Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

1. Ein Würfel ist mit den Augenzahlen 3 , 3 , 3 , 3 , 5 , 5 beschriftet. Der Würfel wird achtmal geworfen.
   a. Gib die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an.
   A: Es fällt beim ersten Wurf eine 5 .
   B: Es fällt genau dreimal eine 5
   C: Es fällt mindestens dreimal eine 3.
   b. Entwickle eine Fragestellung im Zusammenhang mit dem gegebenen Würfel, die durch die Rechnung
   $3.\frac{2}{3} + 5.\frac{1}{3} = \frac{11}{3}$ beantwortet wird.
   c. Ein zweiter Würfel trägt die Augenzahlen 2 , 2 , 2 , 4 , 6 , 6 . In einem Spiel werfen zwei Spieler jeweils einen der beiden Würfel. Es gewinnt die größere Augenzahl.
   Dominik erklärt: " Da der Erwartungswert für die geworfene Augenzahl bei beiden Würfeln gleich ist, ist das Spiel fair." Zeige, dass die Erwartungswerte zwar übereinstimmen, ¨ das Spiel aber dennoch nicht fair ist.

2. Ein System besteht aus 80 Komponenten. Jede Komponente funktioniert mit einer Wahrscheinlichkeit von 85%. Damit das System funktioniert, müssen 65 oder mehr Komponenten einwandfrei sein.
   a. Formuliere eine Formel, mit der sich berechnen lässt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass genau k Komponenten funktionieren!
   b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System funktioniert?
   c. Wie viele solcher Systeme muss man ausprobieren, damit man mit 99%iger Sicherheit mindestens 1 funktionsuntüchtiges findet?

3. Eine Flasche soll 300 Milliliter (ml) Olivenöl enthalten. Die Genauigkeit der Abfüllanlage wird mit einer Stichprobe von 25 Flaschen überprüft. Es ergeben sich die folgenden Abfüllmengen in ml:

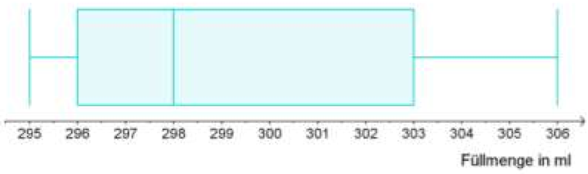
   a. Berechne das arithmetische Mittel und den Median der gemessenen Abfüllmengen
   Erkläre, wie sich beide Größen verändern, wenn die Flasche mit der Abfüllmenge 304 ml einen wesentlich höheren Messwert gehabt hätte.

296	298	302	301	304
300	295	296	297	301
298	296	295	300	302
295	297	295	296	303
300	295	297	298	300

   b. Eine weitere Überprüfung der Anlage hat die nebenstehenden Kennzahlen geliefert.
   Erstelle einen Boxplot.

statistische Größe	Füllmenge in ml
Minimum (Min)	295
1. Quartil (Q1)	296
Median (Med)	298
3. Quartil (Q3)	301
Maximum (Max)	304

   c. Als Ergebnis einer 3. Überprüfung der Abfüllanlage wurde der folgende Boxplot erstellt:



   Interpretiere den Boxplot in Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen (Min, Q1, Med, Q3, Max).
   Beschreibe die Verteilung der Daten links und rechts vom Median.

4. Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

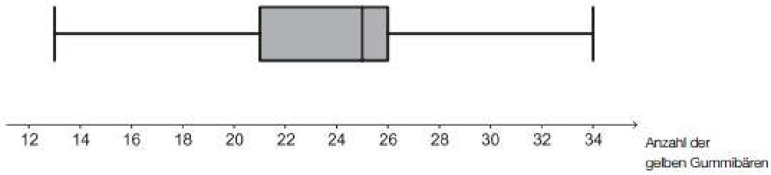
Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

a. Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

Berechne das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.

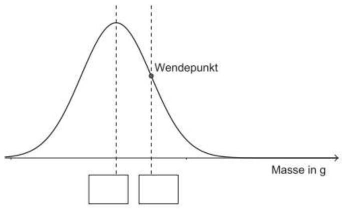
b. Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren. Lies aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss.

c. In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden. Berechne, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben

d. Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.
Trage die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein..



