaltungen Bilder 13 a und 13 b sind äquivalent.

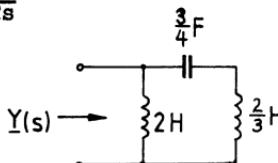


Bild 13 b) Kettenbruchschaltung, 2.Cauer-Form

1.4 Duale Netzwerke

Zwei Zweipole werden als zueinander dual (widerstandsreziprok) bezeichnet, wenn die Impedanz des einen Zweipols proportional der Admittanz des anderen Zweipols ist:

$$\underline{Z}' = \frac{R_o^2}{\underline{Z}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{Z}\underline{Z}' = R_o^2 \quad (20)$$

Die Größe R_o in (20) ist eine reelle Konstante von der Dimension eines Widerstandes und wird als die Dualitätsinvariante (Dualitätskonstante) bezeichnet.

Die einfachsten dualen Zweipole sind Induktivität und Kapazität:

$$\underline{Z} = j\omega L, \quad \underline{Z}' = 1/j\omega C$$

Wegen (20) gilt dann

$$\underline{Z}\underline{Z}' = \frac{L}{C} = R_o^2$$

also

$$C = L/R_o^2, \quad L = R_o^2 C \quad (21)$$

Zwei Netzwerke werden als zueinander dual bezeichnet, wenn das eine Netzwerk bezüglich der Spannung bis auf einen konstanten Faktor die gleichen Eigenschaften hat wie das andere Netzwerk bezüglich des Stromes und umgekehrt. Durch zwei Schaltelemente, die in einem Netzwerk in Serie liegen, fließt der gleiche Strom. An den beiden Schaltelementen des zugehörigen dualen Netzwerks muß dann die gleiche Spannung liegen, d.h. sie müssen parallel geschaltet sein. Liegt die

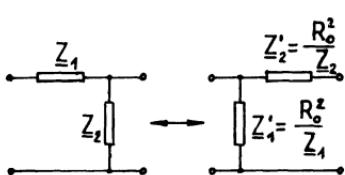


Bild 14 Dualität zweier Netzwerke

Impedanz \underline{Z} im Längszweig eines Netzwerks, so ist die duale Impedanz \underline{Z}' im dualen Netzwerk in den Querzweig zu legen und umgekehrt (Beispiel: Spannungsteiler - Stromteiler, Bild 14).

Man erhält das zu einem gegebenem Netzwerk duale Netzwerk über die folgenden Regeln:

Man ersetze: a) Serienschaltung durch Parallelschaltung und umgekehrt,

b) Widerstand R durch Widerstand R_o^2/R ,

c) Induktivität L durch Kapazität $C = L/R_o^2$,

d) Kapazität C durch Induktivität $L = R_o^2 C$.

Zusätzlich müssen Längs- und Querzweig vertauscht werden.

Für die Konstante R_o bzw. R_o^2 kann grundsätzlich eine beliebige reelle Größe angenommen werden.

Man wählt R_o^2 z.B. so groß, daß möglichst viele Schaltelemente des dualen Netzwerks günstige Bemessungswerte erhalten.

Beispiele für duale Umwandlungen sind in Bild 15 dargestellt.

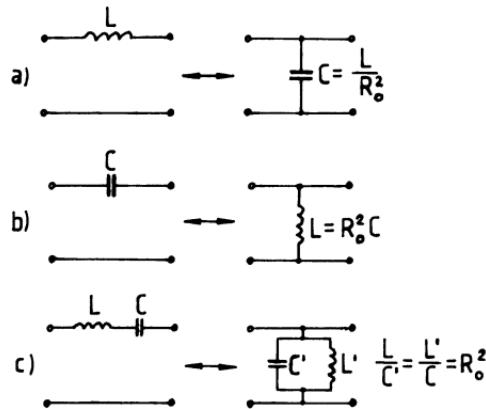


Bild 15 Beispiele für duale Netzwerke

Bei der dualen Umwandlung von Netzwerken entsprechen sich:

Spannung	↔	Strom
Widerstand	↔	Leitwert
Induktivität	↔	Kapazität
Serienschaltung	↔	Parallelschaltung
Längszweig	↔	Querzweig
Masche	↔	Knoten
Leerlauf	↔	Kurzschluß
Spannungsquelle	↔	Stromquelle.

2. Zweitore

2.1 Allgemeine Zweitoreigenschaften. Grundgleichungen des linearen Zweitors

2.1.1 Eigenschaften eines Zweitors

Als Zweitor wird ein Netzwerk mit einem Eingangsklemmenpaar

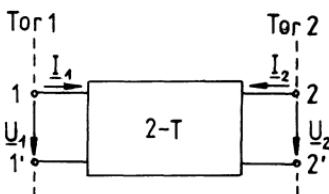


Bild 16 Allgemeines Zweitor mit symmetrischem Zählpfeilsystem

1,1', d.i. das Tor 1 (Eingangstor), und einem Ausgangsklemmenpaar 2,2', d.i. das Tor 2 (Ausgangstor), bezeichnet ("black box", Bild 16). Die ältere Bezeichnung "Vierpol" ist nicht ganz eindeutig, da von den vier Polen eines Zweitors immer jeweils zwei zusammengehören. Die Eingangs- und Ausgangsklemmen des Zweitors Bild 16 sind in seinem Innern durch beliebige Anordnungen von Baulementen, z.B. Wirkwiderständen, Spulen, Kondensatoren, Leitungen, Übertrager, Transistoren usw. miteinander verbunden. Im Zweitorinnern sollen jedoch keine starren Quellen vorkommen. An den Eingangsklemmen 1,1' liegt die Spannung U_1 (z.B. die Speisespannung) und an den Ausgangsklemmen 2,2' die Spannung U_2 . (In der Zweitortheorie sind gewöhnlich nur die beiden Querspannungen U_1 und U_2 , nicht aber die Längsspannungen zwischen den Klemmen 1 und 2 bzw. 1' und 2' von Interesse). An der Klemme 1 fließt der Strom I_1 in das Zweitor hinein, und derselbe Strom I_1 fließt an der Klemme 1' aus dem Zweitor heraus. An der Klemme 2 fließt der Strom I_2 in das Zweitor hinein, und derselbe Strom I_2 fließt an der Klemme 2' heraus. (Das Zweitor mit seiner eingangs- und ausgangsseitigen Beschaltung wird in 2.6 genauer betrachtet). Die Richtungszählung der Zweitorströme gemäß Bild 16 ent-

spricht der Zählweise beim symmetrischen Zählpfeilsystem: Beide Zweitorströme, also auch der Ausgangstrom I_2 , werden in das Zweitor hineinfließend positiv gezählt. Eingang und Ausgang des Zweitors werden dadurch einer gleichartigen Betrachtungsweise unterzogen, wodurch die erhaltenen Beziehungen übersichtlicher werden. Das symmetrische Zählpfeilsystem ist z.B. bei Transistorzweitoren besonders zweckmäßig. Bei Leitungen ist dagegen das Kettenzählpfeilsystem sinnvoll (vgl. 4.2): Der Ausgangstrom I_2 des Zweitors wird herausfließend positiv gezählt.

2.1.2 Passives und aktives Zweitor. Gesteuerte Quellen

Ein passives Zweitor enthält i. allg. Wirkwiderstände R , Induktivitäten L , Kapazitäten C und Übertrager \dot{U} in beliebiger Anordnung: RLCÜ-Zweitor. In den Wirkwiderständen des passiven Zweitors wird Wirkleistung verbraucht, z.B. als Stromwärme. Durch ein passives Reaktanz- (LC-)Zweitor kann dagegen Wirkleistung nur hindurchgehen.

Ein aktives Zweitor liefert eine größere Wirkleistung an seinen Ausgang, als es an seinem Eingang aufnimmt. (Die zusätzliche Wechselstromwirkleistung wird der Gleichstromversorgung des aktiven Zweitors entnommen). Aktive Zweitore sind z.B. Transistoren (Bipolar- und Feldeffekttransistor) und Operationsverstärker und alle Schaltungen, die solche Bauelemente enthalten. Aktive Zweitorschaltungen können auch mit bestimmten Halbleiterdioden, z.B. Tunneldioden, realisiert werden. (Die Gleichstromversorgung des aktiven Zweitors wird in der Zweitorschaltskizze gewöhnlich fortgelassen).

Aktive Zweitore stellen stets gesteuerte Quellen dar. Eine gesteuerte (abhängige) Quelle ist eine Spannungs- oder Stromquelle, die von einer anderen Spannung oder einem anderen Strom gesteuert wird. Die vier möglichen Typen idealer gesteuerter Quellen sind in Bild 17 dargestellt. (Die eingeschweiften Zahlen bedeuten jeweils die Werte des Eingangs- und Ausgangswiderstandes. Weiterhin sind: μ Spannungsver-

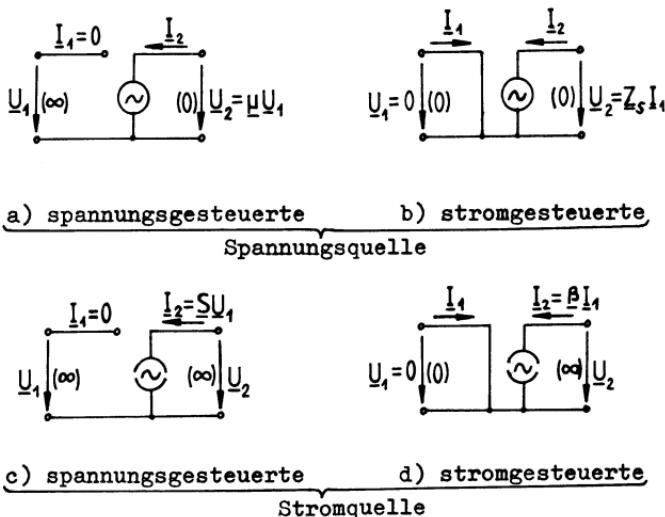


Bild 17 Gesteuerte (abhängige) Quellen

stärkung, Z_s Steuerwiderstand, S Steilheit, β Stromverstärkung). Bei der spannungs- bzw. stromgesteuerten Spannungsquelle Bild 17 a und b hängt die Ausgangsspannung U_2 nur von der Eingangsgröße U_1 bzw. I_1 und nicht von dem durch den Quellenausgang fließenden Strom I_2 ab. Bei der spannungs- bzw. stromgesteuerten Stromquelle Bild 17 c und d hängt dagegen der Ausgangsstrom I_2 nur von der Eingangsgröße U_1 bzw. I_1 und nicht von der an dem Quellenausgang liegenden Spannung U_2 ab. Eine gesteuerte Quelle wird mit der steuernden Klemmengröße ebenfalls Null. Dagegen ist die Quellenspannung bzw. der Quellenstrom einer (starren) Zweipolquelle von den äußeren Klemmengrößen bzw. von der Belastung unabhängig. Gesteuerte Quellen können z.B. mit Hilfe von Operationsverstärkern und Wirkwiderständen realisiert werden.

2.1.3 Grundgleichungen und Parameter des linearen Zweitors

Ein lineares Zweitor enthält nur lineare Bauelemente. Die Spannungen und die Ströme eines linearen Zweitors sind durch lineare Beziehungen miteinander verknüpft. Die Übertragungs-

eigenschaften eines zeitinvarianten Zweitors sind vom (Meß-) Zeitspunkt unabhängig. Wir betrachten im folgenden nur lineare, zeitinvariante Zweitore.

Die Eingangsspannung \underline{U}_1 und die Ausgangsspannung \underline{U}_2 eines linearen Zweitors sind lineare Funktionen des Eingangsstromes \underline{I}_1 und des Ausgangsstromes \underline{I}_2 . Wir betrachten z.B. die

T-Schaltung Bild 18. Mit dem Maschenstromverfahren folgt

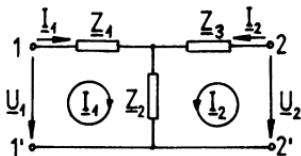


Bild 18 T-Schaltung

$$\begin{aligned}\underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{U}_1 &= 0 \\ \underline{Z}_3 \underline{I}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_1 - \underline{U}_2 &= 0\end{aligned}$$

und hieraus durch Auflösen nach \underline{U}_1 und \underline{U}_2

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_2 \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \underline{I}_2\end{aligned}$$

das sind die Zweitorgleichungen der T-Schaltung.

Die Zweitorgleichungen eines linearen Zweitors können allgemein in der Form der Widerstandsgleichungen geschrieben werden:

$$\left| \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21} \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22} \underline{I}_2 \end{array} \right. \quad (22)$$

Die vier komplexen, also frequenzabhängigen Koeffizienten \underline{Z}_{ik} werden als die Widerstands- (Z-)Parameter des Zweitors bezeichnet. Führen wir die Widerstandsmatrix

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$ ein, so erhalten wir die Widerstandsgleichungen in der Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Z}) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Die Gln. (22) beschreiben die Klemmeneigenschaften eines Zweitors vollständig. Sie stellen jedoch nur eine von insgesamt 6 verschiedenen möglichen Gleichungssystemen dar.
Drücken wir die Ströme \underline{I}_1 und \underline{I}_2 in Abhängigkeit von den Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 aus, so ergeben sich die Leitwertgleichungen

$$\left| \begin{array}{l} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{array} \right. \quad (24)$$

Die Koeffizienten \underline{Y}_{ik} werden als die Leitwert- (Y-)Parameter des Zweitors bezeichnet. Mit der Leitwertmatrix

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Leitwertgleichungen in der Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{Y}) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Schreiben wir die Eingangsgrößen \underline{U}_1 und \underline{I}_1 in Abhängigkeit von den Ausgangsgrößen \underline{U}_2 und $-\underline{I}_2$, so ergeben sich die Kettengleichungen

$$\left| \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}(-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}(-\underline{I}_2) \end{array} \right. \quad (26)$$

Die Koeffizienten \underline{A}_{ik} werden als die Ketten- (A-)Parameter des Zweitors bezeichnet. In den Gln. (26) sind \underline{U}_1 und \underline{I}_1 in Abhängigkeit von \underline{U}_2 und dem aus dem Zweitor herausfließenden Ausgangstrom $-\underline{I}_2$, also in einer der Schreibweise im Kettenzählpfeilsystem ähnlichen Form geschrieben. (Wir können $-\underline{I}_2 = \underline{I}_2'$ setzen, den herausfließenden Strom \underline{I}_2' dann positiv zählen und auf diese Weise zum Kettenzählpfeilsystem über-

gehen). Mit der Kettenmatrix

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Kettengleichungen in der Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = (\underline{A}) \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Schreiben wir \underline{U}_1 und \underline{I}_2 in Abhängigkeit von \underline{I}_1 und \underline{U}_2 , so erhalten wir die Hybridgleichungen

$$\left| \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{h}_{11}\underline{I}_1 + \underline{h}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{h}_{21}\underline{I}_1 + \underline{h}_{22}\underline{U}_2 \end{array} \right. \quad (28)$$

Die Koeffizienten \underline{h}_{ik} werden als die Hybrid- (h-)Parameter des Zweitors bezeichnet. Mit der Hybridmatrix

$$(\underline{h}) = \begin{pmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Hybridgleichungen in der Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = (\underline{h}) \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Die Hybridgleichungen werden gewöhnlich bei der Berechnung von NF-Verstärkerschaltungen mit Transistoren (für Frequenzen $f \leq 50$ kHz) benutzt.

Es gibt noch zwei weitere Darstellungsformen der Zweitor-gleichungen, die jedoch für die Praxis nur von geringer Bedeutung sind.

2.2 Bedeutung und Umrechnung der Zweitorparameter

2.2.1 Bedeutung der Zweitorparameter

Die physikalische Bedeutung der einzelnen Zweitorparameter Z_{ik} , Y_{ik} , A_{ik} und h_{ik} ergibt sich aus den entsprechenden Grundgleichungen des linearen Zweitors 2.1.3 und geht aus der Tafel 2 hervor. Wir entnehmen der Tafel 2 weiterhin: Die Z-Parameter werden durch Leerlaufmessungen, die Y-Parameter durch Kurzschlußmessungen und die A- und h-Parameter durch Leerlauf- und Kurzschlußmessungen bestimmt.

Als Besonderheit ist zu beachten: Die Parameter Z_{12} , Z_{22} , Y_{12} , Y_{22} , h_{12} und h_{22} werden bei Rückwärtsspeisung (Rückwärtsbetrieb) des Zweitors, d.h. bei Speisung des Zweitors durch eine Quelle im Ausgangskreis gemessen.

Tafel 2 Bedeutung der Zweitorparameter

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} && \text{Leerlauf-Eingangswiderstand} \\ Z_{12} &= \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} && \text{Leerlauf-Übertragungswiderstand rückwärts} \\ Z_{21} &= \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} && \text{Leerlauf-Übertragungswiderstand vorwärts} \\ Z_{22} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} && \text{Leerlauf-Ausgangswiderstand} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} && \text{Kurzschluß-Eingangsleitwert} \\ Y_{12} &= \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} && \text{Kurzschluß-Übertragungsleitwert rückwärts} \end{aligned} \tag{31}$$

Tafel 2 (Fortsetzung)

$$\underline{Y}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{Kurzschluß-Übertragungsleitwert vorwärts}$$

$$\underline{Y}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} \quad \text{Kurzschluß-Ausgangsleitwert}$$

$$\underline{A}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2=0} \quad \text{Leerlauf-Spannungsübersetzung}$$

$$\underline{A}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{Kurzschluß-Übertragungswiderstand vorwärts}$$

(32)

$$\underline{A}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2=0} \quad \text{Leerlauf-Übertragungsleitwert vorwärts}$$

$$\underline{A}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{Kurzschluß-Stromübersetzung}$$

$$\underline{h}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{Kurzschluß-Eingangswiderstand}$$

$$\underline{h}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} \quad \text{Leerlauf-Spannungsrückwirkung}$$

(33)

$$\underline{h}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} \quad \text{Kurzschluß-Stromverstärkung}$$

$$\underline{h}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} \quad \text{Leerlauf-Ausgangsleitwert}$$

2.2.2 Umrechnung der Zweitorparameter

Ist z.B. die Widerstandsmatrix (\underline{Z}) eines Zweitors gegeben, so können daraus die anderen Matrizen (\underline{Y}), (\underline{A}) und (\underline{h}) berechnet werden, wenn man die Zweitorgleichungen nach den gesuchten Größen auflöst. Wir gehen z.B. von den Widerstands-gleichungen (22) aus:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2\end{aligned}$$

Aus ihnen folgt mit Hilfe der Cramerschen Regel der Determinantenrechnung

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \underline{U}_1 & \underline{Z}_{12} \\ \underline{U}_2 & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix}}{\Delta \underline{Z}} = \frac{1}{\Delta \underline{Z}} (\underline{Z}_{22}\underline{U}_1 - \underline{Z}_{12}\underline{U}_2) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{U}_1 \\ \underline{Z}_{21} & \underline{U}_2 \end{vmatrix}}{\Delta \underline{Z}} = \frac{1}{\Delta \underline{Z}} (-\underline{Z}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Z}_{11}\underline{U}_2)\end{aligned}\quad (34)$$

$\Delta \underline{Z}$ in den Gln. (34) ist die Determinante der Widerstands-matrix (\underline{Z}):

$$\Delta \underline{Z} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{vmatrix} = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}$$

Weiterhin gelten die Leitwertgleichungen (24)

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}$$

Für die Leitwertmatrix folgt dann durch Koeffizientenver-gleich mit den Gln. (34)

$$(\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta \underline{Z}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Die rechts stehende Matrix (35) stellt die zur Matrix (Z)
inverse Matrix (Z)⁻¹ dar (s. Anhang).

Man verfährt analog zu oben, wenn eine andere Zweitormatrix gegeben ist und die übrigen Matrizen zu ermitteln sind. Man erhält dann die in der Tafel 3 enthaltenen Umrechnungsbeziehungen zwischen den Zweitormparametern, wobei das symmetrische Zählpfeilsystem zugrundegelegt ist.

Tafel 3 Umrechnung der Zweitormparameter

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta \underline{Z}} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{A}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \Delta \underline{A} \\ 1 & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{h}_{22}} \begin{pmatrix} \Delta \underline{h} & \underline{h}_{12} \\ -\underline{h}_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta \underline{Z}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{A}_{12}} \begin{pmatrix} \underline{A}_{22} & -\Delta \underline{A} \\ -1 & \underline{A}_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{h}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \Delta \underline{h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \Delta \underline{Z} \\ 1 & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & 1 \\ \Delta \underline{Y} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\underline{h}_{21}} \begin{pmatrix} \Delta \underline{h} & \underline{h}_{11} \\ \underline{h}_{22} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}} \begin{pmatrix} \Delta \underline{Z} & \underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \Delta \underline{Y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\underline{A}_{22}} \begin{pmatrix} \underline{A}_{12} & \Delta \underline{A} \\ -1 & \underline{A}_{21} \end{pmatrix}$$

Beispiel 4: Gegeben ist der LC-Spannungsteiler Bild 19.

Es sollen die Z-Parameter aus ihren Definitionen und die Y- und A-Matrix mit Hilfe der Umrechnungsformeln der Zweitorparameter berechnet werden.

Wegen (30) ergibt sich

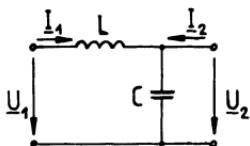


Bild 19 LC-Spannungs-
teiler

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{1}{j\omega C}$$

also

$$(Z) = \begin{pmatrix} j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}$$

mit $\Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = L/C$. Gemäß Tafel 3 folgt dann

$$(Y) = \frac{1}{\Delta Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega L} & -\frac{1}{j\omega L} \\ -\frac{1}{j\omega L} & j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \end{pmatrix}$$

$$(A) = \frac{1}{Z_{21}} \begin{pmatrix} Z_{11} & \Delta Z \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

2.3 Zusammenschaltung von Zweitoren

2.3.1 Serienschaltung

Serienschaltung (Reihenschaltung)
z.B. zweier Zweitore bedeutet Serienschaltung ihrer Eingänge und Serienschaltung ihrer Ausgänge (Bild 20). Beide Zweitore werden von denselben Eingangs- und Ausgangsströmen durchflossen, die jeweiligen Eingangs- und Ausgangsspannungen addieren sich:

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} = (\underline{Z}') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{pmatrix} = (\underline{Z}'') \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1' + U_1'' \\ U_2' + U_2'' \end{pmatrix} = \frac{[(\underline{Z}') + (\underline{Z}'')]}{(\underline{Z})} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Bei der Serienschaltung mehrerer Zweitore addieren sich also ihre Widerstandsmatrizen:

$$(\underline{Z}) = (\underline{Z}_1) + (\underline{Z}_2) + (\underline{Z}_3) + \dots \quad (36)$$

2.3.2 Parallelschaltung

Parallelschaltung z.B. zweier Zweitore bedeutet Parallelschaltung ihrer Eingänge und Parallelschaltung ihrer Ausgänge (Bild 21). An den Eingängen der beiden Zweitore liegt die gleiche Eingangsspannung und an ihren Ausgängen die gleiche Ausgangsspannung, die jeweiligen Eingangs- und Ausgangsströme addieren sich:

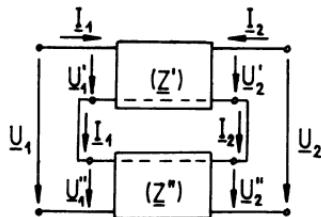


Bild 20 Serienschaltung von Zweitoren

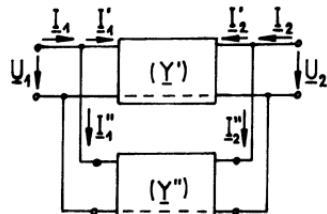


Bild 21 Parallelschaltung von Zweitoren

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ I_2' \end{pmatrix} = (\underline{Y}') \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = (\underline{Y}'') \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1' + I_1'' \\ I_2' + I_2'' \end{pmatrix} = \underbrace{[(\underline{Y}') + (\underline{Y}'')]}_{=(\underline{Y})} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Bei der Parallelschaltung mehrerer Zweitore addieren sich also ihre Leitwertmatrizen:

$$(\underline{Y}) = (\underline{Y}_1) + (\underline{Y}_2) + (\underline{Y}_3) + \dots \quad (37)$$

Die Beziehungen (36) und (37) sind nur dann gültig, wenn bei der Zusammenschaltung der Zweitore keine Schaltelemente kurzgeschlossen bzw. unwirksam werden. (Die gestrichelten Linien in den Bildern 20 und 21 deuten an, wie durchgehende Leitungen, z.B. Masseleitungen, verlaufen müssen).

2.3.3 Kettenschaltung

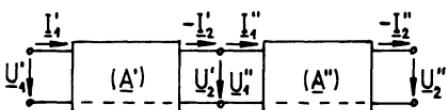


Bild 22 Kettenschaltung von Zweitoren

Bei der Kettenschaltung (Kaskadenschaltung) von Zweitoren wird der Ausgang eines Zweitors mit dem Eingang des nächsten Zweitors verbunden. Für die Kettenschaltung zweier Zweitore Bild 22 gilt

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = (\underline{A}') \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = (\underline{A}'') \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

oder wegen $U_2' = U_1''$, $-I_2' = I_1''$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \underbrace{(\underline{A}')(\underline{A}'')}_{=(\underline{A})} \begin{pmatrix} U_2 \\ -I_2'' \end{pmatrix}$$

Bei der Kettenschaltung mehrerer Zweitore multiplizieren sich also ihre Kettenmatrizen:

$$(\underline{A}) = (\underline{A}_1)(\underline{A}_2)(\underline{A}_3) \dots \quad (38)$$

Die Reihenfolge bei der Multiplikation der einzelnen A-Matrizen entspricht der Reihenfolge der einzelnen Zweitore in der Ketten schaltung und darf daher nicht geändert werden. (Dies stimmt damit überein, daß das Matrizenprodukt nicht-kommutativ ist, s. Anhang). Bei Berechnungen von Ketten schaltungen mehrerer Zweitore darf dagegen vom assoziativen Gesetz der Multiplikation Gebrauch gemacht werden. Für die A-Matrix von z.B. drei in Kette geschalteten Zweitoren gilt dann also

$$(\underline{A}) = [(\underline{A}_1)(\underline{A}_2)](\underline{A}_3) = (\underline{A}_1)[(\underline{A}_2)(\underline{A}_3)]$$

Die Serien-Parallel schaltung (Eingänge in Serie, Ausgänge parallel) und die Parallel-Serienschaltung (Eingänge parallel, Ausgänge in Serie) von Zweitoren sind in der Praxis von geringerer Bedeutung.

2.4 Reziprozitätstheorem und Zweitorklassen

2.4.1 Reziprozitätstheorem. Übertragungssymmetrische Zweitore

Für RLCÜ-Zweitore, also für alle passiven linearen Zweitore gilt das Reziprozitätstheorem (Umkehrungssatz):

Ein an einem Tor eines RLCÜ-Zweitors eingeprägter Strom ruft in beiden Übertragungsrichtungen am anderen Tor die gleiche Leerlaufspannung hervor.

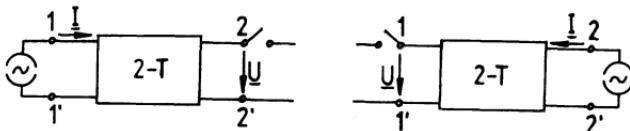


Bild 23 Zum Reziprozitätstheorem, formuliert mit der Leerlaufspannung

Der Inhalt des Reziprozitätstheorems ist anschaulich in Bild 23 dargestellt. (Die Stromquelle ist als ideal angenommen). Für das RLCÜ-Zweitor gilt also

$$\left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

oder wegen der Bedeutung der Zweitorparameter (s. Tafel 2, S. 36)

$$Z_{21} = Z_{12} \quad (39)$$

Das Reziprozitätstheorem kann auch in der folgenden zu oben äquivalenten Form formuliert werden:

Eine an einem Tor eines RLCÜ-Zweitors eingeprägte Spannung ruft in beiden Übertragungsrichtungen am anderen Tor den gleichen Kurzschlußstrom hervor.

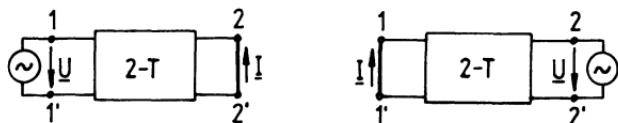


Bild 24 Zum Reziprozitätstheorem, formuliert mit dem Kurzschlußstrom

Der Inhalt dieses Satzes ist anschaulich in Bild 24 dargestellt. (Die Spannungsquelle ist als ideal angenommen). Für das RLCÜ-Zweitor gilt also auch

$$\left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

oder wegen der Bedeutung der Zweitorparameter

$$Y_{21} = Y_{12} \quad (40)$$

Die Beziehung (40) folgt wegen Gl.(39) auch direkt aus den Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 (S. 39).

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß das Reziprozitätstheorem in seinen beiden Formulierungen z.B. von der Spannungsteilerschaltung Bild 25 erfüllt wird.

Ein Zweitor, das dem Reziprozitätstheorem genügt, wird als übertragungssymmetrisch (kopplungssymmetrisch) bezeichnet. Die mittunter gebräuchliche Bezeichnung "umkehrbar" anstelle von übertragungssymmetrisch ist nicht empfehlenswert.

Die Bedingung (39) oder (40) ist wegen der Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 äquivalent mit der Bedingung

$$\Delta \underline{A} = 1$$

Für ein übertragungssymmetrisches Zweitor gelten also die folgenden Beziehungen:

$$| \quad Z_{12} = Z_{21}, \quad Y_{12} = Y_{21}, \quad \Delta \underline{A} = 1 \quad (41)$$

Die Zahl der unabhängigen Parameter ist folglich beim übertragungssymmetrischen Zweitor auf 3 reduziert (gegenüber 4 beim allgemeinen Zweitor). Die Betriebsübertragungseigenschaften eines übertragungssymmetrischen Zweitors sind in beiden Richtungen vollkommen gleich. Die Verstärkung eines aktiven Zweitors ist dagegen in beiden Übertragungsrichtungen gewöhnlich unterschiedlich. Aktive Zweitore sind daher i. allg. nicht übertragungssymmetrisch.

2.4.2 Widerstandssymmetrische Zweitore

Übertragungssymmetrie eines Zweitors bedeutet nicht, daß das Zweitor in seinem Innern symmetrisch aufgebaut sein muß. Übertragungssymmetrische Zweitore können sowohl widerstands-symmetrisch als auch widerstandsunsymmetrisch aufgebaut sein. Ein übertragungssymmetrisches Zweitor stellt z.B. die T-Schaltung Bild 18 dar. Ist dagegen der Widerstand $Z_3 = Z_1$, so stellt die T-Schaltung ein widerstandssymmetrisches Zweitor dar.

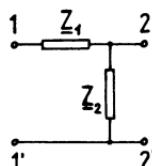


Bild 25 Spannungsteiler

Bei der Umkehr der Betriebsrichtung eines widerstandssymmetrischen Zweitors ändern sich die Spannung und der Strom am anderen Tor nicht (bei beliebiger Belastung). Die Leerlaufwiderstände und die Kurzschlußleitwerte eines widerstandssymmetrischen Zweitors sind daher an beiden Toren jeweils einander gleich:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}, \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$$

Jede dieser beiden Bedingungen ist wegen der Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 äquivalent mit der Bedingung

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$$

Für ein widerstandssymmetrisches Zweitor gelten also die folgenden Beziehungen:

$$|\quad \underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}, \underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}, \underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} \quad (42)$$

Ein widerstandssymmetrisches Zweitor wird folglich nur durch 2 unabhängige Parameter beschrieben. Ein widerstandssymmetrisches Zweitor ist gewöhnlich auch übertragungssymmetrisch. Eine Ausnahme bildet der Gyrator (s. 2.5.3). Dieser stellt ein widerstandssymmetrisches Zweitor mit $\Delta \underline{A} = -1$ dar. Der Gyrator ist also trotz vorhandener Widerstandssymmetrie übertragungsunsymmetrisch.

2.5 Matrizen wichtiger Zweitore

2.5.1 Längs- und Querwiderstand

a) Längswiderstand

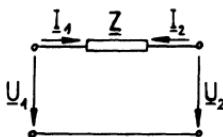


Bild 26 Längswiderstand
als Zweitor

Ein Zweipol mit dem komplexen Widerstand $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ kann zusammen mit einem Stück seiner Rückleitung zum Generator als ein Zweitor angesehen werden (Bild 26). Dann gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{Z}(-\underline{I}_2) \\ \underline{I}_1 &= -\underline{I}_2\end{aligned}$$

Die A-Matrix lautet also

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Aus den Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 (S. 39) folgt dann

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \infty \end{pmatrix}, \quad (\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \underline{Y} & -\underline{Y} \\ -\underline{Y} & \underline{Y} \end{pmatrix} \quad (44)$$

nicht existent

b) Querwiderstand

Ein Zweipol mit dem komplexen Leitwert $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ liegt z.B. als Querzweig in einer Schaltung oder als Isolationswiderstand in einer Doppelleitung (Bild 27). Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Y}} + (-\underline{I}_2) \end{aligned}$$

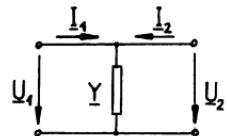


Bild 27 Querwiderstand
als Zweitor

folglich

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y} & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Aus den Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 folgt

$$(\underline{Z}) = \begin{pmatrix} \underline{Z} & \underline{Z} \\ \underline{Z} & \underline{Z} \end{pmatrix}, \quad (\underline{Y}) = \begin{pmatrix} \infty \end{pmatrix} \quad (46)$$

2.5.2 Idealer Übertrager

Der Übertrager (Wicklungsübertrager) besteht aus zwei magnetisch gekoppelten Spulen mit den Induktivitäten L_1 und L_2 und den Windungszahlen N_1 und N_2 (Bild 28). Der ideale Übertrager ist ein Übertrager ohne Streuung und Verluste, dessen Magnetisierungsstrom gleich Null ist ($L_1 \rightarrow \infty$ und $L_2 \rightarrow \infty$).

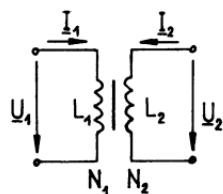


Bild 28 Übertrager

Das Übersetzungsverhältnis $\dot{u} = N_1/N_2$ der Windungszahlen ist beim idealen Übertrager

$$\dot{u} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (47)$$

Aus den Gleichungen des idealen Übertragers

$$\begin{aligned} U_1 &= \dot{u}U_2 \\ I_1 &= \frac{1}{\dot{u}}(-I_2) \end{aligned} \quad (48)$$

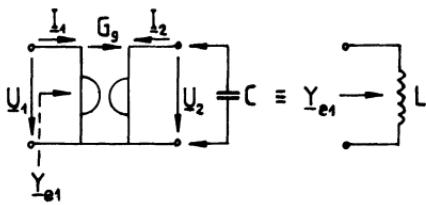
folgt

$$(A) = \begin{pmatrix} \dot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\dot{u}} \end{pmatrix} \quad (49)$$

und hieraus

$$(Z) = [\infty], \quad (Y) = [\infty]$$

2.5.3 Gyrator



Für den idealen (verlustlosen) Gyrator (Schaltzeichen Bild 29 links) gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1 &= G_g U_2 \\ I_2 &= -G_g U_1 \end{aligned} \quad (50)$$

Bild 29 Kapazitiv belasteter Gyra- tor als Induktivität

G_g in (50) ist der reelle Gyrationsleitwert.

Aus (50) und den Umrechnungsbeziehungen Tafel 3 ergeben sich die Zweitormatrizen

$$(Y) = \begin{pmatrix} 0 & G_g \\ -G_g & 0 \end{pmatrix}, \quad (Z) = \begin{pmatrix} 0 & -R_g \\ R_g & 0 \end{pmatrix}, \quad (A) = \begin{pmatrix} 0 & R_g \\ G_g & 0 \end{pmatrix} \quad (51)$$

mit dem Gyrationswiderstand $R_g = 1/G_g$ und $\Delta A = -1$.

Wird der Gyrator an seinem Ausgang mit einer Kapazität C abgeschlossen, so wird der Eingangsleitwert der Schaltung

wegen (50)

$$\underline{Y}_{e1} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = G_g^2 \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = G_g^2 \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega L} \quad (52)$$

Am Gyratoreingang wird also die Induktivität $L = C/G_g^2 = R_g^2 C$ simuliert, also das zu C duale Schaltelement. (R_g ist mit der Dualitätsinvariante R_o , 1.4 identisch). Durch den kapazitiv belasteten Gyrator können daher in L-haltigen Schaltungen, z.B. in Filterschaltungen, Spulen ersetzt werden.

Der Gyrator stellt einen Dualübertrager (Dualübersetzer) dar, d.h. er erzeugt an seinem Eingang aus der Abschlusadmittanz \underline{Y}_2 die dazu duale Admittanz $\underline{Y}_{e1} = G_g^2/\underline{Y}_2$. Der Gyrator kann mit zwei spannungsgesteuerten Stromquellen gemäß Bild 30 dargestellt werden. Er kann z.B. mit zwei Operationsverstärkern und äußeren Wirkwiderständen oder vollständig in integrierter Schaltungstechnik realisiert werden.

Die bisher betrachteten Zweitore sind nur durch einen einzigen Parameter, z.B. einen Widerstand, bestimmt. Man bezeichnet solche Zweitore als Elementarzweitore.

2.5.4 T- und Π -Schaltung

a) T-Schaltung

Die T-Schaltung stellt eine Ketten schaltung aus den Elementarzweitoren Längswiderstand - Querwiderstand - Längswiderstand dar (Bild 31). Für ihre A-Matrix folgt daher

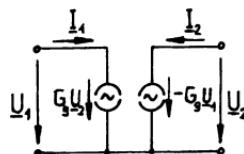


Bild 30 Gyrator, dargestellt mit zwei spannungsge steuerten Stromquellen

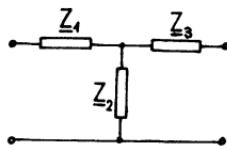


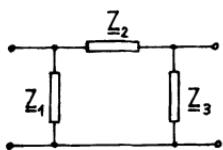
Bild 31 T-Schaltung

$$(\underline{A}) = (\underline{A}_1)(\underline{A}_2)(\underline{A}_3) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und hieraus

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 (1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}) \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 + \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \end{pmatrix} \quad (53)$$

b) Π -Schaltung



Die Π -Schaltung stellt eine Kettenbeschaltung aus den Elementarzweitoren Querwiderstand - Längswiderstand - Querwiderstand dar (Bild 32). Dann gilt also

Bild 32 Π -Schaltung

$$(\underline{A}) = (\underline{A}_1)(\underline{A}_2)(\underline{A}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_3 & 1 \end{pmatrix}$$

und hieraus

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3}(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}) & 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{pmatrix} \quad (54)$$

Die Z- und Y-Matrizen der T- und Π -Schaltung ergeben sich aus den Umrechnungsbeziehungen Tafel 3. Die T- und Π -Schaltung stellen wichtige Ersatzschaltungen passiver Zweitore dar.

