

Frieder Strauß

Grundkurs Hochfrequenztechnik

Eine Einführung

2. Auflage



Springer Vieweg

Grundkurs Hochfrequenztechnik

Frieder Strauß

Grundkurs Hochfrequenztechnik

Eine Einführung

2., überarbeitete und verbesserte Auflage



Springer Vieweg

Frieder Strauß
Fachhochschule Bingen
Bingen, Deutschland

ISBN 978-3-658-11899-0
DOI 10.1007/978-3-658-11900-3

ISBN 978-3-658-11900-3 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2012, 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Vorwort zur 2. Auflage

„Diese Vorlesung hat irgendwie etwas Mystisches“ meinte kürzlich einer meiner Studenten. Ich konnte den jungen Mann gut verstehen, denn ich erinnerte mich zurück an meine eigene Studienzeit und die ersten Berührungspunkte mit der Hochfrequenztechnik. Strom und Spannung waren auf einmal abgeschafft. Stattdessen gab es *Wellengrößen* mit der seltsamen Dimension Wurzel aus Watt, die wenig phantasievoll mit \underline{a} und \underline{b} bezeichnet wurden, und unter denen man sich nichts vorstellen konnte. Aus einem Leerlauf wurde ein Kurzschluss, nur weil ein Stückchen Leitung im Spiel war. Dann wurde unter dem Namen *Rechteck-Hohlleiter* ein neuer Leitungstyp vorgestellt, den man eher in der Materialsammlung eines Gas-Wasser-Installateurs als bei einem Elektriker gesucht hätte. Elektrische Signale würden durch dieses blanke Rohr ungehindert hindurchgehen, hieß es und noch dazu fast verlustlos. Vier Semester Grundstudium in Elektrotechnik erschienen glatt für die Katz¹. Später kam noch ein Diagramm mit eigentümlich ineinander greifenden Kreisen hinzu, mit dem man die tollsten Dinge berechnen konnte. Ein stets präsenter hoher Anteil an Feldtheorie machte die Mystik komplett.

Ziel des vorliegenden Buches ist es, behutsam an diese Besonderheiten heranzuführen, dabei den Blick auf die Ursprünge nicht zu verlieren und sich auf das Wesentliche zu beschränken. Ich werde immer wieder deutlich machen, dass Strom und Spannung als unverzichtbare physikalische Größen weiterhin existieren, zugleich aber durch Einführung der Wellengrößen dem Leser eine völlig neue Perspektive auf elektrische Schaltungen eröffnen.

Das Buch wendet sich an Studierende in Bachelor-Studiengängen der Elektrotechnik, Informationstechnik oder Mechatronik sowie an Autodidakten und Wiedereinsteiger. Dementsprechend wird der mathematische Anspruch vergleichsweise niedrig gehalten. Die Feldtheorie nimmt keinen allzu großen Raum ein, ganz ohne *MAXWELL*¹ geht es aber in der Hochfrequenztechnik nicht.

Auf Anregung des Lektorats wurde das Werk mit einem umfangreichen Grundlagenkapitel ausgestattet. Von der komplexen Wechselstromrechnung über die Dezibel-Maße bis zu Spezialbegriffen bei nichtlinearen Verzerrungen sind hier die Voraussetzungen für das Verständnis des eigentlichen Stoffs zusammengestellt. Dieses Kapitel ist auch zum Nachschlagen gedacht.

Dank gilt meinem Kollegen Prof. Dr.-Ing. Peter Leiß, der das Kapitel 2 einer kritischen Prüfung unterzogen hat, ferner meinem Kollegen Prof. Dr.-Ing. Falk Reisdorf, der mir ein perfekt ausgearbeitetes Skript seiner Vorlesung [7] zur Verfügung stellte. Ich danke meiner Frau (Dipl.-Ing. „Univ“ Jutta Strauß), die das komplette Manuskript akribisch nach Schreibfehlern durchforstet hat, sowie Herrn Dipl.-Ing. (FH) Jürgen Oldach, der es verstand, die babylonische Zeichensatzverwirrung aufzulösen.

Die 2. Auflage enthält eine Vielzahl an Verbesserungen und Korrekturen inhaltlicher wie kosmetischer Art sowie einige Erweiterungen.

Bingen am Rhein, im Oktober 2015

Frieder Strauß

¹ Um 1860 stellte der britische Physiker JAMES CLERK MAXWELL ein kompliziertes System partieller Differentialgleichungen vor [6]. Sie bilden die Grundlage der Elektrodynamik, also der elektromagnetischen Feldtheorie.

Inhalt

Vorwort	V
Inhalt	VII
1 Einführung.....	1
1.1 Begriffsklärung.....	1
1.2 Historisches	4
1.3 Anwendungen	5
2 Handwerkszeug	7
2.1 Differentialgleichungen.....	7
2.1.1 Grundsätzliches	7
2.1.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	8
2.1.3 Beispiele	10
2.2 Die komplexe Wechselstromrechnung.....	17
2.3 Logarithmische Übertragungs- und Pegelmaße	23
2.3.1 Das Übertragungsmaß dB	23
2.3.2 Dämpfungsmaße.....	27
2.3.3 Die wichtigsten Pegelmaße	30
2.3.4 Beispiele	33
2.4 Zweitortheorie	34
2.4.1 Einführung.....	34
2.4.2 Die Impedanzmatrix	35
2.4.3 Die Admittanzmatrix	38
2.4.4 Die Kettenmatrix	40
2.4.4 Weitere Darstellungen.....	43
2.4.5 Umrechnungsformeln.....	44
2.5 Unerwünschte Effekte der Kommunikationstechnik.....	45
2.5.1 Rauschen in elektronischen Schaltungen	45
2.5.2 Lineare Verzerrungen.....	51
2.5.3 Nichtlineare Verzerrungen	52
3 Leitungstheorie.....	57
3.1 Die homogene Doppelleitung.....	57
3.2 Berechnungen.....	58
3.2.1 Die Leitungsgleichungen.....	58
3.2.2 Stationäre Lösung.....	61

3.2.3 Die Wellenimpedanz	63
3.2.4 Übergang in den Zeitbereich	65
3.2.5 Die Wellenlänge	65
3.2.6 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit.....	66
3.3 Die beschaltete Leitung	66
3.3.1 Der Reflexionsfaktor	66
3.3.2 Transformationseigenschaften.....	69
3.4 Die verlustlose Leitung.....	71
3.4.1 Definition und Konsequenzen	71
3.4.2 Der Verkürzungsfaktor.....	72
3.4.3 Transformationseigenschaften.....	72
3.4.4 Stehwellenverhältnis und Anpassfaktor	73
3.4.5 Spezialfall verlustlose $\lambda/4$ -Leitung	75
3.5 Das SMITH-Diagramm	75
3.5.1 Einführung.....	75
3.5.2 Linien konstanten Realteils der Impedanz.....	76
3.5.3 Linien konstanten Imaginärteils der Impedanz.....	79
3.5.4 Herleitung durch konforme Abbildung	81
3.5.5 Das komplette Diagramm	82
3.5.6 Leitungstransformationen.....	85
3.5.7 Darstellung der Admittanz.....	88
3.5.8 Stehwellenverhältnis und Anpassfaktor	89
3.5.9 Kombinierte Transformations- und Netzwerkoperationen.....	91
3.5.10 Anpassung mit Hilfe des SMITH-Diagramms	94
3.5.11 Darstellung von Ortskurven	100
3.5.12 Zusammenfassung	100
3.6 Realisierungen	101
3.6.1 Die Koaxialleitung.....	101
3.6.2 Die symmetrische Leitung.....	112
3.6.3 Die Mikro-Streifenleitung	114
3.6.3 Der Rechteck-Hohlleiter.....	115
4 n-Tore	117
4.1 Einführung.....	117
4.1.1 Die Wellengrößen.....	117
4.1.2 Die reale Wellenquelle	119
4.1.3 Gegenüberstellung der realen Quellen	121

4.1.4 Die Impedanz in der Wellendarstellung	124
4.1.5 Das System Quelle-Leitung-Last.....	125
4.2 s-Parameter und Streumatrizen.....	126
4.2.1 Ausgangspunkt.....	126
4.2.2 Beispiele	128
4.2.3 Die Kettenschaltung	132
4.2.4 Zusammenhang zwischen Streumatrix und Kettenmatrix	133
4.2.5 Dreitore.....	136
4.2.6 Aktive, passive und verlustlose n-Tore	137
4.2.7 Beispiele	139
4.2.8 Symmetrieeigenschaften.....	141
4.3 Realisierungen	141
4.3.1 Passive Eintore	141
4.3.2 Aktive Eintore	142
4.3.3 Die Leitung.....	143
4.3.4 Der Phasenschieber	143
4.3.5 Das Dämpfungsglied	143
4.3.6 Das Anpassglied	146
4.3.7 Die Richtungsleitung.....	149
4.3.8 Der Zirkulator.....	149
4.3.9 Die Reflexionsfaktor-Messbrücke.....	152
4.3.10 Der Duplexer	156
4.3.10 Die Leitungsverzweigung.....	158
4.3.11 Der Power-Splitter.....	160
4.3.12 Der Richtkoppler	162
4.3.13 Die Doppel-T-Verzweigung.....	164
5 Mikrowellennetze.....	167
5.1 Definition	167
5.2 Analyse durch lineare Gleichungssysteme	168
5.3 Graphentheoretische Methoden.....	169
5.3.1 Ausgangspunkt.....	169
5.3.2 Darstellung von Zweitor, Quelle und Last	170
5.3.3 Modifikationen von Signalflussgraphen.....	172
5.3.4 Graphentransmissionsfaktor und MASON-Regel	175
6 Signalausbreitung im freien Raum	181
6.1 Elektromagnetische Wellen.....	181

6.2 Antennen	183
Symbole.....	187
Literaturverzeichnis	191
Stichwortverzeichnis	193

1 Einführung

1.1 Begriffsklärung

Was sind eigentlich hohe Frequenzen? Und was ist anders als bei niedrigen? Zur Beantwortung dieser kardinalen Frage betrachten wir das in Bild 1-1 dargestellte einfache elektrische Netzwerk aus einer Spannungsquelle und einem RC-Glied. Man kann zwei Strom-Spannungs-Beziehungen und eine Maschengleichung formulieren²

$$\begin{aligned}u_R &= i \cdot R \\ i &= C \cdot \frac{du_C}{dt} \\ u &= u_R + u_C\end{aligned}\tag{1.1}$$

und diese durch Elimination von u_R und i zu einer Differentialgleichung für u_C zusammenfassen:

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = u\tag{1.2}$$

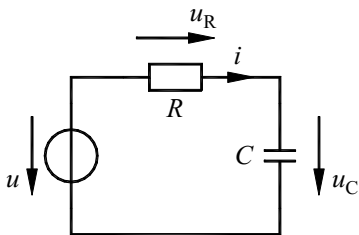


Bild 1-1 Einfaches elektrisches Netzwerk

Diese Darstellung bringt zum Ausdruck, dass eine Änderung von u augenblicklich - also ohne die geringste Verzögerung - eine Änderung von u_C zur Folge haben müsste. Das widerspricht dem Grundsatz, dass sich sowohl Energie als auch Information nicht beliebig schnell, sondern bestenfalls mit Lichtgeschwindigkeit c_0 ausbreiten können. (1.2) beschreibt demnach eine Näherung, die umso besser zutrifft, je kleiner die Abmessungen des Netzwerks sind. Dann spricht man von Netzwerken aus *konzentrierten Elementen*. Die gewöhnliche elektrische Schaltungslehre befasst sich mit solchen Systemen.

Tatsächlich besitzt die Ausbreitung elektrischer Signale Wellencharakter. Dies kann man rechnerisch zeigen, was in Kapitel 3 sehr ausführlich geschehen wird. Es lässt sich auch experimentell nachweisen, indem man auf typische Wellenphänomene wie Reflexion und Interferenz achtet. Auf Leitungen existiert eine Spannungs- und eine Stromwelle. Beide sind miteinander verknüpft und breiten sich gemeinsam aus, indem sie die transportierte Energie untereinander austauschen. Im freien Raum wird die Welle durch elektrische und magnetische Feldstärkevektoren

² mit Kleinbuchstaben werden Zeitfunktionen bezeichnet

toren gebildet. Da die Feldstärke nicht an Materie gebunden ist, sind elektromagnetische Wellen im Gegensatz zu Schallwellen auch im leeren Raum ausbreitungsfähig. Der Wellencharakter hat eine Reihe von Konsequenzen:

- (i) Dämpfung: Ein Signal wird bei seiner Ausbreitung geschwächt.
- (ii) Verzögerung, Laufzeit: Da die Ausbreitung mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt, erreicht ein Signal das Leitungsende oder sonst einen entfernten Ort verzögert.
- (iii) Signalverformung: Die Signaldämpfung ist meist frequenzabhängig, eventuell auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Deshalb lässt sich im Oszillogramm eine Verformung des Signals beobachten.
- (iv) Reflexion: Ein auf das Leitungsende zulaufendes Signal wird dort in charakteristischer Weise reflektiert, was eine Welle in Gegenrichtung zur Folge hat. Die Art der Reflexion ist durch die am Leitungsende angebrachte Impedanz in Verbindung mit Eigenschaften der Leitung bestimmt. Unter speziellen Umständen erfolgt keine Reflexion.
- (v) Interferenzen: Existieren in einem Ausbreitungsmedium mehrere Wellen, so tritt eine Überlagerung ein. Sie kann eine Signalerhöhung, aber auch eine Abschwächung bis hin zur totalen Auslöschung zur Folge haben.

Bild 1-2 zeigt ein gemessenes Oszillogramm. In der oberen Spur sieht man einen Rechteckimpuls, er wird am Anfang einer 180m langen Koaxialleitung eingespeist. In der unteren Spur ist das Signal am Leitungsende zu erkennen. Man sieht sehr schön wie der Impuls verzögert, geschwächt und verformt wurde.

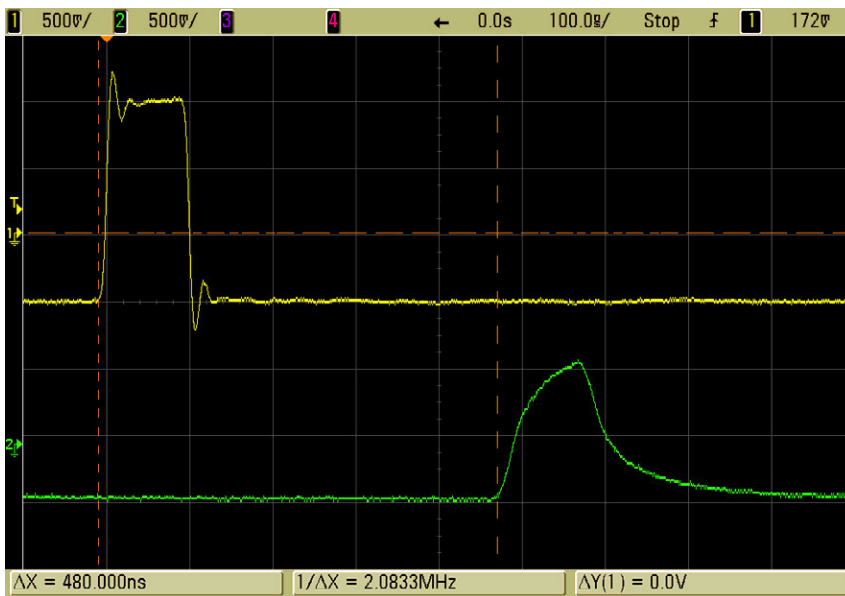


Bild 1-2 Gemessenes Oszillogramm

Wohl das wichtigste Charakteristikum einer Welle ist die *Wellenlänge*. Bei monofrequenterem Signal ergibt sie sich gemäß

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (1.3)$$

aus Ausbreitungsgeschwindigkeit c und Signalfrequenz f . Im freien Raum breiten sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit

$$c = c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.4)$$

aus. Auf Leitungen geht es etwas langsamer, was durch den sogenannten *Verkürzungsfaktor* VK zum Ausdruck kommt. Der Name rührt daher, dass die Wellenlänge auf Grund reduzierter Geschwindigkeit verkürzt erscheint.

$$c = VK \cdot c_0 \quad 0 < VK \leq 1 \quad (1.5)$$

Machen wir Beispiele:

- (i) UKW-Rundfunk: Die Frequenz liegt in der Gegend von 100MHz, die Ausbreitung durch die Luft erfolgt annähernd mit Lichtgeschwindigkeit. Daraus resultiert eine Wellenlänge

$$\lambda \approx 3 \text{ m} .$$

- (ii) Energieversorgung über 380kV-Freileitung: Die Netzfrequenz beträgt 50Hz, wir wollen einen Verkürzungsfaktor von etwa 0,8 annehmen, das führt auf eine Wellenlänge

$$\lambda \approx 4800 \text{ km} .$$

- (iii) Radarsignal auf GaAs-Chip³: Bei einer Frequenz 10GHz und einem Verkürzungsfaktor 0,3 wäre

$$\lambda = 9 \text{ mm} .$$

An Hand der Wellenlänge lässt sich beurteilen, ob eine gegebene Anordnung als Netzwerk aus konzentrierten Elementen betrachtet werden darf, oder ob der Wellencharakter zu berücksichtigen ist. Man spricht dann von *verteilten Parametern*, da sowohl Abhängigkeiten von der Zeit als auch von den Raumkoordinaten ins Kalkül zu ziehen sind. Es ist üblich, die Grenze etwa bei einem Zehntel der Wellenlänge zu legen. Das heißt, Anordnungen mit Abmessungen

$$l > \frac{\lambda}{10} \quad (1.6)$$

müssen mit Methoden der *Hochfrequenztechnik* untersucht werden. Diese stellt Berechnungswege zur Verfügung, die es erlauben, Systeme unter Berücksichtigung der Wellenausbreitung zu beschreiben, zu analysieren und zu entwerfen. Der Name rührt letztendlich daher, dass Gleichung (1.6) eher bei hohen Frequenzen erfüllt ist. Es darf aber nicht übersehen werden, dass diese Methoden auch dann erforderlich sind, wenn niedrigen Frequenzen entsprechend große Abmessungen gegenüberstehen.

Es gibt noch einen weiteren Aspekt: Hochfrequente Signale werden gerne zur Übermittlung von Information benutzt. Maßgeblich für den übertragbaren Informationsgehalt ist hierbei unter anderem die absolute Bandbreite - also der Frequenzumfang - . Es liegt auf der Hand, dass sich bei Verwendung hoher Frequenzen leicht große Bandbreiten realisieren lassen.

³ Gallium-Arsenid, bei HF-Komponenten häufig verwendetes Halbleitermaterial

1.2 Historisches

Dieser Abschnitt gibt einen knappen Überblick über die Entwicklung der Hochfrequenztechnik an Hand einiger markanter Eckdaten [3]. Diese kann in weiten Bereichen als Entwicklung der Nachrichten- und Kommunikationstechnik verstanden werden. Es wird keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhoben.

- | | |
|-------------------|---|
| SAMUEL MORSE | 1844: Erste Inbetriebnahme einer Telegrafenleitung. Von Washington nach Baltimore werden durch Rechteckimpulse verschlüsselte Morsezeichen übertragen. Das Experiment verläuft nur teilweise befriedigend, da Signalverformungen und Reflexionen unklarer Ursache zu beobachten sind. |
| ALEXANDER BELL | 1876: Vorstellung des ersten alltagstauglichen Telefons. BELL war von Haus aus kein Ingenieur, sondern Physiologe. Er hatte die Idee, Gehörlosen zu helfen, indem ihnen Schall über elektrische Schwingungen zugeführt wurde. Damit war er seiner Zeit weit voraus und zugleich erfolglos; es war aber sein Einstieg in die Elektrotechnik. Seine wesentliche Erfindung bestand wahrscheinlich in der Anwendung einer symmetrischen Leitung. Damit bekam er die EMV-Probleme in Griff, an der seine Mitbewerber scheitern mussten. Er war Begründer des bis heute erfolgreichen Telefonunternehmens <i>Bell Laboratories USA</i> . Das <i>Dezibel</i> geht auf seinen Namen zurück. |
| HEINRICH HERTZ | 1887: Erzeugung und Nachweis elektromagnetischer Funkwellen. Gezielt mit einem Hochspannungsgenerator herbeigeführte Funkenüberschläge konnten an einem entfernten Ort detektiert werden. Das deutsche Wort <i>Funk</i> (Rundfunk, Mobilfunk, Amateurfunk) hat darin seine Ursache. |
| GUGLIELMO MARCONI | 1896: Erste drahtlose Nachrichtenübertragung. Über eine Entfernung von 3km werden Morsezeichen übertragen. MARCONI war ein begnadeter Naturwissenschaftler und Ingenieur, der es zugleich verstand, seine Entwicklungen sofort gewinnbringend zu vermarkten. Diese seltene Kombination verschaffte ihm Erfolg, Ansehen und Reichtum. Der Italiener war deshalb vorwiegend im damals wirtschaftlich blühenden England aktiv, wo er eine nach ihm benannte Firma betrieb. |
| GUGLIELMO MARCONI | 1901: Erste Funkübertragung über den Atlantik. Dies ist wohl mehr als logistische Leistung gemessen an den Mitteln der damaligen Zeit zu verstehen. Eine Hilfsperson musste in wochenlanger Reise über das Meer geschickt werden, um sich zu einem vereinbarten Zeitpunkt auf die Lauer zu legen und ein Signal zu empfangen. |
| | 1923: Einführung des öffentlichen Rundfunks in Deutschland, zunächst beschränkt auf das Stadtgebiet von Berlin. |
| | 1992: Einführung des digitalen Mobilfunks nach GSM in Deutschland. Ein neues Zeitalter der elektronischen Kommunikation bricht an. |

1.3 Anwendungen

Am Anfang der Auseinandersetzung mit einer komplizierten Materie sollte immer die Frage nach deren Zweck stehen. Ansonsten besteht die Gefahr nutzloser Schöngesteerei. Deshalb folgt ein Überblick über die wichtigsten Anwendungsgebiete hochfrequenter elektrischer Signale [3].

- * *Übertragung von Information* : Dies ist ohne jeden Zweifel die wichtigste Anwendung schlechthin. Sprache, Musik, Bilder oder Daten können drahtlos oder an eine Leitung gebunden übermittelt werden. Die Übertragung kann analog oder digital erfolgen. Es gibt den Simplex-Betrieb, bei dem nur eine Richtung genutzt wird (gewöhnlicher Rundfunk) oder den Duplex-Betrieb mit gleichzeitigem Informationsfluss in beide Richtungen (Telefon). Es wird meist ein Modulationsverfahren genutzt, das sich auf eine Trägerfrequenz stützt, die deutlich höher liegt als die Frequenz der zu übertragenden Signale. Dadurch kommen zwangsläufig hohe Frequenzen ins Spiel.
- * *Ortung* : Hier kommt die Radartechnik zum Einsatz. Es werden sehr kurze und energiereiche Schwingungszüge (sogenannte *bursts*) in bestimmte Raumrichtungen ausgesandt. Ein Echo wird als reflektierendes Objekt in der gewählten Richtung interpretiert, die Laufzeit lässt Schlüsse auf die Entfernung des Objekts zu. Viele derartige Informationen erlauben die Synthese eines kompletten Bilds.
- * *Navigation* : Das Navigationssystem *GPS* ⁴ arbeitet mit einer Vielzahl von Satelliten, welche die Erde auf definierten, vergleichsweise erdnahen Bahnen umrunden. Jeder bewegt sich nach einem definierten Fahrplan und verfügt über eine hochpräzise Uhr. Er sendet ständig die aktuelle Uhrzeit und Informationen über seinen gegenwärtigen Standpunkt. Am Empfangsort kommt es beim Empfang mehrerer Satelliten scheinbar zu einem Widerspruch, indem auf Grund unterschiedlicher Laufzeiten differierende Zeiten empfangen werden. Der Empfänger erkennt damit einen Abstandsunterschied zu den übermittelten Fixpunkten und kann so auf seinen Standort schließen.
- * *Werkstoffprüfung* : Hochfrequente Signale werden an feinen Rissen in leitfähigen Materialien reflektiert. So lassen sich äußerlich nicht sichtbare Materialschäden aufspüren. Der große Vorteil besteht darin, dass die Prüfung zerstörungsfrei verläuft, und dass sie in hohem Maß automatisiert werden kann.
- * *Erwärmung* : Trifft eine hochfrequente elektromagnetische Welle auf Materie, so kann es zur Absorption der von der Welle transportierten Energie und somit zu Erwärmung kommen. Vorteilhaft ist hierbei, dass die Erwärmung berührungslos und gleichmäßig, sozusagen von innen heraus erfolgt. Wichtige Vertreter dieser Technik sind der in Haushalt und Gastronomie etablierte Mikrowellenherd, industriell genutzte Verfahren zum induktiven Löten, Härten oder Schmelzen sowie medizinische Therapien mit Mikrowellenbestrahlung. Starke Mikrowellenstrahlung wird auch zur Bekämpfung von Holzwurmbefall eingesetzt. Derzeit laufen Experimente in Zusammenhang mit der Entsorgung von Atomkraftwerken. Hierbei versucht man die Betonhülle im Inneren der Reaktorkuppel auf eine Tiefe von einigen Zentimetern durch Mikrowellenbestrahlung zu zermürben, um so das radioaktiv kontaminierte Material vom Rest zu trennen [11].

⁴ Global Positioning System

- * *Identifikation* : Solche unter dem Stichwort *RF-ID* bekannte Verfahren werden für Schließsysteme, zur Autorisierung und zunehmend auch zur Kennzeichnung von Waren verwendet. Hierbei wird ein zunächst passiver elektronischer Schaltkreis einem magnetischen Wechselfeld ausgesetzt, wodurch es zur Induktion einer Spannung kommt. Diese wird als Versorgungsspannung verwendet, sie ersetzt quasi eine Batterie. Fortan sendet der Schaltkreis einen digitalen Datenstrom aus, der das Identifikationsmuster beinhaltet. Schließsysteme nach diesem Muster bieten gegenüber herkömmlichen mechanischen entscheidende Vorteile. Eine Zugangsberechtigung kann vollkommen individuell gestaltet werden. So kann man beispielsweise einem Reinigungspersonal den Zugang nur für bestimmte Zeiten gestatten. Außerdem lassen sich die Schließvorgänge nachvollziehen, was für die Aufklärung von Straftaten von Vorteil ist. Der Verlust eines Schlüssels dieser Art schafft keine Probleme. Der betreffende Code wird aus der Liste der Zugangsberechtigten gestrichen, ein Austausch von Schlössern ist nicht erforderlich.
- * *Diagnostik* : Das Verfahren der Kernspinresonanz wird zur Materialprüfung und für medizinische Diagnose eingesetzt. Das zu untersuchende Objekt wird einem starken statischen Magnetfeld ausgesetzt (Flussdichte in der Größenordnung von 1 Tesla), dann können mit Hilfe hochfrequenter Signale Schnittbilder gewonnen werden. Aus diesen lassen sich dreidimensionale Ansichten generieren. Im medizinischen Bereich gebraucht man derzeit vorwiegend den Begriff MRT (Magnet-Resonanz-Tomografie).
- * *Ultraschall* : Dies stellt ein Grenzgebiet der Hochfrequenztechnik dar. Elektromagnetische Wellen werden in Wasser stark gedämpft, sodass eine Funkortung unter Wasser praktisch unmöglich ist. Schallwellen sind hingegen in Wasser gut ausbreitungsfähig. An die Stelle des Radars tritt hier das mit Ultraschall arbeitende *Sonar* oder das allseits bekannte Echolot. Wegen der vergleichsweise sehr niedrigen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen sind die Laufzeiten nicht zu kurz, was eine genaue Auswertung enorm erleichtert. Ultraschall wird sehr erfolgreich für Materialprüfungen und zur Diagnose in der Medizin eingesetzt, wobei in den letzten Jahren unglaubliche Fortschritte erzielt wurden. Es können praktisch lebensgroße bewegte Bilder dargestellt werden. Ultraschall wird auch therapeutisch eingesetzt, im Wesentlichen zur Entfernung von Zahnstein sowie zur Zertrümmerung von Gallen- oder Blasensteinen.
- * *Politik* : Darunter ist die Sanierung maroder Staatskassen durch Verkauf von Mobilfunk-Lizenzen zu verstehen, wie das in jüngerer Vergangenheit wiederholt geschah. Diesen eher satirisch gemeinten Punkt konnte sich der Verfasser nicht verkneifen. Da hatten doch clevere Politiker tatsächlich den Einfall, buchstäblich die Luft über den Köpfen der Menschen zu verkaufen. Auf eine solche Idee muss man erst einmal kommen, Hut ab.

2 Handwerkszeug

Dieses Kapitel dient der Auffrischung von Grundlagenstoff, soweit er für das Verständnis der nachfolgenden Ausführungen benötigt wird. Auf Herleitungen und Beweise wird bewusst verzichtet. Der sattelfeste Leser kann die entsprechenden Abschnitte getrost überspringen.

2.1 Differentialgleichungen

2.1.1 Grundsätzliches

Physikalische Zusammenhänge werden häufig unter Verwendung von Differentialquotienten formuliert. Betrachtet man etwa das Gesetz der trägen Masse

Kraft = Masse · Beschleunigung ,

und fasst man die Beschleunigung als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit auf, so ergibt sich

$$F = m \frac{dv}{dt} . \quad (2.1)$$

Da die Geschwindigkeit wiederum die Ableitung des Weges nach der Zeit ist, kann man auch

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.2)$$

schreiben. Die Strom-Spannungs-Beziehungen an Kapazität und an Induktivität stellen Beispiele aus der Elektrotechnik dar. Sie lauten bekanntlich

$$\begin{aligned} i &= C \frac{du}{dt} \\ u &= L \frac{di}{dt} \end{aligned} . \quad (2.3)$$

Bildet man auf solcher Basis Gleichungen zur Beschreibung irgendwelcher Systeme, so enthalten diese Ableitungen von Funktionen; man spricht dann von *Differentialgleichungen* . Eine Differentialgleichung ist also dadurch gekennzeichnet, dass sie mindestens eine Ableitung einer unbekannten Funktion enthält. In der Regel ist die Funktion selbst auch enthalten, das ist jedoch nicht zwingend. Der Verlauf der unbekannten Funktion ist die Lösung der Differentialgleichung. Wird nur nach einer einzigen Variablen abgeleitet - etwa nach der Zeit -, spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung* . Kommen hingegen Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen vor, liegt eine *partielle Differentialgleichung* vor. Ein gutes Beispiel hierfür sind die *MAXWELLSchen Gleichungen* , die das elektromagnetische Feld vollständig beschreiben. Sie enthalten Ableitungen nach den drei Raumkoordinaten und nach der Zeit.

2.1.2 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Von besonderer Bedeutung sind *lineare Differentialgleichungen*, da deren Lösung vergleichsweise einfach ist. Hier sind unbekannte Funktion und Ableitungen nur linear enthalten, das bedeutet für die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen:

- * Sie kommen nur in der ersten Potenz vor.
- * Es gibt weder Produkte noch Quotienten aus ihnen.
- * Sie stehen nicht im Argument einer *transzendenten Funktion*.

Transzendent heißen alle Funktionen, die sich nicht als Polynom oder als gebrochen rationale Funktion⁵ darstellen lassen. In Naturwissenschaft und Technik von Bedeutung sind hierbei

- * die trigonometrischen Funktionen ($\sin, \cos, \tan \dots$) und ihre Umkehrungen,
- * die hyperbolischen Funktionen ($\sinh, \cosh \dots$) und ihre Umkehrungen,
- * die Wurzelfunktion,
- * e-Funktion und Logarithmus.

Werden darüber hinaus unbekannte Funktion und Ableitungen nur mit Konstanten bewertet, also nicht in irgendeiner Weise mit Variablen, handelt es sich um eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten*. Diese lässt sich stets auf die allgemeine Form

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad . \quad (2.4)$$

bringen. Hierbei ist y die unbekannte Funktion und x die Variable, die konstanten Koeffizienten sind mit a_v bezeichnet. Die höchste vorkommende Ableitung bestimmt die *Ordnung* der Differentialgleichung. Die unabhängige Funktion auf der rechten Gleichungsseite wird *Störfunktion* genannt. Wir wollen uns ab sofort auf diesen Typ von Differentialgleichungen beschränken. Die Lösung erfolgt hier auf einem systematischen Weg, der im Folgenden beschrieben wird.

- (i) *Homogene Lösung* : Es wird die homogene Differentialgleichung gebildet, sie entsteht aus (2.4), indem man die Störfunktion zu Null setzt.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \quad . \quad (2.5)$$

Nun verwendet man den Ansatz

$$y_h = k \cdot e^{\lambda x} \quad . \quad (2.6)$$

und setzt diesen in die homogene Differentialgleichung (2.5) ein.

$$a_n k \lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_{n-1} k \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \dots + a_1 k \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_0 k \cdot e^{\lambda x} = 0 \quad (2.7)$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Konstante k und durch die Funktion $e^{\lambda x}$ kürzen, es bleibt

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad . \quad (2.8)$$

⁵ Quotient von Polynomen

Wir haben damit die sogenannte *charakteristische Gleichung* gefunden; das Polynom auf der linken Gleichungsseite wird *charakteristisches Polynom* genannt. Wie man sieht, kann es der ursprünglichen Differentialgleichung (2.4) unmittelbar entnommen werden. Die Koeffizienten der Differentialgleichung sind zugleich die Koeffizienten des Polynoms, die Ordnung der jeweiligen Ableitung bestimmt die Potenz der Größe λ . Im nächsten Schritt werden die Nullstellen $\lambda_{01}, \lambda_{02} \dots \lambda_{0n}$ des charakteristischen Polynoms - die sogenannten *Eigenwerte* - bestimmt und in den Lösungsansatz (2.6) eingesetzt.

$$y_h = k_1 \cdot e^{\lambda_{01}x} + k_2 \cdot e^{\lambda_{02}x} + \dots + k_n \cdot e^{\lambda_{0n}x} \quad (2.9)$$

Formal ist die homogene Lösung somit gefunden. Die Bestimmung der noch unbekannten Konstanten k_v erfolgt an späterer Stelle. Bezüglich der Eigenwerte müssen noch Fallunterscheidungen gemacht werden.

- * Die λ_{0v} sind reell und voneinander verschieden. In diesem einfachsten Fall ist keine weitere Modifikation der Lösung (2.9) erforderlich.
- * Es kommen komplexe Eigenwerte vor. Da die Differentialgleichung (2.4) ein realistisches physikalisches System beschreiben soll, sind ihre Koeffizienten und somit auch die des charakteristischen Polynoms (2.8) reell. Komplexe Nullstellen können also nur paarweise konjugiert komplex auftreten. Es sollen die beiden ersten Eigenwerte ein solches Paar bilden.

$$\lambda_{02} = \lambda_{01}^* \quad (2.10)$$

Wir schreiben

$$\lambda_{01} = a + jb \quad \lambda_{02} = a - jb \quad (2.11)$$

Da (2.9) eine reellwertige Funktion beschreibt, müssen auch die zugehörigen Konstanten k_1 und k_2 zueinander konjugiert komplex sein. Somit kann dieser Lösungsanteil folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y_{h12} &= k_1 \cdot e^{\lambda_{01}x} + k_2 \cdot e^{\lambda_{02}x} \\ &= (k_{1R} + jk_{1I}) \cdot e^{(a+jb)x} + (k_{1R} - jk_{1I}) \cdot e^{(a-jb)x} \quad (2.12) \\ &= e^{ax} \cdot \left[(k_{1R} + jk_{1I}) \cdot e^{jbx} + (k_{1R} - jk_{1I}) \cdot e^{-jbx} \right] \end{aligned}$$

Zur weiteren Bearbeitung wird die *EULERSche Formel* herangezogen, sie lautet

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (2.13)$$

und hat die Konsequenzen

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) \\ \sin x &= \frac{1}{j2} (e^{jx} - e^{-jx}) \quad (2.14) \end{aligned}$$

Setzt man diese in (2.12) ein, ergibt sich der anschauliche Ausdruck

$$y_{h12} = 2e^{ax} (k_{1R} \cos x - k_{1I} \sin x) \quad (2.15)$$

Falls die ursprüngliche Differentialgleichung (2.4) ein *stabiles System* beschreibt - und davon kann man bei sinnvollen technischen Realisierungen immer ausgehen - ,

sind die Realteile aller Eigenwerte negativ, demnach auch die Größe a in (2.15). Die homogene Lösung setzt sich somit aus abklingenden e-Funktionen und exponentiell gedämpften Schwingungen zusammen. Sie wird also mit zunehmendem Wert der Variablen x immer kleiner und ist für große Werte von x vernachlässigbar.

* Es treten mehrfache Eigenwerte auf, schreiben wir

$$\lambda_{02} = \lambda_{01} \quad . \quad (2.16)$$

In diesem Fall ist die Methode der *Variation der Konstanten* anzuwenden. Der Lösungsanteil lautet dann

$$y_{h12} = k_1 e^{\lambda_{01}x} + k_2 x e^{\lambda_{01}x} \quad . \quad (2.17)$$

- (ii) *Partikuläre Lösung* : In diesem Schritt wird ein Lösungsanteil ermittelt, der dem Einfluss der Störfunktion gerecht wird. Er wird mit y_p bezeichnet. Dazu ist abermals ein Ansatz zu machen, jetzt eine Funktion vom Typ der Störfunktion. Das bedeutet im Einzelnen: Handelt es sich bei der Störfunktion um eine Konstante, so ist eine unbekannte Konstante anzusetzen. Ist die Störfunktion ein Polynom, muss ein (vollständiges!) Polynom von gleichem Grad mit offenen Koeffizienten angesetzt werden. Bei harmonischer Störfunktion kann man eine Schwingung gleicher Frequenz aber noch unbestimmter Amplitude und Phase ansetzen. Bei exponentiellem Verlauf der Störfunktion verfährt man analog. Der Ansatz wird dann in die ursprüngliche Differentialgleichung (2.4) eingesetzt, wodurch es immer gelingt, die offenen Parameter zu bestimmen. Setzt sich die Störfunktion additiv aus Teilfunktionen zusammen, wird zu jeder separat eine partikuläre Lösung berechnet.

Ein harmonischer, d. h. sinusförmiger Verlauf der Störfunktion ist bei elektrotechnischen Anwendungen besonders häufig. In diesem Fall ist es zweckmäßig, die partikuläre Lösung nicht mit Hilfe des Ansatzes, sondern über die komplexe Wechselstromrechnung zu bestimmen. Diese wird in Abschnitt 2.2 behandelt.

- (iii) *Allgemeine Lösung* : Dieser Schritt ist besonders einfach. Homogene und partikuläre Lösung bilden als Summe die allgemeine Lösung.

$$y_a = y_h + y_p \quad . \quad (2.18)$$

- (iv) *Spezielle Lösung* : Die homogene Lösung (2.9) enthält noch unbekannte Konstanten. Ihre Anzahl entspricht der Ordnung der Differentialgleichung. Die Bestimmung erfolgt mit Hilfe von *Anfangsbedingungen* . Es müssen die Funktion und Ableitungen zum Wert der Variablen $x = 0$ bekannt sein. Sie werden in die allgemeine Lösung (2.18) eingesetzt und bilden somit ein lineares Gleichungssystem für die offenen Konstanten. Wie man ohne Weiteres erkennt, bestimmt auch hier die Ordnung der Differentialgleichung die Anzahl der erforderlichen Anfangsbedingungen.

2.1.3 Beispiele

- (i) Gegeben sei die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 8 \frac{d^2 y}{dx^2} + 19 \frac{dy}{dx} + 12y = 1 - e^{-2x} \quad (2.19)$$

mit den drei Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
 y(0) &= 0 \\
 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} &= 0 \quad . \\
 \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + 19\lambda + 12 = 0 \quad , \tag{2.21}$$

sie führt auf die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
 \lambda_{01} &= -1 \\
 \lambda_{02} &= -3 \\
 \lambda_{03} &= -4
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

und damit auf die homogene Lösung

$$y_h = k_1 \cdot e^{-x} + k_2 \cdot e^{-3x} + k_3 \cdot e^{-4x} \quad . \tag{2.23}$$

Die Störfunktion setzt sich aus zwei Teilfunktionen zusammen, es müssen also zwei partikuläre Lösungen berechnet werden. Für den Funktionsanteil

$$f_1(x) = 1$$

ist eine Konstante

$$y_{p1} = K_1$$

anzusetzen. Alle Ableitungen dieses Ansatzes verschwinden, Einsetzen in (2.19) liefert

$$12K_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{p1} = \frac{1}{12} \quad . \tag{2.24}$$

Der zweite Funktionsanteil

$$f_2(x) = e^{-2x}$$

erfordert den Ansatz

$$y_{p2} = K_2 \cdot e^{-2x} \quad .$$

Dieser wird in (2.19) eingesetzt, es folgt

$$-8K_2 \cdot e^{-2x} + 32K_2 \cdot e^{-2x} - 38K_2 \cdot e^{-2x} - 12K_2 \cdot e^{-2x} = -e^{-2x} \quad .$$

Die letzte Gleichung wird durch e^{-2x} gekürzt, wir erhalten

$$K_2 = \frac{1}{2} \quad . \tag{2.25}$$

Hier ist eine Anmerkung zu machen: Wäre der exponentielle Anteil der Störfunktion schon in der homogenen Lösung enthalten gewesen, so hätte man auch hier die Methode der Variation der Konstanten anwenden müssen.

Nun kann die allgemeine Lösung angegeben werden:

$$y_a = k_1 \cdot e^{-x} + k_2 \cdot e^{-3x} + k_3 \cdot e^{-4x} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \quad (2.26)$$

Zur Ausnutzung der Anfangsbedingungen sind die erste und die zweite Ableitung zu berechnen.

$$\begin{aligned} \frac{dy_a}{dx} &= -k_1 e^{-x} - 3k_2 e^{-3x} - 4k_3 e^{-4x} - e^{-2x} \\ \frac{d^2 y_a}{dx^2} &= k_1 e^{-x} + 9k_2 e^{-3x} + 16k_3 e^{-4x} + 2e^{-2x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Anfangsbedingungen (2.20) führen nun auf

$$\begin{aligned} y(0) &= k_1 + k_2 + k_3 + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = 0 \\ \left. \frac{dy_a}{dx} \right|_{x=0} &= -k_1 - 3k_2 - 4k_3 - 1 = 0, \\ \left. \frac{d^2 y_a}{dx^2} \right|_{x=0} &= k_1 + 9k_2 + 16k_3 + 2 = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

womit ein lineares Gleichungssystem für die Konstanten gefunden ist. Es wird nach einem gängigen Verfahren, etwa dem GAUSSschen Algorithmus oder der CRAMERSchen Regel gelöst. Für unser Beispiel folgt

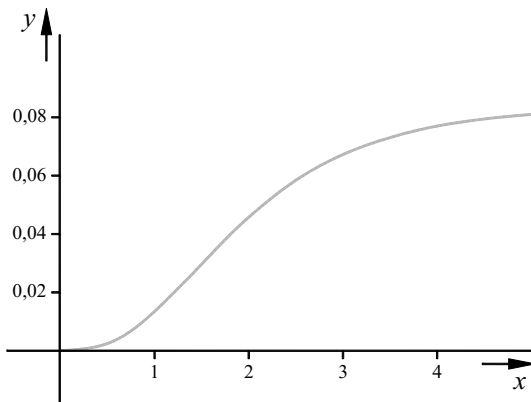


Bild 2-1 Funktionsverlauf

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{3} \\ k_2 &= -\frac{1}{3}, \\ k_3 &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

womit die spezielle Lösung

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-x} - \frac{1}{3} \cdot e^{-3x} + \frac{1}{12} \cdot e^{-4x} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \quad (2.29)$$

gefunden ist. In Bild 2-1 ist der Funktionsverlauf grafisch dargestellt. Die Kurve beginnt bei dem Funktionswert $y = 0$ mit horizontaler Tangente. Daran sind die beiden ersten Anfangsbedingungen zu erkennen. Die dritte Anfangsbedingung kann man dem Bild nicht entnehmen.