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis $\pm 0{,}25$ g vom Erwartungswert werden toleriert.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird.

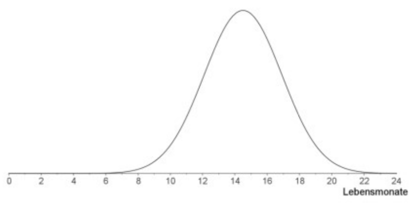
5. Kinder erlernen normalerweise in den ersten 24 Lebensmonaten das freie Gehen. In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse einer Befragung von Eltern einer Kindergartengruppe aufgelistet.

	Kind 1	Kind 2	Kind 3	Kind 4	Kind 5	Kind 6	Kind 7	Kind 8	Kind 9
erstes Auftreten des freien Gehens in Lebensmonaten	12	15	14	13	9	12	16	11	17

a. Berechne das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Daten aus der Tabelle.

b. Erstelle auf Basis der Daten aus der Tabelle einen Boxplot
Interpretiere die Bedeutung der Quartile in diesem Zusammenhang.

c. Das erste Auftreten des freien Gehens bei Kindern kann näherungsweise durch eine Normalverteilung beschrieben werden. Der Erwartungswert liegt bei rund 14 Lebensmonaten mit einer Standardabweichung von 2,4 Lebensmonaten.
Zeichne die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ in den unten dargestellten Funktionsgraphen der Dichtefunktion ein.
Interpretiere diese Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang.

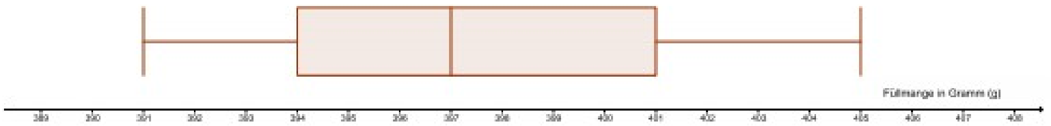


Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

6. Eine Verordnung stellt sicher, dass die Nennfüllmenge eines Produktes innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereiches eingehalten wird.
   a. Die Füllmenge von Tiefkühlerbsen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 400$ g und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ g.
   Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Packung die Nennfüllmenge (Erwartungswert) um mehr als 3 % unterschreitet.
   b. Eine Kontrolle von 12 Packungen Tiefkühlgemüse mit einer Nennfüllmenge von je 400 g ergab folgende Ergebnisse:

Füllmenge in Gramm (g)	391	392	394	395	399	400	401	402	405
Anzahl der Packungen	1	1	2	2	1	1	2	1	1

   Überprüfe, ob das Ergebnis der Kontrolle durch den nachstehenden Boxplot richtig dargestellt wird.

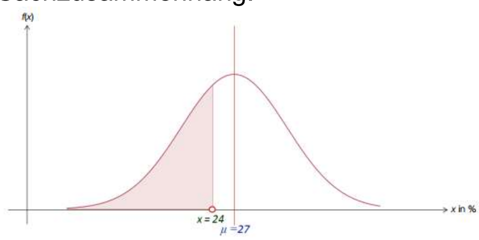


   c. Ein Betrieb füllt Tee ab. Man weiß, dass durchschnittlich 2,5 % der Packungen aus diesem Betrieb weniger als die angeführte Nennmenge enthalten. Aus einer Lieferung werden 40 Packungen nach dem Zufallsprinzip entnommen und überprüft.
   Berechne die Anzahl derjenigen Packungen, bei denen ein geringerer Inhalt als die angegebene Nennfüllmenge zu erwarten ist.
   Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass 2 oder mehr Packungen eine zu geringe Füllmenge aufweisen, verwendet ein Schüler den folgenden Ausdruck:

$$0{,}975^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}025^{1} \cdot 0{,}975^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}025^{2} \cdot 0{,}975^{38}$$

   Argumentiere unter Angabe des richtigen Ausdrucks, warum der verwendete Ausdruck falsch ist.