Beispiel 5: Es soll die A-Matrix der Dämpfungskette Bild 33 mit $R = 1 \text{ k}\Omega$ berechnet werden.

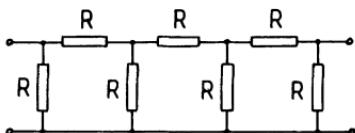


Bild 33 Dämpfungskette

Es liegt eine Kettenbeschaltung z.B. aus einem Π -Glied mit $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = R$, einem Längswiderstand $\underline{Z} = R$ und dem Π -Glied vor. Dann folgt

also wegen (54) und (43)

$$\begin{aligned} (\underline{A}) &= (\underline{A}_{rr})(\underline{A}_z)(\underline{A}_{rr}) = \begin{pmatrix} 2 & R \\ 3/R & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & R \\ 3/R & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 8R \\ 21/R & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 \text{ k}\Omega \\ 21 \text{ mS} & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.6 Betriebsparameter des Zweitors

2.6.1 Eingangs- und Ausgangswiderstand, Spannungs- und Stromübertragungsfaktor

Das Zweitor wird zwischen einem Generator mit der Quellenspannung U_o und dem komplexen Innenwiderstand $Z_1 = R_1 + jX_1 = 1/Y_1$ (55) und einem Verbraucher mit dem komplexen Lastwiderstand

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = 1/Y_2 \quad (56)$$

und einem Verbraucher mit dem komplexen Lastwiderstand

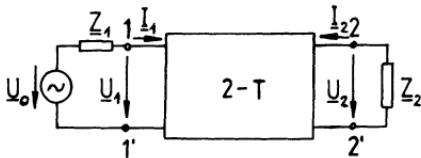


Bild 34 Zweitorbetriebsschaltung

$$Z_2 = R_2 + jX_2 = 1/Y_2 \quad (56)$$

betrieben (Betriebsschaltung Bild 34. Man kann den speisen den Generator statt durch eine Spannungsquelle auch durch eine äquivalente Stromquelle gemäß 1.1.2 darstellen).

Als Eingangswiderstand des Zweitors wird der komplexe Widerstand zwischen den Eingangsklemmen 1-1'

$$Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1} \quad (57)$$

bezeichnet, wenn das Zweitor mit dem beliebigen Widerstand

$$Z_2 = -\frac{U_2}{I_2} \quad (58)$$

abgeschlossen ist (Bild 35). Mit den

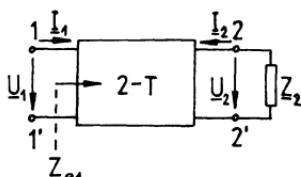


Bild 35 Zur Definition des Zweitor-Eingangswiderstandes

Kettengleichungen (26) folgt

$$Z_{e1} = \frac{\frac{A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2)}{A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2)}}{=} = \frac{\frac{A_{11}-I_2}{U_2} + \frac{A_{12}}{A_{21}-I_2}}{\frac{U_2}{A_{21}-I_2} + \frac{A_{22}}{A_{21}-I_2}}$$

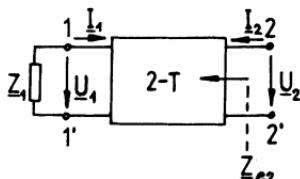
und hieraus wegen (58)

$$\boxed{Z_{e1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}}{}} \quad (59)$$

Die Gl.(59) beschreibt die Impedanztransformation des Lastwiderstandes Z_2 auf den Eingang des Zweitors.

Als Ausgangswiderstand des

Zweitors wird der komplexe Widerstand zwischen den Ausgangsklemmen 2-2'



$$Z_{e2} = \frac{U_2}{I_2} \quad (60)$$

Bild 36 Zur Definition des Zweitor-Ausgangswiderstandes

bezeichnet, wenn das Zweitor von rückwärts gespeist wird und der Zweitoreingang mit dem beliebigen Widerstand Z_1 abgeschlossen ist (Bild 36). Mit

den Kettengleichungen (26) folgt

$$Z_1 = -\frac{U_1}{I_1} = -\frac{\frac{A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2)}{A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2)}}{=}$$

und hieraus

$$\boxed{Z_{e2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\frac{A_{12} + A_{22}Z_1}{A_{11} + A_{21}Z_1}}{}} \quad (61)$$

Aus den Gln. (26) folgt wegen (58)

$$\frac{U_1}{U_2} = A_{11} + A_{12} \frac{-I_2}{U_2} = A_{11} + \frac{A_{12}}{Z_2}$$

Hieraus ergibt sich der Spannungsübertragungsfaktor des Zweitors

$$\left| \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_2}{A_{11}Z_2 + A_{12}} \right. \quad (62)$$

Aus den Gln.(26) folgt weiterhin

$$\frac{I_1}{I_2} = A_{21} \frac{U_2}{U_1} - A_{22} = -A_{21}Z_2 - A_{22}$$

und hieraus der Stromübertragungsfaktor des Zweitors

$$\left| \frac{I_1}{I_2} = \frac{-1}{A_{21}Z_2 + A_{22}} \right. \quad (63)$$

Wichtige Betriebsparameter des Zweitors, ausgedrückt durch die verschiedenen Zweitorparameter, sind in der Tafel 4 zusammengestellt.

2.6.2 Betriebsübertragungsfaktor und Betriebsdämpfungsmaß

Von einem Generator mit dem Innenwiderstand Z_1 wird dann das Maximum der komplexen Leistung $N = UI$ an einen angeschlossenen Verbraucher Z_2 abgegeben, wenn der Generator mit seinem Innenwiderstand belastet wird (Bild 37):

$$Z_2 = Z_1 \quad (64)$$

Gl.(64) ist also die Bedingung für die Anpassung auf maximale komplexe Leistung. (Es hat sich in der Zweitortheorie als zweckmäßig erwiesen, die komplexe Leistung $N = UI$ anstelle der Scheinleistung $S = UI^*$ zu verwenden). Für die Klemmengrößen im Stromkreis ergibt sich in diesem Anpassungsfall

$$U_{\text{anp}} = U_o/2, \quad I_{\text{anp}} = U_o/2Z_1 = I_o/2 \quad (65)$$

wobei I_o der Kurzschlußstrom des Generators ist. Für die verfügbare (d.h. maximal abgabbare) komplexe Leistung des Generators folgt dann

$$N_{\text{max}} = U_{\text{anp}} I_{\text{anp}} = U_o^2/4Z_1 \quad (66)$$

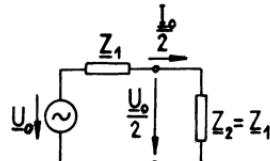


Bild 37 Generatoranpassung auf maximale komplexe Leistung

Tafel 4 Betriebsparameter des Zweitors

	Z-Parameter	Y-Parameter	A-Parameter	h-Parameter
$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}$	$\frac{\Delta Z + \underline{Z}_{11}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_2}{\Delta Y + \underline{Y}_{11}\underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{h}_{11} + \Delta h \underline{Z}_2^2}{1 + \underline{h}_{22}\underline{Z}_2}$
$\underline{Z}_{e2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}$	$\frac{\Delta Z + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_1}$	$\frac{\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_1}{\Delta Y + \underline{Y}_{22}\underline{Y}_1}$	$\frac{\underline{A}_{12} + \underline{A}_{22}\underline{Z}_1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_1}$	$\frac{\underline{h}_{11} + \underline{Z}_1}{\Delta h + \underline{h}_{22}\underline{Z}_1}$
$\underline{H}_u = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}$	$\frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_2}{\Delta Z + \underline{Z}_{11}\underline{Z}_2}$	$\frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_2}$	$\frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}$	$\frac{-\underline{h}_{21}\underline{Z}_2}{\underline{h}_{11} + \Delta h \underline{Z}_2}$
$\underline{H}_i = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$	$\frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_2}$	$\frac{\underline{Y}_{21}\underline{Y}_2}{\Delta Y + \underline{Y}_{11}\underline{Y}_2}$	$\frac{-1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}$	$\frac{\underline{h}_{21}}{1 + \underline{h}_{22}\underline{Z}_2}$

Wird ein Zweitor zwischen die beiden Abschlußwiderstände \underline{Z}_1 und \underline{Z}_2 geschaltet (Bild 34), so fällt am Verbraucher \underline{Z}_2 die Ausgangsspannung \underline{U}_2 ab, und durch \underline{Z}_2 fließt der Ausgangstrom

$$-\underline{I}_2 = \underline{U}_2 / \underline{Z}_2 \quad (67)$$

Die von \underline{Z}_2 aufgenommene Leistung ist dann

$$\underline{N}_2 = \underline{U}_2 (-\underline{I}_2) = \underline{U}_2^2 / \underline{Z}_2 \quad (68)$$

Wir setzen

$$\underline{H}_B = \frac{1}{\underline{D}_B} = \sqrt{\frac{\underline{N}_2}{\underline{N}_{max}}} \quad (69)$$

\underline{H}_B wird als der Betriebsübertragungsfaktor (Transmittanz) und \underline{D}_B als der komplexe Betriebsdämpfungsfaktor bezeichnet. Aus (69) folgt wegen (66) und (68)

$$\left| \underline{H}_B = e^{-\underline{g}_B} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_o} \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}} \right. \quad (70)$$

Der Exponent in (70)

$$\left| \underline{g}_B = a_B + j b_B = -\ln \underline{H}_B = \ln \underline{D}_B \right. \quad (71)$$

wird als das komplexe Betriebsdämpfungsmaß bezeichnet. Der Realteil von \underline{g}_B

$$a_B / Np = -\ln \underline{H}_B \quad (72)$$

wird als die Betriebsdämpfung und der Imaginärteil b_B als die Betriebspause, d.i. der Phasenwinkel $\varphi_{u_1 u_2}$ zwischen den komplexen Spannungen \underline{U}_o und \underline{U}_2 , des Übertragungssystems bezeichnet. Ein Neper, Np ist die Einheit (Scheineinheit) der Dämpfung, die auf dem natürlichen Logarithmus \ln (mit der Basis $e = 2,718$) beruht. Als Dämpfungseinheit wird heute jedoch gewöhnlich das Dezibel, dB benutzt, das auf dem dekadischen (Briggschen) Logarithmus \lg (mit der Basis 10) beruht. Dann gilt

$$\left| a_B / dB = -20 \lg \underline{H}_B \right. \quad (73)$$

Es gelten die Umrechnungsformeln

$$1 \text{ dB} = \frac{\ln 10}{20} \text{ Np} = 0,1151 \text{ Np}, 1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB} \quad (74)$$

Für passive Zweitor ist $H_B \leq 1$, $a_B \geq 0$, für aktive Zweitor ist $H_B > 1$, $a_B < 0$.

Bei reellem Generatorinnenwiderstand $Z_1 = R_1$ ergibt sich als Bedingung für die Anpassung auf maximale Wirkleistung $Z_2 = R_2 = R_1$. Die verfügbare Wirkleistung des Generators ist dann

$$P_{\max} = U_o^2 / 4R_1 \quad (75)$$

(Bei komplexem Generatorinnenwiderstand Z_1 ergibt sich P_{\max} aus der Anpassungsbedingung $Z_2 = Z_1^*$, wobei Z_1^* der zu Z_1 konjugiert komplexe Widerstand ist). Wird ein Zweitor zwischen die beiden Abschlußwiderstände R_1 und R_2 geschaltet, so ist die an R_2 abgegebene Wirkleistung

$$P_2 = U_2^2 / R_2 \quad (76)$$

Für den Betrag des Betriebsübertragungsfaktors folgt dann aus (75) und (76)

$$H_B = \sqrt{\frac{P_2}{P_{\max}}} = e^{-a_B} = \frac{U_2}{U_o / 2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \quad (77)$$

Der Betriebsübertragungsfaktor H_B kann mit den Zweitorparametern ausgedrückt werden. Bei Berücksichtigung von Bild 34 gilt z.B. wegen (26)

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2) = U_o - Z_1 I_1 \\ I_1 &= A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$A_{11}U_2 = U_o - A_{12}(-I_2) - Z_1 A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2)$$

Setzen wir hierin $-I_2 = U_2/Z_2$, so ergibt sich für den Betriebsübertragungsfaktor (70)

$$H_B = \frac{2}{\frac{A_{11}}{Z_1} \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} + \frac{A_{12}}{Z_1 Z_2} + \frac{A_{21}}{Z_1} \sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1}} + \frac{A_{22}}{Z_2} \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}}} \quad (78)$$

2.6.3 Gruppen- und Phasenlaufzeit. Signalverzerrungen

Die Übertragungsgeschwindigkeit eines Signals ist zwar sehr groß, aber endlich, nämlich \leq Lichtgeschwindigkeit. Daher ist eine bestimmte Laufzeit eines Signals zum Durchlaufen eines Übertragungszweitors (Kabel, Verstärker, Richtfunkstrecke, Siebschaltung usw.) erforderlich. Ein Signal (d.i. eine Wellengruppe) kann nur durch Modulation z.B. einer Sinuswelle oder in Form von Impulsen übertragen werden. (Durch eine reine Sinuswelle kann keine Information bzw. kein Signal übertragen werden). Überlagert man z.B. einzelne Sinuswellen mit verschiedenen

Amplituden $A_n(\omega)$ und Kreisfrequenzen ω_n , die alle innerhalb eines relativ kleinen Bereiches $\Delta\omega \ll \omega_n$ liegen (Bild 38 a, z.B. Wechselstromimpuls), so ergibt sich ein resultierender Spannungsverlauf $u(t)$ mit einem ausgeprägten Amplituden- (Energie-)Zentrum (Bild 38 b, seine Zeitdauer ist gemäß dem "Zeitgesetz" der Nachrichtentechnik $\tau = 2\pi/\Delta\omega = 1/\Delta f$). Der Differentialquotient

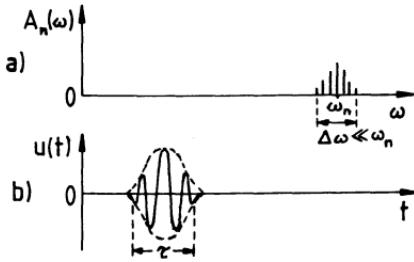


Bild 38 a) Amplitudenspektrum,
b) zeitlicher Verlauf
eines Signals

$$t_g = \frac{db_B}{d\omega} \quad (79)$$

bestimmt die Ausbreitungszeit der Hüllkurve des Signals, also die Zeit, die das Amplitudenmaximum der Wellengruppe (Maximum der Hüllkurve) zum Durchlaufen des Übertragungszweitors benötigt. Die Größe t_g wird als die Gruppenlaufzeit (Signallaufzeit) bezeichnet. Sie wird in der Nachrichtentechnik häufig anstelle der Betriebspulse b_B angegeben. Bei der Signalübertragung wird angestrebt, das Signal möglichst verzerrungsfrei, d.h. ohne Änderung der Kurvenform

(originalgetreu) vom Eingang zum Ausgang des Übertragungszweitors zu übertragen. Die Signalübertragung ist verzerrungsfrei, wenn die Übertragung einer jeden Frequenzkomponente des Signals mit der gleichen Dämpfung (bzw. Verstärkung) a_B und der gleichen Laufzeit $t_g = t_p$ erfolgt:

$$\frac{da_B}{d\omega} = 0, \text{ also } a_B = a_{B0} \quad (80)$$

$$\frac{db_B}{d\omega} = t_p, \text{ also } b_B = t_p \omega \text{ bzw. } t_p = \frac{b_B}{\omega} \quad (81)$$

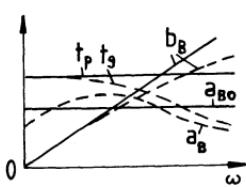


Bild 39 Verzerrungsfreie (—) und verzerrte (--) Signalübertragung

a_{B0} und t_p sind hierbei Konstanten (Bild 39). Die für alle Frequenzkomponenten des Signals gleiche Laufzeit t_p wird als die Phasenlaufzeit bezeichnet. Konstante Laufzeit t_p für alle Frequenzkomponenten des Signals bedeutet eine mit der Frequenz linear ansteigende Phasenverzögerung $b_B = t_p \omega$ der einzelnen Frequenzkomponenten.

Eine verzerrungsfreie Signalübertragung ist mit einem realen Übertragungszweitor nur angenähert erzielbar (z.B. mit einem verlustarmen Kabel, 4.3.2). Ist die Bedingung (80) nicht erfüllt, gilt also $a_B = a_B(\omega)$, so liegen Dämpfungsverzerrungen vor (z.B. strichlierter Verlauf Bild 39). Sie werden z.B. durch auftretende Kapazitäten im Verstärkerhervorgerufen. Ist die Bedingung (81) nicht erfüllt, gilt also $t_g = t_g(\omega)$, so liegen Laufzeitverzerrungen (bzw. Phasenverzerrungen) vor (z.B. strichlierte Verläufe Bild 39). Dämpfungs- und Laufzeitverzerrungen werden gemeinsam als lineare Verzerrungen bezeichnet. Im Gegensatz dazu werden nichtlineare Verzerrungen durch nichtlineare Bauelemente im Übertragungssystem hervorgerufen. Sie werden z.B. bei starker Aussteuerung von Transistoren erzeugt. Nichtlineare Verzerrungen sind durch das Auftreten neuer, im Origi-

zielbar (z.B. mit einem verlustarmen Kabel, 4.3.2). Ist die Bedingung (80) nicht erfüllt, gilt also $a_B = a_B(\omega)$, so liegen Dämpfungsverzerrungen vor (z.B. strichlierter Verlauf Bild 39). Sie werden z.B. durch auftretende Kapazitäten im Verstärkerhervorgerufen. Ist die Bedingung (81) nicht erfüllt, gilt also $t_g = t_g(\omega)$, so liegen Laufzeitverzerrungen (bzw. Phasenverzerrungen) vor (z.B. strichlierte Verläufe Bild 39). Dämpfungs- und Laufzeitverzerrungen werden gemeinsam als lineare Verzerrungen bezeichnet. Im Gegensatz dazu werden nichtlineare Verzerrungen durch nichtlineare Bauelemente im Übertragungssystem hervorgerufen. Sie werden z.B. bei starker Aussteuerung von Transistoren erzeugt. Nichtlineare Verzerrungen sind durch das Auftreten neuer, im Origi-

nalsignal nicht enthaltener Frequenzen gekennzeichnet. Dämpfungs- und Laufzeitverzerrungen (und ebenso die nichtlinearen Verzerrungen) verändern die Kurvenform des übertragenen Signals und sind daher meist sehr störend, z.B. bei Telegrafie und Fernsehen. Durch Kombination von Schaltungen mit entgegengesetzter Frequenzabhängigkeit der Dämpfung oder der Gruppenlaufzeit kann ein Dämpfungs- oder Laufzeitausgleich im verzerrten Signal erreicht werden: Dämpfungs- bzw. Laufzeitentzerrung.

2.7 Streuparameter des Zweitors

2.7.1 Normierte Wellen. Streugleichungen

Bei Anordnungen für sehr hohe Frequenzen, z.B. bei Hochfrequenztransistoren für Frequenzen $f > 100 \text{ MHz}$, sind keine exakten Spannungs- und Strommessungen an den Toren mehr möglich, da selbst sehr kurze Leitungsstücke dann schon widerstandstransformierend wirken (vgl. 4.4). Bei der Messung der Zweitorparameter ist die Realisierung der Meßbedingungen Leerlauf und Kurzschluß an den entsprechenden Toren im Bereich sehr hoher Frequenzen ebenfalls problematisch. (Vom leerlaufenden Tor wird elektromagnetische Energie abgestrahlt, der Kurzschluß wirkt transformierend). Man schließt deshalb das Zweitor bei sehr hohen Frequenzen mit reellen Betriebswiderständen ab und mißt die übertragenen und reflektierten Wirkleistungen an den Toren z.B. mit Hilfe von Richtkopplern (4.5.3). Man muß dabei die Vorgänge auf den Anschlußleitungen und im Innern des Zweitors unter dem Gesichtspunkt elektromagnetischer Wellen betrachten.

Der Signalgenerator mit dem Innenwiderstand Z_1 und der Verbraucher mit dem Widerstand Z_2 sind über verlustarme Leitungen (Koaxial- oder Streifenleitungen) mit den reellen Wellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} (s. 4.2.1, meist 50Ω) an das Zweitor angeschlossen (Bild 40). Man führt anstelle von Spannung und Strom "Wellen" (Leistungswellen) ein:

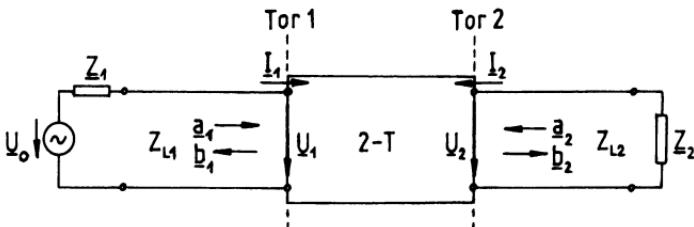


Bild 40 Zweitor mit normierten Wellen am Eingang und Ausgang

a_1, a_2 in das Zweitor einfallende Wellen am Tor 1 bzw. 2,
 b_1, b_2 vom Zweitor reflektierte Wellen am Tor 1 bzw. 2.

Die Wellen werden auf $\sqrt{Z_L}$ normiert, z.B.:

$$\begin{aligned} a_1 &= \underline{U}_{h1}/\sqrt{Z_{L1}} = \underline{I}_{h1}\sqrt{Z_{L1}} \\ b_1 &= \underline{U}_{r1}/\sqrt{Z_{L1}} = -\underline{I}_{r1}\sqrt{Z_{L1}} \end{aligned} \quad (82)$$

$\underline{U}_{h1}, \underline{I}_{h1}$ sind Spannung und Strom der einfallenden Welle am Tor 1, und $\underline{U}_{r1}, -\underline{I}_{r1}$ sind Spannung und Strom der reflektierten Welle am Tor 1. Die normierten Wellen a_i und b_i ($i = 1, 2$) haben die Dimension Leistung. Die Definition normierter Wellen ist vorteilhaft, weil die normierte Spannungswelle und die normierte Stromwelle einander gleich sind und man daher jeweils mit nur einer normierten Welle rechnen kann.

Nach der Leitungstheorie (Gln.(219)) gilt

$$\begin{aligned} \underline{U}_{h1} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + Z_{L1}\underline{I}_1) \\ \underline{U}_{r1} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - Z_{L1}\underline{I}_1) \end{aligned} \quad (83)$$

Aus (82) wird wegen (83)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1/\sqrt{Z_{L1}} + \sqrt{Z_{L1}}\underline{I}_1) \\ b_1 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_1/\sqrt{Z_{L1}} - \sqrt{Z_{L1}}\underline{I}_1) \end{aligned} \quad (84)$$

Am Tor 2 gilt analog

$$\begin{aligned} \underline{a}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2/\sqrt{Z_{L2}} + \sqrt{Z_{L2}}\underline{I}_2) \\ \underline{b}_2 &= \frac{1}{2}(\underline{U}_2/\sqrt{Z_{L2}} - \sqrt{Z_{L2}}\underline{I}_2) \end{aligned} \quad (85)$$

Sowohl die am Tor 1 reflektierte Welle \underline{b}_1 als auch die am Tor 2 reflektierte Welle \underline{b}_2 hängt von den in das Zweitor einfallenden Wellen \underline{a}_1 und \underline{a}_2 ab. Die Wellen sind bei einem linearen Zweitor durch lineare Beziehungen miteinander verknüpft. Wir erhalten daher die Streugleichungen

$$\left| \begin{array}{l} \underline{b}_1 = S_{11}\underline{a}_1 + S_{12}\underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 = S_{21}\underline{a}_1 + S_{22}\underline{a}_2 \end{array} \right. \quad (86)$$

Die Parameter S_{ik} werden als die Streu- (S-)Parameter des Zweitors bezeichnet. Führen wir die Streumatrix

$$(S) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $\begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix}$ ein, so ergeben sich die Streugleichungen in der Matrizenform

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = (S) \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{pmatrix} \quad (87)$$

2.7.2 Bedeutung der Streuparameter

Die Streuparameter eines Zweitors werden bei wellenwiderstandsangepaßten (reflexionsfreien) Abschlüssen $Z_1 = Z_{L1}$, $Z_2 = Z_{L2}$ des Zweitors ermittelt bzw. gemessen. Die physikalische Bedeutung der Streuparameter ergibt sich dann aus den Streugleichungen (86) und geht aus der Tafel 5 hervor.

Wir betrachten die beiden Parameter S_{11} und S_{21} . Aus (88) folgt wegen (84) für $\underline{a}_2 = 0$, d.h. bei wellenwiderstandsangepaßtem Abschluß ($Z_2 = Z_{L2}$)

Tafel 5 Bedeutung der Streuparameter

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad \text{Eingangsreflexionsfaktor} \\ S_{12} &= \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad \text{Betriebsübertragungsfaktor rückwärts} \\ S_{21} &= \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad \text{Betriebsübertragungsfaktor vorwärts} \\ S_{22} &= \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0} \quad \text{Ausgangsreflexionsfaktor} \end{aligned} \quad (88)$$

$$S_{11} = \frac{U_1/\sqrt{Z_{L1}} - \sqrt{Z_{L1}} I_1}{U_1/\sqrt{Z_{L1}} + \sqrt{Z_{L1}} I_1} = \frac{U_1/I_1 - Z_{L1}}{U_1/I_1 + Z_{L1}} = \frac{Z_{e1} - Z_{L1}}{Z_{e1} + Z_{L1}} \quad (89)$$

Sehen wir den linken Leitungsabschnitt Bild 40 als unendlich kurz an, so gilt $U_o = U_1 + Z_{L1} I_1$, also wegen (83) $U_{h1} = U_o/2$. In das Zweitor läuft dann wegen (82) die "Urwelle"

$$a_1 = U_o/2\sqrt{Z_{L1}} \quad (90)$$

Für $a_2 = 0$ folgt aus (85) $b_2 = U_2/\sqrt{Z_{L2}}$, also wegen (88) und (90)

$$S_{21} = \frac{U_2/\sqrt{Z_{L2}}}{U_o/2\sqrt{Z_{L1}}} = \left. \frac{U_2}{U_o/2} \right|_{Z_{L2}} \sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}} = H_B \quad (91)$$

d.i. der Betriebsübertragungsfaktor vorwärts für $Z_1 = Z_{L1}$, $Z_2 = Z_{L2}$ (Gl. (70)). Die beiden Parameter S_{12} und S_{22} werden bei Rückwärtsspeisung des Zweitors gemessen.

Für ein übertragungssymmetrisches Zweitor gilt

$$S_{12} = S_{21} \quad (92)$$

Die S-Parameter können aus den anderen Zweitorparametern nur durch komplizierte Umrechnungen ermittelt werden (s. z.B. [?]).

Übungsaufgaben zu Abschn. 2 (Lösungen im Anhang):

Beispiel 6: Gegeben sind die folgenden Zweitorschaltungen:

- Die Kettenenschaltung zweier Gyroraten mit den Gyrationswiderständen R_{g1} und R_{g2} ,
- die Gyrator-C-Schaltung Bild 41. Man ermittle jeweils die äquivalente Zweitor-Ersatzschaltung.

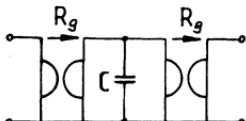


Bild 41 Gyrator-C-Schaltung

Beispiel 7: Das Reaktanzzweitor Bild 42 mit $C = 2 \text{ nF}$, $L = 50 \mu\text{H}$ wird bei der Frequenz $f = 1 \text{ MHz}$ zwischen den beiden Abschlußwiderständen $R = 600 \Omega$ betrieben. Man berechne

- die A-Matrix,
- den Betriebsübertragungsfaktor,
- das komplexe Betriebsdämpfungsmaß, die Betriebsdämpfung und die Betriebspause des Zweitors.

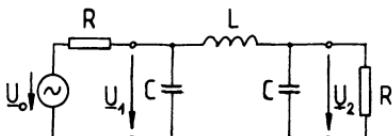


Bild 42 Reaktanzzweitor zwischen reellen Abschlußwiderständen

Beispiel 8: Ein HF-Transistor ist bei der Messung der S-Parameter an zwei Leitungen mit der Länge $l = 1,5 \text{ cm}$, dem Wellenwiderstand Z_L und der Permittivitätszahl

$\epsilon_r = 2,4$ (Polystyrol) gemäß Bild 43 angeschlossen. (Die Klemmenpaare 3,3' und 4,4' sind mit dem Wellenwiderstand $Z_L = Z_1 = Z_2$ abgeschlossen). In den Bezugsebenen 3-3' und 4-4' werden bei der Frequenz $f = 1,2 \text{ GHz}$ die

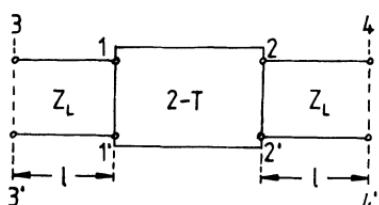


Bild 43 Zweitor mit verschiedenen Bezugsebenen

folgenden S-Parameter gemessen:

$$S'_{11} = 0,35 e^{-j177^\circ}, \quad S'_{12} = 0,1 e^{j28^\circ}$$

$$S'_{21} = 2,8 e^{j16^\circ}, \quad S'_{22} = 0,46 e^{-j22^\circ}$$

Man berechne die S-Parameter des HF-Transistors in den Tor-ebenen 1-1' und 2-2'.

3. Übertragungsfunktion. Filtersynthese

3.1 Übertragungsfunktion und Pol-Nullstellen-Darstellung

3.1.1 Übertragungsfaktor und Übertragungsfunktion

Als Übertragungsfaktor H eines Systems wird das Verhältnis einer beliebigen Wirkung (Empfangsgröße) zur entsprechenden Ursache (Sendegröße) bezeichnet:

$$\text{Übertragungsfaktor } H = \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ursache}}$$

Der Übertragungsfaktor H eines Zweitors ist das Verhältnis Ausgangsgröße/Eingangsgröße und kann z.B. der Spannungs-, Strom- oder Betriebsübertragungsfaktor sein (vgl. 2.6). H ist gewöhnlich frequenzabhängig, da auch die Zweitorparameter von der Frequenz abhängen. Ist die Erregungsfunktion (Eingangsfunktion) $f_1(t)$ sinusförmig (mit der Kreisfrequenz ω), so ist bei einem linearen Zweitor auch die Antwortfunktion (Ausgangsfunktion) $f_2(t)$ sinusförmig. Das Verhältnis

$$H(j\omega) = F_2(j\omega)/F_1(j\omega) \quad (93)$$

mit den komplexen Effektivwerten (bzw. Amplituden) $F_1(j\omega)$ und $F_2(j\omega)$ von $f_1(t)$ und $f_2(t)$ wird als der Übertragungsfaktor (komplexer Frequenzgang) des linearen Zweitors bezeichnet. Der Übertragungsfaktor $H(j\omega)$ kann mit Hilfe der komplexen Rechnung (symbolische Methode) direkt dem gegebenen Zweitor entnommen werden. Er beschreibt dann das Übertragungsverhalten des Zweitors gegenüber sinusförmigen Erregungsgrößen. Voraussetzung für die unmittelbare Anwendbarkeit der komplexen Rechnung ist allerdings, daß im Einschaltzeitpunkt $t = 0$ der sinusförmigen Erregung $f_1(t)$ alle Energiespeicher (L, C) des Zweitors entladen sind. Das Frequenzverhalten eines Zweitors kann vorteilhaft beschrieben werden, wenn man von der Kreisfrequenz ω zur komplexen Frequenz s übergeht:

$$j\omega \longrightarrow s = \sigma + j\omega \quad (94)$$

mit der reellen Zahl σ (vgl. 1.1.1). Verallgemeinern wir die Beziehung (93) durch den Übergang (94), so geht der Übertragungsfaktor $H(j\omega)$ in die Übertragungsfunktion (Systemfunktion) $H(s)$ über:

$$\boxed{j\omega \rightarrow s: H(j\omega) \rightarrow H(s) = F_2(s)/F_1(s)} \quad (95)$$

Die Funktion $H(s)$ besitzt keine unmittelbare physikalische Bedeutung mehr, sondern sie dient nur als Rechenhilfe.

3.1.2 Darstellung der Übertragungsfunktion durch Pole und Nullstellen. PN-Plan

Es gilt der allgemeine Satz:

$H(s)$ eines linearen Zweitors aus n unabhängigen (nicht gekoppelten) Energiespeichern kann als gebrochen rationale Funktion von s , d.h. als Quotient zweier Polynome in s mit konstanten, reellen Koeffizienten a_μ, b_ν dargestellt werden:

$$\boxed{H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}} \quad (96)$$

(Summenform) oder bei Zerlegung der Polynom in Linearfaktoren

$$\boxed{H(s) = K \frac{(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{om})}{(s - s_{x1})(s - s_{x2}) \dots (s - s_{xn})}} \quad (97)$$

(Produktform) mit der Konstante $K = a_m/b_n$. Die $s_{o\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) in (97) sind die Nullstellen des Zählerpolynoms und damit auch die Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(s)$.

Die $s_{x\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) sind die Nullstellen des Nennerpolynoms und damit die Pole von $H(s)$. Die Übertragungsfunktion $H(s)$ Gl. (96) nähert sich bei hohen Frequenzen dem Wert Ks^{m-n} . $H(s)$ wächst daher für $m > n$ unbegrenzt an. Da dies aber bei einem passiven bzw. stabilen Zweitor aus Energiegründen nicht möglich ist, gilt für die Grade m und n von Zähler- und Nennerpolynom der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines stabilen Zweitors: $m \leq n$. Da die Koeffizienten a_μ, b_ν in

(96) reell sind, sind die Nullstellen s_{op} und die Pole s_{xp} von $\underline{H}(s)$ entweder auch reell, oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren, also spiegelbildlich zur reellen Achse auf.

Für die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ gilt

$$\underline{H}(s) = \underline{H}(\sigma + j\omega) = U(\sigma, \omega) + jV(\sigma, \omega)$$

$$\underline{H}(s^*) = \underline{H}(\sigma - j\omega) = U(\sigma, \omega) - jV(\sigma, \omega)$$

mit dem Realteil U und dem Imaginärteil V . Folglich ist

$$\underline{H}(s^*) = \underline{H}^*(s) \quad (98)$$

Der Realteil einer Übertragungsfunktion ist also eine gerade Funktion, der Imaginärteil eine ungerade Funktion von ω . Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ ist gemäß Gl. (97) bis auf einen konstanten Faktor K durch ihre Pole und Nullstellen in der komplexen s -Ebene eindeutig bestimmt. Die Pole und Nullstellen einer Funktion werden auch als ihre Eigenwerte bezeichnet. Die grafische Darstellung der Pole und Nullstellen einer Übertragungsfunktion in der s -Ebene wird als der Pol-Nullstellen-Plan, kurz PN-Plan, der Übertragungsfunktion bezeichnet (z.B. PN-Plan Bild 44, \times Pol, \circ Nullstelle).

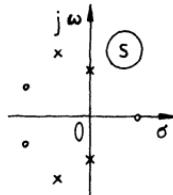


Bild 44 Pol-Nullstellen-Plan,
 \times Pol, \circ Nullstelle

Bei stationären (sinusförmigen) Schwingungen im Zweitor ist $s = j\omega$, und die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ geht wieder in den Übertragungsfaktor $\underline{H}(j\omega)$ über. Wir können dann schreiben

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = e^{-a(\omega)}e^{j\varphi(\omega)} = e^v(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (99)$$

In (99) bedeuten $a(\omega)$ die Dämpfung, $v(\omega) = -a(\omega)$ die "Verstärkung" (auch im Falle $v < 0$) und $\varphi(\omega)$ die Phase. Für $s=j\omega$ folgt aus (98)

$$\underline{H}(-j\omega) = \underline{H}^*(j\omega) \quad (100)$$

Die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ kann auch eine Zweipolfunktion

Z(s) gemäß 1.1.3 sein.

Die Betrachtung des PN-Plans der Übertragungsfunktion H(s) eines Netzwerkes ermöglicht eine rasche und anschauliche Abschätzung der Frequenzabhängigkeit von Betrag und Phase des Übertragungsfaktors H(jω) des Netzwerkes.

Beispiel 9: Gegeben ist die Betriebsschaltung eines Reaktanzweitors Bild 45. Die angegebenen Zahlenwerte sind normierte Werte der Netzwerklemente (vgl. Beispiel 11). Der Betriebsübertragungsfaktor ist

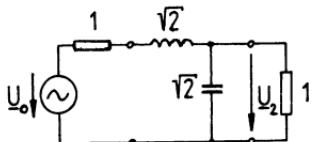


Bild 45 Betriebsschaltung eines Reaktanzweitors

$$\begin{aligned} H_B(j\omega) &= \frac{2U_2}{U_0} \\ &= \frac{2 \frac{1}{j\omega\sqrt{2} + 1}}{1 + j\omega\sqrt{2} + \frac{1}{j\omega\sqrt{2} + 1}} \\ &= \frac{1}{(\omega)^2 + \sqrt{2}\omega + 1} \end{aligned}$$

Die Betriebsübertragungsfunktion ist dann ($j\omega \rightarrow s$)

$$H_B(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} = \frac{1}{(s - s_{x1})(s - s_{x2})}$$

Die Pole folgen aus

$$s_x^2 + \sqrt{2}s_x + 1 = 0$$

also

$$s_{x1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die beiden Pole s_{x1} und s_{x2} sind konjugiert komplex und liegen auf dem Einheitskreis in der linken s -Halbebene (Bild 46).