- (ii) Im Netzwerk nach Bild 2-2 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ der Schalter geöffnet, nachdem er zuvor lange Zeit geschlossen war. Der anschließende Verlauf der Kapazitätsspannung u_C soll für unterschiedliche Kombinationen von Bauteilewerten berechnet werden. Nach Öffnen des Schalters liegt ein sich selbst überlassener Reihenschwingkreis vor. Der Induktivitätsstrom i_L schließt sich über die beiden Widerstände und die Kapazität C . Somit gilt

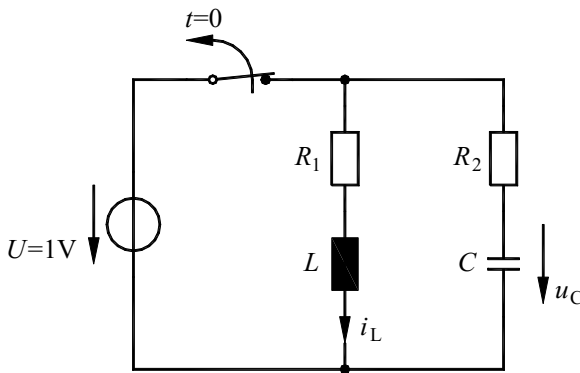


Bild 2-2 Elektrisches Netzwerk

$$i_L = -C \frac{du_C}{dt} \quad , \quad (2.30)$$

und die Maschengleichung

$$(R_1 + R_2)i_L + L \frac{di_L}{dt} - u_C = 0 \quad (2.31)$$

kann in der Form

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (2.32)$$

geschrieben werden. Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung. Nun empfiehlt sich die Einführung der normierten Zeit τ und des sogenannten Güteparameters Q gemäß

$$\begin{aligned}\tau &:= \frac{t}{\sqrt{LC}} \\ Q &:= \frac{1}{R_1 + R_2} \sqrt{\frac{L}{C}},\end{aligned}\quad (2.33)$$

woraus sich die Konsequenzen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{d}{d\tau} \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \frac{1}{LC} \cdot \frac{d^2}{d\tau^2},\end{aligned}\quad (2.34)$$

und die normierte Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \tilde{u}_C}{d\tau^2} + \frac{1}{Q} \frac{d\tilde{u}_C}{d\tau} + \tilde{u}_C = 0 \quad (2.35)$$

ergeben. Hierbei ist \tilde{u}_C die gemäß

$$\tilde{u}_C(\tau) = u_C(t) \quad \text{für} \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad (2.36)$$

mit u_C korrespondierende Funktion in der normierten Zeit. Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^2 + \frac{1}{Q} \cdot \lambda + 1 = 0, \quad (2.37)$$

sie hat die Lösungen

$$\lambda_{01,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}}{2Q}. \quad (2.38)$$

Für den weiteren Lösungsweg wollen wir uns zunächst auf die Bauteilekombination

$$\begin{aligned}L &= 1\mu\text{H} & C &= 1\mu\text{F} \\ R_1 &= 0,4\Omega & R_2 &= 2,1\Omega\end{aligned}\quad (2.39)$$

festlegen. Für Güte und Eigenwerte ergeben sich

$$Q = 0,4 \quad \lambda_{01} = -0,5 \quad \lambda_{02} = -2, \quad (2.40)$$

die homogene Lösung lautet

$$\tilde{u}_C(\tau) = k_1 \cdot e^{-0,5\tau} + k_2 \cdot e^{-2\tau}, \quad (2.41)$$

sie setzt sich also nur aus abklingenden e-Funktionen zusammen. Man spricht von *starker Dämpfung* oder dem *aperiodischen Fall*. Er ist für den Fachmann daran erkennbar, dass die Güte kleiner als 0,5 ist. Zur Bestimmung der noch offenen Konstanten k_1 und k_2 müssen Anfangsbedingungen gefunden werden. Dazu macht man sich den Umstand zu Nutze, dass Kapazitätsspannung u_C und Induktivitätsstrom i_L stetig verlaufen müssen, da sie die in dem jeweiligen reaktiven Element gespeicherte Energie beschreiben. Wie man dem Schaltbild 2-2 sofort ansieht, gilt unmittelbar vor Öffnen des Schalters

$$u_C(0) = U = 1\text{V} \quad i_L(0) = \frac{U}{R_1} = 2,5\text{A} . \quad (2.42)$$

Mit der Strom-Spannungs-Beziehung an der Kapazität (2.3) folgt daraus für die normierte Größe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_C(0) &= 1\text{V} \\ \left. \frac{d\tilde{u}_C}{d\tau} \right|_{\tau=0} &= -2,5\text{V} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Damit lässt sich die spezielle Lösung berechnen.

$$\tilde{u}_C(\tau) = -\frac{1}{3}\text{V} \cdot e^{-0,5\tau} + \frac{4}{3}\text{V} \cdot e^{-2\tau} \quad (2.44)$$

Der Verlauf nach Entnormierung ist in Bild 2-3 zu sehen. Wie man sieht, besitzt er einen Unterschwinger, was den kritischen Leser in Anbetracht des aperiodischen Falls ungläubig stimmen wird. Aperiodisch bedeutet nicht, dass es überhaupt keine Über- oder Unterschwinger gibt, sondern nur, dass deren Anzahl endlich ist. Im Fall des Systems 2. Ordnung kann es maximal einer sein. Ob er überhaupt vorhanden ist, hängt von der Konstellation der Anfangsbedingungen ab.

Nun soll das Einschwingverhalten für die Bauteilekombination

$$\begin{aligned} L &= 1\mu\text{H} & C &= 1\mu\text{F} \\ R_1 &= 0,4\Omega & R_2 &= 0,1\Omega \end{aligned} \quad (2.45)$$

untersucht werden. Für Güte und Eigenwerte erhalten wir hier

$$Q = 2 \quad \lambda_{01} = -\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4} \quad \lambda_{02} = -\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4} , \quad (2.46)$$

die homogene Lösung lautet formal

$$\tilde{u}_C(\tau) = (k_R + jk_I) \cdot e^{\left(-\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\tau} + (k_R - jk_I) \cdot e^{\left(-\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\tau} . \quad (2.47)$$

Auch hier gelten die Anfangsbedingungen (2.42). Etwas aufwändige Rechnung führt auf

$$k_R = 0,5\text{V} \quad k_I = \frac{4,5\text{V}}{\sqrt{15}} . \quad (2.48)$$

Durch Ausklammern des gemeinsamen Faktors $e^{-\frac{\tau}{4}}$ und Anwendung der Konsequenzen aus der EULERSchen Formel (2.14) erhalten wir schließlich

$$\tilde{u}_C(\tau) = e^{-\frac{\tau}{4}} \cdot \left(1\text{V} \cdot \cos \frac{\sqrt{15}}{4} \tau - \frac{9\text{V}}{\sqrt{15}} \cdot \sin \frac{\sqrt{15}}{4} \tau \right) . \quad (2.49)$$

Wir haben es nun mit einer gedämpften Schwingung zu tun, man spricht vom *periodischen Fall*, der an einer Güte Q größer 0,5 erkennbar ist. Der Verlauf ist in Bild 2-3 eingezeichnet. Man wird sich wundern, dass zum Zeitpunkt $t \approx 1,8\mu\text{s}$ der Betrag der Kapazitätsspannung mit mehr als 1,5V größer ist als zu Beginn des Einschwingvorgangs

und mag darin eine Verletzung der Energiebilanz vermuten. Dieses Phänomen lässt sich ganz leicht erklären: Anfangs ist sowohl in dem geladenen Kondensator als auch in der stromdurchflossenen Spule Energie gespeichert. Diese wird im Folgenden zwischen den Energieträgern ausgetauscht und nach und nach in den Widerständen verbraucht. Zum betrachteten Zeitpunkt ist die komplette verbliebene Energie im Kondensator gespeichert. An der horizontalen Tangente des Spannungsverlaufs ist zu erkennen, dass der Strom zu diesem Zeitpunkt verschwindet.

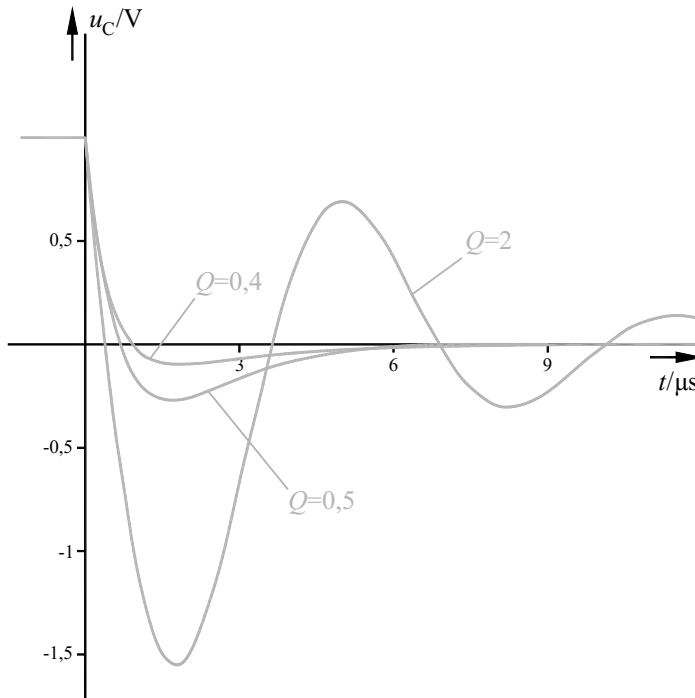


Bild 2-3 Spannungsverläufe

In einem letzten Experiment nehmen wir uns die Bauteilekombination

$$\begin{aligned} L &= 1\mu\text{H} & C &= 1\mu\text{F} \\ R_1 &= 0,4\Omega & R_2 &= 1,6\Omega \end{aligned} \quad (2.50)$$

vor. Für Güte und Eigenwerte ergibt sich

$$Q = 0,5 \quad \lambda_{01} = \lambda_{02} = -1 \quad . \quad (2.51)$$

Die beiden Eigenwerte fallen zusammen, also ist die Methode der Variation der Konstanten anzuwenden, die homogene Lösung lautet allgemein

$$\tilde{u}_C(\tau) = k_1 \cdot e^{-\tau} + k_2 \tau \cdot e^{-\tau} \quad . \quad (2.52)$$

Es sind nochmals die Anfangsbedingungen (2.43) anzuwenden, und damit gelangt man zu

$$\tilde{u}_C(\tau) = 1V \cdot (1 - 1,5\tau) \cdot e^{-\tau} \quad . \quad (2.53)$$

Auch dieser Verlauf ist in Bild 2-3 eingezeichnet, man erkennt wieder einen Unter-schwinger, der sich durch die spezielle Konstellation der Anfangsbedingungen erklärt. Man spricht hier vom *aperiodischen Grenzfall* .

2.2 Die komplexe Wechselstromrechnung

Wir betrachten ein lineares elektrisches Netzwerk, welches von einer harmonischen Wechselspannungsquelle

$$u_S(t) = \hat{u}_S \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad . \quad (2.54)$$

gespeist wird. Hierbei bezeichnet \hat{u}_S die Amplitude der Spannung, ω die Kreisfrequenz der Schwingung ($\omega = 2\pi f$), und φ die Phasenlage in Bezug auf den Zeitnullpunkt. Der Index S steht für *source* . Linear bedeutet in diesem Zusammenhang, dass alle enthaltenen Bauteile durch lineare Strom-Spannungs-Beziehungen beschrieben werden. Für Widerstände, Kapazitäten, Induktivitäten und Übertrager trifft dies zu, ebenso für gesteuerte Quellen, die zur Modellierung von aktiven Schaltungsteilen herangezogen werden. Die Analyse - also die Berechnung irgendeines Strom- oder Spannungsverlaufs - könnte wie im vorigen Abschnitt beschrieben über Differentialgleichungen erfolgen. Das Ergebnis wäre die Summe aus der homogenen und der partikulären Lösung. Die homogene wäre exponentiell abklingend, also für größere Zeiten vernachlässigbar und wird deshalb auch *flüchtiger Anteil* genannt. Die partikuläre wäre eine Schwingung der Kreisfrequenz ω , gekennzeichnet durch Amplitude und Phase. Diese Schwingung hält so lange an, wie die Quelle arbeitet. Sie wird deshalb *stationärer Anteil* genannt. Man spricht vom *eingeschwungenen Zustand* , wenn nur dieser Lösungsanteil relevant ist. Die stationäre Lösung kann mit dem Werkzeug der komplexen Wechselstromrechnung äußerst elegant und einfach gewonnen werden. Die Methode wird im Folgenden beschrieben, auf eine Herleitung wird bewusst verzichtet.

- (i) Jeder Zweigspannung und jedem Zweigstrom wird ein *komplexer Zeiger* zugeordnet, also eine komplexe Zahl, die durch ihren Betrag und ihr Argument gekennzeichnet ist. Hierbei verwendet man als Betrag den Effektivwert der Schwingung, als Argument die Phase.

$$\begin{aligned} u_v(t) &= \hat{u}_v \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) &\Rightarrow & \underline{U}_v = U_v \cdot e^{j\varphi_v} \\ i_\mu(t) &= \hat{i}_\mu \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mu) &\Rightarrow & \underline{I}_\mu = I_\mu \cdot e^{j\varphi_\mu} \quad . \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$U_v = \frac{\hat{u}_v}{\sqrt{2}} \quad I_\mu = \frac{\hat{i}_\mu}{\sqrt{2}}$$

Die komplexen Zeiger werden durch unterstrichene Großbuchstaben symbolisiert, j ist die sogenannte *imaginäre Einheit* , die Lösung der quadratischen Gleichung

$$j^2 = -1 \quad .^6 \quad (2.56)$$

⁶ Man schreibt auch $j = \sqrt{-1}$.

Die Zeiger beinhalten demnach Information über Effektivwert und Phasenlage der Schwingung, jedoch nicht über die Kreisfrequenz. Diese muss also separat abgespeichert werden. Damit ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Schwingung und ihrem komplexen Zeiger hergestellt.

- (ii) Die *Knotenregel* (1. KIRCHHOFFsches Gesetz) gilt nicht nur für die Zeitfunktionen, sondern auch für die komplexen Zeiger. Somit liefert jeder Knoten des Netzwerks eine Gleichung der Form

$$\sum_v \underline{I}_v = 0 \quad , \quad (2.57)$$

wobei \underline{I}_v die Zeiger zu allen Strömen $i_v(t)$, die den Knoten verlassen, sind.

- (iii) Auch die *Maschenregel* (2. KIRCHHOFFsches Gesetz) gilt für die komplexen Zeiger. Jeder geschlossene Weg im Netzwerk (Masche) liefert eine Gleichung der Form

$$\sum_{\mu} \underline{U}_{\mu} = 0 \quad . \quad (2.58)$$

- (iv) Die *Strom-Spannungs-Beziehungen* für alle gängigen Netzwerkelemente sind zusammen mit denen für den Zeitbereich in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Man sieht, dass die Multiplikation eines Zeigers mit $j\omega$ der Differentiation der korrespondierenden Zeitfunktion äquivalent ist. Dieser Zusammenhang lässt sich ganz leicht verifizieren: Wir bilden

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cdot \cos(\omega t) \quad . \quad (2.59)$$

Die Differentiation einer Schwingung bewirkt also eine Multiplikation mit ω und eine Phasenverschiebung um $+90^\circ$. Genau dies bringt die Multiplikation mit $j\omega$ in der Zeigerwelt zum Ausdruck. Hierin liegt der große Vorteil der komplexen Wechselstromrechnung. Differentialgleichungen gehen in gewöhnliche algebraische Gleichungen über. Weiter erkennt man, dass jeder Zweipol durch das Verhältnis aus Spannungszeiger und Stromzeiger charakterisiert werden kann. Dieser dimensionsbehaftete komplexe Wert

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad (2.60)$$

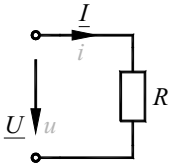
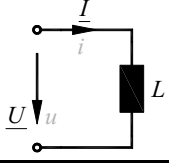
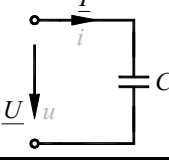
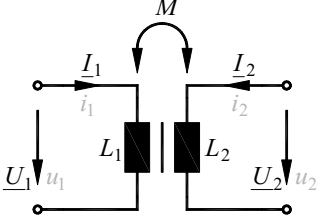
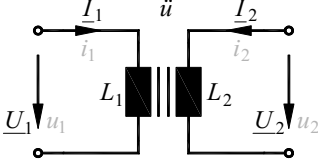
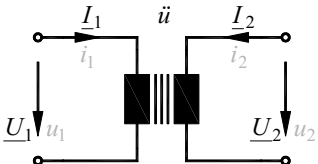
wird *Impedanz* genannt, er hat die Dimension eines Widerstands. Sein Kehrwert

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} \quad (2.61)$$

heißt *Admittanz* und hat die Dimension eines Leitwerts. Impedanz und Admittanz von Widerstand, Induktivität und Kapazität haben somit die Form

$$\begin{array}{ll} \underline{Z}_R = R & \underline{Y}_R = \frac{1}{R} \\ \underline{Z}_L = j\omega L & \underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} \\ \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} & \underline{Y}_C = j\omega C \end{array} \quad . \quad (2.62)$$

Tabelle 2.1 Strom-Spannungs-Beziehungen

Element	Schaltsymbol	Zeitbereich	Zeigerbereich
Widerstand		$u = R \cdot i$	$\underline{U} = R \cdot \underline{I}$
Induktivität		$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$
Kapazität		$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C}$
Übertrager, lose gekoppelt		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$	$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2$
Übertrager, fest gekoppelt		$M = \sqrt{L_1 L_2}$ \Rightarrow $\frac{u_1}{u_2} = \ddot{u}$	$M = \sqrt{L_1 L_2}$ \Rightarrow $\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ddot{u}$
Übertrager, ideal		$\frac{u_1}{u_2} = \ddot{u}$ $\frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{\ddot{u}}$	$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ddot{u}$ $\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{1}{\ddot{u}}$

Die Impedanz einer Reihenschaltung ergibt sich als Summe der Teilimpedanzen, die Admittanz einer Parallelschaltung als Summe der parallel geschalteten Admittanzen. Somit kann jedes elektrische Netzwerk genauso einfach wie im Gleichstromfall analysiert werden. An die Stelle von Gleichspannungen und Gleichströmen treten die komplexen Zeiger zu

⁷ Mit \ddot{u} ist das Windungszahlenverhältnis gemeint.

Wechselspannungen und Wechselströmen, an die Stelle von Widerständen und Leitwerten treten Impedanzen und Admittanzen. Real- und Imaginärteil von Impedanz und Admittanz haben spezielle Namen, die hier noch eingeführt werden. Sei

$$\underline{Z} = R + jX \quad \underline{Y} = G + jB \quad , \quad (2.63)$$

dann heißen

- * R die *Resistanz* ,
- * X die *Reaktanz* ,
- * G die *Konduktanz* ,
- * B die *Suszeptanz* .

Als Beispiel wird nun das in Bild 2-4 gezeigte Netzwerk untersucht. Die Quellspannung sei gegeben

$$u_S(t) = \sqrt{2} U_S \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad (2.64)$$

gesucht ist der Verlauf des Widerstandsstroms $i_R(t)$ und zwar im eingeschwungenen Zustand. Wir bestimmen zunächst den mit u_S korrespondierenden komplexen Zeiger

$$\underline{U}_S = U_S \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \quad , \quad (2.65)$$

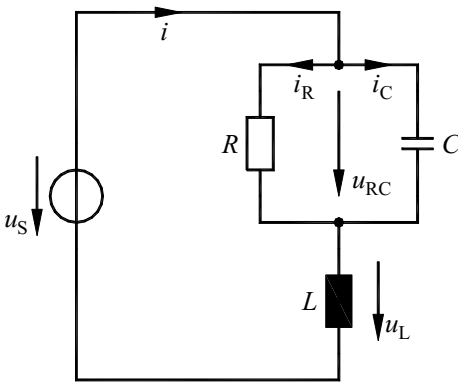


Bild 2-4 Elektrisches Netzwerk

dann die gesamte an die Quelle angeschlossene Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega L = \frac{R - \omega^2 RLC + j\omega L}{1 + j\omega RC} \quad . \quad (2.66)$$

Der Zeiger des Gesamtstroms lautet somit

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U} \cdot \frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \quad . \quad (2.67)$$

Die Stromteilungsgleichung führt auf

$$\underline{I}_R = \frac{I}{-R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{I}{1 + j\omega RC} = \frac{\underline{U}}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \quad (2.68)$$

Nun müssen Betrag und Argument dieses komplexen Quotienten berechnet werden. Für den Betrag folgt ganz einfach

$$I_R = \frac{U}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2}} \quad (2.69)$$

Bei der Bestimmung des Arguments ist zu beachten, dass der Realteil des Nenners in (2.68) positiv oder negativ sein kann, er könnte auch verschwinden. Folglich sind Fallunterscheidungen zu machen:

$$(i) \quad R - \omega^2 RLC > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_R := \arg \underline{I}_R = \arg \underline{U} - \arctan \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC} = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC} \quad (2.70)$$

$$(ii) \quad R - \omega^2 RLC < 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_R = \arg \underline{U} - \arctan \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC} \pm \pi = \frac{3\pi}{4} - \arctan \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC} \quad (2.71)$$

$$(iii) \quad R - \omega^2 RLC = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_R = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \quad (2.72)$$

Damit sind alle Voraussetzungen für die Rückkehr in den Zeitbereich geschaffen, das Ergebnis lautet

$$i_R(t) = \sqrt{2} I_R \cdot \cos(\omega t + \varphi_R) \quad (2.73)$$

Dieses Beispiel macht deutlich, dass der Rechenweg über die komplexe Wechselstromrechnung um Klassen einfacher ist als der über Differentialgleichungen.

Komplexe Zeiger können grafisch visualisiert werden, indem man sie in eine GAUSSsche Zahlenebene einträgt. Man spricht dann von einem *Zeigerdiagramm*. Hierzu müssen Maßstäbe für Spannungen und Ströme festgelegt werden; aus dem Zeigerdiagramm kann man dann sehr schön die Größenverhältnisse und die Phasenlagen der einzelnen Schwingungen ablesen. In adäquater Weise lassen sich Impedanzen und Admittanzen in Zeigerdiagrammen veranschaulichen. Bild 2-5 zeigt ein maßstäbliches Zeigerdiagramm für alle elektrischen Größen aus dem Netzwerk von Bild 2-4, wobei die Zahlenwerte

$$\begin{aligned} U &= 3V & R &= 100\Omega & \omega &= 2\pi \cdot 10\text{kHz} \\ L &= 796\mu\text{H} & C &= 79,6\text{nF} \end{aligned} \quad (2.74)$$

unterstellt wurden. Man kann dem Zeigerdiagramm beispielsweise entnehmen, dass die Spannung u_L einen Effektivwert von etwa 1,85V hat und der Quellspannung um einen Winkel von ungefähr 83° vorausschlägt. Ferner erkennt man, dass der Effektivwert von u_{RC} größer ist

als der der Quellspannung. Dieses Phänomen nennt man *Resonanzüberhöhung*. Ferner kann man die Knotengleichung und die Maschengleichung

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_C \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{RC} + \underline{U}_L\end{aligned}\tag{2.75}$$

wunderschön in dem Diagramm grafisch verifizieren.

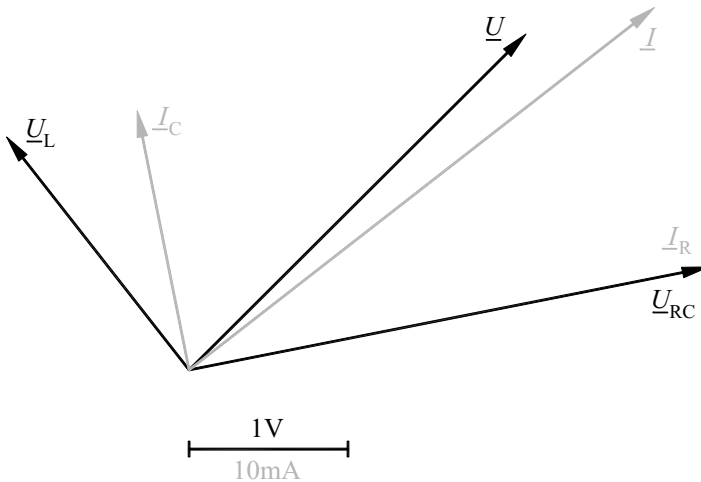


Bild 2-5 Maßstäbliches Zeigerdiagramm zum Netzwerk von Bild 2-4

Häufig hängen die komplexen Zeiger von einem freien Parameter ab - beispielsweise der Kreisfrequenz ω - und zwar sowohl im Betrag als auch in der Winkellage. Die Spitze des Zeigers beschreibt unter dem Einfluss des Parameters eine - gewöhnlich krummlinige - Bahn in der komplexen Ebene. Diese wird *Ortskurve* genannt. Messgeräte der Hochfrequenztechnik stellen Ergebnisse häufig in Form von Ortskurven dar, man vergleiche Bild 5-6. Man sieht dort in einem speziellen aus Kreisen aufgebauten Koordinatensystem eine sich mehrfach durchschlingende Ortskurve. Ortskurven dieser Gestalt sind in der Hochfrequenz-Messtechnik häufig. Sie werden im Laborjargon - nicht nur im süddeutschen Raum - *Sauschwänzchen* genannt. Bei der Darstellung von Zeigerdiagrammen und Ortskurven ist es eminent wichtig, dass für reelle und imaginäre Achse ein und derselbe Maßstab gewählt wird. Andernfalls stimmen die Winkel nicht. Bei der computergestützten Generierung des Diagramms kann dies Schwierigkeiten mit sich bringen, da die individuellen Abbildungseigenschaften der Ausgabeinheit zu berücksichtigen sind.

Für die grafische Darstellung komplexwertiger Resultate - z. B. Frequenzgänge - gibt es verschiedene Möglichkeiten. Naheliegender wäre die Darstellung nach Real- und Imaginärteil in separaten Diagrammen. Diese Form wird in der Praxis ausgesprochen selten angewandt, da sie wenig Aussagekraft besitzt. Eine weitere Möglichkeit ist die Darstellung von Betrag und Argument in separaten Diagrammen. Teilt man hierbei die Frequenz- und die Betragsachse logarithmisch, entsteht das äußerst verbreitete *BODE-Diagramm*. Die dritte Möglichkeit ist die soeben beschriebene Darstellung als Ortskurve. Sie hat den Vorteil, dass sowohl Real- und Imaginärteil als auch Betrag und Argument aus *einem* Diagramm entnommen werden kön-

nen. Sie hat aber zugleich den Nachteil, dass die Kurve zusätzlich *parametrisiert* werden muss. Bestimmte Punkte der Ortskurve werden markiert und mit dem zugehörigen Wert des Parameters versehen. Zwischen diesen Marken ist zu interpolieren, was in aller Regel nur mit bescheidener Präzision gelingt. Bild 2-6 zeigt den Frequenzgang der Impedanz eines Lautsprechers in Form einer parametrisierten Ortskurve. Es ist kaum möglich den Wert von \underline{Z} zum Parameter $f = 2,5\text{kHz}$ genau abzulesen.

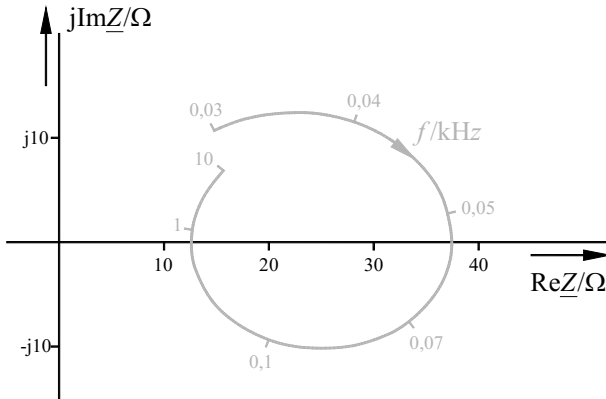


Bild 2-6 Impedanz eines Lautsprechers als parametrisierte Ortskurve

2.3 Logarithmische Übertragungs- und Pegelmaße

2.3.1 Das Übertragungsmaß dB

Wir betrachten zunächst das Verhältnis zweier Leistungen P und P_0 und bilden daraus formal die Größe

$$V_P = 10 \cdot \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB} \quad , \quad (2.76)$$

wobei \lg den dekadischen Logarithmus bezeichnet [8]. Hier könnte beispielsweise P_0 die einem Verstärker am Eingang zugeführte Leistung, P seine Ausgangsleistung sein. Dann ließe sich V_P als Leistungsverstärkung interpretieren. Das Kürzel dB wird *Dezibel* ausgesprochen. Die Betonung liegt auf der ersten und der letzten Silbe; wer das *i* betont, outet sich als blutiger Laie. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte *dimensionslose Einheit*, sie bringt die Rechenvorschrift zum Ausdruck, durch die der resultierende Zahlenwert zu Stande gekommen ist. Die Worthölse *bel* rührt daher, dass dieses Maß ursprünglich als Hausnorm bei der Telefonfirma Bell Laboratories, USA eingeführt wurde. *ALEXANDER BELL* war der Begründer dieses traditionsreichen Unternehmens, er gilt als Erfinder des ersten alltagstauglichen Telefons (siehe dazu auch 1.2 sowie 3.6.2). *Dezi* steht für ein Zehntel, deshalb muss der Logarithmus mit 10 multipliziert werden. So gesehen wäre ein Bel der reine Logarithmus des Leistungsverhältnisses. Diese Einheit ist aber nicht gebräuchlich. Man verwendet das Dezibel,

weil sich damit bei elektrotechnischen Anwendungen in aller Regel Zahlenwerte in dem für Menschen bequemen Bereich zwischen 1 und 100 ergeben, eventuell zwischen 0,1 und 1000.

Für die Einführung des Dezibel sprach noch ein weiterer Grund [8]: Schon vorher war in Amerika ein eher willkürlich gewähltes Übertragungsmaß verbreitet, das *standard cable*. Es beschreibt die Dämpfung damals gebräuchlicher Doppelleitungen bei der in der Mitte des Sprachbandes liegenden Frequenz $f = 800\text{Hz}$ über eine Länge von einer amerikanischen Meile und beträgt zufällig ziemlich genau 1dB. Somit mussten sich Ingenieure, die an dieses Maß gewöhnt waren, nicht neu orientieren.

In Europa wurde lange Zeit ein vergleichbares Übertragungsmaß verwendet, es hieß *Neper*, abgekürzt *Np*, und war folgendermaßen definiert:

$$V_p = \ln \frac{P}{P_0} Np \quad (2.77)$$

Wegen der Verwendung des natürlichen Logarithmus‘ besitzt es gegenüber dem Dezibel gewisse Vorteile. Deshalb hat sich das Neper bei speziellen Entwurfsverfahren, wo eben diese Vorteile von Relevanz sind, gehalten, auch im amerikanischen Raum. Als Übertragungsmaß wurde es jedoch durch das Dezibel vollkommen verdrängt. Messgeräte, die in Neper anzeigen, sind nicht mehr erhältlich.

Um ein Gefühl für das neu eingeführte Maß zu bekommen, werden ein paar ausgewählte Zahlenwerte betrachtet. Sie sind in Tabelle 2.2 zusammengestellt. Man sieht:

- * Das Leistungsverhältnis 1 entspricht 0dB.
- * Ein positiver Wert von V_p beschreibt ein Leistungsverhältnis größer 1 (Verstärkung).
- * Ein negativer Wert von V_p beschreibt ein Leistungsverhältnis kleiner 1 (Abschwächung, Dämpfung).
- * Der Kehrwert des Leistungsverhältnisses geht mit dem inversen Wert von V_p einher.
- * Der Faktor 2 für das Leistungsverhältnis entspricht in etwa aber nicht ganz genau 3dB.
- * Jede Zehnerpotenz des Leistungsverhältnisses liefert 10dB.

Zur Ermittlung des Leistungsverhältnisses bei einem gegebenen Wert V_p muss (2.5) nach P/P_0 aufgelöst werden. Man schreibt zunächst

$$\frac{V_p}{10\text{dB}} = \lg \frac{P}{P_0} .$$

Nun werden beide Gleichungsseiten zur Potenz zur Basis 10 erhoben.

$$10^{\frac{V_p}{10\text{dB}}} = 10^{\lg \frac{P}{P_0}} .$$

Beachtet man, dass Potenzfunktion 10^x und Logarithmusfunktion $\lg x$ Umkehrfunktionen sind, sich also gegenseitig aufheben, folgt schließlich

$$\frac{P}{P_0} = 10^{V_p / 10\text{dB}} . \quad (2.78)$$

Tabelle 2.2 Korrespondenzen der Leistungsverstärkung

P/P_0	V_P	P/P_0	V_P
1	0dB	1	0dB
2	3, 0103dB \approx 3dB	1/2	-3, 0103dB \approx -3dB
10	10dB	1/10	-10dB
100	20dB	1/100	-20dB
1000	30dB	1/1000	-30dB

Auf dieser Basis ist es leicht möglich, korrespondierende Zahlenwerte abzuschätzen. Sucht man das Leistungsverhältnis zu einem gegebenen Dezibelwert, so zerlegt man diesen in eine Summe aus Vielfachen von $\pm 10\text{dB}$ und $\pm 3\text{dB}$. Jeder Summand $\pm 10\text{dB}$ liefert einen Faktor 10 bzw. $1/10$, jeder Summand $\pm 3\text{dB}$ trägt mit dem Faktor 2 bzw. $1/2$ bei. Machen wir ein Beispiel: Es sei eine Leistungsverstärkung $V_P = 34\text{dB}$ gegeben; sie wird folgendermaßen zerlegt:

$$34\text{dB} = (10+10+10+10-3-3)\text{dB} \quad (2.79)$$

Für das gesuchte Leistungsverhältnis ergibt sich somit

$$\frac{P}{P_0} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2500 \quad (2.80)$$

Der umgekehrte Weg verläuft ganz analog. Ein gegebenes Leistungsverhältnis wird in ein Produkt aus Faktoren 10, $1/10$, 2 und $1/2$ zerlegt. V_P ist schließlich die Summe aus den einzelnen vorzeichenrichtig gezählten Dezibelwerten. Sei

$$\frac{P}{P_0} = 800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10 \quad (2.81)$$

daraus folgt

$$V_P = (3+3+3+10+10)\text{dB} = 29\text{dB} \quad (2.82)$$

Häufig ist die Ausgangsleistung eines Zweitorts systematisch kleiner als die am Eingang. Dieser Leistungsverlust kann physikalisch bedingt sein, das ist beispielsweise bei Signalausbreitung über eine Leitung der Fall. Er kann auch gezielt herbeigeführt sein, etwa zur Unterdrückung unerwünschter Spektralanteile durch Sperrfilter oder bei Schirmungsmaßnahmen. In all diesen Fällen ergäbe sich ein negativer Wert für V_P . Dann ist es üblich, den Kehrwert des Leistungsverhältnisses zu logarithmieren, das Ergebnis heißt die *Dämpfung*.

$$a_P = 10 \cdot \lg \frac{P_0}{P} \text{ dB} = -V_P \quad (2.83)$$

Eine starke Signalunterdrückung wird somit durch einen hohen positiven Dämpfungswert charakterisiert.

Das Übertragungsmaß dB kann auch auf Spannungen angewandt werden. Betrachtet man zwei unterschiedliche Betriebsfälle bei ein und demselben Widerstand R , so ergibt sich

$$\frac{P}{P_0} = \frac{U^2/R}{U_0^2/R} = \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \quad (2.84)$$

Setzt man dieses unter Beachtung der Rechenregel

$$\log(x^n) = n \cdot \log x \quad (2.85)$$

in (2.76) ein, so folgt die Spannungsverstärkung

$$V_U = 20 \cdot \lg \frac{U}{U_0} \text{ dB} \quad (2.86)$$

mit der Umkehrformel

$$\frac{U}{U_0} = 10^{V_U / 20 \text{ dB}} \quad (2.87)$$

und einer absolut analogen Definition für die Spannungsämpfung. In Tabelle 2.3 sind wieder einige charakteristische Werte aufgelistet. Man erkennt hier die Gesetzmäßigkeiten:

- * Das Spannungsverhältnis 1 entspricht 0dB.
- * Ein positiver Wert von V_U beschreibt ein Spannungsverhältnis größer 1 (Verstärkung).
- * Ein negativer Wert von V_U beschreibt ein Spannungsverhältnis kleiner 1 (Abschwächung, Dämpfung).
- * Der Kehrwert des Spannungsverhältnisses geht mit dem inversen Wert von V_U einher.
- * Der Faktor $\sqrt{2}$ für das Spannungsverhältnis entspricht in etwa aber nicht ganz genau 3dB .
- * Der Faktor 2 für das Spannungsverhältnis entspricht in etwa aber nicht ganz genau 6dB
- * Jede Zehnerpotenz des Spannungsverhältnisses liefert 20dB .

Tabelle 2.3 Korrespondenzen der Spannungsverstärkung

U/U_0	V_U	U/U_0	V_U
1	0dB	1	0dB
$\sqrt{2}$	3, 0103dB \approx 3dB	$1/\sqrt{2}$	-3, 0103dB \approx -3dB
2	6,0206dB \approx 6dB	1/2	-6,0206dB \approx -6dB
10	20dB	1/10	-20dB
100	40dB	1/100	-40dB
1000	60dB	1/1000	-60dB

Auch hier ist es leicht möglich, korrespondierende Zahlenwerte abzuschätzen. Sucht man das Spannungsverhältnis zu einem gegebenen Dezibelwert, so zerlegt man diesen in eine Summe aus Vielfachen von $\pm 20\text{dB}$ und $\pm 6\text{dB}$. Jeder Summand $\pm 20\text{dB}$ liefert dann einen Faktor 10 bzw. $1/10$, jeder Summand $\pm 6\text{dB}$ trägt mit dem Faktor 2 bzw. $1/2$ bei. Sei beispielsweise eine Spannungsverstärkung $V_U = 54\text{dB}$ gegeben; sie wird folgendermaßen zerlegt:

$$54\text{dB} = (20 + 20 + 20 - 6)\text{dB} \quad (2.88)$$

Für das gesuchte Spannungsverhältnis ergibt sich somit

$$\frac{U}{U_0} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 500 \quad . \quad (2.89)$$

Der umgekehrte Weg verläuft wieder ganz analog. Ein gegebenes Spannungsverhältnis wird in ein Produkt aus Faktoren 10, 1/10, 2 und 1/2 zerlegt. V_U ist dann die Summe aus den einzelnen vorzeichenrichtig gezählten Dezibelwerten. Sei

$$\frac{U}{U_0} = 0,025 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad , \quad (2.90)$$

dann folgt

$$V_U = (-20 - 6 - 6) \text{ dB} = -32 \text{ dB} \quad . \quad (2.91)$$

In völlig analoger Weise können auch Verhältnisse von Strömen als Dezibel-Werte ausgedrückt werden.

2.3.2 Dämpfungsmaße

Häufig wird nach der Dämpfung eines Zweitores gefragt; sie ist Ziel einer Rechnung oder Messung [8]. Da die Verhältnisse von Leistungen bzw. Spannungen an Primär- und Sekundärseite gewöhnlich von der äußeren Beschaltung abhängen, ist der einem Zweitor zugeordnete Dämpfungswert nur bei gleichzeitiger Definition der Betriebsbedingungen eindeutig. In diesem Sinne sind unterschiedliche Dämpfungsarten definiert. Sie werden im Folgenden an Hand der in Bild 2-7 gezeigten Beschaltung eingeführt. Demnach wird das Zweitor an seiner Primärseite von einer realen Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung \underline{U}_S und dem Innenwiderstand R_S gespeist, an die Sekundärseite ist ein Verbraucher \underline{Z}_2 angeschlossen. Von Interesse sind unter anderem die auf die Primärseite zugeführte Leistung P_1 sowie die an den Verbraucher abgegebene Leistung P_2 , wobei es sich jeweils um die Scheinleistung handelt. \underline{Z}_1 ist die Impedanz, die an der Primärseite des Zweitores erscheint, wenn es wie gezeigt sekundär mit \underline{Z}_2 beschaltet ist. Viele Lehrbücher verwenden im Interesse möglichst hoher Allgemeinheit eine Quelle mit komplexer Innenimpedanz \underline{Z}_S . Dies führt bei der Einführung der Betriebsdämpfung zu Problemen, weshalb besagte Werke an dieser Stelle Fehler aufweisen. Bei der Behandlung der Betriebsdämpfung wird genauer darauf eingegangen. Für die Sekundärseite erkennt man sofort den im Folgenden häufig benötigten Zusammenhang

$$P_2 = \frac{U_2^2}{|\underline{Z}_2|} \quad , \quad (2.92)$$

wobei mit U_2 der Effektivwert der Sekundärspannung, also der Betrag des Zeigers \underline{U}_2 gemeint ist.

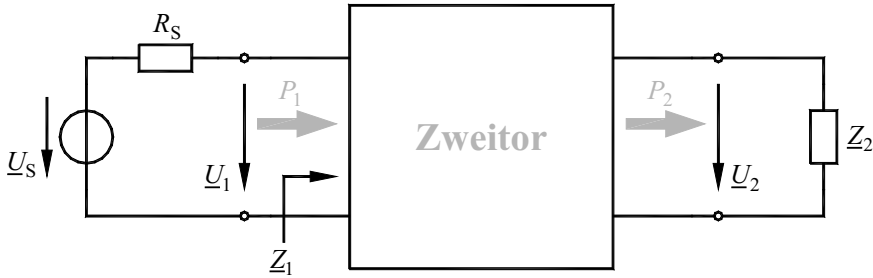


Bild 2-7 Zur Definition der unterschiedlichen Dämpfungsmaße

- (i) Die *Einfügungsdämpfung* : Wir beziehen auf die Scheinleistung P_{20} , die der Verbraucher bei direktem Anschluss an die reale Quelle aufnehmen würde (Bild 2-8)

$$P_{20} = \frac{U_{20}^2}{|Z_2|} = U_S^2 \frac{|Z_2|}{|R_S + Z_2|^2} \quad (2.93)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} a_E &= 10 \cdot \lg \frac{P_{20}}{P_2} \text{ dB} \\ &= 10 \cdot \lg \left[\left(\frac{U_S}{U_2} \right)^2 \cdot \frac{|Z_2|^2}{|R_S + Z_2|^2} \right] \text{ dB} \quad (2.94) \\ &= \left[20 \cdot \lg \frac{U_S}{U_2} + 20 \cdot \lg \frac{|Z_2|}{|R_S + Z_2|} \right] \text{ dB} \end{aligned}$$

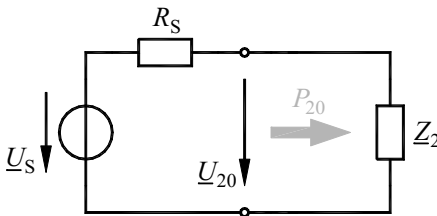


Bild 2-8 Zur Definition der Einfügungsdämpfung

Wie man sieht, unterscheiden sich die beiden Schaltungen darin, dass in Bild 2-7 das Zweitor *eingefügt* wurde, daher der Name. Für die messtechnische Ermittlung der Dämpfung ist diese Definition ungünstig, da zwei Messungen erforderlich sind, und die Schaltung dazwischen umgebaut werden muss. Von besonderer praktischer Bedeutung ist der Fall, dass Verbraucher und Innenwiderstand den gleichen Wert haben, und dieser reell ist. Man spricht dann von der *Systemimpedanz*

$$R_0 := R_S = Z_2 \quad (2.95)$$

Dann folgt

$$a_E = 20 \cdot \lg \frac{U_S}{2U_2} \text{ dB} \quad . \quad (2.96)$$

- (ii) Die *Betriebsdämpfung* : Hier bildet die maximal verfügbare Leistung der Quelle den Bezugswert. Diese wird bekanntlich im *Anpassungsfall* abgegeben, also dann, wenn die reale Quelle mit ihrem Innenwiderstand belastet ist. Hierzu wäre in Bild 2-8 Z_2 durch R_S zu ersetzen. Bei komplexer Innenimpedanz Z_S ist Anpassung dadurch gekennzeichnet, dass die Quelle mit dem konjugiert komplexen Wert Z_S^* beschaltet wird. Hierbei ergibt sich die maximal verfügbare Wirkleistung der Quelle. Da im vorliegenden Fall aber mit Scheinleistungen zu arbeiten ist, wäre es falsch, diesen Wert anzusetzen. Deshalb ist es zweckmäßig, sich auf reelle Quellimpedanzen zu beschränken. Für uns folgt

$$P_0 := P_{\max} = \frac{U_S^2}{4R_S} \quad (2.97)$$

und

$$\begin{aligned} a_B &= 10 \cdot \lg \frac{P_0}{P_2} \text{ dB} \\ &= 10 \cdot \lg \left[\frac{U_S^2}{4R_S} \cdot \frac{|Z_2|}{U_2^2} \right] \text{ dB} \quad . \\ &= \left[20 \cdot \lg \frac{U_S}{2U_2} + 10 \cdot \lg \frac{|Z_2|}{R_S} \right] \text{ dB} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Bei Kenntnis der Quelle kann a_B demnach allein durch Messung von P_2 bestimmt werden. Der Sonderfall $Z_2 = R_S$ liefert hier das gleiche Ergebnis wie für die Einfügungsdämpfung.

$$a_B = 20 \cdot \lg \frac{U_S}{2U_2} \text{ dB} \quad . \quad (2.99)$$

Ein gängiges Messgerät des Hochfrequenztechnikern ist der *Network Analyzer* ; er stellt das Übertragungsverhalten eines Zweitors als Frequenzgang dar und ermittelt konstruktionsbedingt die Betriebsdämpfung.