7. Der Prozentanteil an Wählerstimmen für eine bestimmte Partei A sei normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 27$ % und einer Standardabweichung von $\sigma = 4{,}48$ %.
   a. Erkläre, warum die folgenden beiden Aussagen
   Aussage 1: „Die Partei A erhält mindestens 31,5 % der Stimmen“
   Aussage 2: „Die Partei A wird höchstens 22,5 % der Stimmen erringen“ gleich wahrscheinlich sind.
   b. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Partei A mindestens 29,2 % der Stimmen erhält.
   c. Interpretiere die Bedeutung der farbigen Fläche in der nachstehenden Grafik im Sachzusammenhang.



8. Um die Wirksamkeit von 3 verschiedenen Schmerztabletten A, B und C zu überprüfen, wurden diese an einer Versuchsgruppe von 2000 Frauen getestet.

Medikament	Anzahl der Studienteil-nehmerinnen	Anzahl der Frauen mit positiver Wirkung nach Einnahme
A	500	255
B	500	197
C	1000	298

   a. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Frau eine positive Wirkung durch eines der Medikamente eintritt.

Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

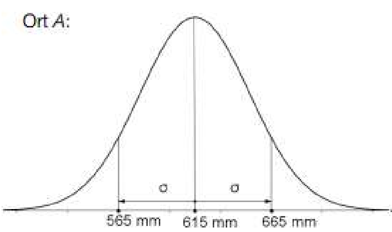
b. Das Schmerzmittel D wirkt erfahrungsgemäß in 60 % aller Fälle positiv. In den anderen Fällen zeigt es keine positive Wirkung. n Frauen nehmen das Medikament ein. Interpretiere, was durch den Term $0{,}4^n$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird. Interpretiere, was durch den Term $(1 – 0{,}4^n)$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

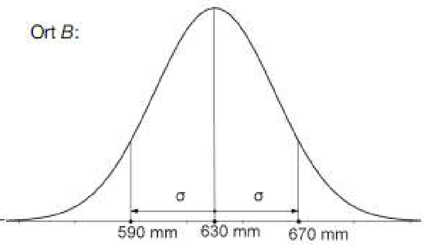
c. Die Körpermasse in der Versuchsgruppe ist normalverteilt. Der Erwartungswert beträgt 65 Kilogramm (kg) und die Standardabweichung 5,4 kg. 6 % der Versuchsgruppe, symmetrisch verteilt, sind stark über- bzw. untergewichtig. Bei der Auswertung der Studie hat sich herausgestellt, dass diese 6 % als Testpersonen nicht geeignet sind. Berechne, in welchem Bereich die Körpermassen der Teilnehmerinnen liegen müssten, um ungeeignete Testpersonen auszuschließen.

9. Statistiken aus meteorologischen Daten sind die Grundlage für die Wettervorhersage. Das aktuelle Wetter stimmt nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit mit der jeweiligen Prognose überein.

   a. Man kann davon ausgehen, dass die jährliche Niederschlagsmenge an einem bestimmten Ort annähernd normalverteilt ist. Für einen Ort in Niederösterreich ist der Erwartungswert der Jahresniederschlagsmenge 615 mm bei einer Standardabweichung von 50 mm. Berechne die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass die Niederschlagsmenge in einem bestimmten Jahr zwischen 650 mm und 700 mm liegt.

   b. Die beiden untenstehenden Grafiken zeigen die errechneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der langjährig statistisch festgehaltenen Jahresniederschlagsmengen an 2 verschiedenen Orten. (Man geht davon aus, dass die Jahresniederschlagsmenge normalverteilt ist.)

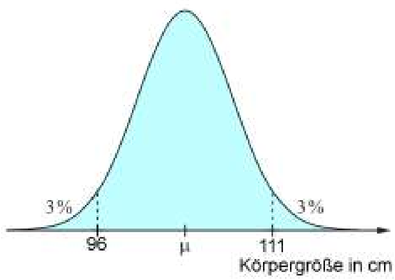




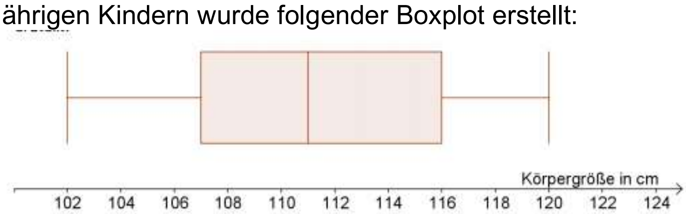
   Vergleiche die jährlichen Niederschlagsmengen mithilfe der ablesbaren Parameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

10. Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

   a. Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern. Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin
   Interpretiere die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ.
   Berechne die Standardabweichung σ.



   b. Als Ergebnis der Messung der Körpergröße von 5-jährigen Kindern wurde folgender Boxplot erstellt:



   Interpretiere das Diagramm im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen Minimum, Maximum, Median, 1. und 3. Quartil.

   c. Die gemessenen Körpergrößen der 4-jährigen Buben haben folgende Kennzahlen geliefert: Minimum (Min): 96 cm Maximum (Max): 112 cm Median (Med): 103 cm 1. Quartil (Q1): 100,5 cm 3. Quartil (Q3): 108 cm Erstelle mit diesen Kennzahlen einen Boxplot.

Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

11. Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.
    a. Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m^3	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

    Berechne das arithmetische Mittel und den Median.
    Erkläre den Unterschied dieser Mittelwerte hinsichtlich des Einflusses von Ausreißerwerten.
    b. Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

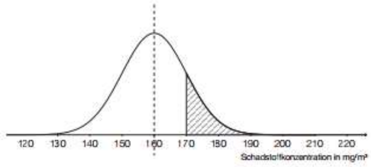


Abbildung 1

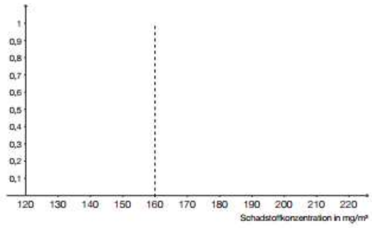
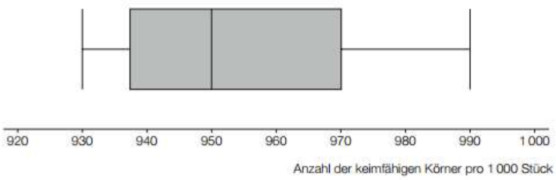


Abbildung 2

    Veranschauliche die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
    Erkläre den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.
    c. Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert $\mu = 160$ mg/m^3 und von der Standardabweichung $\sigma = 10$ mg/m^3 aus.
    Ermittle den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich)
    Gib an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen

12. Die Zulassung einer neuen Sorte Saatgut erfordert Qualitätsprüfungen. Ein wichtiger Parameter für ein qualitativ gutes Produkt ist die Keimfähigkeit. Die Anzahl der keimfähigen Körner muss bei der Qualitätsprüfung einen bestimmten Mindestprozentsatz erreichen
    a. Nach einem Keimfähigkeitstest auf einer Fläche von 1 Quadratmeter (m^2) wurde festgestellt, dass ein Saatgut eine Keimfähigkeit von 87 % aufweist. Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass von 12 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten und gesäten Körnern mindestens 10 Körner keimen.
    Stelle eine Formel zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit auf.
    b. In einer Saatgut-Packung befinden sich 80 000 Körner. Es wird die Anzahl der keimfähigen Körner in einer Packung gemessen. Diese Anzahl ist erfahrungsgemäß annähernd normalverteilt. Der Erwartungswert der keimfähigen Körner in einer Packung beträgt 74 000. Um bei einer Überprüfung zu bestehen, müssen mindestens 70 000 der 80 000 Körner keimfähig sein.
    Berechne die Standardabweichung der Keimfähigkeit, wenn die Überprüfung mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % bestanden wird.
    Stelle den Sachverhalt grafisch dar.
    c. In einer Testreihe wurden Stichproben von jeweils 1000 Körnern auf ihre Keimfähigkeit überprüft. Das Ergebnis ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

Lies aus dem Boxplot den Median, das untere Quartil, das obere Ouartil und die Spannweite ab.
Einer der gemessenen Werte wurde fälschlicherweise mit 932 angegeben. Tatsächlich lag dieser Wert bei 900
Erkläre, warum dieser Fehler keine Auswirkungen auf den Median hat.
Beschreibe die Auswirkungen dieses Fehlers auf das arithmetische Mittel.

