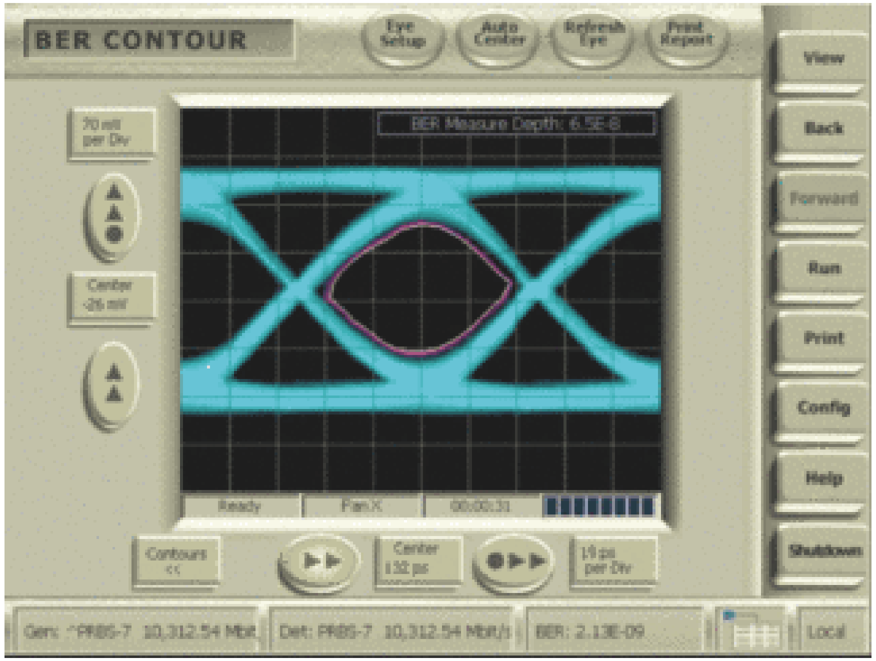
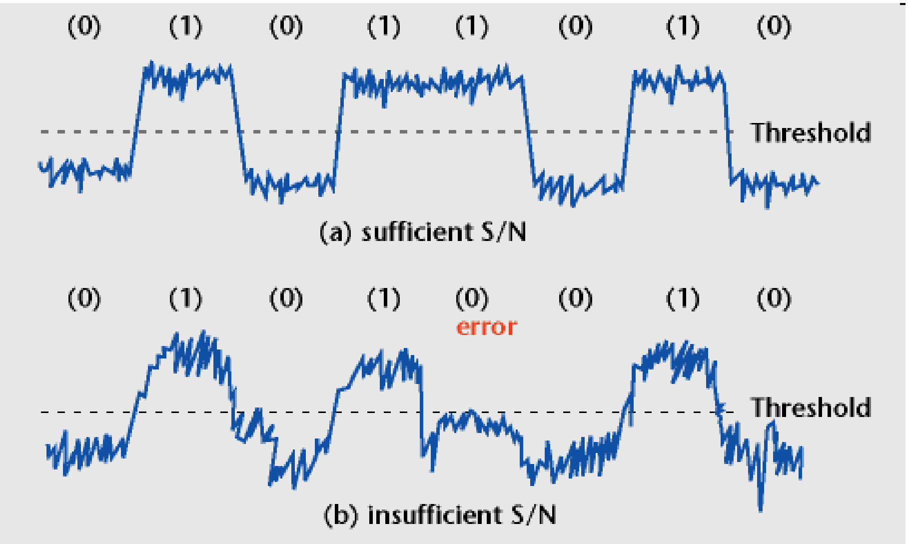
Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering

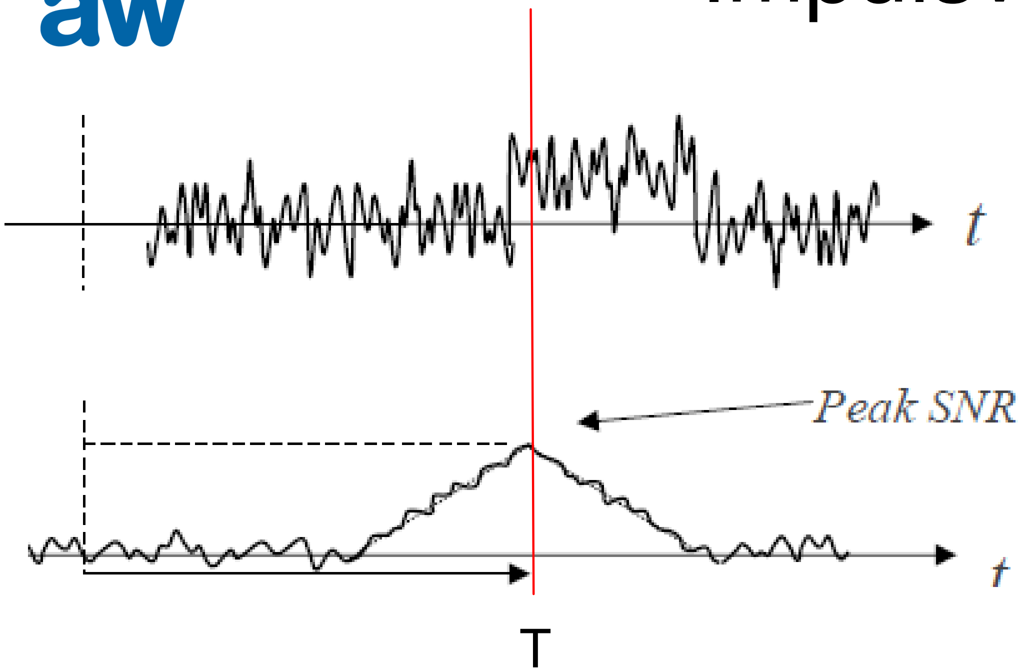
Impulsverzerrungen





Impulsverzerrungen

Noise
Übersprechen

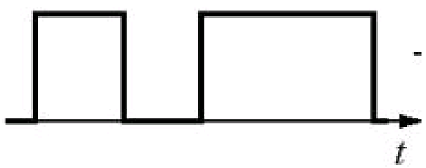


schlechte Lösung

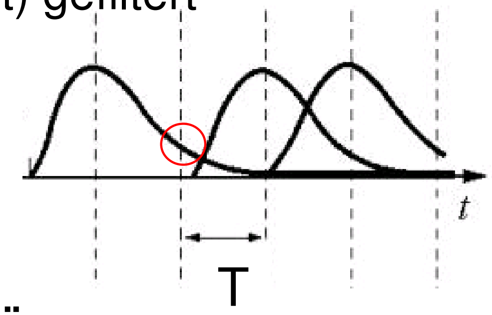
1. Idee Mittelung

gute Lösung, aber wie?

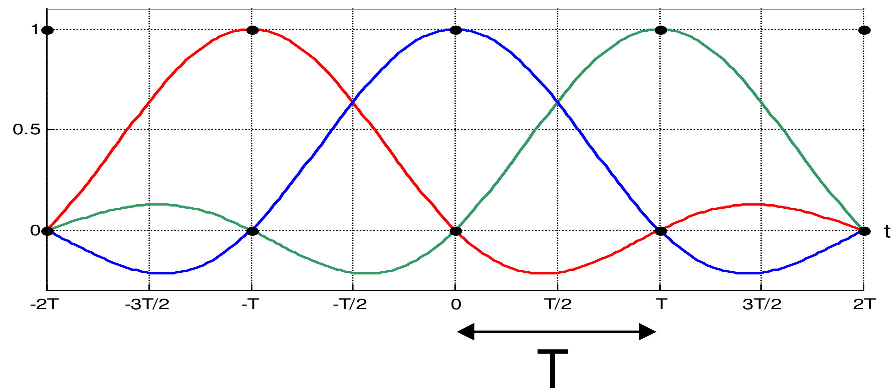
s(t)



s(t) gefiltert



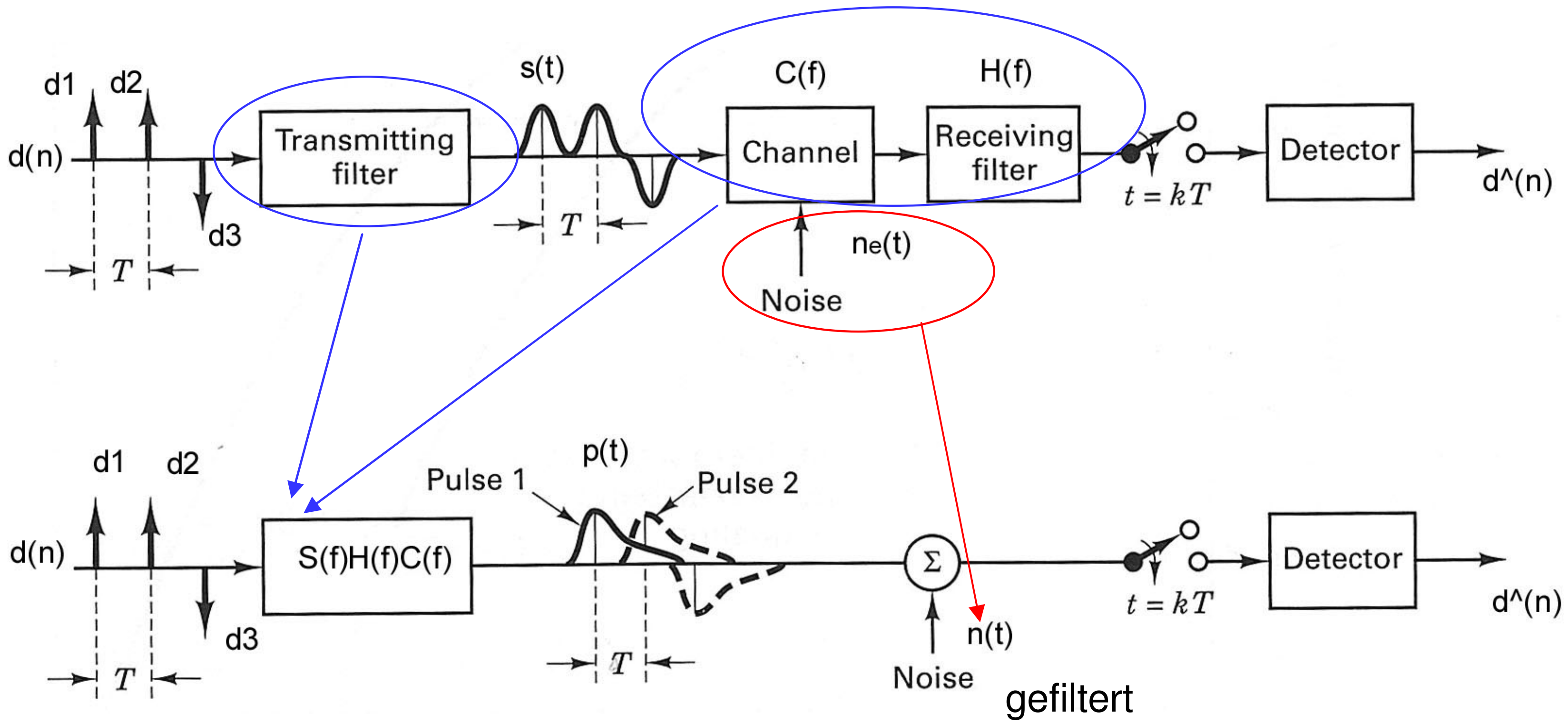
schlechte Lösung



gute Lösung, aber wie?

1. Idee keine Rechteckpulse

Aufsplitten der Problematik



S(f): Pulsspektrum Sendesignal
C(f): Frequenzgang Kanal
H(f): Frequenzgang Empfangsfilter

2 Challenges beim Design;

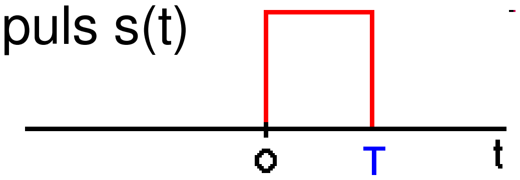
- Empfangsfilter zur Beschränkung Rauschbandbreite
- Pulsformung für Abtasten ohne Interferenz

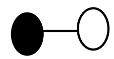
Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
School of Engineering

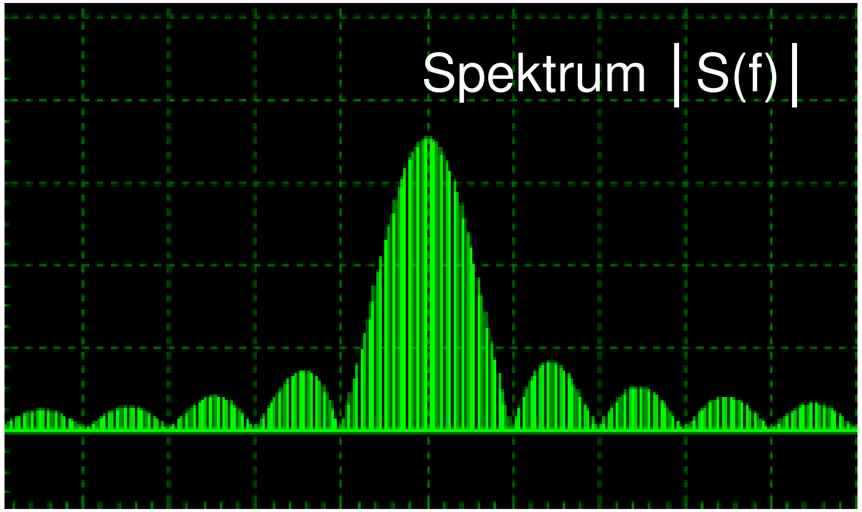
Optimales Filter = Matched Filter

1. Problem: Noise minimieren

Sendepuls s(t)







<u>Optimale Filterung intuitiv betrachtet:</u>

Man gewichtet im Frequenzgang des optimalen Filters
genau jene spektralen Anteile, die vom Sendepuls belegt sind
und zwar proportional der Belegungsstärke !