- (iii) Die *Wellendämpfung* : Sie ergibt sich ganz einfach dadurch, dass man die Scheinleistungen an Primär- und Sekundärseite des Zweitors ins Verhältnis setzt.

$$a_W = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} \quad (2.100)$$

Diese Definition ist durch ein spezielles Bauteil der Hochfrequenztechnik motiviert, den sogenannten *Richtkoppler* . Seine Wirkungsweise besteht darin, einen kleinen, aber definierten Teil eines Leistungsflusses zu einem dritten Tor hin auszukoppeln. Versieht man Primär- und Sekundärseite des Zweitors mit identischen Richtkopplern und führt man die ausgekoppelten Signale geeigneten Messgeräten zu, so kann man aus deren Anzeigen auf das interessierende Leistungsverhältnis schließen. Die Messanordnung ist schematisch in Bild 2-9 dargestellt. Das Verfahren wird in Abschnitt 4.3.2 genau beschrieben.

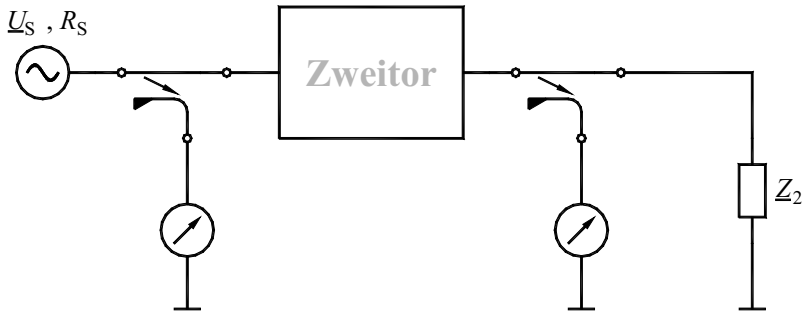


Bild 2-9 Anordnung zur Messung der Wellendämpfung mit Richtkopplern

Gleichung (2.100) lässt sich folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 a_W &= 10 \cdot \lg \left[\frac{U_1^2}{|Z_1|} \cdot \frac{|Z_2|}{U_2^2} \right] \text{dB} \\
 &= \left[20 \cdot \lg \frac{U_1}{U_2} + 10 \cdot \lg \frac{|Z_2|}{|Z_1|} \right] \text{dB}
 \end{aligned} \quad (2.101)$$

Im Spezialfall $Z_1 = Z_2 = R_S$ wird

$$U_1 = \frac{U_S}{2} \quad (2.102)$$

und somit

$$a_W = 20 \cdot \lg \frac{U_S}{2U_2} \text{dB} = a_E = a_B \quad \Leftarrow \quad Z_1 = Z_2 = R_S \quad (2.103)$$

In diesem für die praktische Anwendung äußerst wichtigen Fall ist also keine Unterscheidung zwischen Einfügungsdämpfung, Betriebsdämpfung und Wellendämpfung erforderlich.

2.3.3 Die wichtigsten Pegelmaße

Häufig besteht der Wunsch, nicht nur Verhältnisse, sondern die physikalischen Größen Leistung und Spannung selbst im logarithmischen Maß darzustellen [8]. Dazu wird die jeweilige Größe durch einen Bezugswert dividiert, man sagt normiert. Die resultierende Zahl wird logarithmiert und mit 10 oder 20 multipliziert, je nachdem, ob es sich um eine Leistung oder um eine Spannung handelt. Dahinter schreibt man dB und den Bezugswert, womit die Entstehung wieder eindeutig dokumentiert ist. Der so entstandene Ausdruck heißt *Leistungspegel* bzw. *Spannungspegel* oder nur kurz *Pegel*. Auf diese Weise kann auch ein Strompegel eingeführt werden. Pegel werden im Folgenden mit p symbolisiert, ein Index sorgt für genauere Identifikation. Als Bezugswert könnte generell die Grundeinheit herangezogen werden, das ist aber nicht immer sinnvoll. Vielmehr ist es vorteilhaft, den Bezug der jeweiligen Applikation anzupassen, also in der Größenordnung der zu erwartenden Werte zu wählen. Machen wir Beispiele:

(i) Der Leistung

$$P = 0,4 \text{ W} \quad (2.104)$$

kann ein Leistungspegel

$$p_P = 10 \cdot \lg \frac{0,4 \text{ W}}{1 \text{ W}} \text{ dBW} = -3,98 \text{ dBW} \quad (2.105)$$

zugeordnet werden (dBW ist „de-Be-Watt“ auszusprechen). Der Index P bringt zum Ausdruck, dass es sich um einen Leistungspegel handelt, aus diesem Grund musste der Logarithmus mit 10 multipliziert werden. Hinter das dB-Symbol wird W geschrieben, da auf 1W normiert wurde.

(ii) Der Effektivwert der Spannung an einer Antenne beträgt

$$U = 23 \mu\text{V} \quad (2.106)$$

Bei diesem sehr kleinen Wert ist es nicht zweckmäßig, auf die Grundeinheit 1V zu beziehen, man schreibt besser

$$p_U = 20 \cdot \lg \frac{23 \mu\text{V}}{1 \mu\text{V}} \text{ dB}\mu\text{V} = 27,2 \text{ dB}\mu\text{V} \quad (2.107)$$

Hier wurde mit 20 multipliziert, da es sich um einen Spannungspegel handelt.

Die Pegelmaße sind aus der Praxis entstanden, deshalb wird gelegentlich gegen die soeben beschriebenen Regeln verstoßen. Unglücklicherweise geschah das gerade bei *den* Pegeln, die am häufigsten verwendet werden. Diese Ausnahmen werden im Folgenden behandelt.

- (i) Der Leistungspegel dBm : In der Nachrichten- und Kommunikationstechnik wird gewöhnlich mit recht kleinen Leistungen hantiert, weshalb es zweckmäßig ist, auf 1mW zu beziehen. Der Pegel müsste dann mit dBmW bezeichnet werden. Es hat sich aber eingebürgert, das W zu unterschlagen und kurz dBm zu schreiben. Die Definition lautet also

$$p_P = 10 \cdot \lg \frac{P}{\text{mW}} \text{ dBm} \quad (2.108)$$

dBm ist das am häufigsten verwendete Pegelmaß überhaupt.

- (ii) Der Spannungspegel dB : Das Kürzel dB wurde zunächst für ein Übertragungsmaß eingeführt, es wird aber auch ohne weiteren Zusatz zur Kennzeichnung eines bestimmten Spannungspegels verwendet. Was im Einzelfall gemeint ist, muss man dem Zusammenhang entnehmen. Die Definition lautet

$$p_U = 20 \cdot \lg \frac{U}{775 \text{ mV}} \text{ dB} \quad (2.109)$$

775mV ist die Spannung, die an einem Widerstand von 600Ω eine Leistung von 1mW hervorruft. 600Ω ist der Wellenwiderstand der klassischen Telefon-Freileitung (über Holzpfeiler gespannte Drähte mit Porzellan-Isolatoren) und war damit früher die Systemimpedanz des Telefonnetzes. Wie man sich denken kann, sind bei Verwendung des dB als Spannungspegel Verwirrungen und Missverständnisse jeglicher Art vorprogrammiert. Im Gegenzug wird heute manchmal dB775mV oder dB0,775V geschrieben, was zwar umständlich, aber im Sinne der anfangs eingeführten Regeln korrekt und somit unmissverständlich ist. Die Veranstaltungstechniker schreiben hier dBu statt dB.

- (iii) Der *Geräuschpegel* dB(A) : Er dient zur Beschreibung von Lautstärke und eignet sich somit zur quantitativen Charakterisierung von Lärm. Die Verwendung eines logarithmischen Maßes hierfür bietet sich an, da der Mensch logarithmisch empfindet. Als Bezugsgröße wird die Hörschwelle verwendet. Der in Klammern gesetzte Buchstabe A bringt zum Ausdruck, dass das aus dem Schall gebildete elektrische Signal vor der Messung seines Effektivwerts ein sogenanntes *A-Bewertungsfilter* durchläuft. Dieses bildet die menschliche Hörkurve nach, also den Frequenzgang unseres Gehörs. Erst nach dieser Filterung ist der gewonnene Messwert aussagekräftig im Sinne einer empfundenen Lautstärke. A muss in Klammern gesetzt werden, weil es nicht der Bezugswert ist, man würde sonst an einen Strompegel dB-Ampere denken. Bild 2-10 zeigt den Betragsfrequenzgang des A-Bewertungsfilters, der zugleich als Hörkurve interpretiert werden darf. Der Telefonkanal (300Hz ... 3,4kHz) ist markiert. Dies ist genau der zum Erkennen menschlicher Sprache relevante Spektralbereich. Wie man sieht, liegt hier zugleich die größte Empfindlichkeit des Gehörs. Sprach- und Hörorgan haben sich evolutionär einander angepasst, weil die Kommunikation zu allen Zeiten ein äußerst wichtiges Hilfsmittel des Menschen war.

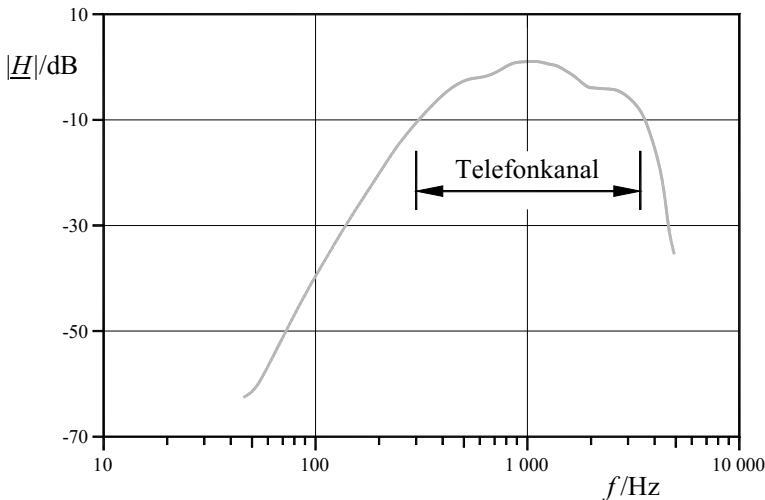


Bild 2-10 Betragsfrequenzgang des A-Bewertungsfilters

Die mit einem gegebenen Pegel korrespondierende physikalisch GröÙe berechnet man wie gehabt durch Umkehrung der Bestimmungsgleichung. So ergibt sich etwa die durch einen Leistungspegel in dBm beschriebene Leistung oder die durch einen Spannungspegel in dB beschriebene Spannung gemäß

$$\begin{aligned} P &= 1\text{mW} \cdot 10^{P_P / 10\text{dBm}} \\ U &= 775\text{mV} \cdot 10^{P_U / 20\text{dB}} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Pegelunterschiede werden in dB angegeben, nicht als Differenz der Pegel in ihren Einheiten. Somit ist eine saubere Formulierung im Sinne physikalischer Größengleichungen nicht möglich. Dies wird an Beispielen erläutert.

- (i) Der Leistungspegel am Eingang eines Verstärkers betrage -12dBm , der am Ausgang $+17\text{dBm}$. Korrekt könnte man schreiben

$$\Delta p_p = 17\text{dBm} - (-12\text{dBm}) = 29\text{dBm} \quad . \quad (2.111)$$

Dies ist aber nicht üblich, man sagt hingegen „die Verstärkung beträgt 29dB “. Diese Gepflogenheit ist insofern sinnvoll, als sich die gleiche Verstärkung bei Angabe des Pegels in einem anderen Maß ergeben würde, z. B. in dBW .

- (ii) Durch Einbau der *Flüsterbremse* könnte der Bahnlärm im Mittelrheintal um 12dB vermindert werden. Gemeint ist, dass der durch Güterzüge verursachte Lärm von 80dB(A) auf 68dB(A) herabgesetzt würde.

Der Nutzen der Pegelmaße besteht darin, dass sie leicht mit Übertragungsmaßen kombiniert werden können. Dies wurde mit den beiden letzten Beispielen verdeutlicht.

2.3.4 Beispiele

- (i) Der Eingangswiderstand eines Verstärkers beträgt $13\text{k}\Omega$. Am Ausgang speist er eine Last von 70Ω . Der Pegel am Eingang wird mit -12dBm angegeben, am Ausgang wurde eine Spannung von 18V gemessen (Effektivwert). Gesucht sind Spannungs- und Leistungsverstärkung in dB .

Aus dem gegebenen Eingangspegel lässt sich leicht die Eingangsleistung ermitteln.

$$P_E = 1\text{mW} \cdot 10^{-12\text{dBm}/10\text{dBm}} = 63,1\mu\text{W}$$

In Verbindung mit dem gegebenen Eingangswiderstand folgt daraus

$$U_E = \sqrt{P_E \cdot R_E} = 0,906\text{V} \quad .$$

Die Ausgangsleistung berechnet sich zu

$$P_A = \frac{U_A^2}{R_A} = 4,63\text{W} \quad .$$

Damit können die gesuchten Verstärkungen angegeben werden:

$$V_U = 20 \cdot \lg \frac{U_A}{U_E} \text{dB} = 26,0\text{dB}$$

$$V_P = 10 \cdot \lg \frac{P_A}{P_E} \text{dB} = 48,7\text{dB}$$

Bildet man formal das logarithmierte Widerstandsverhältnis, so ergibt sich

$$V_R = 10 \cdot \lg \frac{R_E}{R_A} \text{dB} = 22,7\text{dB} \quad ,$$

und das ist nicht per Zufall die Differenz aus Leistungs- und Spannungsverstärkung. Wenn der Verstärker zwischen identischen Widerständen betrieben wird, unterscheiden sich Spannungs- und Leistungsverstärkung nicht.

- (ii) Die Frontplatte eines *Power Meters* trägt neben der Eingangsbuchse die Aufschrift **50 Ω** . Dies bedeutet, dass das Gerät einen Eingangswiderstand von 50Ω besitzt und somit

in einem 50Ω -System einen Abschluss bildet. Die Anzeige ist umschaltbar, der Messwert kann in dBm, dB, dBV, dB μ V oder in V angezeigt werden. Gesucht sind die Anzeigen in den unterschiedlichen Pegelmaßen, die sich bei Anlegen einer Spannung von 5,8V (effektiv) einstellen würden.

Die Angabe des Eingangswiderstands führt sofort auf die dem Gerät zugeführte Leistung:

$$P = \frac{(5,8\text{ V})^2}{50\Omega} = 673\text{ mW}$$

Nun ist die Angabe der verschiedenen Pegel kein Problem mehr.

$$p_P = 10 \cdot \lg \frac{673\text{ mW}}{1\text{ mW}} \text{ dBm} = 28,3\text{ dBm}$$

$$p_U = 20 \cdot \lg \frac{5,8\text{ V}}{775\text{ mV}} \text{ dB} = 17,5\text{ dB}$$

$$= 20 \cdot \lg \frac{5,8\text{ V}}{1\text{ V}} \text{ dBV} = 15,3\text{ dBV}$$

$$= 20 \cdot \lg \frac{5,8\text{ V}}{1\mu\text{V}} \text{ dB}\mu\text{B} = 135,3\text{ dB}\mu\text{B}$$

Erwartungsgemäß unterscheidet sich der Wert in dB μ V von dem in dBV um genau 120dB (6 Zehnerpotenzen der Spannung).

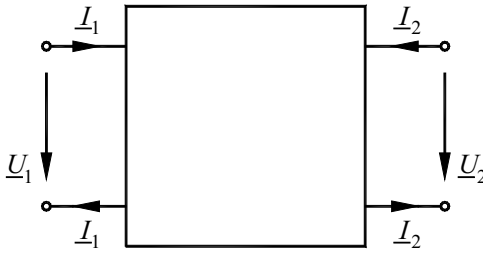
2.4 Zweitortheorie

2.4.1 Einführung

Systeme der Elektrotechnik lassen sich oft in separat zu beschreibende Schaltungsgruppen zerlegen. Besonders häufig bietet sich die Aufteilung in Vierpole an, also Netzwerke, die über genau vier Kontaktstellen mit ihrer Umgebung in Verbindung treten. Fasst man zusätzlich je zwei Pole zu einem Tor zusammen, entsteht ein Zweitor. Für jedes Tor wird eine Spannung definiert sowie ein Strom, der über einen Pol in das Zweitor fließt und es über den anderen wieder verlässt. Die zuletzt genannte Bedingung hat zur Folge, dass Zweitore nicht in beliebiger Weise miteinander verschaltet werden dürfen. Die Tore werden *Primär-* und *Sekundärseite* oder *Eingang* und *Ausgang* genannt. Beispiele für elektrische Zweitore sind

- * Leitungen unterschiedlichster Art,
- * Filter und Entzerrer,
- * Verstärker,
- * Übertrager und Transformatoren.

Bild 2-11 zeigt schematisch ein Zweitor mit äußeren elektrischen Größen, die durch komplexe Zeiger beschrieben sind. Es ist in irgendeiner Weise aus passiven und aktiven Elementen aufgebaut. Ziel der folgenden Überlegungen ist eine möglichst kompakte Beschreibung des äußeren Verhaltens solcher Zweitore.

**Bild 2-11** Elektrisches Zweitor

2.4.2 Die Impedanzmatrix

Betrachtet man die Ströme als Ursachen und die Spannungen als Wirkungen darauf, ergibt sich folgende Darstellung [9]:

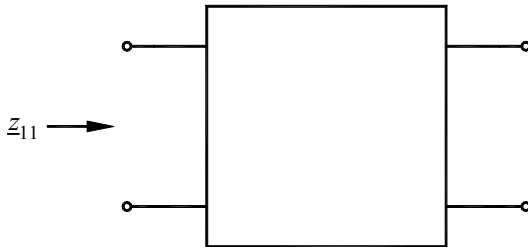
$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= z_{11}\underline{I}_1 + z_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= z_{21}\underline{I}_1 + z_{22}\underline{I}_2\end{aligned}\quad (2.112)$$

Dieses Gleichungspaar lässt sich in Matrixschreibweise darstellen, indem man Spannungen und Ströme zu je einem Vektor und die Koeffizienten $z_{\mu\nu}$ - die *z-Parameter* - zu einer Matrix zusammenfasst. Damit folgt

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}\quad (2.113)$$

oder kompakt

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (2.114)$$

**Bild 2-12** Zur Bestimmung von z_{11}

(2.114) kann als Erweiterung des OHMSchen Gesetzes interpretiert werden. Die Betrachtung der Spannungen als Wirkungen auf die Ströme ist nicht immer korrekt. Bei einem idealen Übertrager gibt es beispielsweise keinen Zusammenhang zwischen Strömen und Spannungen. Zu derartigen Zweitoren kann keine Impedanzmatrix angegeben werden. Diese Eigenschaft äußert sich bei der Analyse darin, dass an irgendeiner Stelle durch Null dividiert wird.

Das Gleichungspaar (2.112) liefert Regeln zur Berechnung der $z_{\mu\nu}$. So ergibt sich z_{11} als Quotient aus \underline{U}_1 und \underline{I}_1 unter der Bedingung, dass \underline{I}_2 verschwindet, was durch Betrieb der Sekundärseite im Leerlauf erzwungen werden kann. z_{11} ist demnach die Primärimpedanz bei sekundärem Leerlauf, siehe Bild 2-12. Auf diese Weise lassen sich Bestimmungsgleichungen für alle *z-Parameter* angeben:

$$\begin{aligned}
 \underline{z}_{11} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} & \underline{z}_{12} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} \\
 \underline{z}_{21} &= \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right|_{\underline{I}_2=0} & \underline{z}_{22} &= \left. \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right|_{\underline{I}_1=0}
 \end{aligned}
 \tag{2.115}$$

Die Gleichungen für die Außerdiagonalelemente \underline{z}_{12} und \underline{z}_{21} bedürfen noch einer Erläuterung. \underline{z}_{12} ergibt sich demnach aus der Spannung, die sich an der leerlaufenden Primärseite einstellt, wenn sekundär ein Strom in das Zweitor eingespeist wird. Bild 2-13 veranschaulicht diesen Zusammenhang. \underline{z}_{21} berechnet sich analog. Der Gleichungssatz (2.115) eignet sich nicht nur zur Berechnung der z-Parameter, sondern er liefert auch Vorschriften zu ihrer Messung.

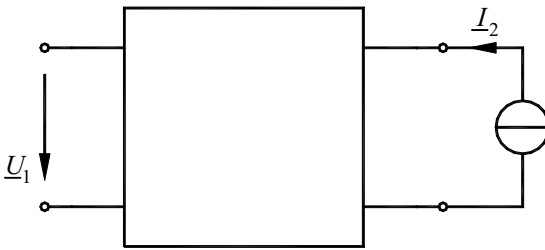


Bild 2-13 Zur Bestimmung von \underline{z}_{12}

Es folgt ein Beispiel: Wir betrachten das einfache passive Zweitor nach Bild 2-14. Primärimpedanz bei sekundärem Leerlauf sowie Sekundärimpedanz bei primärem Leerlauf sind, wie man sofort sieht

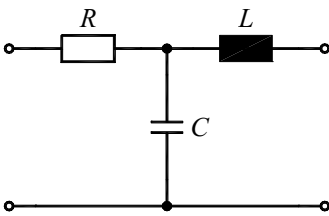


Bild 2-14 Passives Zweitor

$$\underline{z}_{11} = R + \frac{1}{j\omega C} \quad \underline{z}_{22} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

Zur Bestimmung von \underline{z}_{12} muss das Zweitor gemäß Bild 2-15 betrieben werden. Der primäre Leerlauf hat zur Folge:

- * Der Strom \underline{I}_2 schließt sich über L und C .
- * Am Widerstand R fällt keine Spannung ab.
- * Die Primärspannung \underline{U}_1 ist der Spannung an der Kapazität C gleich.

Also folgt

$$\underline{z}_{12} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{I}_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{\underline{I}_2} = \frac{1}{j\omega C} \quad .$$

Völlig analog erhält man

$$\underline{z}_{21} = \frac{1}{j\omega C} \quad .$$

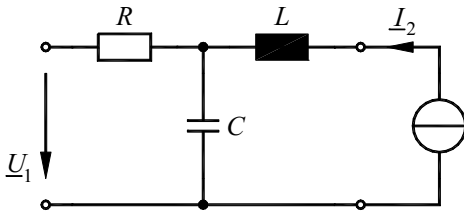


Bild 2-15 Zur Bestimmung von \underline{z}_{12}

Die Ergebnisse werden zusammengefasst:

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

Wie man sieht, ist die Impedanzmatrix symmetrisch. Dies ist kein Zufall, sondern Folge eines Lehrsatzes, der hier ohne Beweis angegeben wird:

Die Impedanzmatrix eines reziproken Zweitores ist symmetrisch.

Passive Zweitore sind reziprok.

Bild 2-16 zeigt eine Zusammenschaltung von Zweitoren. Sowohl Primär- als auch Sekundärseite haben einen gemeinsamen Strom. Es handelt sich also um eine *Reihenschaltung*. Wir interessieren uns für die Impedanzmatrix $\underline{\mathbf{Z}}$ des resultierenden Zweitores. Aus

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(1)} \\ \underline{U}_2^{(1)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(2)} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (2.117)$$

folgt mit

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_1^{(1)} + \underline{U}_1^{(2)} \quad , \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_2^{(1)} + \underline{U}_2^{(2)} \quad (2.118)$$

für die Zusammenschaltung

$$\underline{\mathbf{Z}} = \underline{\mathbf{Z}}^{(1)} + \underline{\mathbf{Z}}^{(2)} \quad . \quad (2.119)$$

Demnach addieren sich die Impedanzmatrizen in Reihe geschalteter Zweitore. Man kann formal genauso vorgehen wie bei der Reihenschaltung von Widerständen.

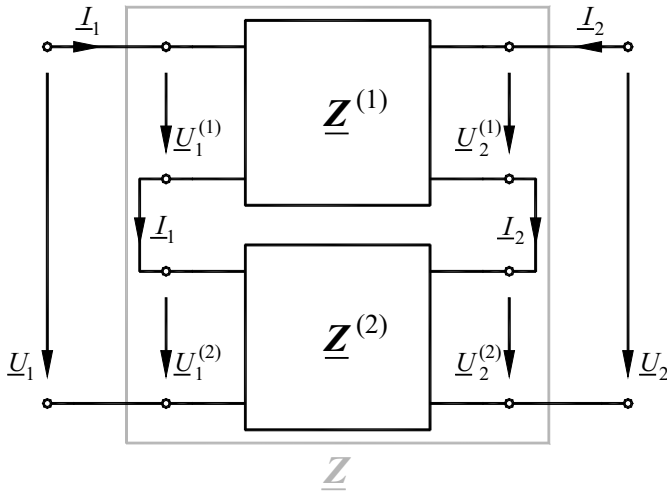


Bild 2-16 Reihenschaltung von Zweitoren

2.4.3 Die Admittanzmatrix

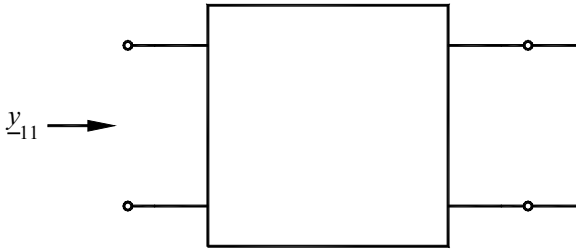
Wir betrachten nun die Spannungen als Ursachen und die Ströme als Wirkungen darauf und erhalten [9]

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \underline{y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{y}_{12}\underline{U}_2 \\
 \underline{I}_2 &= \underline{y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{y}_{22}\underline{U}_2 \\
 \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (2.120) \\
 \underline{I} &= \underline{Y} \cdot \underline{U}
 \end{aligned}$$

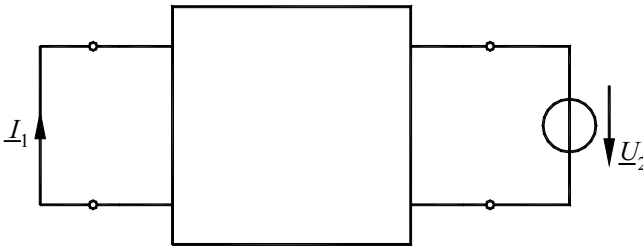
Hier kann man wieder Bestimmungsgleichungen für die y-Parameter und Vorschriften für ihre Messung entnehmen:

$$\begin{aligned}
 \underline{y}_{11} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} & \underline{y}_{12} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} \\
 \underline{y}_{21} &= \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right|_{\underline{U}_2=0} & \underline{y}_{22} &= \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{U}_1=0} \quad (2.121)
 \end{aligned}$$

Der Forderung $\underline{U}_v = 0$ trägt man durch einen Kurzschluss am betreffenden Tor Rechnung. Demnach ist \underline{y}_{11} die Primäradmittanz bei sekundärem Kurzschluss, siehe Bild 2-17.

**Bild 2-17** Zur Bestimmung von y_{11}

y_{12} berechnet sich aus dem Strom durch einen an der Primärseite angebrachten Kurzschluss, wenn zugleich an die Sekundärseite eine Spannung angelegt wird; analoges gilt für y_{21} , man vergleiche Bild 2-18. Nach diesen Vorschriften ergibt sich die Admittanzmatrix des Zweitors von Bild 2-14 zu

**Bild 2-18** Zur Bestimmung von y_{12}

$$\underline{Y} = \frac{1}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \begin{pmatrix} 1-\omega^2 LC & -1 \\ -1 & 1+j\omega RC \end{pmatrix} \quad (2.122)$$

Diese Admittanzmatrix ist symmetrisch. Das ist wieder kein Zufall sondern auch hier gilt allgemein:

Die Admittanzmatrix eines reziproken Zweitors ist symmetrisch.

Passive Zweitore sind reziprok.

Bild 2-19 zeigt eine Parallelschaltung von Zweitoren. Wegen

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_1^{(1)} + \underline{I}_1^{(2)} \quad , \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_2^{(1)} + \underline{I}_2^{(2)} \quad (2.123)$$

folgt für die Admittanzmatrix der Zusammenschaltung

$$\underline{Y} = \underline{Y}^{(1)} + \underline{Y}^{(2)} \quad . \quad (2.124)$$

Um einen Zusammenhang zwischen Impedanz- und Admittanzmatrix herzustellen, multiplizieren wir beide Seiten von (2.114) von links mit \underline{Y} .

$$\underline{Y} \cdot \underline{U} = \underline{Y} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad . \quad (2.125)$$

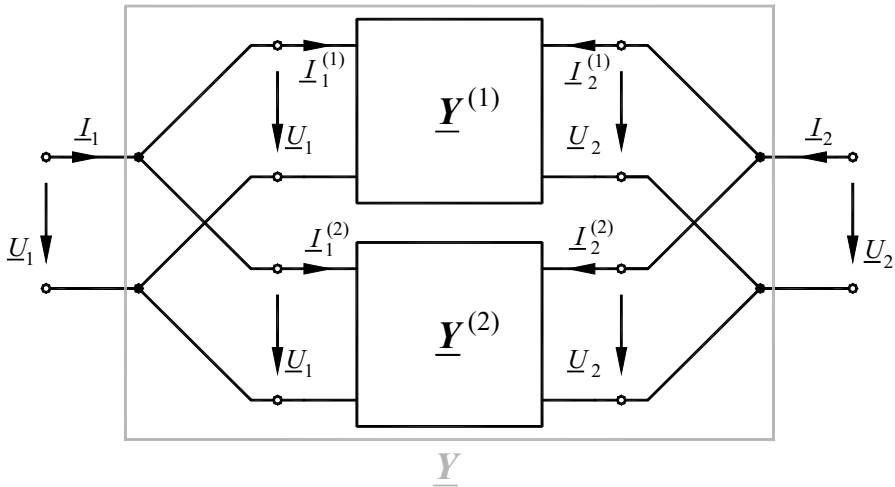


Bild 2-19 Parallelschaltung von Zweitoren

Ein Vergleich mit (2.120) führt auf

$$\underline{Y} \cdot \underline{Z} = \underline{E} \quad , \quad (2.126)$$

wobei mit \underline{E} die Einheitsmatrix gemeint ist. Impedanz- und Admittanzmatrix sind also zueinander invers.

$$\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} \quad \underline{Z} = \underline{Y}^{-1} \quad (2.127)$$

Es ist wieder einmal eine Verwandtschaft zur herkömmlichen Schaltungslehre erkennbar. Im Detail bedeutet das

$$\underline{Y} = \frac{1}{\det \underline{Z}} \begin{pmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{Z} = \frac{1}{\det \underline{Y}} \begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

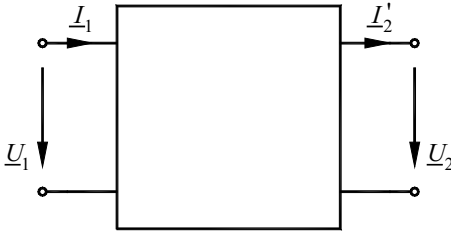
Daran erkennt man, dass die Admittanzmatrix nur dann existiert, wenn die Impedanzmatrix invertierbar ist, d.h. wenn ihre Determinante von Null verschieden ist, und umgekehrt. Es wird dem Leser empfohlen, das Resultat (2.126) an Hand des einfachen Beispiels von Bild 2-14 mit den Ergebnissen (2.116) und (2.122) zu verifizieren.

2.4.4 Die Kettenmatrix

Wir verwenden nun eine Beschreibung, bei der die elektrischen Größen in neuer Weise gepaart sind, und zwar fassen wir Strom und Spannung an je einem Tor zu einem Vektor zusammen [9]. Wegen einer speziellen Eigenschaft der Kettenmatrix empfiehlt es sich hier, den Sekundärstrom entgegengesetzt zu orientieren und mit dem Strom

$$\underline{I}_2' = -\underline{I}_2 \quad (2.129)$$

zu arbeiten (siehe Bild 2-20). Die Darstellung lautet dann

**Bild 2-20** Elektrische Größen zur Definition der Kettenmatrix

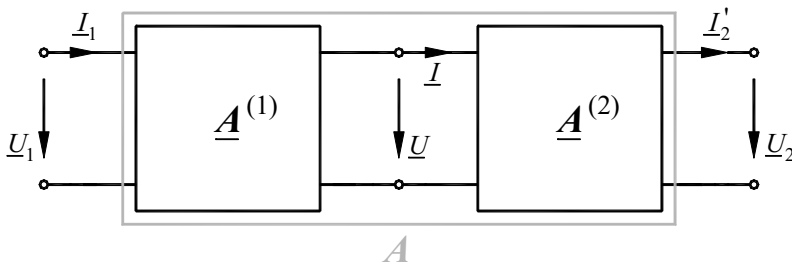
$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix}$$

Für die a-Parameter ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \underline{a}_{11} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2' = 0} & \underline{a}_{12} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2'} \right|_{\underline{U}_2 = 0} \\ \underline{a}_{21} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2' = 0} & \underline{a}_{22} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2'} \right|_{\underline{U}_2 = 0} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Sie können wie in den vorangegangenen Abschnitten interpretiert werden. \underline{a}_{11} ist das Spannungsverhältnis bei sekundärem Leerlauf, \underline{a}_{12} erhält man aus dem sekundären Kurzschlussstrom, wenn primär eine Spannung angelegt wird usw. Weiter ist zu erkennen, dass die a-Parameter unterschiedliche Dimensionen haben. \underline{a}_{11} und \underline{a}_{22} sind dimensionslos, \underline{a}_{12} hat die Dimension einer Impedanz, \underline{a}_{21} die einer Admittanz. Der Name Kettenmatrix rührt von einer besonderen Eigenschaft in Verbindung mit Kettenschaltungen von Zweitoren, siehe Bild 2-21. Wegen

**Bild 2-21** In Kette geschaltete Zweitore

$$\begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{pmatrix} = \underline{A}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{A}^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U} \\ \underline{I} \end{pmatrix} \quad (2.132)$$

wird

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underline{A}^{(1)} \cdot \underline{A}^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad (2.133)$$

also

$$\underline{A} = \underline{A}^{(1)} \cdot \underline{A}^{(2)} \quad (2.134)$$

Die Kettenmatrix einer Kettenschaltung ist das Produkt der einzelnen Kettenmatrizen. Die Matrizenmultiplikation ist bekanntlich nicht kommutativ. Die Reihenfolge der Matrizen $\underline{A}^{(1)}$ und $\underline{A}^{(2)}$ in (2.134) darf also nicht vertauscht werden. Dies trägt dem Umstand Rechnung, dass eine Vertauschung der Teilzweitore in Bild 2-21 gewöhnlich mit einem veränderten Verhalten der Zusammenschaltung einhergeht.

Ein Vergleich der Bestimmungsgleichungen für die a-Parameter (2.131) mit denen für die y- und die z-Parameter (2.121), (2.115) führt zunächst auf

$$\begin{aligned} \underline{a}_{11} &= \frac{\underline{z}_{11}}{\underline{z}_{21}} & \underline{a}_{12} &= -\frac{1}{\underline{y}_{21}} \\ \underline{a}_{21} &= \frac{1}{\underline{z}_{21}} & \underline{a}_{22} &= \frac{\underline{y}_{11}}{\underline{y}_{21}} \end{aligned} \quad (2.135)$$

Drückt man die hier enthaltenen y-Parameter noch mittels (2.128) durch z-Parameter aus, folgt

$$\underline{a}_{12} = \frac{\det \underline{Z}}{\underline{z}_{21}} \quad \underline{a}_{22} = \frac{\underline{z}_{22}}{\underline{z}_{21}}$$

zusammengefasst

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{z}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{z}_{11} & \det \underline{Z} \\ 1 & \underline{z}_{22} \end{pmatrix} \quad (2.136)$$

Somit ist eine Formel zur Umrechnung der Impedanzmatrix in die Kettenmatrix gefunden. Bedingung für die Existenz von \underline{A} ist demnach, dass der Parameter \underline{z}_{21} nicht verschwindet. Wir berechnen noch

$$\det \underline{A} = \frac{\underline{z}_{11}\underline{z}_{22} - (\underline{z}_{11}\underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}\underline{z}_{21})}{\underline{z}_{21}^2} = \frac{\underline{z}_{12}}{\underline{z}_{21}} \quad (2.137)$$

Reziproke Zweitore hatten eine symmetrische Impedanzmatrix, für diese folgt also

$$\det \underline{A} = 1 \quad (2.138)$$

Daraus wird ein für die praktische Anwendung wichtiger Lehrsatz formuliert:

Die Determinante der Kettenmatrix eines reziproken Zweitores hat den Wert 1.

Passive Zweitore sind reziprok.

Unter Ausnutzung dieser Eigenschaft ist es möglich, die Kettenmatrix eines reziproken Zweitorts auf der Basis von nur drei Messungen vollständig zu bestimmen. Das wird bei der Messung von Impedanzen und Reflexionsfaktoren ausgenutzt. Hier taucht das Problem auf, dass eine irgendwie vorhandene Anschalttechnik dem Prüfling zugeschlagen wird und das Messergebnis verfälscht. Dabei kann es sich um eine einfache Zuleitung handeln, eventuell auch um einen Übertrager. Man macht dann zunächst Messungen an drei bekannten Objekten, nämlich einem Kurzschluss, einem Leerlauf und einem definierten Widerstand, die in der Ebene des Prüflings angebracht werden. Mit Hilfe der Eigenschaft (2.138) lassen sich daraus alle Elemente der Kettenmatrix der Anschalttechnik ermitteln, und ihr Einfluss kann vollständig rechnerisch eliminiert werden. Das Aufnehmen der Referenzmessungen wird *Normalisierung* genannt, die Referenzelemente heißen zusammen *Calibration Kit*. Da Reziprozität vorausgesetzt wurde, funktioniert diese Methode nicht bei aktiver Anschalttechnik, beispielsweise einem aktiven Tastkopf.

2.4.4 Weitere Darstellungen

In Verbindung mit Transistorschaltungen wird gerne die sogenannte *Hybridmatrix* verwendet [9]. Hybrid bedeutet in diesem Zusammenhang *von zweierlei Herkunft*. Es wird je eine Spannung mit je einem Strom und je eine Primärgröße mit je einer der Sekundärgröße zu einem Vektor zusammengefasst. Die Darstellung bekommt damit die Form

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{H} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

Bild 2-22 zeigt einen Transistor in Emitterschaltung, der dadurch zum Zweitor wird. Dessen Hybridmatrix liefert die *h-Parameter* des Transistors. h_{21} bezeichnet beispielsweise die Stromverstärkung.

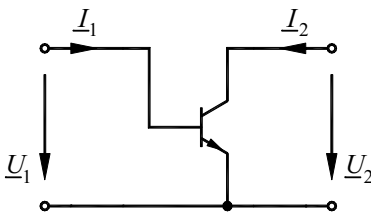


Bild 2-22 Transistor in Emitterschaltung

Mit der inversen Kettenmatrix \underline{B} , und der Parallelreihenmatrix \underline{G} , die zur Hybridmatrix invers ist, ergeben sich zwei weitere Darstellungsmöglichkeiten. Diese werden aber eher selten verwendet.

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \underline{B} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} \quad (2.140)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \underline{G} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

Damit gibt es insgesamt sechs Varianten zur Beschreibung eines Zweitors. Mindestens eine davon existiert für jedes denkbare elektrische Zweitor.

2.4.5 Umrechnungsformeln

In den Tabellen 2.4 und 2.5 sind alle Umrechnungsformeln der Zweitordarstellungen zusammengefasst [9].

Tabelle 2.4 Umrechnungsformeln für die Zweitordarstellungen, Teil 1

	<u>Z</u>	<u>Y</u>	<u>A</u>
<u>Z</u>	$\begin{pmatrix} \underline{z}_{11} & \underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \underline{z}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{Y}} \begin{pmatrix} \underline{y}_{22} & -\underline{y}_{12} \\ -\underline{y}_{21} & \underline{y}_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{a}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \det \underline{A} \\ 1 & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}$
<u>Y</u>	$\frac{1}{\det \underline{Z}} \begin{pmatrix} \underline{z}_{22} & -\underline{z}_{12} \\ -\underline{z}_{21} & \underline{z}_{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{y}_{11} & \underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \underline{y}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{a}_{12}} \begin{pmatrix} \underline{a}_{22} & -\det \underline{A} \\ -1 & \underline{a}_{11} \end{pmatrix}$
<u>A</u>	$\frac{1}{\underline{z}_{21}} \begin{pmatrix} \underline{z}_{11} & \det \underline{Z} \\ 1 & \underline{z}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{y}_{21}} \begin{pmatrix} -\underline{y}_{22} & -1 \\ -\det \underline{Y} & -\underline{y}_{11} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}$
<u>H</u>	$\frac{1}{\underline{z}_{22}} \begin{pmatrix} \det \underline{Z} & \underline{z}_{12} \\ -\underline{z}_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{y}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{y}_{12} \\ \underline{y}_{21} & \Delta \underline{Y} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{a}_{22}} \begin{pmatrix} \underline{a}_{12} & \det \underline{A} \\ -1 & \underline{a}_{21} \end{pmatrix}$
<u>B</u>	$\frac{1}{\underline{z}_{12}} \begin{pmatrix} \underline{z}_{22} & -\det \underline{Z} \\ -1 & \underline{z}_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{y}_{12}} \begin{pmatrix} -\underline{y}_{11} & 1 \\ \det \underline{Y} & -\underline{y}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{A}} \begin{pmatrix} \underline{a}_{22} & -\underline{a}_{12} \\ -\underline{a}_{21} & \underline{a}_{11} \end{pmatrix}$
<u>G</u>	$\frac{1}{\underline{z}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{z}_{12} \\ \underline{z}_{21} & \det \underline{Z} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{y}_{22}} \begin{pmatrix} \det \underline{Y} & \underline{y}_{12} \\ -\underline{y}_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{a}_{11}} \begin{pmatrix} \underline{a}_{21} & -\det \underline{A} \\ 1 & \underline{a}_{12} \end{pmatrix}$

Tabelle 2.5 Umrechnungsformeln für die Zweitordarstellungen, Teil 2

	<u>H</u>	<u>B</u>	<u>G</u>
<u>Z</u>	$\frac{1}{\underline{h}_{22}} \begin{pmatrix} \det \underline{H} & \underline{h}_{12} \\ -\underline{h}_{21} & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{b}_{21}} \begin{pmatrix} -\underline{b}_{22} & -1 \\ -\det \underline{B} & -\underline{b}_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{g}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \det \underline{G} \end{pmatrix}$
<u>Y</u>	$\frac{1}{\underline{h}_{11}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \det \underline{H} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{b}_{12}} \begin{pmatrix} -\underline{b}_{11} & 1 \\ \det \underline{B} & -\underline{b}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{g}_{22}} \begin{pmatrix} \det \underline{G} & \underline{g}_{12} \\ -\underline{g}_{21} & 1 \end{pmatrix}$
<u>A</u>	$\frac{1}{\underline{h}_{21}} \begin{pmatrix} -\det \underline{H} & -\underline{h}_{11} \\ -\underline{h}_{22} & -1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{B}} \begin{pmatrix} \underline{b}_{22} & -\underline{b}_{12} \\ -\underline{b}_{21} & \underline{b}_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{g}_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \underline{g}_{22} \\ \underline{g}_{11} & \det \underline{G} \end{pmatrix}$
<u>H</u>	$\begin{pmatrix} \underline{h}_{11} & \underline{h}_{12} \\ \underline{h}_{21} & \underline{h}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{b}_{11}} \begin{pmatrix} -\underline{b}_{12} & 1 \\ -\det \underline{B} & -\underline{b}_{21} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{G}} \begin{pmatrix} \underline{g}_{22} & -\underline{g}_{12} \\ -\underline{g}_{21} & \underline{g}_{11} \end{pmatrix}$
<u>B</u>	$\frac{1}{\underline{h}_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -\underline{h}_{11} \\ -\underline{h}_{22} & \det \underline{H} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{b}_{11} & \underline{b}_{12} \\ \underline{b}_{21} & \underline{b}_{22} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{g}_{12}} \begin{pmatrix} -\det \underline{G} & \underline{g}_{22} \\ \underline{g}_{11} & -1 \end{pmatrix}$
<u>G</u>	$\frac{1}{\det \underline{H}} \begin{pmatrix} \underline{h}_{22} & -\underline{h}_{12} \\ -\underline{h}_{21} & \underline{h}_{11} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\underline{b}_{22}} \begin{pmatrix} -\underline{b}_{21} & -1 \\ \det \underline{B} & -\underline{b}_{12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \underline{g}_{11} & \underline{g}_{12} \\ \underline{g}_{21} & \underline{g}_{22} \end{pmatrix}$

2.5 Unerwünschte Effekte der Kommunikationstechnik

2.5.1 Rauschen in elektronischen Schaltungen

Jeder elektrische Leiter rauscht, vorausgesetzt seine Temperatur liegt über dem absoluten Nullpunkt. Zwischen seinen Polen ist eine kleine Spannung mit regellosem Verlauf nachweisbar. Der Name rührt daher, dass sich derartige Signale akustisch wie Meeresrauschen anhören. Das Rauschsignal überlagert sich einem Nutzsignal und verdirbt dieses mehr oder weniger stark. Dieser Effekt ist bei schwachem Nutzsignal besonders störend - etwa dem Empfangssignal an einer Antenne. Das Rauschen hat verschiedene Ursachen, von besonderer Bedeutung und hier von alleinigem Interesse ist das *thermische Rauschen*. Die beweglichen Ladungen im Leiter - bei metallischen Leitern sind das die Valenzelektronen - führen auf Grund der thermischen Aktivität regellose Bewegungen aus. Damit kommt es in Summe zu einem mehr oder weniger großen Ladungsüberschuss auf der einen oder der anderen Seite des Leiters, welcher sich in Form einer elektrischen Spannung äußert. Ihr Verlauf ist wie die Bewegung der unzähligen Teilchen im Leiter regellos. Derartige Signale nennt man *stochastisch* oder *nicht deterministisch*, wodurch ausgedrückt wird, dass es sich um Zufallsprozesse handelt, die nicht detailliert berechnet werden können. In Bild 2-23 ist der typische Zeitverlauf eines Rauschsignals dargestellt. Es ist keinerlei Periodizität oder sonstige Gesetzmäßigkeit zu erkennen.