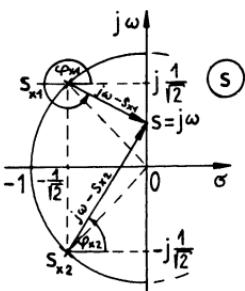


Bild 46 PN-Plan von $H_B(s)$

Bei sinusförmiger Erregung $s = j\omega$ ergibt sich der Betriebsübertra-

gungsfaktor

$$H_B(j\omega) = \frac{1}{(j\omega - s_{x1})(j\omega - s_{x2})} = \frac{1}{A_{x1}e^{j\varphi_{x1}}A_{x2}e^{j\varphi_{x2}}} = \frac{1}{A_{x1}A_{x2}} e^{-j(\varphi_{x1} + \varphi_{x2})}$$

Wächst die Frequenz der sinusförmigen Erregung von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$, so wandert im PN-Plan der Punkt $s = j\omega$ auf der positiven $j\omega$ -Achse von $s = 0$ bis $s = \infty$.

Die Zeiger $j\omega - s_{x1}$ und $j\omega - s_{x2}$ verändern dabei ihre Längen

$A_{xy} = |j\omega - s_{xy}|$ und ihre (im mathematisch positiven Drehsinn gezählten) Winkel φ_{xy} mit der positiv reellen Achse (Bild 46). Auf diese Weise ergeben sich aus dem PN-Plan die Betragsscharakteristik $H_B(\omega)$ und die Phasencharakteristik $\varphi(\omega)$ (Bild 47).

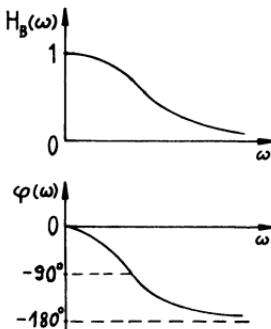


Bild 47 Betrags- und Phasencharakteristik

3.1.3 Eigenschaften der Zweitorübertragungsfunktionen

Für Zweitorübertragungsfunktionen gelten die folgenden grundlegenden Sätze:

1. Die Pole s_{xy} der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines stabilen Zweitors liegen in der linken s -Halbebene oder im Grenzfall auf der $j\omega$ -Achse. (Es gilt $\sigma_{xy} \leq 0$).

Würden die Pole s_{xy} der Übertragungsfunktion eines passiven bzw. stabilen Zweitors in der rechten s -Halbebene ($\sigma_{xy} > 0$) liegen, so würden im Zweitor vorhandene kleinste Spannungen bzw. Ströme (Rauschen) entsprechend dem Faktor $e^{\sigma_{xy}t}$ mit der Zeit t unbegrenzt anwachsen. Pole s_{xy} mit $\sigma_{xy} > 0$ können daher nur bei einem instabilen aktiven Zweitor auftreten. Es kommt in einem solchen Zweitor zur Selbsterregung von Schwingungen. Die angefachten Schwingungen werden jedoch im

technischen aktiven Zweitor z.B. durch vorhandene Nichtlinearitäten begrenzt, so daß die Schwingungen dann sinusförmig werden und damit die Pole zur $j\omega$ -Achse wandern ($\sigma_{xy} = 0$). Konjugiert komplexe Pole von $H(s)$ in der linken s-Halbebene können nur mit RLC-Zweitoren realisiert werden. Die konjugiert komplexen Pole von LC-Zweitoren liegen dagegen auf der $j\omega$ -Achse.

2. Die Nullstellen s_{op} der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines stabilen Zweitors liegen im allgemeinen in der linken s-Halbebene oder auf der $j\omega$ -Achse.
3. Die Pole und im allgemeinen auch die Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines stabilen RC-Zweitors (RC-Glieder, RC-gekoppelte Verstärker) liegen auf der negativ reellen Achse der s-Ebene.

Ein Polynom $P(s)$, das keine Nullstellen in der rechten s-Halbebene besitzt, wird als ein Hurwitz-Polynom bezeichnet. Das Nennerpolynom und im allgemeinen auch das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion $H(s)$ eines stabilen Zweitors sind also Hurwitz-Polynome. Es gibt jedoch eine spezielle Gruppe von passiven Zweitoren, deren Übertragungsfunktionen Nullstellen in der rechten s-Halbebene besitzen: Allpässe (LC- und RC-Allpaß). Ein Allpaß bewirkt nur eine Phasendrehung, jedoch keine Dämpfung des übertragenen Signals, d.h. für ihn gilt $a(\omega) = 0$, $H(\omega) = 1$. Ein Zweitor mit Polen und Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(s)$ nur in der linken s-Halbebene wird als ein Zweitor minimaler Phase bezeichnet. Alle stabilen Zweitore, die nicht Allpässe sind, stellen also Zweitore minimaler Phase dar. Die maximale Phasendifferenz, welche die Übertragungsfunktion eines Zweitors minimaler Phase bei zwei verschiedenen Frequenzen besitzen kann, ist stets kleiner als bei einem allpaßhaltigen Zweitor.

3.2 Frequenzgänge und Bode-Diagramme

3.2.1 Frequenzgänge von Übertragungsgrößen

Wir können für den Übertragungsfaktor eines Zweitors schreiben

$$\begin{aligned}\underline{H}(j\omega) &= K \frac{(j\omega - s_{o1})(j\omega - s_{o2}) \dots}{(j\omega - s_{x1})(j\omega - s_{x2}) \dots} \\ &= K \frac{A_{o1} A_{o2} \dots}{A_{x1} A_{x2} \dots} e^{j(\varphi_{o1} + \varphi_{o2} + \dots - \varphi_{x1} - \varphi_{x2} - \dots)}\end{aligned}\quad (101)$$

In (101) sind K eine Konstante, die A_{op} die Nullstellenabstände zu $j\omega$, die A_{xp} die Polabstände zu $j\omega$ und die φ_{op} , φ_{xp} die entsprechenden zugehörigen Winkel mit der positiv reellen Achse (vgl. Beispiel 9).

Aus (101) folgen die Betragscharakteristik

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = K \frac{|j\omega - s_{o1}| |j\omega - s_{o2}| \dots}{|j\omega - s_{x1}| |j\omega - s_{x2}| \dots} = K \frac{A_{o1} A_{o2} \dots}{A_{x1} A_{x2} \dots} \quad (102)$$

die Verstärkungscharakteristik

$$\begin{aligned}v(\omega)/\text{dB} &= 20 \lg H(\omega) = 20 \lg K + \\ &\quad + 20 \lg |j\omega - s_{o1}| + 20 \lg |j\omega - s_{o2}| + \dots \quad (103) \\ &\quad - 20 \lg |j\omega - s_{x1}| - 20 \lg |j\omega - s_{x2}| - \dots\end{aligned}$$

(bzw. die Dämpfungscharakteristik $a(\omega) = -v(\omega)$),

die Phasencharakteristik

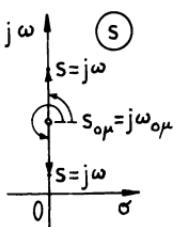
$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \arg \underline{H}(j\omega) = \varphi_{o1}(\omega) + \varphi_{o2}(\omega) + \dots - \varphi_{x1}(\omega) - \varphi_{x2}(\omega) - \dots \\ &= \arctan \frac{\omega - \omega_{o1}}{|\sigma_{o1}|} + \arctan \frac{\omega - \omega_{o2}}{|\sigma_{o2}|} + \dots \quad (104) \\ &\quad - \arctan \frac{\omega - \omega_{x1}}{|\sigma_{x1}|} - \arctan \frac{\omega - \omega_{x2}}{|\sigma_{x2}|} - \dots\end{aligned}$$

und die Gruppenlaufzeitcharakteristik

$$t_g(\omega) = - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{|\sigma_{x1}|}{\sigma_{x1}^2 + (\omega - \omega_{x1})^2} + \frac{|\sigma_{x2}|}{\sigma_{x2}^2 + (\omega - \omega_{x2})^2} + \dots \\
 &\quad - \frac{|\sigma_{o1}|}{\sigma_{o1}^2 + (\omega - \omega_{o1})^2} - \frac{|\sigma_{o2}|}{\sigma_{o2}^2 + (\omega - \omega_{o2})^2} - \dots
 \end{aligned} \tag{105}$$

Besitzt der Übertragungsfaktor z.B. eine Nullstelle $\underline{H} = 0$



(Dämpfungspol $a = \infty$) auf der imaginären Achse bei $s_{op} = j\omega_{op}$ (vgl. 3.6.2), so springt seine Phase an dieser Stelle um -180° (Bild 48). Da der Tangens mit 180° periodisch ist, haben Übertragungsfunktionsnullstellen auf der $j\omega$ -Achse keinen Einfluß auf die Phasencharakteristik $\varphi(\omega)$. An der Übertragungsfunktionsnullstelle $\sigma_{op} = 0, \omega = \omega_{op}$ tritt weiterhin wegen (105) ein Gruppenlaufzeitstob $t_g = -\infty$ auf. Man kann deshalb die Beiträge von Übertragungsfunktionsnullstellen zur Phase und Gruppenlaufzeit fortlassen.

Bild 48 Übertragungsfunktionsnullstelle auf der $j\omega$ -Achse

laufzeit fortlassen.

3.2.2 Bode-Diagramme

Die logarithmischen Frequenzgangdarstellungen

Verstärkung $v(\omega)/\text{dB} = 20 \lg H(\omega)$, aufgetragen über $\lg \omega$ bzw. $\lg(\omega/\omega_E)$,

Phase $\varphi(\omega)$, aufgetragen über $\lg \omega$ bzw. $\lg(\omega/\omega_E)$

mit einer Bezugskreisfrequenz (Eckkreisfrequenz) ω_E werden nach ihrem Begründer als die Bode-Diagramme bezeichnet.

Wir gehen bei der Darstellung der Bode-Diagramme vom PN-Plan der Übertragungsfunktion des Zweitors aus und approximieren die Verstärkungs- (Amplituden-) und Phasencharakteristiken durch die Konstruktion von Asymptoten (Grenzgeraden) und Eckfrequenzen, deren Verläufe und Lagen sich aus dem PN-Plan ergeben. Die grafische Darstellung der wirklichen Frequenzgänge wird hierdurch beträchtlich erleichtert.

Beispiel 10: Gegeben ist der RC-Tiefpaß Bild 49. Der Übertragungsfaktor ist

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2(j\omega)}{\underline{U}_1(j\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

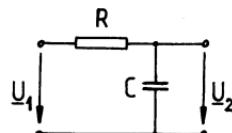


Bild 49 RC-Tiefpaß

mit der Zeitkonstante $T = RC$. Für die Übertragungsfunktion folgt ($j\omega \rightarrow s$)

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{1}{sT + 1}$$

Ein Pol ergibt sich aus $s_x T + 1 = 0$, d.h. er liegt bei $s_x = -1/T$ (Bild 50).

Wir betrachten den Beitrag des reellen Poles s_x zur Verstärkung $v(\omega)$:

$$v_x(\omega)/\text{dB} = 20 \lg H(\omega) = 20 \lg \frac{1}{|j\omega T + 1|} = -20 \lg \sqrt{(\omega T)^2 + 1}$$

Für $\omega T \ll 1$ bzw. $\omega \ll 1/T$ folgt: $v_x(\omega) \rightarrow -20 \lg 1 = 0$. Der Verstärkungsverlauf $v_x(\omega)$ kann also für Kreisfrequenzen $\omega < 1/T$ durch eine Asymptote mit dem Wert 0 dB angenähert werden.

Für $\omega T \gg 1$ bzw. $\omega \gg 1/T$ folgt: $v_x(\omega) \rightarrow -20 \lg(\omega T)$. Wegen

$$20 \lg(10\omega T) - 20 \lg(\omega T) = 20 \lg 10 = 20 \text{ dB}$$

ergibt sich: Der Verstärkungsverlauf $v_x(\omega)$ kann für Kreisfrequenzen $\omega > 1/T$ durch eine Asymptote mit dem Abfall -20 dB/Dekade approximiert werden (Dekade = Frequenzverzehnfachung).

Für die Abweichung der wirklichen Verstärkungskurve vom angenäherten Verlauf folgt am Schnittpunkt $\omega_E = |s_x| = |\sigma_x| = 1/T$ (0 dB) der beiden Asymptoten

$$v_x(\omega_E) = -20 \lg \sqrt{(\omega_E T)^2 + 1} = -10 \lg 2 \approx -3 \text{ dB}$$

d.h. die (maximale) Abweichung beträgt am Schnittpunkt ca.

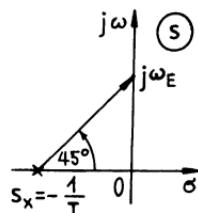


Bild 50 PN-Plan von $\underline{H}(s)$

3 dB. Die Schnittpunktkreisfrequenz

$$\omega_E = 1/T = 1/RC$$

wird als die Eckkreisfrequenz bezeichnet.

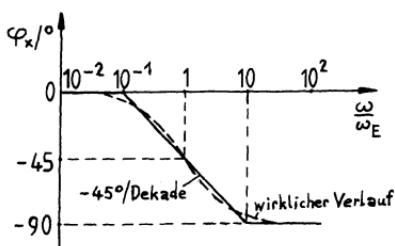
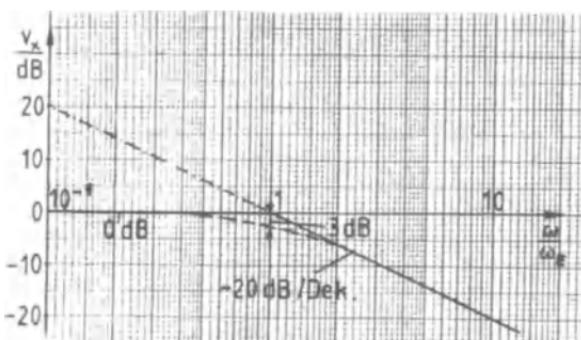


Bild 51 Bode-Diagramme der Verstärkung und Phase des RC-Tiefpasses

Das Bode-Diagramm der Verstärkung $v_x(\omega)$ ist in Bild 51 oben (der wirkliche Verlauf bei $\omega = \omega_E$ strichliert) dargestellt. Für die Phase gilt wegen (104)

$$\varphi_x(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{|G_x|} = -\arctan \frac{\omega}{\omega_E}$$

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle:

ω	$\ll \omega_E$	$0,1 \omega_E$	ω_E	$10 \omega_E$	$\gg \omega_E$
$\varphi_x / {}^\circ$	0	-5,7	-45	-84,3	-90

(Der Winkel $+45^\circ$ für $\omega = \omega_E$ in Bild 50 ist der Winkel des

Nenners des Übertragungsfaktors). Das Bode-Diagramm der Phase $\varphi_x(\omega)$ ist in Bild 51 unten dargestellt. Wir erhalten als Beitrag des reellen Poles s_x zur Phase $\varphi_x(\omega)$ eine Asymptote mit dem Abfall $-45^\circ/\text{Dekade}$ (negative Phasendrehung) und dem Mittelpunkt bei ω_E . Die Phasendrehung setzt eine Dekade unterhalb der Eckkreisfrequenz ω_E ein und ist eine Dekade darüber beendet.

Für die Bode-Diagramme gelten weiterhin die folgenden wichtigen Regeln:

1. Beitrag einer reellen Nullstelle s_0 zur Verstärkung $v(\omega)$:
Für $\omega < \omega_E = |s_0|$: Asymptote mit 0 dB,
für $\omega > \omega_E = |s_0|$: Asymptote mit der
Steigung 20 dB/Dekade .
2. Beitrag einer Nullstelle s_0 auf der negativ reellen Achse zur Phase $\varphi(\omega)$: Asymptote mit der Steigung $45^\circ/\text{Dekade}$ (positive Phasendrehung) und dem Mittelpunkt bei ω_E .
3. Beitrag einer Nullstelle s'_0 auf der positiv reellen Achse zur Phase $\varphi(\omega)$: Asymptote mit dem Abfall $-45^\circ/\text{Dekade}$ und dem Mittelpunkt bei ω_E .

Die Phasendrehung setzt wieder eine Dekade unterhalb ω_E ein und ist eine Dekade darüber beendet.

Die Beiträge konjugiert komplexer Pole und Nullstellen zur Verstärkung und Phase ergeben Asymptoten, deren Abfall bzw. Steigung doppelt so groß ist wie im Falle eines Poles bzw. einer Nullstelle. Man erreicht dann also Flankensteilheiten von $\pm 40 \text{ dB/Dekade}$ und $\pm 90^\circ/\text{Dekade}$. (Das negative Vorzeichen gilt für ein konjugiert komplexes Polpaar, das positive Vorzeichen für ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar, das positive Vorzeichen bei der Phasendrehung allerdings nur für ein "normales", d.h. nicht in der rechten s-Halbebene liegendes Nullstellenpaar).

3.3 Betriebseigenschaften der Filter

3.3.1 Durchlaßbereich und Sperrbereich eines Filters

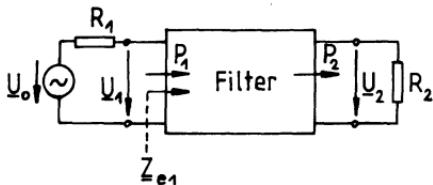


Bild 52 Filter-
betriebsschaltung

Ein Filter (Siebschaltung) ist ein Netzwerk mit meist selektivem Frequenzverhalten, das gewöhnlich zwischen den reellen Abschlußwiderständen R_1 und R_2 betrieben wird (Bild 52). Würde man komplexe Widerstände als Abschlußwiderstände

verwenden, so würden deren Blindkomponenten zusätzliche Resonanzen und damit unerwünschte Siebeigenschaften hervorrufen. (Die stets vorhandenen kleinen Blindkomponenten der ohmschen Abschlußwiderstände müssen bei hohen Frequenzen kompensiert werden). Wir betrachten im folgenden Reaktanzfilter (LC-Filter), das sind Filter, die aus reinen Blindelementen, d.h. verlustlos angenommenen Spulen und Kondensatoren aufgebaut.

Die Grundaufgabe des Filters Bild 52 besteht darin, den Lastwiderstand R_2 durch Vorschalten von Reaktanzen so in den Eingangswiderstand Z_{e1} des Filters zu transformieren, daß Z_{e1} in einem bestimmten Frequenzbereich, dem Durchlaßbereich (DB) des Filters, möglichst gut an den Generatorinnenwiderstand R_1 angepaßt ist (d.h. mit ihm möglichst gut übereinstimmt), und bei allen anderen Frequenzen, dem Sperrbereich (SB) des Filters, ein möglichst großer Unterschied zwischen Z_{e1} und R_1 besteht. Wird das Filter im DB betrieben, so strömt fast die ganze verfügbare Generatorwirkleistung $P_{max} = U_o^2/4R_1$ vom Generator in das Filter ein. (Nur ein sehr geringer Teil der ankommenden Wirkleistung P_{max} wird dann am Filtereingang reflektiert). Die in das Filter einströmende Wirkleistung P_1 ist in diesem Fall also annähernd gleich

P_{\max} , $P_1 \approx P_{\max}$. Dies bedeutet: Der Eingangswiderstand des Filters ist im DB annähernd reell, und zwar ist dann $Z_{e1} \approx R_1$. Da ein verlustloses Zweitor in seinem Innern keine Wirkleistung verbraucht, ist P_1 gleich der zum Lastwiderstand R_2 übertragenen und dort verbrauchten Wirkleistung P_2 , $P_2 = P_1 \approx P_{\max}$. (Das Filter wirkt im DB ähnlich einem idealen Übertrager). Im DB findet im wesentlichen nur eine Phasendrehung des übertragenen Signals statt. Wird dagegen das Filter im SB betrieben, so wird die Generatorwirkleistung P_{\max} größtenteils schon am Filtereingang in den Generator zurückgespeist bzw. reflektiert. Dies bedeutet: Der Eingangswiderstand des Filters ist im SB annähernd imaginär (oder 0 oder ∞), $Z_{e1} \approx jX_{e1}$. Dann gelangt praktisch keine Wirkleistung zum Lastwiderstand R_2 , $P_2 \approx 0$. Die Betriebsdämpfung a_B eines Reaktanzfilters stellt daher eine reine Reflexionsdämpfung (Blindleistungsdämpfung) dar.

Ein reell abgeschlossenes Reaktanzzweitor besitzt einen Durchlaßbereich (DB), wenn sein Eingangswiderstand reell ist, und einen Sperrbereich (SB), wenn sein Eingangswiderstand imaginär ist.

Man definiert den Reflexionsfaktor am Filtereingang

$$\left| Q = \frac{Z_{e1} - R_1}{Z_{e1} + R_1} \right| \quad (106)$$

Für ein ideales Filter folgt aus (106) im DB wegen $Z_{e1} = R_1$ der Reflexionsfaktor $Q = 0$ und im SB wegen $Z_{e1} = jX_{e1}$

$$Q = \left| \frac{jX_{e1} - R_1}{jX_{e1} + R_1} \right| = \frac{\sqrt{X_{e1}^2 + R_1^2}}{\sqrt{X_{e1}^2 + R_1^2}} = 1$$

d.h. im SB erfolgt Totalreflexion der Wirkleistung am Filtereingang.

Der Reflexionsfaktor Q eines Filters ist mit dem Eingangsreflexionsfaktor S_{11} Gl. (88) bzw. (89) eines Zweitors bei wellenwiderstandsangepaßtem Abschluß identisch.

3.3.2 Leistungsbilanz eines Reaktanzfilters

Man stellt sich vor, daß der an ein Filter angeschlossene Generator zunächst einmal die ganze verfügbare Wirkleistung P_{\max} in den Filtereingang einspeist (dies entspricht einer angenommenen Anpassung $Z_{e1} = R_1$ am Filtereingang), anschließend jedoch je nach dem Grad der am Filtereingang vorliegenden Fehlanpassung $Z_{e1} \neq R_1$ ein Teil P_r der Wirkleistung P_{\max} vom Filtereingang in den Generator zurückgespeist bzw. reflektiert wird. Für das Quadrat des Eingangsreflexionsfaktors gilt wegen (88)

$$|\underline{Q}|^2 = S_{11}^2 = \left| \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} \right|^2 = \frac{P_r}{P_{\max}} \quad (107)$$

In (107) sind $P_{\max} = |\underline{a}_1|^2$ die verfügbare Generatorwirkleistung und $P_r = |\underline{b}_1|^2$ die am Filtereingang (Eingangstor) reflektierte Wirkleistung.

Für ein Reaktanzfilter (verlustloses Filter) gilt die Leistungsbilanz

$$P_r + P_2 = P_{\max}$$

bzw.

$$\frac{P_r}{P_{\max}} + \frac{P_2}{P_{\max}} = 1 \quad (108)$$

In (108) ist P_2 die zum Lastwiderstand R_2 übertragene Wirkleistung. Wir können die Leistungsbilanz (108) wegen (107) und (77) auch schreiben

$$|\underline{Q}|^2 + |\underline{H}_B|^2 = 1 \quad (109)$$

oder, wenn wir die Frequenzabhängigkeit der beiden Beträge $\underline{Q} = |\underline{Q}(j\omega)|$ und $\underline{H}_B = |\underline{H}_B(j\omega)|$ hervorheben

$$|\underline{Q}(j\omega)|^2 + |\underline{H}_B(j\omega)|^2 = 1 \quad (109')$$

Die Beziehung (109) bzw. (109') wird auch als die Feldtkeller-Gleichung bezeichnet.

Die Betriebsdämpfung des Filters folgt aus

$$a_B/dB = -20 \lg H_B = -10 \lg H_B^2$$

oder wegen (109)

$$a_B/dB = -10 \lg(1 - \varphi^2) \quad (110)$$

Für ein ideales Filter folgt aus (110) im DB ($\varphi = 0$) $a_B = 0$ und im SB ($\varphi = 1$) $a_B = \infty$.

Als Echodämpfung des Filters wird definiert

$$a_E/dB = -20 \lg \varphi \quad (111)$$

Für ein ideales Filter folgt aus (111) im DB $a_E = \infty$ und im SB $a_E = 0$.

3.3.3 Verluste in Reaktanzfiltern

Die Reaktanzen eines Filters, vor allem die Induktivitäten, enthalten stets Verlustwiderstände. Zur theoretischen Betriebsdämpfung a_B des Filters addiert sich daher eine frequenzabhängige Verlustdämpfung a_v . Die Verlustdämpfung a_v kann im DB des Filters merklich größer als die dort vorhandene Betriebsdämpfung a_B sein und ist daher im DB meist sehr störend. Für die Verlustdämpfung im DB eines Reaktanzfilters gilt näherungsweise

$$a_v/dB \approx \frac{4,343}{Q_0} \omega t_g \quad (112)$$

In (112) sind Q_0 die Güte der Bauelemente bzw. bei einem Bandpaß die Güte der Schwingkreise (diese haben gewöhnlich gleiche Güten) und $t_g = db_B/d\omega$ die Gruppenlaufzeit im Filter. Die Verlustdämpfung a_v stellt im Gegensatz zur Betriebsdämpfung a_B eine Wirkleistungsdämpfung dar, die durch Wirkleistungsverbrauch und Wärmeentwicklung gekennzeichnet ist.

3.4 Normierung und Entnormierung eines Tiefpasses

3.4.1 Tiefpaß-Normierung

Für einen Tiefpaß gilt:

$$\text{DB: } f = 0 \dots f_g$$

$$\text{SB: } f = f_g \dots \infty$$

$f_g = \omega_g / 2\pi$ ist die Grenzfrequenz (Durchlaßgrenze) des Tiefpasses. Sie wird als seine Bezugsfrequenz $f_B = \omega_B / 2\pi$ gewählt.

Zur Erleichterung der numerischen Berechnung von Netzwerkgrößen wird häufig eine Normierung der Netzwerkgrößen vorgenommen. Bei der Frequenznormierung des Tiefpasses wird die normierte Frequenz

$$|\Omega = f/f_B = \omega/\omega_B, f_B = f_g \quad (113)$$

eingeführt. Man kann dann also auch schreiben:

$$\text{DB: } \Omega = 0 \dots 1$$

$$\text{SB: } \Omega = 1 \dots \infty$$

Die Frequenznormierung eines Netzwerkes bewirkt eine Dehnung oder Schrumpfung des Frequenzbereiches der Netzwerkübertragungsfunktion.

Häufig wird auch eine Impedanznormierung eines Netzwerkes durchgeführt. Bei der Impedanznormierung wird der "Impedanzpegel" des Netzwerkes dadurch geändert, daß jede einzelne Impedanz des Netzwerkes durch einen konstanten Bezugswiderstand R_B dividiert bzw. jede einzelne Admittanz mit R_B multipliziert wird. Bei der Impedanznormierung eines Netzwerkes wird die Übertragungsfunktion des Netzwerkes nicht verändert.

Wird eine Tiefpaßschaltung zwischen den beiden reellen Abschlußwiderständen R_1 und R_2 betrieben (Bild 52), so ergeben sich bei ihrer Impedanznormierung die folgenden Beziehungen:

$$\left| \begin{array}{l} r_1 = R_1/R_B = 1 \\ a_i = L_i/L_B \text{ bzw. } a_i = C_i/C_B \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ r_2 = R_2/R_B = R_2/R_1 \end{array} \right. \quad (114)$$

wobei für die Bezugsinduktivität L_B und die Bezugskapazität C_B gilt:

$$L_B = R_B / \omega_B, \quad C_B = 1 / \omega_B R_B \quad (115)$$

Man wählt also für alle normierten Tiefpässe als Bezugswiderstand R_B stets den Generatorinnenwiderstand R_1 . Die Koeffizienten a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) stellen die normierten Induktivitäten und Kapazitäten des Tiefpasses dar und werden als die Tiefpaßkoeffizienten bezeichnet. Sie sind reine Zahlen. Ihre Werte hängen davon ab, wie ein vorgeschriebener Betriebsdämpfungs-, Phasen- oder Gruppenlaufzeitverlauf innerhalb eines Toleranzschemas approximiert werden soll (s. folgende Abschnitte).

Für die Gruppenlaufzeit im Tiefpaß gilt

$$t_g = \frac{db_B}{d\omega} = \frac{db_B}{d\Omega} \frac{d\Omega}{d\omega} \quad (116)$$

Als normierte Gruppenlaufzeit wird definiert

$$T_g = \frac{db_B}{d\Omega} \quad (117)$$

3.4.2 Tiefpaß-Entnormierung

Die Werte einer bestimmten normierten Tiefpaßschaltung, insbesondere die Tiefpaßkoeffizienten a_i , können mit einem Digitalrechner über ein geignetes Programm berechnet werden. Sie werden auch häufig Tabellenwerken (Filterkatalogen) entnommen, wenn Rechnerprogramme nicht zur Verfügung stehen bzw. nicht eingesetzt werden können (s. 3.6). Man ermittelt anschließend die Werte der Frequenzen und der Schaltelemente der wirklichen Tiefpaßschaltung durch Entnormierung:

$$\left| \begin{array}{l} f = \Omega f_B, \quad f_B = f_g \\ R_1 = r_1 R_B = R_B \\ L_i = a_i L_B, \quad C_i = a_i C_B \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ R_2 = r_2 R_B \end{array} \right. \quad (118)$$

Für die Bezugsgrößen L_B und C_B gelten wieder die Beziehungen (115).

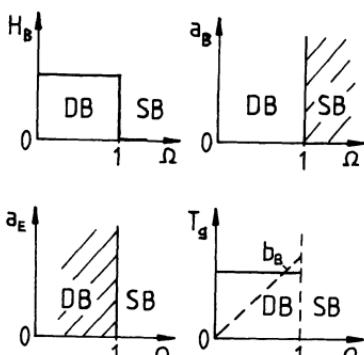
Für die Entnormierung der Gruppenlaufzeit gilt wegen (116) und (117) $t_g = T_g d\Omega/d\omega$, also wegen $\Omega = \omega/\omega_B$, $d\Omega/d\omega = 1/\omega_B$

$$t_g = T_g/\omega_B \quad (119)$$

3.5 Potenztiefpaß (Butterworth-Tiefpaß)

3.5.1 Butterworth-Approximation

In den folgenden Abschnitten wird die Betriebsfiltersynthese (Betriebsparametertheorie der Filter) behandelt, d.i. die Darstellung vorgeschriebener Betriebsgrößencharakteristiken eines Filters durch geeignete Funktionen und die Realisierung dieser Funktionen durch entsprechende Filterschaltungen.



Die angestrebten idealen Frequenzverläufe des Betriebsübertragungsfaktorbeitrages H_B , der Betriebsdämpfung a_B , der Echodämpfung a_E und der Gruppenlaufzeit T_g (bzw. der Betriebsphase b_B) des normierten Tiefpasses sind in Bild 53 dargestellt. Dabei gilt

$$\begin{aligned} a_B(\Omega)/dB &= -20 \lg H_B(\Omega) \\ &= -10 \lg |H_B(j\Omega)|^2 \end{aligned} \quad (120)$$

Bild 53 Ideale Frequenzverläufe der Tiefpaß-Betriebsgrößen

Die idealen Frequenzverläufe der Tiefpaß-Betriebsgrößen können mit einer Schaltung

aus endlich vielen Bauelementen nicht realisiert werden. Realisierbar sind daher nur Approximationen der idealen Frequenzverläufe.

Die typischen Verläufe $H_B(\Omega)$ und $a_B(\Omega)$ bei der Butterworth-

Approximation sind in Bild 54 dargestellt. Die Näherungskurve ist in diesem Fall bei $\Omega = 0$ maximal flach (maximal geeignet). (Vom Dämpfungsverlauf

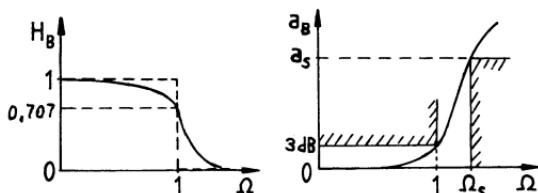


Bild 54 Frequenzverläufe $H_B(\Omega)$ und $a_B(\Omega)$ eines Potenztiefpasses

$a_B(\Omega)$ wird meist die Einhaltung eines vorgegebenen Toleranzschemas gefordert. Die schraffierten Bereiche in Bild 54 sind verboten). Der entsprechende Tiefpaß wird als ein Potenztiefpaß (Butterworth-Tiefpaß) bezeichnet. Die zugehörige Approximationsfunktion lautet

$$|H_B(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + A_{2n}\Omega^{2n}} \quad (121)$$

Die Funktion (121) enthält im Nenner die gerade Potenz $2n$, da das Betragsquadrat als positive Größe eine gerade Funktion von Ω sein muß. Man setzt in (121) gewöhnlich den Koeffizienten $A_{2n} = 1$, so daß dann gilt

$$|H_B(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^{2n}} \quad (122)$$

Die Funktion (122) nähert den idealen Verlauf $H_B(\Omega)$ um so besser an, je größer n gewählt wird. Man setzt in (121) bzw. (122) auch $|K(j\Omega)| = \Omega^n$ und bezeichnet $K(j\Omega)$ als die charakteristische Funktion des Filters.

Aus (120) und (122) folgt

$$a_B/\text{dB} = 10 \lg(1 + \Omega^{2n}) \quad (123)$$

Bei $\Omega = 0$ ($f = 0$) liegt eine $2n$ -fache Anpassungsstelle $a_B = 0$ ($H_B = 1$) und bei $\Omega = \infty$ ($f = \infty$) ein $2n$ -facher Dämpfungspol $a_B = \infty$ ($H_B = 0$). Bei $\Omega = 1$ ($f = f_g$) ist $a_B = 10 \lg 2 \approx 3 \text{ dB}$ ($H_B = 1/\sqrt{2} = 0,707$). Die Grenzfrequenz f_g ist also beim Potenzfilter mit der 3 dB-Grenzfrequenz identisch.

Das Betragsquadrat des Betriebsübertragungsfaktors $H_B(j\Omega)$ ist

$$|H_B(j\Omega)|^2 = H_B(j\Omega)H_B^*(j\Omega)$$

wobei $H_B^*(j\Omega)$ der konjugiert komplexe Betriebsübertragungsfaktor ist. Wegen (100) gilt

$$H_B(-j\Omega) = H_B^*(j\Omega) \quad (124)$$

Wir können daher auch schreiben

$$|H_B(j\Omega)|^2 = H_B(j\Omega)H_B(-j\Omega)$$

Hiermit wird aus Gl. (122)

$$H_B(j\Omega)H_B(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (j\Omega/j)^{2n}}$$

Wir verallgemeinern diese Beziehung durch den Übergang von der $j\Omega$ -Achse in die komplexe p-Ebene:

$$j\Omega \rightarrow p = \frac{s}{\omega_B} = \Sigma + j\Omega \quad (125)$$

p ist die normierte komplexe Frequenz. Dann ergibt sich

$$H_B(p)H_B(-p) = \frac{1}{1 + (p/j)^{2n}} \quad (126)$$

Die Pole der komplexen Produktfunktion $H_B(p) \cdot H_B(-p)$ in der p-Ebene sind die Nullstellen des Nenners von (126). Sie ergeben sich als die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$1 + (p_v/j)^{2n} = 0$$

Hieraus folgt $p_v = j\sqrt[2n]{-1}$ oder

$$p_v = e^{j\frac{\pi}{2}(1 + \frac{2v-1}{n})} \quad (v=1, 2, \dots, 2n) \quad (127)$$

Alle $2n$ Pole Gl. (127) liegen auf dem Einheitskreis ($|p_v|=1$) in der p-Ebene. Auf der $j\Omega$ -Achse treten keine Pole auf. Die $2n$ Pole liegen daher zu gleichen Teilen (je n) in der linken und rechten p-Halbebene. Man ordnet die n Pole der linken p-Halbebene der Betriebsübertragungsfunktion $H_B(p)$ und die n Pole der rechten p-Halbebene der physikalisch nicht reali-

sierbaren Funktion $\underline{H}_B(-p)$ zu. Hierdurch wird gewährleistet, daß das Nennerpolynom von $\underline{H}_B(p)$ ein Hurwitz-Polynom und damit $\underline{H}_B(p)$ eine physikalisch (d.h. durch ein Netzwerk) realisierbare Funktion ist (vgl. 3.1.3). Man streicht also die Hälfte aller Pole und ordnet die in der linken p-Halbebene übrigbleibenden n Pole der physikalischen Übertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ zu. Die Pole von $\underline{H}_B(p)$ (mit $\sum \text{Re}(p_i) < 0$) folgen dann aus

$$p_v = e^{j\frac{\pi}{2}(1 + \frac{2v-1}{n})} \quad (v=1,2,\dots,n) \quad (128)$$

Wir können für die Betriebsübertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ mit ihren n Polen bei Berücksichtigung von (126) in der Produktform ansetzen:

$$\underline{H}_B(p) = \frac{1}{\underline{P}_B(p)} = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)} \quad (129)$$

$\underline{P}_B(p)$ ist die Betriebsdämpfungsfunktion. Setzen wir die Nullstellen (128) in (129) ein, so ergibt sich allgemein

$$\underline{H}_B(p) = \frac{1}{\underline{P}_n(p)} = \frac{1}{p^n + b_{n-1}'p^{n-1} + \dots + b_1'p + 1} \quad (130)$$

Die im Nenner von (130) stehenden Polynome $\underline{P}_n(p)$ werden als die Butterworth-Polynome bezeichnet. Man erhält für z.B. $n=3$:

$$\begin{aligned} \underline{H}_B(p) &= \frac{1}{(p - e^{j2\pi/3})(p + 1)(p - e^{j4\pi/3})} \\ &= \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1} \end{aligned}$$

Die ersten vier Butterworth-Polynome sind in der Tafel 6 angegeben.