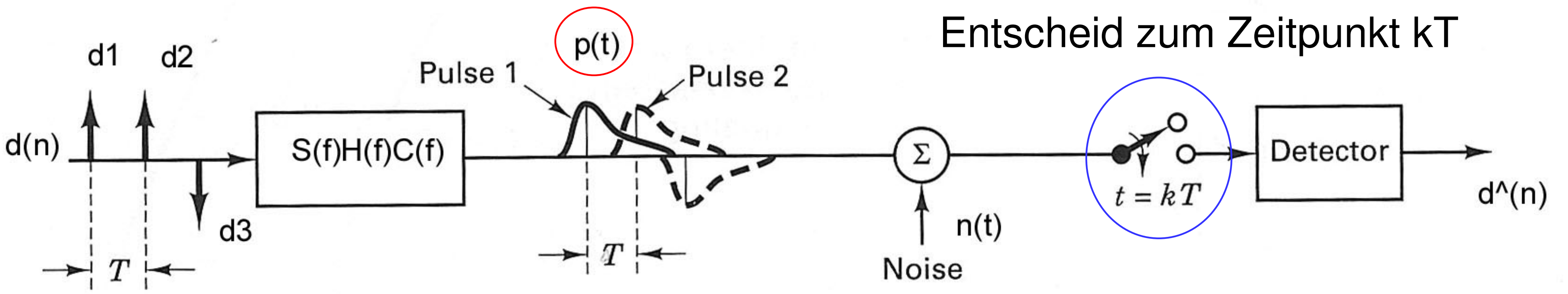
→ Amplitudengang des Empfangsfilters H(f) = Betrag des Pulsspektrum S(f)

→ Die Fläche unter dem Ausgangsspektrum entspricht der Energie* des Sendepulses

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \, df$$

*Note Energie von x(t) nach Parceval Theorem: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

Matched Filter (MF)



p(t) habe das Spektrum:

$$P(f) = \underbrace{S(f) \cdot C(f)}_{S_e(f)} \cdot H(f)$$

S(f): Pulsspektrum Sendesignal
C(f): Frequenzgang Kanal
H(f): Frequenzgang Empfangsfilter
T: Symboldauer

H(f) ist ein so genanntes Matched Filter wenn:
Zum Zeitpunkt T vor dem Abtaster das Verhältnis Pulse p(t) zu Varianz des Rauschsignal n(t) maximal wird

Anders formuliert: Signal/Geräuschverhältnis S/N von p(t)+n(t) zur Abtastzeit T soll maximal werden durch die geeignete Wahl von H(f)

Matched Filter (MF)

Matched Filter mathematisch betrachtet (ohne Beweis):

$$\frac{S}{N} = \frac{|p(T)|}{\sigma_n^2}$$ wird maximal bei weissem Rauschen wenn gilt:

$$H(f) = S_e^*(f)e^{-j2\pi Tf} = S(f)^* C(f)^* e^{-j2\pi Tf}$$

* konj.komplex

das heisst: $$h(t) = \begin{cases} s_e(T-t), & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

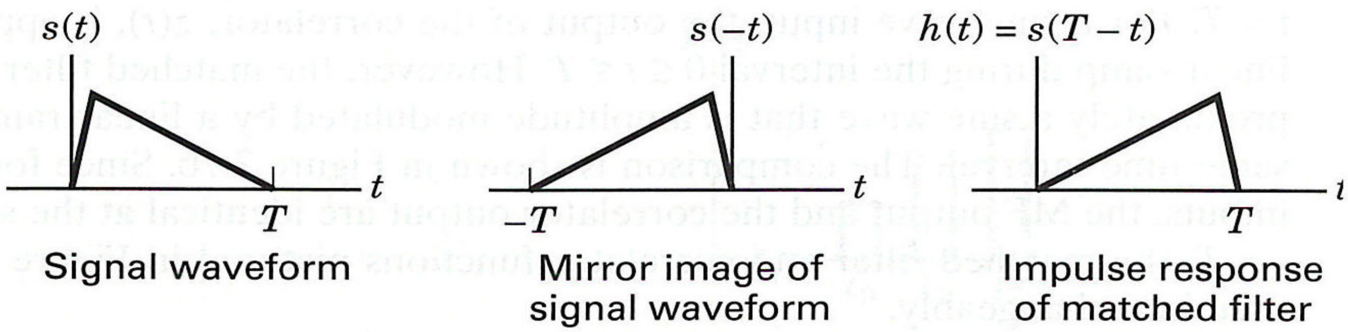
Mit Vereinfachung* C(f) = 1
wird $s_e(t) = s(t)$ und:

$$h_{opt}(t) = \begin{cases} s(T-t), & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$|H(f)| = |S(f)|$$

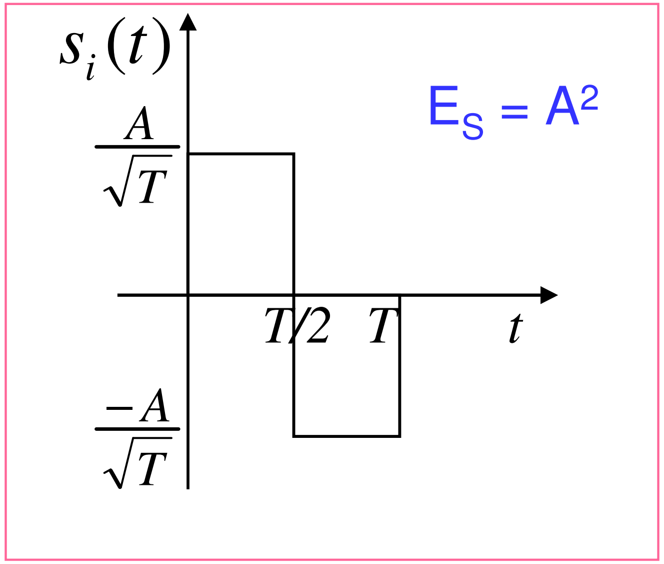
$$p(T) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)^2 d\tau = E_S$$

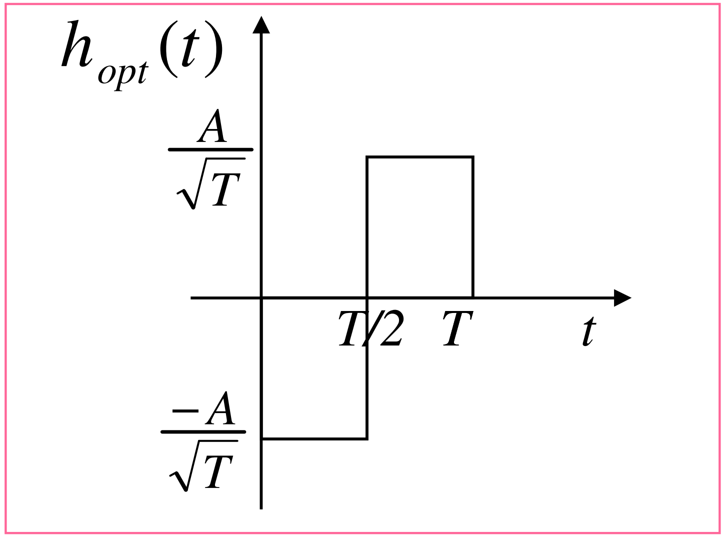
Bsp.:



*Note: allfällige Kanaldämpfung wird in s(t) berücksichtigt

Beispiel Matched Filter





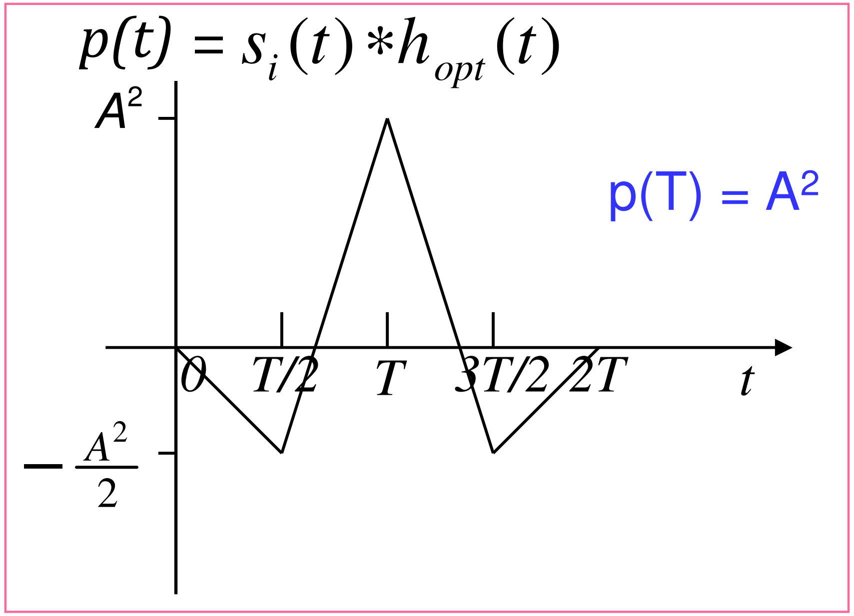
Betrachtung mit Faltung:

$$p(t) = s_i(t) * h_{opt}(t) = \int s_i(\tau) \cdot h_{opt}(t-\tau)d\tau$$

$$p(T) = s_i(T) * h_{opt}(T) = \int s_i(\tau) \cdot h_{opt}(T-\tau)d\tau = \int s_i^2(\tau)d\tau$$

$$p(T) = \int s_i^2(\tau)d\tau = E_S$$

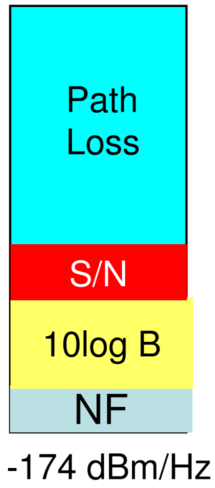
p(T) entspricht der Energie des Sendepuls



S/N am Ausgang des MF

Man kann zeigen, dass für das Signal/Geräuschverhältnis S/N nach dem MF gilt:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(f)|^2}{N_0/2} df = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt = \frac{2E_s}{N_0}$$

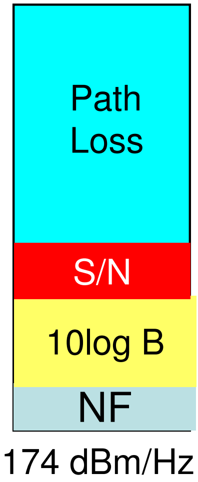


S(f) = Pulsspektrum des Sendesignal s(t) an Empfängereingang
N_0 = einseitige Rauschleistungsdichte
E_s = Impulsenergie von s(t), Symbolenergie am Empfängereingang

- Das S/N ist unabhängig von der Pulsform!
- Eine Erhöhung ist nur durch Erhöhung der Symbolenergie möglich, also durch mehr mittlere Signalleistung oder längere Symboldauer.

Mit Rausch- und Signalleistung am Eingang $N_{eq} = N_0 B_{eq}$, $S = E_S/T$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \left(\frac{S}{N_{eq}}\right)_{in} = \frac{E_S}{N_0 B_{eq} T} = \frac{2E_S}{N_0}$$



d.h. äquivalente Rauschbandbreite B_{eq} des MF ist somit: $B_{eq} = \frac{1}{2T}$

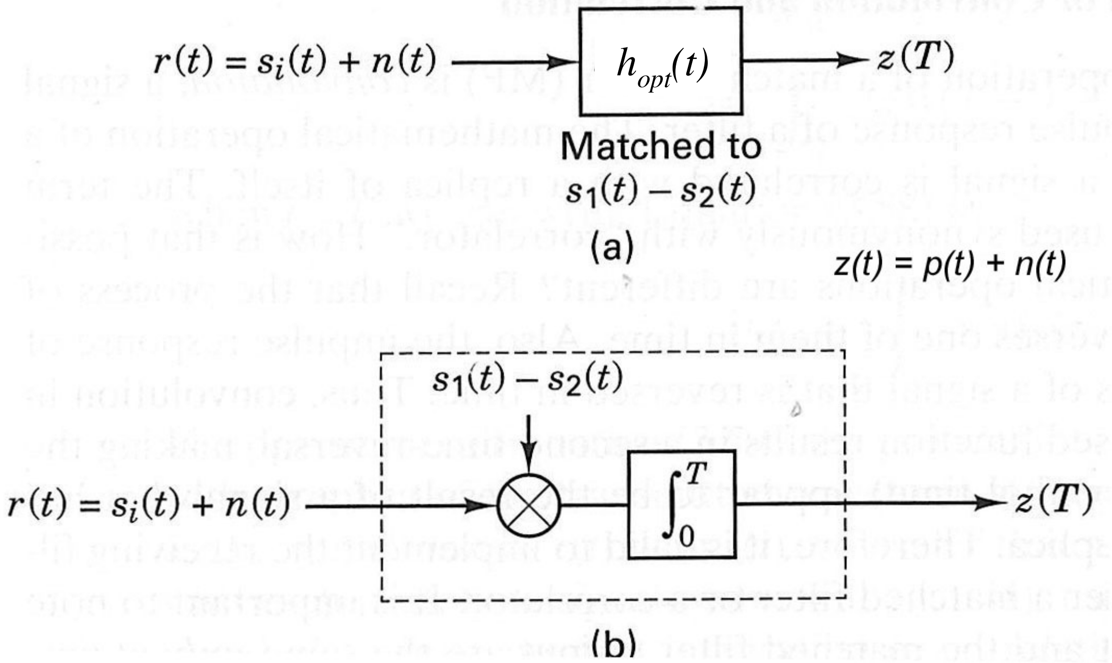
Note: diese Bandbreite ist i.A. nicht mit der Signalbandbreite identisch

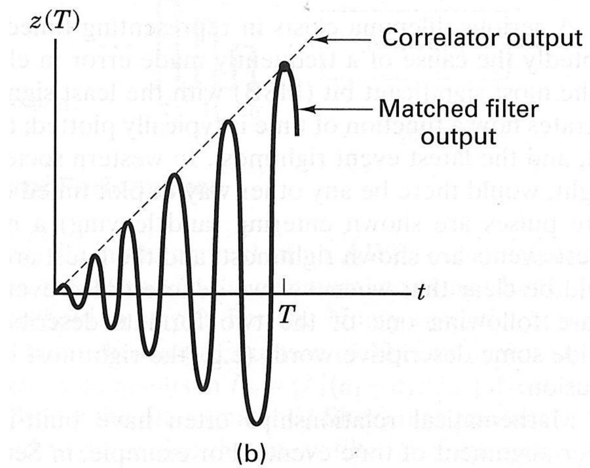
Matched Filter … Korrelator

Die zur Zeit t=nT mathematisch äquivalente Grösse liefert der Korrelator

vgl. math. Verwandtschaft Faltung und Korrelation $$p(t) = s_i(t) * h(t) = \int_T s_i(\tau)\cdot s_i(t-(T-\tau))d\tau$$

$$p(t) = \int_0^t s_i(\tau)\cdot s_i(\tau)d\tau$$





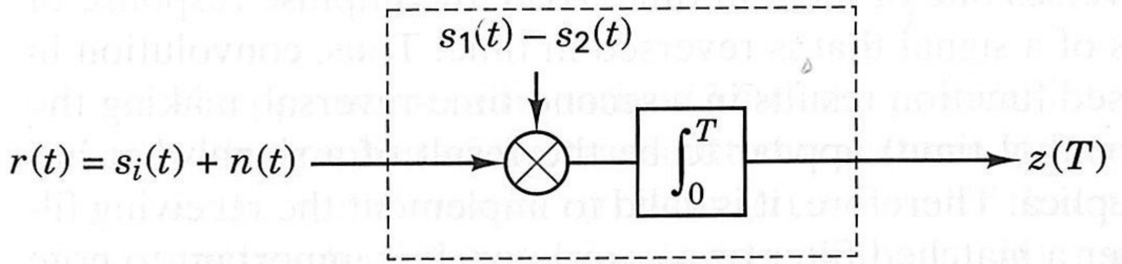
Allg. Def: Sender liefert entweder Impuls $s_1(t)$ oder Impuls $s_2(t)$

- MF wird auf das Differenzsignal $s_1(t) - s_2(t)$ entworfen
- Korrelator multipliziert mit Referenz $s_1(t) - s_2(t)$,
  Sync needed!