13. Das Untersuchungsverfahren zur Diagnose einer bestimmten Krankheit hat noch folgende Fehlerquellen: 1 % der kranken Personen werden als gesund eingestuft, 2 % der gesunden Personen werden als krank eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person an dieser Krankheit leidet, sei p.
    a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank, wenn sie als gesund eingestuft wurde?
    b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt das Untersuchungsverfahren die Krankheit richtig an?
    c. Wie groß ist p, wenn die Wahrscheinlichkeit 0,0007 ist, dass eine vom Diagnoseverfahren als gesund eingestufte Person krank ist?

14. Ein Leihwagen-Unternehmen hat in seinem Fuhrpark 2 Modelle. Modell 1 ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,62 verliehen, Modell 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Modelle gleichzeitig verliehen sind, beträgt 0,35. A bezeichnet das Ereignis, dass Modell 1 verliehen ist, und B bezeichnet das Ereignis, dass Modell 2 verliehen ist.
    a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Modell nicht verliehen ist.
    b. Übertragen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Angabe in die entsprechenden Felder der unten stehenden Vierfeldertafel.
    Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten in den restlichen Feldern und tragen Sie diese ein.

	A	nicht *A*	Summe
B			
nicht *B*			
Summe			

    Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau einer der beiden Leihwagen verliehen ist.
    c. Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse A und B nicht unabhängig voneinander sind.
    Beschreiben Sie in Worten, welches Ereignis durch die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}35}{0{,}4} = 0{,}875$$

    bestimmt wird.

15. Bevor sich ein Spieler an einem Glücksspiel beteiligt, soll er den Inhalt der Urne U bestimmen. (U enthält weiße, grüne und rote Kugeln). Dafür legt er zusätzlich 40 schwarze Kugeln in die Urne und wiederholt einige Male das Experiment Ex: Ziehen einer Kugel mit anschließenden Zurücklegen dieser Kugel. Durch Anlegen einer Strichliste stellt er nach einiger Zeit fest, dass sich die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen der Kugelfarben bei folgenden Werten einpendeln dürften:
    P(weiß) = 0,1; P(rot) = 0,5 P(grün) = 0,2
    Welche Kugelverteilung dürfte die Urne demnach haben?
    Wie oft muss der Spieler das Experiment Ex wiederholen, um mit 99,5% Sicherheit wenigstens eine weiße Kugel zu erhalten?
    Der Spieler wiederholt das Experiment Ex genau 10 mal. Auf welches der beiden Ereignisse soll er wetten? E1: Es treten höchstens 3 weiße Kugeln auf. E2: Es treten wenigstens 3 rote Kugeln auf.

16. In einem Spielsalon befinden sich 3 Behälter. Der erste enthält 2 weiße und 5 schwarze Kugeln, der zweite 3 weiße und 4 schwarze Kugeln und der dritte 5weiße und 2 schwarze Kugeln. Die Verteilung der Kugeln in den Behältern ist dem Spieler allerdings nicht bekannt. Der Spieler gewinnt, wenn er beim Herausziehen von 2 Kugeln mindestens eine weiße Kugel zieht.

Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

Strategie A: Er wählt zunächst willkürlich einen Behälter aus und zieht daraus beide Kugeln.
Strategie B: Er vermischt die Kugeln aller drei Behälter in einem neuen Behälter und zieht dann daraus zwei Kugeln.
Strategie C: Er wählt zunächst eine Kugel aus einem willkürlich gewählten Behälter und anschließend die zweite Kugel aus einem anderen Behälter.
Gib die Gewinnwahrscheinlichkeit jeder dieser Strategien an.

17. Ein Glücksrad ist in 6 Sektoren aufgeteilt die mit den Buchstaben A bis F beschriftet sind. Sektor A besitzt einen Mittelpunktswinkel von 30°, Sektor B von 45°, Sektor C von 60°, Sektor D von 90° und Sektor F von 90°. Das Rad wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil auf genau einen Sektor. Der zugehörige Buchstabe wird notiert. Damit ist der Durchgang beendet.
    a. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Durchgang an.
    b. Bei vier Durchgängen entsteht eine Folge von vier Buchstaben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
       G1: Es ergibt sich das Wort AFFE.
       G2: Die Buchstaben B, C und D kommen nicht vor.
       G3: Es wird mindestens einmal der Buchstabe C notiert.
    c. Bei einem Spiel erhält man dann einen Gewinn, wenn nach einem Durchgang der Pfeil auf A zeigt. Wie viele Durchgänge muss man mindestens spielen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Gewinn größer als 50% ist?