Tafel 6 Butterworth-Polynome

- n = 1: $\underline{P}_1(p) = p + 1$
 - 2: $\underline{P}_2(p) = p^2 + \sqrt{2}p + 1$
 - 3: $\underline{P}_3(p) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1$
 - 4: $\underline{P}_4(p) = p^4 + 2,6131p^3 + 3,4142p^2 + 2,6131p + 1$
- (131)

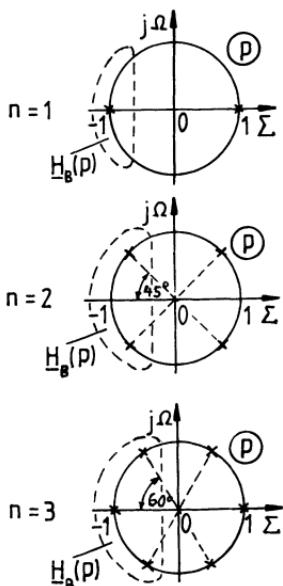


Bild 55 Pole von
 $H_B(p)H_B(-p)$ für
 $n = 1, 2, 3$ beim
 Potenztiefpaß

wurden darstellen muß. Wegen (106) gilt

$$\underline{Q}(p) = \frac{\underline{Z}_{e1}(p) - R_1}{\underline{Z}_{e1}(p) + R_1} \quad (133)$$

Man ermittelt aus (133) die normierte Eingangsimpedanzfunktion

$$\underline{z}_{e1}(p) = \frac{\underline{Z}_{e1}(p)}{R_1} = \frac{1 + \underline{Q}(p)}{1 - \underline{Q}(p)} \quad (134)$$

Die Betriebsübertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ besitzt wegen (129) bzw. (130) n Nullstellen bei $p = \infty$, das sind die Übertragungsfunktionsnullstellen. Diese stellen zugleich die Pole der Betriebsdämpfungsfunktion $\underline{D}_B(p)$ dar, das sind die Dämpfungsfunktionspole. Man spaltet deshalb von der Zweipol-

Die Polkonfigurationen der komplexen Produktfunktion $\underline{H}_B(p) \cdot \underline{H}_B(-p)$ für $n = 1, 2, 3$ sind in Bild 55 dargestellt (vgl. für $n = 2$ auch Bild 46). Die Pole befinden sich im Winkelabstand π/n auf dem Einheitskreis in der p -Ebene. Bei $p = \pm 1$ liegen stets Pole für n ungerade, dagegen keine Pole für n gerade.

3.5.2 Synthese von Potenztiefpässen

Aus der Leistungsbilanz (109') eines Reaktanzfilters wird in der p -Ebene

$$\underline{Q}(p)\underline{Q}(-p) + \underline{H}_B(p)\underline{H}_B(-p) = 1 \quad (132)$$

Man kann aus der vorgegebenen Betriebsübertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ mit Hilfe von Gl. (132) die komplexe Produktfunktion $\underline{Q}(p) \cdot \underline{Q}(-p)$ ermitteln. Man bestimmt anschließend die Reflexionsfunktion $\underline{Q}(p)$, wobei der Nenner von $\underline{Q}(p)$ ein Hurwitz-Polynom darstellen muß. Wegen (106) gilt

funktion $z_{e1}(p)$ bei $p = \infty$ abwechselnd den Pol der jeweiligen Widerstandsfunktion (L in Serie) und den Pol der jeweiligen Leitwertfunktion (C parallel) ab (die Existenz beider Polarten bedeutet das Auftreten von Dämpfungsfunktionspolen) und erhält dann einen Kettenbruch von der Form

$$z_{e1}(p) = a_1 p + \frac{1}{a_2 p + \frac{1}{a_3 p + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n + 1}}}} \quad (135)$$

Die zur Kettenbruchentwicklung (135) gehörige Zweipolschaltung ist eine LC-Kettenbruchschaltung, 1. Cauer-Form mit einem ohmschen Widerstand $r = R/R_B = 1$ am Schaltungsende (vgl. 1.3.1). Das Verfahren liefert also zum Schluß die Zweipolfunktion $z_{e1}(p)$ Gl. (134), die gemäß (135) in einen Kettenbruch entwickelt und als Kettenbruchschaltung realisiert wird. Das gegebene Zweitorproblem wird auf diese Weise auf die Lösung eines Zweipolproblems zurückgeführt. Man erhält

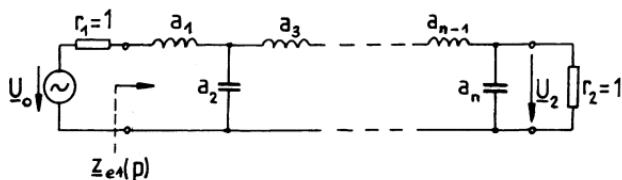


Bild 56 Betriebsschaltung eines Potenztiefpasses

die entsprechende Zweitorbetriebsschaltung, indem man an den Eingang der erhaltenen Kettenbruchschaltung einen Generator mit der Quellenspannung U_o und dem Innenwiderstand $r_1 = R_1/R_B = 1$ anschließt und die Ausgangsspannung U_2 am Abschlußwiderstand $r_2 = R_2/R_B = 1$ abgreift (Bild 56 für n gerade). Für die Betriebsdämpfungsfunktion $D_B(p)$ Gl. (129) bzw. (130) gilt wegen (135):

Der Grad (die Ordnung) der Betriebsdämpfungsfunktion $D_B(p)$ ist gleich der Anzahl der unabhängigen Reaktanzen des zugehörigen Tiefpasses.

Der Tiefpaß besitzt dann den Grad (die Ordnung) n.

Der Eingangswiderstand \underline{Z}_{e1} der Schaltung Bild 56 und der Eingangswiderstand \underline{Z}'_{e1} der dazu dualen Schaltung stehen in dem Zusammenhang

$$\underline{Z}_{e1} \underline{Z}'_{e1} = R_1^2 \quad (136)$$

bzw. normiert

$$\frac{\underline{Z}_{e1} \underline{Z}'_{e1}}{R_1 R_1} = \underline{z}_{e1} \underline{z}'_{e1} = 1 \quad (137)$$

Die normierte Eingangsadmittanzfunktion der dualen Schaltung ist

$$\underline{Y}'_{e1}(p) = \underline{Y}'_{e1}(p) R_1 = 1/\underline{z}'_{e1}$$

oder wegen (137)

$$|\quad \underline{Y}'_{e1}(p) = \underline{z}_{e1}(p) \quad (138)$$

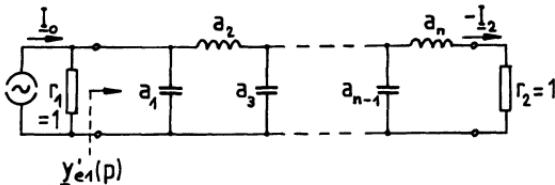


Bild 57 Zur Schaltung Bild 56 duale Schaltung

Wegen (138) und (135) ergibt sich die zur Schaltung Bild 56 duale Schaltung Bild 57. Die duale Schaltung besitzt die gleiche Betriebsübertragungsfunktion wie die ursprüngliche Schaltung

$$\underline{H}'_{B}(p) = \underline{H}_B(p) \quad (139)$$

Dies folgt aus einer elementaren Berechnung der Betriebsübertragungsfaktoren der beiden Tiefpaßschaltungen Bilder 56 und 57 ($2\underline{U}_2/\underline{U}_0$ bzw. $2(-\underline{I}_2)/\underline{I}_0$). Die zu einer gegebenen Schaltung duale Schaltung weist also das gleiche Übertragungsverhalten bezüglich der Betriebsgrößen $a_B(\Omega)$, $b_B(\Omega)$ und $T_g(\Omega)$ auf.

Die Butterworth-Approximation liefert eine maximal flache Annäherung an den idealen Dämpfungsverlauf im DB bei $\Omega = 0$ ("maximal flacher Tiefpaß"). Die sich ergebende Dämpfungskurvenflanke ist relativ steil. Gibt man auf den Eingang eines Potenztiefpasses einen Spannungssprung, so tritt in der Sprungantwort ein merkliches Überschwingen auf (Bild 58). Will man jedoch sehr steile Dämpfungskurvenflanken erzielen, wie z.B. in einem Hochfrequenz-Nachrichtenübertragungssystem, so erfordern die Potenzfilter einen relativ hohen Aufwand, d.h. eine größere Anzahl von Reaktanzen als einige andere Filtertypen.

Beispiel 11: Ein Potenztiefpaß zweiten Grades ($n = 2$) besitzt die Betriebsübertragungsfunktion

$$H_B(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}$$

Wegen (132) folgt

$$\begin{aligned} Q(p)Q(-p) &= 1 - H_B(p)H_B(-p) \\ &= 1 - \frac{1}{(p^2 + \sqrt{2} p + 1)(p^2 - \sqrt{2} p + 1)} \\ &= 1 - \frac{1}{p^4 + 1} = \frac{p^4}{p^4 + 1} \\ &= \frac{p^4}{(p^2 + \sqrt{2} p + 1)(p^2 - \sqrt{2} p + 1)} \end{aligned}$$

also

$$Q(p) = \frac{p^2}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}$$

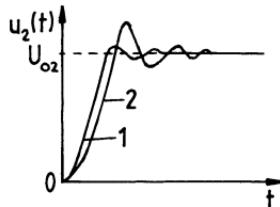


Bild 58 Sprungantwort beim Potenz- (1) und Tschebyscheff-Tiefpaß (2)

$$z_{e1}(p) = \frac{1 + Q(p)}{1 - Q(p)} = \frac{2p^2 + \sqrt{2}p + 1}{\sqrt{2}p + 1}$$

Wir führen eine Kettenbruchentwicklung von $z_{e1}(p)$ durch:

$$\begin{array}{r} \frac{\sqrt{2}p}{1} \\ (-) \frac{2p^2 + \sqrt{2}p}{2p^2 + \sqrt{2}p + 1} \\ \hline 1 | \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{2}p + 1} \\ \frac{\sqrt{2}p}{1} \\ \hline 1 | \frac{1}{0} \end{array}$$

Wir erhalten also

$$z_{e1}(p) = \sqrt{2}p + \frac{1}{\sqrt{2}p + 1}$$

Durch Vergleich mit (135) ergeben sich die Tiefpaßkoeffizienten $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$. Die Tiefpaßreaktanzen folgen dann aus $L_1 = a_1 L_B$, $C_2 = a_2 C_B$ mit L_B und C_B gemäß (115). Die zugehörige Tiefpaßschaltung wird durch Bild 56 für $i = 1, 2$ dargestellt.

Für die duale Schaltung gilt wegen (138)

$$y'_{e1}(p) = \sqrt{2}p + \frac{1}{\sqrt{2}p + 1}$$

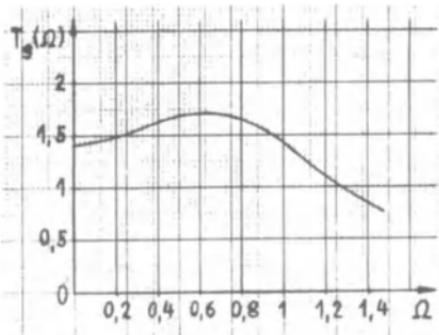


Bild 59 Verlauf $T_g(\Omega)$ des Potenz-

Hieraus ergeben sich die Koeffizienten $a_1 = a_2 = \sqrt{2}$ und die Reaktanzen $C'_1 = a_1 C_B$, $L'_2 = a_2 L_B$ des zugehörigen Tiefpasses (Schaltung Bild 57 für $i = 1, 2$).

Für die normierte Gruppenlaufzeit gilt wegen (105)

$$T_g = \frac{db_B}{d\Omega} =$$

$$= \frac{|\Sigma_{x1}|}{\sum_{x1}^2 + (\Omega - \Omega_{x1})^2} + \frac{|\Sigma_{x2}|}{\sum_{x2}^2 + (\Omega - \Omega_{x2})^2}$$

mit den beiden Polen

$$p_{x1,2} = \Sigma_{x1,2} + j\Omega_{x1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(vgl. Beispiel 9), also

$$T_g = T_{gx1} + T_{gx2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{0,5 + (\Omega - \frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{0,5 + (\Omega + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$

Die auf Grund dieser Beziehung berechnete Gruppenlaufzeitcharakteristik $T_g(\Omega)$ ist in Bild 59 dargestellt.

3.6 Tschebyscheff- und Cauer-Tiefpaß

3.6.1 Tschebyscheff-Tiefpaß

Die typischen Verläufe $H_B(\Omega)$ und $a_B(\Omega)$ bei der Tschebyscheff-Approximation sind in Bild 60 dargestellt. Die Nähe-

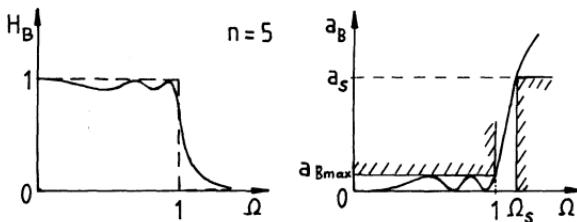


Bild 60 Frequenzverläufe $H_B(\Omega)$ und $a_B(\Omega)$ eines Tschebyscheff-Tiefpasses

rungskurve schwankt in diesem Fall in einem bestimmten Bereich (hier: DB) gleichmäßig innerhalb eines vorgegebenen Toleranzstreifens. Der entsprechende Tiefpaß wird als ein Tschebyscheff-Tiefpaß bezeichnet. Die Approximationsfunktion ist

$$\left| H_B(j\Omega) \right|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)} \quad (140)$$

In (140) sind $\varepsilon > 0$ eine reelle Konstante und $T_n(\Omega)$ eine Tschebyscheff-Funktion n.Grades. Die Tschebyscheff-Funktionen lauten in trigonometrischer Darstellung:

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega) & \dots | \Omega | \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{Arccosh} \Omega) & \dots | \Omega | \geq 1 \end{cases} \quad (141)$$

Sie können auch als Polynome dargestellt werden und werden dann als die Tschebyscheff-Polynome bezeichnet. Die ersten fünf Tschebyscheff-Polynome sind in der Tafel 7 zusammengestellt.

Tafel 7 Tschebyscheff-Polynome

$$n = 1: T_1(\Omega) = \Omega$$

$$2: T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

$$3: T_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$

$$4: T_4(\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$$

$$5: T_5(\Omega) = 16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$$

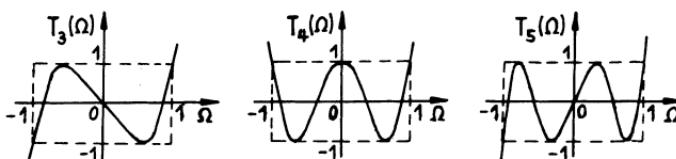


Bild 61 Verläufe der Tschebyscheff-Polynome $T_3(\Omega)$, $T_4(\Omega)$ und $T_5(\Omega)$

Die Verläufe $T_3(\Omega)$, $T_4(\Omega)$ und $T_5(\Omega)$ sind in Bild 61 dargestellt. Für $\Omega = \pm 1$ ist $|T_n(\Omega)| = 1$. Die Polynome $T_n(\Omega)$ oszillieren im Bereich $-1 \leq \Omega \leq +1$ ($n+1$)-mal zwischen -1 und +1. $|T_n(\Omega)|$ wächst für $|\Omega| > 1$ (SB) monoton gegen ∞ , wobei die Steigung mit wachsendem n rasch zunimmt.

Wegen (120) und (140) folgt

$$a_B/\text{dB} = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)] \quad (143)$$

Bei $\Omega = 1$, $f = f_g$ folgt aus (143) wegen $T_n(1) = 1$

$$a_{B\max}/\text{dB} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2) \quad (144)$$

d.i. die Dämpfung an der Durchlaßgrenze, die ein Dämpfungsmaximum im dB darstellt. Alle im dB auftretenden Dämpfungsmaxima sind gleich hoch (Bild 60), ihre Höhe wird durch ε bestimmt. Im dB tritt also eine gleichmäßige Welligkeit auf.

Aus (140) folgt in der p-Ebene die komplexe Approximationsfunktion

$$\underline{H}_B(p)\underline{H}_B(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(p/j)} \quad (145)$$

Die Pole von $\underline{H}_B(p)\underline{H}_B(-p)$ ergeben sich aus

$$1 + \varepsilon^2 T_n^2(p_v/j) = 0$$

Hieraus folgt

$$T_n(p_v/j) = \cos(n \operatorname{arc cos} \frac{p_v}{j}) = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$$

Die Substitution $w_v = u_v + j v_v = \operatorname{arc cos} \frac{p_v}{j}$ ergibt

$$\begin{aligned} T_n(p_v/j) &= \cos n w_v = \cos(n u_v + j n v_v) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \\ &= \cos n u_v \cosh n v_v - j \sin n u_v \sinh n v_v \end{aligned}$$

Die Trennung in Real- und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} \cos n u_v \cosh n v_v &= 0 \\ \sin n u_v \sinh n v_v &= \mp \frac{1}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (146)$$

Da $\cosh n v_v \neq 0$ für beliebige Werte v_v ist, muß $\cos n u_v = 0$ gelten, also

$$u_v = \frac{2v - 1\pi}{2n} \quad (v=1, 2, \dots, 2n) \quad (147)$$

Wegen $\sin n u_v = \pm 1$ folgt dann aus der zweiten Gleichung (146) $\sinh n v_v = \pm \frac{1}{\varepsilon}$ oder

$$v_v = \pm \frac{1}{n} \operatorname{Ar sinh} \frac{1}{\varepsilon} \quad (148)$$

Durch Rücksubstitution ergibt sich

$$\begin{aligned} p_v &= \sum_v + j \Omega_v = j \cos w_v = j \cos(u_v + j v_v) \\ &= j \cos u_v \cosh v_v + \sin u_v \sinh v_v \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Pole der komplexen Produktfunktion $\underline{H}_B(p) \cdot \underline{H}_B(-p)$ Gl. (145) sind also wegen (147) und (148)

$$\Sigma_v = \pm \sin\left(\frac{2v-1}{2n}\pi\right) \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{Ar} \sinh \frac{1}{\epsilon}\right) \quad (v=1, 2, \dots, 2n) \quad (149)$$

$$\Omega_v = \cos\left(\frac{2v-1}{2n}\pi\right) \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{Ar} \sinh \frac{1}{\epsilon}\right)$$

Aus (149) folgt

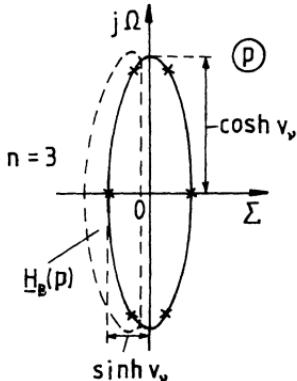


Bild 62 Pole von $\underline{H}_B(p) \underline{H}_B(-p)$ für $n=3$ beim Tschebyscheff-Tiefpaß

$$\frac{\Sigma_v^2}{\sinh^2 v_v} + \frac{\Omega_v^2}{\cosh^2 v_v} = 1$$

d.i. die Gleichung einer Ellipse mit der reellen (kleinen) Halbachse $\sinh v_v$ und der imaginären (großen) Halbachse $\cosh v_v$. Alle Pole Gl. (149) liegen auf dieser Ellipse (Bild 62 für $n=3$). Die Pole der linken p -Halbebene werden wieder der Betriebsübertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ zugeordnet. Die Pole von $\underline{H}_B(p)$ folgen daher aus

$$\begin{cases} \Sigma_v = - \sin\left(\frac{2v-1}{2n}\pi\right) \sinh\left(\frac{1}{n} \operatorname{Ar} \sinh \frac{1}{\epsilon}\right) \\ \Omega_v = \cos\left(\frac{2v-1}{2n}\pi\right) \cosh\left(\frac{1}{n} \operatorname{Ar} \sinh \frac{1}{\epsilon}\right) \end{cases} \quad (v=1, 2, \dots, n) \quad (150)$$

Der Koeffizient eines Tschebyscheff-Polynoms $T_n(\Omega)$ bei der höchsten Ω -Potenz ist gemäß (142) 2^{n-1} . Wir können daher für die Betriebsübertragungsfunktion $\underline{H}_B(p)$ bei Berücksichtigung von (145) ansetzen:

$$\underline{H}_B(p) = \frac{1}{D_B(p)} = \frac{1}{\epsilon 2^{n-1} (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (151)$$

Für z.B. $\epsilon = 0,5$ ergibt sich

$$n = 1: D_B(p) = 0,5p + 1$$

$$2: D_B(p) = p^2 + 1,1118p + 1,118$$

$$3: D_B(p) = 2p^3 + 2p^2 + 2,5p + 1$$

Für Tschebyscheff-Tiefpässe mit n ungerade gilt daher $r_2 = 1$ (bei $\Omega = 0$ ist $a_B = 0$), für Tschebyscheff-Tiefpässe mit n gerade dagegen $r_2 \neq 1$ (bei $\Omega = 0$ ist $a_B = a_{B\max}$). Anstelle der Konstante ε wird häufig der im DB maximal zugelassene Reflexionsfaktor Q_{\max} angegeben, d.i. der Reflexionsfaktor an der Durchlaßgrenze $\Omega = 1$. Wir können für das Dämpfungsmaximum im DB anstelle von (144) wegen (110) schreiben

$$a_{B\max}/dB = -10 \lg(1 - Q_{\max}^2) \quad (152)$$

Für den Zusammenhang zwischen ε und Q_{\max} gilt wegen (144) und (152)

$$Q_{\max} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + 1}} \quad (153)$$

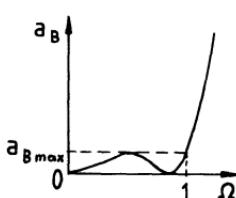
Man kann anstelle von $a_{B\max}$ auch die im DB mindestens erforderliche Echodämpfung angeben:

$$a_{Emin}/dB = -20 \lg Q_{\max} \quad (154)$$

Die Tschebyscheff-Filter liefern bei gleichem Aufwand steilere Dämpfungskurvenflanken als die Potenzfilter. Sie zeichnen sich außerdem durch sehr geringe Werte der Dämpfungsmaxima im DB aus. Das Einschwingverhalten der Tschebyscheff-Filter ist jedoch schlechter als das der entsprechenden Potenzfilter, und zwar tritt in der Sprungantwort ein starkes Überschwingen auf (Bild 58).

Für normierte Potenz- und Tschebyscheff-Tiefpässe liegen Filter-Kataloge vor, die berechnete Schaltungen bis zum Grad $n = 15$ und auch die normierte Gruppenlaufzeit enthalten ([16]. Die normierte Gruppenlaufzeit ist hierin durch $T_g = \frac{1}{2\pi} dB_B/d\Omega$ definiert. Aus [16] ist die Tabelle Tafel 8 entnommen).

Tafel 8 Tschebyscheff-Tiefpass mit $a_{Emin} = 14 \text{ dB}$ (nach G. Pfitzenmaier)



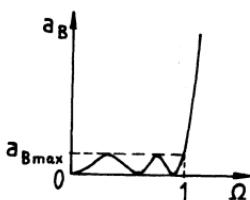
n = 3:

$$a_1 = a_3 = 1,187978$$

$$a_2 = 1,154234$$

a_S/dB	Ω_S	a_S/dB	Ω_S	a_S/dB	Ω_S
3	1,3013	20	2,4115	36	4,3213
6	1,4779	22	2,5887	38	4,6571
8	1,5902	24	2,7808	40	5,0204
10	1,7057	26	2,9891	42	5,4132
12	1,8273	28	3,2148	44	5,8379
14	1,9572	30	3,4594	46	6,2970
16	2,0970	32	3,7242	48	6,7932
18	2,2480	34	4,0110	50	7,3294

n = 5:



$$a_1 = a_5 = 1,300426$$

$$a_2 = a_4 = 1,345877$$

$$a_3 = 2,127107$$

a_S/dB	Ω_S	a_S/dB	Ω_S	a_S/dB	Ω_S
3	1,1052	22	1,5004	40	2,1094
6	1,1641	24	1,5538	42	2,1972
8	1,2007	26	1,6105	44	2,2897
10	1,2376	28	1,6705	46	2,3870
12	1,2757	30	1,7340	48	2,4894
14	1,3157	32	1,8011	50	2,5970
16	1,3579	34	1,8721	52	2,7102
18	1,4026	36	1,9470	54	2,8291
20	1,4501	38	2,0260	56	2,9540

3.6.2 Cauer-Tiefpaß

Bei der Approximation nach W. Cauer wird der Dämpfungsverlauf nicht nur im DB, sondern auch im SB im Tschebyscheffschen Sinne angenähert. Bei einem Cauer-Tiefpaß (elliptischer Tiefpaß, engl. elliptic lowpass filter) sind

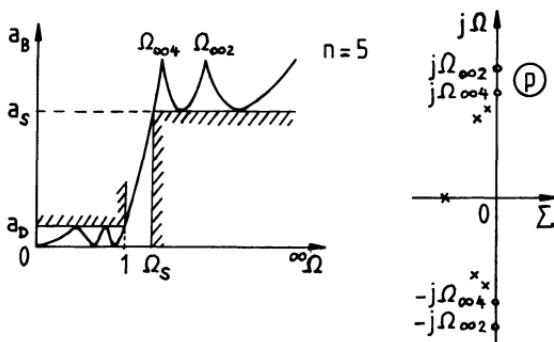


Bild 63 Frequenzverlauf $a_B(\Omega)$ und PN-Plan eines Cauer-Tiefpasses

daher Dämpfungspole $a_B = \infty$ auch bei endlichen Frequenzen $\Omega_{\infty 2v}$ vorhanden. Die Sperrdämpfung unterschreitet ab einer bestimmten normierten Frequenz Ω_S einen Mindestwert a_S nicht (Bild 63 links).

Beim Cauer-Tiefpaß treten wegen des Vorhandenseins von Dämpfungspolen bei endlichen Frequenzen Dämpfungsfunktionspole bzw. Übertragungsfunktionsnullstellen auf der $j\Omega$ -Achse auf. Die Betriebsübertragungsfunktion des Cauer-Tiefpasses besitzt daher für n ungerade die Form

$$\underline{H}_B(p) = \frac{1}{\underline{D}_B(p)} = K \frac{(p^2 + \Omega_{\infty 2}^2)(p^2 + \Omega_{\infty 4}^2) \dots (p^2 + \Omega_{\infty n-1}^2)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \quad (155)$$

Die Übertragungsfunktionsnullstellen liegen also bei $p_v = \pm j\Omega_{\infty 2v}$ (s. PN-Plan Bild 63 rechts).

Zur Realisierung der Dämpfungspole bei den Frequenzen $\Omega_{\infty 2v}$

werden in einem Cauer-Tiefpaß Parallelschwingkreise in Längszweigen oder Serienschwingkreise in Querzweigen verwendet.

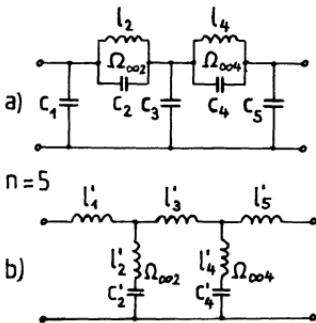


Bild 64 a) Cauer-Tiefpaß,
b) duale Schaltung

Bild 64 b schließt das Filter bei seiner Resonanzfrequenz $\Omega_{\infty 2} = 1/\sqrt{l_2' c_2'}$ kurz und erzeugt dadurch bei dieser Frequenz ebenfalls einen Dämpfungspol. Der zweite Dämpfungspol im Endlichen liegt bei der normierten Frequenz $\Omega_{\infty 4} = 1/\sqrt{l_4' c_4'} = 1/\sqrt{l_4 c_4}$. Ein dritter Dämpfungspol liegt bei $\Omega = \infty$. Die Berechnung der Cauer-Filter ist äußerst aufwendig, es müssen dabei elliptische Integrale ausgewertet werden. Man verwendet als Maß für die normierte Sperrfrequenz Ω_S den Modulwinkel Θ° der Jakobischen elliptischen Funktionen. Für n ungerade gilt

$$\sin \Theta^{\circ} = 1/\Omega_S = f_B/f_S \quad (156)$$

Die Cauer-Filter liefern die größten Flankensteilheiten der Dämpfungskurven bei geringstem Bauelementeaufwand und sind deshalb von großer praktischer Bedeutung. Ihr Einschwingverhalten ist allerdings relativ schlecht. Es sind Filterkataloge mit berechneten Cauer-Tiefpaßschaltungen bis zum Grad $n = 15$ erstellt worden ([17]. Hieraus ist die Tabelle Tafel 9 entnommen).

Tafel 9 Cauer-Tiefpas mit $n = 5$, $\varrho_{\max} = 20\%$ (C 0520)
für $r_1 = r_2 = 1$ (nach R. Saal)

Der zugehörige prinzipielle Dämpfungsverlauf $a_B(\Omega)$
ist in Bild 63 links dargestellt.

$\Theta/^\circ$	a_S/dB	ν	$c_{2\nu-1}$ $1_{2\nu-1}$	$1_{2\nu}$ $c_{2\nu}'$	$c_{2\nu}$ $1_{2\nu}'$	$\Omega_{\infty 2\nu}$
35	54,3	1	1,217570	1,242902	0,103631	2,786358
		2	1,867730	1,056475	0,286708	1,816980
		3	1,066140			
36	53,0	1	1,212444	1,236694	0,110192	2,708909
		2	1,853072	1,040107	0,306140	1,772152
		3	1,052443			
37	51,7	1	1,207143	1,230276	0,117011	2,635631
		2	1,838057	1,023324	0,326535	1,729930
		3	1,038351			
38	50,5	1	1,201662	1,223643	0,124099	2,566192
		2	1,822691	1,006131	0,347948	1,690112
		3	1,023860			
39	49,3	1	1,195999	1,216790	0,131462	2,500295
		2	1,806979	0,988531	0,370440	1,652616
		3	1,008970			
40	48,1	1	1,190149	1,209713	0,139113	2,437673
		2	1,790929	0,970531	0,394079	1,616977
		3	0,993676			
41	46,9	1	1,184108	1,202406	0,147060	2,378086
		2	1,774545	0,952134	0,418937	1,583348
		3	0,977977			
42	45,7	1	1,177872	1,194863	0,155315	2,321314
		2	1,757836	0,933347	0,445098	1,551495
		3	0,961868			
43	44,6	1	1,171436	1,187077	0,163892	2,267159
		2	1,740808	0,914175	0,472653	1,521297
		3	0,945347			
44	43,5	1	1,164795	1,179043	0,172802	2,215442
		2	1,723468	0,894623	0,501703	1,492645
		3	0,928408			
45	42,4	1	1,157944	1,170751	0,182062	2,165997
		2	1,705826	0,874698	0,532362	1,465437
		3	0,911047			
46	41,3	1	1,150876	1,162195	0,191687	2,118676
		2	1,687889	0,854408	0,564757	1,439583
		3	0,893259			
47	40,2	1	1,143585	1,153364	0,201694	2,073339
		2	1,669667	0,833758	0,599029	1,414999
		3	0,875038			
48	39,2	1	1,136066	1,144250	0,212103	2,029861
		2	1,651170	0,812756	0,635338	1,391610
		3	0,856377			
49	38,2	1	1,128310	1,134841	0,222934	1,988127
		2	1,632407	0,791412	0,673864	1,369345
		3	0,837269			

3.7 Bessel-Tiefpaß

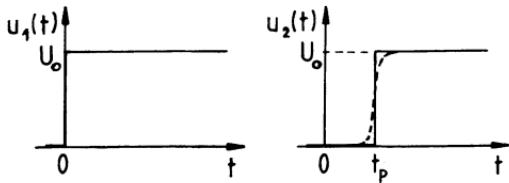


Bild 65 Spannungssprung und Sprungantwort beim Bessel-Tiefpaß

Wird an den Eingang eines Netzwerks der Spannungssprung $u_1(t) = U_0 \sigma(t)$ mit der Sprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \dots t < 0 \\ 1 & \dots t > 0 \end{cases}$$

gelegt (Bild 65 links), so ist die Bildfunktion

(Laplace-Transformierte) von $u_1(t)$

$$\underline{U}_1(s) = \mathcal{L}\{u_1(t)\} = U_0 \mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{U_0}{s}$$

Ein ideales Verzögerungsnetzwerk verzögert das Eingangssignal $u_1(t)$ um die Laufzeit t_p . Die Sprungantwort am Ausgang des Netzwerks ist dann $u_2(t) = U_0 \sigma(t - t_p)$ (Bild 65 rechts), und für die zugehörige Bildfunktion ergibt sich

$$\underline{U}_2(s) = \mathcal{L}\{u_2(t)\} = U_0 \mathcal{L}\{\sigma(t - t_p)\} = U_0 \frac{e^{-st_p}}{s}$$

(Verschiebungssatz der Laplace-Transformation). Die Übertragungsfunktion ist daher

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = e^{-st_p} = \frac{1}{e^{st_p}} \quad (157)$$

Gl.(157) entspricht für $s = j\omega$ einer linear mit der Frequenz ansteigenden Netzwerkphase:

$$b(\omega) = \omega t_p \quad (158)$$

Wir betrachten im folgenden die Approximation eines linearen Phasenverlaufes gemäß (158) bzw. einer konstanten Gruppenlaufzeit $t_g = t_p$ in einem bestimmten Frequenzbereich durch eine geeignete Netzwerkfunktion. Führen wir in (157) die

normierte komplexe Frequenz $p = s/\omega_p = st_p$ ($\omega_p = 1/t_p$) ein, so erhalten wir für die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{e^p} \quad (159)$$

Die Funktion $\underline{H}(p)$ G.(159) ist dann durch ein Netzwerk realisierbar, wenn die Nennerfunktion e^p durch ein Polynom approximiert werden kann, das ein Hurwitz-Polynom darstellt. Die direkte Entwicklung von e^p in eine Reihe und Abbruch dieser Reihe nach dem n-ten Glied liefert nicht für alle Ordnungen Hurwitz-Polynome, sodaß diese Approximationsmethode unbrauchbar ist. Dagegen führt das folgende Approximationssverfahren zum Ziel. Man macht den Näherungsansatz

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{e^p} = \frac{1}{\cosh p + \sinh p} = \frac{K}{g_n(p) + u_n(p)} \quad (160)$$

Die Konstante K in (160) ist durch $\underline{H}(0) = 1$ festgelegt. Der gerade Teil $g_n(p)$ und der ungerade Teil $u_n(p)$ des Approximationspolynoms im Nenner von (160) werden aus der Kettenbruchentwicklung von $\coth p$ gewonnen, die nach dem n-ten Glied abgebrochen wird:

$$\begin{aligned} \coth p &= \frac{\cosh p}{\sinh p} = \frac{g_n(p)}{u_n(p)} = \frac{1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \dots}{p + \frac{p^3}{3!} + \frac{p^5}{5!} + \dots} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{2}{p} + \frac{1}{\frac{4}{p} + \frac{1}{\ddots}}} \\ &\quad \frac{1}{\frac{2n-1}{p}} \end{aligned} \quad (161)$$

Das Polynom $g_n(p) + u_n(p)$ in (160) ist dann stets ein Hurwitz-Polynom.

Für z.B. $n = 3$ folgt

$$\coth p = \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{2}{p} + \frac{1}{\frac{2}{p}}} = \frac{6p^2 + 15}{p^3 + 15p} = \frac{g_3(p)}{u_3(p)}$$

also

$$\begin{aligned}\underline{H}(p) &= \frac{K}{g_3(p) + u_3(p)} = \frac{15}{p^3 + 6p^2 + 15p + 15} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{15}p^3 + \frac{2}{5}p^2 + p + 1}\end{aligned}$$

Hierbei wurde $K = 15$ gewählt, damit sich für $p = 0$ die Übertragungsfunktion $\underline{H} = 1$ ergibt. Das Nennerpolynom in $\underline{H}(p)$ ist das Bessel-Polynom $\underline{B}_3(p)$. Die ersten vier Bessel-Polynome $\underline{B}_n(p)$ sind in der Tafel 10 angegeben.

Tafel 10 Bessel-Polynome

$$n = 1: \underline{B}_1(p) = p + 1$$

$$2: \underline{B}_2(p) = \frac{1}{3}p^2 + p + 1$$

(162)

$$3: \underline{B}_3(p) = \frac{1}{15}p^3 + \frac{2}{5}p^2 + p + 1$$

$$4: \underline{B}_4(p) = \frac{1}{105}p^4 + \frac{2}{21}p^3 + \frac{3}{7}p^2 + p + 1$$

Die Realisierung der Übertragungsfunktion $\underline{H}(p)$ durch ein entsprechendes LC-Netzwerk erfolgt in der gleichen Weise wie beim Potenztiefpaß (3.5.2). Der dabei erhaltene Tiefpaß wird als ein Bessel-Tiefpaß (Thomson-Tiefpaß) bezeichnet.

Die Bessel-Approximation liefert eine maximal flache Annäherung an den idealen Gruppenlaufzeitverlauf bei $\Omega = 0$. In der Sprungantwort tritt dann kein Überschwingen auf. (Die tatsächliche Sprungantwort ist in Bild 65 rechts strichliert dargestellt). Ein Rechteckimpuls wird vom Bessel-Tiefpaß mit der geringsten Änderung seiner Kurvenform übertragen. Die Bessel-Filter weisen daher optimales Einschwingverhalten auf. Ein Nachteil der Bessel-Filter gegenüber den Potenz-,

Tschebyscheff- und Cauer-Filtern ist die bei gleichem Schaltungsaufwand geringere Flankensteilheit der Dämpfungskurven.

3.8 Frequenztransformationen

Man kann das Verhalten eines Tiefpasses mit Hilfe von Frequenztransformationen in das Verhalten eines Hochpasses, eines Bandpasses oder einer Bandsperre überführen. Man benötigt also für diese Filter keine weiteren Approximationen, sondern kann ihr Verhalten aus dem bekannten Verhalten eines Tiefpasses (Referenztiefpaß) herleiten.

3.8.1 Tiefpaß-Hochpaß-Transformation

Für einen Hochpaß gilt:

$$\text{DB: } f = f_g \dots \infty$$

$$\text{SB: } f = 0 \dots f_g$$

Führt man die normierte Frequenz des Hochpasses ein

$$\tilde{\Omega} = f/f_B, f_B = f_g$$

so kann man auch schreiben:

$$\text{DB: } \tilde{\Omega} = 1 \dots \infty$$

$$\text{SB: } \tilde{\Omega} = 0 \dots 1$$

Die ideale Dämpfungscharakteristik des Hochpasses ist in Bild 66 dargestellt.