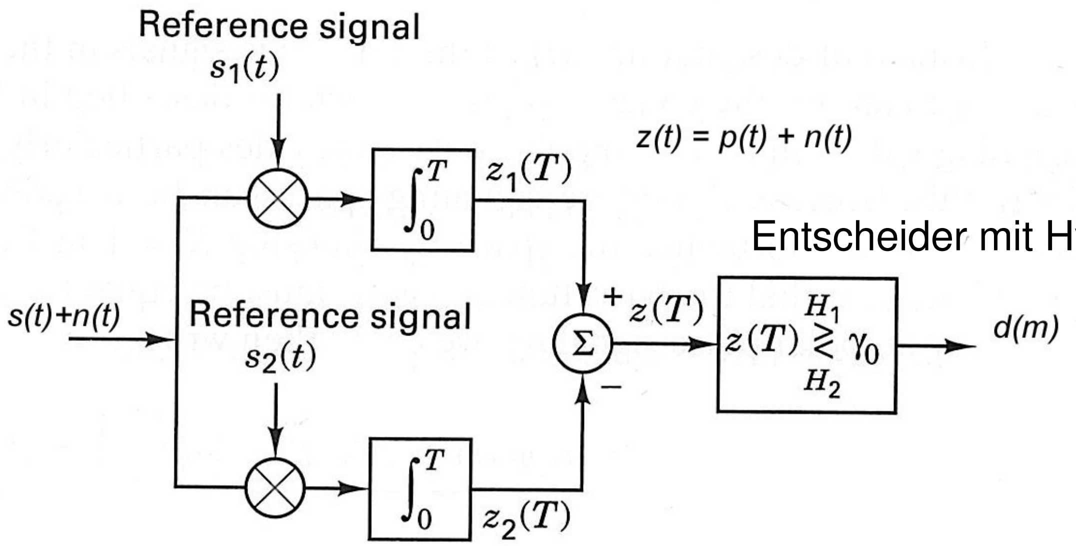
Korrelator

Korrelatoren sind meist einfacher umzusetzen als Matched Filter

Prinzipbild



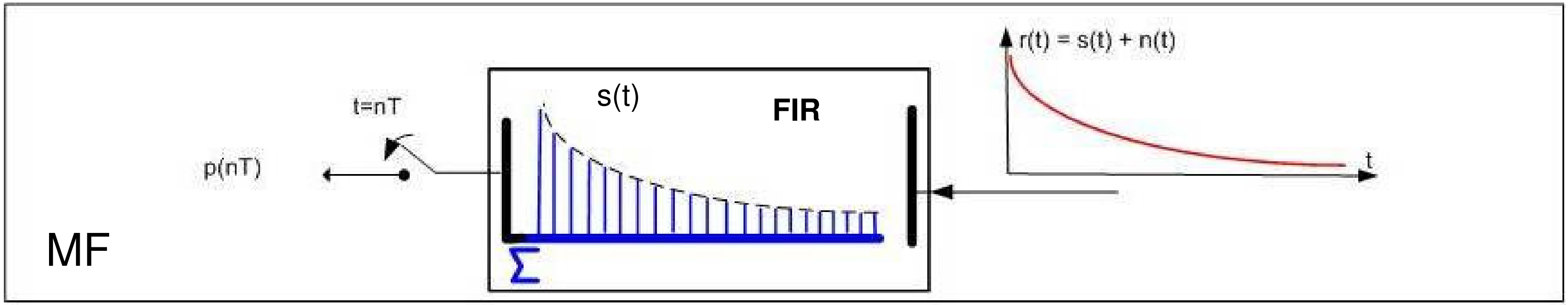
Praktische Ausführung
(z.B. FSK)

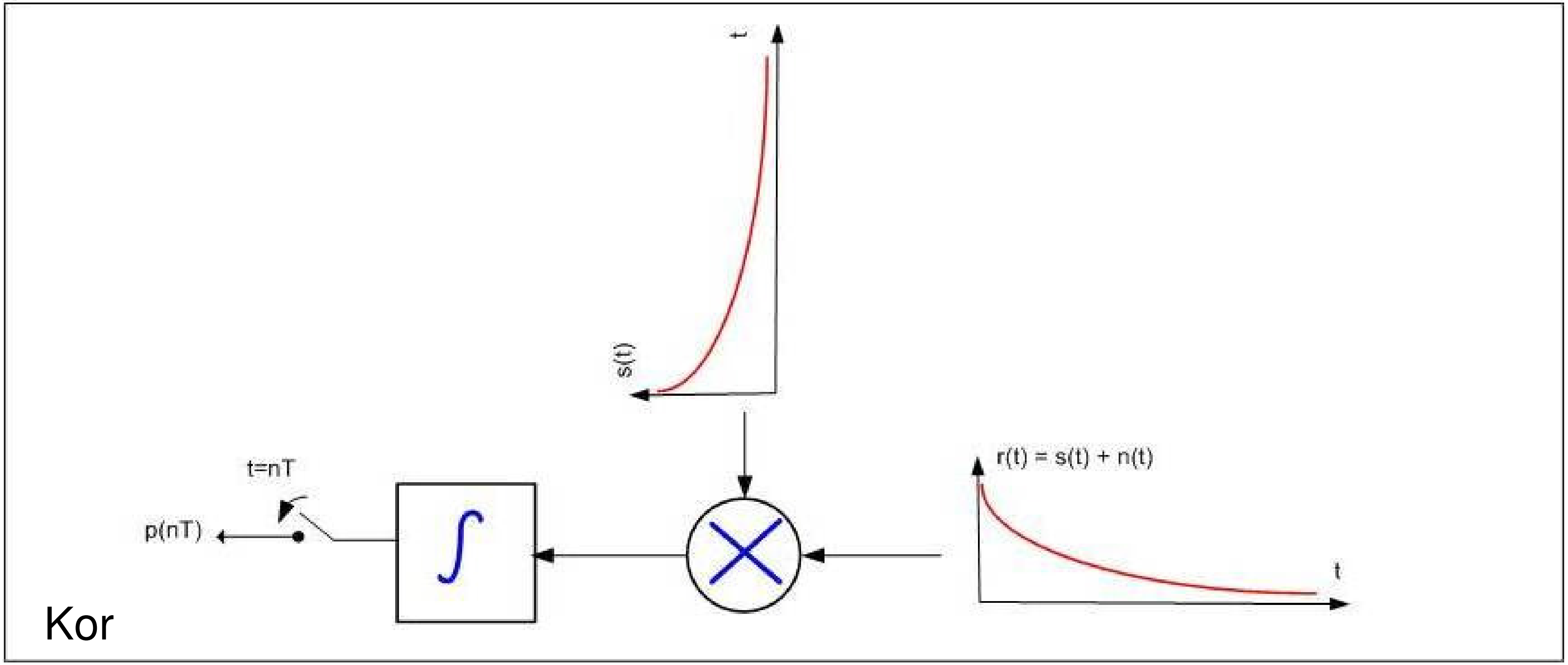


Wie soll man die Entscheiderschwelle setzen?

Die Schwelle γ_0 des Entscheiders liegt in der Mitte der Energiedifferenz der Signale s_1 und s_2

MF – Korrelator: Handhabung



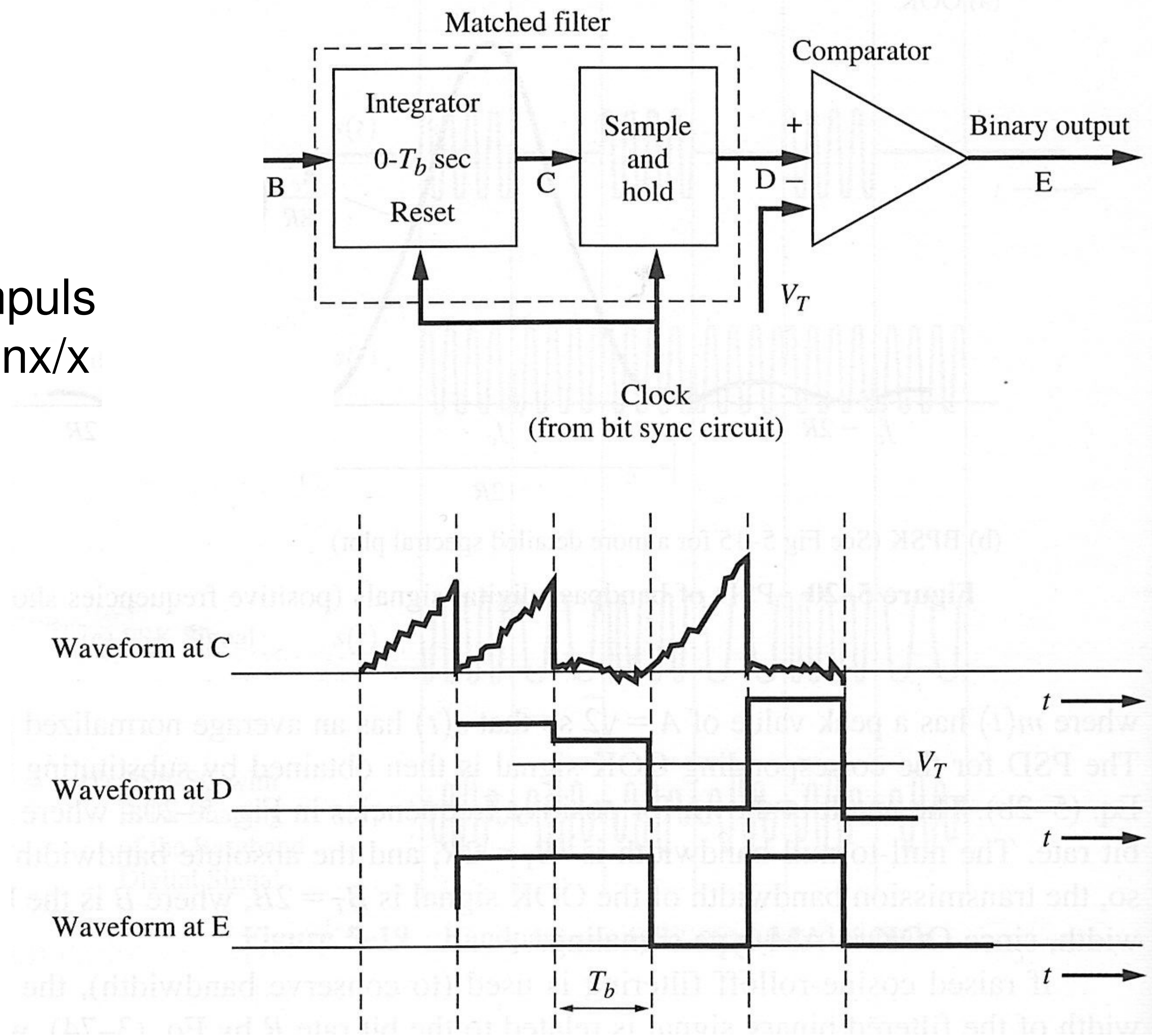


MF für Rechteckimpuls

Für Rechteck-Impulse s(t) :

- MF Stossantwort: Rechteckimpuls
  Spektrum Amplitudengang: sinx/x
- Korrelator identisch mit MF
- äquivalente Realisation:

  Integrate & Dump



- Alternative Näherung:

  optimiertes RC-Filter

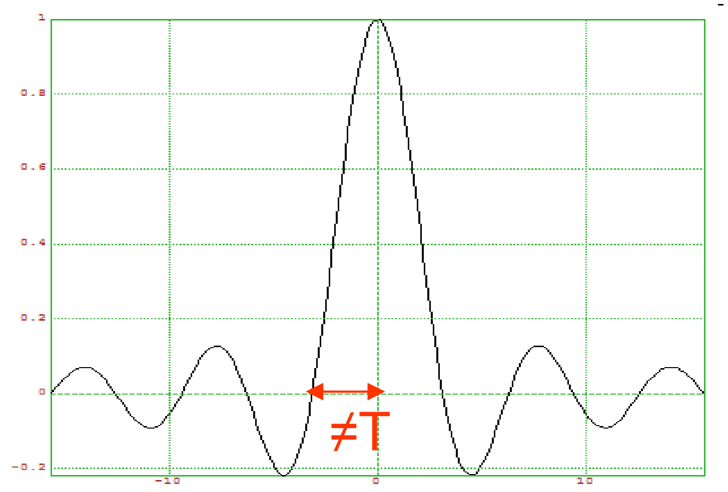
Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
School of
Engineering

MF: Intersymbol Interferenz

Häufige Forderung: Sendepuls soll möglichst wenig Bandbreite benötigen

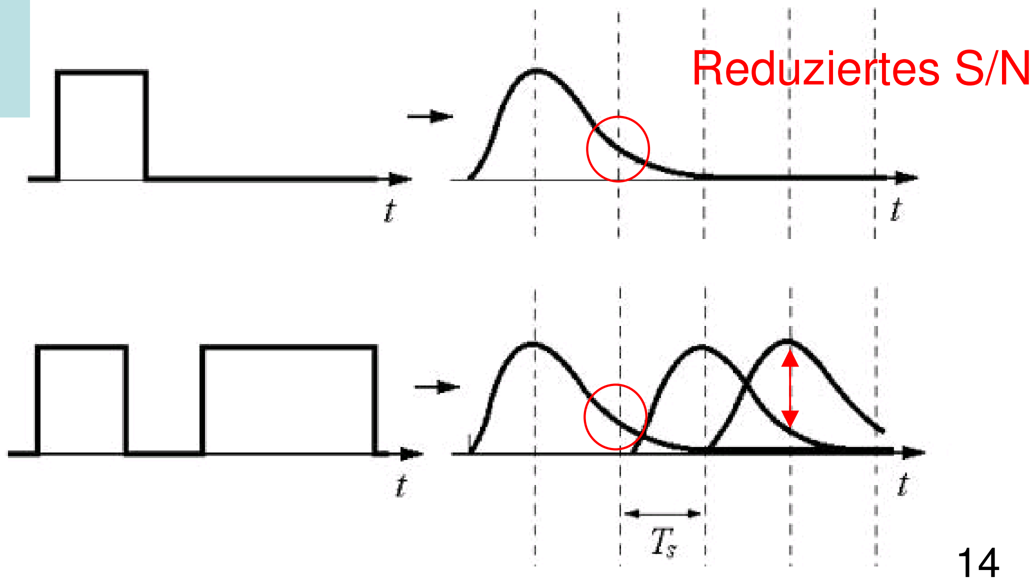
d.h.
Realisation mit TP sehr hoher Steilheit

Leider: Dauer Impulsantwort >> Bitdauer



→ Problem Nr. 2 :