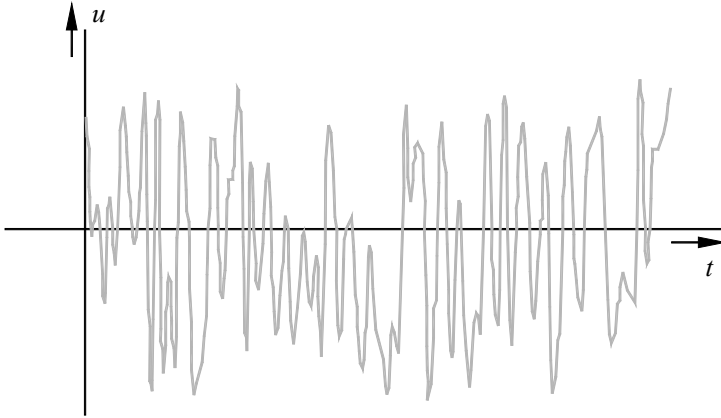


Bild 2-23 Typischer Verlauf eines Rauschsignals

Obwohl nicht deterministisch lässt sich das Rauschen wie alle Zufallsprozesse durch eine ganze Reihe von Kenngrößen charakterisieren. Der Effektivwert des thermischen Rauschens an einem Widerstand berechnet sich zu

$$U = 2 \cdot \sqrt{kTR \cdot \Delta f} \quad . \quad (2.141)$$

Hierbei ist k die sogenannte *BOLTZMANN-Konstante*, eine Naturkonstante mit dem Wert

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Ws}}{\text{K}} \quad , \quad (2.142)$$

T die absolute Temperatur, R der Widerstandswert und Δf die betrachtete Bandbreite des Signals. Hieran erkennt man, dass sich das Rauschen durch Bandpassfilterung reduzieren lässt.

Eine weitere wichtige Kenngröße ist der sogenannte *Crest-Faktor*, er bezeichnet das Verhältnis vom betragsmäßig größten vorkommenden Signalwert zum Effektivwert.

$$FC = \frac{|u|_{\max}}{U} \quad . \quad (2.143)$$

Damit kann beurteilt werden, ob ein Rauschsignal in der Lage ist, bestimmte Schaltschwellen zu überschreiten, was beispielsweise in der Digitaltechnik zu Bitfehlern führen kann.

Häufig ist eine Beschreibung der spektralen Eigenschaften von Rauschsignalen erwünscht, weil man damit abschätzen kann, in welchem Maß bestimmte Dienste gestört werden. Die Mathematik hält diverse Werkzeuge zur Ermittlung des Spektrums einer Zeitfunktion parat. Periodische Funktionen können in eine sogenannte *FOURIER-Reihe* entwickelt werden, eine Summe aus Teilschwingungen unterschiedlicher Frequenzen. Da das Rauschen nicht periodisch ist, kommt diese Methode nicht in Betracht. Weiter gibt es die gemäß

$$\underline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad . \quad (2.144)$$

definierte *FOURIER-Transformation*. Das uneigentliche Integral ⁸ in (2.144) konvergiert unter der Voraussetzung, dass das Integral über den Betrag der Funktion selbst endlich ist.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (2.145)$$

Solche Funktionen nennt man *absolut integrierbar*. Die Bedingung (2.145) ist in jedem Fall für zeitlich begrenzte Signale erfüllt. Somit kann man beispielsweise einem einzelnen Rechteckimpuls eine spektrale Verteilung zuordnen, was eine völlig neue Perspektive auf das Zeitsignal eröffnet. Für Rauschsignale ist (2.145) nicht erfüllt, weshalb diese Methode wieder ausfällt. Es bleibt schließlich noch die sogenannte *spektrale Leistungsdichte* $S(f)$. Sie hat folgende Eigenschaften:

- * $S(f)$ erlaubt die Berechnung einer Leistung.
- * $S(f)$ ist ein Betrag und somit reell und nichtnegativ.
- * Ein rechnerischer Rückschluss auf das zu Grunde liegende Zeitsignal ist nicht möglich.
- * $S(f)$ kann mit dem *Spectrum Analyzer* gemessen werden, wobei dessen Anzeige mit dem eingestellten Messfilter zu bewerten ist. Manche behaupten, die spektrale Leistungsdichte sei das, was der Spectrum Analyzer misst. Diese Aussage ist mathematisch nicht ganz korrekt, aber auch nicht grundsätzlich verkehrt.
- * $S(f)$ wird beim Durchlaufen eines Systems mit definiertem Frequenzgang - etwa einem Filter - gemäß dessen Betragsfrequenzgang bewertet.

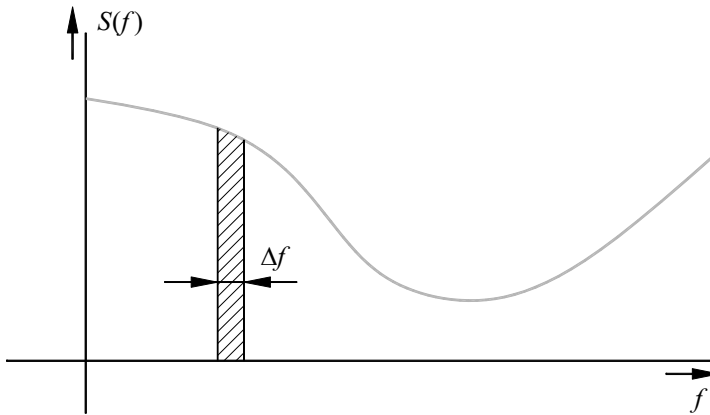


Bild 2-24 Zur Interpretation der spektralen Leistungsdichte $S(f)$

Die spektrale Leistungsdichte lässt sich mit Hilfe von Bild 2-24 interpretieren. Das Integral über ein Frequenzintervall Δf ergibt genau *die* Leistung, die ein idealer Bandpass dieser Breite durchlassen würde. Dieses ist durch die schraffierte Fläche markiert.

⁸ Ein Integral heißt *uneigentlich*, wenn über eine Polstelle integriert wird oder wenn eine Integrationsgrenze ins Unendliche reicht.

$$P_{\Delta f} = \int_{\Delta f} S(f) df \quad (2.146)$$

Hier erkennt man die Dimension der spektralen Leistungsdichte

$$[S(f)] = \frac{W}{Hz} \quad (2.147)$$

Multipliziert man $S(f)$ mit einem Bezugswiderstand R_0 , und zieht man aus dem Resultat die Wurzel, ergibt sich die *spektrale Spannungsdichte*

$$S_U(f) = \sqrt{S(f) \cdot R_0} \quad (2.148)$$

mit der schwer zu interpretierenden Dimension

$$[S_U(f)] = \frac{V}{\sqrt{Hz}} \quad (2.149)$$

Auf diese Weise wird das Rauschverhalten von Verstärkern häufig beschrieben. Der Effektivwert des Rauschens in einem gegebenen Frequenzintervall berechnet sich dann zu

$$U = S_U \cdot \sqrt{\Delta f} \quad (2.150)$$

Ein Zusammenhang zwischen Spannung und Wurzel aus Bandbreite war schon in (2.141) erkennbar. Bei der äußerst anspruchsvollen streng mathematischen Definition der spektralen Leistungsdichte spielt die *Autokorrelationsfunktion* eine zentrale Rolle. Diese kann jeder Zeitfunktion $x(t)$ gemäß

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt \quad (2.151)$$

zugeordnet werden. Sie beschreibt die statistische Verwandtschaft von Funktionswerten, die um das Intervall τ auseinander liegen. Die spektrale Leistungsdichte einer Zeitfunktion ist schließlich definiert als FOURIER-Transformierte ihrer Autokorrelationsfunktion gemäß (2.144), wobei der Zeitparameter t durch τ zu ersetzen ist [9].

Rauschsignale mit bestimmten Spektren haben eigene Namen. Bei konstanter spektraler Leistungsdichte in einem mehr oder weniger breiten Frequenzintervall spricht man von *weißem Rauschen*. Der Begriff rührt daher, dass die als weiß empfundene Farbe mit einem konstanten Spektrum des sichtbaren Lichts einhergeht. *Rosa Rauschen* - genannt auch *1/f-Rauschen* - ist dadurch gekennzeichnet, dass $S(f)$ der Frequenz umgekehrt proportional ist.

$$S(f) = \frac{k}{f} \quad (2.152)$$

Die sogenannte *Verteilungsdichtefunktion* bietet eine weitere Möglichkeit zur Charakterisierung eines Rauschsignals. Sie wird mit $p_x(x)$ bezeichnet, kann jeder Zeitfunktion $x(t)$ zugeordnet werden und liefert ein Maß für die Häufigkeit, mit der die einzelnen Funktionswerte auftreten. Der Index x gibt an, dass es sich um die Verteilung der Funktion $x(t)$ handelt, x in Klammern gibt zu erkennen, dass diese als Funktion des Parameters x angegeben wird. Es könnte auch ein anderer Parameter sein, dies ist hier jedoch nicht von Relevanz. Zur Erläuterung betrachten wir Bild 2-25, wo eine Zeitfunktion zusammen mit ihrer Verteilungsdichtefunktion skizziert ist. Das Diagramm für $p_x(x)$ wurde um 90° gedreht, was das Verständnis

ganz erheblich erleichtert. Dadurch wird die in beiden Darstellungen enthaltene Variable x in ein und dieselbe Richtung aufgetragen, so dass man von einem Diagramm ins andere fluchten kann. Man erkennt im Zeitsignal, dass Funktionswerte um den mit x_0 bezeichneten Mittelwert besonders häufig auftreten, was sich in einem hohen Wert für $p_x(x_0)$ bemerkbar macht. Mit zunehmendem Abstand von x_0 werden die Signalwerte seltener, $p_x(x)$ nimmt ab, Werte oberhalb einer gewissen Schwelle treten überhaupt nicht auf, $p_x(x)$ verschwindet.

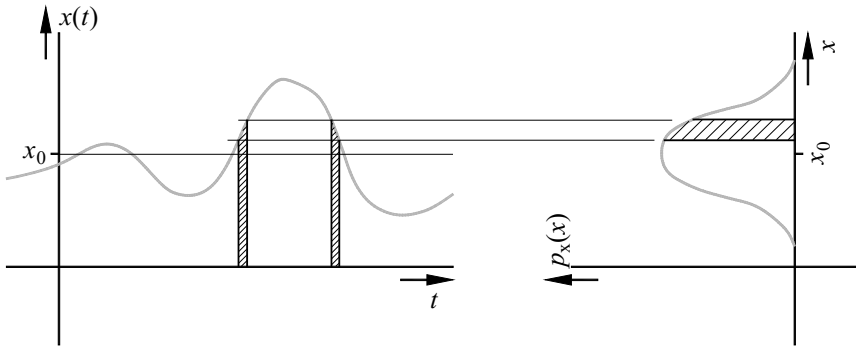


Bild 2-25 Zur Interpretation der Verteilungsdichtefunktion $p_x(x)$

Die Interpretation der Verteilungsdichte erfolgt ähnlich wie bei der spektralen Leistungsdichte. Das Integral über ein Intervall Δx gibt die Häufigkeit von Funktionswerten in diesem Bereich an. Hätte beispielsweise die schraffierte Fläche in Bild 2-25 den Wert 0,1, würde das bedeuten, dass das Signal für 10% der Zeit in diesem Bereich liegt. Man erkennt, dass die Dimension der Verteilungsdichte der Kehrwert der Dimension von x ist.

$$[p_x(x)] = \frac{1}{[x]} \quad (2.153)$$

Die Verteilungsdichtefunktion muss so normiert werden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) dx = 1 \quad (2.154)$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten irgendeines beliebigen Funktionswerts beträgt 100%.

Von besonderer Bedeutung ist die in Bild 2-26 dargestellte *GAUSS-* oder *Normalverteilung*. Sie ist folgendermaßen definiert:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (2.155)$$

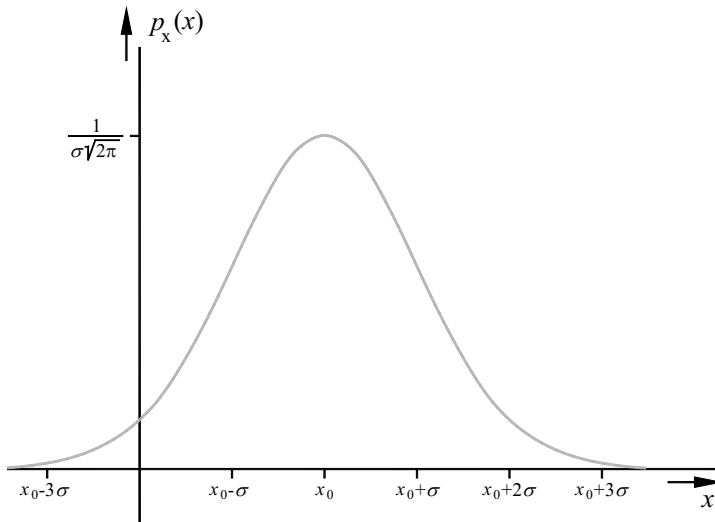


Bild 2-26 GAUSS- oder Normalverteilung

x_0 ist der Mittelwert der Funktion $x(t)$, er wird auch *Erwartungswert* genannt. σ heißt *Standardabweichung*, ihr Quadrat σ^2 *Varianz*. Diese Größen sind offenbar für die Breite bzw. Schlankheit der Glockenkurve verantwortlich sowie für ihre Höhe. Der Vorfaktor vor der e-Funktion wird wegen der Normierung gemäß (2.154) benötigt. Die GAUSS-Verteilung besitzt die folgenden vorteilhaften oder nachteiligen Eigenschaften:

- * Sie liefert eine saubere mathematische Beschreibung der Verteilung.
- * In der Realität vorkommende Zufallsprozesse sind oft GAUSS-ähnlich.
- * Sie eignet sich schlecht zur mathematischen Auswertung, da die Funktion e^{-x^2} nicht geschlossen integriert werden kann. Es muss ein numerisches Verfahren herangezogen werden.
- * Eine exakte GAUSS-Verteilung existiert nirgendwo in der Realität. Das liegt schon daran, dass beliebig großen Signalwerten x eine zwar kleine, aber doch von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. Dies widerspricht der Erfahrung.
- * Ein Zufallsprozess wird GAUSS-ähnlicher, wenn er ein lineares System durchläuft, beispielsweise ein Filter.
- * Ein Zufallsprozess wird in der Regel GAUSS-fremder, wenn er ein nichtlineares System durchläuft, beispielsweise einen Gleichrichter.
- * Ein Zufallsprozess wird GAUSS-ähnlicher, wenn er in irgendeiner Weise mit weiteren Zufallsprozessen kombiniert wird.

Das zuletzt genannte Merkmal ist für uns interessant. Ein Rauschsignal wird wie beschrieben durch das Zusammenwirken sehr vieler Ladungsträger verursacht, wobei die Bewegung jedes einzelnen einen Zufallsprozess für sich darstellt. Die Annahme einer angenäherten GAUSS-Verteilung um den Mittelwert $x_0 = 0$ ist also berechtigt. Das Rauschen wird dann durch Standardabweichung oder Varianz beschrieben, der Crest-Faktor gibt die Schwelle an, oberhalb der die GAUSS-Verteilung durch Null zu ersetzen ist.

Ein in der Praxis häufig verwendeter Begriff ist der *Rauschabstand*. Man versteht darunter das im Dezibel-Maß ausgedrückte Verhältnis von Nutzsignal zu Rauschsignal. Es wird auch *S/N-Verhältnis* genannt (signal to noise).

2.5.2 Lineare Verzerrungen

Wir betrachten ein Zweitor, wie es in Bild 2-27 in etwas abstrahierter Form als Blockdiagramm dargestellt ist. $x(t)$ sei das Eingangssignal, $y(t)$ das dadurch verursachte Ausgangssignal. Von Interesse ist der Fall, dass sich $x(t)$ als Summe aus endlich oder unendlich vielen Teilschwingungen darstellen lässt:

$$x(t) = \hat{x}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \hat{x}_3 \cdot \cos(\omega_3 t + \varphi_3) + \dots \quad (2.156)$$

Wenn das Zweitor aus linearen Bauteilen aufgebaut ist, hat das Ausgangssignal die Form

$$y(t) = \hat{y}_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \hat{y}_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \psi_2) + \hat{y}_3 \cdot \cos(\omega_3 t + \psi_3) + \dots \quad (2.157)$$

Im Ausgangssignal finden sich genau *die* Spektralanteile wieder, die im Eingangssignal enthalten waren. Dies ist ein charakteristisches Erkennungsmerkmal linearer Verzerrungen. Daraus bilden wir einen wichtigen Lehrsatz:

Erkennungsmerkmal linearer Verzerrungen:
Das Ausgangssignal enthält dieselben Spektralanteile, wie das Eingangssignal.

Bei Speisung mit monofrequentem Eingangssignal

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.158)$$

erhält man ein ebenso monofrequentes Ausgangssignal

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega t + \psi) \quad (2.159)$$

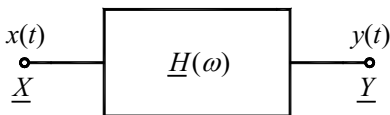


Bild 2-27 Zweitor in Blockdarstellung

Hierbei hängen das Verhältnis der Amplituden $\frac{\hat{y}}{\hat{x}}$ und die Phasenverschiebung $\psi - \varphi$ von der Frequenz ab. Sie werden durch den *Amplituden-* oder *Betragsfrequenzgang* und den *Phasenfrequenzgang* oder *Phasengang* des Zweitors beschrieben. Das Ausgangssignal $y(t)$ hat eine andere Form als das Eingangssignal $x(t)$, man sagt es ist *verzerrt*. Im vorliegenden Fall spricht man von linearer Verzerrung, da sie durch ein lineares System verursacht wurde. Das Verhalten des linearen Zweitors kann durch die komplexe Übertragungsfunktion

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Y}(\omega)}{\underline{X}(\omega)} \quad (2.160)$$

beschrieben werden, wobei \underline{X} und \underline{Y} die komplexen Zeiger zu den Schwingungen bedeuten. Der Betrag von \underline{H} stellt den Betragsfrequenzgang dar, das Argument von \underline{H} den Phasengang. Lineare Verzerrungen lassen sich leicht kompensieren, indem man ein Zweitor mit genau komplementärem Frequenzgang - den *Entzerrer* - nachschaltet, siehe Bild 2-28. Eine vollständige Entzerrung der Phase ist häufig nicht möglich, man begnügt sich mit einem ver-

bleibenden linearen Phasengang, weil dieser keine Verformung des Signals, sondern lediglich eine Verzögerung bewirkt. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass die Phasenverschiebung der Kreisfrequenz proportional ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\psi &= \varphi - k\omega &\Rightarrow \\ \cos(\omega t + \psi) &= \cos(\omega t + \varphi - k\omega) = \cos[\omega(t - k) + \varphi] \quad .\end{aligned}\quad (2.161)$$

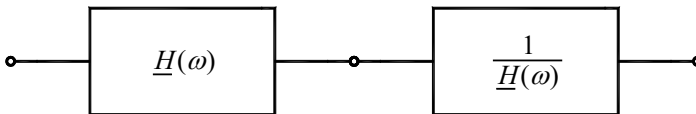


Bild 2-28 Lineares Zweitor und Entzerrer

Akustisch äußern sich lineare Verzerrungen so, dass die Wiedergabe dumpf oder schrill wirkt, aber nicht verzerrt im umgangssprachlichen Sinn.

2.5.3 Nichtlineare Verzerrungen

Wir betrachten ein Zweitor wie in Bild 2-27, dessen Übertragungsverhalten gemäß

$$y = ax - bx^3 \quad (2.162)$$

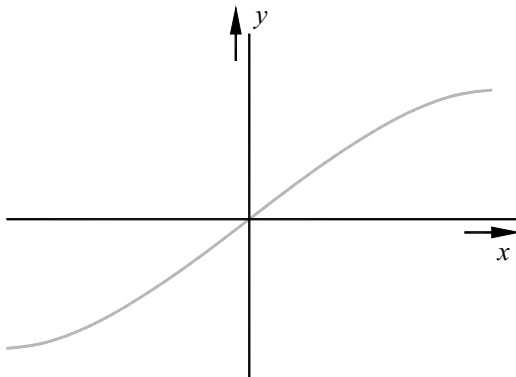


Bild 2-29 Statische nichtlineare Kennlinie

durch eine statische nichtlineare Kennlinie zu beschreiben sei. Sie ist in Bild 2-29 skizziert. Ein solches Verhalten trifft näherungsweise für viele Verstärker zu. Bei größerer Aussteuerung verringert sich die Verstärkung, der Verstärker *geht in die Knie*. Bei Ansteuerung mit einer harmonischen Schwingung

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos \omega t \quad (2.163)$$

errechnet sich das Ausgangssignal zu

$$y(t) = a \hat{x} \cdot \cos \omega t - b \hat{x}^3 \cdot \cos^3 \omega t \quad . \quad (2.164)$$

Durch Anwendung eines Additionstheorems der Trigonometrie

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} \cdot [3 \cos x + \cos(3x)] \quad (2.165)$$

wird daraus

$$y(t) = \left(a\hat{x} - \frac{3}{4}b\hat{x}^3 \right) \cdot \cos \omega t - \frac{1}{4}b\hat{x}^3 \cdot \cos(3\omega t) \quad (2.166)$$

Es ist also eine neue Schwingung bei der Kreisfrequenz 3ω entstanden. Daraus bilden wir einen wichtigen Lehrsatz:

Erkennungsmerkmal nichtlinearer Verzerrungen:
Das Ausgangssignal enthält Spektralanteile, die es im Eingangssignal nicht gab.

Der Anteil bei der Kreisfrequenz ω wird *Grundschiwingung* genannt, der bei 3ω *Oberschwingung*. Im vorliegenden Fall gibt es nur eine einzige Oberschwingung, weil mit (2.162) eine besonders einfache Kennlinie gewählt wurde. Im Allgemeinen existieren viele Oberschwingungen und zwar bei allen ganzzahligen Vielfachen der Grundschiwingung. Das Ausgangssignal hat dann die Form

$$y(t) = \hat{y}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \hat{y}_3 \cdot \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots \quad (2.167)$$

Eine erste Möglichkeit zur quantitativen Charakterisierung einer nichtlinearen Verzerrung bietet der sogenannte *Klirrfaktor*. Er ist folgendermaßen definiert:

$$k = \frac{\text{Effektivwert aller Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert des Gesamtsignals}} \cdot 100\% \quad (2.168)$$

Der Effektivwert eines Signalgemischs berechnet sich als Wurzel aus der Summe der Quadrate der Effektivwerte der Teilschwingungen. (2.167) würde demnach auf den Klirrfaktor

$$k = \frac{\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \dots}}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \dots}} \cdot 100\% \quad (2.169)$$

mit

$$Y_v = \frac{\hat{y}_v}{\sqrt{2}} \quad (2.170)$$

führen. Wie man sieht, charakterisiert der Klirrfaktor ein Signal und kein System. Der Klirrfaktor nimmt fast immer mit der Aussteuerung zu. Möchte man Systemen zwecks Vergleichbarkeit einen Klirrfaktor zuordnen, muss zusätzlich der Betriebsfall definiert sein, z. B. in Form eines *Nennbetriebs*. Bei Produkten der Unterhaltungselektronik wird an dieser Stelle häufig gesündigt. Falls das Eingangssignal des nichtlinearen Zweitorts ein Signalgemisch wie in (2.156) ist, treten im Ausgangssignal außer allen Vielfachen der Teilschwingungen auch alle denkbaren Kombinationen daraus auf. Man hat dann beispielsweise eine Schwingung bei der Kreisfrequenz $\omega = 4\omega_3 - 5\omega_2$ zu erwarten.

Zur quantitativen Beschreibung der Nichtlinearitäten eines Systems ist der sogenannte *IP3-Punkt*, der *third order intercept point* gut geeignet. Hierzu betrachtet man *nur* die Oberschwingung 3. Ordnung, also die bei 3ω . Das ist sinnvoll, denn diese bereitet in der Regel den größten Ärger. Die Oberschwingungen geradzahlgiger Ordnung sind gewöhnlich ver-

schwindend klein, somit liegt die Oberschwingung 3. Ordnung der erwünschten Grundschwingung am nächsten; außerdem ist sie fast immer am stärksten vertreten. Aus dieser Kombination folgt, dass sie am schwierigsten durch ein Tiefpassfilter zu beseitigen ist. Wir betrachten nochmals die nichtlineare Kennlinie (2.162) und die resultierende Verzerrung (2.164). Unter der Voraussetzung kleiner Aussteuerung, die sich durch

$$a\hat{x} \gg \frac{1}{4}b\hat{x}^3 \quad (2.171)$$

beschreiben lässt, folgt die Näherung

$$y(t) \approx a\hat{x} \cdot \cos \omega t - \frac{1}{4}b\hat{x}^3 \cdot \cos(3\omega t) =: \hat{y}_1 \cdot \cos \omega t - \hat{y}_3 \cdot \cos(3\omega t) \quad (2.172)$$

\hat{y}_1 und \hat{y}_3 sind somit näherungsweise die Amplituden von Grund- und Oberschwingung. \hat{y}_1 ist der Aussteuerung \hat{x} proportional, \hat{y}_3 ihrer dritten Potenz. Wir suchen nun nach einer grafischen Darstellung von \hat{y}_1 und \hat{y}_3 über der Variablen \hat{x} und zwar im doppelt logarithmischen Maßstab⁹. Es ist

$$\begin{aligned} \log \hat{y}_1 &= \log(a\hat{x}) = \log a + \log \hat{x} \\ \log \hat{y}_3 &= \log\left(\frac{b}{4}\hat{x}^3\right) = \log \frac{b}{4} + 3 \cdot \log \hat{x} \end{aligned} \quad (2.173)$$

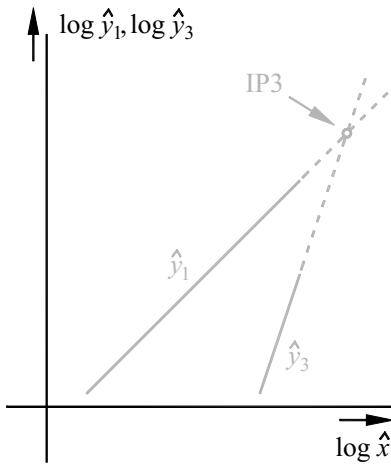


Bild 2-30 Zur Definition des IP3-Punkts

Somit ergeben sich Geraden, wobei die für \hat{y}_1 die Steigung 1, die für \hat{y}_3 die Steigung 3 hat, man vergleiche Bild 2-30. Wegen der Einschränkung (2.171) sind diese nur für kleine \hat{x} gültig, das entspricht dem durchgezogenen Teil. Nun werden die Geraden verlängert, wodurch sich wegen deren unterschiedlicher Steigung zwangsläufig ein Schnittpunkt ergibt. Dies ist der IP3-Punkt. Verwendet man an Stelle der Amplituden irgendwelche Pegel von Eingangs- und Ausgangssignal, ist der logarithmische Maßstab automatisch verifiziert. Unter Verwendung

⁹ Abszisse \hat{x} und Ordinate $\hat{y}_{1,3}$ sind logarithmisch geteilt.

von Pegelmessern oder vergleichbaren Messgeräten gestaltet sich die Messung somit kinderleicht und idiotensicher. Man geht folgendermaßen vor: Bei kleiner Aussteuerung werden Eingangs- und Ausgangspegel gemessen. Der Messpunkt wird in das Diagramm Bild 2-30 eingetragen, die erste Gerade mit Steigung 1 ist fertig. Nun wird der Eingangspegel erhöht, bis die Oberschwingung 3. Ordnung eindeutig nachweisbar ist. Hierfür wird entsprechende selektive Messtechnik benötigt. Pegel von Eingangssignal und gemessener Oberschwingung liefern einen zweiten Punkt im Diagramm, durch den eine Gerade mit Steigung 3 gelegt wird. Der IP3-Punkt kann jetzt abgelesen werden. Selbstredend muss hierbei für Abszisse und Ordinate ein und derselbe Maßstab gewählt werden.

Es folgt ein Beispiel: An einem Verstärker ist bei Ansteuerung mit einem kleinen Leistungspegel von -10dBm ein Ausgangspegel von $+13\text{dBm}$ zu messen. Die Leistungsverstärkung beträgt demnach 23dB . Der Messpunkt wird in das Diagramm Bild 2-31 eingetragen und eine Gerade mit der Steigung 1 hindurchgelegt. Nun wird der Eingangspegel auf $+18,5\text{dBm}$ erhöht, mit einem auf die dreifache Frequenz abgestimmten Spectrum Analyzer misst man $+5\text{dBm}$. Durch diesen Punkt wird eine Gerade mit der Steigung 3 gelegt. Der IP3-Punkt ist somit bestimmt:

$$\begin{aligned} p_{x|IP3} &= 37\text{dBm} \\ p_{y|IP3} &= 60\text{dBm} \end{aligned} \quad (2.174)$$

Da sich die beiden Pegel genau um die Leistungsverstärkung unterscheiden, würde die Angabe eines einzigen Wertes zur Charakterisierung des IP3-Punkts genügen.

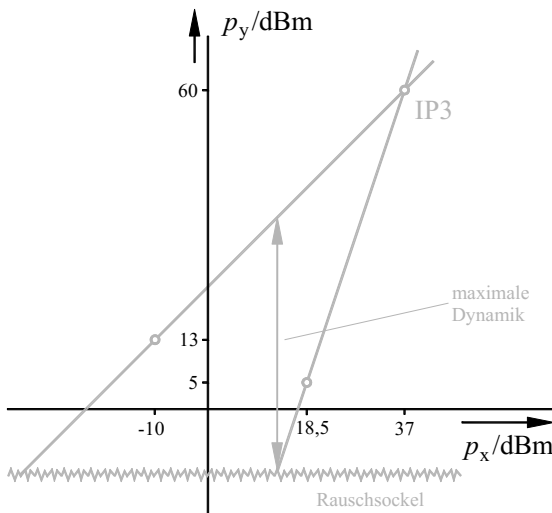


Bild 2-31 Konstruktion eines IP3-Punkts

Bild 2-31 zeigt zusätzlich den sogenannten *Rauschsockel*, das ist der Pegel des Rauschsignals, welches immer am Ausgang des Verstärkers zu messen ist. Damit kann nun auch der Eingangspegel größter Dynamik abgelesen werden. Bei diesem Betriebsfall ist der Abstand des

Nutzsignals von irgendeinem Störsignal am größten. Bei kleineren Aussteuerungen ist der Rauschabstand geringer, bei größeren der Abstand zur 3. Oberschwingung.

Ein letztes Mittel zur Charakterisierung nichtlinearer Systeme bietet der sogenannte *1dB-Kompressionspunkt* (*one-dB-compression-point*). Er bezeichnet den Eingangspegel, bei dem der Ausgangspegel um genau 1dB hinter dem linearisierten Verlauf zurückbleibt. Hierzu misst man zunächst die Verstärkung des Zweitores bei kleiner Aussteuerung (linearisierter Wert). Nun erhöht man die Aussteuerung und beobachtet die Veränderung der Verstärkung. Wenn sie sich um genau 1dB verringert hat, ist der 1dB-Kompressionspunkt erreicht. Bild 2-32 erläutert diesen Sachverhalt. Auch diese Messung wird durch moderne Messgeräte in hohem Maße unterstützt.

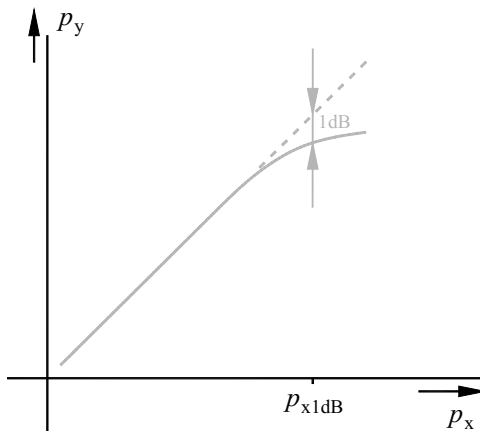


Bild 2-32 Zum 1dB-Kompressionspunkt

Akustisch werden nichtlineare Verzerrungen als Signalverzerrungen im umgangssprachlichen Sinn empfunden. Ein typisches Beispiel ist ein übersteuerter Verstärker.

3 Leitungstheorie

3.1 Die homogene Doppelleitung

Zur elektrischen Übertragung von Information oder Energie benötigt man einen Hin- und einen Rückleiter. Beide bilden dann zusammen mit Quelle und Verbraucher einen geschlossenen Stromkreis. Man verwendet also eine Zweidraht- oder *Doppelleitung*. Drei- oder Vierleitersysteme, wie sie bei der Energieversorgung durch Dreiphasen-Drehstrom zum Einsatz kommen, sollen hier nicht untersucht werden. Deren Analyse ist in völlig adäquater Weise möglich. In der Hochfrequenztechnik gibt es noch einen speziellen Leitungstyp, den sogenannten *Hohlleiter*. Er wird im Abschnitt 3.6.3 genauer beschrieben. Seine Ausbreitungseigenschaften ähneln denen der Doppelleitung sehr, sodass die im Folgenden gewonnenen Erkenntnisse und Zusammenhänge zum größten Teil übernommen werden können.

Sind Geometrie und Materialien in Ausbreitungsrichtung der Leitung einheitlich, spricht man von einer *homogenen* Leitung. Dies bedeutet einerseits, dass an jedem Ort der gleiche Querschnitt der Leiter selbst und ihrer Anordnung zueinander vorzufinden ist, und andererseits, dass für die Leiter und die umgebende Isolation einheitliches Material verwendet wird.

Einige Beispiele für homogene Doppelleitungen:

- * Die symmetrische Leitung, genannt auch Telefonkabel oder twisted pair.
- * Das Koaxialkabel.
- * Die Freileitung.
- * Die Mikro-Streifenleitung.

Mit Ausnahme der Freileitung werden alle in Abschnitt 3.6 näher beschrieben.



Bild 3-1 Transformation einer Abschlussimpedanz über eine Leitung

Weit verbreitet ist die Ansicht, ein am Leitungsanfang eingespeistes Signal - z. B. ein Rechteckimpuls - würde ohne irgendeine Veränderung am Leitungsende ankommen. Tatsächlich wird das Signal bei der Ausbreitung verzögert, gedämpft und verformt, man sagt *verzerrt*. Es gibt noch eine weitere Kuriosität: Eine am Leitungsende angeschlossene Impedanz Z_E ist gewöhnlich so am Leitungsanfang nicht zu sehen, sondern sie transformiert sich über die Leitung in einen neuen Wert Z_A (siehe Bild 3-1). Die Indizes E und A stehen hierbei für das Ende bzw. den Anfang der Leitung. Diese Transformation kann geradezu groteske Formen annehmen, indem sich beispielsweise unter bestimmten Umständen ein Leerlauf in einen Kurzschluss transformiert, wie in Bild 3-2 dargestellt. Die Ursachen hierfür liegen im Wellen-

charakter der Signalausbreitung, der Reflexion am Leitungsende und der Interferenz aus vorlaufender und rücklaufender Welle. Die in den folgenden Abschnitten hergeleiteten Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten finden sich bei Wellenphänomenen anderer Art wieder, wie z. B. bei Schallwellen oder Wasserwellen.



Bild 3-2 Transformation eines Leerlaufs in einen Kurzschluss

3.2 Berechnungen

3.2.1 Die Leitungsgleichungen

Wir betrachten ein kurzes Leitungsstück, seine Länge soll Δz betragen [9]. Es kann näherungsweise durch das in Bild 3-3 gezeigte Ersatzschaltbild aus konzentrierten Elementen beschrieben werden.

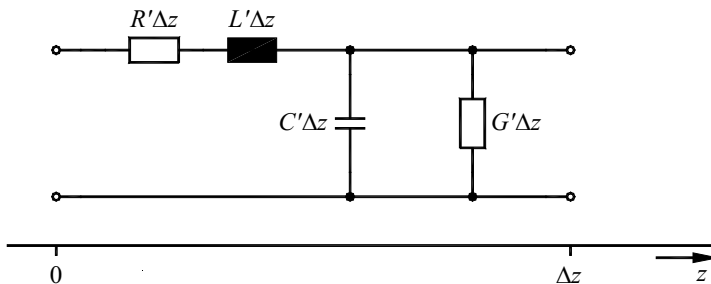


Bild 3-3 Ersatzschaltbild für ein Leitungsstück der Länge Δz

Die Näherung ist umso besser, je kürzer die Länge Δz ist. Da wir später den Grenzübergang $\Delta z \rightarrow 0$ machen werden, stimmt die Beschreibung exakt. Das Ersatzschaltbild beinhaltet alle realen Eigenschaften einer kurzen Leitung. Der Längswiderstand beschreibt den tatsächlichen Drahtwiderstand, wie er sich aus Leitfähigkeit, Querschnitt sowie Länge von Hin- und Rückleiter ergibt. Die Längsinduktivität trägt dem Umstand Rechnung, dass ein Strom im Leiter ein magnetisches Feld um denselben verursacht, welches aufgrund des Induktionsgesetzes einer Änderung des Stroms entgegenwirkt (LENTZsche Regel). Die Querkapazität ergibt sich daraus, dass zwei voneinander isolierte leitfähige Körper stets einen Kondensator bilden. Der Querleitwert ist durch die Unvollkommenheit der Isolation zwischen den Leitern gegeben.

Da alle Elemente des Ersatzschaltbilds der Länge Δz proportional sind, bezieht man sie auf die Länge und spricht von den *Leitungsbelägen*. Der Widerstandsbelag R' hat demzufolge die

Dimension Ω/km . In Tabelle 3.1 sind die Leitungsbeläge eines handelsüblichen symmetrischen Kupferkabels bei niedrigen Frequenzen exemplarisch angegeben.

Tabelle 3.1 Leitungsbeläge, exemplarisch

Belag	Wert
R'	130 Ω/km
L'	700 $\mu\text{H}/\text{km}$
C'	31 nF/km
G'	1 $\mu\text{S}/\text{km}$

Die Leitungsbeläge sind - physikalisch bedingt - mehr oder weniger stark frequenzabhängig. Aus diesem Grund eignet sich das Ersatzschaltbild von Bild 3-3 nicht unmittelbar zur Realisierung einer Leitungsnachbildung aus konzentrierten Elementen. Die grundsätzliche Frequenzabhängigkeit ist in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Tabelle 3.2 Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge

Belag	nimmt mit der Frequenz	Ursache
R'	stark zu	Skineffekt
L'	leicht ab	Skineffekt
C'	weder zu noch ab	-----
G'	stark zu	dielektrische Verluste

Unter dem *Skineffekt* versteht man folgendes Phänomen: Bei einem von Gleichstrom durchflossenen massiven Leiter ist der Strom gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt, die Stromdichte ist überall gleich und ergibt sich als Quotient aus Strom und Querschnittsfläche. Genauso verhält es sich bei Wechselstrom niedriger Frequenz. Mit zunehmender Frequenz wird der Strom jedoch mehr und mehr zum Rand des Leiters verdrängt, so dass im Extremfall nur noch eine dünne Haut unter der Oberfläche stromführend ist (*skin!*). Dieser Sachverhalt kann feldtheoretisch durch eine verringerte Eindringtiefe der mit der Wellenausbreitung verbundenen elektromagnetischen Felder erklärt werden. Somit steht dem Stromfluss ein verringerter effektiver Querschnitt zur Verfügung, was zwangsläufig zu einer Widerstandserhöhung führt. Das magnetische Feld außerhalb des Leiters wird durch den Skineffekt nicht beeinträchtigt, jedoch das Feld im Innern des Leiters, im Extremfall verschwindet es ganz. Damit wird der magnetische Fluss insgesamt kleiner und somit auch die Induktivität.

Der Ableitbelag G' nimmt wegen der dielektrischen Verluste im Isolationsmaterial zu. Dies darf man sich modellhaft so vorstellen, dass das Isolationsmaterial Teilchen mit Dipolcharakter enthält, die in Folge des elektrischen Wechselfeldes zwischen den Leitern eine Nick- oder Kippbewegung ausführen. Dies führt zu Reibung und Energieverlust, was sich elektrisch als Stromfluss äußert. Mit zunehmender Frequenz werden diese Bewegungen schneller, somit nehmen die Verluste zu. Aus diesem Grund bevorzugt man für die Übertragung großer HF-Leistungen, wie sie z. B. bei Rundfunksendern vorkommen, luftgefüllte Leitungen. Bild 3-4 veranschaulicht die Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge.

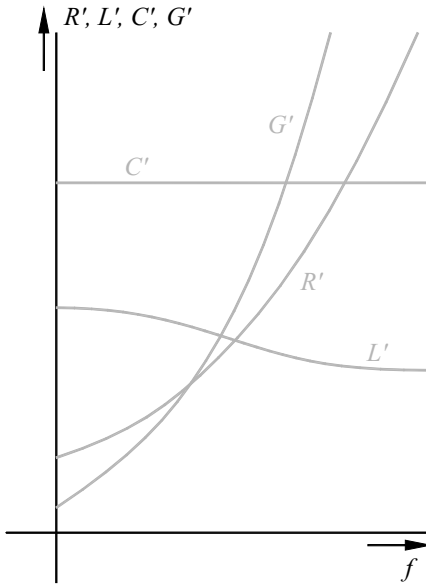


Bild 3-4 Frequenzabhängigkeit der Leitungsbeläge

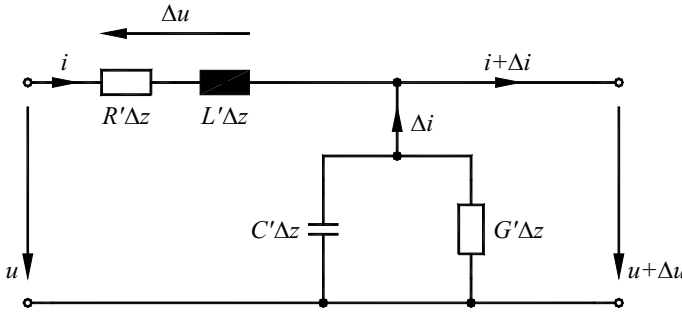
Bild 3-3 soll nun einer Analyse unterzogen werden. Dazu werden Ströme und Spannungen gemäß Bild 3-5 eingeführt. Spannung und Strom am Leitungsanfang werden u und i genannt. Der Strom i bewirkt einen Spannungsabfall Δu über den Längselementen, die Spannung $u + \Delta u$ ruft einen Strom Δi durch die Querelemente hervor. Die etwas ungewohnte Orientierung von Δu und Δi wurde im Hinblick auf den weiteren Rechengang so gewählt. Man erkennt sofort, dass sich damit am Leitungsende eine Spannung $u + \Delta u$ sowie ein Strom $i + \Delta i$ einstellen. Hiermit gelangen wir zu der für die weiteren Berechnungen sehr wichtigen Erkenntnis, dass Spannung und Strom an verschiedenen Orten der Leitung unterschiedliche Werte annehmen.