Das Verhalten eines Tiefpasses wird durch die Frequenztransformation

$$| p = 1/\tilde{p} \text{ bzw. } s = \omega_B^2/\tilde{s} \quad (163)$$

in das Verhalten eines Hochpasses übergeführt (Tiefpaß-Hochpaß-Transformation). \tilde{p} ist die normierte komplexe Frequenz und \tilde{s} die komplexe Frequenz des Hochpasses. Speziell folgt aus (163) für die normierten Frequenzen $p = j\Omega$, $\tilde{p} = j\tilde{\Omega}$

$$\Omega = 1/-\tilde{\Omega}$$

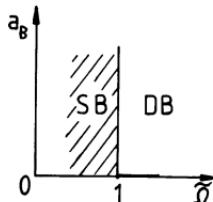


Bild 66 Idealer Dämpfungsverlauf des Hochpasses

Wir ordnen jedoch jeder positiven normierten Hochpaßfrequenz $\tilde{\Omega}$ eine normierte Tiefpaßfrequenz Ω zu:

$$\Omega = 1/\tilde{\Omega} = f_B/f, \quad f_B = f_g \quad (164)$$

Für die Transformation der Impedanzen und Admittanzen ergibt sich wegen (118) und (163), wenn wir die aus (115) folgende Beziehung

$$\omega_B^2 = 1/L_B C_B \quad (165)$$

berücksichtigen

$$sL_{iTP} = s a_i L_B = a_i / \tilde{s} C_B = 1 / \tilde{s} C_i$$

$$sC_{iTP} = s a_i C_B = a_i / \tilde{s} L_B = 1 / \tilde{s} L_i$$

Durch die Frequenztransformation (163) geht also die Induktivität L_{iTP} des Tiefpasses in die Kapazität C_i des Hochpasses und die Kapazität C_{iTP} des Tiefpasses in die Induktivität L_i des Hochpasses über. Wir erhalten also für die Dimensionierung des Hochpasses:

$$\begin{cases} C_i = c_i C_B, \quad c_i = 1/a_i & (i=1,2,\dots,n) \\ L_i = l_i L_B, \quad l_i = 1/a_i \end{cases} \quad (166)$$

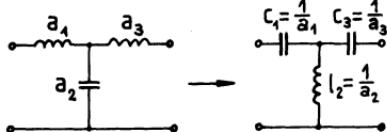


Bild 67 Tiefpaß-Hochpaß-Transformation für $n=3$

mit den Tiefpaßkoeffizienten a_i und L_B, C_B gemäß (115). Ein durch Frequenztransformation aus dem normierten Tiefpaß gewonnener Hochpaß vom Grad $n = 3$ ist in Bild 67 dargestellt.

3.8.2 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation

Für einen Bandpaß gilt:

$$\begin{aligned} DB: \quad f &= f_{-g} \dots f_g \\ SB: \quad f &= 0 \dots f_{-g}, \quad f_g \dots \infty \end{aligned}$$

f_{-g} wird als die untere und f_g als die obere Grenzfrequenz bezeichnet. Weitere Kenngrößen des Bandpasses sind die

(geometrische) Bandmittelfrequenz
(Bezugsfrequenz)

$$f_B = \sqrt{f_g f_g} \quad (167)$$

und die relative Bandbreite

$$B = \frac{f_g - f_g}{f_B} \quad (168)$$

Die normierte Frequenz des Bandpasses ist $\tilde{\Omega} = f/f_B$. Die ideale Dämpfungscharakteristik des Bandpasses ist in Bild 68 dargestellt.

Das Verhalten eines Tiefpasses wird durch die Frequenztransformation

$$\left| p = \frac{1}{B}(\tilde{\Omega} + \frac{1}{\tilde{\Omega}}) \text{ bzw. } s = \frac{\omega_B}{B}(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega_B} + \frac{\omega_B}{\tilde{\Omega}}) \right. \quad (169)$$

in das Verhalten eines Bandpasses übergeführt (Tiefpaß-Bandpaß-Transformation). $\tilde{\Omega}$ ist die normierte komplexe Frequenz und $\tilde{\Omega}$ die komplexe Frequenz des Bandpasses. Aus (169) folgt für die normierten Frequenzen

$$\left| \Omega = \frac{1}{B}(\tilde{\Omega} - \frac{1}{\tilde{\Omega}}) = \frac{1}{B}(\frac{f}{f_B} - \frac{f_B}{f}) \right. \quad (170)$$

Einer Frequenz Ω beim Tiefpaß entsprechen beim Bandpaß zwei Frequenzen $\tilde{\Omega}_+$ und $\tilde{\Omega}_-$. Diese ergeben sich aus der Transformationsbedingung

$$\pm \Omega = \frac{1}{B}(\tilde{\Omega} - \frac{1}{\tilde{\Omega}}) = \frac{1}{B} \frac{\tilde{\Omega}^2 - 1}{\tilde{\Omega}}$$

Hieraus folgt

$$\tilde{\Omega}_{\pm} = \pm \frac{B\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2 + 1}$$

Für die positiven Frequenzen des Bandpasses gilt also

$$\tilde{\Omega}_{\pm} = \sqrt{\left(\frac{B\Omega}{2}\right)^2 + 1} \pm \frac{B\Omega}{2} \quad (171)$$

Für das Produkt zweier Bandpaßfrequenzen $\tilde{\Omega}_+$ und $\tilde{\Omega}_-$ ergibt

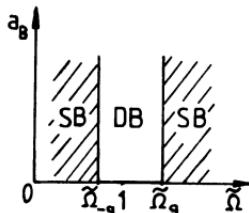


Bild 68 Idealer Dämpfungsverlauf des Bandpasses

sich aus (171)

$$\tilde{\Omega}_+ \tilde{\Omega}_- = 1 \quad (172)$$

Zwei Frequenzen $\tilde{\Omega}_+$ und $\tilde{\Omega}_-$ des Bandpasses mit gleicher Dämpfung liegen also geometrisch symmetrisch zu $\tilde{\Omega} = 1$ ($\Omega = 0$ bzw. $f = f_B$). Wegen (172) gilt z.B. an den Durchlaßgrenzen und im SB

$$\tilde{\Omega}_{-g} = 1/\tilde{\Omega}_g, \tilde{\Omega}_{-s} = 1/\tilde{\Omega}_s$$

und daher im SB wegen (170)

$$\Omega_s = \frac{1}{B}(\tilde{\Omega}_s - \tilde{\Omega}_{-s}) \quad (173)$$

Für die Transformation der Impedanzen und Admittanzen ergibt sich wegen (118), (169) und (165)

$$\begin{aligned} sL_{iTP} &= sa_i L_B = \tilde{s}a_i L_B/B + a_i/\tilde{s}BC_B = \tilde{s}L_{si} + 1/\tilde{s}C_{si} \\ sC_{iTP} &= sa_i C_B = \tilde{s}a_i C_B/B + a_i/\tilde{s}BL_B = \tilde{s}C_{pi} + 1/\tilde{s}L_{pi} \end{aligned}$$

Durch die Frequenztransformation (169) geht also die Induktivität L_{iTP} des Tiefpasses in den Serienschwingkreis $L_{si}-C_{si}$ und die Kapazität C_{iTP} des Tiefpasses in den Parallelschwingkreis $L_{pi} \parallel C_{pi}$ über. Wir erhalten also für die Dimensionierung des Bandpasses:

$$\left| \begin{array}{l} L_i = l_i L_B, l_{si} = a_i/B, l_{pi} = B/a_i \quad (i=1,2,\dots,n) \\ C_i = c_i C_B, c_{si} = B/a_i, c_{pi} = a_i/B \end{array} \right. \quad (174)$$

mit den Tiefpaßkoeffizienten a_i und L_B, C_B gemäß (115). Aus (174) folgt $L_i C_i = L_B C_B = 1/\omega_B^2$ und hieraus

$$\omega_B = 2\pi f_B = 1/\sqrt{L_i C_i} \quad (175)$$

Die Serien- und Parallelschwingkreise des Bandpasses sind also auf die geometrische Bandmittenfrequenz f_B abgestimmt, d.h. sie befinden sich bei der Frequenz f_B im Resonanzzustand.

Ein durch Frequenztransformation aus dem normierten Tiefpaß gewonnener Bandpaß vom Grad $n = 3$ ist in Bild 69 dargestellt.

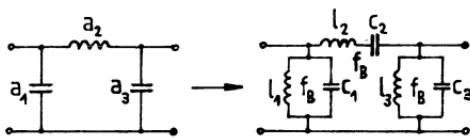


Bild 69 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation für $n=3$

3.8.3 Bandsperre

Die Bandsperre (Sperrfilter) besitzt einen zum Dämpfungsverlauf des Bandpasses inversen Dämpfungsverlauf (Bild 70). Die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation wird daher durch die zu Gl.(169) inverse Funktion beschrieben. (Die Bandsperre ergibt sich auch durch Anwendung der Tiefpaß-Bandpaß-Transformation (169) auf einen zuvor berechneten Hochpaß). Die Induktivität L_{iTP} des Tiefpasses geht dann in einen Parallelschwingkreis und die Kapazität C_{iTP} des Tiefpasses in einen Serienschwingkreis über.

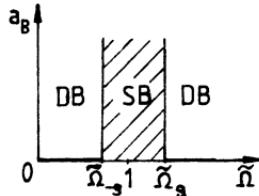


Bild 70 Idealer Dämpfungsverlauf der Bandsperre

3.9 Aktive RC-Filter

Die für LC-Filter erforderlichen Induktivitäten nehmen im NF- (kHz-)Bereich wegen (118) und (115) große Werte an. Dies ist mit den folgenden Nachteilen verbunden: Große Induktivitäten sind unhandlich und teuer. Eine Miniaturisierung von Induktivitäten ist nicht möglich. Man kann jedoch den Einsatz von Induktivitäten bei tiefen und mittleren Frequenzen umgehen, wenn man RC-Netzwerke mit hinzugeschalteten aktiven Bauelementen verwendet. Als aktive Bauelemente werden dabei gewöhnlich Operationsverstärker eingesetzt. Derartige Filternetzwerke werden als aktive RC-Filter bezeichnet. Während die Pole der Übertragungsfunktion $H(s)$ passiver RC-Netzwerke

nur auf der negativ reellen Achse der s-Ebene liegen (vgl. 3.1.3), treten bei aktiven RC-Filtern zweiten oder höheren Grades konjugiert komplexe Pole der Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ in der linken s-Halbebene auf, wie dies ja auch für die passiven LC-Filter charakteristisch ist.

Beispiel 12: Ein aktiver Potenztiefpaß zweiten Grades besitzt die Übertragungsfunktion

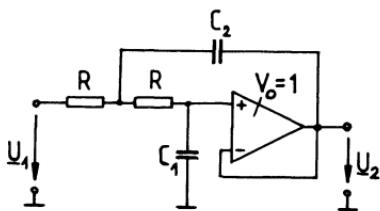


Bild 71 Aktiver RC-Tiefpaß 2. Grades

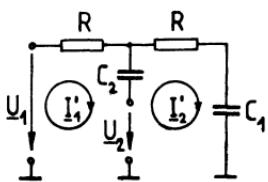


Bild 72 Maschenstromanalyse des Netzwerks Bild 71

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{H}_o}{p^2 + \sqrt{2} p + 1} \quad (176)$$

wobei \underline{H}_o die Gleichspannungsverstärkung des aktiven Tiefpasses ist. Die Übertragungsfunktion (176) kann z.B. mit dem aktiven RC-Tiefpaß Bild 71 realisiert werden. Der Operationsverstärker ist hierbei als gegengekoppelter, nichtinvertierender Einstverstärker (Spannungsfolger mit der Verstärkung

$V_o = 1$) geschaltet. Die Maschenstromanalyse liefert (Bild 72)

$$-\underline{U}_1(s) + RI'_1(s) + \frac{1}{sC_2} I'_1(s) - \frac{1}{sC_2} I'_2(s) + \underline{U}_2(s) = 0$$

$$-\underline{U}_2(s) + \frac{1}{sC_2} I'_2(s) - \frac{1}{sC_2} I'_1(s) + RI'_2(s) + \frac{1}{sC_1} I'_2(s) = 0$$

Außerdem gilt wegen $V_o = 1$

$$\frac{1}{sC_1} I'_2(s) = \underline{U}_2(s)$$

Dann ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(s) = \frac{\underline{U}_2(s)}{\underline{U}_1(s)} = \frac{1}{R^2 C_1 C_2 s^2 + 2RC_1 s + 1}$$

$\underline{H}(s)$ besitzt die beiden konjugiert komplexen Pole in der linken s-Halbebene

$$s_{x1,2} = \sigma_x + j\omega_{x1,2} = \frac{1}{RC_2}(-1 \pm j\sqrt{\frac{C_2}{C_1}} - 1)$$

Aus $\underline{H}(s)$ folgt mit $p = s/\omega_g$ ($\omega_B = \omega_g$)

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{\omega_g^2 R^2 C_1 C_2 p^2 + 2\omega_g R C_1 p + 1}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (176) ergibt sich

$$H_0 = 1, \omega_g^2 R^2 C_1 C_2 = 1, 2\omega_g R C_1 = \sqrt{2}$$

Gibt man z.B. die Widerstände R und die Grenzkreisfrequenz ω_g vor, so erhält man für die Dimensionierung der Kapazitäten:

$$C_1 = 1/\sqrt{2}\omega_g R, C_2 = \sqrt{2}/\omega_g R$$

Man definiert die folgenden Kenngrößen eines aktiven RC-Filters: a) die Polfrequenz

$$\omega_p = |s_x| = \sqrt{\sigma_x^2 + \omega_x^2} \quad (177)$$

b) die Polgüte

$$Q_p = \frac{\omega_p}{2|\sigma_x|} \quad (178)$$

(s. Bild 73). Bei Filtern mit negativ reellen Polen gilt $Q_p \leq 0,5$, bei Filtern mit einem konjugiert komplexen Polpaar in der linken s-Halbebene $0,5 < Q_p < \infty$. Mit zunehmender Polgüte wächst die Neigung eines aktiven RC-Filters zur Instabilität.

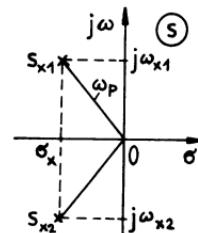


Bild 73 Zur Definition von Polfrequenz und Polgüte

Höhergradige Übertragungsfunktionen aktiver RC-Filter werden gewöhnlich in ein Produkt aus Funktionen ersten und/oder zweiten Grades aufgelöst. Die Teilfunktionen werden anschließend durch Filterglieder ersten und zweiten Grades realisiert, die dann in Kette (Kaskade) geschaltet werden (Kaskadensynthese).

Die aktiven RC-Filter rauschen stärker als die passiven LC-Filter. Außerdem besteht bei ihnen bei Frequenzen $f > 1$ MHz Schwinggefahr wegen der dann auf kritische Werte anwachsenden Phasendrehung des Signals im Verstärker. Aktive RC-Filter können deshalb nur bei Frequenzen bis ca. 1 MHz eingesetzt werden. Die obere Frequenzgrenze der passiven LC-Filter liegt dagegen bei etwa 100 MHz.

3.10 Digitale Filter

Die bisher behandelten analogen Filter bewirken eine Filterung, d.h. eine frequenzabhängige Bewertung von Amplitude und Phase, im Falle eines zeitkontinuierlichen Signals. Digitale Filter verarbeiten dagegen zeitdiskrete Signalwerte, wodurch eine höhere Genauigkeit der Filterkurven und eine geringere Störanfälligkeit der Filterschaltungen erreicht werden kann. Die zeitdiskreten Signalwerte werden gewöhnlich durch Abtastung eines zeitkontinuierlichen Signals gewonnen, wobei die Signalabtastung mit der Abtastfrequenz $f_A = \omega_A / 2\pi = 1/T_A$ erfolgt. T_A ist die Abtastperiodendauer, d.i. das Zeitintervall zwischen zwei benachbarten, durch Nadelimpulse dargestellten Abtastwerten. Gemäß dem Abtasttheorem muß die Abtastfrequenz f_A mindestens doppelt so groß wie die höchste zu übertragende Signalfrequenz f_{\max} gewählt werden, wenn die im Originalsignal enthaltene Information im Abtastsignal noch vollständig vorhanden sein soll:

$$f_A \geq 2f_{\max} \quad (179)$$

Will man die Übertragungsfunktion $\underline{H}(s)$ bzw. $\underline{H}(p)$ eines analogen Filters in die Übertragungsfunktion $\tilde{H}(z)$ (z -Transformierte von $\underline{H}(p)$) eines digitalen Filters überführen, so muß

man daher dabei beachten, daß der ausnutzbare Frequenzbereich des digitalen Filters auf $0 \leq f \leq f_A/2$ bzw. $0 \leq \Omega \leq \Omega_A/2$ begrenzt ist. $\Omega_A = f_A/f_B$ mit der Bezugsfrequenz f_B ist die normierte Abtastfrequenz. Die analoge Übertragungsfunktion $H(p)$ muß also beim Übergang zur digitalen Übertragungsfunktion $\tilde{H}(z)$ schon bis $\Omega_A/2$ nachgebildet werden, d.h. der Frequenzbereich $0 \leq \Omega \leq \infty$ muß in den Frequenzbereich $0 \leq \Omega' \leq \Omega_A/2$ übergehen. Eine Transformation, die dies leistet, ist die bilineare Transformation bzw. deren Umkehrung:

$$\left| \begin{array}{l} z = \frac{1+p}{1-p} \\ p = \frac{z-1}{z+1} = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \end{array} \right. \quad (180)$$

In (180) ist

$$z = e^{sT_A} = e^{p\omega_B T_A} \quad (181)$$

die komplexe Bildvariable der z -Transformation. (Der z -Bereich stellt einen bei zeitdiskreten Funktionswerten verwendeten komplexen Bereich dar). Die bilineare Transformation (180) bildet die linke p -Halbebene umkehrbar eindeutig auf das Innere des Einheitskreises in der z -Ebene ab (Bild 74,

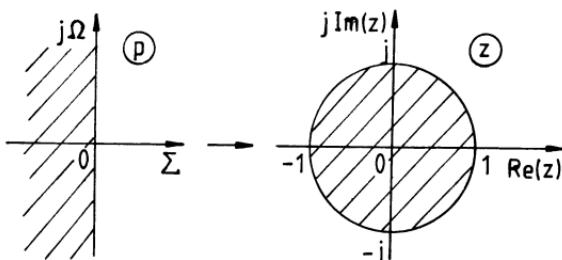


Bild 74 Abbildung der linken p -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises in der z -Ebene vgl. 4.7.1). Insbesondere geht dabei die imaginäre Achse

$p = j\Omega$ in die Peripherie des Einheitskreises der z -Ebene über. Auf der Peripherie dieses Kreises gilt $z = e^{j\omega' T_A}$. Gehen wir hiermit in die zweite Gl.(180) ein, so ergibt sich

$$j\Omega = \frac{e^{j\omega' T_A} - 1}{e^{j\omega' T_A} + 1} = j \tan \frac{\omega' T_A}{2}$$

Hieraus folgt wegen $\omega' T_A / 2 = \pi f' / f_A = \pi \Omega' / \Omega_A$, $\Omega' = f' / f_B$

$$\Omega = \tan \frac{\pi \Omega'}{\Omega_A} \quad (182)$$

Die Frequenz $\Omega = \infty$ wird gemäß (182) wie verlangt in die Frequenz $\Omega' = \Omega_A / 2$ abgebildet. Bei der bilinearen Transformation (180) tritt also eine Verzerrung der Frequenzachse $j\Omega$ ein.

Die Betragscharakteristik $|\underline{H}(j\Omega)|$ eines analogen Filters geht bei der bilinearen Transformation in die Betragscharakteristik $|\tilde{H}(j\Omega')|$ des digitalen Filters über, wobei der charakteristische Verlauf von $|\underline{H}(j\Omega)|$ trotz der auftretenden Verzerrung der $j\Omega$ -Achse bewahrt bleibt. Diese Aussage trifft jedoch auf die Frequenzverläufe der Phase und der Gruppenlaufzeit im allgemeinen nicht zu. Z.B. geht bei der bilinearen Transformation eines Bessel-Filters die Eigenschaft der konstanten Gruppenlaufzeit verloren. Es ist deshalb zweckmäßig, solche Filter direkt im z -Bereich zu entwerfen [19].

Ist das analoge Filter stabil, so liefert die bilineare Transformation ein ebenfalls stabiles Filter. Die Pole der Übertragungsfunktion eines stabilen digitalen Filters müssen daher im Innern oder im Grenzfall auf der Peripherie des Einheitskreises der z -Ebene liegen.

Zum Aufbau digitaler Filter werden Verzögerungsglieder, Addierer und Multiplizierer (Koeffizientenglieder) benötigt. Ein Verzögerungsglied kann z.B. mit Hilfe eines Schieberegisters realisiert werden, durch das die Abtastwerte des Eingangssignals mit der Abtastfrequenz f_A (= Taktfrequenz des Schieberegisters) hindurchgeschoben werden. Im einfachsten

Fall erfolgt die Verzögerung um eine Abtastperiodendauer T_A . Die analoge Übertragungsfunktion des Verzögerungsgliedes ist dann wegen (157)

$$\underline{H}(s) = e^{-sT_A}$$

Setzen wir hierin z Gl.(181) ein, so erhalten wir die digitale Übertragungsfunktion des Verzögerungsgliedes

$$\tilde{H}(z) = z^{-1} \quad (183)$$

Ein digitales Filter trifft entsprechend der vorgegebenen Übertragungsfunktion eine bestimmte Auswahl unter den diskreten Eingangssignalwerten, indem es innerhalb einer jeden Abtastperiodendauer T_A aus der Eingangsfolge $f_1(nT_A)$ eine in bestimmter Weise gewichtete, am Ausgang erscheinende Zahlenfolge $f_2(nT_A)$ berechnet. Es ist daher besonders vorteilhaft, das digitale Filter mit einem entsprechend programmierbaren Mikroprozessor (Signalprozessor) zu realisieren.

Beispiel 13: Wir gehen von einem analogen Potenztiefpaß ersten Grades mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(p) = \frac{1}{p + 1}$$

aus (vgl. 3.5.1). Führen wir hierin die bilineare Transformation (180) durch, so erhalten wir die digitale Übertragungsfunktion

$$\tilde{H}(z) = 0,5(1 + z^{-1})$$

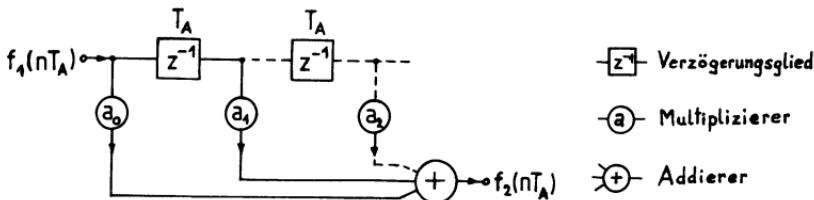


Bild 75 Nichtrekursives Digitalfilter 1.Grades

Das zugehörige digitale Filter ist in Bild 75 dargestellt (Signalflußgraph). Man benötigt also für ein digitales Filter ersten Grades nur ein einziges Verzögerungsglied. Zur Berechnung der Betragscharakteristik $|\tilde{H}(j\Omega)|$ des digitalen Filters setzen wir in $\tilde{H}(z)$ für die komplexe Bildvariable

$$z = e^{j\omega T_A} = e^{j\frac{2\pi f}{f_A}} = e^{j\frac{2\pi \Omega}{\Omega_A}}$$

(Wir haben hierbei $\omega' = \omega$ bzw. $\Omega' = \Omega$ gesetzt). Dann folgt

$$\begin{aligned}\tilde{H}(j\Omega) &= 0,5(1 + e^{-j\frac{2\pi \Omega}{\Omega_A}}) \\ &= 0,5(1 + \cos \frac{2\pi \Omega}{\Omega_A} - j \sin \frac{2\pi \Omega}{\Omega_A})\end{aligned}$$

und hieraus

$$|\tilde{H}(j\Omega)| = 0,5\sqrt{2 + 2 \cos \frac{2\pi \Omega}{\Omega_A}}$$

$|\tilde{H}(j\Omega)|$ schwankt periodisch zwischen den Werten 1

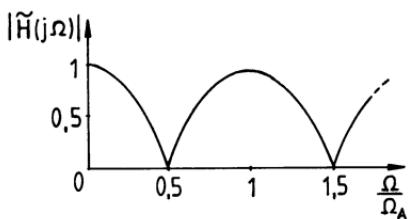
$(\Omega/\Omega_A = 0,1,2,\dots)$ und 0
 $(\Omega/\Omega_A = 1/2, 3/2, 5/2, \dots)$.

Das digitale Filter besitzt also im Frequenzbereich $0 \leq \Omega \leq \infty$ eine periodische Betragscharakteristik (Bild 76).

Im Frequenzbereich $0 \leq \Omega \leq \Omega_A/2$ tritt eine Tiefpaßcharakteristik auf. Dies bedeutet, daß bei dem digitalen Filter

Bild 76 Periodische Betragscharakteristik des Digitalfilters

nur der Frequenzbereich $0 \leq \Omega \leq \Omega_A/2$ ausgenutzt werden kann. Man kann die Betragscharakteristik des digitalen Filters Bild 76 mehr oder weniger stark beeinflussen, wenn man die Verzögerungskette erweitert (in Bild 75 gestrichelt angedeutet) und dabei die Amplitudenbewertungskoeffizienten a_i (für das gegebene Filter gilt $a_0 = a_1 = 0,5$) geeignet wählt.



Das digitale Filter Bild 75 stellt ein nichtrekursives Filter (Transversalfilter) dar. Bei einem solchen Filter wird jeder diskrete Ausgangssignalwert aus den diskreten Eingangssignalwerten berechnet. Dagegen wird bei einem rekursiven Filter jeder Ausgangssignalwert aus den Eingangssignalwerten und vergangenen Ausgangssignalwerten berechnet. Dies setzt voraus, daß in rekursiven Filtern rückführende Signalpfade enthalten sind, welche die Ausgangssignalwerte auf den Eingang oder einen Teil des Filters zurückkoppeln. Mit rekursiven Filtern kann eine Vielzahl von Filtercharakteristiken vorteilhaft realisiert werden. Ein Nachteil rekursiver Filter besteht allerdings darin, daß sie nur innerhalb bestimmter Betriebsbereiche stabil arbeiten.

Digitale Filter eignen sich besonders gut zur Realisierung von Filtern mit sehr niedrigen Grenzfrequenzen, wobei eine entsprechend niedrige Abtastfrequenz gewählt werden kann. Ein weiterer Vorteil digitaler Filter ist ihre sehr geringe Empfindlichkeit gegenüber Einflüssen von Temperatur und Bauelementetoleranzen. Dagegen bereitet die Realisierung digitaler Filter mit hohen Grenzfrequenzen gegenwärtig noch Schwierigkeiten, da für die Durchführung der arithmetischen Operationen (insbesondere der Multiplikationen) im digitalen Filter eine bestimmte Zeit benötigt wird, welche die Grenzfrequenz des Filters bestimmt. Probleme werfen auch die endliche Datenwortlänge und das damit verbundene Quantisierungsrauschen auf.

Übungsaufgaben zu Abschn. 3 (Lösungen im Anhang):

Beispiel 14: Gegeben sind die beiden RC-Schaltungen α und β , Bild 77.

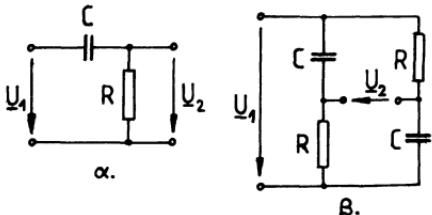


Bild 77 RC-Schaltungen

- Man berechne die Übertragungsfunktion,
- man stelle den PN-Plan dar,
- man zeichne die Bode-Diagramme der Verstärkung und Phase

jeder Schaltung.

Beispiel 15: Ein Tschebyscheff-Tiefpaß soll für die Grenzfrequenz $f_g = 100 \text{ kHz}$ und den Betrieb zwischen den beiden Abschlußwiderständen $R_1 = R_2 = 150 \Omega$ entworfen werden. Der Tiefpaß soll im DB die minimale Echodämpfung $a_{Emin} = 14 \text{ dB}$ und im SB bei $f_S = 193 \text{ kHz}$ eine Sperrdämpfung von mindestens $a_S = 34 \text{ dB}$ besitzen.

- Wie groß sind der maximale Reflexionsfaktor und die maximale Betriebsdämpfung im DB?
- Man ermittle den Grad des Tiefpasses, normiere die Tiefpaßschaltung (Schaltskizze) und berechne die Werte der Schaltelemente des Tiefpasses. Die bei der Gradwahl sich ergebende Dämpfungsreserve soll dem SB zugute kommen.

Anleitung: Man verwende die spulensparende Schaltung.

Beispiel 16: Ein Cauer-Tiefpaß soll für die Grenzfrequenz $f_g = 10 \text{ MHz}$ und den Betrieb zwischen den beiden Abschlußwiderständen $R_1 = R_2 = 50 \Omega$ entworfen werden. Der Tiefpaß soll im DB den maximalen Reflexionsfaktor $\varrho_{max} = 20 \%$ und im SB $f_S = 15 \text{ MHz} \leq f \leq \infty$ eine Sperrdämpfung von mindestens $a_S = 45 \text{ dB}$ im Tschebyscheffschen Sinn einhalten.

- Wie groß sind die maximale Betriebsdämpfung und die minimale Echodämpfung im DB?

- b) Man ermittle den Grad des Tiefpasses, normiere die Tiefpaßschaltung (Schaltskizze) und berechne die Werte der Schaltelemente des Tiefpasses. Man gebe die Lage der Polfrequenzen an. Die bei der Gradwahl sich ergebende Dämpfungsreserve soll dem SB zugute kommen.

Anleitung: Man verwende die spulensparende Schaltung.

Beispiel 17: Ein Tschebyscheff-Bandpaß soll für die Grenzfrequenzen $f_{-g} = 3,9752 \text{ MHz}$ und $f_g = 4,025 \text{ MHz}$ und den Betrieb zwischen den beiden Abschlußwiderständen $R_1 = R_2 = 75 \Omega$ entworfen werden. Der Bandpaß soll im DB die minimale Echodämpfung $a_{Emin} = 14 \text{ dB}$ und im SB bei den Frequenzen f_{-S} und $f_S = 4,078 \text{ MHz}$ eine Sperrdämpfung von mindestens $a_S = 26 \text{ dB}$ besitzen.

Man ermittle den Grad des Bandpasses, normiere die Bandpaßschaltung (Schaltskizze) und berechne die Werte der Schaltelemente des Bandpasses. Die bei der Gradwahl sich ergebende Dämpfungsreserve soll dem SB zugute kommen.

4. Leitungen

4.1 Leitungsbeläge und Ersatzschaltbild des Leitungselements

4.1.1 Ausführungsformen von Leitungen. Leitungsbeläge

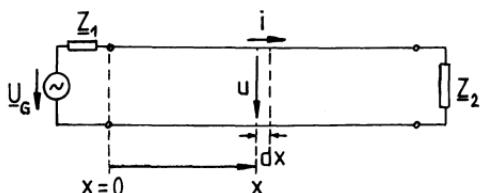


Bild 78 Leitung mit Generator und Last geschlossen (Bild 78). Wir betrachten im folgenden Leitungen, auf denen sich elektromagnetische Wellen ausbreiten, deren Wellenlängen λ mit der Leitungslänge vergleichbar sind, das sind nachrichtentechnische Leitungen. (Bei einer energietechnischen Leitung ist dagegen die Betriebswellenlänge λ groß gegen die Leitungslänge). Die Momentanwerte $u = u(x, t)$ und $i = i(x, t)$ von Spannung und Strom auf einer solchen Leitung hängen außer von der Zeit t noch von der

Eine Leitung wird an einem Ende von einem Generator mit der Quellenspannung U_G und dem Innenwiderstand Z_1 erregt und am anderen Ende mit einem Lastwiderstand (Verbraucher) Z_2 abgeschlossen (Bild 78). Wir betrachten im folgenden Leitungen, auf denen sich elektromagnetische Wellen ausbreiten, deren Wellenlängen λ mit der Leitungslänge vergleichbar sind, das sind nachrichtentechnische Leitungen. (Bei einer energietechnischen Leitung ist dagegen die Betriebswellenlänge λ groß gegen die Leitungslänge). Die Momentanwerte $u = u(x, t)$ und $i = i(x, t)$ von Spannung und Strom auf einer solchen Leitung hängen außer von der Zeit t noch von der

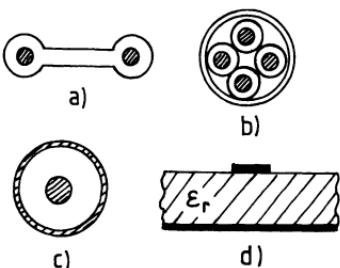


Bild 79 Leitungsquerschnitte

- a) Paralleldrahtleitung,
- b) Sternvierer,
- c) Koaxialleitung,
- d) Mikrostreifenleitung

Ortskoordinate x ab (Bild 78). Die zugehörigen Effektivwerte (bzw. Amplituden) $U = U(x)$ und $I = I(x)$ sind dann ortsabhängig (vgl. 4.4.2).

Gebräuchliche Ausführungsformen von Leitungen sind im Querschnitt in Bild 79 dargestellt. Die symmetrische Paralleldrahtleitung besteht aus zwei geraden, parallelen Drähten in Luft oder Kunst-

stoff zur Hin- und Rückleitung des Stromes (Bild 79 a). Eine Paralleldrahtleitung ist z.B. die Freileitung. Der verseilte Sternvierer besteht aus zwei gekreuzten Parallel drahtleitungen und wird in vieladrigen Fernsprechkabeln verwendet (Bild 79 b). Bei Frequenzen $f \gtrsim 100$ kHz wird fast ausschließlich die unsymmetrische Koaxialleitung benutzt (Bild 79 c). Sie besteht aus einem Innenleiter und einem koaxialen, rohrförmigen Außenleiter mit dazwischenliegendem Dielektrikum. Der Außenleiter dient zur Abschirmung der Eigen- und Fremdfelder und ist gewöhnlich geerdet. Die Koaxialleitung wird vor allem für breitbandige Nachrichtenübertragungen, z.B. von Fernsehsignalen, eingesetzt. Bei Frequenzen $f > 1$ GHz steigt die Dämpfung der Koaxialleitungen stark an, sodaß sie in diesem Frequenzbereich für die Nachrichtenübertragung nicht mehr geeignet sind. Im Bereich sehr hoher Frequenzen $f \approx 0,5 \dots 20$ GHz werden Streifenleitungen benutzt. Die praktisch wichtige Mikrostreifenleitung (Mikrostrip-Leitung) besteht aus einem dünnen Metallstreifen, der durch eine dielektrische Schicht (z.B. Aluminiumoxid) von einem breiten Metallbelag getrennt ist (Bild 79d). Mikrostreifenleitungen werden vor allem in integrierten Mikrowellenschaltungen eingesetzt, in denen sie zur Realisierung von Anpassungsgliedern, Filtern, Richtkopplern u.a. dienen.

Die Eigenschaften einer Leitung sind durch Kenngrößen bestimmt, die man auf die Längeneinheit (gewöhnlich 1 km) bezieht. Besitzt ein kurzer (endlicher) Leitungsabschnitt (Hin- und Rückleiterabschnitt) der Länge Δx den Längswirkwiderstand ΔR , den Querwirkleitwert (die "Ableitung") ΔG , die Längsinduktivität ΔL und die Querkapazität ΔC , so werden die folgenden Kenngrößen der Leitung definiert:

$$\begin{array}{ll} \text{Widerstandsbelag} & R' = \Delta R / \Delta x \\ \text{Ableitungsbelag} & G' = \Delta G / \Delta x \\ \text{Induktivitätsbelag} & L' = \Delta L / \Delta x \\ \text{Kapazitätsbelag} & C' = \Delta C / \Delta x \end{array} \quad (184)$$

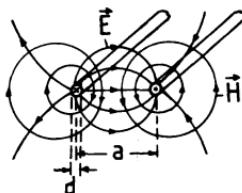
Eine Leitung wird als homogen bezeichnet, wenn die Beläge R' , G' , L' und C' auf der ganzen Leitungslänge konstant sind. (Sie sind jedoch bezüglich der Frequenz nicht konstant). Im folgenden werden nur homogene Leitungen betrachtet.

Der Widerstandsbelag R' ist bei Gleichstrom und bei tiefen Frequenzen z.B. für eine Paralleldrahtleitung durch $2\sigma/A$ gegeben, wenn σ der spezifische Widerstand und A der Querschnitt eines Leiters sind. Für Frequenzen $f \geq 4$ kHz wächst infolge des Skineffektes $R' \sim \sqrt{f}$ an.

Der Ableitungsbelag G' gibt den Isolationsleitwert zwischen den beiden Leitern der Leitung an und ist bei Gleichstrom praktisch Null. G' nimmt mit wachsender Frequenz infolge auftretender dielektrischer Verluste zu, und zwar in einem weiten Frequenzbereich $\sim f$, bei sehr hohen Frequenzen dagegen noch stärker.

Eine Paralleldrahtleitung mit dem Drahtabstand a und dem

Drahdurchmesser d (Bild 80, \vec{E} elektrische, \vec{H} magnetische Feldlinien) besitzt unter der Voraussetzung $a/d > 2,5$ den Induktivitäts- und Kapazitätsbelag



$$L' = \frac{\mu_0 \epsilon_r}{\pi} \ln \frac{2a}{d} \quad (185)$$

$$C' = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln 2a/d}$$

Bild 80 Elektromagnetisches Feld der Paralleldrahtleitung

Die beiden Drähte sind hierbei in ein Dielektrikum mit der Permeabilitätszahl $\mu_r \geq 1$ und der Permit-

tivitätszahl $\epsilon_r \geq 1$ eingebettet. Bei den gewöhnlich verwendeten verlustarmen Dielektrika gilt $\mu_r = 1$, und ϵ_r ist bis zu sehr hohen Frequenzen (GHz-Bereich) konstant.