Pulsübersprechen auf Nachbar Bit zu den Abtastzeitpunkten
d.h. Intersymbolinterferenz ISI

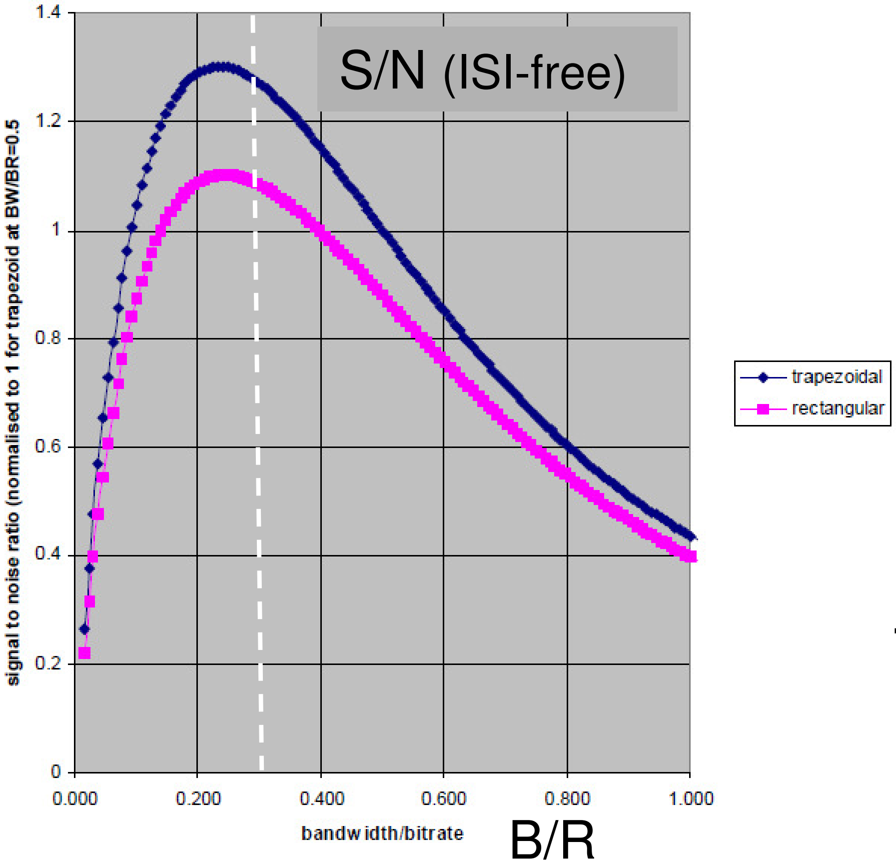


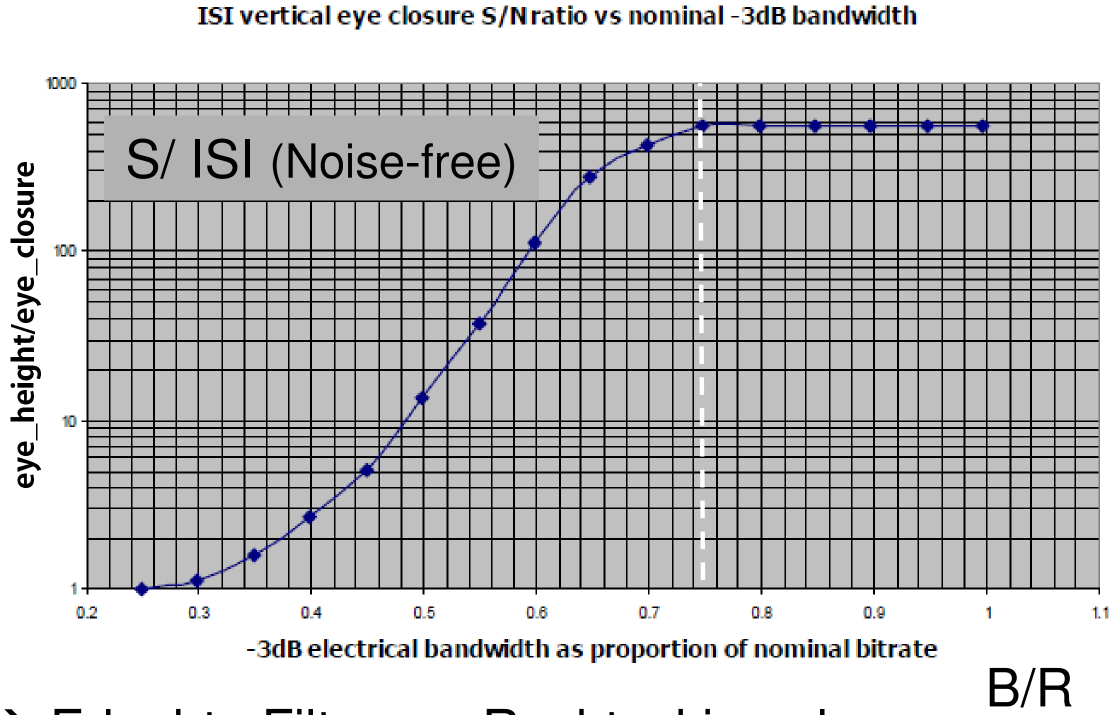
Tritt auch bei andern Pulsformen auf
z.B. Rechteckpuls nach einer ungeeigneten RC-Tiefpass Filterung

Rechteck: Intersymbol Interferenz

Optimierung Bsp. Tiefpass 1. Ordnung

Source: Mindspeed White Paper NRZ Bandwidth





→ Erlaubte Filterung Rechteckimpuls:
Weniger als 0.75*Rate ergibt ISI
Mehr als 0.3*Rate verschlechtert S/N

Optimum bei ca. B = 0.5…0.6*Bitrate

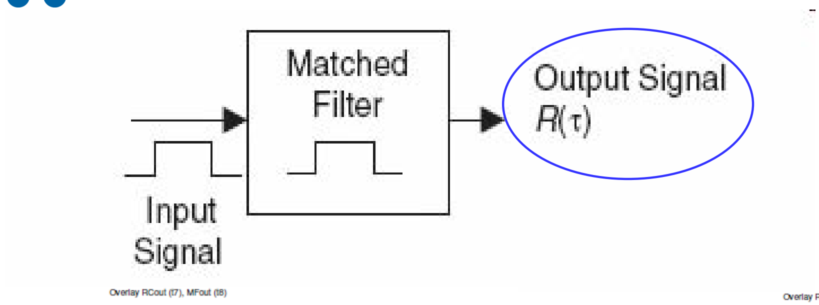
Rechteckpulse Tiefpass gefiltert mit B = 1/2T…1/T sind keine schlechte Wahl

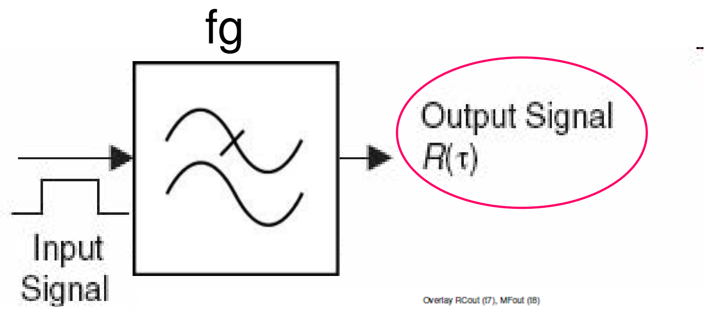
Note: eye closure = eye height – eye opening

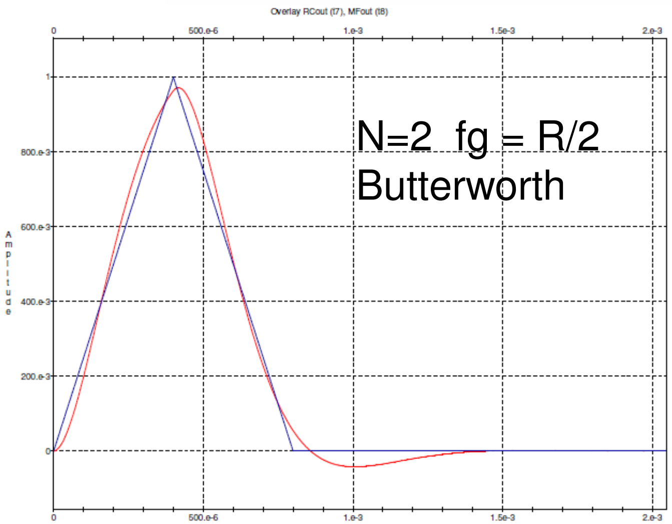
Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

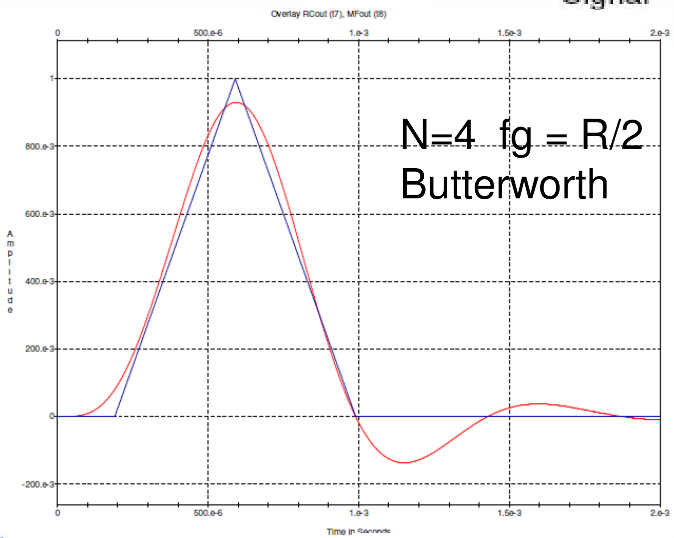
School of Engineering

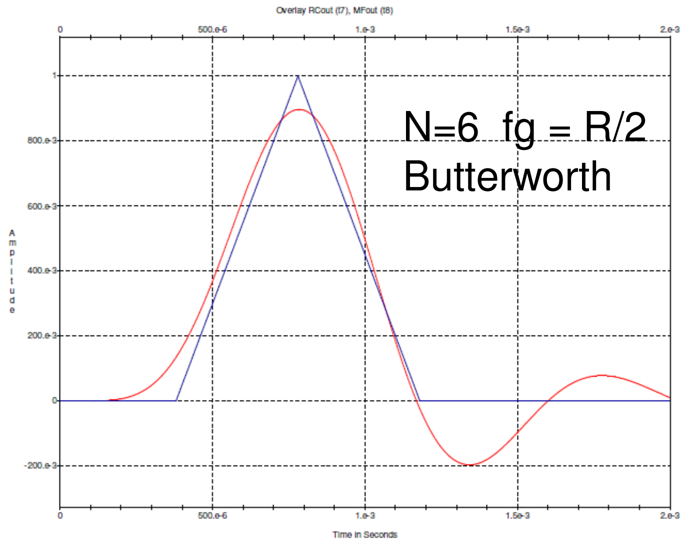
Matched Filter versus RC Tiefpass





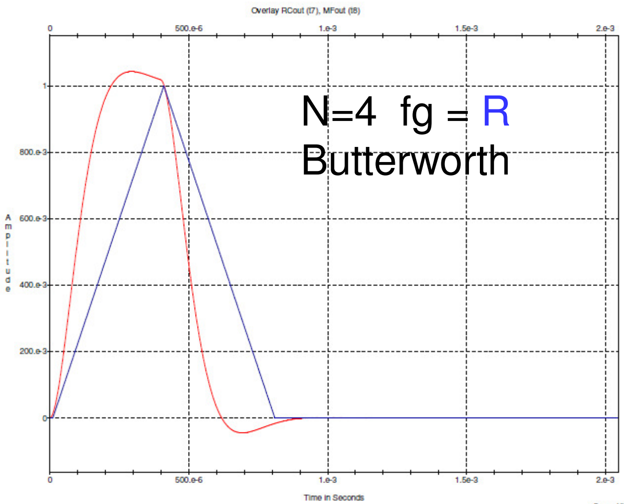


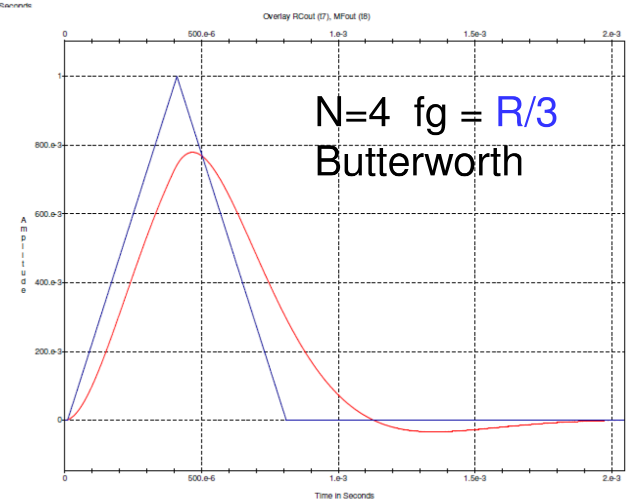




SNR ↓

ISI ↓





ISI ↑

SNR ↓

Optimaler Lösungsansatz
Nyquist Kriterien

Kriterien für die Pulsform
am Ausgang des MF

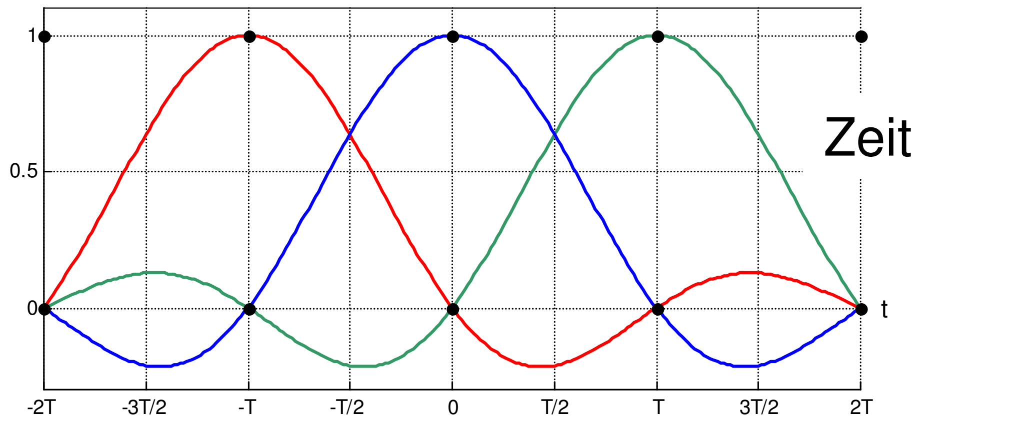
1. Kriterium für t=nT

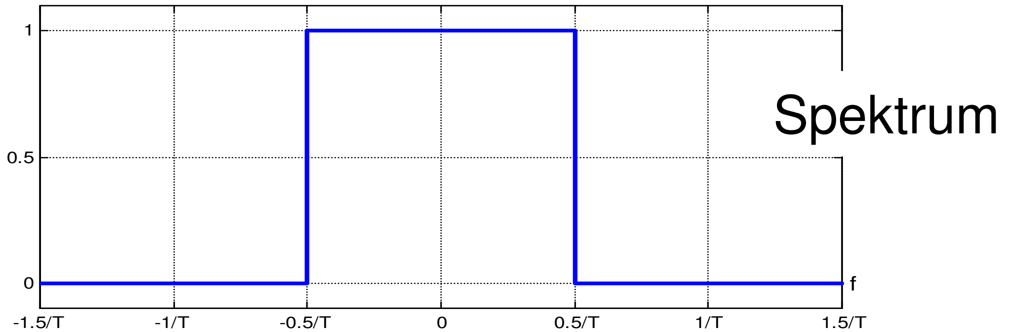
$$p(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