Die Strom-Spannungs-Beziehungen an Kapazität und Induktivität lauten bekanntlich

$$\begin{aligned} i &= C \cdot \frac{du}{dt} \\ u &= L \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta i &= -G' \Delta z \cdot (u + \Delta u) - C' \Delta z \cdot \frac{d(u + \Delta u)}{dt} \\ \Delta u &= -R' \Delta z \cdot i - L' \Delta z \cdot \frac{di}{dt} \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Bild 3-5** Ersatzschaltbild mit elektrischen Größen

Der Grenzübergang $\Delta z \rightarrow 0$ liefert schließlich die *Leitungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial z} &= -G'u - C' \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -R'u - L' \frac{\partial i}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Damit ist ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen für die elektrischen Größen u und i gefunden. Sie beschreiben eine Abhängigkeit von Zeit t und Raum z . Man spricht von *verteilten Parametern*.

3.2.2 Stationäre Lösung

Die allgemeine Lösung der Leitungsgleichungen ist mit den hier vorausgesetzten Kenntnissen in Mathematik nicht möglich. Jedoch gelingt die Lösung, wenn man spezielle Betriebsbedingungen unterstellt. Von besonderer Bedeutung ist hierbei der sogenannte stationäre Fall [9]. Dies bedeutet, dass die Leitung von einer Wechselspannungs- oder -stromquelle gespeist wird, und dass der eingeschwungene Zustand erreicht ist. Der Einschaltzeitpunkt liegt also lange zurück. Wie man aus der Theorie der Wechselströme weiß, haben dann alle Spannungen und Ströme im Netzwerk einen Verlauf

$$\begin{aligned} u_v(t) &= \hat{u}_v \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) \\ i_\mu(t) &= \hat{i}_\mu \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mu) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Damit ist die Anwendung der komplexen Wechselstromrechnung möglich (vgl. 2.2). Alle Zeitverläufe u_v , i_μ werden durch ihre komplexen Zeiger \underline{U}_v , \underline{I}_μ ersetzt, an die Stelle des Differentialoperators d/dt tritt der Faktor $j\omega$. Hierbei ist der Betrag des Zeigers gleich dem Effektivwert der Kosinusschwingung, sein Argument gleich der Phasenlage.

$$\begin{aligned} u_v(t) &= \sqrt{2} U_v \cdot \cos(\omega t + \varphi_v) \rightarrow \underline{U}_v = U_v \cdot e^{j\varphi_v} \\ i_\mu(t) &= \sqrt{2} I_\mu \cdot \cos(\omega t + \varphi_\mu) \rightarrow \underline{I}_\mu = I_\mu \cdot e^{j\varphi_\mu} \\ \frac{d}{dt} &\rightarrow j\omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Damit erhalten die Leitungsgleichungen eine neue Form:

$$\frac{d\underline{I}}{dz} = -(G' + j\omega C') \underline{U} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\underline{U}}{dz} = -(R' + j\omega L') \underline{I} \quad (3.7)$$

Wir haben nun ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen gefunden, welches sich mit Methoden der Schulmathematik lösen lässt. Zunächst wird (3.7) nach z abgeleitet und umgeformt.

$$\frac{d\underline{I}}{dz} = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} \quad (3.8)$$

Dieses Ergebnis wird in (3.6) eingesetzt.

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} - (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \underline{U} = 0 \quad (3.9)$$

Führt man noch die Abkürzung

$$\underline{\gamma}^2 := (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \quad (3.10)$$

ein, so erhält man

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dz^2} - \underline{\gamma}^2 \underline{U} = 0 \quad (3.11)$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung für den Spannungszeiger \underline{U} in der Variablen z . Es ist darüber hinaus eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (vgl. 2.1.2); die Lösung erfolgt mit elementaren Methoden. Man erkennt wieder, dass der Spannungszeiger \underline{U} vom Ort z abhängt.

Der soeben eingeführten Größe $\underline{\gamma}$ kommt im Weiteren enorme Bedeutung zu. Sie verdient deshalb genauere Betrachtung. Es ist

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R'G' - \omega^2 L'C') + j\omega(R'C' + L'G')} \quad (3.12)$$

Der Realteil des komplexen Radikanden ist demnach positiv oder negativ, unter Umständen verschwindet er. Der Imaginärteil ist in jedem Fall nichtnegativ. $\underline{\gamma}^2$ liegt somit in der oberen Halbebene, d.h. im ersten oder im zweiten Quadranten der komplexen Ebene. Somit liegt eine Wurzel $\underline{\gamma}_1$ im ersten Quadranten, die andere $\underline{\gamma}_2 = -\underline{\gamma}_1$ im dritten. Bild 3-6 veranschaulicht diesen Sachverhalt. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\underline{\gamma} := \underline{\gamma}_1 = \alpha + j\beta = -\underline{\gamma}_2 \quad (3.13)$$

mit

$$\alpha \geq 0 \quad \beta > 0 \quad (3.14)$$

schreiben. Wir wenden uns nun der Lösung der Differentialgleichung (3.11) zu. Die charakteristische Gleichung lautet

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0 \quad (3.15)$$

was auf die allgemeine Lösung

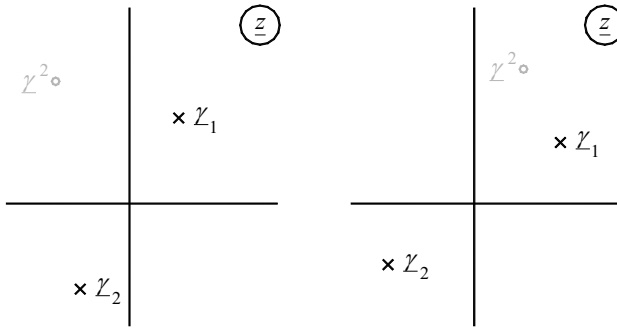


Bild 3-6 Mögliche Lagen der Größe γ^2 und ihrer Wurzeln in der komplexen Ebene

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_{r0} \cdot e^{\gamma z} + \underline{U}_{v0} \cdot e^{-\gamma z} =: \underline{U}_r + \underline{U}_v, \quad (3.16)$$

führt. \underline{U}_{r0} und \underline{U}_{v0} sind sogenannte Integrationskonstanten, die bei Angabe der speziellen Lösung durch Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Im vorliegenden Fall können das definierte Verhältnisse an Leitungsanfang und -ende sein. Wegen

$$\underline{U}_v = \underline{U}_{v0} \cdot e^{-\gamma z} = \underline{U}_{v0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} \quad (3.17)$$

ist dieser Teil der Lösung in positiver z -Richtung gedämpft und verzögert. Er stellt somit eine *vorlaufende Welle* dar. Analog erfährt der Lösungsanteil $\underline{U}_r e^{+\gamma z}$ in negativer z -Richtung Dämpfung und Verzögerung, bildet also die *rücklaufende Welle*. Das Maß γ , das beide Wellen formt, wird *Ausbreitungsmaß* genannt. Der Realteil α heißt *Dämpfungsmaß*, da er für die Schwächung des Betrags von \underline{U}_v verantwortlich ist, analog wird der Imaginärteil β *Phasenmaß* genannt. Eine der beiden Integrationskonstanten kann verschwinden. Das lässt sich so interpretieren, dass dann nur eine Welle in einer Richtung existiert. In der Praxis wird dieser Fall häufig angestrebt. Wie man sofort sieht, haben Ausbreitungsmaß, Dämpfungsmaß und Phasenmaß die Dimension

$$[\gamma] = [\alpha] = [\beta] = \text{m}^{-1}. \quad (3.18)$$

3.2.3 Die Wellenimpedanz

Der Gleichung (3.7) entnehmen wir für den Strom

$$\underline{I} = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\underline{U}}{dz} \quad (3.19)$$

und daraus mit der Lösung (3.16)

$$\underline{I} = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} \left[\underline{U}_{v0} e^{-\gamma z} - \underline{U}_{r0} e^{+\gamma z} \right]. \quad (3.20)$$

Man schreibt

$$\underline{Z}_0 := \frac{R' + j\omega L'}{\gamma}, \quad (3.21)$$

woraus mit (3.12)

$$\underline{Z}_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad , \quad (3.22)$$

wird. (3.20) bekommt dann die Form

$$\underline{I} = \frac{1}{\underline{Z}_0} \left[\underline{U}_{v0} e^{-\gamma z} - \underline{U}_{r0} e^{+\gamma z} \right] \quad . \quad (3.23)$$

Der Stromzeiger setzt sich also wie der Spannungszeiger aus einem vorlaufenden und einem rücklaufenden Anteil zusammen. Das Minuszeichen besagt hierbei, dass der Strom der rücklaufenden Welle entgegen der z-Richtung zu orientieren ist. Man kann auch schreiben

$$\underline{I} = \underline{I}_{v0} \cdot e^{-\gamma z} - \underline{I}_{r0} \cdot e^{+\gamma z} =: \underline{I}_v - \underline{I}_r \quad . \quad (3.24)$$

Spannung und Strom zu jeder Welle stehen also im festen Verhältnis \underline{Z}_0 zueinander.

$$\frac{\underline{U}_v}{\underline{I}_v} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \underline{Z}_0 \quad . \quad (3.25)$$

\underline{Z}_0 hat die Dimension einer Impedanz und wird deshalb *Wellenimpedanz* genannt. Aus der englischen Bezeichnung *characteristic impedance* leitet sich der eingedeutschte Begriff *charakteristische Impedanz* ab, den man immer häufiger liest. Man erkennt folgende Eigenschaften der Wellenimpedanz:

- * \underline{Z}_0 ist eine Eigenschaft der Leitung.
- * \underline{Z}_0 ist durch Geometrie und Material der Leitung bestimmt.
- * \underline{Z}_0 ist im Allgemeinen komplex.
- * \underline{Z}_0 ist im Allgemeinen frequenzabhängig.
- * \underline{Z}_0 verknüpft Spannungs- und Stromwelle.
- * \underline{Z}_0 ist nicht unmittelbar mit einer Impedanzmessbrücke messbar.

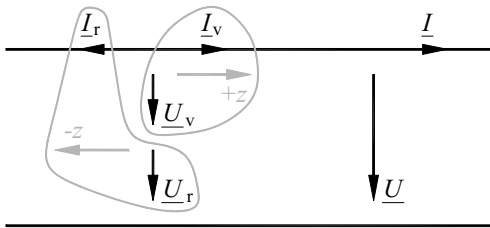


Bild 3-7 Vor- und rücklaufende Spannungs- und Stromwellen

Nun lassen sich Spannungs- und Stromverhältnisse an einem beliebigen Ort der Leitung wie in Bild 3-7 gezeigt verdeutlichen. Es existiert eine vorlaufende und eine rücklaufende Welle in Form je einer Spannungs- und einer Stromwelle, welche miteinander verknüpft sind. Die zwischen den Leitern messbare Spannung ergibt sich durch Überlagerung von vorlaufender und

rücklaufender Spannungswelle. Genauso verhält es sich mit dem in einem Leiter messbaren Strom, wobei darauf zu achten ist, dass die Anteile vorzeichenrichtig gezählt werden.

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \underline{U}_v + \underline{U}_r \\ \underline{I} &= \underline{I}_v - \underline{I}_r\end{aligned}, \quad (3.26)$$

3.2.4 Übergang in den Zeitbereich

Nun sollen den berechneten Zeigergrößen die korrespondierenden Zeitfunktionen zugeordnet werden, wie man das von der komplexen Wechselstromrechnung kennt [9] (vgl. 2.2). Der Betrag des Zeigers liefert den Effektivwert, sein Argument die Phasenlage der Kosinusschwingung. Somit wird aus

$$\underline{U}_v(z) = \underline{U}_{v0} \cdot e^{-\gamma z} = \underline{U}_{v0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z}, \quad (3.27)$$

mit

$$\underline{U}_{v0} = U_{v0} \cdot e^{j\varphi_v}, \quad (3.28)$$

die Zeitfunktion

$$u_v(z, t) = \sqrt{2} U_{v0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_v - \beta z). \quad (3.29)$$

Ganz analog ergibt sich für die rücklaufende Spannungswelle:

$$u_r(z, t) = \sqrt{2} U_{r0} \cdot e^{+\alpha z} \cdot \cos(\omega t + \varphi_r + \beta z) \quad (3.30)$$

3.2.5 Die Wellenlänge

Es stellt sich nun die Frage nach einer räumlichen Periodizität. Nach welcher Länge $z = \lambda$ hat die Schwingung wieder die gleiche Phasenlage? Sie ist lediglich gedämpft. Dies lässt sich mathematisch ganz leicht formulieren:

$$u_v(z + \lambda, t) = u_v(z, t) \cdot e^{-\alpha \lambda} \quad (3.31)$$

Wir setzen (3.29) ein und erhalten

$$\sqrt{2} U_{v0} \cdot e^{-\alpha(z+\lambda)} \cdot \cos[\omega t + \varphi_v - \beta(z+\lambda)] = \sqrt{2} U_{v0} \cdot e^{-\alpha z} \cdot \cos[\omega t + \varphi_v - \beta z] \cdot e^{-\alpha \lambda}.$$

Hier kann man allerhand kürzen, und es folgt

$$\cos(\omega t + \varphi_v - \beta z - \beta \lambda) = \cos(\omega t + \varphi_v - \beta z).$$

Dies ist, wie man sofort sieht, für

$$\beta \lambda = 2\pi$$

erfüllt, was auf

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (3.32)$$

für die Wellenlänge führt.

3.2.6 Die Ausbreitungsgeschwindigkeit

Man kann die Frage nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle so formulieren: Nach welcher Zeit $t = \Delta t$ findet man am Ort $z = \Delta z$ den Phasenzustand von $t = 0$, $z = 0$ wieder? Die Welle erfährt lediglich eine Dämpfung gemäß dem zurückgelegten Weg Δz .

$$u_v(\Delta z, \Delta t) = u_v(0, 0) \cdot e^{-\alpha \Delta z} \quad (3.33)$$

Durch Einsetzen von (3.29) wird daraus

$$\sqrt{2} U_{v0} \cdot e^{-\alpha \Delta z} \cdot \cos(\omega \Delta t + \varphi_v - \beta \Delta z) = \sqrt{2} U_{v0} \cdot \cos \varphi_v \cdot e^{-\alpha \Delta z}.$$

Wie man sieht, ist die letzte Gleichung für

$$\omega \Delta t - \beta \Delta z = 0$$

erfüllt, was auf die sogenannte *Phasengeschwindigkeit*

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.34)$$

führt. Hier muss auf eine wichtige Besonderheit hingewiesen werden. Energie und Information breiten sich nicht zwangsläufig mit v_p aus. Hierfür verantwortlich ist die sogenannte *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_G = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (3.35)$$

Dies rührt daher, dass v_p aus dem eingeschwungenen Zustand ermittelt wurde. v_p kann unter Umständen sogar größer als die Freiraum-Lichtgeschwindigkeit c_0 werden. Es werden immer wieder spektakuläre Erfindungen vorgestellt, mit deren Hilfe es möglich sein soll, Information schneller als mit Lichtgeschwindigkeit zu übermitteln. Hier wird stereotyp der stets gleiche Fehler gemacht, die Phasengeschwindigkeit als tatsächliche Ausbreitungsgeschwindigkeit zu interpretieren. Wie man sieht, sind Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit gleich, wenn β zu ω proportional ist.

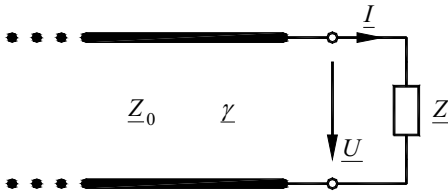
3.3 Die beschaltete Leitung

3.3.1 Der Reflexionsfaktor

Wir betrachten das Ende einer Leitung, die wie in Bild 3-8 mit einer beliebigen Impedanz \underline{Z} abgeschlossen ist. Der Abschluss erzwingt ein Verhältnis

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}, \quad (3.36)$$

was vordergründig in einem Widerspruch zu (3.25) steht. Die Aussage von (3.36) besteht hingegen darin, dass es außer der vorlaufenden auch eine rücklaufende Welle geben muss. Beide überlagern sich am Leitungsende so, dass (3.36) erfüllt ist. Der Abschluss verursacht also die rücklaufende Welle. Dies ist das Phänomen der *Reflexion*.

**Bild 3-8** Mit Impedanz \underline{Z} abgeschlossene Leitung

Wir wollen nun berechnen, in welchem Verhältnis die rücklaufende Welle zur vorlaufenden steht. (3.25) besagte

$$\frac{\underline{U}_v}{\underline{I}_v} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \underline{Z}_0 \quad (3.37)$$

Wir erinnern uns an (3.26):

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_v + \underline{U}_r \\ \underline{I} &= \underline{I}_v - \underline{I}_r \end{aligned}$$

Diese werden in (3.36) eingesetzt

$$\underline{U}_v + \underline{U}_r = \underline{Z} \cdot (\underline{I}_v - \underline{I}_r) \quad (3.38)$$

was sich mit (3.37) zu

$$\underline{U}_v + \underline{U}_r = \underline{Z} \cdot \left(\frac{\underline{U}_v}{\underline{Z}_0} - \frac{\underline{U}_r}{\underline{Z}_0} \right) \quad (3.39)$$

umformen lässt. Löst man (3.39) nach \underline{U}_r auf, so erhält man

$$\underline{U}_r = \underline{U}_v \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} \quad .$$

Dies führt zur Definition des dimensionslosen komplexen *Reflexionsfaktors*

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_v} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} \quad (3.40)$$

Es gilt also

$$\underline{U}_r = \underline{r} \cdot \underline{U}_v \quad (3.41)$$

und wegen (3.37) auch

$$\underline{I}_r = \underline{r} \cdot \underline{I}_v \quad (3.42)$$

Durch Auflösung von (3.40) nach \underline{Z} ergibt sich die Umkehrformel

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}} \quad (3.43)$$

In der Praxis ist es verbreitet, den Betrag des Reflexionsfaktors als Dämpfung im Dezibel-Maß darzustellen:

$$a_R = -20 \cdot \lg |r| \text{ dB} \quad (3.44)$$

a_R wird *Reflexionsdämpfung*, gelegentlich auch *Rückflussdämpfung* genannt.

Es müssen nun ein paar Beispiele gemacht werden:

- (i) Die Leitung ist mit ihrer Wellenimpedanz abgeschlossen.

$$\underline{Z} = \underline{Z}_0 \quad (3.45)$$

Dies führt sofort auf

$$\underline{r} = 0 \quad (3.46)$$

Es gibt keine Reflexion. Man spricht von *Anpassung* oder korrekt abgeschlossener Leitung. Die vorlaufende Welle liefert für sich ein Spannungs-Strom-Verhältnis, wie es der Abschluss wünscht. Dieser Fall wird in der Praxis gewöhnlich angestrebt.

- (ii) Die Leitung ist mit einem Kurzschluss ($\underline{Z} = 0$) abgeschlossen. (3.40) liefert

$$\underline{r} = -1 \quad (3.47)$$

Hier spricht man von *Totalreflexion* (da $|r| = 1$) mit Vorzeichenumkehr. Für die Spannung am Leitungsende erhält man erwartungsgemäß

$$\underline{U}_E = \underline{U}_{Ev} + \underline{U}_{Er} = \underline{U}_{Ev}(1 + \underline{r}) = 0 \quad (3.48)$$

- (iii) Die Leitung ist mit einem Leerlauf ($\underline{Z} \rightarrow \infty$) abgeschlossen. Wir erhalten

$$\underline{r} = +1 \quad (3.49)$$

Für die Spannung am Leitungsende errechnet sich nun

$$\underline{U}_E = \underline{U}_{Ev}(1 + \underline{r}) = 2 \cdot \underline{U}_{Ev} \quad (3.50)$$

es tritt also eine Spannungsverdopplung ein. Dieser Fall hat praktische Bedeutung, weil er wegen der unerwartet erhöhten Spannung eine zunächst unerklärliche Bauteilbeschädigung zur Folge haben kann. Der Leerlauf könnte beispielweise durch den hochohmigen Eingang eines Messgeräts realisiert sein. Das Phänomen lässt sich an Hand einer Seilwelle sehr schön demonstrieren: Auf ein nicht zu kurzes, frei hängendes Seil wird knapp unterhalb der Aufhängung horizontal mit einem harten Gegenstand geschlagen. Es breitet sich dann eine Seilwelle in Form eines Buckels nach unten aus, die am Seilende reflektiert wird und wieder nach oben läuft. Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass das Seilende um die doppelte Amplitude der Seilwelle ausschlägt.

- (iv) Eine Leitung mit reeller Wellenimpedanz ist mit einem passiven Zweipol abgeschlossen.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= R_0 \\ \underline{Z} &= R + jX \\ R &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Mit (3.40) berechnet sich der Betrag des Reflexionsfaktors zu

$$|r| = \sqrt{\frac{(R - R_0)^2 + X^2}{(R + R_0)^2 + X^2}} \leq 1 \quad (3.52)$$

er ist also nicht größer als 1. Bei einem rein reaktiven Abschluss

$$\underline{Z} = jX \quad (3.53)$$

wird, wie man sofort sieht

$$|r| = 1 \quad (3.54)$$

Es tritt also auch hier Totalreflexion ein, was man damit erklären kann, dass die Reaktanz keine Wirkleistung aufnimmt. Dieses Ergebnis legt den Umkehrschluss nahe, dass Kurzschluss und Leerlauf als reaktive Elemente aufzufassen sind. Hierauf wird später noch genauer eingegangen.

3.3.2 Transformationseigenschaften

Wir betrachten eine Leitung mit gegebenen Parametern ($\underline{Z}_0, \gamma, l$) [9]. Diese soll an ihrem Ende mit einer Impedanz \underline{Z}_E abgeschlossen sein, welche gemäß (3.40) eine Reflexion r_E hervorruft. Es stellt sich die Frage, welche Impedanz \underline{Z}_A und welcher Reflexionsfaktor r_A am Leitungsanfang zu sehen sind. Die Spannung am Leitungsende setzt sich aus den Anteilen von vor- und rücklaufender Welle zusammen.

$$\underline{U}_E = \underline{U}_{Ev} + \underline{U}_{Er} \quad (3.55)$$

wobei gilt

$$\underline{U}_{Er} = r_E \cdot \underline{U}_{Ev} \quad (3.56)$$

Analog gibt es am Leitungsanfang vorlaufende und rücklaufende Anteile.

$$\underline{U}_A = \underline{U}_{Av} + \underline{U}_{Ar} \quad (3.57)$$

Mit (3.17) für die Wellenausbreitung erhält man

$$\underline{U}_{Ev} = \underline{U}_{Av} \cdot e^{-\gamma l} \quad (3.58)$$

$$\underline{U}_{Ar} = \underline{U}_{Er} \cdot e^{\gamma(-l)}$$

also

$$\underline{U}_{Ar} = \underline{U}_{Av} \cdot r_E \cdot e^{-2\gamma l} \quad (3.59)$$

Dies führt schließlich auf den Reflexionsfaktor am Leitungsanfang

$$r_A = r_E \cdot e^{-2\gamma l} \quad (3.60)$$

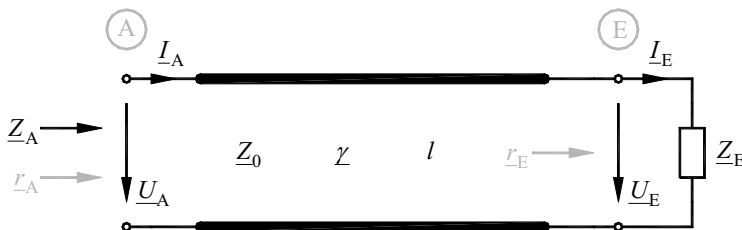


Bild 3-9 Leitungstransformation

Der Reflexionsfaktor transformiert sich also durch eine Multiplikation mit $e^{-2\gamma l}$ über die Leitung. Dieses Ergebnis lässt sich sehr leicht veranschaulichen: Die vorlaufende Welle wird bei ihrer Reise vom Leitungsanfang zum Ende mit $e^{-\gamma l}$ bewertet, genauso geht es der reflektierten Welle beim Rückweg. Die Leitung prägt der Welle also insgesamt einen Faktor $e^{-2\gamma l}$ auf.

Nun soll die Transformation der Impedanz betrachtet werden. Mit (3.43) erhalten wir für die Impedanz am Leitungsanfang

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{1 + \underline{r}_A}{1 - \underline{r}_A} \quad (3.61)$$

Mit (3.60) wird daraus

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{1 + \underline{r}_E \cdot e^{-2\gamma l}}{1 - \underline{r}_E \cdot e^{-2\gamma l}} \quad (3.62)$$

Drückt man noch \underline{r}_E gemäß (3.40) durch \underline{Z}_E aus, so ergibt sich

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{1 + \frac{\underline{Z}_E - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_0} \cdot e^{-2\gamma l}}{1 - \frac{\underline{Z}_E - \underline{Z}_0}{\underline{Z}_E + \underline{Z}_0} \cdot e^{-2\gamma l}} \quad (3.63)$$

was sich zu

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{(\underline{Z}_E + \underline{Z}_0) \cdot e^{\gamma l} + (\underline{Z}_E - \underline{Z}_0) \cdot e^{-\gamma l}}{(\underline{Z}_E + \underline{Z}_0) \cdot e^{\gamma l} - (\underline{Z}_E - \underline{Z}_0) \cdot e^{-\gamma l}} \quad (3.64)$$

umformen lässt. Mit den bekannten Definitionen der hyperbolischen Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \end{aligned} \quad (3.65)$$

wird daraus schließlich

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{\underline{Z}_0 \cdot \sinh \gamma l + \underline{Z}_E \cdot \cosh \gamma l}{\underline{Z}_0 \cdot \cosh \gamma l + \underline{Z}_E \sinh \gamma l} \quad (3.66)$$

Man kann also konstatieren, dass sich die Impedanz gemäß einer recht komplizierten Formel über die Leitung transformiert.

Einige Beispiele:

- (i) Die Leitung ist reflexionsfrei abgeschlossen ($\underline{Z}_E = \underline{Z}_0$). Wie man sofort sieht, wird dann

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \quad , \quad \underline{r}_A = 0 \quad (3.67)$$

Der korrekte Abschluss transformiert sich demnach in sich selbst.

- (ii) Kurzschluss und Leerlauf transformieren sich über ein Leitungsstück der Länge l gemäß

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_E = 0 & \rightarrow \underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{\sinh \underline{\gamma} l}{\cosh \underline{\gamma} l} =: \underline{Z}_K \\
 \underline{Z}_E \rightarrow \infty & \rightarrow \underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \frac{\cosh \underline{\gamma} l}{\sinh \underline{\gamma} l} =: \underline{Z}_L
 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Für das geometrische Mittel aus \underline{Z}_K und \underline{Z}_L erhält man

$$\sqrt{\underline{Z}_K \cdot \underline{Z}_L} = \underline{Z}_0 \quad (3.69)$$

Dieses interessante Ergebnis rechtfertigt das allgemein übliche Messverfahren für die Wellenimpedanz: Die Eingangsimpedanz einer am Ende kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Leitung wird in zwei Experimenten mit der Impedanzmessbrücke (LCR-Meter) aufgenommen, beispielsweise als Frequenzgang. Aus beiden Ergebnissen wird rechnerisch das geometrische Mittel gebildet. Wenngleich die Länge des verwendeten Leitungstücks dabei prinzipiell keine Rolle spielt, ist bei der praktischen Ausführung darauf zu achten, dass der Prüfling nicht zu kurz ist, damit das Kabel dem Abschluss „seinen Charakter aufprägen kann“.

- (iii) Am Anfang einer sehr langen, beliebig abgeschlossenen Leitung erscheint der Reflexionsfaktor

$$\underline{r}_A = \lim_{l \rightarrow \infty} \underline{r}_E \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l} = 0 \quad (3.70)$$

Die Welle wird beim zweimaligen Durchlaufen der Leitung so stark gedämpft, dass kein Signal zurückkommt. Die zugehörige Impedanz am Leitungsanfang ist dann

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_0 \quad (3.71)$$

Damit ergibt sich eine weitere Möglichkeit zur Messung von \underline{Z}_0 , wenn eine sehr lange Leitung vorliegt, beispielsweise ein Kabel auf einer großen Trommel. Sie ist auch dann anwendbar, wenn das Leitungsende nicht zugänglich ist und bietet darüber hinaus den Vorteil, dass keine Rechnung mit komplexen Zahlen erforderlich ist.

3.4 Die verlustlose Leitung

3.4.1 Definition und Konsequenzen

Bei hochwertigem Leitermaterial und nicht zu großer Leitungslänge ist die idealisierende Annahme

$$R' = 0, \quad G' = 0 \quad (3.72)$$

häufig mit guter Näherung möglich. Das Ersatzschaltbild (Bild 3-3) enthält dann ausschließlich reaktive Elemente, die Leitung nimmt somit keine Wirkleistung auf. Man spricht auch von der *idealen Leitung*. Für Ausbreitungsmaß, Wellenimpedanz und Ausbreitungsgeschwindigkeit hat das die folgenden Konsequenzen, man vergleiche (3.12), (3.22) und (3.34):

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 0 \\
 \beta &= \omega \sqrt{L'C'} \\
 \underline{Z}_0 &= \sqrt{\frac{L'}{C'}} =: R_0 \\
 v_p &= \frac{1}{\sqrt{L'C'}}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Die verlustlose Leitung hat demnach eine reelle Wellenimpedanz, man spricht dann vom Wellenwiderstand. Der Umkehrschluss ist jedoch nicht zulässig, eine Leitung mit reeller Wellenimpedanz ist nicht zwangsläufig verlustlos.

3.4.2 Der Verkürzungsfaktor

Die Wellenlänge einer elektromagnetischen Welle im freien Raum ergibt sich bekanntlich aus Frequenz und Lichtgeschwindigkeit gemäß

$$\lambda_0 = \frac{c_0}{f} \quad . \tag{3.74}$$

Da die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf der Leitung kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit im freien Raum, erscheint die Wellenlänge auf der Leitung verkürzt. Dies wird durch den sogenannten *Verkürzungsfaktor*

$$VK = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_p}{c_0} \tag{3.75}$$

zum Ausdruck gebracht, den die Kabelhersteller meist in den technischen Daten ihrer Produkte angeben. Damit errechnet sich die Wellenlänge auf der Leitung ganz einfach zu

$$\lambda = VK \cdot \frac{c_0}{f} \quad . \tag{3.76}$$

Bei handelsüblichen Leitungen liegt VK in der Größenordnung von 0,8, kann also nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Bei Koaxialkabeln errechnet sich VK aus den Materialeigenschaften des Dielektrikums (ϵ_r , μ_r). Dies wird in Abschnitt 3.6.1 genauer beleuchtet.

3.4.3 Transformationseigenschaften

Die Transformation des Reflexionsfaktors ist durch (3.60) beschrieben. Daraus wird nun

$$\underline{r}_A = \underline{r}_E \cdot e^{-j2\beta l} \quad . \tag{3.77}$$

Es erfolgt also lediglich eine Phasendrehung. Was die Transformation der Impedanz anlangt, wird aus (3.64)

$$\underline{Z}_A = R_0 \frac{(\underline{Z}_E + R_0) \cdot e^{j\beta l} + (\underline{Z}_E - R_0) \cdot e^{-j\beta l}}{(\underline{Z}_E + R_0) \cdot e^{j\beta l} - (\underline{Z}_E - R_0) \cdot e^{-j\beta l}} \quad . \tag{3.78}$$

Die EULERSche Formel

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \quad (3.79)$$

hat die bekannten Konsequenzen

$$\begin{aligned} e^{jx} + e^{-jx} &= 2 \cos x \\ e^{jx} - e^{-jx} &= j 2 \sin x \end{aligned} \quad (3.80)$$

Damit lässt sich (3.78) folgendermaßen umformen:

$$\underline{Z}_A = R_0 \frac{\underline{Z}_E \cos \beta l + j R_0 \sin \beta l}{R_0 \cos \beta l + j \underline{Z}_E \sin \beta l} \quad (3.81)$$

Division von Zähler und Nenner durch $\cos \beta l$ führt schließlich auf

$$\underline{Z}_A = R_0 \frac{\underline{Z}_E + j R_0 \tan \beta l}{R_0 + j \underline{Z}_E \tan \beta l} \quad (3.82)$$

Die Transformationsformel für die Impedanz hat sich also durch Annahme idealer Verhältnisse deutlich vereinfacht.

3.4.4 Stehwellenverhältnis und Anpassfaktor

Aufgrund der Reflexion am Leitungsende kommt es auf der Leitung zu einer Überlagerung von vorlaufender und rücklaufender Welle. Je nach Phasenlage überlagern sich die Wellen gleichsinnig, es entsteht ein Maximum, oder gegensinnig, es entsteht ein Minimum. Auf der Leitung bildet sich ein Interferenzmuster, welches mit einer Messleitung relativ leicht ausgemessen werden kann. Da dieses Muster seine Ursache in der Reflexion am Leitungsende hat, liegt der Gedanke nahe, daraus auf eben diesen Reflexionsfaktor zu schließen. Sei

$$\underline{r}_E = r_E \cdot e^{j\varphi_E} \quad (3.83)$$

\underline{r}_E transformiert sich gemäß

$$\underline{r} = \underline{r}_E \cdot e^{-j2\beta l} \quad (3.84)$$

über die Leitung, wobei mit l der Abstand vom Leitungsende gemeint ist. Für den komplexen Zeiger der Spannung auf der Leitung gilt damit

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_v(l) + \underline{U}_r(l) = \underline{U}_v \cdot (1 + \underline{r}) \quad (3.85)$$

und für seinen Betrag

$$|\underline{U}(l)| = |\underline{U}_v(l)| \cdot |1 + \underline{r}| \quad (3.86)$$

Wegen der Verlustlosigkeit der Leitung ist der Betrag der vorlaufenden Spannungswelle überall gleich. Ein Maximum oder ein Minimum von $|\underline{U}|$ ergibt sich folglich beim Maximum bzw. Minimum von $|1 + \underline{r}|$, weshalb dieser Term einer genaueren Betrachtung zu unterziehen ist.

$$1 + \underline{r} = 1 + r_E \cdot e^{j\varphi_E} \cdot e^{-j2\beta l} \quad (3.87)$$

Dieser Sachverhalt ist in Bild 3-10 veranschaulicht. Die Winkellage von \underline{r} hängt von der Länge l ab. $|1 + \underline{r}|$ wird offenbar maximal, wenn \underline{r} reell und positiv ist, also für

$$\varphi_E - 2\beta l = 0$$

Somit findet man das erste Spannungsmaximum in einem Abstand

$$l_{\text{Umax}} = \frac{\varphi_E}{2\beta} \quad (3.88)$$

vom Leitungsende. Umgekehrt wird $|1+\underline{r}|$ minimal, wenn \underline{r} reell und negativ ist, also für

$$\varphi_E - 2\beta l = \pm \pi . \quad (3.89)$$

Das erste Minimum liegt also bei

$$l_{\text{Umin}} = \frac{\pi + \varphi_E}{2\beta} . \quad (3.90)$$

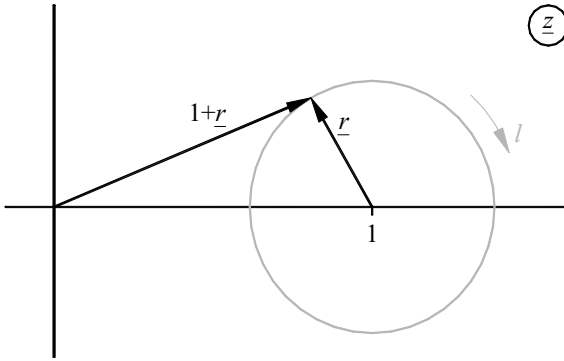


Bild 3-10 Veranschaulichung der Gleichung (3.87)

Das Plus-Zeichen auf der rechten Seite von (3.89) besitzt keine Relevanz, es würde auf einen negativen Abstand führen. Man entnimmt dem Bild 3-10 auch, dass im Fall der Totalreflexion ($|\underline{r}| = 1$) das Spannungsminimum Null wird. Es kommt also punktuell zu einer vollkommenen Signalauslöschung. Spannungsmaximum und -minimum liefern nun das sogenannte *Stehwellenverhältnis*

$$s := \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{min}}} = \frac{1+r_E}{1-r_E} . \quad (3.91)$$

s wird VSWR genannt, was für *voltage standing wave ratio* steht. Wie erwähnt strebt s im Falle der Totalreflexion gegen unendlich, was in der Praxis Ärger bereiten kann. Gelegentlich wird deshalb der *Anpassfaktor*

$$m := \frac{1}{s} = \frac{1-r_E}{1+r_E} \quad (3.92)$$

bevorzugt. Nun kann der Reflexionsfaktor nach Betrag und Argument aus dem Stehwellenverhältnis und dem Abstand des ersten Spannungsmaximums vom Leitungsende errechnet werden.

$$\begin{aligned} r_E &= \frac{s-1}{s+1} = \frac{1-m}{1+m} \\ \varphi_E &= l_{\text{Umax}} \cdot 2\beta \end{aligned} \quad (3.93)$$

3.4.5 Spezialfall verlustlose $\lambda/4$ -Leitung

Wir betrachten nun eine Leitung, deren Länge gerade ein Viertel der Wellenlänge beträgt. Man kann schreiben

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{2\pi}{\beta} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2\beta} . \quad (3.94)$$

Für die Transformation des Reflexionsfaktors vom Leitungsende zum Anfang hat das folgende Konsequenz:

$$\underline{r}_A = \underline{r}_E \cdot e^{-j2\beta l} = \underline{r}_E \cdot e^{-j\pi}$$

also

$$\underline{r}_A = -\underline{r}_E . \quad (3.95)$$

Der Reflexionsfaktor wird demnach genau invertiert. In diesem Fall transformiert sich ein Leerlauf in einen Kurzschluss und umgekehrt. Betrachtet man eine $\lambda/4$ lange Leitung, die auf einer Seite kurzgeschlossen ist, auf der anderen leer läuft, so stellt man fest, dass sich eine Welle nach zweimaliger Reflexion gerade wieder mit sich selbst überlagert. Dieses Gebilde ist also in gewissem Sinn resonanzfähig, weshalb man auch vom $\lambda/4$ -Resonator spricht. Bei der Realisierung von Antennen werden deshalb solche Abmessungen bevorzugt.

3.5 Das SMITH-Diagramm

3.5.1 Einführung

Im Jahr 1939 stellte P.H. SMITH ein *Leitungsdiagramm 2. Art* vor [6], das heute von der Fachwelt vorwiegend SMITH-Diagramm oder auch SMITH-Chart genannt wird. Es bot gegenüber einem bereits gebräuchlichen vergleichbaren Arbeitsmittel ¹⁰ entscheidende Vorteile und entwickelte sich rasch zu einem Standardwerkzeug des HF-Technikers. Das hierbei dargestellte krummlinige Koordinatensystem zeigt eine charakteristische Kombination ineinander greifender Kreise (siehe Bild 3-16) und wird deshalb im Bereich der Hochfrequenztechnik gerne als Logo verwendet (vgl. Umschlagseite dieses Buches).

Mit Hilfe dieses Diagramms kann man eine Reihe von Rechenoperationen, die in der Hochfrequenztechnik immer wieder vorkommen und auf sehr anspruchsvolle Rechenwege führen, grafisch bewerkstelligen, und zwar äußerst einfach. Wegen der eingeschränkten Präzision grafischer Verfahren eignet es sich nicht zur exakten Schaltungsanalyse oder zur genauen Dimensionierung von Bauteilen. Der Nutzen für den Anwender liegt vielmehr darin, dass komplizierte Zusammenhänge übersichtlich und leicht nachvollziehbar dargestellt werden können. Außerdem ermöglicht es eine grobe Abschätzung von Bauteilen, die für bestimmte Zwecke benötigt werden, z. B. für Leistungsanpassung. Die dabei verfügbare Genauigkeit reicht in der Praxis meistens aus. Viele Messgeräte und Simulationsprogramme zeigen Ergeb-

¹⁰ Dieses bekam zugleich den Namen Leitungsdiagramm 1. Art und geriet augenblicklich in Vergessenheit.

nisse in Form von Ortskurven im SMITH-Diagramm an; diese lassen sich nur dann vernünftig interpretieren, wenn das Diagramm als solches verstanden wurde. Eine fundierte Kenntnis dieses Werkzeugs ist deshalb auch in der heutigen Zeit für den Hochfrequenztechniker unabdingbar.

Von Abschnitt 3.3.1 ist bekannt, dass Impedanz und Reflexionsfaktor gemäß

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_0} \\ \underline{Z} &= \underline{Z}_0 \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}}\end{aligned}\quad (3.96)$$

miteinander korrespondieren. \underline{Z}_0 ist dabei die Wellenimpedanz der Leitung. Für die effektive Arbeit mit dem SMITH-Diagramm ist es erforderlich sich auf ideale, d.h. verlustlose Leitungen zu beschränken, welche bekanntlich eine reelle Wellenimpedanz R_0 haben (vgl. 3.4.1). Durch Definition der *normierten Impedanz*

$$\begin{aligned}\underline{Z}_N &:= \frac{\underline{Z}}{R_0} = R_N + jX_N \\ R_N &:= \frac{R}{R_0}, \quad X_N := \frac{X}{R_0}\end{aligned}\quad (3.97)$$

wird aus (3.96)

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \frac{\underline{Z}_N - 1}{\underline{Z}_N + 1} = \frac{R_N + jX_N - 1}{R_N + jX_N + 1} \\ \underline{Z}_N &= \frac{\underline{r} + 1}{\underline{r} - 1}\end{aligned}\quad (3.98)$$

Der Trick besteht nun darin, Reflexionsfaktor und normierte Impedanz in einem gemeinsamen Diagramm darzustellen. Für den Reflexionsfaktor wählt man dabei eine gewöhnliche GAUSS'sche Zahlenebene, während die normierte Impedanz nach Real- und Imaginärteil in einem krummlinigen Koordinatensystem abzulesen ist. Man befasst sich gewöhnlich nur mit passiven Abschlüssen; das Diagramm ist also auf den Bereich $|\underline{r}| \leq 1$ beschränkt und gewinnt somit Kreisgestalt. Eine Erweiterung auf aktive Abschlüsse ist möglich, wird aber eher selten verwendet.

3.5.2 Linien konstanten Realteils der Impedanz

Wir betrachten eine normierte Impedanz

$$\underline{Z}_N = R_N + jX_N, \quad (3.99)$$

deren Realteil einen festen nichtnegativen Wert R_N hat, während der Imaginärteil X_N variabel ist und beliebige positive oder negative Werte annehmen kann. Nun wird folgende Behauptung aufgestellt:

Die zugehörigen Reflexionsfaktoren bilden in der komplexen \underline{r} -Ebene einen Kreis durch den Punkt $\underline{r} = 1$, dessen Mittelpunkt bei m zwischen 0 und 1 auf der reellen Achse liegt.

$$0 \leq m < 1, \quad m \text{ reell} \quad (3.100)$$

Der Kreis hat demnach den Radius $1-m$. Bild 3-11 veranschaulicht diese Behauptung.