Für eine Koaxialleitung mit dem Innenleiterdurchmesser d und dem Innendurchmesser D des Außenleiters (Bild 81) gilt

$$L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad (186)$$

$$C' = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln D/d}$$

In den Beziehungen (185) und (186) gilt für die elektrische und magnetische Feldkonstante:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

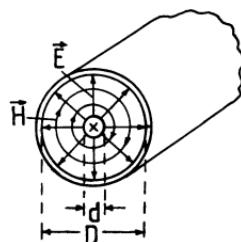


Bild 81 Elektromagnetisches Feld der Koaxialleitung

4.1.2 Ersatzschaltbild des Leitungselementes

Man kann sich eine Leitung in unendlich viele, unendlich kurze Leitungsstücke zerlegt denken. Das (übertragungssymmetrische) Ersatzschaltbild eines solchen differentiellen Leitungselementes der Länge dx ist in Bild 82 dargestellt. Während der Wirkwiderstand, der Wirkleitwert, die Induktivität und die Kapazität der Leitung in Wirklichkeit über die ganze Leitungslänge gleichmäßig verteilt sind, enthält das Ersatzschaltbild des Leitungselementes diese Komponenten als konzentrierte Bauelemente. Das Leitungselement bzw. die homogene Leitung besitzt den Impedanzbelag

$$\underline{Z}' = \frac{d\underline{Z}}{dx} = \frac{dR + j\omega dL}{dx} = R' + j\omega L' \quad (187)$$

und den Admittanzbelag

$$\underline{Y}' = \frac{d\underline{Y}}{dx} = \frac{dG + j\omega dC}{dx} = G' + j\omega C' \quad (188)$$

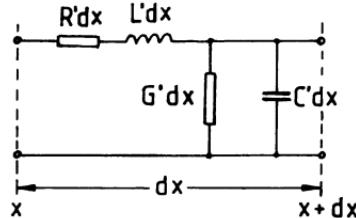


Bild 82 Ersatzschaltbild des Leitungselementes

Die Kettenmatrix des Leitungselementes ist wegen (43) und (45)

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{A}}) &= (\underline{\underline{A}}_1)(\underline{\underline{A}}_2) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}'dx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{Y}'dx & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \underline{Z}'\underline{Y}'(dx)^2 & \underline{Z}'dx \\ \underline{Y}'dx & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vernachlässigen wir hierin das Glied zweiter Ordnung, so erhalten wir mit (187) und (188)

$$(\underline{\underline{A}}) = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}'dx \\ \underline{Y}'dx & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (R' + j\omega L')dx \\ ((G' + j\omega C')dx & 1 \end{pmatrix} \quad (189)$$

4.2 Übertragungsgrößen und Leitungsgleichungen

4.2.1 Wellenwiderstand und Ausbreitungskoeffizient der Leitung

Eine sehr wichtige Kenngröße einer Leitung ist ihr Wellenwiderstand.

Als Wellenwiderstand \underline{Z}_L einer homogenen Leitung wird derjenige ausgezeichnete Widerstand bezeichnet, mit dem man die Leitung abschließen muß, damit der gleiche Widerstand als der Eingangswiderstand der Leitung erscheint:

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_L \quad \text{für} \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_L \quad (190)$$

Die homogene Leitung stellt ein widerstandssymmetrisches Zweitor dar, d.h. für sie gilt $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. Aus der Definition (190) folgt dann wegen (59)

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_L + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_L + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_L$$

und hieraus

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} \quad (191)$$

Aus (191) folgt wegen (189) für den Wellenwiderstand der homogenen Leitung

$$| \underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} | \quad (192)$$

Wird die Leitung beidseitig mit ihrem Wellenwiderstand \underline{Z}_L abgeschlossen, gilt also $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_L$, so wird in diesem speziellen Fall das Betriebsdämpfungsmaß \underline{g}_B als das Wellendämpfungsmaß \underline{g}_w bezeichnet. Aus (70) und (78) folgt dann

$$e^{\underline{g}_w} = \frac{1}{2}(2\underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_L} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_L)$$

und hieraus wegen (191)

$$e^{\underline{g}_w} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} \quad (193)$$

Gehen wir mit (189) in (193) ein, so erhalten wir

$$e^{\underline{g}_w} = 1 + \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} dx \quad (194)$$

Setzen wir $\underline{g}_w = \gamma dx$ und entwickeln $e^{\gamma dx}$ in eine Reihe, so folgt in erster Näherung

$$e^{\gamma dx} = 1 + \gamma dx$$

Durch Vergleich mit (194) ergibt sich der Ausbreitungskoeffizient der Leitung

$$| \gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} | \quad (195)$$

Man setzt

$$| \gamma = \alpha + j\beta | \quad (196)$$

Der Realteil α von γ wird als der Dämpfungskoeffizient (Dämpfungsbelag) und der Imaginärteil β als der Phasenkoeffizient (Phasenbelag) der Leitung bezeichnet.

4.2.2 Leitungsgleichungen

Für die homogene Leitung gilt wegen ihrer Widerstands- und Übertragungssymmetrie: $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$, $\Delta \underline{A} = \underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$. Wir erhalten aus (193) durch einfache Umformung, wenn wir dabei $\underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11}^2 - 1$ berücksichtigen

$$\frac{e^{\xi_w} + e^{-\xi_w}}{2} = A_{11}, \quad \frac{e^{\xi_w} - e^{-\xi_w}}{2} = A_{12}A_{21}$$

oder wegen der Definitionsgleichungen der Hyperbelfunktionen

$$\cosh \xi_w = A_{11} = A_{22}, \quad \sinh \xi_w = A_{12}A_{21} \quad (197)$$

Aus der zweiten Gl. (197) folgt wegen (191)

$$Z_L \sinh \xi_w = A_{12}, \quad \frac{1}{Z_L} \sinh \xi_w = A_{21} \quad (198)$$

Gewöhnlich ist der Lastwiderstand Z_2 einer Leitung detailliert gegeben oder gesucht und nicht der Generator. Es ist daher zweckmäßig, die Vorgänge auf der Leitung vom Ort des

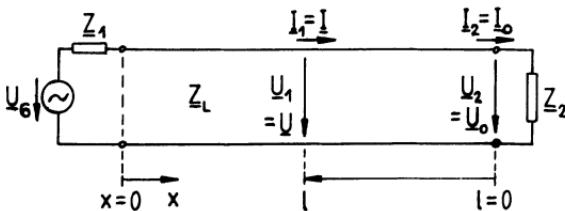


Bild 83 Spannungen und Ströme auf einer Leitung

Lastwiderstand aus in Richtung zum Generator zu betrachten. Wir führen deshalb anstelle der Ortskoordinate x die neue Ortskoordinate $l = -x$ ein und beginnen mit der Zählung $l = 0$ am Ort des Lastwiderstandes Z_2 (Bild 83). Wir setzen speziell:

$$U_2 = U_0, \quad I_2 = I_0 \quad \text{am Leitungsende } l = 0,$$

$$U_1 = U, \quad I_1 = I \quad \text{an einem Leitungsort } l > 0.$$

Wir können dann für das Wellendämpfungsmaß der Leitung schreiben:

$$\xi_w = \gamma l \quad (199)$$

Die Kettenmatrix der Leitung lautet wegen (197), (198) und (199)

$$(A) = \begin{pmatrix} \cosh \gamma l & \frac{1}{Z_L} \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_L} \sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{pmatrix} \quad (200)$$

Für die homogene Leitung gelten also die Zweitorgleichungen

$$\begin{aligned} U &= U_0 \cosh \gamma l + I_0 Z_L \sinh \gamma l \\ I &= \frac{U_0}{Z_L} \sinh \gamma l + I_0 \cosh \gamma l \end{aligned} \quad (201)$$

Die Beziehungen (201) werden als die Leitungsgleichungen bezeichnet. Der Schreibweise der Gln.(201) ist das Kettenzählpfeilsystem (2.1.1) zugrundegelegt.

4.3 Verlustbehaftete Leitung

4.3.1 RC-Leitung

Im Frequenzbereich $f \approx 1 \text{ Hz} \dots 1 \text{ kHz}$ gilt für die symmetrischen Kabel $R' \gg \omega L'$ (starke Dämpfung) und $G' \ll \omega C'$. Dann folgt aus (195) und (192)

$$\gamma = \sqrt{j\omega R' C'} = e^{j45^\circ} \sqrt{\omega R' C'} \quad (202)$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} e^{-j45^\circ} \quad (203)$$

Der Wellenwiderstand ist dann also kapazitiv. Wir können (202) und (203) gemäß der Eulerschen Formel auch schreiben

$$\gamma = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}}$$

$$Z_L = (1 - j) \sqrt{\frac{R'}{2\omega C'}}$$

Wegen (196) folgt

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \quad (204)$$

4.3.2 Verlustarme Leitung

Für Frequenzen $f > 1 \text{ kHz}$ gilt oberhalb eines Übergangsfrequenzbereiches für Koaxialkabel, symmetrische Kabel und Freileitungen $R' \ll \omega L'$ (schwache Dämpfung) und $G' \ll \omega C'$. Wir schreiben den Ausbreitungskoeffizienten (195) in der Form

$$\gamma = j\omega \sqrt{L' C'} \sqrt{(1 - jR'/\omega L')(1 - jG'/\omega C')}$$

Vernachlässigen wir das Glied zweiter Ordnung, so ergibt sich

$$\gamma = j\omega \sqrt{L'C'} \sqrt{1 - j(\frac{R'}{\omega L'} + \frac{G'}{\omega C'})}$$

Hieraus folgt durch Reihenentwicklung in erster Näherung

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega \sqrt{L'C'} \left[1 - j\frac{1}{2}(\frac{R'}{\omega L'} + \frac{G'}{\omega C'}) \right] \\ &= j\omega \sqrt{L'C'} + \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}\end{aligned}$$

Wir erhalten durch Vergleich mit (196)

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_G = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (205)$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} \quad (206)$$

In (205) sind α_R die Widerstandsdämpfung (Längsdämpfung im Widerstandsbelag R') und α_G die Ableitungsdämpfung (Querdämpfung im Ableitungsbetrag G' infolge der Wirkverluste im Dielektrikum). Eine Leitung, für die $\alpha = \text{const}$ und $\beta \sim \omega$

gilt, wird als verzerrungsfrei bezeichnet (vgl.

2.6.3). Die verlustarme Leitung ist also wegen (205) und (206) verzerrungsfrei, d.h. ein auf die verlustarme Leitung eingespeistes Signal gelangt in originalgetreuer Form an das Leitungsende. Die frequenzabhängigen Verläufe des Dämpfungskoeffizienten

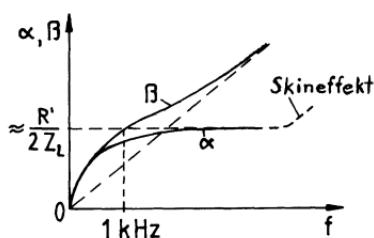


Bild 84 Frequenzabhängigkeit von α und β

α und des Phasenkoeffizienten β einer Leitung sind in Bild 84 dargestellt.

Für den Leitungswellenwiderstand (192)

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'} \frac{1 - jR'/\omega L'}{1 - jG'/\omega C'}}$$

folgt näherungsweise bei geringen Verlusten und hohen Fre-

quenzen ($f \geq 10$ kHz)

$$| Z_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} | \quad (207)$$

Der Wellenwiderstand der verlustarmen Leitung ist also näherungsweise reell.

Für die symmetrischen NF-Kabel gilt $\alpha_R \gg \alpha_G$, also wegen (205)

$$\alpha \approx \alpha_R = \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} \quad (208)$$

Man verringert in diesem Fall die Dämpfung durch Vergrößern des Induktivitätsbelages L' , und zwar schaltet man gewöhnlich Spulen (mit ferromagnetischen Ringkernen, 5...200 mH) in regelmäßigen Abständen

l_s (1,7...2 km) in die Leitung ein (M. Pupin, 1900, Bild 85). Durch die "Pupini-sierung" der Leitung wird al-

lerdings das Übertragungsfrequenzband nach höheren Frequenzen hin beschnitten (d.h. die Leitung wirkt als Tiefpaß), sodaß die pupinisierte Leitung nur im NF-Bereich (für das gewöhnliche Telefonieband 300...3400 Hz) eingesetzt werden kann. Eine andere, mehr Aufwand erfordерnde Methode zur Herabsetzung der Leitungsdämpfung (auch bei hohen Frequenzen) besteht darin, daß man den Leiter (Kupferdraht) mit einem dünnen ferromagnetischen Draht oder Band umwickelt (K. E. Karrup, 1902).

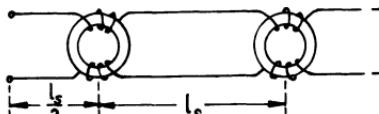


Bild 85 Leitung mit
Pupin-Spulen

4.4 Verlustlose Leitung. Leitungswellen

4.4.1 Eigenschaften und Gleichungen der verlustlosen Leitung

Die Verluste einer verlustarmen Leitung können in vielen praktisch vorkommenden Fällen vernachlässigt werden, insbesondere bei einer kurzen verlustarmen Hochfrequenzleitung, wie sie z.B. im Laboratorium verwendet wird. Für die

verlustlose Leitung gilt $R' = G' = 0$. Ihr Ausbreitungskoeffizient ist daher wegen (195)

$$\gamma = j\omega \sqrt{L'C'} \quad (209)$$

Aus (209) folgt wegen (196)

$$|\alpha = 0, \gamma = j\beta \text{ mit } \beta = \omega \sqrt{L'C'}| \quad (210)$$

Auf der verlustlosen Leitung findet also keine Dämpfung, sondern nur eine Phasendrehung statt, und zwar wird die Spannungs- (bzw. Strom-)Phase um den Winkel $\beta = \omega \sqrt{L'C'}$ pro Längeneinheit gedreht. Die verlustlose Leitung ist also verzerrungsfrei. Der Wellenwiderstand der verlustlosen Leitung ist wegen (192)

$$|Z_L = \sqrt{\frac{L}{C}}| \quad (211)$$

also reell. Für die verlustlose Paralleldrahtleitung folgt aus (211) für $\mu_r = 1$ wegen (185) und $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 120\pi \Omega$

$$Z_L/\Omega \approx \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{2a}{d} \quad (212)$$

Paralleldrahtleitungen besitzen gewöhnlich Z_L -Werte von 10...1000 Ω , z.B. häufig 600 Ω . Für die verlustlose Koaxialleitung folgt aus (211) für $\mu_r = 1$ wegen (186) und $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 120\pi \Omega$

$$Z_L/\Omega \approx \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} \quad (213)$$

Koaxialleitungen besitzen gewöhnlich Z_L -Werte von 50...150 Ω . Dabei werden besonders häufig verwendet:

$Z_L = 50 \Omega$ oder seltener 60 Ω : gute Spannungsfestigkeit, geringe Erwärmung, in der HF-Technik bevorzugt benutzt,

$Z_L = 75 \Omega$: kleines α , z.B. für Fernsehubertragung,

$Z_L = 150 \Omega$: kleines C' .

Für die verlustlose Leitung ergeben sich aus den Gln. (201) wegen (210) die Leitungsgleichungen

$$|\begin{aligned} U &= U_0 \cos \beta l + j I_0 Z_L \sin \beta l \\ I &= j \frac{U_0}{Z_L} \sin \beta l + I_0 \cos \beta l \end{aligned}| \quad (214)$$

Ist die verlustlose Leitung mit dem komplexen Widerstand

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{U}_o}{\underline{I}_o} = R_2 + jX_2 \quad (215)$$

abgeschlossen, so können wir die Leitungsgleichungen (214) auch schreiben

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_o (\cos \beta l + j \frac{Z_L}{Z_2} \sin \beta l) \\ \underline{I} &= \underline{I}_o (\cos \beta l + j \frac{Z_2}{Z_L} \sin \beta l)\end{aligned} \quad (216)$$

Der Eingangswiderstand der verlustlosen Leitung im Abstand l vor dem Lastwiderstand \underline{Z}_2 ist wegen (216)

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2 \cos \beta l + j Z_L \sin \beta l}{\cos \beta l + j \frac{Z_2}{Z_L} \sin \beta l}$$

oder

$$\underline{Z}_{e1} = \frac{\underline{Z}_2 + j Z_L \tan \beta l}{1 + j \frac{Z_2}{Z_L} \tan \beta l} \quad (217)$$

G1.(217) beschreibt die Impedanztransformation des Lastwiderstandes \underline{Z}_2 auf den Eingang der Leitung.

4.4.2 Wellenausbreitung auf der verlustlosen Leitung

Aus den Leitungsgleichungen (214) folgt für Spannung und Strom an einer Stelle l auf der Leitung vor dem Lastwiderstand \underline{Z}_2 ($l = 0$), wenn wir die Beziehungen

$$\cos \beta l = \frac{e^{j\beta l} + e^{-j\beta l}}{2}, \quad \sin \beta l = \frac{e^{j\beta l} - e^{-j\beta l}}{2j}$$

verwenden:

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_o + Z_L \underline{I}_o)e^{j\beta l} + \frac{1}{2}(\underline{U}_o - Z_L \underline{I}_o)e^{-j\beta l} \\ \underline{I} &= \frac{1}{2}(\frac{\underline{U}_o}{Z_L} + \underline{I}_o)e^{j\beta l} - \frac{1}{2}(\frac{\underline{U}_o}{Z_L} - \underline{I}_o)e^{-j\beta l}\end{aligned} \quad (218)$$

Führen wir in der Spannungsgleichung (218) die Größen

$$\left| \begin{array}{l} \underline{U}_h = \frac{1}{2}(\underline{U}_o + Z_L \underline{I}_o) \\ \underline{U}_r = \frac{1}{2}(\underline{U}_o - Z_L \underline{I}_o) \end{array} \right. \quad (219)$$

ein, so erhalten wir

$$\underline{U} = \underline{U}_h e^{j\beta l} + \underline{U}_r e^{-j\beta l} \quad (220)$$

Der komplexe Momentanwert $\underline{u} = \underline{u}(l, t)$ der Spannung an einem Ort l auf der Leitung zum Zeitpunkt t ist bei harmonischer Erregung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$, f Frequenz, wegen (220)

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \hat{\underline{U}} e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U}_h e^{j\omega t} \\ &= \sqrt{2} \underline{U}_h e^{j(\omega t + \beta l)} + \sqrt{2} \underline{U}_r e^{j(\omega t - \beta l)} \\ &= \underline{u}_h + \underline{u}_r \end{aligned} \quad (221)$$

Wir betrachten den ersten Term rechts in (221)

$$\underline{u}_h = \hat{\underline{U}}_h e^{j(\omega t + \beta l)} \quad (222)$$

mit der komplexen Amplitude $\hat{\underline{U}}_h = \hat{\underline{U}}_h e^{j\varphi_{ho}}$, φ_{ho} Nullphasenwinkel. Der physikalische Momentanwert u_h der Spannung ist der Realteil von \underline{u}_h :

$$u_h = \operatorname{Re}(\underline{u}_h) = \hat{\underline{U}}_h \cos(\omega t + \beta l + \varphi_{ho}) \quad (223)$$

Für eine bestimmte Phase, d.h. für konstantes l und t , gilt für das Argument der Cosinusfunktion (223)

$$\omega t + \beta l + \varphi_{ho} = C_1$$

also

$$l = -\frac{\omega}{\beta} t + C_2$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten sind. Bei wachsendem t nimmt also l ab. Eine Ebene $l = \text{const}$ senkrecht zur l -Achse, d.i. eine ebene "Wellenfront", schreitet daher im Verlauf der Zeit t auf der Leitung in Richtung der negativen l -Achse fort. Der Term \underline{u}_h Gl.(222) beschreibt folglich eine vom Generator kommende, am Lastwiderstand einfallende (hinlaufende), ebene elektromagnetische Welle auf der Leitung. Die Leitungswelle

wird auch als eine TEM-Welle (= Transversal elektromagnetische Welle) bezeichnet, weil der elektrische und der magnetische Feldvektor der Welle senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle gerichtet sind. Die Leitung dient lediglich zur Führung der elektromagnetischen Welle, die sich in dem dielektrischen Raum zwischen den beiden Leitern der Leitung ausbreitet. Ein Momentanbild der einfallenden Leitungswelle ist in Bild 86 dargestellt. Auf die gleiche Weise wie oben läßt sich zeigen, daß der Term U_r in Gl. (221) eine in der positiven l -Richtung fortschreitende, ebene elektromagnetische Welle beschreibt, d.i. eine vom Lastwiderstand in Richtung zum Generator reflektierte (rücklaufende) Welle.

In den Beziehungen (218) beschreibt jeweils der erste Summand die einfallende Welle und der zweite Summand die reflektierte Welle. Bilden wir das Verhältnis Spannung/Strom in der einfallenden und in der reflektierten Welle, so erhalten wir

$$Z_L = \frac{U_h}{I_h} = - \frac{U_r}{I_r} \quad (224)$$

Der Wellenwiderstand der Leitung bestimmt also das Verhältnis Spannung/Strom in jeder Teilwelle auf der Leitung.

Daher röhrt die Bezeichnung "Wellenwiderstand".

Als Wellenlänge λ einer Welle wird der Abstand zweier benachbarter Punkte gleicher Phase in der Welle bezeichnet: $8\lambda = 2\pi$. Es gilt also

$$| \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (225)$$

Die Wanderungsgeschwindigkeit einer ebenen Wellenfront wird

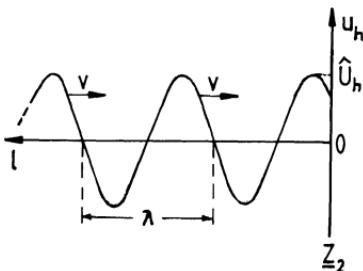


Bild 86 Einfallende Welle auf der verlustlosen Leitung

als die Phasengeschwindigkeit der ebenen Welle bezeichnet.
Es gilt die allgemeine Wellenbeziehung

$$| v = f \lambda \quad (226)$$

Für die Phasengeschwindigkeit einer forschreitenden Welle auf der verlustlosen Leitung folgt aus (226) wegen $f = \omega / 2\pi$, (225) und (210)

$$v = \frac{\omega}{B} = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \quad (227)$$

Aus (227) ergibt sich wegen (185) und (186)

$$| v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (228)$$

wobei

$$| c = f \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \quad (229)$$

die Phasengeschwindigkeit der Welle im Vakuum ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) \approx in Luft ist, d.i. der Wert der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. λ_0 in (229) ist die Wellenlänge im Vakuum \approx in Luft. Die Wellenlänge im Dielektrikum mit $\epsilon_r > 1$, $\mu_r > 1$ ist wegen (228), (226) und (229)

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad (230)$$

4.4.3 $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Leitung

a) $\lambda/4$ -Leitung

Für $l = \lambda/4$ folgt wegen (225) $B_1 = \tilde{\pi}/2$, $\tan \tilde{\pi}/2 = \infty$ und hiermit aus (217)

$$| \underline{Z}_{e1} = \frac{z_L^2}{\underline{Z}_2} \quad (231)$$

Die $\lambda/4$ -Leitung bildet also an ihrem Eingang aus dem Abschlußwiderstand \underline{Z}_2 den dualen Widerstand $\underline{Z}_L^2 / \underline{Z}_2$. Die $\lambda/4$ -Leitung stellt daher einen Dualtransformator (Dualüber-setzer) dar. Sie wird in der Praxis zur Anpassung reeller Widerstände benutzt. Man kann mit einer $\lambda/4$ -Leitung z.B.

zwei Leitungen verschiedenen Wellenwiderstandes oder eine Antenne und ein Anschlußkabel anpassen. Ein Ausführungsbeispiel eines koaxialen Leitungstransformators ist in Bild 87 dargestellt. Der Wellenwiderstand Z_{L2} der $\lambda/4$ -Leitung muß wegen (231) gleich dem geometrischen Mittel der Wellenwiderstände Z_{L1} und Z_{L3} der beiden anzupassenden Leitungen sein:

$$Z_{L2} = \sqrt{Z_{L1} Z_{L3}} \quad (232)$$

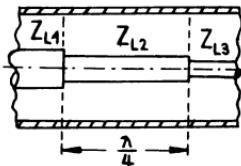


Bild 87 Koaxialer
Leitungs-
transformator

An den beiden Stoßstellen Z_{L1}/Z_{L2} und Z_{L2}/Z_{L3} ist dann Reflexionsfreiheit vorhanden, d.h. einfallende Wellen werden an diesen Stellen nicht reflektiert (vgl. 4.5.2). Die $\lambda/4$ -Transformation ist nur für eine Frequenz bzw. Wellenlänge exakt, nämlich für die Wellenlänge, bei der die Leitungslänge gleich $\lambda/4$ ist.

b) $\lambda/2$ -Leitung

Für $l = \lambda/2$ folgt wegen (225) $\beta l = \pi$, $\tan \pi = 0$, also aus (217)

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_2 \quad (233)$$

Die $\lambda/2$ -Leitung transformiert also nicht, sondern polt nur die Phasen von Spannung und Strom um, $\underline{U} = -\underline{U}_0$, $\underline{I} = -\underline{I}_0$. Die $\lambda/2$ -Leitung stellt daher einen Umpoltransformator mit dem Übersetzungsverhältnis $ü = -1$ dar.

Der Abschlußwiderstand Z_2 wiederholt sich in den Abständen $n\lambda/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) vom Leitungsende.

4.5 Reflexionsfaktor. Angepaßte und fehlangepaßte Leitung

4.5.1 Last- und Eingangsreflexionsfaktor. Fehlersatz

Der Lastreflexionsfaktor ist der Reflexionsfaktor des Lastwiderstandes Z_2 am Leitungsende $l = 0$ und ist definiert durch

$$r_o = \frac{U_r}{U_h} \quad (234)$$

Für die verlustlose Leitung mit dem reellen Wellenwiderstand Z_L folgt aus (234) wegen (219)

$$r_o = \frac{\frac{U_o}{U_o} - Z_L \frac{I_o}{I_o}}{\frac{U_o}{U_o} + Z_L \frac{I_o}{I_o}} = \frac{\frac{U_o}{I_o} - Z_L}{\frac{U_o}{I_o} + Z_L}$$

und hieraus wegen (215)

$$r_o = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} \quad (235)$$

Das Spannungsverhältnis U_r/U_h wird also allein durch den Lastwiderstand Z_2 bestimmt.

Der Eingangsreflexionsfaktor der Leitung im Abstand l vor dem Lastwiderstand Z_2 ist entsprechend der Beziehung (235) gegeben durch

$$r_{e1} = \frac{Z_{e1} - Z_L}{Z_{e1} + Z_L} \quad (236)$$

Aus (236) folgt die Umkehrung

$$Z_{e1} = Z_L \frac{1 + r_{e1}}{1 - r_{e1}} \quad (237)$$

Gehen wir mit (217) in (236) ein, so ergibt sich für die verlustlose Leitung

$$r_{e1} = \frac{(Z_2 - Z_L)(1 - j \tan \beta l)}{(Z_2 + Z_L)(1 + j \tan \beta l)}$$

und hieraus wegen

$$\frac{1 - j \tan \beta l}{1 + j \tan \beta l} = \frac{\cos \beta l - j \sin \beta l}{\cos \beta l + j \sin \beta l} = e^{-j 2 \beta l}$$

bei Berücksichtigung von (235)

$$| \underline{r}_{e1} = \underline{r}_o e^{-j 2 \beta l} = \underline{r}_o e^{-j \frac{4 \pi l}{\lambda}} \quad (238)$$

Die Beziehung (238) ist der "Fehlersatz" der Leitungstheorie von R. F e l d t k e l l e r (1925):

| Der Eingangsreflexionsfaktor einer verlustlosen Leitung folgt aus dem Lastreflexionsfaktor durch Multiplikation mit $e^{-j 2 \beta l}$.

4.5.2 Angepaßte Leitung

Wird eine Leitung angepaßt abgeschlossen, d.h. wird sie mit einem ihrem Wellenwiderstand Z_L gleichen Widerstand abgeschlossen

$$\underline{Z}_2 = Z_L \quad (239)$$

so folgt aus den Leitungsgleichungen (216)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_o (\cos \beta l + j \sin \beta l) = \underline{U}_o e^{j \beta l} \\ \underline{I} &= \underline{I}_o (\cos \beta l + j \sin \beta l) = \underline{I}_o e^{j \beta l} \end{aligned} \quad (240)$$

Die Effektivwerte bzw. die Amplituden von Spannung und Strom sind dann also längs der ganzen Leitung gleich groß, und bei beiden Größen tritt eine stetige, der Leitungslänge l proportionale Phasendrehung auf. Für den Eingangswiderstand der angepaßten Leitung folgt aus (217) wegen (239)

$$\underline{Z}_{e1} = \underline{U}/\underline{I} = Z_L \quad (241)$$

Es ergibt sich also der Wellenwiderstand der Leitung, in Übereinstimmung mit der Definition (190). Da Z_L reell ist, sind Spannung und Strom auf der ganzen angepaßten Leitung in Phase. Auf der angepaßten Leitung wird daher nur Wirkleistung zum Verbraucher transportiert. Aus diesem Grund wird bei der Energie- und Nachrichtenübertragung auf Leitungen gewöhnlich der Anpassungsfall angestrebt.

Im Anpassungsfall (239) folgt aus (235) und (234) $r_0 = 0$, $U_r = 0$, d.h. die reflektierte Welle auf der Leitung verschwindet. Im Anpassungsfall treten also nur einfallende Wellen auf der Leitung auf, die zum Lastwiderstand Z_2 laufen und dort vollständig absorbiert werden. Die Anpassungsbedingung $Z_2 = Z_L$ stellt daher die Bedingung für Reflexionsfreiheit am Lastwiderstand Z_2 dar.

4.5.3 Fehlanangepaßte Leitung mit reellem Abschlußwiderstand. Anpassungs- und Welligkeitsfaktor

Bei Fehlanpassung $Z_2 \neq Z_L$ einer Leitung wird ein Teil der einfallenden Welle vom Lastwiderstand Z_2 in den Eingang der Leitung reflektiert, wodurch die Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung verändert wird. Auf diese Weise wird ein vom Wellenwiderstand Z_L abweichender Eingangswiderstand Z_{e1} , im Falle einer verlustlosen Leitung gemäß Gl.(217), hervorgerufen.

Eine verlustlose Leitung soll mit dem reellen Widerstand

$$R_2 = m Z_L < Z_L \quad (242)$$

mit $0 \leq m \leq 1$ abgeschlossen sein. Für die Spannung an einem Ort 1 auf der Leitung gilt dann wegen (216), (242) und (225)

$$U = U_0 \left(\cos \frac{2\pi l}{\lambda} + j \frac{1}{m} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \right) \quad (243)$$

Der Effektivwert der Spannung längs der Leitung ist wegen (243)

$$U = U_0 \sqrt{\cos^2 \frac{2\pi l}{\lambda} + \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}} \quad (244)$$

mit

$$\text{Spannungsminima } U_{\min} = U_0 \quad \text{bei } l = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \dots \quad (245)$$

$$\text{Spannungsmaxima } U_{\max} = \frac{U_0}{m} \quad \text{bei } l = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

Aus (245) folgt

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} \quad (246)$$

Die Größe m wird als der Anpassungsfaktor bezeichnet. Die Spannungsverteilung auf der Leitung ist in Bild 88 dargestellt. An den Orten, wo Spannungsmaxima auftreten, sind einfallende und reflektierte Spannungswelle in Phase, sodaß sich dort ihre Effektivwerte addieren:

$$U_{\max} = U_h + U_r \quad (247)$$

An den Orten, wo die Spannungsminima auftreten, sind die beiden Spannungswellen gegenphasig, sodaß dort nur die Differenz der Effektivwerte wirksam ist:

$$U_{\min} = U_h - U_r \quad (248)$$

Das Spannungsminimum am Leitungsende $l = 0$ wiederholt sich in den Abständen $n \lambda/2$ ($n = 1, 2, \dots$) vom Leitungsende. In diesen Abständen wiederholt sich gemäß 4.4.3 auch der Abschlußwiderstand R_2 . An den U_{\min} -Orten ist also der Eingangswiderstand der Leitung reell und gleich R_2 . An den U_{\max} -Orten, die in den Abständen $\lambda/4$ von den U_{\min} -Orten liegen, ist der Eingangswiderstand der Leitung ebenfalls reell, denn ein Leitungsstück der Länge $\lambda/4$ transformiert den Widerstand R_2 gemäß (231) in den Widerstand Z_L^2/R_2 .

Für den Reflexionsfaktorbetrag gilt wegen (238) und (234)

$$r = |r_{e1}| = |r_0| = \frac{U_r}{U_h} \quad (249)$$

Aus (246) folgt wegen (247), (248) und (249)

$$\left| m = \frac{1 - r}{1 + r} \right. \quad (250)$$

und hieraus die Umkehrung

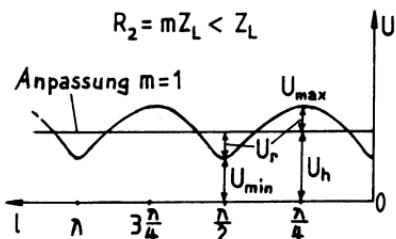


Bild 88 Spannungsverteilung auf einer Leitung mit der Last $R_2 < Z_L$

$$r = \frac{1-m}{1+m} \quad (251)$$

Ist die Leitung mit dem reellen Widerstand $R_2 = Z_L/m > Z_L$ abgeschlossen, so verschiebt sich die Spannungsverteilung auf der Leitung gegenüber der Kurve Bild 88 um $\lambda/4$. Dies ist wieder in der Eigenschaft der $\lambda/4$ -Leitung begründet, die den Widerstand mZ_L in den Widerstand Z_L/m transformiert.

Man definiert auch den Welligkeitsfaktor (Stehwellenverhältnis, SWR vom engl. Standing Wave Ratio)

$$s = \frac{1}{m} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \quad (252)$$

mit $1 \leq s \leq \infty$. Bei Anpassung gilt $m = s = 1$, und die Welligkeit auf der Leitung ist verschwunden.

Der Anpassungsfaktor m (bzw. der Welligkeitsfaktor s) und damit auch der Reflexionsfaktorbetrag r können mit der HF-Meßleitung bestimmt werden, d.i. gewöhnlich eine Koaxialleitung, die im Mantel einen Längsschlitz der Länge $\sim \lambda$ besitzt. Die Spannungsverteilung längs der Leitung wird im Schlitz mit einer beweglichen Sonde (Metallstift) abgetastet, die mit einer Diode und einem Drehspulinstrument verbunden ist. Auf diese Weise kann z.B. auch eine unbekannte Abschlußimpedanz Z_2 ermittelt werden (vgl. Beispiel 19).

Der Reflexionsfaktor an einer Stelle 1 auf der Leitung

$$r_{e1}(1) = \frac{U_r(1)}{U_h(1)} \quad (253)$$

kann nach Betrag und Phase mit Hilfe von Richtkopplern bestimmt werden. Ein Richtkoppler koppelt einen Teil der in einer Hauptleitung laufenden Welle in eine Nebenleitung aus, und zwar entweder nur von der einfallenden Welle (Vorwärtswellenkoppler) oder nur von der reflektierten Welle (Rückwärtswellenkoppler) in der Hauptleitung. Man kann auf diese Weise $U_h(1)$ und $U_r(1)$ einzeln auf der Leitung messen.

4.6 Reaktanzleitungen

4.6.1 Kurzgeschlossene verlustlose Leitung

Für eine am Ende kurzgeschlossene verlustlose Leitung ($Z_2 = 0$) folgt aus (235) und (234) $r_o = -1$, $U_r = -U_h$. Die reflektierte und die einfallende Spannungswelle besitzen also gleich große Effektivwerte bzw. Amplituden, d.h. es erfolgt eine Totalreflexion der einfallenden Spannungswelle am kurzgeschlossenen Leitungsende. Die Spannung erfährt dabei am Leitungsende einen Phasensprung von 180° (wegen des negativen r_o). Auf der kurzgeschlossenen Leitung werden am Leitungsende $I = 0$ ein

Spannungsknoten

$U_{\min} = U_h - U_r = 0$ und
ein Strombauch

$I_{\max} = U_{\max}/Z_L$ erzwun-
gen. Die Spannungsknoten
und die Strombäuche wie-
derholen sich in den Ab-
ständen $n \lambda/2$ ($n = 1, 2, \dots$)
vom Leitungsende (Bild 89,
in diesen Abständen wieder-
holt sich der Abschlußwi-
derstand). In den Abständen

$(2n + 1) \lambda/4$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) vom Leitungsende treten Span-
nungsbäuche $U_{\max} = U_h + U_r = 2U_h$ und Stromknoten $I_{\min} = 0$
auf. Auf der kurzgeschlossenen Leitung gehen also die Span-
nungs- und Stromminima bis auf Null zurück. Da die einfal-
lende und die reflektierte Welle gleichgroße Amplituden und
damit die gleiche Energie besitzen, wird insgesamt keine
Energie transportiert. Auf der kurzgeschlossenen Leitung
tritt folglich eine am Ort stehende elektromagnetische
Schwingung auf, die als eine stehende Welle bezeichnet wird.
In der stehenden Welle pendelt Blindenergie am Ort ihrer
Entstehung zwischen der elektrischen Energie der Spannungs-
welle und der magnetischen Energie der Stromwelle hin und

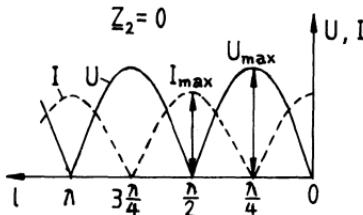


Bild 89 Spannungs- und Strom-
verteilung in einer
stehenden Welle

her. Ein Transport von Wirkleistung findet nicht statt. Für den Eingangswiderstand der kurzgeschlossenen Leitung folgt aus (217) wegen $Z_2 = 0$ und (225)

$$Z_k = jX_k = j Z_L \tan \frac{2\pi l}{\lambda} \quad (254)$$

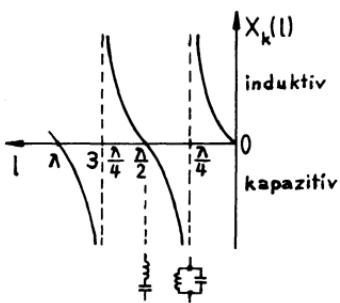


Bild 90 Eingangsreaktanz der kurzgeschlossenen verlustlosen Leitung

d.i. eine reine Reaktanz. Die kurzgeschlossene verlustlose Leitung wird deshalb als eine Reaktanzleitung bezeichnet. Der Eingangsreaktanzverlauf $X_k(l)$ ist in Bild 90 dargestellt. Die Leitung wirkt auf dem Abschnitt $0 < l < \lambda/4$ induktiv, auf dem Abschnitt $\lambda/4 < l < \lambda/2$ kapazitiv, auf dem Abschnitt $\lambda/2 < l < 3\lambda/4$ wieder induktiv usf. Der Leitungseingang verhält sich an

den Stellen $X_k = 0$ wie ein Serienschwingkreis und an den Stellen $X_k = \pm\infty$ wie ein Parallelschwingkreis. Die kurzgeschlossene $\lambda/4$ -Leitung wirkt also wie ein Parallelschwingkreis ($\lambda/4$ -Resonator) und wird in koaxialer Ausführung als Bandpaß im Dezimeterwellenbereich eingesetzt. (Der technische $\lambda/4$ -Resonator ist verlustbehaftet).