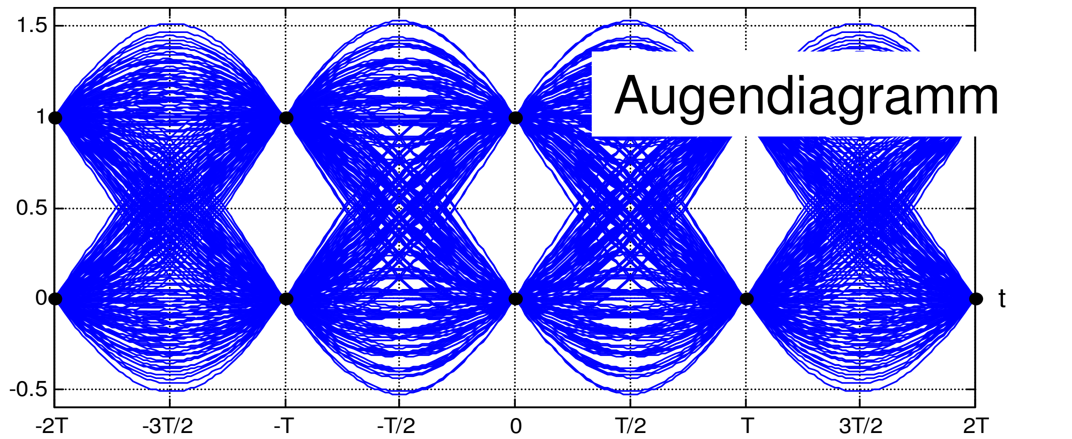
Bsp. $$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Kriterium vertikal: okay
Volle Öffnung
Entscheider: Schwelle bei 0.5

Problem bei Signal Jitter (horizontal)
- Jitter z.B durch Taktregeneration







Nyquist Kriterien

Kriterien für die Pulsform
am Ausgang des MF

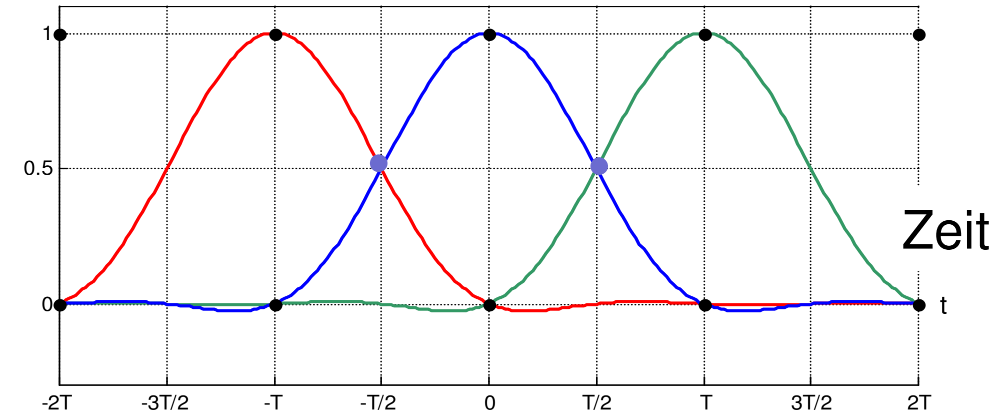
2. Kriterium für t= nT/2

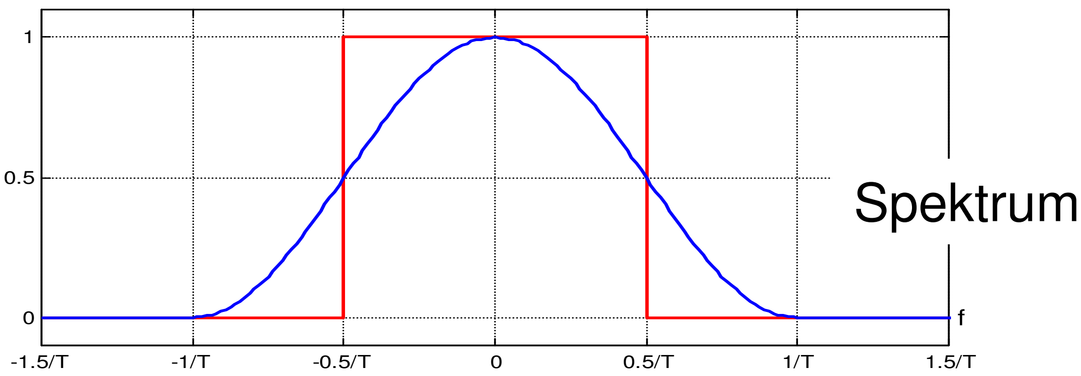
$$p(nT/2) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0.5 & n = \pm 1 \\ 0 & n = \pm 2, \ldots \end{cases}$$

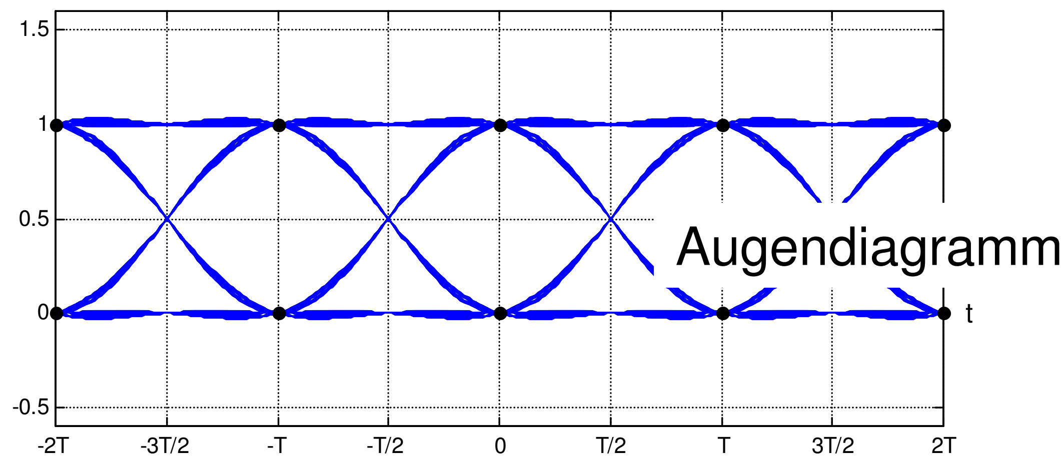
Bsp: $$p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos(\pi t/T)}{1 - 4(t/T)^2}$$

Spektrum wird breiter: Raised Cosine

$$P(f) = \begin{cases} 1 + \cos(\pi T f) & |f| \le 1/T \\ 0 & |f| > 1/T \end{cases}$$







Nyquist Kriterien

Kompromiss:

1. Nyquist Krit. ganz erfüllen
2. Nyquist Krit. so gut wie möglich

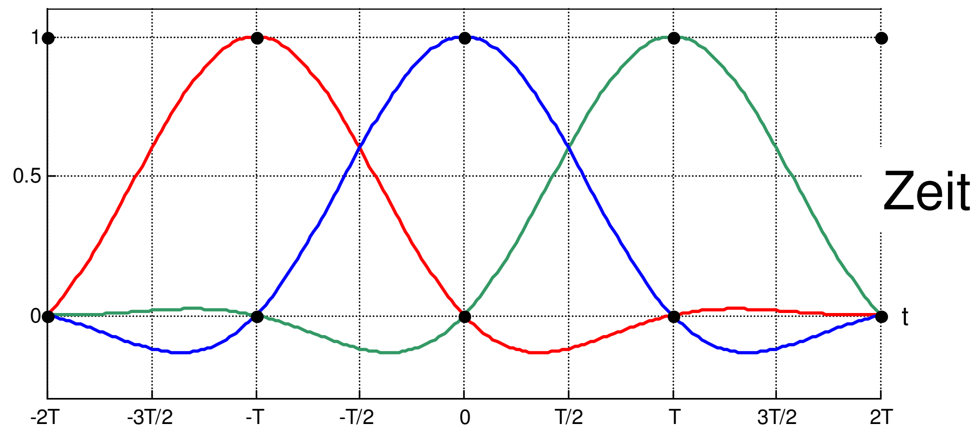
Bandbreite einstellen
mit Roll-off Faktor β

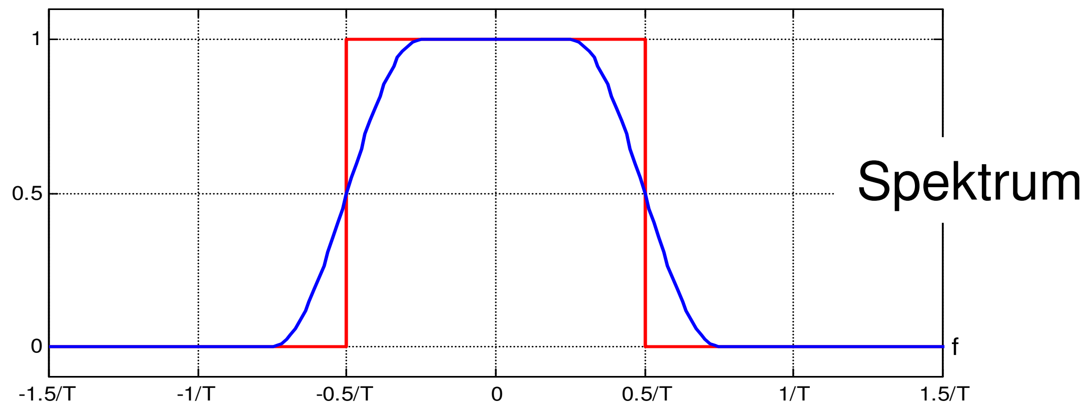
$$p(t) = \frac{\sin(\pi\, t/T)}{\pi\, t/T} \cdot \frac{\cos(\pi\, \beta t/T)}{1-4(\beta t/T)^2}$$

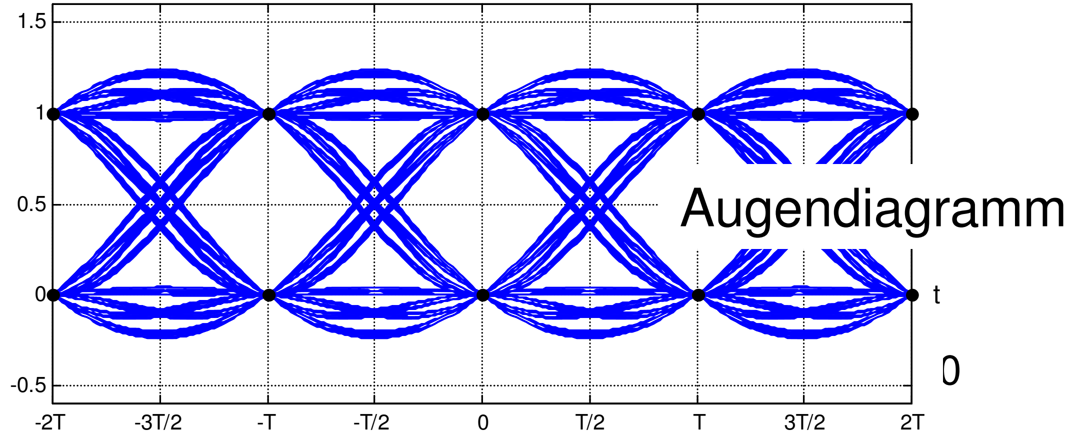
Bsp. Fig. $\beta = 0.5$

Spektrum allg:

$$P(f) = \begin{cases} 1 & 0 \le |f| \le \dfrac{1-\beta}{2T} \\ 1+\cos\left[\dfrac{\pi T}{\beta}\left(|f| - \dfrac{1-\beta}{2T}\right)\right] & \dfrac{1-\beta}{2T} \le |f| \le \dfrac{1+\beta}{2T} \\ 0 & |f| \ge \dfrac{1+\beta}{2T} \end{cases}$$

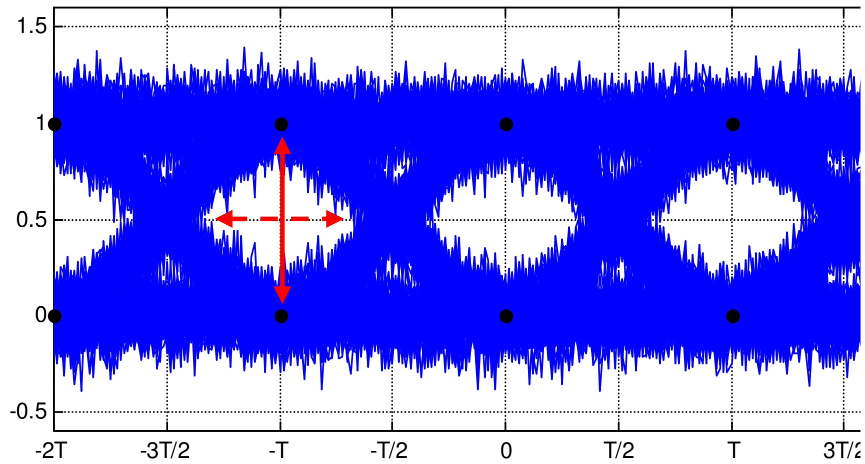






Aufteilung Filter TX - RX

Rauschen macht das Auge zu!
Jitter im Abtaster macht das Auge zu!