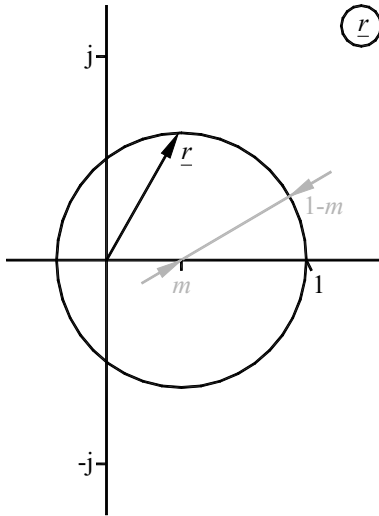


Bild 3-11 Linie konstanten Realteils von Z_N

Die Kreisgleichung lässt sich folgendermaßen formulieren:

$$|r - m| = 1 - m$$

Mit (3.98) für den Reflexionsfaktor wird daraus

$$\left| \frac{R_N + jX_N - 1}{R_N + jX_N + 1} - m \right| = 1 - m.$$

Man bringt die linke Gleichungsseite auf einen Hauptnenner

$$\left| \frac{R_N(1-m) - (1+m) + jX_N(1-m)}{R_N + jX_N + 1} \right| = 1 - m$$

und multipliziert mit diesem durch.

$$|R_N(1-m) - (1+m) + jX_N(1-m)| = (1-m) |R_N + jX_N + 1|$$

Nun werden die Beträge der komplexen Zahlen gebildet und beide Gleichungsseiten quadriert

$$[R_N(1-m) - (1+m)]^2 + X_N^2(1-m)^2 = (1-m)^2 [(R_N + 1)^2 + X_N^2],$$

was schließlich auf

$$[R_N(1-m) - (1+m)]^2 = (1-m)^2 (R_N + 1)^2 \quad (3.101)$$

führt. In dieser Gleichung ist der Imaginärteil X_N nicht mehr enthalten, sie gilt also für beliebige Werte von X_N , und damit ist die Behauptung bewiesen.

Im nächsten Schritt soll der Zusammenhang zwischen R_N und der Mittelpunktskoordinate m hergeleitet werden. Ausmultiplikation von (3.101) liefert

$$R_N^2 (1 - m)^2 - 2 R_N (1 - m^2) + (1 + m)^2 = (1 - m)^2 (R_N^2 + 2 R_N + 1) \quad (3.102)$$

Algebraische Vereinfachung führt auf

$$R_N (4m - 4) = -4m \quad (3.103)$$

woraus schließlich

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{m}{1 - m} \\ m &= \frac{R_N}{1 + R_N} \end{aligned}$$

(3.104)

wird. Man sieht, dass der Definitionsbereich $0 \leq R_N < \infty$ auf den Wertebereich $0 \leq m < 1$ abgebildet wird. In Tabelle 3.3 sind einige Wertepaare zusammengestellt, Bild 3-12 zeigt die zugehörigen Kreise. Weiter erkennt man, dass eine Reaktanz ($R = 0$) auf die Mittelpunktskoordinate $m = 0$ und damit auf den Kreis $|\underline{z}| = 1$ führt. Ein Leerlauf ($R \rightarrow \infty$) hat $m = 1$, also den Punkt $\underline{z} = 1$ zur Folge.

Tabelle 3.3 Wertepaare

R_N	0	0,333	1	3	∞
m	0	0,25	0,5	0,75	1

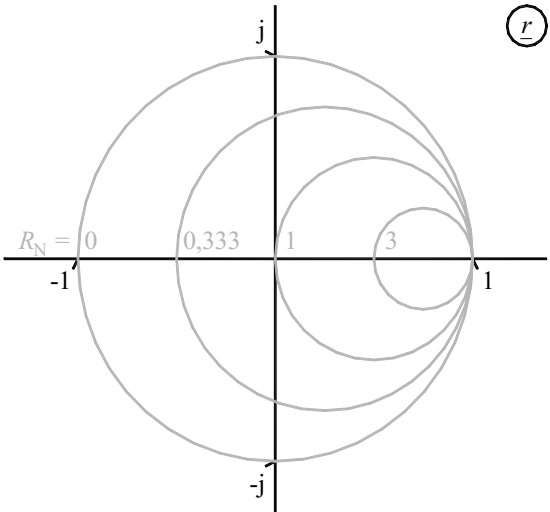


Bild 3-12 Kreise konstanten Realteils von \underline{Z}_N

3.5.3 Linien konstanten Imaginärteils der Impedanz

Jetzt wird eine normierte Impedanz

$$\underline{Z}_N = R_N + jX_N \quad (3.105)$$

betrachtet, deren Realteil R_N beliebige nichtnegative Werte annehmen kann, während der Imaginärteil X_N festgehalten wird. Die Behauptung lautet nun:

Die zugehörigen Reflexionsfaktoren liegen in der komplexen \underline{r} -Ebene auf einem Kreis durch den Punkt $\underline{r} = 1$, um den Mittelpunkt $1+jm$, wobei m beliebige positive oder negative Werte annehmen kann.

Der Kreis hat also den Radius $|m|$. Bild 3-13 veranschaulicht diese Behauptung. Wir beschränken uns zunächst auf positive Werte von m . Dann lautet die Kreisgleichung

$$|\underline{r} - (1 + jm)| = m \quad (3.106)$$

Mit (3.98) für den Reflexionsfaktor wird daraus

$$\left| \frac{R_N + jX_N - 1}{R_N + jX_N + 1} - (1 + jm) \right| = m$$

Die linke Gleichungsseite wird auf einen Hauptnenner gebracht

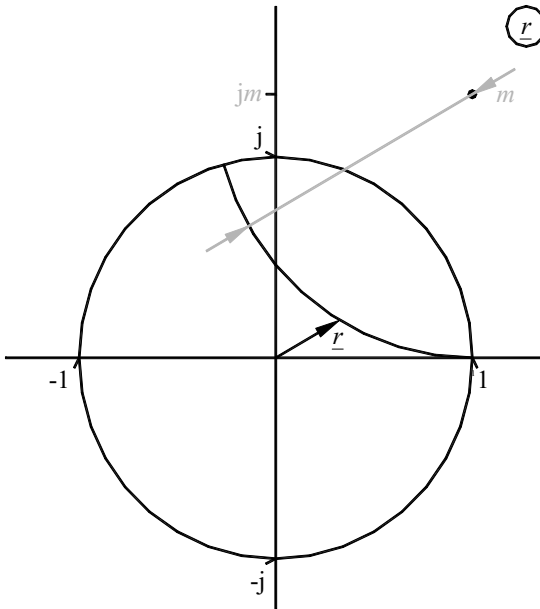


Bild 3-13 Kreis konstanten Imaginärteils von \underline{Z}_N

$$\left| \frac{R_N(1-1-jm) + (-1-1-jm) + jX_N(1-1-jm)}{R_N + jX_N + 1} \right| = m$$

mit diesem wird durchmultipliziert.

$$|(-2 + mX_N) + j(-mR_N - m)| = m \cdot |R_N + 1 + jX_N|$$

Daraus erhält man für die Betragsquadrate

$$\begin{aligned} 4 - 4mX_N + m^2X_N^2 + m^2R_N^2 + 2m^2R_N + m^2 &= \\ m^2R_N^2 + 2m^2R_N + m^2 + m^2X_N^2 & \end{aligned}$$

also

$$4 - 4mX_N = 0 \quad . \tag{3.107}$$

In Gleichung (3.107) ist der Realteil R_N nicht mehr enthalten, sie gilt also für beliebige Werte von R_N , die Behauptung ist bewiesen. Für den Zusammenhang zwischen X_N und m gilt somit

$$X_N = \frac{1}{m} \quad m = \frac{1}{X_N} \quad . \tag{3.108}$$

Die Ergebnisse gelten genauso für negative Werte von m . Der Nachweis wird dem interessierten Leser empfohlen. In Tabelle 3.4 sind einige Wertepaare zusammengestellt, Bild 3-14 zeigt Kreise konstanten Imaginärteils, wobei man sich auf das Gebiet $|\underline{z}| \leq 1$ beschränkt.

Tabelle 3.4 Wertepaare

X_N	0	$\pm 0,4$	± 1	$\pm 2,5$	$\pm \infty$
M	$\pm \infty$	$\pm 2,5$	± 1	$\pm 0,4$	0

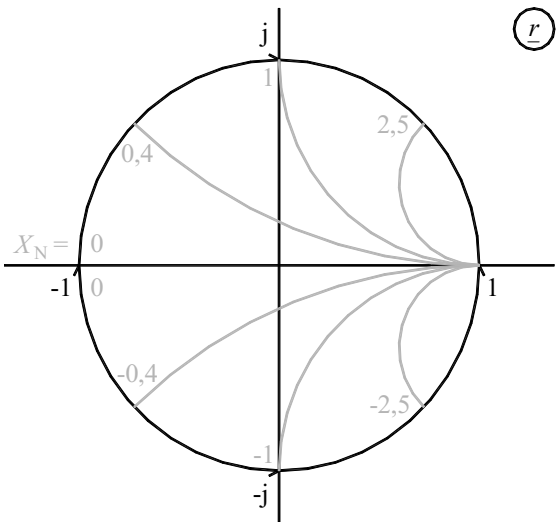


Bild 3-14 Kreise konstanten Imaginärteils von \underline{Z}_N

Man kann sich noch Gedanken zu den Winkeln machen, unter denen sich die Kreise schneiden. Alle Kreise gehen durch den Punkt $\underline{z} = 1$. Die Tangente an die Kreise konstanten Real-

teils ist dort vertikal, die an die Kreise konstanten Imaginärteils horizontal. Sie schneiden sich also unter einem rechten Winkel. Deshalb erfolgt auch der zweite Schnittpunkt unter einem rechten Winkel. Die Kreise schneiden sich grundsätzlich unter einem Winkel von 90° .

3.5.4 Herleitung durch konforme Abbildung

Das SMITH-Diagramm kann sehr elegant mit Methoden der Funktionentheorie konstruiert werden. Kenntnisse in diesen Bereichen der höheren Mathematik werden allerdings von der Zielgruppe, an die sich dieses Werk wendet, nicht erwartet. Deshalb wurde bewusst darauf verzichtet und ein zwar umständlicher, aber leicht nachvollziehbarer Weg vorgezogen. Für den interessierten Leser soll der funktionentheoretische Ansatz kurz skizziert werden.

Die gebrochen rationale Berechnungsvorschrift

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_N - 1}{\underline{Z}_N + 1} \quad (3.109)$$

bedeutet eine Abbildung der komplexen \underline{Z}_N -Ebene auf die ebenfalls komplexe \underline{r} -Ebene. Die Funktion ist polfrei mit Ausnahme des Punktes $\underline{Z}_N = -1$, der hier mit der Beschränkung auf passive Abschlüsse ausgeschlossen wurde. Die Funktion (3.109) vermittelt deshalb eine konforme Abbildung, welche folgende Eigenschaften hat:

- (i) Kreise werden in Kreise abgebildet, wobei eine Gerade als Kreis mit unendlichem Radius aufzufassen ist.
- (ii) Die Abbildung ist winkeltreu. Zwei Linien schneiden sich in der \underline{Z}_N -Ebene unter dem gleichen Winkel wie ihre Bilder in der \underline{r} -Ebene.

Ein Netz von Geraden konstanten Real- bzw. Imaginärteils in der \underline{Z}_N -Ebene wird also in ein Netz von Kreisen in der \underline{r} -Ebene abgebildet. Die Geraden in der \underline{Z}_N -Ebene schneiden sich rechtwinklig, demzufolge auch die Kreise in der \underline{r} -Ebene.

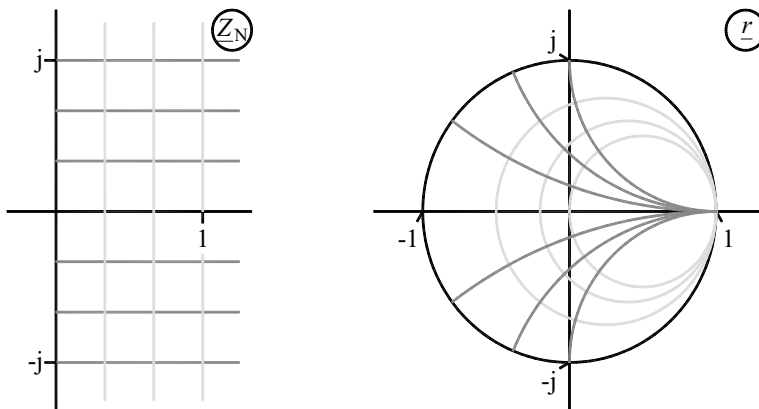


Bild 3-15 Konforme Abbildung der \underline{Z}_N -Ebene auf die \underline{r} -Ebene

Nun ist es leicht, durch Abbildung einzelner Punkte das komplette SMITH-Diagramm zu konstruieren.

3.5.5 Das komplette Diagramm

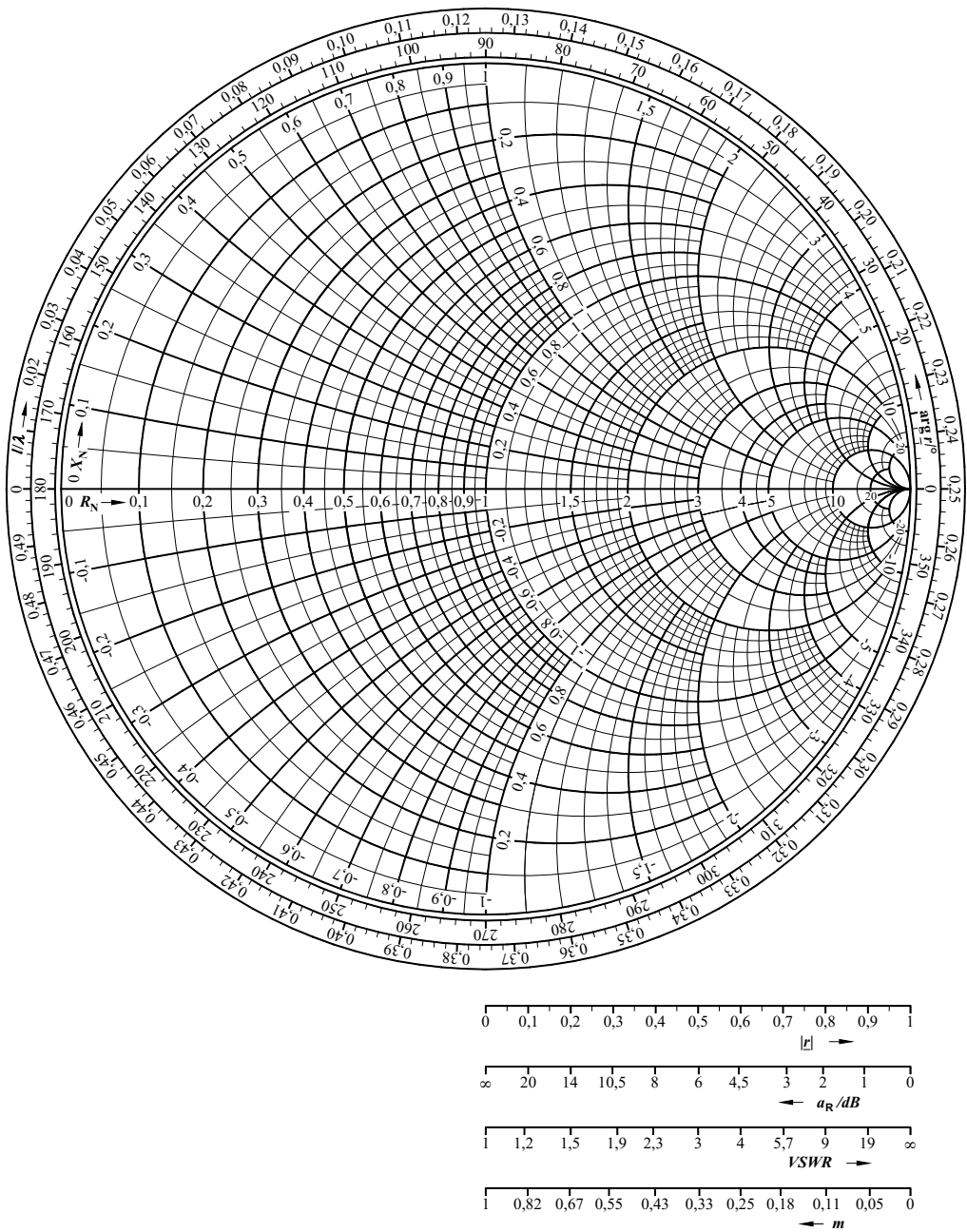


Bild 3-16 Das SMITH-Diagramm

Bild 3-16 zeigt ein SMITH-Diagramm, wie es in der Praxis verwendet wird. Die Kreise konstanten Real- sowie Imaginärteils sind wieder zu finden. Normierte Impedanz und Reflexionsfaktor können mit guter Genauigkeit in ihren Koordinaten abgelesen werden. Am Umfang sind zwei Skalen angebracht. Die innere ist eine gewöhnliche 360° -Winkelskala für das Argument des Reflexionsfaktors. Die äußere dient zur Durchführung von Leitungstransformationen; sie wird in Abschnitt 3.5.6 erklärt. Rechts unter dem Diagramm findet man vier zusammengehörige Maßstäbe. Hier können der Betrag des Reflexionsfaktors, die Reflexionsdämpfung, das Stehwellenverhältnis (VSWR) und der Anpassfaktor simultan abgelesen werden. Dazu misst man den Abstand des interessierenden Punktes vom Zentrum des Diagramms und überträgt diese Länge in den Maßstab, wobei von dessen linkem Rand zu messen ist. Diese Maßstäbe sollen dem Leser zugleich ein Gefühl für das Zusammenspiel der aus dem Reflexionsfaktor abgeleiteten Größen vermitteln. So kann man beispielsweise unter $|\underline{r}| = 0,5$ die zugehörige Reflexionsdämpfung 6dB, das Stehwellenverhältnis 3 und den Anpassfaktor 0,33 ablesen.

Es folgen Beispiele.

- (i) Gegeben ist ein Leitungsabschluss gemäß Bild 3-17. Gesucht ist der zugehörige Reflexionsfaktor \underline{r} . Die Frequenz ist $f = 3\text{MHz}$, die Leitung hat einen Wellenwiderstand von 50Ω . Die Impedanz am Leitungsende lautet in normierter Form

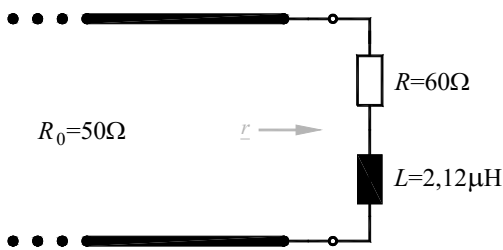


Bild 3-17 Leitungsabschluss

$$\underline{Z}_N = \frac{R + j\omega L}{R_0} = 1,2 + j0,8$$

Dieser Wert wird im SMITH-Diagramm markiert (Zeiger unter 56° in Bild 3-18). Die Länge des Pfeils wird in den Maßstab für $|\underline{r}|$ übertragen, man liest 0,35 ab. Die Verlängerung des Zeigers trifft die Winkelskala bei 56° . Die Lösung lautet demnach

$$\underline{r} = 0,35 / 56^\circ = 0,35 \cdot e^{j0,977}.$$

- (ii) Gegeben sei der Reflexionsfaktor

$$\underline{r} = 0,5 / -120^\circ.$$

Er wird unter Verwendung des Maßstabs für $|\underline{r}|$ und der Winkelskala in das SMITH-Diagramm eingetragen (Zeiger unter 240° in Bild 3-18; -120° entspricht $+240^\circ$). Man liest die normierte Impedanz

$$\underline{Z}_N = 0,42 - j0,5$$

ab.

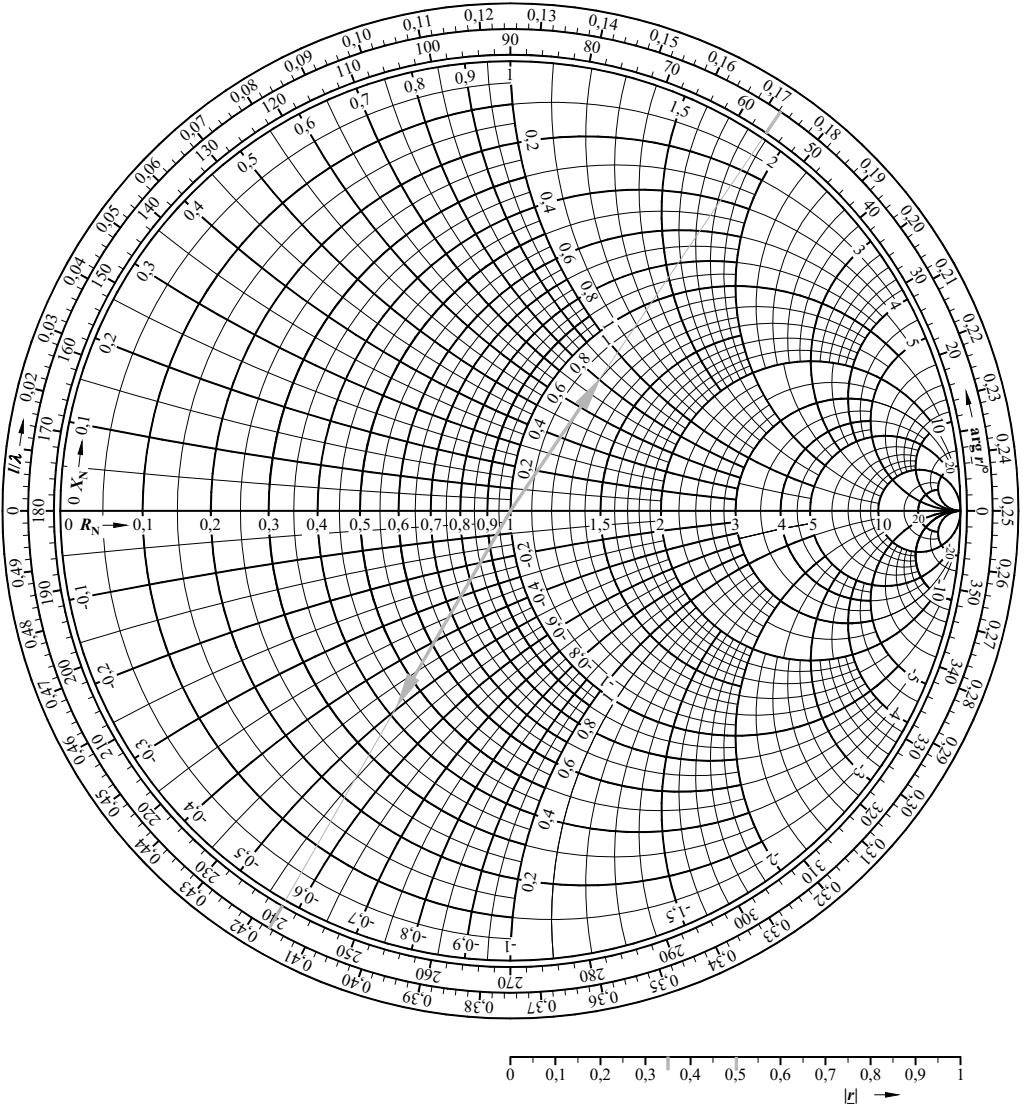


Bild 3-18 Reflexionsfaktoren und normierte Impedanzen im SMITH-Diagramm

3.5.6 Leitungstransformationen

Bild 3-19 zeigt eine beschaltete ideale Leitung.

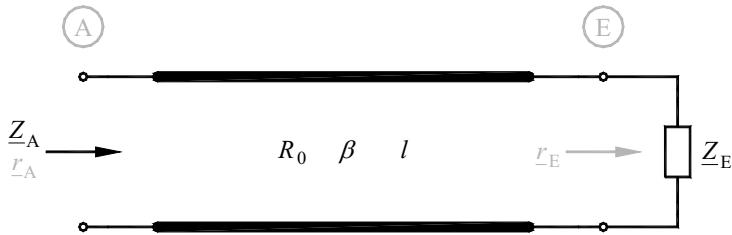


Bild 3-19 Beschaltete Leitung

Impedanz und Reflexionsfaktor transformieren sich über die Leitung in neue Werte. In Abschnitt 3.4.3 wurde für den Reflexionsfaktor am Leitungsanfang

$$\underline{r}_A = \underline{r}_E \cdot e^{-j2\beta l} \quad (3.110)$$

hergeleitet. Man findet \underline{r}_A also durch Drehung des Zeigers \underline{r}_E um den Winkel $2\beta l$ im Uhrzeigersinn. Die normierte Impedanz \underline{Z}_{AN} kann dann sofort nach Real- und Imaginärteil abgelesen werden. Das SMITH-Diagramm erspart die Anwendung der ungemütlichen Formel (3.82). Mit dem aus (3.32) folgenden Zusammenhang

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.111)$$

folgt für den Drehwinkel

$$\varphi = 4\pi \cdot \frac{l}{\lambda} \quad , \quad (3.112)$$

wobei φ im Bogenmaß gemeint ist. Für den Winkel im Gradmaß erhält man

$$\varphi = \frac{l}{\lambda} \cdot 720^\circ \quad . \quad (3.113)$$

Der Winkel ist also der Leitungslänge proportional. Deshalb ist das SMITH-Diagramm am Umfang zusätzlich mit einer im Uhrzeigersinn zu zählenden l/λ -Skala versehen. Da eine Leitung der Länge $\lambda/2$ eine Drehung des Zeigers um 360° verursacht (ein Abschluss transformiert sich über diese Leitungslänge in sich selbst), reicht die Skala von 0 bis 0,5. Führt die Transformation auf ein Ergebnis

$$\frac{l}{\lambda} > 0,5 \quad , \quad (3.114)$$

so sind 0,5 oder Vielfache davon zu subtrahieren, bis sich ein Wert zwischen 0 und 0,5 ergibt.

Bei der praktischen Anwendung ist in aller Regel die Frequenz bekannt. Dann liegt es nahe, die Wellenlänge daraus zu berechnen. Dabei muss der Verkürzungsfaktor einkalkuliert werden (vgl. 3.4.2) und es folgt

gegeben. Gesucht ist die Impedanz am Leitungsanfang. Wir tragen $\underline{Z}_{\text{EN}}$ in das SMITH-Diagramm ein. Verlängerung des Zeigers führt auf den Wert 0,065 in der l/λ -Skala. Nun muss der Zeiger gedreht werden - die Pfeilspitze wandert also auf einem Kreis um das Zentrum des Diagramms -, bis sie unter dem Wert

$$\frac{l}{\lambda} = 0,065 + 0,298 = 0,363$$

zu liegen kommt. Man liest in den \underline{Z}_{N} -Koordinaten

$$\underline{Z}_{\text{AN}} = 0,55 - j1,0$$

für die normierte Impedanz am Leitungsanfang ab.

Wir wollen uns noch speziell der Transformation von Kurzschluss und Leerlauf zuwenden. Diese verursachen bekanntlich die Reflexionsfaktoren

$$\underline{r}_{\text{K}} = -1 \quad (3.116)$$

bzw.

$$\underline{r}_{\text{L}} = +1 \quad (3.117)$$

Die Transformation erfolgt auf dem Kreis $|\underline{r}| = 1$. Dieser ist dem Kreis $R_{\text{N}} = 0$ identisch. Kurzschluss und Leerlauf transformieren sich demnach grundsätzlich in reaktive Elemente

$$\underline{Z}_{\text{A}} = 0 + jX_{\text{A}} \quad (3.118)$$

Diese Erkenntnis hat zwei Konsequenzen:

- (i) Kurzschluss und Leerlauf dürfen als reaktive Elemente aufgefasst werden. Das ist auch insofern plausibel, als sie keine Wirkleistung aufnehmen.
- (ii) Reaktive Elemente können durch kurzgeschlossene oder leerlaufende Leitungsstücke realisiert werden. Da die Wellenlänge von der Frequenz abhängt, ist diese Äquivalenz allerdings nur für eine bestimmte Frequenz gültig.

Hierfür gibt es ein schönes Beispiel aus der Musik, also der akustischen Wellenlehre. Blockflöten oder Klarinetten verfügen über quer zum Längsrohr angebrachte Bohrungen, welche der Spieler mit den Fingern oder über Klappenmechanismen schließen kann. Er erzeugt damit kurzgeschlossene oder leerlaufende Stichleitungen, die sich in unterschiedliche „Reaktanzen“ in die Mitte des Instruments transformieren und so eine Kettenschaltung vergleichbar einem elektrischen LC-Filter bilden.

Beispiel (in Bild 3-20 dunkelgrau dargestellt): Eine am Ende kurzgeschlossene 50Ω -Leitung mit dem Verkürzungsfaktor $VK = 0,8$ soll bei der Frequenz $f = 1,2\text{GHz}$ an ihrem Anfang eine Induktivität von $1,99\text{nH}$ realisieren. Gesucht ist die erforderliche Leitungslänge. Bild 3-21 veranschaulicht die Problemstellung. Man berechnet zunächst die normierte Impedanz der Induktivität.

$$\underline{Z}_{\text{AN}} = \frac{j\omega L}{R_0} = j \frac{2\pi \cdot 1,2\text{GHz} \cdot 1,99\text{nH}}{50\Omega} = j0,3$$

Diese wird in das SMITH-Diagramm eingetragen. Der Kurzschluss liegt im SMITH-Diagramm ganz links ($\underline{Z}_{\text{KN}} = 0$, $\underline{r}_{\text{K}} = -1$). Er muss wie dargestellt transformiert werden, um auf den dunkelgrauen Zeiger zu treffen. In der l/λ -Skala kann man die hierfür erforderliche Leitungslänge

$$l \approx 0,046 \lambda = 0,046 \cdot \lambda_K \cdot \frac{c_0}{f} = 0,046 \cdot 0,8 \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,2 \text{ GHz}} = 9,2 \text{ mm}$$

ablesen.

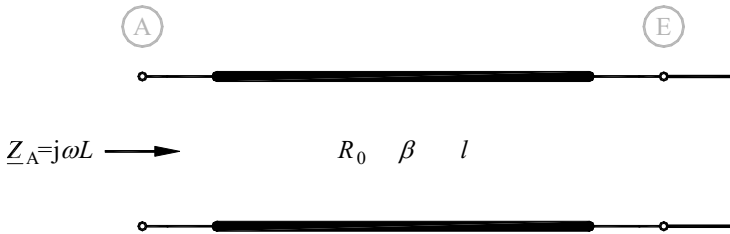


Bild 3-21 Transformation eines Kurzschlusses in eine Induktivität

3.5.7 Darstellung der Admittanz

Völlig analog zur normierten Impedanz kann durch

$$\underline{Y}_N := \underline{Y} \cdot R_0 = \frac{1}{\underline{Z}} \cdot R_0 = \frac{1}{\underline{Z}_N} \quad (3.119)$$

eine normierte Admittanz definiert werden. Wir ersetzen nun in der Gleichung (3.98)

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_N - 1}{\underline{Z}_N + 1}$$

versuchsweise \underline{Z}_N durch \underline{Y}_N und erhalten formal

$$\tilde{\underline{r}} = \frac{\underline{Y}_N - 1}{\underline{Y}_N + 1} = \frac{\frac{1}{\underline{Z}_N} - 1}{\frac{1}{\underline{Z}_N} + 1} = \frac{1 - \underline{Z}_N}{1 + \underline{Z}_N} = -\underline{r} \quad (3.120)$$

$\tilde{\underline{r}}$ liegt also genau spiegelbildlich zu \underline{r} . Dies führt auf das interessante Ergebnis, dass \underline{Y}_N gerade spiegelbildlich zu \underline{Z}_N in den Koordinaten für \underline{Z}_N abgelesen werden kann.

Beispiel (in Bild 3-20 schwarz dargestellt): Es sei die normierte Impedanz

$$\underline{Z}_N = 0,4 + j1,9$$

gegeben. Der Wert wird im SMITH-Diagramm markiert. Spiegelbildlich liest man

$$\underline{Y}_N \approx 0,1 - j0,5$$

ab. Es ist dem Leser anheimgestellt, die Korrespondenz

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}$$

rechnerisch zu verifizieren.

3.5.8 Stehwellenverhältnis und Anpassfaktor

Diese Größen sind schon von Abschnitt 3.4.4 her bekannt. Wir wollen nun versuchen, sie im SMITH-Diagramm wiederzufinden. Die Transformation einer Abschlussimpedanz über eine Leitung vollzieht sich auf einem Kreis um das Zentrum. In Bild 3-22 ist dies für eine willkürlich gewählte Abschlussimpedanz \underline{Z}_E , welche mit einem Reflexionsfaktor \underline{r}_E korrespondiert, veranschaulicht. Von besonderem Interesse sind nun die beiden Schnittpunkte des Transformationskreises mit der reellen Achse. Am Punkt (1) erreicht der Betrag der transformierten Impedanz offenbar ein Minimum, denn der Realteil ist minimal und der Imaginärteil verschwindet. Für Reflexionsfaktor und Impedanz ergibt sich

$$\begin{aligned} r_1 &= -|\underline{r}_E| = -r_E \\ \underline{Z}_1 &= R_0 \cdot \frac{1-r_E}{1+r_E} =: R_1 \end{aligned} \quad (3.121)$$

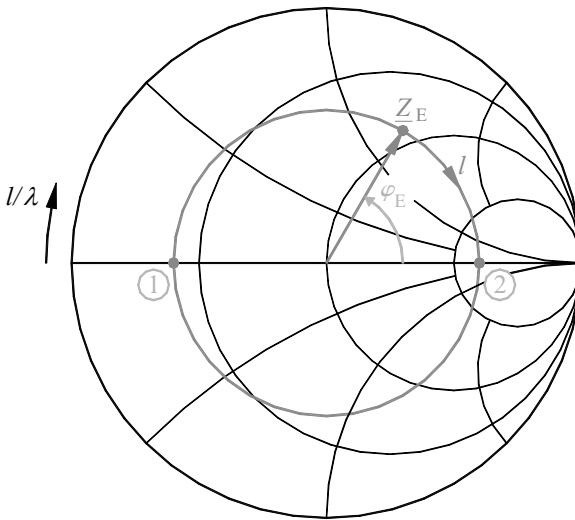


Bild 3-22 Leitungstransformation

Im Punkt (2) wird $|\underline{Z}|$ maximal. Die Begründung dafür ist nicht trivial, der Beweis ist aber unproblematisch. Man erhält hier

$$\begin{aligned} r_2 &= |\underline{r}_E| = r_E \\ \underline{Z}_2 &= R_0 \cdot \frac{1+r_E}{1-r_E} =: R_2 \end{aligned} \quad (3.122)$$

Dem zuletzt formulierten Ausdruck sieht man sofort an, dass es sich um den größtmöglichen Wert von $|\underline{Z}|$ bei gegebenem \underline{r}_E handelt. Wegen der generell vorausgesetzten Verlustlosigkeit der Leitung ist die im Spiel befindliche Blindleistung

$$P_B = \frac{U^2}{|Z|} \quad (3.123)$$

überall gleich. Demzufolge nimmt die Spannung unterschiedliche Werte an, und wir erhalten

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{P_B \cdot R_1} = U_{\min} \\ U_2 &= \sqrt{P_B \cdot R_2} = U_{\max} \end{aligned} \quad (3.124)$$

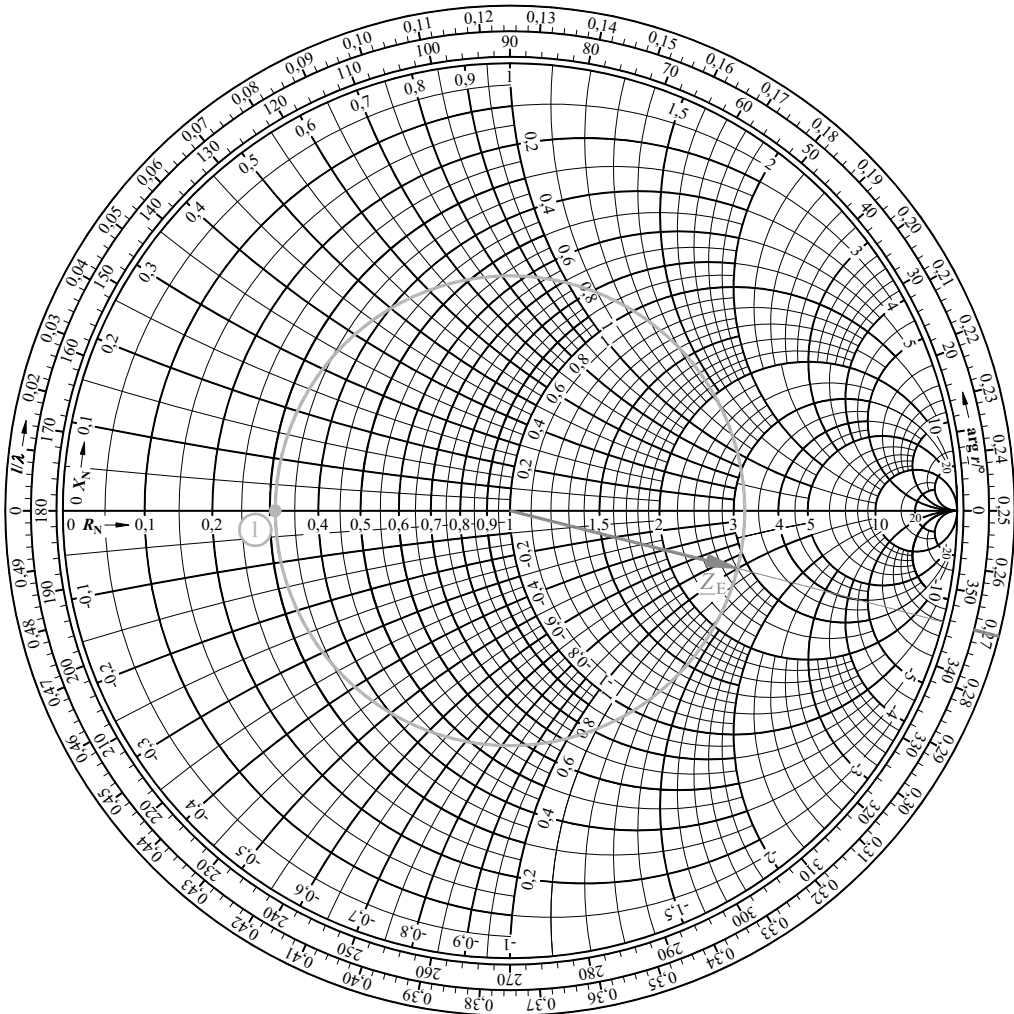


Bild 3-23 Auswertung der Messergebnisse

für den Effektivwert der Spannung an den Punkten (1) bzw. (2). Das Verhältnis von maximaler zu minimaler Spannung auf der Leitung wurde als Stehwellenverhältnis definiert (VSWR), der Kehrwert als Anpassfaktor. Das Ergebnis lautet

$$s = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{m} \quad (3.125)$$

Somit kann man am Transformationskreis das Stehwellenverhältnis ablesen. Auf Grund der speziellen Struktur des SMITH-Diagramms ergibt sich noch eine nette Besonderheit: Der am Punkt (1) ablesbare Wert für R_N ist gleich dem Anpassfaktor m , am Punkt (2) kann man im Maßstab für R_N das Stehwellenverhältnis s ablesen. Der - unschwierige - Beweis dieses Sachverhalts wird dem Leser empfohlen.

Die Leitungslänge zur Transformation der Abschlussimpedanz Z_E zum Punkt (2) (Spannungsmaximum) soll l_2 heißen. Somit ergibt sich

$$2\beta l_2 = \varphi_E \quad (3.126)$$

Aus dem Abstand des ersten Spannungsmaximums vom Leitungsende kann also auf das Argument des Reflexionsfaktors geschlossen werden. Falls Z_E in der unteren Halbebene liegt, erfolgt die Auswertung ganz adäquat. Man findet dann ausgehend vom Leitungsende zunächst ein Minimum und kann aus dessen Lage φ_E bestimmen. Somit ist es möglich, einen unbekannten Reflexionsfaktor und die damit korrespondierende Impedanz allein vermittlels einer Messleitung und eines Voltmeters messtechnisch zu ermitteln.

Beispiel: Auf einer verlustlosen Leitung wurde ein Stehwellenverhältnis $s = 3,2$ gemessen. Das erste Spannungsminimum liegt in einem Abstand $l = 0,23\lambda$ vom Leitungsende. Die Abschlussimpedanz soll mit Hilfe des SMITH-Diagramms gefunden werden. Man zeichnet zunächst einen Kreis um das Zentrum des Diagramms durch den Punkt $R_N = s = 3,2$; dies ist der Transformationskreis. Das Spannungsminimum liegt beim Punkt (1), von dort muss man in der l/λ -Skala um $0,23$ „zurück“ gehen. Mit $0,5 - 0,23 = 0,27$ erhält man den gesuchten Punkt für Z_{EN} . Bild 3-23 zeigt die Operation.

3.5.9 Kombinierte Transformations- und Netzwerkoperationen

Wir können nun resümieren, welche Operationen im SMITH-Diagramm durchführbar sind.

- * Reihenschaltung zweier Impedanzen Z_1 und Z_2 . Real- und Imaginärteil der normierten Impedanzen werden rechnerisch addiert, die Summe im SMITH-Diagramm markiert.
- * Parallelschaltung zweier Impedanzen Z_1 und Z_2 . Die normierten Impedanzen werden zunächst am Zentrum des Diagramms gespiegelt, wodurch sich die normierten Admittanzen ergeben. Diese sind rechnerisch zu addieren, der Summenwert abermals zu spiegeln. Das Resultat ist die normierte Impedanz der Parallelschaltung.
- * Transformation einer Abschlussimpedanz über eine Leitung. Der Zeiger der normierten Impedanz ist im Uhrzeigersinn zu drehen, seine Spitze wandert also auf einem Kreis um das Zentrum. Der erforderliche Winkel ergibt sich aus der l/λ -Skala.
- * Wellenwiderstandssprung. Zwei Leitungen mit unterschiedlichen Wellenwiderständen sind gemäß Bild 3-24 in Kette geschaltet, die Anordnung ist mit einer Impedanz Z_E abgeschlossen. Gesucht ist die Impedanz Z_A am Anfang der Anordnung. Zunächst wird Z_E auf R_{02} normiert

$$\underline{Z}_{\text{EN2}} = \frac{\underline{Z}_{\text{E}}}{R_{02}} \quad (3.127)$$

und in bekannter Weise über l_2 transformiert. Man liest die auf R_{02} normierte Impedanz $\underline{Z}_{\text{N2}}$ an der Kontaktstelle ab. Diese wird entnormiert und gemäß

$$\underline{Z}_{\text{N1}} = \underline{Z}_{\text{N2}} \frac{R_{02}}{R_{01}} \quad (3.128)$$

auf das neue Niveau R_{01} umnormiert. Sodann ist sie über die Länge l_1 in $\underline{Z}_{\text{AN1}}$ zu transformieren. Daraus ergibt sich schließlich

$$\underline{Z}_{\text{A}} = \underline{Z}_{\text{AN1}} \cdot R_{01} \quad (3.129)$$

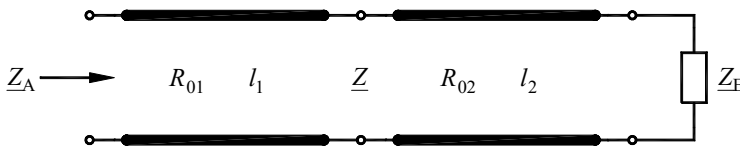


Bild 3-24 Wellenwiderstandssprung

Als Beispiel für kombinierte Operationen wird nun die in Bild 3-25 gezeigte Leitungsverzweigung mit Fehlabschlüssen untersucht.

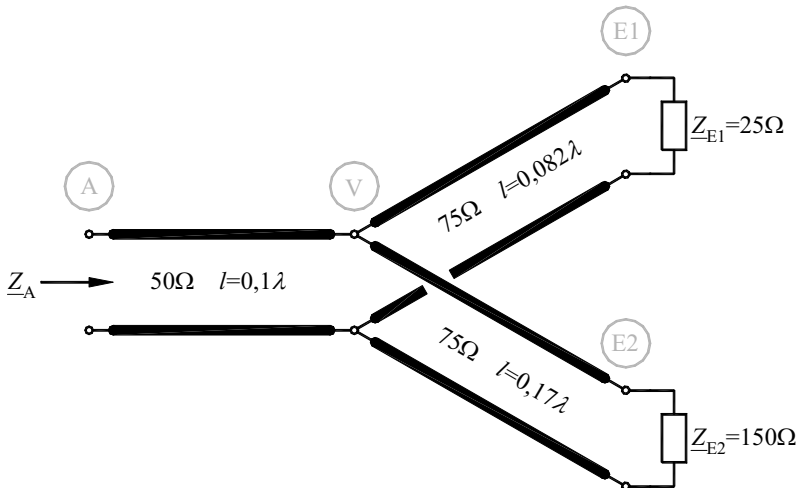


Bild 3-25 Leitungsverzweigung mit Fehlabschlüssen

Die Wellenwiderstände der einzelnen Leitungsstücke sind unterschiedlich. Die Abschlüsse sind zunächst auf 75Ω zu normieren

ab. Die normierte Admittanz der Parallelschaltung ist somit

$$\underline{Y}_{VN75} = \underline{Y}_{V1N75} + \underline{Y}_{V2N75} = 2,20 - j0,42 \quad ,$$

was durch nochmalige Spiegelung auf die normierte Impedanz im Verzweigungspunkt

$$\underline{Z}_{VN75} = 0,44 + j0,08$$

führt. Diese wird rechnerisch auf das neue Impedanzniveau 50Ω umnormiert

$$\underline{Z}_{VN50} = \underline{Z}_{VN75} \cdot \frac{75\Omega}{50\Omega} = 0,66 + j0,12$$

und über $l/\lambda = 0,1$ zum Leitungsanfang transformiert. Nach Entnormierung lautet das Ergebnis

$$\underline{Z}_A = (0,94 + j0,43) \cdot 50\Omega = (47 + j21,5)\Omega \quad .$$

3.5.10 Anpassung mit Hilfe des SMITH-Diagramms

Nun verfolgen wir das Ziel, einen Fehlabschluss durch Zuschaltung von Bauelementen in die Systemimpedanz R_0 zu überführen [3]. Die Anpassung soll verlustfrei erfolgen, es kommen also nur Reaktanzen und verlustlose Leitungen in Frage. Da die Kombination der Elemente frei ist, gibt es eine ganze Menge an Spielformen, die allerdings teilweise Einschränkungen bezüglich des Fehlabchlusses unterliegen. Sie werden im Folgenden besprochen.