18. Eine der wichtigsten Verbindungsstrecken zwischen Mainz und Wiesbaden ist die Kreisstraße K 17. Jeder Autofahrer, der von Mainz nach Wiesbaden auf der K 17 fährt, kommt an zwei Ampeln vorbei. Die Erfahrung zeigt, dass die erste Ampel in 7 von 10 Fällen ohne anhalten zu müssen ¨ passiert werden kann.
    Herr Pendler fährt an jedem Werktag über die K 17 nach Wiesbaden zur Arbeit.
    a. Herr Pendler glaubt, dass auch die zweite Ampel zu 70%, ohne anhalten zu müssen, überquert werden kann, und behauptet gegenüber einem Arbeitskollegen:” Die Wahrscheinlichkeit, dass ich an keiner der beiden Ampeln halten muss, beträgt 49%“. Beschreiben Sie, wie er diesen Wert berechnet hat und welche Annahme er dabei machen muss.
    b. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit, beide Ampeln ohne anzuhalten zu überqueren, ¨ 58%. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Ampel ebenfalls ohne anzuhalten überquert werden kann, wenn man bereits die erste Ampel ohne anzuhalten überquert hat.
    c. Auf der Kreisstraße K 17 zwischen Wiesbaden und Mainz halten sich 80% der Autofahrer an die baustellenbedingte Geschwindigkeitsbegrenzung von 30 km/h. Um die Sicherheit der Verkehrsteilnehmer zu erhöhen, hat die Stadt Mainz ein Gerät zur Geschwindigkeitsmessung (” Blitzer“) aufgestellt. Gehen Sie davon aus, dass Autofahrer, die sich nicht an die Geschwindigkeitsbegrenzung halten, in jedem Fall geblitzt werden. Die Zufallsvariable X soll die Anzahl der geblitzten Autofahrer darstellen. Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen man die Geschwindigkeitsmessung als binomial verteilt interpretieren kann.
    d. Gehen Sie davon aus, dass es sich bei folgendem Zufallsexperiment um eine binomial verteilte Zufallsvariable handelt:
       Es werden 20 Autofahrer kontrolliert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
       A: 3 Autofahrer geblitzt werden,
       B: sich genau 15 Autofahrer an die Geschwindigkeitsbegrenzung halten,
       C: mindestens 3 Autofahrer geblitzt werden.
    e. Erklären Sie den Ansatz und das Ergebnis im folgenden Kasten im Sachzusammenhang und geben Sie die fehlenden Zwischenschritte an:

Ansatz:	$P(X \geq 1) > 0{,}99$
	$1 - 0{,}8^n > 0{,}99$
Ergebnis:	$n \geq 21$

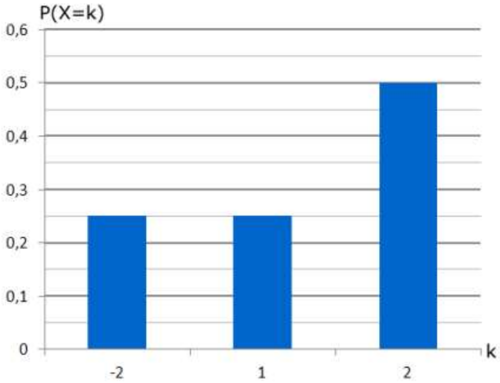
19. In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Aus dieser wird achtmal eine Kugel zufällig gezogen, die Farbe notiert und die Kugel anschließend wieder zurückgelegt.
    a. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ” Es werden gleich viele rote und blaue Kugeln gezogen.“ berechnet werden kann.

b. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang jeweils ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch den angegebenen Term berechnet werden kann.

$\alpha)\ 1-\left(\frac{3}{5}\right)^8$

$\beta)\ \left(\frac{3}{5}\right)^8+8\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7$

c. Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsgröße X festgelegt, welche die drei Werte −2, 1 und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.



Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

d. Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsgröße X notiert. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

e. Zwei Drittel der Senioren in Deutschland besitzen ein Mobiltelefon. Bei einer Talkshow zum Thema " Chancen und Risiken der digitalen Welt“ sitzen 30 Senioren im Publikum. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 30 zufällig ausgewählten Senioren in Deutschland mindestens 17 und höchstens 23 ein Mobiltelefon besitzen.

f. Von den 30 Senioren im Publikum besitzen 24 ein Mobiltelefon. Im Verlauf der Sendung werden drei der Senioren aus dem Publikum zufällig ausgewählt und nach ihrer Meinung befragt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei dieser drei Senioren ein Mobiltelefon besitzen.

20. Ein Dozent gibt für die nächste Klausur einen Fragenkatalog von 50 Fragen heraus, von denen fünf tatsächlich in der Klausur gestellt werden. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens vier Fragen richtig beantwortet werden.
Der sorglose Kandidat A bereitet sich auf die Hälfte der Fragen vor.
Der durchschnittliche Kandidat B geht davon aus, dass es reicht, sich auf vierzig der fünfzig Fragen (40/50 = 4/5) vorzubereiten.
Der perfektionistische Kandidat C ist in großer Sorge, weil er sich wegen einer Krankheit nur auf 45 Fragen vorbereiten konnte.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestehen die Kandidaten die Prüfung?

Lösungen:

1. a) 1/3; 0,273; 0,983; b) Erwartungswert für die Augenzahl bei einmaligem Würfeln; c) W1 gewinnt mit Wahrscheinlichkeit 5/9.
2. a) $P(x=k) = 0{,}85^k.0{,}15^{80-k}.\binom{80}{k}$; b) 0,8625; c) 32
3. a) arithmetisches Mittel: 298,28, Median: 298; Hätte die Flasche, die im Test 304 ml enthalten hat, einen wesentlich höheren Messwert aufgewiesen, dann hätte sich das arithmetische Mittel verändert, es wäre höher. Der Median dagegen wäre gleich geblieben, weil sein Wert nur von der mittleren Lage der nach Größe geordneten Messwerte abhängt. In diesem Fall ist es der Wert auf „Platz“ 13 der nach der Größe sortierten Werte (298); c) Aus dem Boxplot kann man die folgenden Größen ablesen: Die Füllmengen liegen zwischen 295 ml und 306 ml. Der Median liegt bei 298 ml. Das heißt, dass mindestens 50 % der Flaschen eine Füllmenge größer gleich 298 ml aufweisen. Die Angabe in Quartile ermöglicht eine Einteilung, die jeweils 25 % der Flaschen enthält. Der Unterschied der Füllmenge zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt nur 1 ml. Der Unterschied zwischen 1. Quartil und Median beträgt 2 ml, jener zwischen Median und 3. Quartil 5 ml. Der Unterschied zwischen 3. Quartil und Maximum ist 3 ml. Der Median liegt nicht in der Mitte des Boxplots, sondern näher am linken Rand. Die Verteilung der Daten ist daher nicht symmetrisch. Die Daten rechts vom Median sind breiter gestreut (linkssteile oder rechtsschiefe Verteilung).