Abhilfe:
- P(f) nach den Nyquist Kriterien wählen
- Jitter-arme Abtastregelung entwerfen

Problem:
P(f) enthält eigentlich 2 Filter in der Übertragungsstrecke:
Das den Sendepuls formende Filter S(f) und das passende MF H(f).
Lösung:
Verteilen der Nyquist Impulsform auf Sender und Empfänger in gleichem Mass:

$$|H(f)| \approx |S(f)| \approx \sqrt{P(f)}$$

z.B. Root Raised Cosine Filter

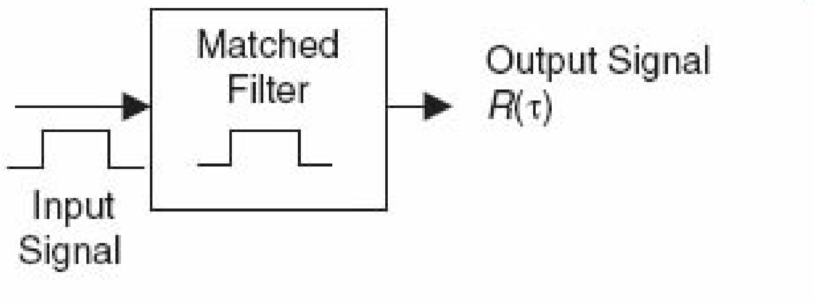
P.S. Übrige Filter im System tendenziell breitbandig halten → kaum ISI

Aufteilung Filter TX - RX

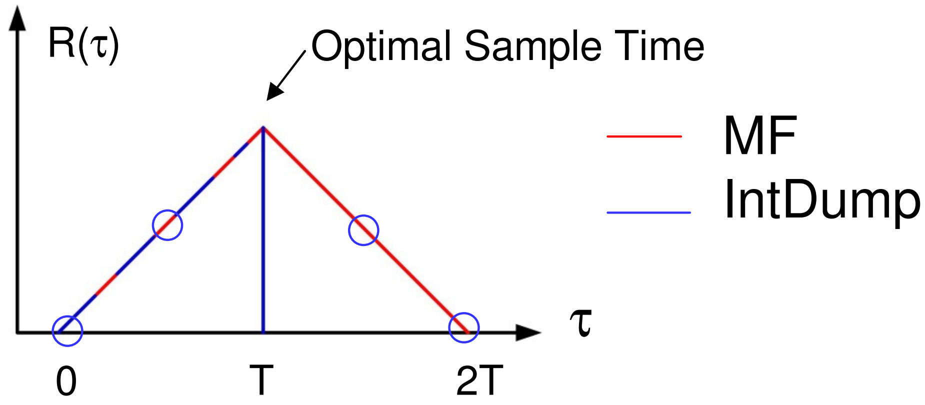
Einfachste Implementation für $|H(f)| \approx |S(f)| \approx \sqrt{P(f)}$

- Rechteckimpulse s(t)
- MF mit Rechteck h(t)
  (oder Integrate & Dump)
- Spektrum

$$P(f) = \left[\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}\right]^2$$



MF-Ausgang erfüllt auch
beide Nyquistbedingungen!



Nachteil: Kanal muss viel Bandbreite bereitstellen / erlauben

Mittels Simulation kann auch eine Lösung mit Rechteck und Tiefpassfilter gefunden werden (vgl. Slide 16 und Praktikum)

Erkenntnisse MF

- Die Pulsform spielt keine Rolle, nur Energie E_s
- Die äquivalente Noise Bandbreite beträgt $$B_{eq} = \frac{1}{2T} = \frac{R}{2}$$
- Optimale Detektion mit MF oder Korrelator auf $s_1(t) - s_2(t)$
- ISI: Das Ausgangssignal p(t) des Matched Filter/Korrelator sollte näherungsweise die Nyquistkriterien erfüllen
- Das Sendepulsspektrum sollte möglichst Bandbreite sparend gewählt sein
- Praktische Lösungen:

	Simple		DSP
Tx:	Rechteckpuls	Rechteckpuls TP Filter 2.O. R/2	Root Raised Cosine Sendepulse
Rx:	Integrate&Dump	TP Filter 2.O. R/2	Root Raised Cosine MF

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

- Bit Error Rate = BER
- Rauschen sei weiss und Gauss verteilt mit Leistung $N = N_0 \cdot B_{eq}$

Entscheidende Frage:

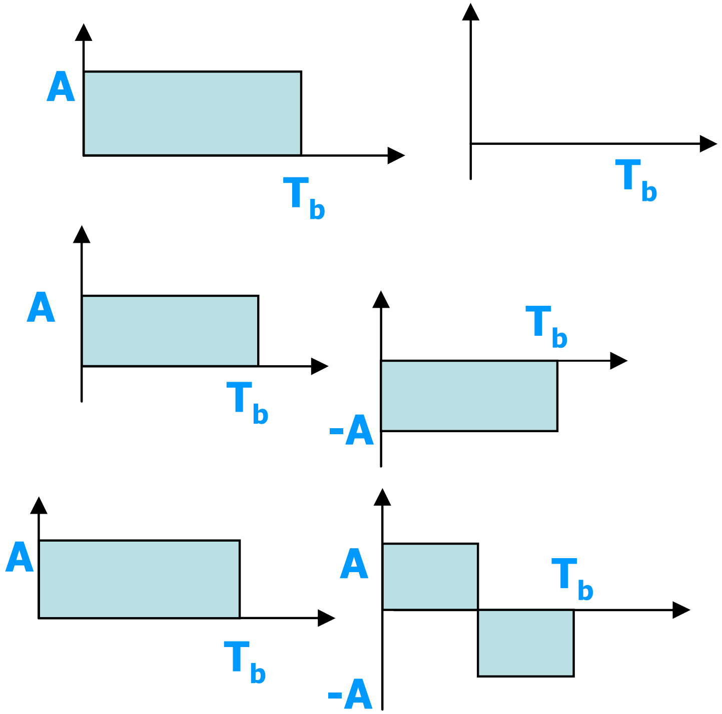
Welche BER kann man für ein gegebenes S/N bzw. E_b/N_0 bekommen, wenn man alles richtig macht ?

3 Fälle von Signalimpulsen sind zu unterscheiden:

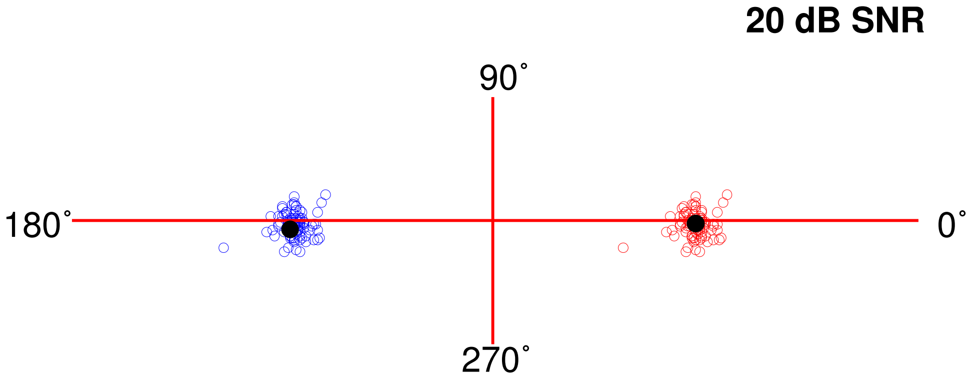
Unipolar (On-Off) — Nur ein Symbol

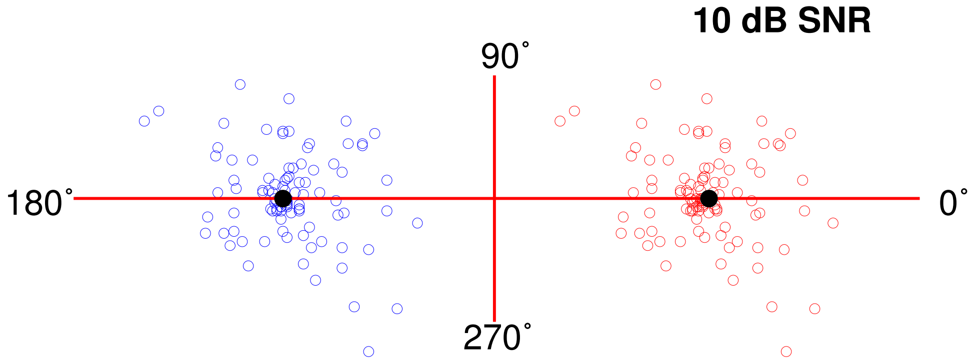
Polar (Antipodal) — Entgegengesetzte Symbole

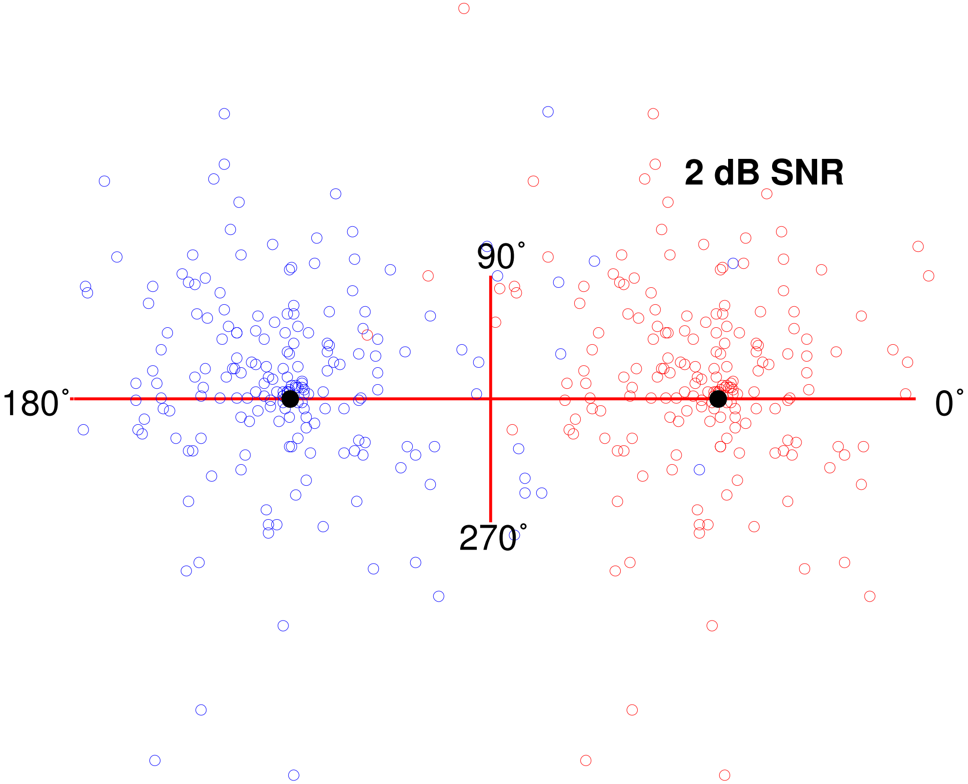
Orthogonal — $\int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t) \; dt = 0$



Noise effects – Beispiel Polar

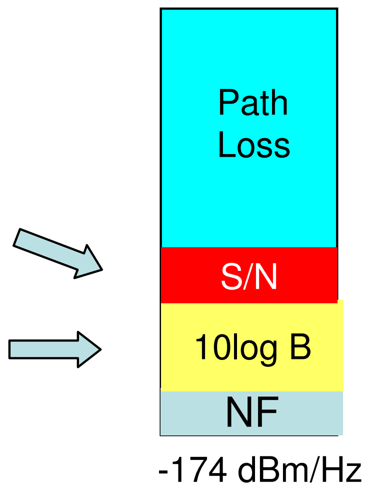






MF: $\left(\dfrac{S}{N}\right)_{out} = \dfrac{2E_s}{N_0}$

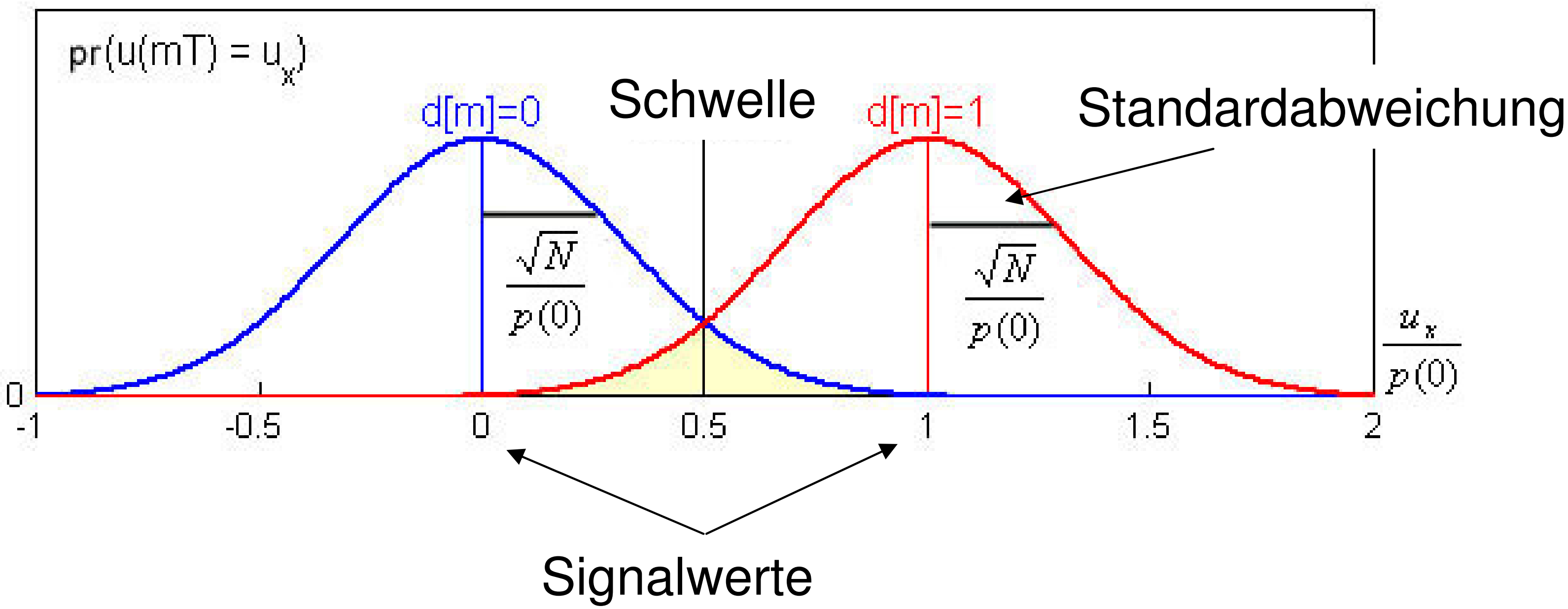
$B = \dfrac{1}{2T}$



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit dass der Effektivwert der Entscheider-Spannung den Wert u_x ist wie folgt verteilt für Data 0 und Data 1:

Unipolar

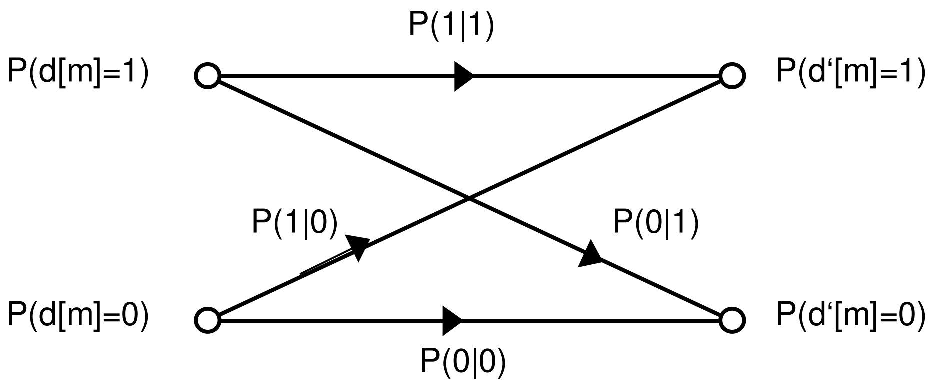


normiert auf rauschfreien Effektivwert des MF Ausgang zu t=nT: $p(0) = \sqrt{E_S}$

Schraffierte Fläche (Q-Funktion) führt zu Fehlentscheiden!