4.6.2 Offene verlustlose Leitung

Für eine am Ende offene (leerlaufende) verlustlose Leitung ($Z_2 = \infty$) folgt aus (235) und (234) $Z_o = 1$, $U_r = U_h$, d.h. die einfallende Spannungswelle wird am offenen Leitungsende total reflektiert. Auf der offenen Leitung bildet sich daher wie auf der kurzgeschlossenen Leitung eine stehende Welle aus, nur mit dem Unterschied, daß sich am Ende der offenen Leitung ein Spannungsbauch und ein Stromknoten befinden. Die sich einstellende Spannungs- und Stromverteilung ist

also gegenüber den Kurven der kurzgeschlossenen Leitung Bild 89 um $\lambda/4$ verschoben. Für den Eingangswiderstand der offenen Leitung folgt aus (217) wegen $Z_2 = \infty$

$$Z_1 = jX_1 = -j Z_L \cot \frac{2\pi l}{\lambda} \quad (255)$$

also wieder eine reine Reaktanz. Die offene verlustlose Leitung stellt daher ebenfalls eine Reaktanzleitung dar.

Die Bedeutung der Reaktanzleitungen besteht darin, daß mit ihnen je nach der Bemessung ihrer Längen sowohl induktive als auch kapazitive Blindwiderstände von 0 bis ∞ realisiert werden können. Da jedoch die Bedingung Leerlauf bei hohen Frequenzen wegen der dann auftretenden Abstrahlung elektromagnetischer Wellenenergie vom offenen Leitungsende nicht erfüllt werden kann, werden in der Praxis als Reaktanzleitungen fast ausschließlich kurzgeschlossene Leitungen verwendet.

4.6.3 Stichleitungen

Kurzgeschlossene Reaktanzleitungen werden bei Frequenzen $f \gtrsim 100$ MHz in Leitungsanpassungsschaltungen eingesetzt, die den komplexen Eingangswiderstand einer Leitung in den reellen Wellenwiderstand Z_L einer vorgesetzten Leitung transformieren. Dabei wird z.B. auf der Verbraucherseite eine kurzgeschlossene Reaktanzleitung von der Länge l_k und dem Eingangsleitwert gemäß (254)

$$Y_k = jB_k = \frac{1}{Z_k} = -j \frac{1}{Z_L} \cot \frac{2\pi l_k}{\lambda} \quad (256)$$

aus technischen Gründen meist parallel zur Übertragungsleitung zwischen Generator und Verbraucher geschaltet. Eine solche Reaktanzleitung wird als eine Stichleitung (Kompen-sationsleitung) bezeichnet. Bei einer Paralleldrahtleitung ergibt sich die Anordnung Bild 91 a und bei einer Koaxialleitung die Anordnung Bild 91 b. Die Übertragungsleitung besitzt an der "Stichstelle" l_1 den Eingangsleitwert

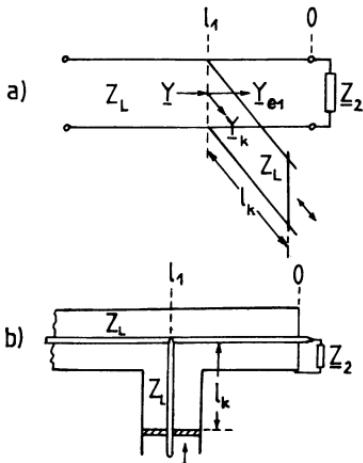


Bild 91 Leitungsanpassung mit einer Stichleitung

- a) bei der Paralleleldrahtleitung,
- b) bei der Koaxialleitung

$$\underline{Y}_{e1} = G_{e1} + jB_{e1}$$

Zu \underline{Y}_{e1} wird der Blindleitwert $\underline{Y}_k = jB_k$ der Stichleitung parallel geschaltet. Der gesamte Leitwert an der Stelle l_1 ist daher

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \underline{Y}_{e1} + \underline{Y}_k \\ &= G_{e1} + j(B_{e1} + B_k)\end{aligned}$$

An der Stelle l_1 auf der Übertragungsleitung ergeben sich dann die Anpassungsbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_L} &= G_{e1} \quad (257) \\ B_k &= -B_{e1}\end{aligned}$$

Die Stichstelle l_1 auf der Übertragungsleitung muß also so gewählt werden, daß dort die erste Bedingung (257) erfüllt ist. Der Leitwert \underline{Y}_k der Stichleitung wird durch Verändern ihrer Länge l_k mittels eines verschiebbaren Kurzschlusses (z.B. Metallbügel) so eingestellt, daß die zweite Bedingung (257) erfüllt ist.

4.7 Smith-Diagramm

4.7.1 Konforme Abbildung der Z' -Halbebene auf die r -Ebene

Der auf Z_L normierte Eingangswiderstand an einem Ort l auf der verlustlosen Leitung ist

$$\underline{Z}' = R' + jX' = \frac{\underline{Z}_{e1}}{Z_L} = \frac{R_{e1}}{Z_L} + j \frac{X_{e1}}{Z_L} \quad (258)$$

oder wegen (237)

$$\left| \underline{Z}' = \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \right. \quad (259)$$

wobei $\underline{r} \equiv \underline{r}_{e1}$ der Eingangsreflexionsfaktor an der Stelle 1 auf der Leitung ist. Gemäß (238) gilt

$$\underline{r} = u + jv = \underline{r}_o e^{-j2\beta l} = \underline{r}_o e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}} \quad (260)$$

Hierbei ist \underline{r}_o der Lastreflexionsfaktor, d.h. der Reflexionsfaktor am Leitungsende $l = 0$.

Aus (259) folgt die Umkehrung

$$\left| \underline{r} = \frac{\underline{Z}' - 1}{\underline{Z}' + 1} \right. \quad (261)$$

Mit Hilfe der Gl.(259) bzw. (261) wird die rechte \underline{Z}' -Halbebene ($R' > 0$ ist vorausgesetzt, also passive Schaltelemente) konform (d.h. im Kleinen winkelstreu) auf die Ebene des Reflexionsfaktors \underline{r} abgebildet.

Wir können (259) wegen (258) und (260) auch schreiben

$$R' + jX' = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv}$$

Spalten wir diese Gleichung in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir

$$R' = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2}, \quad X' = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2} \quad (262)$$

Stellen wir die Gln. (262) in der folgenden Weise um

$$u^2 - 2u \frac{R'}{1 + R'} + v^2 + \frac{R' - 1}{R' + 1} = 0$$

$$(u - 1)^2 + v^2 - 2 \frac{v}{X'} = 0$$

und fügen auf beiden Seiten die quadratische Ergänzung $[R'/(1 + R')]^2$ bzw. $(1/X')^2$ hinzu, so erhalten wir

$$(u - \frac{R'}{1 + R'})^2 + v^2 = (\frac{1}{1 + R'})^2 \quad (263)$$

$$(u - 1)^2 + (v - \frac{1}{X'})^2 = (\frac{1}{X'})^2 \quad (264)$$

das sind die Gleichungen zweier Kreisscharen in der r-Ebene.
Aus (263) ergeben sich die folgenden Abbildungen:

Geraden $R' = \text{const}$ \longrightarrow Kreise mit den Radien

$Q_{R'} = 1/1 + R'$ und den Mittelpunkten bei $u = R'/1 + R'$, $v = 0$
(auf der u-Achse),

speziell:

Gerade $R' = 0 \cong jX'$ -Achse \longrightarrow Kreis mit dem Radius 1 und
dem Mittelpunkt bei
 $u = v = 0$: Einheitskreis.

Aus (264) folgen die Abbildungen:

Geraden $X' = \text{const}$ \longrightarrow Kreise mit den Radien $Q_{X'} = 1/|X'|$
und den Mittelpunkten bei $u = 1$,
 $v = 1/X'$,

speziell:

Gerade $X' = 0 \cong R'$ -Achse \longrightarrow u-Achse.

Sämtliche Kreise in der r-Ebene liegen innerhalb des Einheitskreises mit $|r| = 1$, d.h. die ganze, unendlich ausgedehnte Z'-Halbebene mit $R' > 0$ wird auf das Innere des Einheitskreises in der r-Ebene abgebildet. Alle Kreise gehen dabei durch den Punkt $u = 1$. Die Kreise $R' = \text{const}$, $X' = \text{const}$ stellen ein krummliniges Koordinatennetz der Z'-Ebene dar, das der r-Ebene überlagert ist (es liegt eine komplexe Doppellebene vor), d.i. das Smith-Diagramm Bild 92 rechts (P. H. Smith, 1939). Aus dem Smith-Diagramm können der Realteil u und der Imaginärteil v von r entnommen werden. Es ist jedoch zweckmäßiger, dem Smith-Diagramm den Reflexionsfaktor r in Polarkoordinaten, d.h. nach Betrag und Phase gemäß Gl.(260), zu entnehmen (s. 4.7.2). Auf das rechtwinklige Koordinatennetz der "unterlagerten" r-Ebene kann dann verzichtet werden, sodaß die Achsen u und jv im Smith-Diagramm gewöhnlich fortgelassen werden.

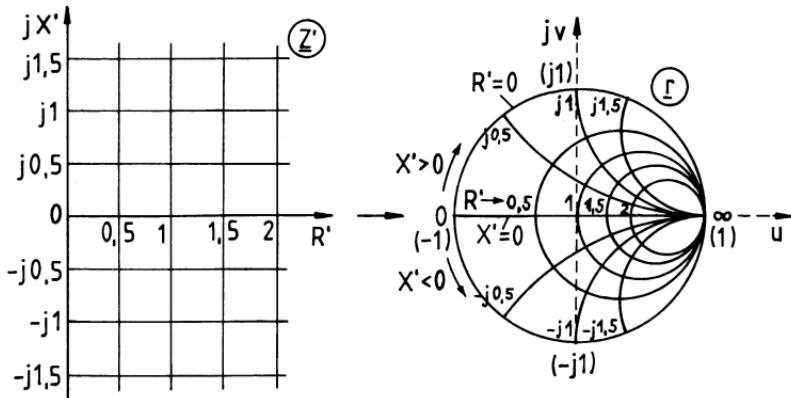


Bild 92 Abbildung der Z' -Halbebene auf das Innere des Einheitskreises in der r -Ebene

4.7.2 r- und m-Kreise. $1/\lambda$ -Geraden

Schreiben wir den Lastreflexionsfaktor in der Form

$$r_0 = r e^{j\varphi_0} \quad (265)$$

mit dem Nullphasenwinkel φ_0 , so folgt für den Eingangsreflexionsfaktor (260)

$$r = u + jv = r e^{j\varphi} \quad \text{mit } \varphi = \varphi_0 - \frac{4\pi l}{\lambda} \quad (266)$$

Der Reflexionsfaktor r an einem Ort auf der Leitung im Abstand l vom Lastwiderstand kann daher nach Betrag r und Phase φ dem Smith-Diagramm entnommen werden (Bild 93. Die Phase wird von der positiven u -Achse aus positiv im mathematisch positiven Drehsinn gezählt). Der Mittelpunkt des Smith-Diagramms entspricht dem Reflexionsfaktor

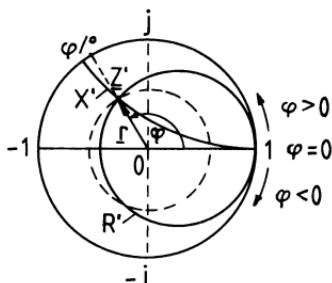


Bild 93 Reflexionsfaktor r im Smith-Diagramm

$\underline{Z} = 0$ bzw. wegen (259) dem \underline{Z}' -Wert

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_{e1}}{\underline{Z}_L} = R' = 1 \text{ bzw. } \underline{Z}_{e1} = \underline{Z}_L$$

d.i. der Fall der angepaßten Leitung $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_L$. Der Mittelpunkt $r = 0$ bzw. $R' = 1$ des Smith-Diagramms wird daher auch als der Anpassungspunkt bezeichnet. Einem konstanten Reflexionsfaktorbetrag r entspricht ein fester Abstand vom Mittelpunkt des Smith-Diagramms. Die Ortskurven $r = \text{const}$ sind daher konzentrische Kreise um den Mittelpunkt des Smith-Diagramms, die als r-Kreise bezeichnet werden (z.B. der gestrichelte Kreis in Bild 93). Man kann anstelle der r-Kreise mit

Hilfe von Gl.(250)

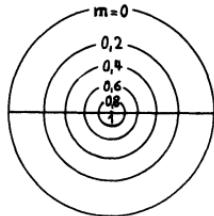


Bild 94 m-Kreise im Smith-Diagramm

$$m = \frac{1 - r}{1 + r}$$

auch die Kreise $m = \text{const}$ einführen, die als m-Kreise bezeichnet werden. Man erhält z.B. die folgende Tabelle:

r	0	0,11	0,25	0,43	0,66	1
	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0

Die m-Kreise im Smith-Diagramm sind ebenfalls konzentrisch (Bild 94). Der nichtlinearen m-Teilung entspricht im Smith-Diagramm die Skala für den Realteil R' des normierten Widerstandes \underline{Z}' auf der negativen u-Achse, denn wegen (242) gilt

$$m = \frac{R_2}{\underline{Z}_L} = R' \text{ für } R_2 < \underline{Z}_L \text{ bzw. } R' < 1$$

Die R' -Skala auf der positiven u-Achse im Smith-Diagramm entspricht der Teilung für den Welligkeitsfaktor $s = 1/m$.

Bei reellem Lastwiderstand $\underline{Z}_2 = R_2$, d.h. für $\varphi_0 = 0$, folgt aus (266)

$$\underline{r} = u + jv = r e^{-j \frac{4\pi l}{\lambda}} \quad (267)$$

und hieraus

$$\tan(-\frac{4\pi l}{\lambda}) = \frac{v}{u}$$

bzw.

$$v = -u \tan \frac{4\pi l}{\lambda} \quad (268)$$

(268) ist die Gleichung eines Geradenbüschels in der \underline{r} -Ebene durch den Mittelpunkt $\underline{r} = 0$ mit dem Parameter l/λ , das sind die l/λ -Geraden (Bild 95). Für die Bezeichnung des Umfanges des Smith-Diagramms ergibt sich:

$\frac{4\pi l}{\lambda}$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$1/\lambda$	0	0,125	0,25	0,375	0,5

Ein m -Kreis (oder ein r -Kreis) wird also für $l/\lambda = 0,5$ einmal voll durchlaufen. Dies bedeutet physikalisch, daß sich der Widerstand der Leitung für $l = \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \dots$ periodisch wiederholt (4.4.3).

Das vollständige Smith-Diagramm besitzt am Umfang die Gradeinteilung für den Winkel des

Reflexionsfaktors und zwei gegenläufige l/λ -

Skalen (Bild 96). Man verwendet die im Uhrzeigersinn laufende l/λ -Skala, d.i. auf der Leitung die Richtung zum Generator, wenn z.B. der Eingangswiderstand einer belasteten Leitung gesucht wird, und die entgegen dem Uhrzeigersinn

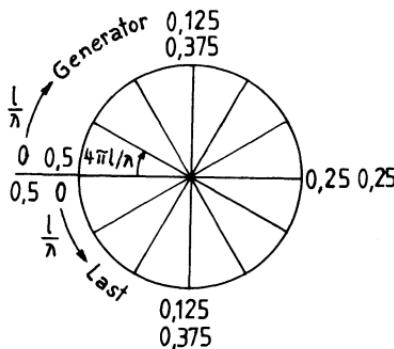


Bild 95 l/λ -Geraden im Smith-Diagramm

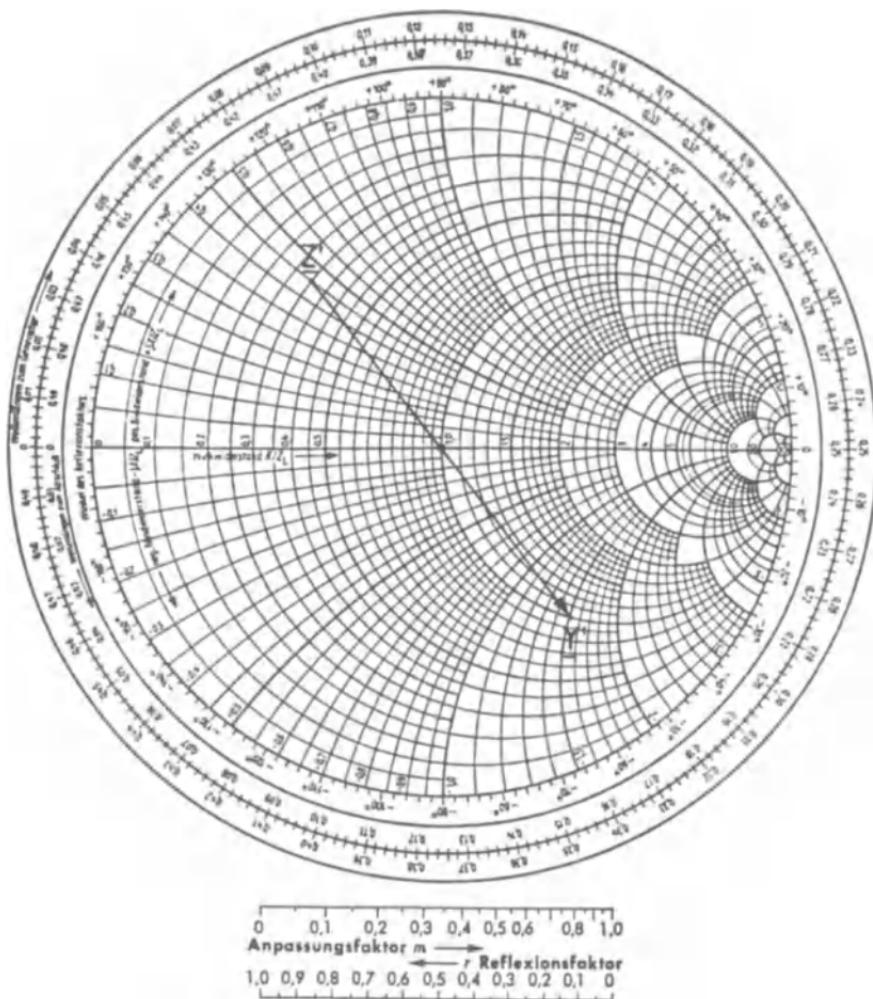


Bild 96 Smith-Diagramm

laufende $1/\lambda$ -Skala, d.i. auf der Leitung die Richtung zur Last, wenn z.B. der Lastwiderstand einer Leitung gesucht wird.

4.7.3 Inversion von Widerständen und Leitwerten

Die Inversion eines komplexen Widerstandes bzw. Leitwertes, d.h. die Operation

$$Y' = 1/Z'$$
 bzw.

$$Z' = 1/Y'$$
, erfolgt

im Smith-Diagramm

durch Spiegelung

am Anpassungspunkt

$$R' = 1, \text{ also am}$$

Mittelpunkt des

Smith-Diagramms

(Bild 97). Der

Grund hierfür ist,

daß z.B. die zu-

einander inversen

Punkte 0 und ∞

durch Spiegelung am Mittelpunkt $R' = 1$ auseinander hervor-
gehen.

Es ergibt sich beispielsweise

$$Z' = 0,3 + j 0,45 \longrightarrow Y' = 1 - j 1,5$$

(Bild 96). Die Spiegelung am Anpassungspunkt $R' = 1$ ent-
spricht einer Drehung im Smith-Diagramm um $\pi = 180^\circ$, also
einer $\lambda/4$ -Transformation. Die Zählung $1/\lambda$ für die Leitwerte
 $Y' = G' + jB'$ beginnt daher bei $u = 1$ im Uhrzeigersinn
(Bild 97).

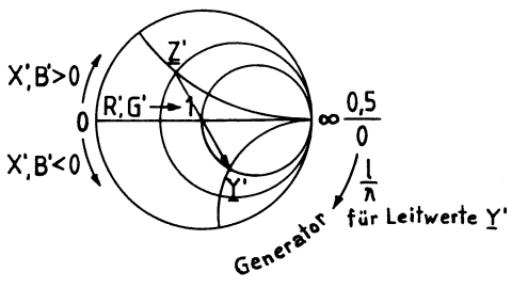


Bild 97 Inversion $Y' = 1/Z'$
im Smith-Diagramm

4.7.4 Transformationseigenschaften von Leitungen

Für die Transformationen mit Leitungen im Zusammenhang mit dem Smith-Diagramm gelten die folgenden wichtigen Sätze:

1. Sind der (auf Z_L) normierte Abschlußwiderstand $Z_2'(l_0/\lambda, m)$ einer Leitung und die Leitungslänge l bekannt, so ergibt sich der normierte Eingangswiderstand $Z'_e[(l_0+l)/\lambda, m]$ durch Bewegung auf dem zugehörigen m -Kreis im Uhrzeigersinn um $1/\lambda$.

2. Sind die Größen $(l_0 + 1)/\lambda, m$ einer abgeschlossenen Leitung bekannt, so ergibt sich der normierte Abschlußwiderstand $Z'_2(l_0/\lambda, m)$ durch Bewegung auf dem zugehörigen m -Kreis entgegen dem Uhrzeigersinn um $1/\lambda$.
3. Die vom normierten Abschlußwiderstand Z'_2 bis zum Punkt m auf der negativen u -Achse im Uhrzeigersinn durchlaufene $1/\lambda$ -Differenz ergibt den Ort des ersten Spannungsminimums (erstes Strommaximum) auf der Leitung.

Am Ort eines Spannungsminimums ist nämlich der Eingangswiderstand reell und durch $R_2 = mZ_L$ gegeben (vgl. 4.5.3):

$$R_{e1min} = R_2 = mZ_L \quad \text{bzw.} \quad R'_{e1min} = \frac{R_{e1min}}{Z_L} = m$$

Die von Z'_2 bis zum Punkt s auf der positiven u -Achse im Uhrzeigersinn durchlaufene $1/\lambda$ -Differenz ergibt den Ort des ersten Spannungsmaximums (erstes Stromminimum) auf der Leitung, da dieses vom ersten Spannungsminimum den Abstand $\lambda/4 \approx 180^\circ$ im Smith-Diagramm besitzt.

4. Die normierten Widerstandswerte von Reaktanzleitungen können am Umfang des Smith-Diagramms abgelesen werden. Am Umfang des Smith-Diagramms gilt nämlich $R' = 0$. Der normierte Widerstand einer Reaktanzleitung durchläuft die Werte $0, \pm j, \infty$.

Übungsaufgaben zu Abschn. 4 (Lösungen im Anhang):

Beispiel 18: Eine verlustlose Leitung mit der Länge 40 cm, dem Wellenwiderstand 50Ω und Polytetrafluoräthylen ("Teflon", $\epsilon_r = 2$, $\mu_r = 1$) als Dielektrikum ist mit dem Widerstand $Z_2 = (80 - j 40)\Omega$ abgeschlossen. Die Betriebsfrequenz beträgt 300 MHz. Man ermittle mit Hilfe des Smith-Diagramms

- a) den Eingangswiderstand,
- b) den Anpassungs- und Welligkeitsfaktor,
- c) den Last- und Eingangsreflexionsfaktor,
- d) den Ort des ersten Spannungsminimums auf der Leitung.

Beispiel 19: Auf einer verlustlosen Leitung mit dem Wellenwiderstand 60Ω und $\epsilon_r = \mu_r = 1$ wird der Anpassungsfaktor $m = 0,3$ gemessen und im Abstand 9 cm vor dem Lastwiderstand ein Spannungsminimum festgestellt. Die Betriebsfrequenz beträgt 600 MHz. Man ermittle mit Hilfe des Smith-Diagramms

- a) den Lastwiderstand,
- b) den Lastreflexionsfaktor.

Beispiel 20: Eine verlustlose Leitung mit dem Wellenwiderstand 50Ω und $\epsilon_r = \mu_r = 1$ ist mit dem Widerstand $Z_2 = (25 + j 15)\Omega$ abgeschlossen. Die Betriebsfrequenz beträgt 600 MHz. Durch Parallelschalten einer Stichleitung zur Übertragungsleitung soll Anpassung erzielt werden.

Man ermittle mit Hilfe des Smith-Diagramms

- a) den lastnächsten Ort auf der Übertragungsleitung, an dem die Stichleitung eingeschaltet werden muß,
- b) den Eingangsleitwert der Übertragungsleitung am Ort a), den Eingangsleitwert der Stichleitung und den Wert des Ersatzschaltelements der Stichleitung,
- c) die Länge der Stichleitung.

Anhang

Weiterführende Bücher

- [1] Fritzsche, G.: Theoretische Grundlagen der Nachrichtentechnik, Bd. 1-2, München-Pullach 1973
- [2] Rupprecht, W.: Netzwerksynthese, Berlin-Heidelberg-New York 1972
- [3] Unbehauen, R.: Synthese elektrischer Netzwerke, München-Wien 1972
- [4] Pregla, R./Schlosser, W.: Passive Netzwerke, Stuttgart 1972
- [5] Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 8. Aufl. Stuttgart 1962
- [6] Marko, H.: Theorie linearer Zweipole, Vierpole und Mehrtore, Stuttgart 1971
- [7] Freitag, H.: Einführung in die Zweitortheorie, 3. Aufl. Stuttgart 1984
- [8] Fricke, H./Lamberts, K./Patzelt, E.: Grundlagen der elektrischen Nachrichtenübertragung, Stuttgart 1979
- [9] Vaske, P.: Übertragungsverhalten elektrischer Netzwerke, 3. Aufl. Stuttgart 1983
- [10] Zinke, O./Brunswig, H.: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, Bd. 1, Berlin-Heidelberg-New York 1973
- [11] Meinke, H.: Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen, Bd. 1, Berlin-Heidelberg-New York 1965
- [12] Riemecker, W.: Elektrische Filtertechnik, München-Wien 1981
- [13] Paul, M.: Schaltungsanalyse mit s-Parameter, Heidelberg 1977

- [14] Budak, A.: Passive and active Network Analysis and Synthesis, Boston 1974
- [15] Weinberg, L.: Network Analysis and Synthesis, New York 1962
- [16] Pfitzenmaier, G.: Tabellenbuch Tiefpässe, Berlin-München 1971
- [17] Saal, R.: Handbuch zum Filterentwurf, Berlin-Frankfurt/Main 1979
- [18] Herpy, M./Berka, J.-C.: Aktive RC-Filter, München 1984
- [19] Schüßler, H.W.: Digitale Systeme zur Signalverarbeitung, Berlin-Heidelberg-New York 1973
- [20] Lacroix, A.: Digitale Filter, München-Wien 1980

Matrizen

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem, das auf der einen Seite n bekannte Größen y_1, \dots, y_n und auf der anderen Seite n unbekannte Größen x_1, \dots, x_n enthält, besitzt die Form

$$\begin{aligned}y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{269}$$

Die Koeffizienten a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, n$) in (269) sind beliebige reelle oder komplexe Zahlen. Das Gleichungssystem (269) lautet in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\tag{270}$$

bzw. in symbolischer Schreibweise

$$(y) = (a)(x) \quad (271)$$

mit der Matrix (a) und den Vektoren (y) und (x). Die Zahlen a_{ik} in (270) werden als die Elemente der Matrix (a) bezeichnet und sind in Zeilen (Index i) und Spalten (Index k) angeordnet. Eine Matrix stellt ein Koeffizientenschema eines Gleichungssystems dar. Sie besitzt, im Gegensatz zu einer Determinante, keinen Zahlenwert. Die Matrix (a) gemäß (270) wird als quadratisch bezeichnet, da Zeilenzahl und Spaltenzahl gleich sind. (Andernfalls wird die Matrix als rechteckig bezeichnet). Eine quadratische Matrix wird als singulär bezeichnet, wenn ihre Determinante gleich Null ist, $\Delta a = 0$. Als Einsmatrix (Einheitsmatrix) wird die quadratische Matrix

$$(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (272)$$

definiert.

Zwei Matrizen (a) und (b) können addiert werden, wenn beide Matrizen die gleiche Zeilenzahl m und die gleiche Spaltenzahl n besitzen. Man addiert dann die an gleichen Stellen stehenden Elemente. Z.B. gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \quad (273)$$

Eine Matrix wird mit einer Zahl k (reell oder komplex) multipliziert, indem man jedes Element mit k multipliziert.
Z.B. gilt

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix} \quad (274)$$

Zwei Matrizen können miteinander multipliziert werden, wenn die Zeilenzahl der einen Matrix gleich der Spaltenzahl der

anderen Matrix ist. Man "kombiniert" dann jede Zeile der einen Matrix linear mit jeder Spalte der anderen Matrix. Z.B. gilt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \quad (275)$$

Das Matrizenprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. die Faktoren sind nicht miteinander vertauschbar:

$$(a)(b) \neq (b)(a) \quad (276)$$

Dagegen gilt das assoziative Gesetz:

$$[(a)(b)](c) = (a)[(b)(c)] \quad (277)$$

Die zu einer quadratischen Matrix (a) inverse (reziproke) Matrix $(a)^{-1}$ ist definiert durch

$$(a)^{-1}(a) = (a)(a)^{-1} = (E) \quad (278)$$

Für z.B. eine zweireihige Matrix gilt

$$(a)(c) = (E)$$

oder ausführlich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente c_{ik} der Matrix $(c) = (a)^{-1}$ können mit Hilfe der Cramerschen Regel der Determinantenrechnung ermittelt werden. Dann ergibt sich

$$(a)^{-1} = \frac{1}{\Delta a} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (279)$$

mit der Determinante

$$\Delta a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (280)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß $\Delta a \neq 0$ gilt, die Matrix also nicht singulär ist.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Beispiel 6: a)

$$\begin{aligned} (\underline{A}) &= (\underline{A}_1)(\underline{A}_2) = \begin{pmatrix} 0 & R_{g1} \\ 1/R_{g1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_{g2} \\ 1/R_{g2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_{g1}/R_{g2} & 0 \\ 0 & R_{g2}/R_{g1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.i. ein idealer Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis
 $\ddot{u} = R_{g1}/R_{g2}$.

b)

$$\begin{aligned} (\underline{A}) &= (\underline{A}_1)(\underline{A}_2)(\underline{A}_3) = \begin{pmatrix} 0 & R_g \\ 1/R_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & R_g \\ 1/R_g & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & R_g^2 j\omega C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$L = R_g^2 C$$

also $Z = R_g^2 j\omega C = j\omega L$, d.i.
 die "hochliegende", d.h.
 erdfreie Induktivität $L = R_g^2 C$
 Bild 98.



Bild 98 Erdfreie Induktivität

Beispiel 7: a) Es liegt ein widerstandssymmetrisches Π -Glied mit $Z_1 = Z_3 = 1/j\omega C$, $Z_2 = j\omega L$ vor. Aus der Matrix (54) folgt dann

$$(\underline{A}) = \begin{pmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C(2 - \omega^2 LC) & 1 - \omega^2 LC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,948 & j314,2 \Omega \\ -j24,48 \text{ mS} & -2,948 \end{pmatrix}$$

b) Wir setzen in den Gln. (70) und (78) $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R$,

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}:$$

$$\underline{H}_B = e^{-\underline{s}_B} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0/2} = \frac{2}{2\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R + \underline{A}_{21}R}$$

$$= -0,13 e^{-j67,4^\circ} = 0,13 e^{j112,6^\circ}$$

$$(-1 = e^{j\pi}).$$

c) $\underline{s}_B = -\ln \underline{H}_B = -20 \lg 0,13 - j112,6^\circ = 17,7 - j112,6^\circ$

also $a_B = 17,7 \text{ dB}$, $b_B = -112,6^\circ$.

Beispiel 8: Wegen des Fehlersatzes (s. 4.5.1) gilt:

$$\underline{S}'_{11} = \underline{S}_{11} e^{-j2B_1} \text{ bzw. } \underline{S}_{11} = \underline{S}'_{11} e^{j2B_1}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,2 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{Hz}} \cdot 2,4} = 16,14 \text{ cm}$$

$$2B_1 = \frac{4\pi l}{\lambda} = \frac{2 \cdot 360^\circ \cdot 1,5}{16,14} = 67^\circ$$

Dann folgt

$$\underline{S}_{11} = 0,35 e^{-j110^\circ}$$

$$\underline{S}_{12} = \underline{S}'_{12} e^{j2B_1} = 0,1 e^{j95^\circ}$$

$$\underline{S}_{21} = \underline{S}'_{21} e^{j2B_1} = 2,8 e^{j83^\circ}$$

$$\underline{S}_{22} = \underline{S}'_{22} e^{j2B_1} = 0,46 e^{j45^\circ}$$

Beispiel 14:

Schaltung a): a) Der Übertragungsfaktor ist

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega T}{j\omega T + 1}$$

mit der Zeitkonstante $T = RC$. Die Übertragungsfunktion ist also ($j\omega \rightarrow s$)

$$\underline{H}(s) = \frac{sT}{sT + 1}$$

b) Ein Pol folgt aus

$$s_x T + 1 = 0, \text{ also } s_x = -1/T$$

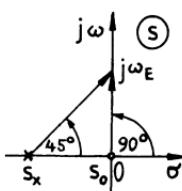


Bild 99 PN-Plan von $\underline{H}(s)$

und eine Nullstelle aus

$$s_o T = 0, \text{ also } s_o = 0.$$

c) Die Eckkreisfrequenz ist

$$\omega_E = |s_x| = 1/T.$$

Es ergibt sich der PN-Plan Bild 99.

Die Nullstelle $s_o = 0$ im Ursprung liefert als Beitrag zur Verstärkung $v(\omega)$ wieder eine Asymptote mit der Steigung 20 dB/Dekade, die jedoch die Frequenzachse schneidet, und zwar gilt für ihren Schnittpunkt ω_T mit der Frequenzachse = 0 dB-Linie

$$v_o(\omega_T) = 20 \lg |j\omega_T T| = 20 \lg(\omega_T T) = 0$$

also $\omega_T T = 1$ bzw. $\omega_T = 1/T = \omega_E$. ω_T wird als die Durchtrittskreisfrequenz bezeichnet.

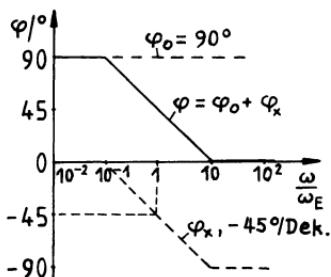
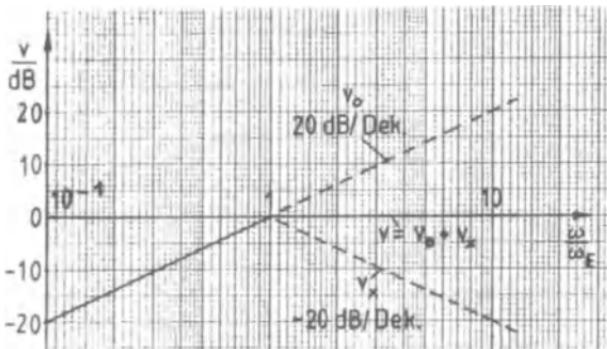


Bild 100 Bode-Diagramme der Schaltung α

Beitrag der Nullstelle $s_0 = 0$ zur Phase $\varphi(\omega)$: Die Phase beträgt für alle Frequenzen konstant $\varphi_0(\omega) = 90^\circ$ (s. PN-Plan Bild 99). In den Bode-Diagrammen Bild 100 ergeben sich die resultierenden Verläufe $v(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ in einfacher Weise durch grafische Addition der Einzelverläufe. Es liegt ein RC-Hochpaß vor.

Schaltung B: a) Für die gegebene Brückenschaltung (X-Schaltung) folgt aus

Bild 101 a:

$$\begin{aligned} U_2 &= U_C - U_R \\ &= \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} U_1 - \frac{R}{R + 1/j\omega C} U_1 \end{aligned}$$

$$H(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

$$H(s) = \frac{1 - sRC}{1 + sRC}$$

b) Ein Pol folgt aus

$$1 + s_x RC = 0$$

also $s_x = -1/RC$, und
eine Nullstelle aus

$$1 - s'_0 RC = 0$$

also $s'_0 = 1/RC$.

Es ergibt sich der PN-Plan Bild 101 b.

c) Die Eckkreisfrequenz ist

$$\omega_E = |s_x| = |s'_0| = 1/RC$$

Man erhält die Bode-Diagramme Bild 102. Aus dem Bode-Diagramm der Verstärkung Bild 102 oben folgt, daß $v(\omega) = 0$ bzw. $a(\omega) = 0$ ist. Es liegt ein RC-Allpaß 1. Grades (ein Schaltelement in jedem Brückenzweig) vor.

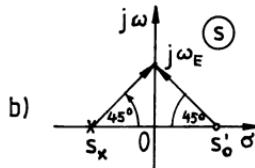
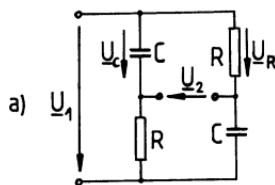


Bild 101 Brückenschaltung und zugehöriger PN-Plan

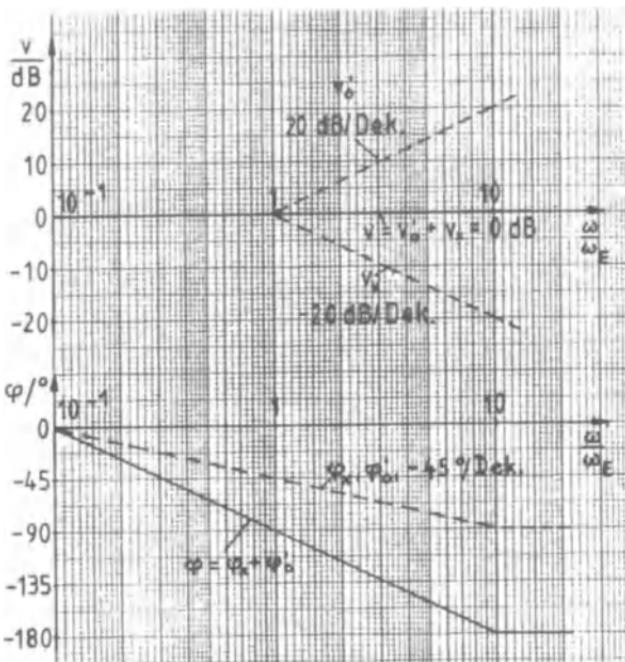


Bild 102 Bode-Diagramme der Schaltung 8

Beispiel 15:

a) $a_{E\min} = 14 \text{ dB} = -20 \lg \varrho_{\max}$

$$\varrho_{\max} = 10^{-0,7} = 19,95 \%$$

$$a_{B\max} = -10 \lg(1 - \varrho_{\max}^2) = 0,1764 \text{ dB}$$

b) $f_B = f_g = 100 \text{ kHz}, \Omega_S = f_S/f_B = 193/100 = 1,93$

$a_S = 34 \text{ dB}$: Aus der Tabelle Tafel 8 folgt $n = 5$.