Übungsblatt zur 1. Schularbeit 5. Jahrgang

4. a) 21,15;b) mindestens 26 und höchstens 34; c) 33,33%; d) 1,24%;
5. a) Mittelwert: 13,2; Standardabweichung: 2,54 (bei einer Stichprobe); b) Das erste Auftreten des freien Gehens war – bei rund einem Viertel der Kinder unter 11,5 Lebensmonaten, – bei rund der Hälfte der Kinder unter 13 Lebensmonaten, – bei rund drei Viertel der Kinder unter 15,5 Lebensmonaten; c) 95 % der Kinder erlernen das „freie Gehen" frühestens nach 9,2 Monaten und spätestens mit 18,8 Monaten.
6. a) 0,03%; Boxplot ist richtig; c) 1; Der Ausdruck gibt nicht die gesuchte Wahrscheinlichkeit, sondern jene Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens 2 Packungen eine zu geringe Füllmenge aufweisen.
7. a) Die entsprechenden Flächen P(X ≥ 31,5) und P(X ≤ 22,5) sind gleich groß und damit auch die Wahrscheinlichkeiten; b) 31,2%; c) Der markierte Flächenbereich der Grafik gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, dass Partei A höchstens 24 % der Stimmen erhält. $P(E_2) = P(X \geq 36) = \sum_{x=36}^{40} \binom{40}{x} \cdot 0{,}96^x \cdot 0{,}04^{40-x}$
8. a) 37,5%; b) $0{,}4^n$ drückt mithilfe des Modells der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei n Frauen keine positive Wirkung auftritt. $1 - 0{,}4^n$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu und berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass von n Frauen mindestens 1 Frau eine positive Wirkung des Medikaments verspürt; c) Testpersonen der Versuchsgruppe mit einer Körpermasse zwischen rund 54,8 kg und rund 75,1 kg sind für das Experiment ideal.
9. a) 19,74%; b) Der größere Erwartungswert bei Ort B besagt, dass dort der Mittelwert der gefallenen Regenmenge größer ist als bei Ort A. Die kleinere Standardabweichung besagt allerdings, dass bei Ort B die Regenmengen nicht so stark vom Mittelwert abgewichen sind wie bei Ort A.
10. a) 3,99; b) Der Median m liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Mindestens 50 % der Messwerte sind ≤ m, mindestens 50 % sind ≥ m. Die Quartile teilen die geordnete Liste in 4 Teile. Aus dem Diagramm kann man die folgenden Größen ablesen: Die Körpergrößen der 5-jährigen Kinder liegen zwischen 102 und 120 cm. Der Median legt bei 111 cm, das 1. Quartil bei 107 cm und das 3. Quartil bei 116 cm. Der Unterschied zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt 5 cm, zwischen 1. Quartil und Median 4 cm, zwischen Median und 3. Quartil 5 cm, zwischen 3. Quartil und Maximum 4 cm; c)
11. a) Mittelwert 158,5 mg/m³; Median 157 mg/m³; b) Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von –∞ bis x. Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion; c) [134,2;185,8]; Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.
12. a) $P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{12} \binom{12}{x} \cdot 0{,}87^x \cdot 0{,}13^{12-x}$ b) σ = 1720; c) Der Median bleibt gleich, weil immer noch gleich viele Werte links bzw. rechts des Medians liegen würden. Das arithmetische Mittel würde sinken.
13. a) p/(98-97p); b) (p+98)/100;c) 6,4%
14. a) 0,65; b)0,32;c) die Ereignisse sind nicht unabhängig, da P(A).P(B) = 0,62.0,4=0,248 $\neq P(A \cap B) = 0{,}35$; die WSK dass Modell 1 verliehen ist, wenn man weiß dass Modell 2 verliehen ist.
15. (20/100/40); (51); (0,987; 0,945)
16. A: 0,730; B: 0,738; C: 0,741
17. b) $6{,}5.10^{-4}$; 0,044; 0,5177; c) 8 mal
18. a) Herr Pendler geht davon aus, dass beide Ampeln auf seinem Weg zur Arbeit in 70 % der Fälle auf grün stehen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er beide Ampeln ohne Anhalten passieren kann, liegt dann bei 0,7*0,7 = 0,49
    b) 0,829
    c) Eine Binomialverteilung liegt immer dann vor, wenn es nur zwei Ausgänge gibt und sich die Wahrscheinlichkeiten für diese Ausgänge im Verlauf des Experimentes nicht ändern. Im beschriebenen Fall interessiert man sich nur für die Autofahrer, die sich an die Geschwindigkeitsbegrenzung halten, und diejenigen, die zu schnell fahren, es gibt also nur zwei Ausgänge. Sofern sich die Zahl der Autofahrer, die die Geschwindigkeitsbegrenzung überschreiten, nicht ändert, kann daher von einer Binomialverteilung ausgegangen werden.
    d) 20,54%; 17,46%; 79,39%;
    e) In dem abgebildeten Kästchen wird berechnet, wie viele Autofahrer mindestens kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein Autofahrer die Geschwindigkeitsbegrenzung überschreitet.
19. a) $\binom{8}{4}.\left(\frac{2}{5}\right)^4.\left(\frac{3}{5}\right)^4$; b) es wird mindestens eine rote Kugel gezogen, es werden mindestens 7blaue Kugeln gezogen; c) E(X) = 0,75; d) $\frac{3}{16}$; e) 82,6%; f) 40,8%;
20. 0,174; 0,742; 0,928