- (i) Anpassung durch Längs- und Querreaktanz. Bild 3-27 zeigt die erste Schaltungsvariante, in Bild 3-28 sind die Transformationswege zu sehen.

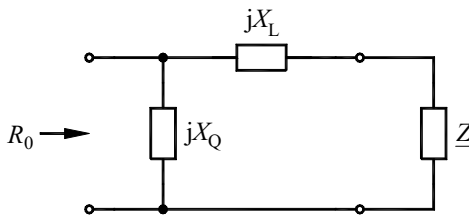


Bild 3-27 Anpassung durch Längs- und Querreaktanz

Die Reihenschaltung von jX_L zum Fehlabschluss Z bedeutet im SMITH-Diagramm eine Bewegung auf einem Kreis konstanten Realteils. Für die nun folgende Parallelschaltung muss die Impedanz in ihre Admittanz überführt werden, was durch Spiegelung am Zentrum erfolgt. Die anschließende Addition von $1/jX_Q$ hat wieder eine Bewegung auf einem Kreis konstanten Realteils zur Folge. Da diese letzte Transformation in den Anpassungspunkt $\underline{Z}_N = 1$ führen soll, muss die Spiegelung schon den Kreis $R_N = 1$ getroffen haben. Dies ist bei der Wahl von X_{LN} zu beachten. Durch Probieren wäre die Aufgabe nicht ingenieurmäßig zu lösen, man bedient sich stattdessen eines einfachen Tricks, und zwar spiegelt man den Kreis $R_N = 1$. Dies ergibt den in Bild 3-28 erkennbaren grauen Hilfskreis, der fortan der GESPIEGELTE KREIS heißen soll. Man dimensioniert nun X_{LN} so, dass $\underline{Z}_N + jX_{LN}$ auf dem gespiegelten Kreis zu liegen kommt, dann führt der Übergang zur Admittanz automatisch auf den Kreis $R_N = 1$ und die Vorschrift zur Dimensionierung von jX_Q ist ablesbar. Man erkennt zweierlei:

1. Die Methode ist auf Fehlabschlüsse mit

$$\operatorname{Re} \underline{Z}_N < 1, \quad (3.130)$$

beschränkt.

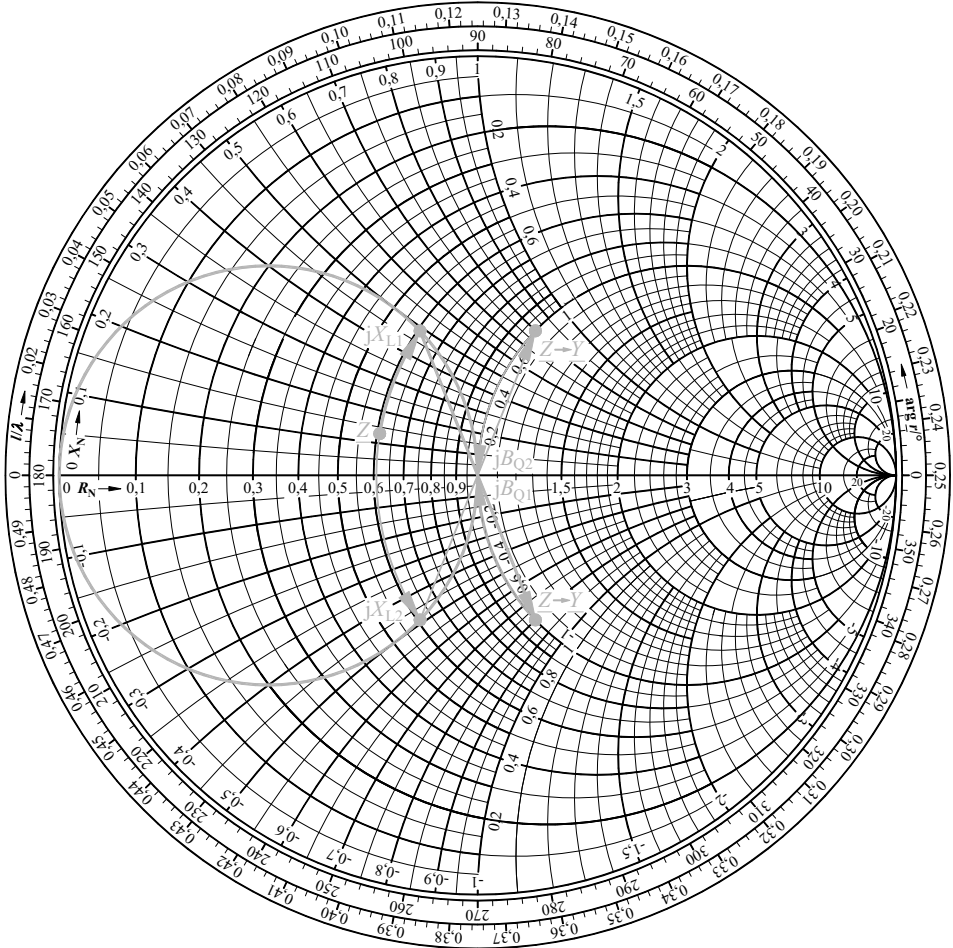


Bild 3-28 Anpassungswege

2. Wenn \underline{Z}_N im Inneren des gespiegelten Kreises liegt, kann das Ziel durch einen positiven oder einen negativen Wert von X_{LN} erreicht werden. Wenn \underline{Z}_N außerhalb des gespiegelten Kreises liegt, gibt es zwei positive oder zwei negative Werte von X_{LN} für den Schnittpunkt, je nachdem, ob \underline{Z}_N unter oder über dem gespiegelten Kreis liegt. Es existieren also in jedem Fall zwei verschiedene Lösungswege. In der Praxis wird man beide durchspielen und sich für die Variante mit den günstigeren Bauteilen entscheiden.

Zur genauen Erläuterung des Verfahrens folgt ein Beispiel. Die Impedanz

$$\underline{Z} = (61 + j13)\Omega ,$$

soll bei der Frequenz $f = 300\text{MHz}$ an ein 100Ω -System angepasst werden. Wir tragen

$$\underline{Z}_N = 0,61 + j0,13 ,$$

und den gespiegelten Kreis in das SMITH-Diagramm Bild 3-28 ein. Durch Zuschalten der normierten Längsreaktanz

$$X_{L1N} = +0,49 - 0,13 = 0,36$$

oder

$$X_{L2N} = -0,49 - 0,13 = -0,62$$

wird der gespiegelte Kreis erreicht. Übergang zur Admittanz führt auf

$$\underline{Y}_N = 1 \mp j0,8 ,$$

man hat also schließlich für Anpassung die normierte Suszeptanz

$$B_{QN} = \pm 0,8$$

zuzuschalten. Für den fett gezeichneten Pfad sollen die erforderlichen Bauteile explizit bestimmt werden.

$$jX_{L1N} = \frac{j\omega L}{R_0} \Rightarrow$$

$$L = \frac{X_{L1N} R_0}{\omega} = \frac{0,36 \cdot 100\Omega}{2\pi \cdot 300\text{MHz}} = 19,1\text{nH}$$

$$jB_{QN} = j\omega C \cdot R_0 \Rightarrow$$

$$C = \frac{B_{QN}}{\omega \cdot R_0} = \frac{0,8}{2\pi \cdot 300\text{MHz} \cdot 100\Omega} = 4,24\text{pF}$$

In Bild 3-29 ist der Fehlabschluss mit der soeben dimensionierten Anpassungsschaltung dargestellt.

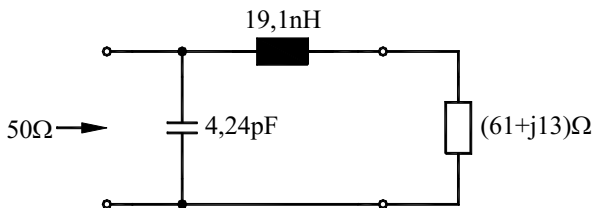


Bild 3-29 Fehlabschluss mit Anpassungsschaltung

- (ii) Anpassung durch Quer- und Längsreaktanzen. Vertauschung der Reaktanzen in Bild 3-27 führt auf das in Bild 3-30 gezeigte Anpassungsnetzwerk. Wegen der Parallelschaltung von jX_Q zu \underline{Z} muss zunächst zur normierten Admittanz \underline{Y}_N übergegangen werden, was durch Spiegelung von \underline{Z}_N am Zentrum erfolgt. Die anschließende Addition der rein imaginären Admittanz $1/jX_Q = jB_Q$ bedeutet wieder eine Bewegung auf einem Kreis konstanten Realteils. Wie vorher ist B_{QN} so zu bemessen, dass dabei der gespiegelte Kreis getroffen wird, es gibt wieder zwei Lösungen. Rückkehr in die Impedanzdarstellung durch abermalige Spiegelung führt zwangsläufig auf den Kreis $R_N = 1$, die noch erforderliche Längsreaktanzen X_L ist unmittelbar ablesbar. Für einen Fehlabschluss

$$\underline{Z}_N = 1,95 - j2,44$$

soll die Anpassung durchgespielt werden. Dem Leser wird empfohlen, den Transformationsweg farblich in Bild 3-28 einzutragen. Der Übergang zur normierten Admittanz erfolgt durch Spiegelung von \underline{Z}_N am Zentrum des Diagramms. Wir lesen

$$\underline{Y}_N = 0,2 + j0,25$$

ab. Nun muss durch Zuschalten einer Suszeptanz zum gespiegelten Kreis transformiert werden. Wir entscheiden uns für den negativen Wert und bewegen uns auf dem Kreis $R_N = 0,2$ nach unten bis zum Punkt $0,2 - j0,4$. Hierfür ist die Admittanz

$$\underline{Y}_{QN} = 0 - j0,65$$

erforderlich. Abermalige Spiegelung am Zentrum bewirkt die Rückkehr zur Impedanzdarstellung, wir landen bei

$$\underline{Z}_N = 1 + j2 \quad .$$

Endgültige Anpassung erfolgt durch Zuschaltung von

$$\underline{Z}_{LN} = 0 - j2 \quad ,$$

was einer Bewegung auf dem Kreis $R_N = 1$ bis ins Zentrum des Diagramms entspricht. Wie man sofort sieht, ist diese Methode nur bei Fehlabschlüssen, die außerhalb des gespiegelten Kreises liegen, anwendbar; sie komplettiert also die unter (i) beschriebene.

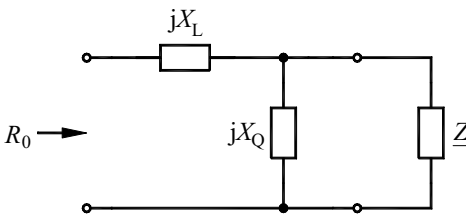


Bild 3-30 Anpassung durch Quer- und Längsreaktanzen

- (iii) Anpassung durch Leitungsstück und Längsreaktanz. Die Anpassungsschaltung ist in Bild 3-31 dargestellt.

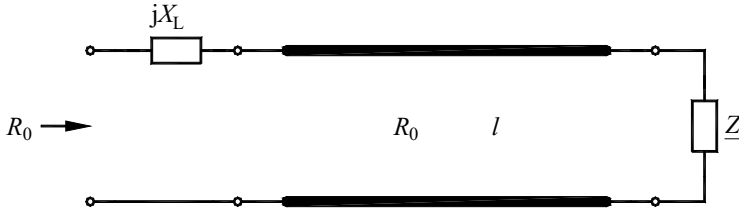


Bild 3-31 Anpassung durch Leitungsstück und Längsreaktanz

Der Hintergrundgedanke ist hierbei, den Fehlabschluss über ein Leitungsstück definierter Länge auf eine Impedanz mit der Eigenschaft $\operatorname{Re} \underline{Z}_N = R_N = 1$ zu transformieren. Die endgültige Transformation zum Zentrum geschieht durch Zuschaltung einer geeignet gewählten Reaktanz. Da der Transformationskreis der Leitung zwei Schnittpunkte mit dem Kreis $R_N = 1$ hat, existieren wieder zwei Lösungsvarianten, und zwar eine mit negativer, eine mit positiver Längsreaktanz. In der Praxis wird man sich in aller Regel für Erstere entscheiden, da sie kapazitiv realisiert werden kann. Bezüglich des Fehlabchlusses \underline{Z} gibt es bei dieser Methode keine Einschränkungen. Die Transformationswege sind in Bild 3-32 grau skizziert.

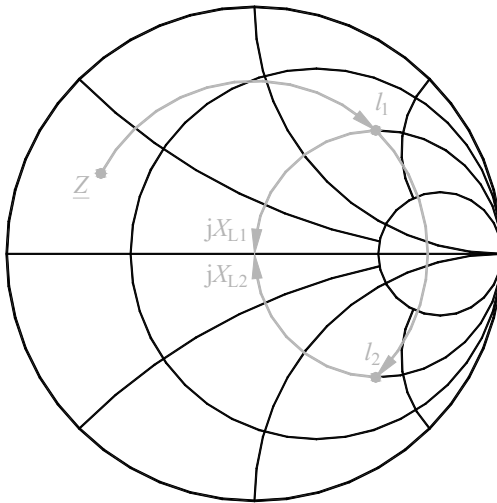
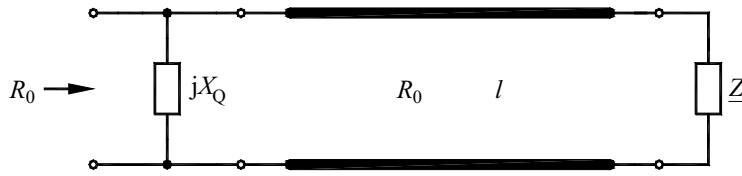


Bild 3-32 Transformationswege

- (iv) Anpassung durch Leitungsstück und Querreaktanz. Bild 3-33 zeigt diese Variante. Hier empfiehlt es sich, die Anpassung komplett in der Admittanzebene durchzuführen. Der normierte Fehlabschluss \underline{Z}_N wird gespiegelt, zum Kreis $\operatorname{Re} \underline{Y}_N = 1$ und anschließend auf diesem zum Zentrum transformiert. Es gibt wieder zwei Möglichkeiten.

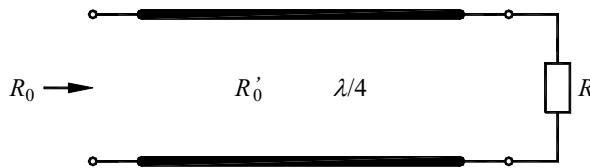
**Bild 3-33** Anpassung durch Leitungsstück und Querreaktanz

- (v) Anpassung eines reellen Fehlabchlusses durch $\lambda/4$ -Transformator. Wie in Bild 3-34 zu sehen, wird ein $\lambda/4$ langes Leitungsstück mit einem noch zu bestimmenden Wellenwiderstand R_0' zwischengeschaltet. Der Fehlabschluss R bewirkt im R_0' -System einen Reflexionsfaktor

$$\underline{r}' = \frac{R - R_0'}{R + R_0'} \quad (3.131)$$

Dieser wird über das $\lambda/4$ lange Leitungsstück gerade invertiert

$$\underline{r}_A' = -\underline{r}' = \frac{R_0' - R}{R_0' + R} \quad (3.132)$$

**Bild 3-34** Anpassung durch $\lambda/4$ -Transformator

und somit in einen neuen Widerstand

$$R_A = R_0' \cdot \frac{1 + \underline{r}_A'}{1 - \underline{r}_A'} = R_0' \cdot \frac{1 + \frac{R_0' - R}{R_0' + R}}{1 - \frac{R_0' - R}{R_0' + R}} = \frac{R_0'^2}{R} \quad (3.133)$$

transformiert. Anpassung ist erreicht, wenn $R_A = R_0$ gilt, und so kommt man zur Bestimmungsgleichung für R_0' :

$$R_0' = \sqrt{R \cdot R_0} \quad (3.134)$$

Es gibt hierfür ein schönes Beispiel aus der Optik. Vergütete oder entspiegelte Gläser sind mit einer $\lambda/4$ dicken Schicht versehen, um eine Anpassung des Ausbreitungsmediums Luft an das Glas zu erreichen. Bei mehrfach vergüteten Gläsern verwendet man mehrere Schichten, um eine breitbandige Wirkung zu erzielen.

Alle in diesem Abschnitt beschriebenen Anpassungsschaltungen sind streng genommen nur für eine einzige Frequenz, näherungsweise für ein schmales Frequenzband gültig. Breitbandige Anpassung erreicht man durch Widerstandsnetzwerke oder durch aufwändig zu entwickelnde Filterschaltungen.

3.5.11 Darstellung von Ortskurven

Bisher wurden Reflexionsfaktoren und Impedanzen durch Zeiger im SMITH-Diagramm markiert. Dies entspricht der Darstellung bei einer bestimmten Frequenz. In der Regel ist das Ergebnis für ein mehr oder weniger breites Frequenzintervall von Interesse. Die Spitze des Zeigers wandert dann auf einer Kurve - der so genannten Ortskurve -; nur diese wird dargestellt. Bild 3-35 zeigt eine solche Ortskurve als Ergebnis einer Messung. Die eigentümliche, sich kringelnde Form ist charakteristisch. Im Laborjargon werden solche Messergebnisse gern „Sauschwänzchen“ genannt.

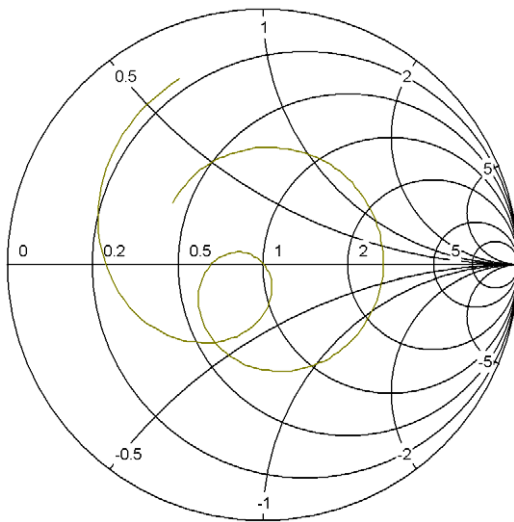


Bild 3-35 Gemessene Ortskurve im SMITH-Diagramm

3.5.12 Zusammenfassung

Im SMITH-Diagramm sind dargestellt:

- * Der Reflexionsfaktor \underline{r} in einer GAUSSschen Zahlenebene, ablesbar nach Betrag und Argument, eventuell auch nach Real- und Imaginärteil,
- * die auf die Systemimpedanz R_0 normierte Impedanz \underline{Z}_N , ablesbar nach Real- und Imaginärteil in krummlinigen Koordinaten.

Folgende Größen können mit Hilfe des SMITH-Diagramms bestimmt werden:

- * Mit einer gegebenen Impedanz korrespondierender Reflexionsfaktor,
- * mit einem gegebenen Reflexionsfaktor korrespondierende Impedanz,

- * zu einer gegebenen Impedanz gehörige Admittanz und umgekehrt,
- * Impedanz und Reflexionsfaktor am Anfang einer beliebig abgeschlossenen Leitung gegebener Länge,
- * Stehwellenverhältnis (VSWR) und Anpassfaktor,
- * Lage der Spannungsmaxima und -minima einer definiert abgeschlossenen Leitung,
- * Impedanz einer Reihenschaltung,
- * Admittanz einer Parallelschaltung,
- * Transformation von Reflexionsfaktor und Impedanz über einen Wellenwiderstandssprung,
- * Elemente von Schaltungen zur Anpassung beliebiger Fehlablüsse.

Es sind Einschränkungen zu beachten:

- * Die Leitungen müssen verlustlos sein,
- * die Abschlüsse müssen passiv sein.¹¹

3.6 Realisierungen

3.6.1 Die Koaxialleitung

Bei diesem Leitungstyp liegt ein als runder Draht ausgeführter *Innenleiter* im Zentrum eines rohrförmigen *Außenleiters*. Beide sind durch ein nichtleitendes Dielektrikum voneinander isoliert, bilden also zusammen einen Zylinderkondensator. Beim Einsatz als Doppelleitung dient der Innenleiter als Hinleiter, der Außenleiter als Rückleiter; sie führen also gerade entgegengesetzten Strom und zwischen ihnen besteht eine elektrische Spannung. Als Folge findet man im Dielektrikum elektrische und magnetische Felder, die sich aufgrund der einfachen Geometrie vergleichsweise leicht berechnen lassen. Bild 3-36 zeigt einen Querschnitt durch eine Koaxialleitung. Die relevanten Abmessungen - Durchmesser des Innenleiters d und Innendurchmesser des Außenleiters D - sind angegeben, elektrisches Feld \mathbf{E} und Magnetfeld \mathbf{H} sind durch Feldlinien visualisiert. Die Eigenschaften des Dielektrikums werden durch die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ gemäß

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \\ \mu &= \mu_r \cdot \mu_0\end{aligned}, \quad (3.135)$$

beschrieben. Hierbei sind Dielektrizitätskonstante und Permeabilität des Vakuums Naturkonstanten¹²

¹¹ Beim SMITH-Diagramm in der hier vorgestellten Form. Eine Erweiterung auf aktive Abschlüsse ist möglich.

¹² Diese werden auch elektrische und magnetische Feldkonstante genannt.

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\end{aligned}, \quad (3.136)$$

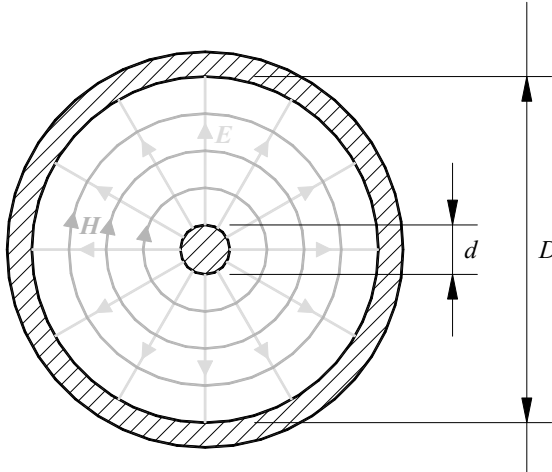


Bild 3-36 Querschnitt durch eine Koaxialleitung

während es sich bei der relativen Dielektrizitätszahl ε_r und der relativen Permeabilität μ_r um dimensionslose Materialkonstanten handelt.

Im Folgenden soll ein Leitungsstück der Länge Δl einer Feldberechnung unterzogen werden. Diese hat zugleich den Zweck einen kleinen Einblick in Feldtheorie und ihre Anwendungen zu vermitteln. Wir beschränken uns dabei auf eine Leitung mit idealen Eigenschaften, d. h. das Leitermaterial wird als widerstandslos angesehen, die Isolation zwischen den Leitern als beliebig hoch. Zur Feldberechnung wendet man die sogenannten MAXWELLSchen Gleichungen an. Diese bilden ein System von vier komplizierten partiellen Differentialgleichungen und beschreiben das elektromagnetische Feld vollständig. Sie beinhalten Ableitungen nach der Zeit und nach den Raumkoordinaten. Wir werden eine quasi-statische Feldbetrachtung durchführen, d. h. uns auf langsame Änderungen beschränken. Dies erscheint auf den ersten Blick absurd, da Hochfrequenztechnik alles andere als langsam oder statisch ist. Man kann aber durch tiefer gehende Berechnungen zeigen, dass die so für die Koaxialleitung gewonnenen Ergebnisse auch in einem weiten Bereich hoher Frequenzen gültig sind. Die MAXWELLSchen Gleichungen können anstatt in differentieller auch in integraler Form angegeben werden. Diese Integralgleichungen sind etwas weniger elegant, erleichtern aber das Verständnis der recht komplizierten Zusammenhänge.

Im ersten Schritt geht es um die Berechnung des elektrischen Feldes; hierfür wird die 1. MAXWELLSche Gleichung herangezogen. Diese lautet in integraler Form

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad (3.137)$$

Hierbei ist A eine geschlossene Hüllfläche - man denke an eine Blase -, Q die gesamte darin eingeschlossene elektrische Ladung. Die linke Gleichungsseite lässt sich folgendermaßen interpretieren: Es ist ein Flächenintegral zu bilden über die gesamte Oberfläche A . Da eine Fläche ein zweidimensionales Gebilde darstellt, muss in zwei Richtungen integriert werden, deshalb ein zweifaches Integral. Der Ring um die Integralzeichen bringt zum Ausdruck, dass es sich um eine geschlossene Hüllfläche handelt. $d\mathbf{A}$ ist das sogenannte *vektorielle Flächenelement*. Zur Integration muss A in infinitesimale Flächenstücke dA zerlegt werden, z. B. in Quadrate. Der Vektor $d\mathbf{A}$ hat den Betrag der Fläche dA , steht senkrecht auf dem Flächenstück und weist nach außen. Dadurch erhält das Flächenelement Vektorcharakter. Das innere Produkt im Integranden kann in der Form

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \cdot dA \cdot \cos \varphi, \quad (3.138)$$

geschrieben werden, wobei φ den von den Vektoren \mathbf{E} und $d\mathbf{A}$ eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Zerlegt man \mathbf{E} in eine Tangential- und eine Normalkomponente zur Fläche A , so erkennt man, dass $E \cdot \cos \varphi$ gerade die Normalkomponente bezeichnet (man betrachte Bild 3-37). Damit kann man die 1. MAXWELLSchen Gleichung verbal so formulieren:

Die über eine komplette Hüllfläche aufsummierte Normalkomponente der elektrischen Feldstärke ist der gesamten eingeschlossenen Ladung proportional.

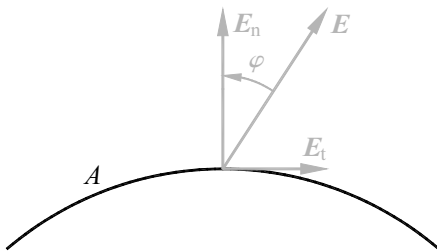


Bild 3-37 Zerlegung des Feldstärkevektors in Tangential- und Normalkomponente

Man erkennt, dass sich die 1. MAXWELLSchen Gleichung zur expliziten Berechnung der Feldstärke nicht eignet, sie liefert lediglich Pauschalaussagen. Man nutzt deshalb zusätzlich weitere Charakteristika der Anordnung aus, z. B. Symmetrieeigenschaften.

Wir wenden uns wieder der in Bild 3-36 gezeigten Koaxialleitung zu. Die hier erkennbare sternförmige zylindersymmetrische Struktur des E-Feldes, die sich formal durch

$$\mathbf{E} = E(r) \cdot \mathbf{e}_r. \quad (3.139)$$

beschreiben lässt, wird zunächst unbewiesen unterstellt. Eine saubere Begründung dafür erfolgt im Anschluss. \mathbf{e}_r bezeichnet den *radialen Einheitsvektor*; das ist ein Vektor mit dem Betrag 1, der in der gegebenen coaxialen Anordnung nach außen weist. \mathbf{E} ist demnach radial nach außen gerichtet, die Radialkomponente hängt unter anderem vom Abstand zum Zentrum der Anordnung ab. Zur detaillierten vektoranalytischen Berechnung sind weitere Größen notwendig, welche Bild 3-38 zeigt. A ist eine gedachte geschlossene Hüllfläche, im vorliegenden Fall ein zur Anordnung coaxialer Zylinder mit Radius r und Länge Δl ; er ist im Schnitt zu sehen. Das zur Integration erforderliche *vektorielle Flächenelement* $d\mathbf{A}$ ist angedeutet. Die

betrachtete Zylinderfläche A besitzt zwei Stirnflächen, welche senkrecht zur Leitung liegen. Dort steht der Feldstärkevektor senkrecht zum vektoriellen Flächenelement, also wird hier

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad . \quad (3.140)$$

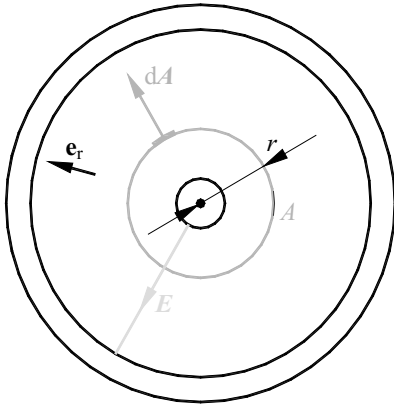


Bild 3-38 Zur Berechnung des E-Feldes

Die Stirnflächen tragen demnach nicht zum Integral bei; es genügt deshalb, dieses über den Zylindermantel A_M zu erstrecken.

$$\iint_{A_M} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{A} \mathbf{e}_r = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (3.141)$$

Das Skalarprodukt des Einheitsvektors mit sich selbst ergibt 1. Die Radialkomponente $E(r)$ ist überall auf der Mantelfläche gleich, kann also vor das Integral gezogen werden.

$$E(r) \iint_{A_M} dA = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Das Flächenintegral hat sich deutlich vereinfacht, es sind genau die infinitesimalen Flächenelemente aufzusummieren, Ergebnis ist gerade die komplette Mantelfläche $2\pi r \cdot \Delta l$. Somit folgt für die Radialkomponente des Feldstärkevektors

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r \Delta l \epsilon_0 \epsilon_r} \quad . \quad (3.142)$$

Die Spannung vom Innen- zum Außenleiter kann in bekannter Weise als Linienintegral über die elektrische Feldstärke ausgedrückt werden. Als Integrationsweg bietet sich im vorliegenden Fall ein radialer Weg, also eine Feldlinie an.

$$u = \int_{d/2}^{D/2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.143)$$

$d\mathbf{r}$ ist hierbei das vektorielle Wegelement. Es hat den Betrag eines infinitesimalen Längenelements dr und die Richtung von \mathbf{e}_r . Damit wird

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{d/2}^{D/2} E(r) \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} \mathbf{e}_r = \frac{Q}{2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \ln r \Big|_{d/2}^{D/2} \\
 u &= \frac{Q}{2\pi \Delta l \varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \ln \frac{D}{d}
 \end{aligned} \quad (3.144)$$

Somit wurde ein Zusammenhang zwischen Spannung und Ladung hergestellt; es wird also eine Kapazität beschrieben. Sie ist dem Längenstück Δl proportional. Dividiert man durch dieses, erhält man den Kapazitätsbelag der Koaxialleitung

$$C' = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln \frac{D}{d}} \quad (3.145)$$

Es fehlt noch der Beweis der sternförmigen Struktur des E-Feldes. Da wir eine zylindersymmetrische Anordnung vor uns haben, müssen auch die damit verbundenen Felder Zylindersymmetrie aufweisen. Somit kommt nur das sternförmige Feldlinienbild oder ein System konzentrischer Kreise, wie es in Bild 3-36 für das H-Feld gezeigt ist, in Frage. Wenn es uns gelingt, letzteres auszuschließen, ist die sternförmige Struktur bewiesen. Die 2. MAXWELLSche Gleichung (das Induktionsgesetz) beschreibt einen Zusammenhang zwischen der *magnetischen Flussdichte* (B-Feld) und dem E-Feld. Sie lautet

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_A \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.146)$$

Der Ring um das Integralzeichen bringt hier zum Ausdruck, dass es sich bei C um eine in sich geschlossene Kurve handelt. A ist eine beliebige von C berandete Fläche, die gemäß der RECHTEN-HAND-REGEL zu orientieren ist. Diese wird weiter unten erläutert. Das Flächenintegral auf der rechten Gleichungsseite wird auch *magnetischer Fluss* genannt. Das B-Feld wird durch das H-Feld und durch eine eventuelle Magnetisierung des Materials hervorgerufen. Das H-Feld wiederum ist eine unmittelbare Folge elektrischer Ströme. In nicht ferromagnetischen Materialien ist das B-Feld dem H-Feld proportional, und es gilt

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \mathbf{H} \quad (3.147)$$

Im quasi-statischen Fall sind die Änderungen des B-Feldes zu vernachlässigen, aus (3.147) wird

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (3.148)$$

Diese Zusammenhänge sind folgendermaßen zu deuten:

Das Integral über den elektrischen Feldstärkevektor längs einer geschlossenen Raumkurve C ist der Änderung des magnetischen Flusses durch C proportional, im statischen Fall verschwindet es.

Deshalb können die elektrischen Feldlinien im statischen Fall nicht ringförmig geschlossen sein, das E-Feld hat demnach sternförmige Struktur; die Behauptung ist bewiesen, (3.139) gilt.

Im nächsten Schritt wenden wir uns dem magnetischen Feld zu. Die 3. MAXWELLSche Gleichung lautet

$$\oint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\text{hier}) \quad \oint_A \mathbf{H} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (3.149)$$

man sagt, das magnetische Feld ist *quellfrei*. Daraus folgt, dass die magnetischen Feldlinien stets ringförmig geschlossen sind. Zusammen mit den schon vorher angestellten Symmetrieüberlegungen führt dies zu dem Schluss, dass das H-Feld nur die in Bild 3-36 gezeigte Struktur kreisförmiger Feldlinien haben kann. Somit gilt

$$\mathbf{H} = H_t(r) \cdot \mathbf{e}_t. \quad (3.150)$$

\mathbf{e}_t ist der tangentielle Einheitsvektor. Er hat den Betrag 1, seine Richtung ist tangential in Bezug auf das Zentrum der zylindrischen Anordnung. H_t ist die Komponente von \mathbf{H} in Richtung \mathbf{e}_t . Nun kommt die 4. MAXWELLSche Gleichung

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \Theta + \iint_A \frac{d\mathbf{E}}{dt} \cdot d\mathbf{A} \quad (3.151)$$

zum Einsatz. Sie wird auch das *Durchflutungsgesetz* genannt. Auf der linken Seite steht ein *Linienintegral*. Integrationsweg ist eine beliebige geschlossene, orientierte Raumkurve C , gewöhnlich keine Feldlinie. Integrationsvariable ist das *vektorielle Wegelement* $d\mathbf{s}$. Es hat den Betrag einer infinitesimalen Länge ds und ist tangential zur Kurve C gerichtet, gemäß ihrer Orientierung. Durch das Skalarprodukt wird hier die Tangentialkomponente des H-Feldes ausgeblendet. Θ ist der gesamte von C umfasste Strom. Zwecks Vorzeichenrichtigkeit muss er gemäß der RECHTEN-HAND-REGEL gezählt werden. Diese ist in Bild 3-39 veranschaulicht. Der Zeigefinger hat die Orientierung von C , der Strom ist in Richtung des Daumens zu zählen. Der Integralausdruck auf der rechten Gleichungsseite beschreibt den sogenannten *MAXWELLSchen Verschiebungsstrom*. Da quasi-statische Verhältnisse unterstellt wurden, ist die zeitliche Ableitung des E-Feldes und somit der gesamte Ausdruck vernachlässigbar. Damit lässt sich das Durchflutungsgesetz für quasi-statische Verhältnisse folgendermaßen verbal formulieren:

Das Integral über die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes längs einer geschlossenen Raumkurve ist gleich dem gesamten von der Kurve rechtshändig umfassten Strom.

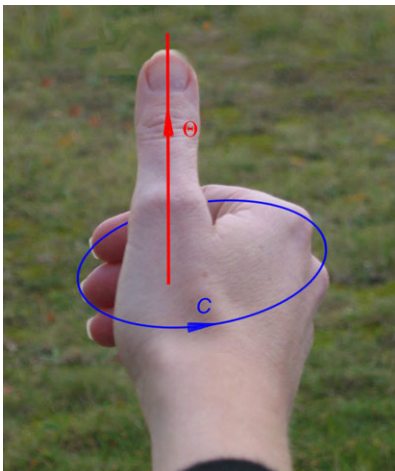


Bild 3-39 Die RECHTE-HAND-REGEL

Zur Anwendung auf die Koaxialleitung werden nun Größen gemäß Bild 3-40 eingeführt. Man sieht den Strom i im Innenleiter, den tangentialen Einheitsvektor \mathbf{e}_t und eine Feldlinie mit Radius r , die zugleich als orientierte Raumkurve C bezeichnet wird. Darauf wenden wir das Durchflutungsgesetz (3.151) an.

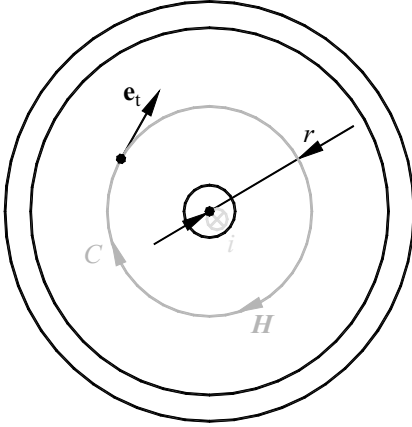


Bild 3-40 Zur Berechnung des H-Feldes im Dielektrikum

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C H_t(r) \mathbf{e}_t \cdot d\mathbf{s} \mathbf{e}_t = i \quad (3.152)$$

Das Skalarprodukt des Einheitsvektors mit sich selbst ergibt wieder 1, H_t ist auf C konstant und kann vor das Integral gezogen werden.

$$H_t(r) \cdot \oint_C d\mathbf{s} = i$$

Das Linienintegral konnte wieder auf ein Minimum reduziert werden, es beschreibt genau den Umfang des Kreises $2\pi r$. Damit folgt

$$\mathbf{H} = \frac{i}{2\pi r} \mathbf{e}_t \quad (3.153)$$

Dies ist gerade das H-Feld eines unendlich langen geraden Stroms. Das Ergebnis verwundert nicht, denn der Strom im Außenleiter tauchte bei der Berechnung nie auf; es war nur der von C umfasste Strom relevant. Anders sieht es aus, wenn man das Feld außerhalb der Koaxialleitung betrachtet (Bild 3-41). Für die Auswertung des Durchflutungsgesetzes ist der Strom i nun einmal positiv, einmal negativ zu zählen, es wird also der Gesamtstrom $\Theta = 0$ umfasst. Dies führt zu dem wichtigen und interessanten Ergebnis, dass die Koaxialleitung im Äußeren feldfrei ist.

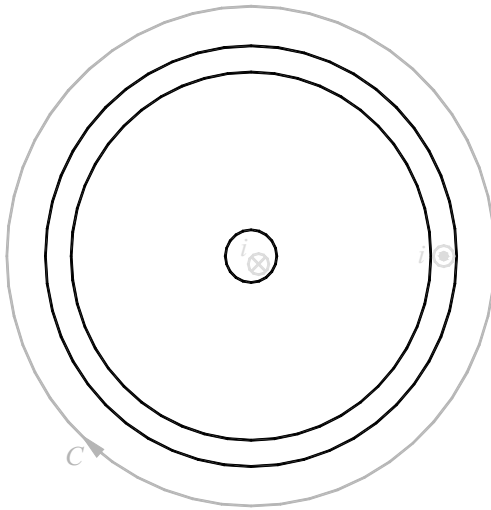


Bild 3-41 Zur Berechnung des H-Felds außerhalb der Leitung

Ziel des weiteren Vorgehens ist es, die magnetische Flussdichte \mathbf{B} zu bestimmen und auszuwerten. Da man grundsätzlich von nicht ferromagnetischem Isolationsmaterial ausgehen kann, gilt (3.147) ($\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$). Bild 3-42 zeigt ein kurzes Leitungsstück im Längsschnitt. Man sieht den Innenleiter mit Radius $d/2$ und im Abstand $D/2$ von dessen Mitte den Außenleiter. Mit z und r sind Raumkoordinaten bezeichnet. Das B-Feld im Zwischenraum ist angedeutet. Aus der Gesamtheit der dargestellten Flussdichte berechnet sich der magnetische Fluss in der dargestellten Hälfte der Leitung

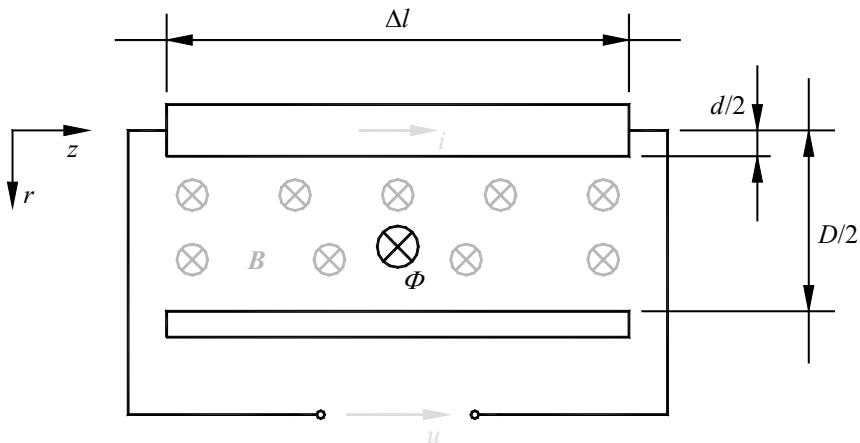


Bild 3-42 Längsschnitt durch eine Koaxialleitung (es ist nur eine Hälfte dargestellt)

$$\Phi = \int_0^{\Delta l} \int_{d/2}^{D/2} B \, dr \, dz \quad . \quad (3.154)$$

Mit (3.138) und (3.153) wird daraus

$$\Phi = \int_0^{\Delta l} \int_{d/2}^{D/2} \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi r} \, dr \, dz \quad .$$

Nur die Variable r im Nenner ist bei den Integrationen zu berücksichtigen, alle anderen Größen können als Konstanten angesehen werden, man erhält

$$\Phi = \Delta l \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \Delta l \frac{\mu_0 \mu_r i}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad . \quad (3.155)$$

Nun kann das aus der 2. MAXWELLSchen Gleichung (3.146) abgeleitete *Induktionsgesetz* ausgenutzt werden. Es besagt, dass an einer offenen Leiterschleife, die einen magnetischen Fluss Φ umfasst, eine elektrische Spannung

$$u = \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.156)$$

zu beobachten ist. In unserem Fall bedeutet das

$$u = \Delta l \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \frac{di}{dt} \quad . \quad (3.157)$$

Diese Gleichung beschreibt einen proportionalen Zusammenhang zwischen Spannung und zeitlicher Ableitung des Stroms. Die Proportionalitätskonstante ist demnach eine Induktivität. Bezieht man diese noch auf den Längenparameter Δl folgt schließlich für den Induktivitätsbelag der Koaxialleitung

$$L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \quad . \quad (3.158)$$

Der kritische Leser mag nun bemängeln, dass trotz Unterstellung quasi-statischer Verhältnisse eine Ableitung nach der Zeit ausgewertet wurde. Dies lässt sich leicht erklären. In (3.151) konnte das Integral über die zeitliche Ableitung des E-Feldes gegenüber dem Gesamtstrom Θ vernachlässigt werden; in (3.156) existiert eine solche Vergleichsgröße nicht. Von Abschnitt 3.4.1 sind uns Zusammenhänge zwischen den Leitungsbelägen einer idealen Leitung und ihrem Wellenwiderstand, der Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie dem daraus resultierenden Verkürzungsfaktor bekannt. Beachtet man noch, dass das Isolationsmaterial in aller Regel magnetisch neutral ist ($\mu_r = 1$), folgt schließlich für die Parameter der Koaxialleitung

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} \\
 v_p &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \\
 VK &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}
 \end{aligned} \quad (3.159)$$

Man sieht, dass sowohl der Wellenwiderstand, als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit frequenzunabhängig sind. Diese Eigenschaft der Koaxialleitung ist keineswegs selbstverständlich und zeichnet sie gegenüber anderen Leitungstypen aus. Eine Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit wird in der HF-Technik *Dispersion* genannt. Man sagt deshalb auch, die Koaxialleitung ist *nicht dispersiv*. Die Gleichungen (3.159) versetzen uns in die Lage, ein Koaxialkabel gemäß bestimmten Vorgaben - insbesondere dem Wellenwiderstand - zu dimensionieren. Dies macht beispielsweise die Konstruktion eines Steckverbinders (*Konnektor*) zum Kinderspiel. Er ist luftgefüllt und sein Außenleiter hat aus Gründen der Handhabbarkeit einen bestimmten Innendurchmesser. Bei gegebenem Wellenwiderstand erhält man unmittelbar den erforderlichen Durchmesser des Innenleiters.