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

Für den binären Kanal folgt:
(Beweis im Skript)



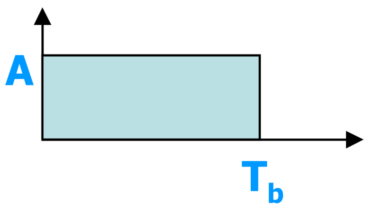
Unipolar (0/S)

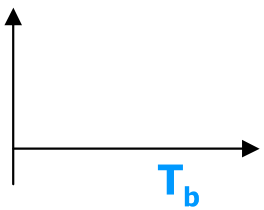
$$BER = P(d'[m] \neq d[m]) = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$E_b = E_s/2$
muss statistisch auf 2 Bit verteilt werden!

E_s = Symbolenergie
E_b = Bitenergie (Energie/Bit)
N_0 = Rauschleistungsdichte (spektral einseitig)

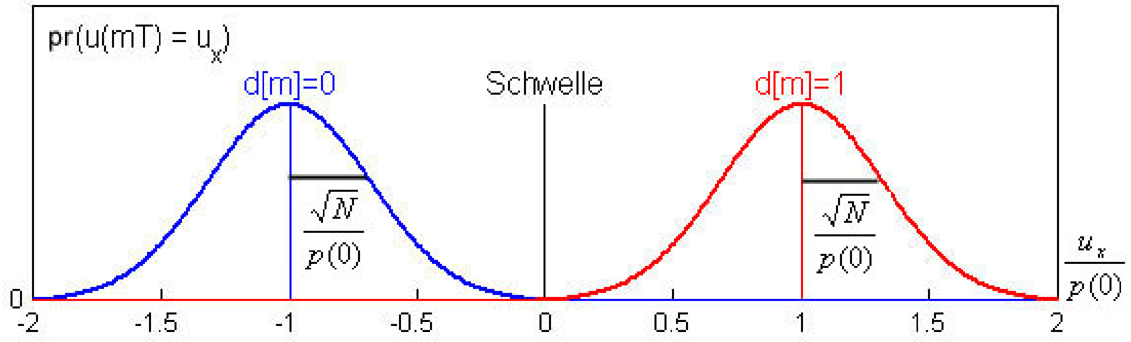
Bsp.
$S = A^2$
$E_s = A^2T_b$





MF: $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{2E_s}{N_0}$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit



p(0) = MF output
zur Zeit kT

Polar (+s/-s)

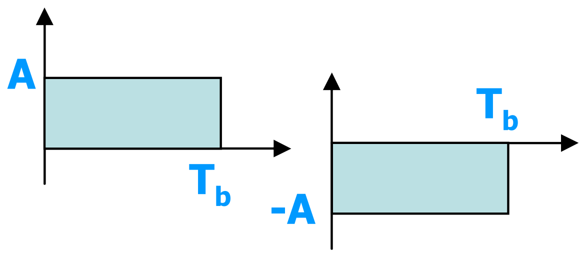
$$BER = P(d'[m] \neq d[m]) = Q\left(\sqrt{\frac{S}{N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N_0}}\right)$$

$E_b = E_s$

Bsp.

$S = A^2$

$E_s = A^2 T_b$



E_s = Symbolenergie

E_b = Bitenergie

N_0 = Rauschleistungsdichte (spektral einseitig)

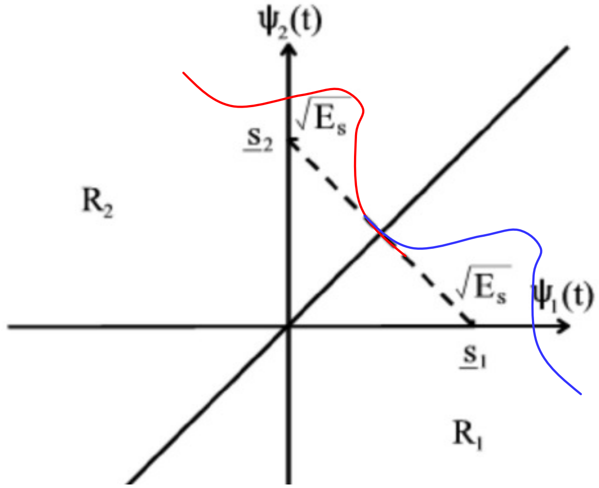
MF: $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{2E_s}{N_0}$

Vergleich mit unipolar:

Gleiche BER wie unipolar erreichbar für ¼ S/N, bzw. ½ E_b/N_0

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

Vergleich der beiden Ausgänge s_1,s_2
Schwelle: Diagonale



Orthogonal (s_1/s_2)

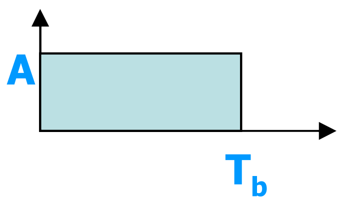
$$BER = P(d'[m] \neq d[m]) = Q\left(\sqrt{\frac{S}{2\cdot N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

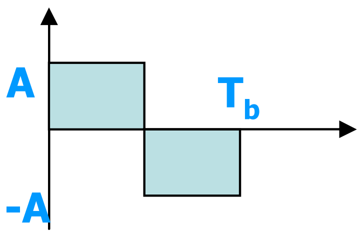
$E_b = E_s$

E_s = Symbolenergie
E_b = Bitenergie
N_0 = Rauschleistungsdichte (spektral einseitig)

MF: $\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{2E_s}{N_0}$

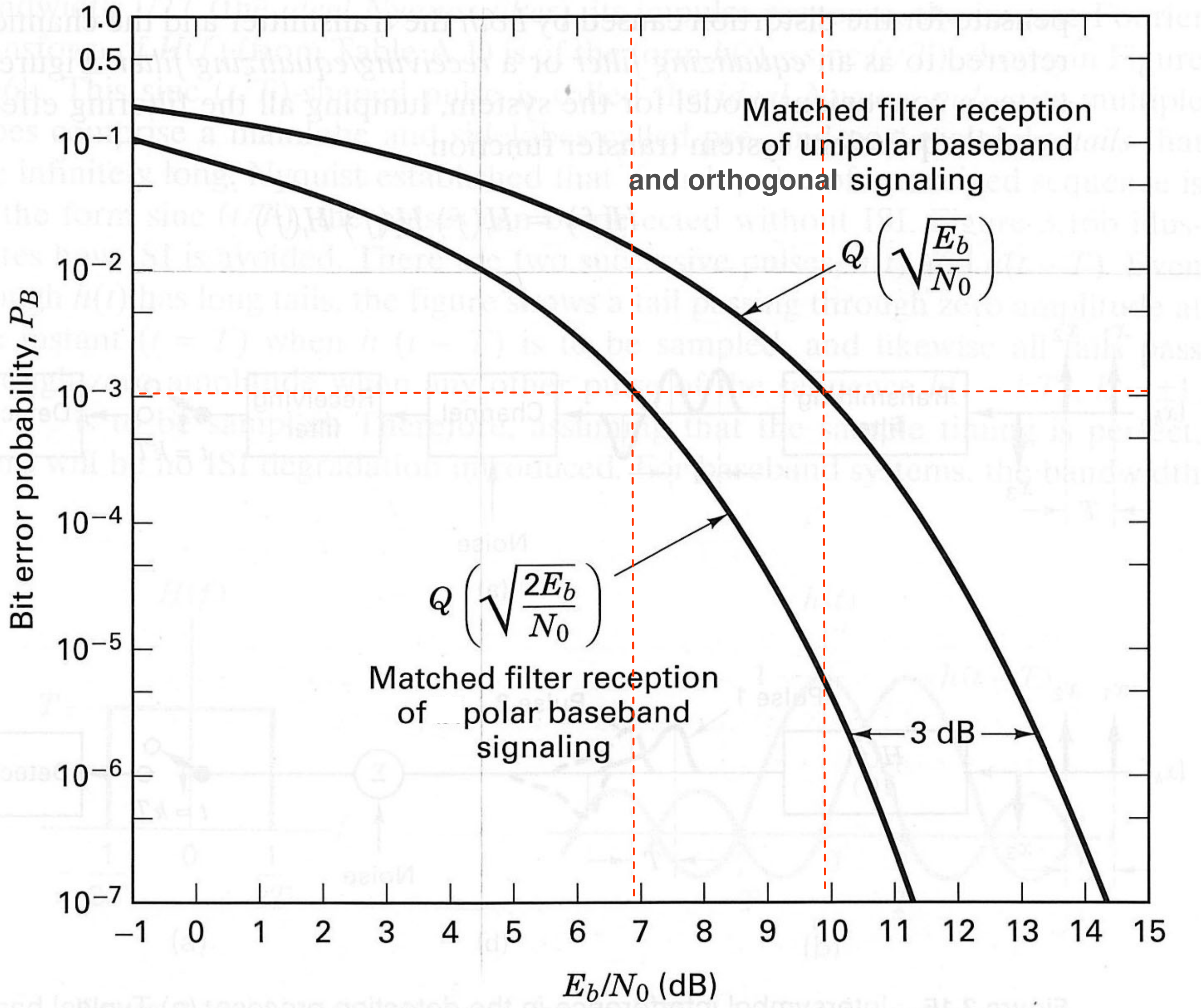
Bsp.
$S = A^2$
$E_s = A^2 T_b$





Vergleich mit unipolar:
Gleiche BER wie unipolar erreichbar für ½ S/N, bzw. gleiches E_b/N_0

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

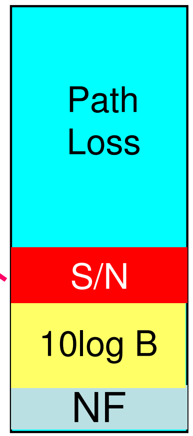


Note: In Lit. wird oft bipolar oder antipodal anstatt polar verwendet

Praxis: Best Case BER

MF:

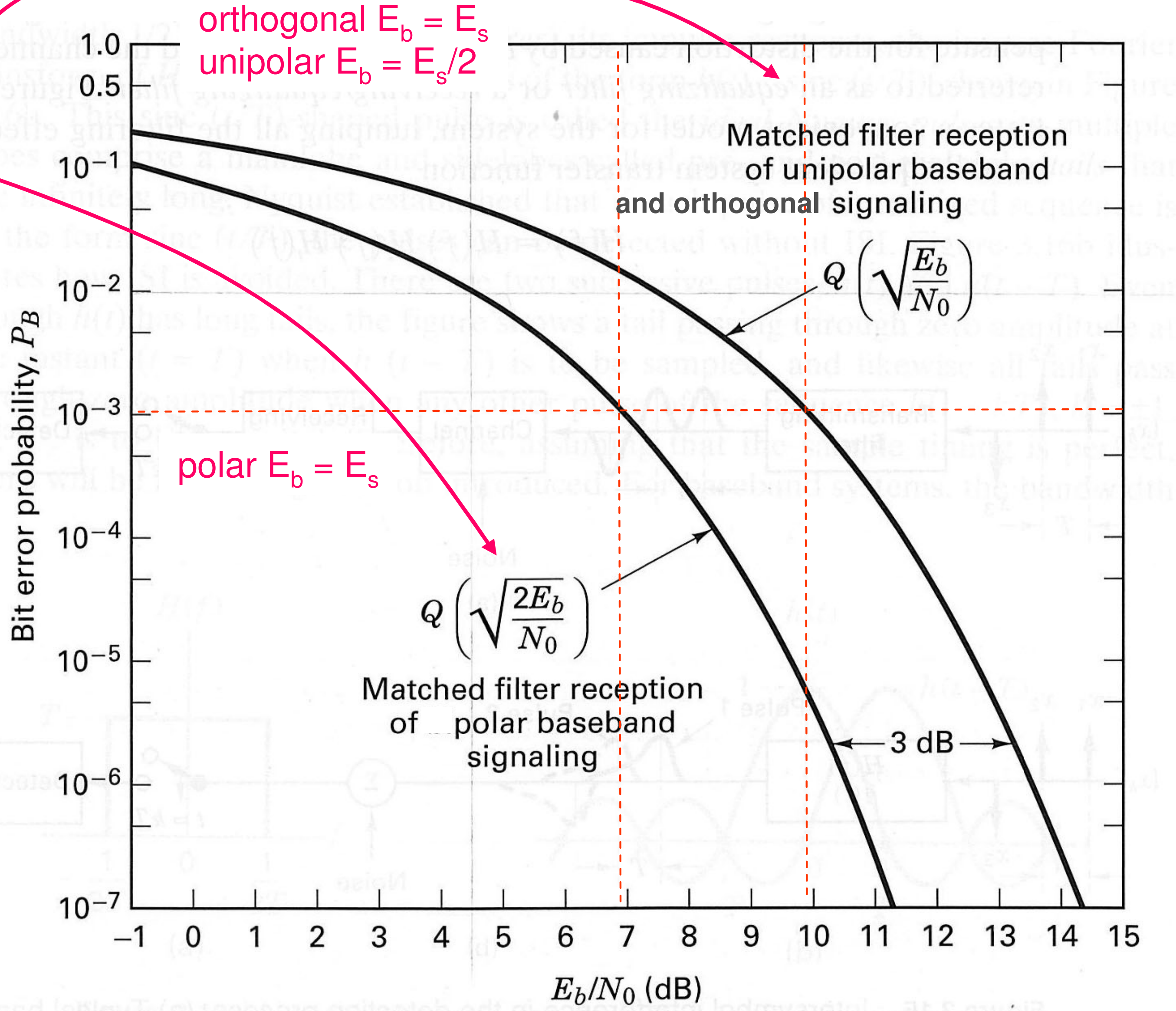
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{2E_s}{N_0}$$



-174 dBm/Hz

MF:

$B = B_{eq} = 1/2T$



Beispiel: Best Case BER

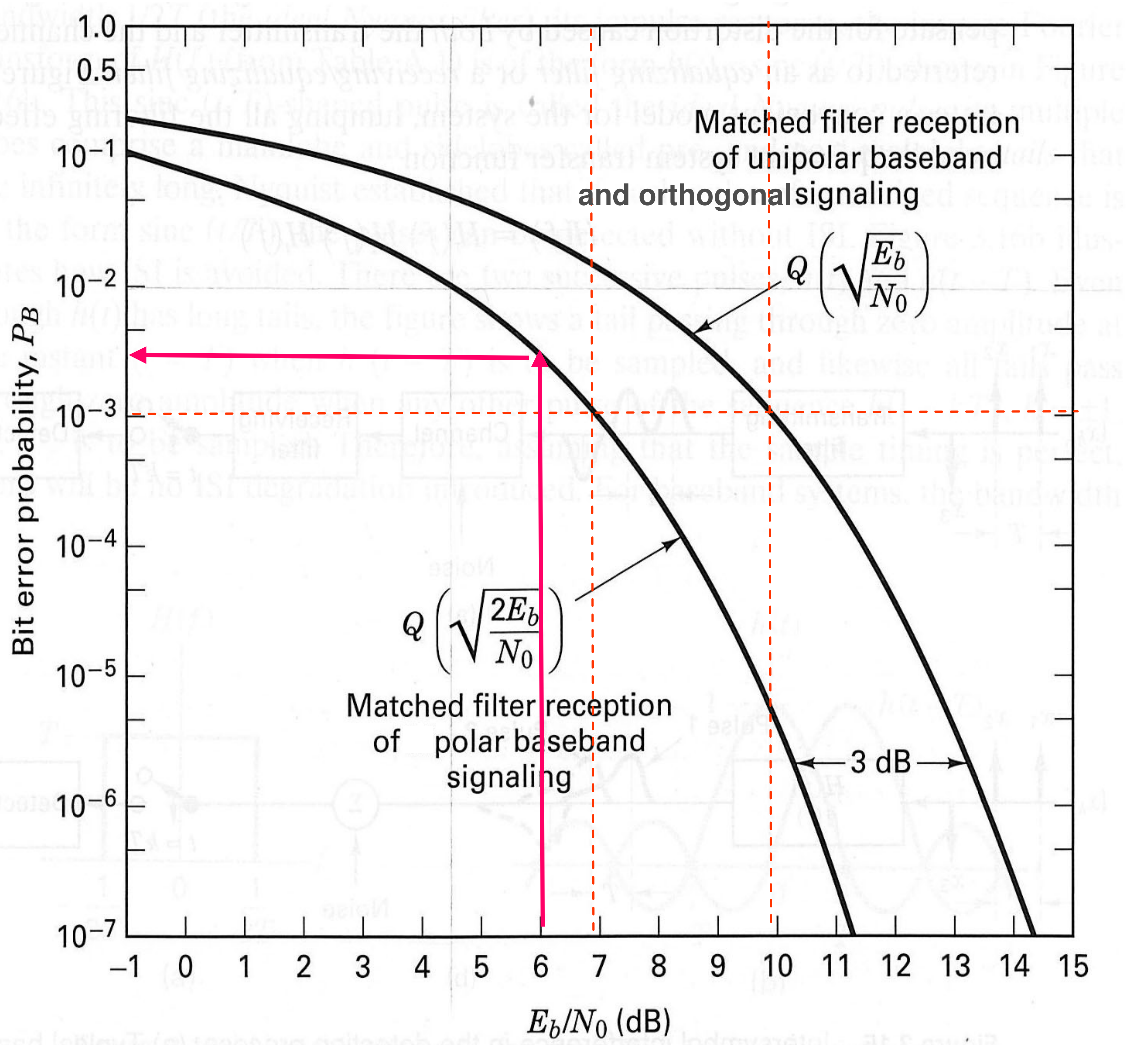
Linkbudget extended:

EIRP = 0 dBm, G_r = 3dB
Path Loss 110 dB
NF = 8 dB
N_0 = -174 dBm/Hz + NF
Bitrate R = 200 kBit/s
Polar Impuls

P_r = -107 dBm
B_{eq} = 100 kHz
N = -116 dBm
→ S/N = 9 dB

$2E_s/N_0$ = 9 dB,
$E_s/N_0 = E_b/N_0$ = 6 dB

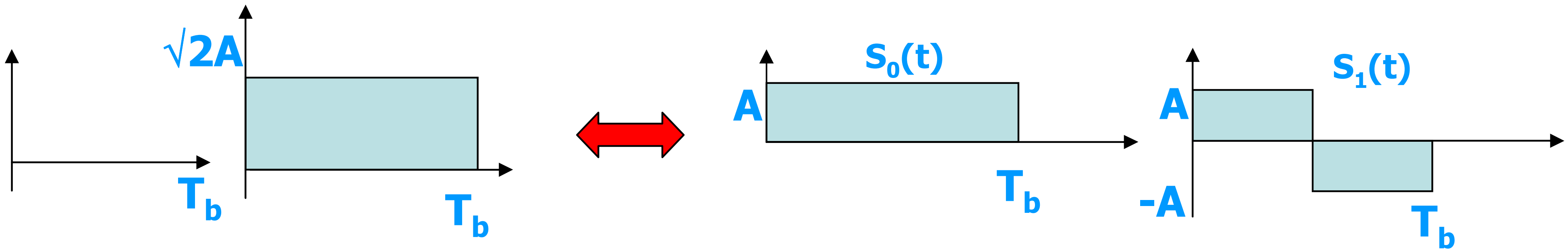
Curve Polar BER = $3 \cdot 10^{-3}$



Vergleich mit S/N oder Eb/N0

Ist unipolar in Praxis wirklich gleich gut wie orthogonal?

Bei gleichviel aufgewendeter Energie pro Bit: ja die beiden haben gleiche BER



Für Systeme die nur Energie limitiert sind ist Aussage also richtig
z.B. Batteriebetriebene Systeme die möglichst lange arbeiten sollen, Satellitensender, Wireless Sensor Netzwerke

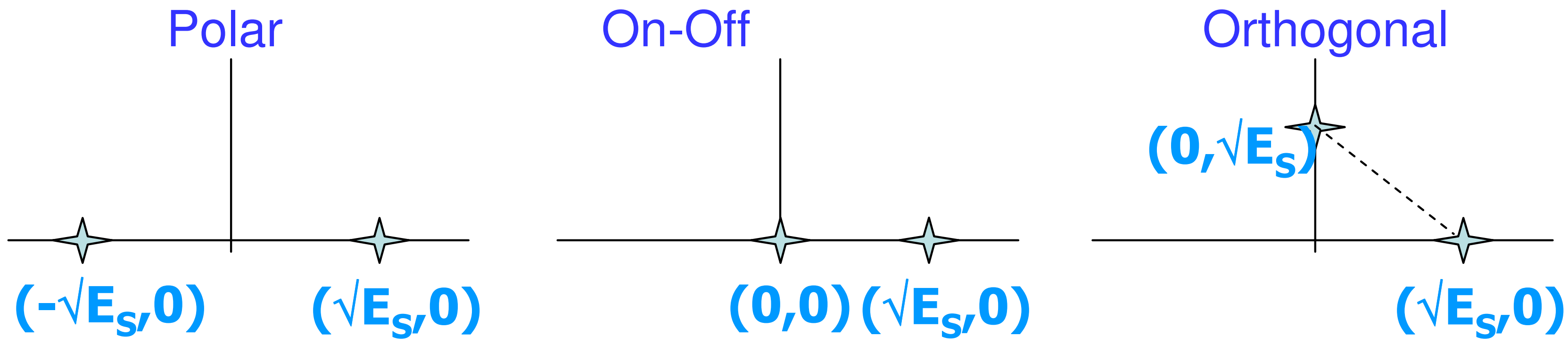
Für Systeme mit Sendern die in der Spitzenleistung limitiert sind ist die Aussage falsch
z.B. in EIRP regulierten Funksysteme ist unipolar 3 dB schlechter i.A. Short Range Devices

P.S.: Implementationsverluste nicht berücksichtigt

Alternative1: Signal Space Concept

E_s = Pulse Energy

- Noise Free case



Im Signalraum Darstellung E_s eintragen und Distanz D bestimmen und in BER Formel einsetzen:

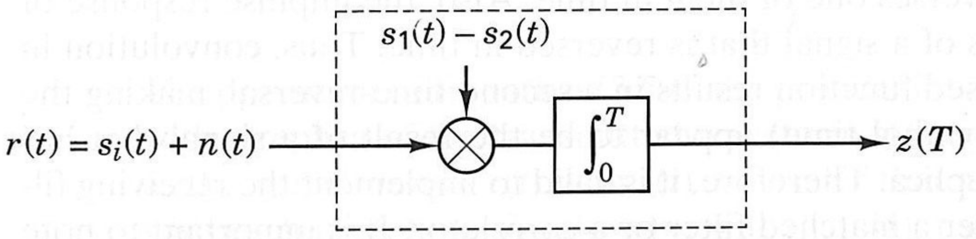
$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{D^2}{2 \cdot N_0}}\right)$$

For same E_s :

- Polar signal is 3dB more efficient than orthogonal signal
  - Polar signal gives better performance (3dB) with same signal Energy E_S
- On Off performance is 6 dB worse than Polar signal and 3 dB worse than Orthogonal signal
  - Average transmitted signal energy (E_b) is 3dB less than Polar and Orthogonal signal

Alternative 2: BER – Allg. Fall

s_1,s_2: verwendete Symbole



Mathematisch einfacher zu berechnen via Energie des Differenzsignals:
Virtueller äquivalenter Detektor:
Betrachtet man als Eingangssignal das Differenzsignal $s_i(t) = \pm(s_1(t) - s_2(t))$,
so benutzt man ein MF oder Korrelator auf das Differenzsignal $s_1(t) - s_2(t)$
und eine Entscheiderschwelle γ_0 bei 0.

Bestimme Energie des Differenzsignals

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$

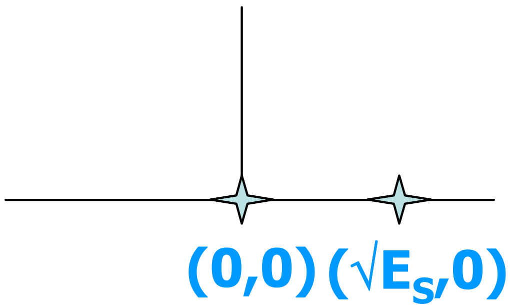
Setze E_d ein in der allg. BER Beziehung

$$BER = P(d'[m] \neq d[m]) = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

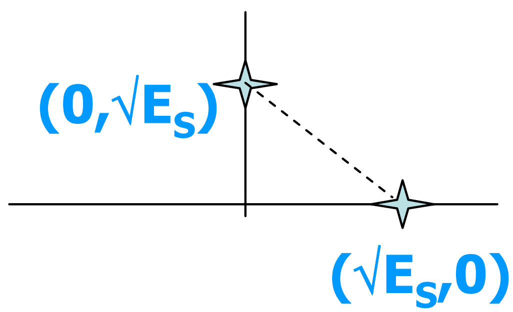
P.S. Methode gibt immer das richtige Resultat für alle Signaltypen

Erkenntnisse BER

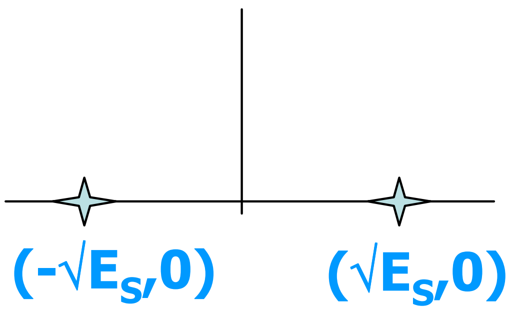
On-Off



Orthogonal



Polar



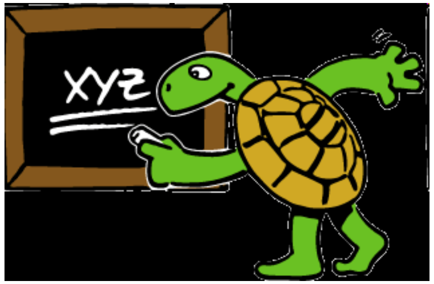
$$BER = Q(\sqrt{\frac{E_S}{2 \cdot N_0}}) > BER = Q(\sqrt{\frac{E_S}{N_0}}) > BER = Q(\sqrt{\frac{2 \cdot E_S}{N_0}})$$

$$BER = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}) = BER = Q(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}) > BER = Q(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N_0}})$$

Praxis Case1: Sendeleistung ist reguliert: S konstant, $S = E_S/T \rightarrow E_S$
Praxis Case2: Batterie Kapazität begrenzt: E_b konstant

Note: $E_S = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)^2 dt$

Summary

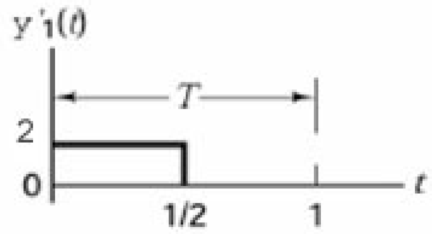


- Ein Optimalfilter (Matched Filter) ist eine Art Mittelungsfilter
- Es maximiert das Signal zu Geräuschverhältnis des Empfangsignals
- Sein Amplitudengang ist identisch mit Betrag des Spektrum des Signalpulses
- Seine Stossantwort ist die zeitlich gespiegelte Form des gesendeten Signals. Ist die Stossantwort symmetrisch, so kann das gleiche Filter für Empfänger und Sender benutzt werden
- Das Root raised cosine Filter ist ein solches Matched Filter, welches auch noch die Intersymbol Interferenz reduziert
- Integrate & Dump Filter sind nur für Rechtecksignale Matched Filter
- Weitere systembedingte Filter (Kanal) machen das Optimalfilter nicht ideal aber sind meist immer noch der beste Praxis Ansatz
- Das Matched Filter minimiert die BER des Empfangsignals. Die BER Gleichungen gehen immer von der Annahme aus, dass ein Matched Filter verwendet wurde
- Bei fixer Sendeleistung gilt für BER unipolar > orthogonal > polar
- Allg. berechnet man die BER mit der Q-Funktion und der Energie des Differenzsignals der für die Bitwerte 0 und 1 benutzten Pulse

The 10 $ Question

Das Differenz Matched Filter liefert $S/N = E_d/2N_0$ mit $E_d \sim \text{Amplitude}^2$

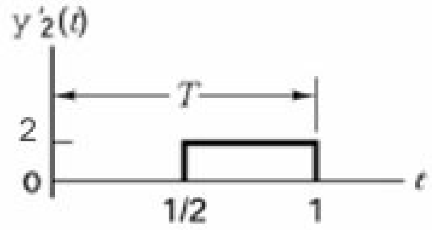
Welche Signalform ist besser: ±1 Polar
oder das abgebildete $y_1(t)$, $y_2(t)$ - Signal



Check:

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \int_0^{T/2} (2-0)^2 dt + \int_{T/2}^{T} (0-2)^2 dt = 4T$$

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2 \cdot N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right)$$



Vgl. Polar $$BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2 \cdot N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2T}{N_0}}\right)$$

→ Beide haben die gleiche BER.

No free lunch !

Vorteil von y(t): RZ Format → Takt
Nachteil von y(t): Doppelter Leistungsverbrauch (4-fach Peak Power)