$a_S = 34 \text{ dB}$ wird bereits bei $\Omega_S = 1,8721, f_S = 1,8721 \cdot f_B = 187,21 \text{ kHz}$ erreicht. Bei $f_S = 193 \text{ kHz}$ ($\Omega_S = 1,93$) beträgt dann $a_S = 35,55 \text{ dB}$ (lineare Interpolation). Die bei der Gradwahl sich ergebende Dämpfungsreserve wurde also im SB zur Vergrößerung der Sperrdämpfung a_S verwendet.

Normierung: $r_1 = r_2 = 1$,

Tafel 8:

$$a_1 = a_5 = 1,300426$$

$$a_2 = a_4 = 1,345877$$

$$a_3 = 2,127107$$

Schaltskizze s. Bild 103.

Entnormierung: Wegen

$$R_1 = R_2 = R_B = 150 \Omega,$$

$$L_B = R_B/2\pi f_B = 238,73 \mu H, \quad C_B = 1/2\pi f_B R_B = 10,61 nF$$

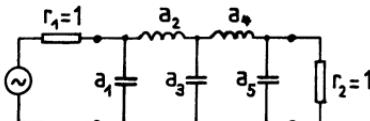
folgt:

$$C_1 = C_5 = a_1 C_B = 13,8 nF,$$

$$L_2 = L_4 = a_2 L_B = 321,3 \mu H,$$

$$C_3 = a_3 C_B = 22,57 nF.$$

Bild 103 Tschebyscheff-Tiefpaß



Beispiel 16: a) $\varphi_{max} = 0,2$

$$a_D = -10 \lg(1 - \varphi_{max}^2) = 0,1773 \text{ dB}$$

$$a_{Emin} = -20 \lg \varphi_{max} = 13,98 \text{ dB}$$

b) $f_B = f_g = 10 \text{ MHz}, \quad \Omega_S = f_S/f_B = 15/10 = 1,5$

$$\sin \Theta = 1/\Omega_S = 1/1,5, \quad \Theta = 41,8^\circ$$

$a_S = 45 \text{ dB}$: Aus der Tabelle Tafel 9 folgt $n = 5$.

Normierung: $r_1 = r_2 = 1$, Tafel 9 für $\Theta = 42^\circ$:

$$c_1 = 1,177872 \quad l_2 = 1,194863 \quad c_2 = 0,155315$$

$$c_3 = 1,757836 \quad l_4 = 0,933347 \quad c_4 = 0,445098$$

$$c_5 = 0,961868$$

$$\Omega_{\infty 2} = 2,321314$$

$$\Omega_{\infty 4} = 1,551495$$

Schaltskizze s. Bild 104.

Entnormierung: Wegen

$$R_1 = R_2 = R_B = 50 \Omega,$$

$$L_B = R_B/2\pi f_B = 795,775 \text{ nH},$$

$$C_B = 1/2\pi f_B R_B = 318,31 \text{ pF}$$

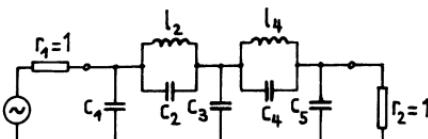
Bild 104 Cauer-Tiefpaß

folgt:

$$c_1 = c_1 C_B = 374,9 \text{ pF}$$

$$c_3 = c_3 C_B = 559,5 \text{ pF}$$

$$c_5 = c_5 C_B = 306,2 \text{ pF}$$



$$\begin{aligned} L_2 &= l_2 L_B = 950,8 \text{ nH} & C_2 &= c_2 C_B = 49,4 \text{ pF} \\ L_4 &= l_4 L_B = 742,7 \text{ nH} & C_4 &= c_4 C_B = 141,7 \text{ pF} \\ f_{\infty 2} &= \Omega_{\infty 2} f_B = 23,21314 \text{ MHz} \\ f_{\infty 4} &= \Omega_{\infty 4} f_B = 15,51495 \text{ MHz.} \end{aligned}$$

Beispiel 17:

$$f_B = \sqrt{f_g f_{-g}} = \sqrt{4,025 \cdot 3,9752} \text{ MHz} = 4 \text{ MHz}$$

$$B = \frac{f_g - f_{-g}}{f_B} = \frac{4,025 - 3,9752}{4} = 1,245 \cdot 10^{-2}$$

$$f_S f_{-S} = f_B^2, \quad f_{-S} = \frac{f_B^2}{f_S} = \frac{16}{4,078} \text{ MHz} = 3,9235 \text{ MHz}$$

$$\Omega_S = \frac{1}{B} (\tilde{\Omega}_S - \tilde{\Omega}_{-S}) = \frac{1}{B} \left(\frac{f_S}{f_B} - \frac{f_{-S}}{f_B} \right) = 3,1024$$

$a_S = 26 \text{ dB}$: Aus der Tabelle Tafel 8 folgt: $n = 3$,

$a_1 = a_3 = 1,187978, a_2 = 1,154234$

Normierung: $r_1 = r_2 = 1$,
wegen (174) gilt:

$$\begin{aligned} l_1 &= l_3 = B/a_1 \\ &= 1,047999 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 &= c_3 = a_1/B \\ &= 95,41992 \end{aligned}$$

$$l_2 = a_2/B = 92,70956$$

$$\begin{aligned} c_2 &= B/a_2 \\ &= 1,078637 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

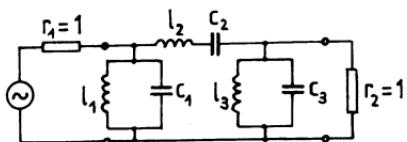


Bild 105 Tschebyscheff-Bandpaß

Schaltskizze s. Bild 105.

Entnormierung: Wegen $R_1 = R_2 = R_B = 75 \Omega$,

$$L_B = R_B / 2\pi f_B = 2,9842 \mu\text{H}, \quad C_B = 1 / 2\pi f_B R_B = 530,52 \text{ pF}$$

folgt:

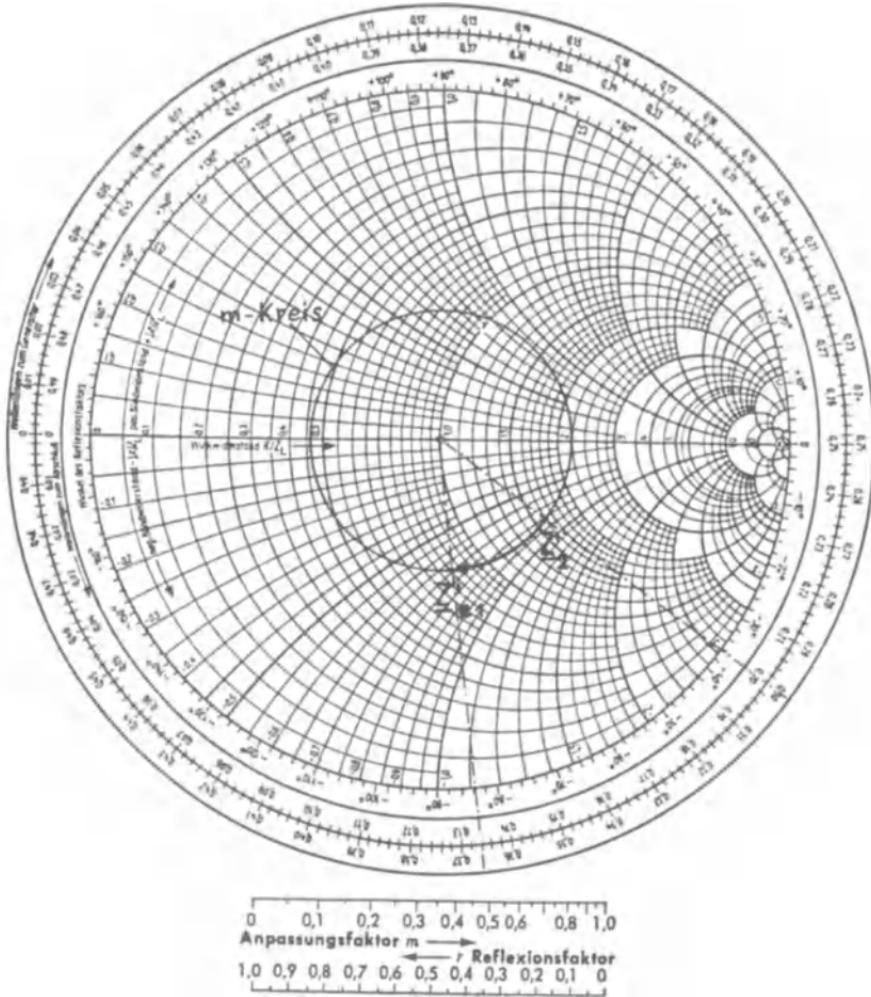
$$L_1 = L_3 = l_1 L_B = 31,3 \text{ nH}$$

$$C_1 = C_3 = c_1 C_B = 50,62 \text{ nF}$$

$$L_2 = l_2 L_B = 276,66 \mu\text{H}$$

$$C_2 = c_2 C_B = 5,7 \text{ pF.}$$

Beispiel 18: a) Wir suchen im Smith-Diagramm Bild 106 auf:



$$Z'_2 = \frac{Z_2}{Z_L} = \frac{80 - j40}{50} = 1,6 - j0,8, \quad l_o/\lambda = 0,3$$

Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{3 \cdot 10^8 \frac{1}{\sqrt{2}}} = 70,7 \text{ cm}$$

also

$$1/\lambda = 40/70,7 = 0,566 \approx 0,066, \quad l_o/\lambda + 1/\lambda = 0,366$$

Wir lesen im Smith-Diagramm ab:

$$Z'_{e1} = Z_{e1}/Z_L = 0,8 - j 0,7$$

also

$$Z_{e1} = Z'_{e1} Z_L = (0,8 - j 0,7) 50 \Omega = (40 - j 35) \Omega$$

b) $m = 0,46, \quad s = 1/m = 2,17$

c) $\underline{Z}_o = 0,37 e^{-j36^\circ}, \quad \underline{Z}_{e1} = 0,37 e^{-j84^\circ}$

d) Wir entnehmen dem Smith-Diagramm:

$$l_{\min}/\lambda = 0,5 - l_o/\lambda = 0,2$$

also

$$l_{\min} = 0,2 \cdot 70,7 \text{ cm} = 14,14 \text{ cm.}$$

Bemerkung: $l_o = 0,3\lambda$ ist die Länge einer der Abschlußimpedanz Z_2 nachgeschaltet

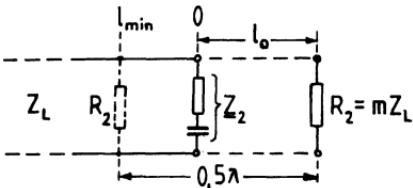


Bild 107 Kapazitiv und ersatzweise reell abgeschlossene Leitung

gedachten Leitung mit dem reellen Abschlußwiderstand $R_2 = m Z_L = 0,46 \cdot 50 \Omega = 23 \Omega$, s. Bild 107. (Auf der negativen u-Achse im Smith-Diagramm liegen normierte reelle Widerstands-werte). Man kann daher eine mit einer kapazitiven Impedanz abgeschlossene Leitung der Länge l durch eine reell abgeschlossene Leitung der Länge $l + l_o$ mit $\lambda/4 < l_o < \lambda/2$ ersetzen. Man kann ebenso zeigen, daß eine mit einer induktiven Impedanz abgeschlossene Leitung der Länge l durch eine reell abgeschlossene Leitung der Länge $l + l_o$ mit $l_o < \lambda/4$ ersetzt werden kann.

sene Leitung der Länge l durch eine reell abgeschlossene Leitung der Länge $l + l_o$ mit $\lambda/4 < l_o < \lambda/2$ ersetzen. Man kann ebenso zeigen, daß eine mit einer induktiven Impedanz abgeschlossene Leitung der Länge l durch eine reell abgeschlossene Leitung der Länge $l + l_o$ mit $l_o < \lambda/4$ ersetzt werden kann.

Beispiel 19: a) Die Wellenlänge ist

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{6 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}} = 50 \text{ cm}$$

also

$$l_o/\lambda = 9/50 = 0,18$$

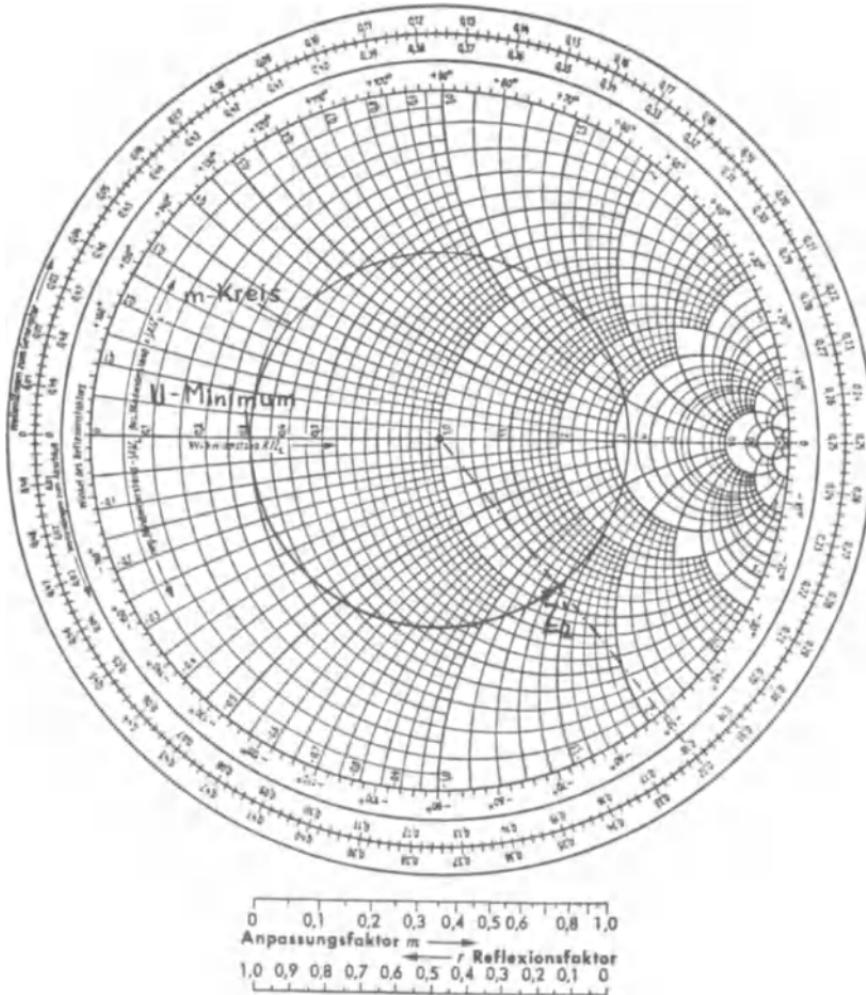


Bild 108 Smith-Diagramm zu Beispiel 19

Wir lesen im Smith-Diagramm Bild 108 für $m = 0,3$ ab:

$$\underline{Z}_2' = \underline{Z}_2/Z_L = 1,17 - j 1,36$$

also

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_2' Z_L = (1,17 - j 1,36) 60 \Omega = (70 - j 82) \Omega$$

b) $\underline{r}_o = 0,54 e^{-j50^\circ}$

Beispiel 20: a) Wir suchen im Smith-Diagramm Bild 109 auf:

$$\underline{Z}_2' = \frac{\underline{Z}_2}{Z_L} = \frac{25 + j 15}{50} = 0,5 + j 0,3, \quad l_o/\lambda = 0,307$$

$$\underline{Y}_2' = 1,5 - j 0,87$$

Wir ermitteln den lastnächsten Schnittpunkt des zugehörigen m -Kreises mit dem "Anpassungskreis", d.h. der Kreis durch den Anpassungspunkt $R' = 1$:

$$l_1/\lambda = 0,344 - 0,307 = 0,037$$

$$\lambda = \lambda_o = 50 \text{ cm} \text{ (vgl. Beispiel 19)}, \text{ also}$$

$$l_1 = 0,037 \cdot 50 \text{ cm} = 1,85 \text{ cm}$$

b) Wir entnehmen dem Smith-Diagramm den Eingangsleitwert der Übertragungsleitung:

$$\underline{Y}_{e1}' = \underline{Y}_{e1} Z_L = 1 - j 0,82$$

also

$$\underline{Y}_{e1} = \frac{\underline{Y}_{e1}'}{Z_L} = \frac{1 - j 0,82}{50 \Omega} = (0,02 - j 0,0164) \text{ S}$$

Der erforderliche Eingangsleitwert der Stichleitung ist daher

$$\underline{Y}_k = j 0,0164 \text{ S} = j\omega C_{\text{ersatz}}$$

$$C_{\text{ersatz}} = \frac{1,64 \cdot 10^{-2} \text{ S}}{\omega} = \frac{1,64 \cdot 10^{-2} \text{ S}}{2\pi \cdot 6 \cdot 10^8 \frac{1}{\text{s}}} = 4,4 \text{ pF}$$

c) Gemäß b) gilt

$$\underline{Y}_k' = \underline{Y}_k Z_L = j 0,82$$

Wir lesen im Smith-Diagramm ab:

$$l_k/\lambda = 0,1095 + 0,25 = 0,3595$$

(vom Leitwert- ∞ -Punkt rechts gezählt), also

$$l_k = 0,3595 \cdot 50 \text{ cm} = 18 \text{ cm}.$$

Das Ergebnis stimmt mit 4.6.1 überein: Die Stichleitung wirkt kapazitiv für $\lambda/4$ (12,5 cm) $< l_k < \lambda/2$ (25 cm).

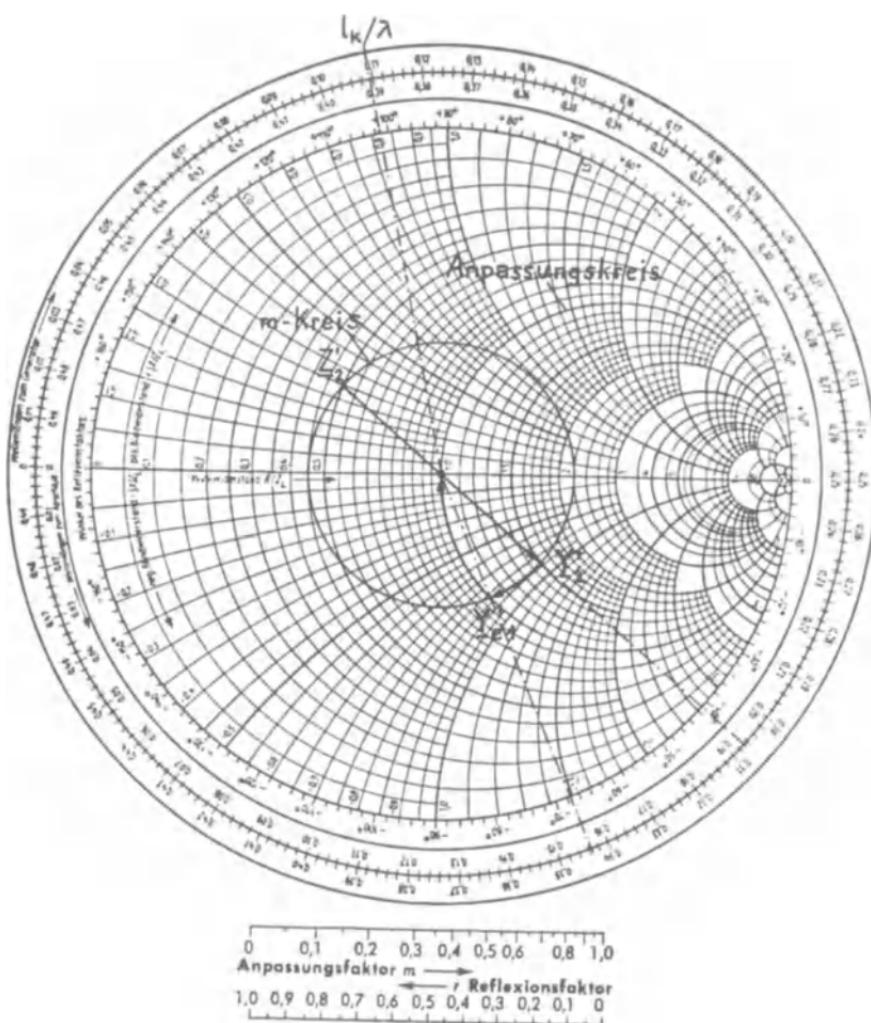


Bild 109 Smith-Diagramm zu Beispiel 20

Formelzeichen

Schreibweise der physikalischen Größen:

$a(t)$	Momentanwert (Zeitwert) einer zeitabhängigen Größe
\hat{A}	Amplitude
A	Effektivwert
$\underline{a}(t)$	komplexer Momentanwert
$\hat{\underline{A}}$	komplexe Amplitude
\underline{A}	komplexer Effektivwert
\underline{A}^*	konjugiert komplexer Effektivwert

Formelzeichen:

a	Dämpfung, allgemein
\underline{a}	einfallende Welle
a_B	Betriebsdämpfung
$a_{B\max}$	maximale Betriebsdämpfung im Durchlaßbereich
a_E	Echodämpfung
$a_{E\min}$	mindestens erforderliche Echodämpfung im Durchlaßbereich
a_i	Tiefpunktcoeffizient
a_v	Verlustdämpfung
(A)	Kettenmatrix
\underline{A}_{ik}	Kettenparameter
A_v, A'_v	Partialbruchentwicklungscoeffizienten
\underline{b}	reflektierte Welle
b_B	Betriebsphase
B	Suszeptanz (Blindleitwert), relative Bandbreite
$B_n(p)$	Bessel-Polynom
c	normierte Kapazität, Phasengeschwindigkeit im Vakuum
C	Kapazität
C'	Kapazitätsbelag
C_B	Bezugskapazität
D_B	Betriebsdämpfungs faktor
$D_B(p)$	Betriebsdämpfungsfunktion
f	Frequenz

f_A	Abtastfrequenz
f_B	Bezugsfrequenz
f_g	Grenzfrequenz
g_B	Betriebsdämpfungsmaß
g_W	Wellendämpfungsmaß
G	Wirkleitwert
G'	Ableitungsbelag
G_g	Gyrationsleitwert
(h)	Hybridmatrix
h_{ik}	Hybridparameter
$H(j\omega)$	Übertragungsfaktor
$H(s)$	analoge Übertragungsfunktion (Systemfunktion)
$\tilde{H}(z)$	digitale Übertragungsfunktion
H_B	Betriebsübertragungsfaktor (Transmittanz)
$H_B(p)$	Betriebsübertragungsfunktion
H_i	Stromübertragungsfaktor
H_u	Spannungsübertragungsfaktor
$i(t)$	Momentanwert des Stromes
I	komplexer Effektivwert des Stromes
I_0	Quellenstrom
j	imaginäre Einheit ($j^2 = -1$)
$K(j\Omega)$	charakteristische Funktion
l	normierte Induktivität, Ortskoordinate ab Leitungsende
L	Induktivität
L'	Induktivitätsbelag
L_B	Bezugsinduktivität
m	Anpassungsfaktor
N	Windungszahl
N	komplexe Leistung
$p = \Sigma + j\Omega$	normierte komplexe Frequenz
P	Wirkleistung
P_{max}	verfügbare Generatorwirkleistung
$P_n(p)$	Butterworth-Polynom
Q_p	Polgüte
r	normierter Wirkwiderstand, Reflexionsfaktorbetrag

$E_{e1} \equiv E$	Eingangsreflexionsfaktor
E_0	Lastreflexionsfaktor
R	Wirkwiderstand
R'	Widerstandsbelag
R_B	Bezugswiderstand
R_g	Gyrationswiderstand
R_o	Dualitätsinvariante
$s = \sigma + j\omega$	komplexe Frequenz
s	Welligkeitsfaktor
s_{op}	Nullstellen von $\underline{H}(s)$
s_{xy}	Pole von $\underline{H}(s)$
(S)	Streumatrix
S_{ik}	Streuparameter
t	Zeit
t_g	Gruppenlaufzeit
t_p	Phasenlaufzeit
T	Zeitkonstante
T_A	Abtastperiodendauer
T_g	normierte Gruppenlaufzeit
$T_n(\Omega)$	Tschebyscheff-Polynom
u(t)	Momentanwert der Spannung
\underline{U}	komplexer Effektivwert der Spannung
U_o, U_g	Quellen- (Generator-)Spannung
U_h	Effektivwert der einfallenden (hinlaufenden) Spannungswelle
U_r	Effektivwert der reflektierten Spannungswelle
\dot{u}	Übersetzungsverhältnis
v	Verstärkung, Phasengeschwindigkeit
X	Reaktanz (Blindleitwert)
\underline{Y}	Admittanz (komplexer Leitwert)
(Y)	Leitwertmatrix
\underline{Y}_{e1}	Eingangsleitwert
\underline{Y}_{ik}	Leitwertparameter
\underline{Y}_1	Generatorinnenleitwert
\underline{Y}_2	Lastleitwert
Z	Impedanz (komplexer Widerstand)

(Z)	Widerstandsmatrix
Z_{e1}	Eingangswiderstand
Z_{e2}	Ausgangswiderstand
Z_{ik}	Widerstandsparameter
Z_k	Eingangswiderstand der kurzgeschlossenen Leitung
Z_l	Eingangswiderstand der offenen Leitung
Z_L	Leitungswellenwiderstand
Z_1	Generatorinnenwiderstand
Z_2	Lastwiderstand
α	Dämpfungskoeffizient
α_G	Ableitungsdämpfung
α_R	Widerstandsdämpfung
α_ν	Kettenbruchentwicklungs koeffizient
β	Phasenkoeffizient
β_ν	Kettenbruchentwicklungs koeffizient
$\gamma = \alpha + j\beta$	Ausbreitungskoeffizient
Δ	Determinante
ε	Parameter der Tschebyscheff-Approximation
ε_0	elektrische Feldkonstante
ε_r	Permittivitätszahl
Θ	Modulwinkel
λ	Wellenlänge
λ_o	Vakuumwellenlänge
μ_0	magnetische Feldkonstante
μ_r	Permeabilitätszahl
q	Reflexionsfaktor
$q(p)$	Reflexionsfunktion
q_{\max}	maximal zugelassener Reflexionsfaktor im Durchlaßbereich
$\sigma(t)$	Sprungfunktion
φ	Phasenwinkel
ω	Kreisfrequenz
ω_A	Abtastkreisfrequenz
ω_B	Bezugskreisfrequenz
ω_g	Grenzkreisfrequenz

ω_E	Eckkreisfrequenz
ω_P	Polfrequenz
Ω	normierte Frequenz, speziell des Tiefpasses
$\tilde{\Omega}$	normierte Frequenz des Hochpasses bzw. des Band-passes
Ω_A	normierte Abtastfrequenz
Ω_∞	normierte Dämpfungspolfrequenz

Sachverzeichnis

- Ableitungsdämpfung 126
Abtastfrequenz 110
Abtastperiodendauer 110
Abtasttheorem 110
Admittanz 15
aktive RC-Filter 107 ff.
Allpaß 70, 159 f.
Anpassung 53, 56, 76, 135 f.
Anpassungsfaktor 136 f.
Anpassungspunkt 146
Anpassungsstelle 83
Ausbreitungskoeffizient 123,
 125 f., 128
Ausgangswiderstand 52
Ausgleichsvorgang 12
Bandmittelfrequenz 105
Bandpaß 104 ff.
Bandsperre 107
Bessel-Polynome 102
Bessel-Tiefpaß 100 ff., 112
Betragsscharakteristik 71,
 112
Betriebsdämpfung 55, 79
Betriebsdämpfungsfaktor 55,
 69, 71
Betriebsdämpfungsfunktion
 85 ff.
Betriebsdämpfungsmaß 55
Betriebsfiltersynthese 82 ff.
Betriebsparameter 54
Betriebsphase 55
Betriebsübertragungsfaktor
 55 f., 82 ff.
Betriebsübertragungsfunktion
 68, 84 ff., 94, 97
bilineare Transformation
 111 f.
Bode-Diagramme 72 ff.
Butterworth-Approximation
 82 ff.
Butterworth-Polynome 85
Cauer-Tiefpaß 97 f.
charakteristische Funktion
 83
Dämpfung 67
Dämpfungscharakteristik 71
Dämpfungsfunktionspol 86
Dämpfungskoeffizient 123,
 125 ff.
Dämpfungspol 83, 97 f.
Dezibel 55
digitales Filter 110 ff.
-, nichtrekursives 115
-, rekursives 115
duale Netzwerke 28 f., 88, 98
Dualitätsinvariante 28, 49
Dualtransformator 132
Dualübertrager 49
Durchlaßbereich 76 f.
Durchtrittskreisfrequenz 158
Echodämpfung 79, 95
Eckkreisfrequenz 73 ff.
Eigenfrequenz 16
Eigenschwingung 11 f.
Eigenwerte 67
Eingangsreflexionsfaktor
 134 f., 138, 143
Eingangswiderstand 51 f., 129
-, normierter 142 f.
Elementarzweitor 49
Fehlersatz 135, 143
Feldkeller-Gleichung 78
Filter 76 ff.
Filterkataloge 95 f., 98 f.
Fostersches Reaktanztheorem
 20 f.
Frequenztransformationen
 103 ff.
Grenzfrequenz 80, 83, 93, 103
-, obere 104 f.
-, untere 104 f.
Gruppenlaufzeit 57 f.
Gruppenlaufzeitcharakteristik
 71 f.
Gyrationsleitwert 48
Gyrationswiderstand 48
Gyrator 48 f.
HF-Meßleitung 138
Hochpaß 103 f.
Hurwitz-Polynom 70
Hybridgleichungen 35
Hybridmatrix 35
Hybridparameter 35
idealer Übertrager 47 f.
Impedanz 14
Inversion 149

- kanonische Schaltungen 21,
25
Kaskadensynthese 110
Kettenbruchschaltung 23 ff.,
-, 1.Cauer-Form 23 f., 87
-, 2.Cauer-Form 24 f.
Kettengleichungen 34 f.
Kettenmatrix 35
Kettenparameter 34
Kettenschaltung 42 f.
Koaxialleitung 119 ff., 128
komplexe Frequenz 11 f.
komplexe Leistung 53
-, verfügbare 53
komplexe p-Ebene 84
komplexe s-Ebene 11
komplexe z-Ebene 111 f.
Längswiderstand 46 f.
 $\lambda/4$ -Resonator 140
Lastreflexionsfaktor 134,
145
Leistungsbilanz 78, 86
Leitwertgleichungen 34
Leitwertmatrix 34
Leitwertparameter 34
Leitung 118 ff.
-, angepaßte 135 f.
-, fehlangepaßte 136 ff.
-, homogene 120
-, $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ - 132 f.
-, RC- 125
-, verlustarme 125 ff.
-, verlustlose 127 ff.
Leitungsbeläge 119
Leitungselement 121 f.
Leitungsgleichungen 125, 128
Leitungswellenwiderstand
122 f., 125 ff., 131
 $1/\lambda$ -Geraden 147 f.
Matrix 153 ff.
-, Eins- 154
-, inverse 39, 155
-, quadratische 154
-, singuläre 154
Mikrostreifenleitung 119
m-Kreise 146
Modulwinkel 98
Neper 55
Netzwerkelemente 12 f.
Netzwerksynthese 19, 23, 82
normierte Frequenz 80,
103 ff.
normierte komplexe Frequenz
84, 111
Paralleldrahtleitung 118 ff.,
128
Parallelenschaltung 41 f.
Partialbruchschaltung 17 ff.
-, LC-, 1.Foster-Form 18 f.
-, LC-, 2.Foster-Form 19
Phase 67
Phasencharakteristik 71 f.
Phasengeschwindigkeit 132
Phasenkoeffizient 123, 125 ff.
Phasenlaufzeit 58
 \tilde{u} -Schaltung 50
Polfrequenz 109
Polgüte 109
Pol-Nullstellen-Plan 16 ff.,
67 ff.
Potenztiefpaß 82 ff., 108 f.,
113 f.
Pupin-Spule 127
Quelle, gesteuerte 31 f.
-, starre 13 f.
Querwiderstand 47
RC-Hochpaß 157 ff.
RC-Tiefpaß 73 ff.
Reaktanzfilter 76 ff.
Reaktanzfunktion 16 ff.
Reaktanzleitung 139 ff., 150
Reaktanzzweipol 16 ff.
Reflexionsdämpfung 77
Reflexionsfaktor 77 f., 95
Reflexionsfunktion 86
Referenztiefpaß 103
relative Bandbreite 105
Residuen 18
Reziprozitätstheorem 43 ff.
Richtkoppler 59, 138
r-Kreise 146
Rückwärtsspeisung 36, 52, 62
Selbsterregung 12, 69
Serien schaltung 41
Smith-Diagramm 142 ff.
Spannungsquelle 13 f.
Spannungsübertragungsfaktor
52 f.
Sperrbereich 76 f.
stationärer Zustand 12
Stichleitung 141 f.
Streugleichungen 61
Streumatrix 61

- Streuparameter 61 f., 77 f.
Stromquelle 13 f.
Stromübertragungsfaktor 53
Tiefpaß 80
Tiefpaß-Bandpaß-Transfor-
mation 105 ff.
Tiefpaß-Entnormierung 81 f.
Tiefpaß-Hochpaß-Transfor-
mation 103 f.
Tiefpaßkoeffizienten 80 f.,
104, 106
Tiefpaß-Normierung 80 f.
Totalreflexion 77, 139 f.
T-Schaltung 33, 49 f.
Tschebyscheff-Approximation
91 ff.
Tschebyscheff-Polynome 92
Tschebyscheff-Tiefpaß 91 ff.
Überlagerungssatz 14
Übertragungsfaktor 65 f.
Übertragungsfunktion 66 ff.,
100 f.
-, digitale 110 ff.
-, Nullstellen der 66 ff.
-, Pole der 66 ff.
Umpoltransformator 133
Vektor 33 ff., 61, 154
Verlustdämpfung 79
Verstärkung 67
Verstärkungscharakteristik
71 f.
Verzerrungen, lineare 58
-, nichtlineare 58 f.
Verzerrungsfreiheit 57 f.,
126, 128
Welle 59 ff.
-, einfallende 60, 130 f.
-, Leitungs- 129 ff.
-, normierte 60
Welle, reflektierte 60, 131
-, stehende 139 f.
Wellendämpfungsmaß 123
Wellenlänge 131 f.
Welligkeitsfaktor 138
Widerstandsdämpfung 126
Widerstandsgleichungen 33 f.
Widerstandsmatrix 33
Widerstandsparameter 33
Wirkleistung 13, 56, 135
-, verfügbare 56
Wirkleistungsdämpfung 79
Zählpfeilsystem 31
-, Ketten- 31, 34, 125
-, symmetrisches 31, 39
Zweipol 12 ff.
-, aktiver 13 f.
-, linearer 14
-, passiver 12 f.
-, RC- 26, RL- 26
-, RLC- 13, 26
-, zeitinvarianter 14
Zweipolfunktion 14 ff.
-, Nullstellen der 15
-, Pole der 15
Zweitor 30 ff.
-, aktives 31
-, instabiles 69
-, lineares 32
-, passives 31
-, RLCÜ- 31, 43 f.
-, stabiles 69
-, übertragungssymmetrisches
45
-, widerstandssymmetrisches
45 f.
-, zeitinvariantes 33
Zweitor minimaler Phase 70
Zweitorparameter 36 ff.
Zweitor-Zusammenschaltung
41 ff.

Teubner Studienskripten Elektrotechnik

- v. Münch, Werkstoffe der Elektrotechnik
5., überarbeitete Aufl. 254 Seiten. DM 18,80
- Oberg, Berechnung nichtlinearer Schaltungen
für die Nachrichtenübertragung
168 Seiten. DM 15,80
- Pinske, Elektrische Energieerzeugung
127 Seiten. DM 14,80
- Pregla/Schlosser, Passive Netzwerke
Analyse und Synthese
198 Seiten. DM 15,80
- Römisch, Berechnung von Verstärkerschaltungen
2., durchgesehene Aufl. 192 Seiten. DM 15,80
- Schaller/Nüchel, Nachrichtenverarbeitung
Band 1 Digitale Schaltkreise
2., neubearbeitete Aufl. 168 Seiten. DM 15,80
- Band 2 Entwurf digitaler Schaltwerke
3., überarbeitete und erweiterte Auflage
191 Seiten. DM 16,80
- Band 3 Entwurf von Schaltwerken
mit Mikroprozessoren
2., neubearbeitete und erweiterte Auflage.
173 Seiten. DM 15,80
- Schlachetzki, Halbleiterbauelemente der Hochfrequenztechnik
280 Seiten. DM 19,80
- Schlachetzki/v. Münch, Integrierte Schaltungen
255 Seiten. DM 18,80
- Schmidt, Digitalelektronisches Praktikum
2., durchgesehene Aufl. 238 Seiten. DM 15,80
- Scholze, Einführung in die Mikrocomputertechnik
320 Seiten. DM 19,80
- Schymroch, Hochspannungs-Gleichstrom-Übertragung
127 Seiten. DM 14,80
- Seinsch, Grundlagen elektr. Maschinen und Antriebe
230 Seiten. DM 17,80
- Strassacker, Rotation, Divergenz und das Drumherum
XII, 227 Seiten. DM 18,80
- Thiel, Elektrisches Messen nichtelektrischer Größen
2. überarbeitete und erweiterte Auflage
244 Seiten. DM 18,80
- Ulbricht, Netzwerkanalyse, Netzwerksynthese und Leitungstheorie
175 Seiten. DM 15,80
- Unger, Hochfrequenztechnik in Funk und Radar
2., neubearbeitete und erweiterte Auflage
233 Seiten. DM 18,80
- Vaske, Berechnung von Drehstromschaltungen
2., überarbeitete Aufl. 180 Seiten. DM 15,80
- Vaske, Berechnung von Gleichstromschaltungen
4., durchgesehene Aufl. 132 Seiten. DM 14,80
- Vaske, Berechnung von Wechselstromschaltungen
3., durchgesehene Aufl. 224 Seiten. DM 17,80
- Vaske, Übertragungsverhalten elektrischer Netzwerke
3., überarbeitete Aufl. 164 Seiten. DM 15,80
- Weber, Laplace-Transformation für Ingenieure
der Elektrotechnik
3., überarbeitete und erweiterte Auflage
205 Seiten. DM 15,80
- Westermann, Laser
190 Seiten. DM 16,80

Preisänderungen vorbehalten