Wir betrachten nochmals Bild 3-36 und erkennen, dass sowohl der elektrische als auch der magnetische Feldstärkevektor senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Auch dies ist keine selbstverständliche Eigenschaft einer Leitung. Man spricht in einem solchen Fall von einer *TEM-Welle*, was für *transversal elektro-magnetisch* steht.

Die Berechnungen wurden für quasi-statische Bedingungen durchgeführt. Man kann durch aufwändige Feldberechnungen zeigen, dass diese Lösung auch für schnelle Änderungen gilt, sie stellt den sogenannten *Grundmode* der Wellenausbreitung in einem Koaxialkabel dar. Bei sehr schnellen Änderungen (sehr hohen Frequenzen) bilden sich zusätzlich höhere Moden mit folgenden Eigenschaften aus:

- * Die Feldverteilung ist verändert; elektrisches und magnetisches Feld enthalten auch Komponenten in Ausbreitungsrichtung.
- * Der Wellenwiderstand ist verändert.
- * Die Ausbreitungsgeschwindigkeit und der Verkürzungsfaktor sind verändert.

Existieren höhere Moden, so entwickelt sich auf der Leitung ein praktisch nicht zu überblickender Wellensalat. Dieser Betriebsfall ist unbedingt zu vermeiden. Die Kabelhersteller geben deshalb eine obere Grenzfrequenz für jeden Kabeltyp an.

Betrachten wir als Beispiel ein handelsübliches Koaxialkabel und zwar das halbstarre Kabel vom Typ RG 401/U [3]. Als Isolationsmaterial dient Polytetrafluoräthylen mit $\epsilon_r = 2,08$. Die Durchmesser betragen

$$\begin{aligned}
 d &= 1,64 \text{ mm} \\
 D &= 5,46 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Somit berechnen sich Wellenwiderstand und Verkürzungsfaktor zu

$$\begin{aligned}
 R_0 &= 50 \Omega \\
 VK &= 0,69
 \end{aligned}$$

Höhere Moden können sich bei Frequenzen über 20GHz ausbilden. Der Hersteller empfiehlt deshalb das Kabel nicht über 18GHz einzusetzen.

Nun soll ein Koaxialkabel im Einfluss eines äußeren B-Feldes untersucht werden. Das Ergebnis ist vorwiegend für EMV-Anwendungen¹³ bedeutsam. Bild 3-43 zeigt einen Längsschnitt durch das mit Quelle und Verbraucher beschaltete Kabel mit umgebendem und durchdringendem B-Feld. Man kann meist mit guter Näherung unterstellen, dass das B-Feld im Bereich eines kurzen Kabelstücks homogen ist. Die Gesamtheit des B-Feldes in der oberen Leitungshälfte wird zu einem Fluss Φ_o zusammengefasst, analog ergibt sich für die untere Leitungshälfte ein Fluss Φ_u , und es gilt

$$\Phi_o = \Phi_u \quad (3.160)$$

Nun wird das Induktionsgesetz auf beide Flüsse angewandt und wir erhalten induzierte Spannungen

$$u_o = \frac{d\Phi_o}{dt} = u_u = \frac{d\Phi_u}{dt} \quad (3.161)$$

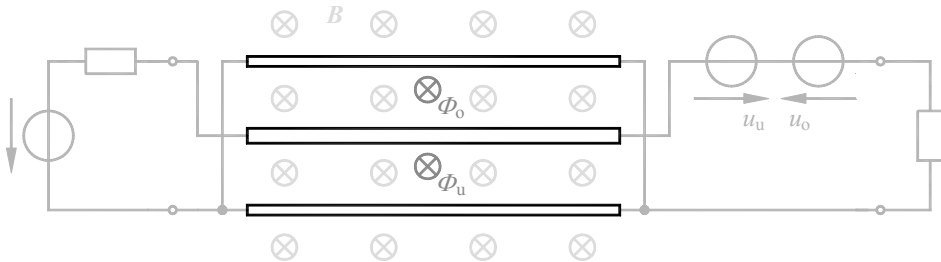


Bild 3-43 Beschaltete Koaxialleitung unter dem Einfluss eines äußeren B-Feldes

Diese Spannungen werden in der aus Quelle, Leitung und Abschluss gebildeten Schleife induziert; sie sind gemäß der RECHTEN-HAND-REGEL zu orientieren. Man wendet zunächst die RECHTE-HAND-REGEL auf den Fluss Φ_u an. Der Daumen weist in die Zeichenebene, demnach weist der Zeigefinger im Innenleiter eine Orientierung von links nach rechts, was einer Quellspannung u_u wie dargestellt entspricht. Bei Auswertung von Φ_o ist es gerade umgekehrt. Die beiden in Reihe geschalteten Quellspannungen sind entgegengesetzt orientiert, sie heben sich also gegenseitig auf. Somit ist gezeigt, dass beim Koaxialkabel die Induktion einer Fremdspannung grundsätzlich verhindert ist. Die Immunität des Koaxialkabels gegen Fremdfelder wird in aller Regel mit der Schirmung begründet. Diese Erklärung ist so einfach wie unsinnig. Man erkennt weiter, dass die beschriebene Wirkung eine absolute Symmetrie des Kabels voraussetzt. Ansonsten wären die Flüsse Φ_o und Φ_u ungleich, und es käme doch zu einer Induktionserscheinung. Deshalb ist bei der Installation peinlichst darauf zu achten, dass das Kabel nicht deformiert wird; es darf nicht gequetscht oder geknickt sein.

Zum Abschluss sollen die Vorteile des Koaxialkabels gegenüber anderen Leitungstypen zusammengefasst werden:

¹³ EMV = Elektromagnetische Verträglichkeit, die Lehre vom unerwünschten Wechselspiel der elektrischen Komponenten.

- * Die Wellenimpedanz ist reell.
- * Die Wellenimpedanz ist frequenzunabhängig.
- * Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist frequenzunabhängig.
- * Das Kabel erzeugt keine äußeren Felder.
- * Das Kabel ist immun gegen äußere Fremdfelder.
- * Die Dimensionierungsvorschriften zur Realisierung eines gewünschten Wellenwiderstands sind ausgesprochen einfach.

Diese Vorteile erklären den hohen Verbreitungsgrad des Koaxialkabels, obwohl es vergleichsweise teuer ist. Nur bei sehr großen Leitungslängen, wie sie z. B. bei kompletten Gebäudeverkabelungen oder Telekommunikationsnetzen vorkommen, greift man aus Kostengründen auf symmetrische Leitungen zurück.

3.6.2 Die symmetrische Leitung

Der Aufbau dieses Leitungstyps ist denkbar einfach. Es handelt sich schlicht um zwei gleiche, voneinander isolierte runde Drähte in einem Kabel. Von einem gewöhnlichen Installationskabel unterscheidet es sich nur darin, dass die Leiter in definierter Weise miteinander verdreht sind. Daher rührt auch der verbreitete Name *twisted pair*. Die Kabelhersteller sprechen hierbei vom *Schlag* des Kabels. Die Länge, nach welcher das Adernpaar eine Drehung um 360° erfährt, wird *Schlaglänge* genannt. Diese soll möglichst einheitlich sein, oder anders ausgedrückt, die Toleranz der Schlaglänge ist ein Qualitätsmerkmal. Das Verdrehen ist aus Gründen der EMV notwendig und wird später erläutert.

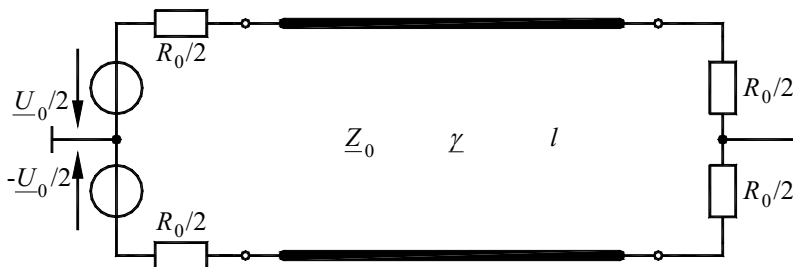


Bild 3-44 Aufbau einer symmetrischen Übertragungsstrecke

Handelsübliche Kabel enthalten gewöhnlich mehrere einzeln verdrehte Adernpaare, die untereinander und insgesamt geschirmt sein können, vergleichbar einer Koaxialleitung. So kann man mit einem 8-adrigen Kabel beispielsweise zwei Dienste - z. B. Telefon und Computernetz - in beide Richtungen übertragen. Solche Kabel sind derzeit bei LAN-Netzen¹⁴ in Gebäuden üblich. Die Leitungen werden als starre Kabel für feste Installation oder als flexible für Verbindung von einem Wandanschluss zu einem Endgerät angeboten. Für diese hat sich in der Telekommunikationsbranche der Begriff *Schnur* etabliert. Der Name symmetrische Leitung rührt daher, dass sie aus elektrischer Sicht symmetrisch zu betreiben ist. Die beiden Leiter

¹⁴ LAN = Local Area Network

werden mit genau entgegengesetztem Potential gegenüber Erde angesteuert. Zur Erläuterung ist der typische Aufbau einer symmetrischen Übertragungsstrecke in Bild 3-44 dargestellt. Man erkennt die symmetrische Quelle, die Leitung und den symmetrischen Verbraucher.

Bild 3-45 zeigt einen typischen Frequenzgang der Wellenimpedanz. Es handelt sich hier um den in der Elektrotechnik äußerst seltenen Fall, dass eine komplexe Größe in einer Grafik nach Real- und Imaginärteil dargestellt wird. Darstellungen nach Betrag und Phase (BODE-Diagramm) oder Ortskurven sind viel mehr verbreitet. Wie man sieht, ist \underline{Z}_0 bei niedrigen Frequenzen komplex und stark frequenzabhängig. Bei einer Grenzfrequenz, die gewöhnlich zwischen 500kHz und 1MHz liegt, münden die Kurven in einen konstanten, reellen Verlauf. Dies ist der Nominalwert des Wellenwiderstands, also der Wert, den der Hersteller in den technischen Daten angibt.

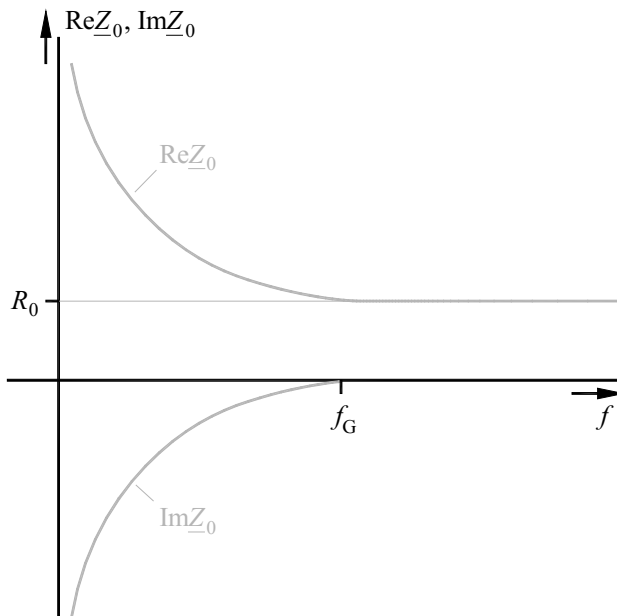


Bild 3-45 Typischer Frequenzgang der Wellenimpedanz einer symmetrischen Leitung

Das Ansehen der symmetrischen Technik geriet vor wenigen Jahrzehnten sehr stark in Verfall. Sie galt als ungeeignet für hochfrequente Signale, die man zur Übertragung großer Datenmengen braucht. Die symmetrische Technik hat sich davon gut erholt und ist heute in vielen Bereichen der Datenübertragung auch bei sehr hohen Frequenzen bestens etabliert. So handelt es sich beispielsweise bei dem derzeit in Kraftfahrzeugen eingesetzten CAN-Bus um ein symmetrisches System. Wichtigste Anwendungsgebiete sind aber ohne jeden Zweifel die Gebäudeverkabelung für Computer- und Telefonnetze. Hierbei sprechen der günstige Preis und die ausreichende Störfestigkeit für diese Technik.

Die bereits angesprochenen EMV-Aspekte sollen noch etwas näher beleuchtet werden. Denkbar ist die Induktion einer Störspannung in die aus Quelle, Leitung und Abschluss gebildete Leiterschleife aufgrund eines äußeren magnetischen Wechselfeldes. Maßgeblich für eine Induktionserscheinung ist der magnetische Fluss Φ durch die Leiterschleife. Um diesen abzu-

schätzen, benötigt man eine von der Leiterschleife berandete Fläche, welche gemäß der RECHTEN-HAND-REGEL zum Umlaufsinn der Schleife zu orientieren ist. Entsprechend dieser Orientierung sind die einzelnen Anteile des B-Feldes zum Fluss zu zählen. Durch den Kabelschlag kehrt sich die Orientierung mit jeder halben Schlaglänge um, die Flussanteile heben sich also gegenseitig auf. Bild 3-46 verdeutlicht diesen Sachverhalt. Damit wird klar, dass variierende Schlaglänge den Effekt verdirbt. Aus dem gleichen Grund ist es auch notwendig, den Schlag ganz bis an die Kabelenden zu führen. Dies ist ein Punkt, an dem Installateure gerne sündigen, da ihnen das Verständnis für die Zusammenhänge fehlt.

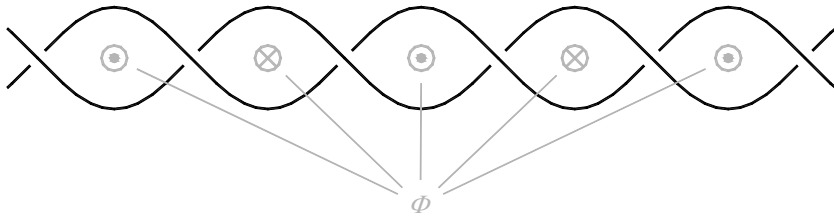


Bild 3-46 Magnetische Flussanteile bei verdrehten Leitern

Es gibt noch weitere Leiterschleifen, in die Störspannungen induziert werden könnten, nämlich die aus je einem Leiter und dem Erdpotential gebildeten. Verursacher ist hier ein B-Feld, welches den Raum zwischen Leitung und Erde durchsetzt. Die induzierte Störspannung treibt Ströme durch beide Leiter und diese haben Spannungsabfälle an den Teilabschlüssen zur Folge. Im Falle totaler Symmetrie sind die Spannungsabfälle gleich und heben sich aus Sicht des symmetrischen Systems gerade gegenseitig auf.

ALEXANDER BELL wird allgemein als der Erfinder des ersten alltagstauglichen Telefons gefeiert. Vermutlich hat er die symmetrische Leitung erfunden und damit die EMV-Probleme in den Griff bekommen, an denen seine Vorgänger scheitern mussten.

3.6.3 Die Mikro-Streifenleitung

Hier wurde der englische Begriff *micro strip line* eingedeutscht. Es handelt sich dabei um nichts anderes als um eine Leiterbahn auf einer isolierenden Platine, der auf der anderen Seite eine durchgehende Masseebene gegenübersteht. Geometrie, Materialparameter und die Frequenz bestimmen die Leitungseigenschaften. Bild 3-47 zeigt eine Realisierung, alle relevanten Größen sind eingetragen. Die feldtheoretische Analyse ist nicht trivial, schon deshalb, weil unterschiedliche Materialien im Spiel sind. Es bildet sich keine TEM-Welle aus. Die Mikro-Streifenleitung eignet sich hervorragend zum Aufbau von elektronischen Schaltungen der HF-Technik, z. B. von HF-Verstärkern. Darüber hinaus können HF-Komponenten wie Richtkoppeler oder Zirkulatoren gut und raumsparend in dieser Leitungstechnik realisiert werden.

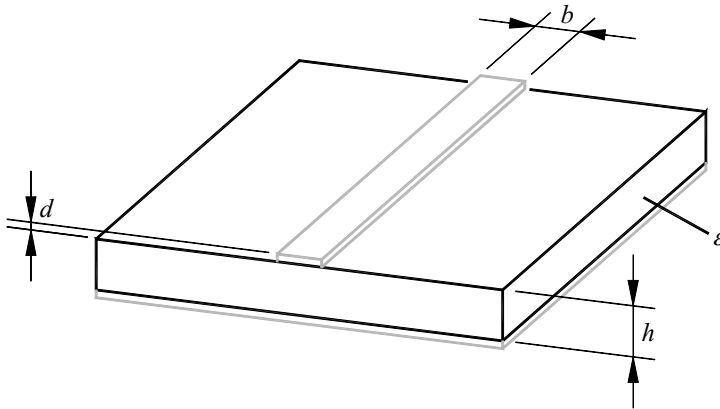


Bild 3-47 Aufbau einer Mikro-Streifenleitung

3.6.3 Der Rechteck-Hohlleiter

Die Erklärung dieses Leitungstyps verursacht bei Lernenden in der Regel ungläubiges Kopfschütteln. Wir haben hier einfach ein Metallrohr von rechteckigem Querschnitt vor uns, nach einem zweiten Leiter sucht man vergebens. Der rechteckige Querschnitt ist nicht zwingend, es wurden auch runde, ovale und quadratische Hohlleiter vorgestellt; er ist aber am weitesten verbreitet. Oberhalb einer durch die Abmessungen bestimmten unteren Grenzfrequenz kann sich im Inneren ein E-H-Feldmuster ausbreiten. Mit diesem Feldmuster gehen Wirbelströme in den Metallwänden einher, alle Größen zusammen sind feldtheoretisch in sich schlüssig. Verluste sind nur durch die Wirbelströme verursacht, weshalb man auf gute Leitfähigkeit der Wände achtet und diese eventuell versilbert. Dann hat die Leitung eine ausgesprochen geringe Dämpfung und eignet sich gut zur Übertragung großer Leistungen. Alle in diesem Kapitel eingeführten Leitungsparameter und -eigenschaften wie Wellenimpedanz, Ausbreitungsmaß, Reflexion und Interferenz lassen sich auf diesen Leitungstyp übertragen.

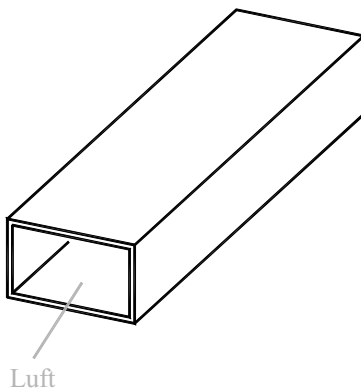


Bild 3-48 Rechteck-Hohlleiter

Der Umgang mit Hohlleitern ist umständlich. Leitungsstücke, Bögen, Abzweige, Komponenten etc. haben Flansche und werden miteinander verschraubt. Die Zusammenstellung einer Hohlleiterschaltung erinnert deshalb unweigerlich an den Aufbau einer Modelleisenbahn. Hohlleiter werden in der Radartechnik und für Satellitenfunk eingesetzt. Besonders verbreitet sind Hohlleiter für das sogenannte X-Band, das Frequenzgebiet von 8 bis 12GHz. Der Querschnitt beträgt dabei etwa 23 mal 10mm. Der Hohlleiter ist ein ausgesprochen schmalbandiger Leitungstyp. Das erklärt sich dadurch, dass schon beim Zweifachen der unteren Grenzfrequenz höhere Moden mit veränderten Eigenschaften ausbreitungsfähig sind. Der nutzbare Frequenzbereich für den Grundmode beträgt also noch nicht einmal eine Oktave. Gewisse HF-Komponenten lassen sich in Hohlleitertechnik verblüffend einfach realisieren, z. B. Richtkopppler oder das magische T (siehe Abschnitte 4.3.12 und 4.3.13). Gelegentlich macht man aus der Not eine Tugend und nutzt die Eigenschaft des Hohlleiters, niederfrequente Signale zu unterdrücken, gezielt aus. Bei geschirmten Zellen werden Lüftungsöffnungen und Durchführungen für Glasfasern oder Koaxialleitungen als Hohlleiterstücke entsprechend hoch gewählter Grenzfrequenz ausgeführt. Unter dem Strich ist der Hohlleiter eher ein Exot.

4 n-Tore

4.1 Einführung

4.1.1 Die Wellengrößen

In Kapitel 3 wurde der Wellencharakter elektrischer Signalausbreitung ausführlich hergeleitet und beschrieben. Demnach existieren an jedem Ort einer Leitung eine vorlaufende und eine rücklaufende Welle, die sich aus Spannungs- und Stromwelle zusammensetzen, welche ihrerseits im festen Verhältnis der Wellenimpedanz zueinander stehen [7].

$$\frac{\underline{U}_v}{\underline{I}_v} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = \underline{Z}_0 \quad (4.1)$$

Die zwischen den Leitern messbare Spannung und der in den Leitern messbare Strom ergeben sich durch Überlagerung von vorlaufender und rücklaufender Größe.

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_v + \underline{U}_r \\ \underline{I} &= \underline{I}_v - \underline{I}_r \end{aligned} \quad (4.2)$$

In Bild 4-1 sind diese Erkenntnisse nochmals dargestellt.

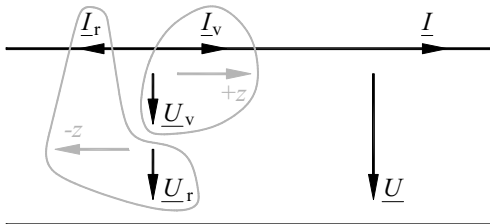


Bild 4-1 Vorlaufende und rücklaufende Spannungs- und Stromwellen

Wegen des einfachen Zusammenhangs (4.1) liegt es nahe, jede Welle für sich durch eine einzige Größe zu beschreiben. Man definiert deshalb die *Wellengröße* der vorlaufenden und der rücklaufenden Welle gemäß

$$\begin{aligned} \underline{b} &:= \frac{\underline{U}_v}{\sqrt{\underline{Z}_0}} = \underline{I}_v \cdot \sqrt{\underline{Z}_0} \\ \underline{a} &:= \frac{\underline{U}_r}{\sqrt{\underline{Z}_0}} = \underline{I}_r \cdot \sqrt{\underline{Z}_0} \end{aligned}$$

Die Wurzel aus einer komplexen Impedanz \underline{Z}_0 ist nicht eindeutig; wir beschränken uns deshalb ab sofort auf reelle Werte R_0 und erhalten

$$\begin{aligned}\underline{b} &:= \frac{U_v}{\sqrt{R_0}} = \underline{I}_v \cdot \sqrt{R_0} \\ \underline{a} &:= \frac{U_r}{\sqrt{R_0}} = \underline{I}_r \cdot \sqrt{R_0}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Wie man sofort sieht, ergibt sich für die Dimension der Wellengrößen

$$[\underline{b}] = [\underline{a}] = \sqrt{W} \quad (4.4)$$

Man erhält

$$U_v \cdot I_v = b^2 = P_v, \quad (4.5)$$

was als vorwärts transportierte Leistung interpretiert werden darf. Analog liefert das Quadrat des Betrags von \underline{a} die rückwärts transportierte Leistung. Die Wellengrößen werden deshalb auch *Leistungswellen* genannt. Im nächsten Schritt sollen normierte Spannungen und Ströme gemäß

$$\begin{aligned}\underline{U}_N &= \frac{U}{\sqrt{R_0}} \\ \underline{I}_N &= \underline{I} \cdot \sqrt{R_0}\end{aligned}\quad (4.6)$$

eingeführt werden. Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}\underline{U}_{vN} &= \underline{I}_{vN} = \underline{b} \\ \underline{U}_{rN} &= \underline{I}_{rN} = \underline{a}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Für die zwischen den Leitern messbare Spannung und den im Leiter messbaren Strom in normierter Form erhält man somit

$$\begin{aligned}\underline{U}_N &= \underline{b} + \underline{a} \\ \underline{I}_N &= \underline{b} - \underline{a}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Auflösung dieser Gleichungen nach \underline{b} und \underline{a} führt auf

$$\begin{aligned}\underline{b} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_N + \underline{I}_N) \\ \underline{a} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_N - \underline{I}_N)\end{aligned}\quad (4.9)$$

Somit ist ein klarer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung auf der einen Seite und den Wellengrößen auf der anderen Seite gezeigt. Die Beschreibung mit Hilfe der Wellengrößen erschließt eine völlig neue Perspektive auf elektrische Anordnungen und wird sich im Folgenden als äußerst nützlich erweisen.

R_0 kann der Wellenwiderstand einer im Spiel befindlichen Leitung sein. Dann beschreiben \underline{b} und \underline{a} tatsächlich die physikalisch trennbaren Wellenanteile. R_0 kann aber auch als Normierungswiderstand aufgefasst werden und wird dann *Systemimpedanz* genannt. Im Inneren von Schaltungen aus konzentrierten Elementen ist diese Betrachtungsweise erforderlich. \underline{b} und \underline{a} beschreiben in diesem Fall fiktive Wellen, mit denen sich dennoch bestens rechnen lässt. In der Praxis strebt man die Existenz einer einzigen Systemimpedanz R_0 für ein komplettes Sys-

tem an. Alle Quellen speisen aus dem definierten Innenwiderstand R_0 , alle Leitungen haben den Wellenwiderstand R_0 und alle Abschlüsse betragen R_0 . In der Messtechnik sind 50Ω-Systeme sehr weit verbreitet.

4.1.2 Die reale Wellenquelle

Bild 4-2 zeigt eine mit einer Lastimpedanz \underline{Z}_L beschaltete reale Spannungsquelle [7]. Diese besteht aus einer inneren Spannungsquelle \underline{U}_S , welche eingeprägte Spannungsquelle oder Urspannungsquelle genannt wird, und der Innenimpedanz \underline{Z}_S . Der Index S steht hierbei für *source*. Die Anordnung soll in der Wellendarstellung untersucht werden, was mit Hilfe der Gleichungen (4.8) und (4.9) ohne Weiteres möglich sein muss. Deshalb sind Wellengrößen mit ihren Bezugspfeilen eingeführt, eine von der realen Quelle ablaufende Welle \underline{b} und eine auf sie zulaufende Welle \underline{a} . Ziel ist es nun eine der realen Spannungsquelle äquivalente reale Wellenquelle anzugeben.

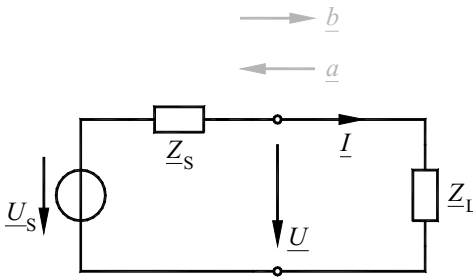


Bild 4-2 Reale Wechselspannungsquelle mit Lastimpedanz

Spannung und Strom an der realen Quelle lauten in normierter Form

$$\begin{aligned}\underline{U}_N &= \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_L}, \\ \underline{I}_N &= \underline{U}_{SN} \cdot \frac{R_0}{\underline{Z}_S + \underline{Z}_L},\end{aligned}\quad (4.10)$$

woraus mit (4.9)

$$\begin{aligned}\underline{b} &= \frac{1}{2} \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L + R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S} \\ \underline{a} &= \frac{1}{2} \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L - R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S}\end{aligned}\quad (4.11)$$

wird. Damit sind alle Vorbereitungen zur Einführung der realen Wellenquelle getroffen. Diese wird durch eine innere Urwellenquelle, die unter allen Umständen eine Welle \underline{b}_S liefert, und einen Reflexionsfaktor \underline{r}_S beschrieben. Die von dieser realen Quelle ablaufende Welle setzt sich demnach aus einem Quellanteil und einem durch Reflexion entstandenen Anteil zusammen.

$$\underline{b} = \underline{b}_S + \underline{r}_S \cdot \underline{a} \quad (4.12)$$

Damit die reale Wellenquelle der realen Spannungsquelle äquivalent ist, muss gelten

$$\underline{b}_S + \underline{r}_S \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L + R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S} \quad (4.13)$$

Da zwei unbekannte Größen zu bestimmen sind, brauchen wir noch eine zweite Gleichung. Dazu betrachten wir den Spezialfall $\underline{Z}_L = R_0$. Für diesen liefert (4.11)

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \underline{U}_{SN} \cdot \frac{R_0}{R_0 + \underline{Z}_S} \\ \underline{a} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die auf die Quelle zulaufende Welle \underline{a} verschwindet, daher gibt es keinen reflektierten Anteil. Die ablaufende Welle \underline{b} ist gerade gleich der Quellwelle.

$$\underline{b}_S = \underline{U}_{SN} \cdot \frac{R_0}{R_0 + \underline{Z}_S} = \underline{U}_S \cdot \frac{\sqrt{R_0}}{R_0 + \underline{Z}_S} \quad (4.15)$$

Umformung der allgemein gültigen Gleichung (4.12) liefert

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{b} - \underline{b}_S}{\underline{a}} \quad (4.16)$$

Nun werden (4.11) und (4.15) in (4.16) eingesetzt

$$\underline{r}_S = \frac{\frac{1}{2} \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L + R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S} - \underline{U}_{SN} \cdot \frac{R_0}{R_0 + \underline{Z}_S}}{\frac{1}{2} \underline{U}_{SN} \cdot \frac{\underline{Z}_L - R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S}},$$

woraus durch algebraische Umformung

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{Z}_S - R_0}{\underline{Z}_S + R_0} \quad (4.17)$$

folgt. Das Ergebnis verwundert nicht; es wurde in ähnlicher Form schon im Abschnitt 3.3.1 gefunden. (4.15) und (4.17) werden zu einem wichtigen Resultat zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \underline{b}_S &= \underline{U}_S \cdot \frac{\sqrt{R_0}}{R_0 + \underline{Z}_S} \\ \underline{r}_S &= \frac{\underline{Z}_S - R_0}{\underline{Z}_S + R_0} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wir betrachten noch den Spezialfall $\underline{Z}_S = R_0$, die Quelle speist aus der Systemimpedanz. Dann wird

$$\begin{aligned} \underline{b}_S &= \frac{\underline{U}_S}{2\sqrt{R_0}} \\ \underline{r}_S &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bild 4-3 zeigt das Symbol der realen Wellenquelle. In der Wellendarstellung ist es überflüssig, eine Leitung durch zwei Linien entsprechend den beiden Leitern zu symbolisieren, wie man

das von gewöhnlichen Stromlaufplänen her kennt. Es genügt die Angabe einer einzigen Linie, womit eine Leitungsverbindung, also ein Weg für eine Wellenausbreitung gemeint ist. Die Darstellungen gewinnen damit den Charakter von Blockschaltbildern.

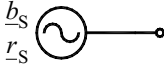


Bild 4-3 Symbol der realen Wellenquelle

4.1.3 Gegenüberstellung der realen Quellen

Betrachten wir zunächst eine reale Spannungsquelle, an die eine beliebige Lastimpedanz \underline{Z}_L angeschlossen werden kann (Bild 4-4). Es stellen sich dann äußere Größen \underline{U} und \underline{I} ein, welche durch die Eigenschaften der Quelle und durch die Lastimpedanz bestimmt sind [7].

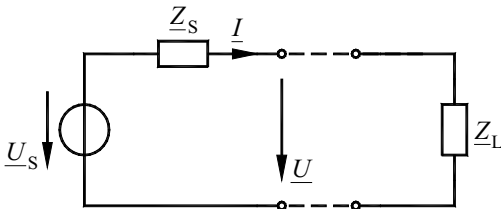


Bild 4-4 Reale Spannungsquelle mit Lastimpedanz

Quellgröße ist die Urspannung \underline{U}_S . Um sie zu messen, muss die Quelle im Leerlauf betrieben werden ($\underline{Z}_L \rightarrow \infty$), was einem Reflexionsfaktor $\underline{r}_L = 1$ entspricht (vgl. 3.3.1). Die Innenimpedanz kann durch ein Kurzschlussexperiment ermittelt werden ($\underline{Z}_L = 0$, $\underline{r}_L = -1$), dann ist

$$\underline{Z}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{I}_K} \quad (4.20)$$

Die Innenimpedanz lässt sich auch an der realen Quelle messen, wenn man die innere Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt.

$$\underline{Z}_S = - \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \bigg|_{\underline{U}_S=0} \quad (4.21)$$

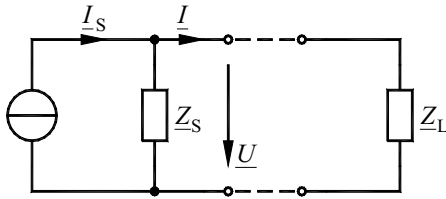
Das Betriebsverhalten der realen Spannungsquelle wird durch die *Arbeitsgerade*

$$\underline{U} = \underline{U}_S - \underline{I} \cdot \underline{Z}_S \quad (4.22)$$

beschrieben. Die Gleichungen (4.18) liefern eine äquivalente reale Wellenquelle.

Bild 4-5 zeigt eine reale Stromquelle. Wie man sich leicht überlegen kann, ist diese unter der Voraussetzung

$$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S} \quad (4.23)$$

**Bild 4-5** Reale Stromquelle mit Lastimpedanz

der realen Spannungsquelle äquivalent, d. h. beide zeigen identisches Betriebsverhalten. Quellgröße ist hier der Urstrom \underline{I}_S , er kann durch ein Kurzschlussexperiment ermittelt werden. Im Fall $\underline{Z}_L = 0$ ($\underline{r}_L = -1$) wird

$$\underline{I} = \underline{I}_K = \underline{I}_S \quad (4.24)$$

\underline{Z}_S erhält man durch ein Leerlaufexperiment ($\underline{Z}_L \rightarrow \infty$), denn dann wird

$$\underline{U} = \underline{U}_L = \underline{I}_S \cdot \underline{Z}_S \quad (4.25)$$

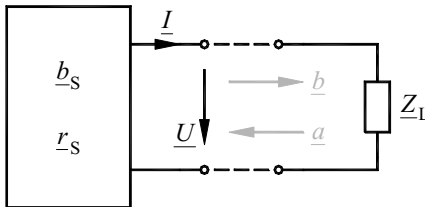
Analog zum Fall der realen Spannungsquelle lässt sich die Innenimpedanz zwischen den Polen der realen Quelle messen, wenn man die innere Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt.

$$\underline{Z}_S = - \left. \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right|_{\underline{I}_S=0} \quad (4.26)$$

Das Betriebsverhalten wird wieder durch eine Arbeitsgerade beschrieben.

$$\underline{I} = \underline{I}_S - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_S} \quad (4.27)$$

Der Zusammenhang mit der realen Spannungsquelle ist in (4.23) dokumentiert. Mit (4.18) kann wieder eine äquivalente Wellenquelle angegeben werden.

**Bild 4-6** Reale Wellenquelle mit Lastimpedanz

Betrachten wir schließlich die in Bild 4-6 veranschaulichte reale Wellenquelle mit Lastimpedanz \underline{Z}_L . Die Quelle ist hier zwecks besserer Vergleichsmöglichkeit nochmals in der klassischen „2-Draht-Darstellung“ angegeben. Quellgröße ist hier die Urleistungswelle \underline{b}_S . Um sie zu messen, muss die Quelle mit der Systemimpedanz R_0 beschaltet werden.

$$\underline{b}_S = \underline{b}|_{\underline{Z}_L=R_0} \quad (4.28)$$

Tabelle 4.1 Die realen Quellen

Typ	Quellgröße, Messung	Innengröße, Messung	Betriebsverhalten
Spannung	$\underline{U}_S = \underline{U} _{\underline{Z}_L \rightarrow \infty}$	$\underline{Z}_S = -\frac{\underline{U}}{\underline{I}} _{\underline{U}_S=0}$	$\underline{U} = \underline{U}_S - \underline{I} \cdot \underline{Z}_S$
Strom	$\underline{I}_S = \underline{I} _{\underline{Z}_L=0}$	$\underline{Z}_S = -\frac{\underline{U}}{\underline{I}} _{\underline{I}_S=0}$	$\underline{I} = \underline{I}_S - \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_S}$
Welle	$\underline{b}_S = \underline{b} _{\underline{Z}_L=R_0}$	$\underline{r}_S = \frac{\underline{b}}{\underline{a}} _{\underline{b}_S=0}$	$\underline{b} = \underline{b}_S + \underline{a} \cdot \underline{r}_S$

Das Betriebsverhalten wird durch

$$\underline{b} = \underline{b}_S + \underline{a} \cdot \underline{r}_S \quad (4.29)$$

beschrieben. \underline{r}_S ergibt sich somit zu

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{b} - \underline{b}_S}{\underline{a}} \quad (4.30)$$

Tabelle 4.2 Äquivalenzen der realen Quellen

Quelltyp	Äquiv. Spannungsquelle	Äquivalente Stromquelle	Äquivalente Wellenquelle
Spannung	\underline{U}_S \underline{Z}_S	$\underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S}$ $\underline{Z}_S = \underline{Z}_S$	$\underline{b}_S = \frac{\underline{U}_S \cdot \sqrt{R_0}}{R_0 + \underline{Z}_S}$ $\underline{r}_S = \frac{\underline{Z}_S - R_0}{\underline{Z}_S + R_0}$
Strom	$\underline{U}_S = \underline{I}_S \cdot \underline{Z}_S$ $\underline{Z}_S = \underline{Z}_S$	\underline{I}_S \underline{Z}_S	$\underline{b}_S = \underline{I}_S \underline{Z}_S \cdot \frac{\sqrt{R_0}}{R_0 + \underline{Z}_S}$ $\underline{r}_S = \frac{\underline{Z}_S - R_0}{\underline{Z}_S + R_0}$
Welle	$\underline{U}_S = \underline{b}_S \cdot \frac{2\sqrt{R_0}}{1 - \underline{r}_S}$ $\underline{Z}_S = R_0 \frac{1 + \underline{r}_S}{1 - \underline{r}_S}$	$\underline{I}_S = \underline{b}_S \cdot \frac{2}{\sqrt{R_0}(1 + \underline{r}_S)}$ $\underline{Z}_S = R_0 \frac{1 + \underline{r}_S}{1 - \underline{r}_S}$	\underline{b}_S \underline{r}_S

oder

$$\underline{r}_S = \frac{\underline{b}}{\underline{a}}|_{\underline{b}_S=0} \quad (4.31)$$

Durch Umformung der Gleichungen (4.18) findet man eine äquivalente Spannungsquelle und daraus sofort auch eine äquivalente Stromquelle. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 4.1 und 4.2 zusammengefasst.

Es muss ausdrücklich darauf hingewiesen werden, dass die Quellen nur bezüglich ihres äußeren Verhaltens identisch sind. Die inneren Verhältnisse, insbesondere der innere Leistungsverlust, können sich erheblich unterscheiden. Der praktische Vorteil der Beschreibung durch die Wellenquelle besteht darin, dass zur Messung der inneren Größen weder ein Leerlauf noch ein Kurzschluss gebildet werden muss, und dass kein Umschalten erforderlich ist. Es wird grundsätzlich nur die Systemimpedanz R_0 angeschlossen.

4.1.4 Die Impedanz in der Wellendarstellung

Wir betrachten nochmals eine reale Spannungsquelle, die mit einer Lastimpedanz \underline{Z}_L beschaltet ist (Bild 4-7). Die Lastimpedanz soll durch ihren Reflexionsfaktor, also durch das Verhältnis von ablaufender zu zulaufender Welle beschrieben werden [7].

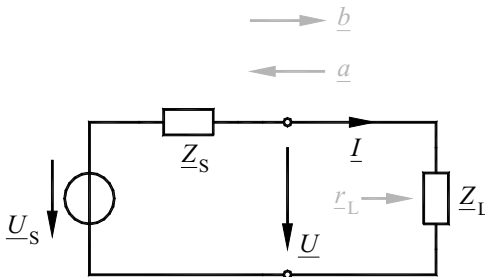


Bild 4-7 Reale Quelle mit Lastimpedanz

$$\underline{r}_L = \frac{a}{b} \quad (4.32)$$

Aus (4.11) folgt

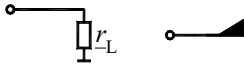
$$\underline{r}_L = \frac{\frac{1}{2} \underline{U}_{\text{SN}} \cdot \frac{\underline{Z}_L - R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S}}{\frac{1}{2} \underline{U}_{\text{SN}} \cdot \frac{\underline{Z}_L + R_0}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_S}}$$

also

$$\underline{r}_L = \frac{\underline{Z}_L - R_0}{\underline{Z}_L + R_0}, \quad (4.33)$$

womit wieder ein Resultat aus Abschnitt 3.3.1 bestätigt wird. Der Spezialfall

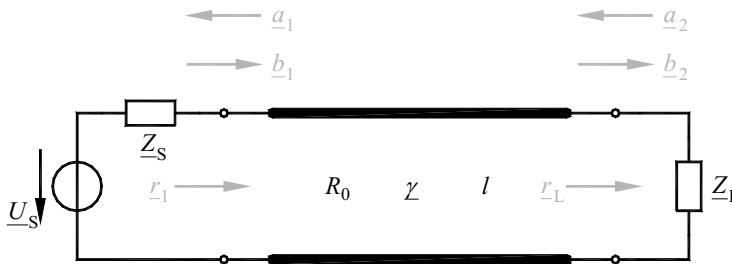
$$\begin{aligned} \underline{Z}_L &= R_0 \\ \underline{r}_L &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

**Bild 4-8** Allgemeine Impedanz und Wellensumpf

wird *Wellensumpf* genannt. Die Welle verschwindet bildlich gesprochen in einem Sumpf, es kommt nichts zurück. Bild 4-8 zeigt die Symbole für Impedanz und Sumpf in der Wellendarstellung.

4.1.5 Das System Quelle-Leitung-Last

Bild 4-9 zeigt den Anschluss einer Lastimpedanz an eine reale Quelle - hier eine Spannungsquelle - über eine Leitung. Die Leitung wird durch Wellenwiderstand R_0 und Ausbreitungsmaß γ beschrieben, die Last durch den von ihr verursachten Reflexionsfaktor r_L gemäß (4.33). Die Anordnung soll mit Hilfe der Wellengrößen analysiert werden. Die Leitung bewirkt eine Transformation der vorlaufenden und der rücklaufenden Welle gemäß

**Bild 4-9** System Quelle - Leitung - Last

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 &= \underline{b}_1 \cdot e^{-\gamma l} \\ \underline{a}_1 &= \underline{a}_2 \cdot e^{-\gamma l} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Diese Transformationseigenschaft der Leitung wurde bereits im Abschnitt 3.2.2 für Ströme und Spannungen berechnet. Quelle und Last tragen mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= \underline{b}_S + \underline{a}_1 \cdot r_S \\ \underline{a}_2 &= \underline{b}_2 \cdot r_L \end{aligned} \quad (4.36)$$

bei. Somit ist ein lineares Gleichungssystem für die Wellengrößen gefunden, welches sich mit elementaren Methoden - etwa dem GAUSSschen Algorithmus - lösen lässt. Beispielsweise berechnet sich die auf die Last zulaufende Welle \underline{b}_2 zu

$$\underline{b}_2 = \frac{\underline{b}_S}{e^{\gamma l} - r_L r_S \cdot e^{-\gamma l}} \quad (4.37)$$

Dem interessierten Leser wird die Überprüfung dieses Resultats empfohlen.

4.2 s-Parameter und Streumatrizen

4.2.1 Ausgangspunkt

Wir betrachten zunächst ein elektrisches Zweitor gemäß Bild 4-10. Wie aus der Zweitortheorie bekannt ist, können die Zusammenhänge zwischen den äußeren elektrischen Größen - der primären und der sekundären Spannung sowie dem primären und dem sekundären Strom - kompakt durch eine 2x2-Matrix beschrieben werden. Betrachtet man beispielsweise die Ströme als Ursachen und die Spannungen als Wirkungen darauf, gewinnt man eine Darstellung durch die sogenannte *Impedanzmatrix* [9] (vgl. 2.4.2).

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= z_{11} \underline{I}_1 + z_{12} \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= z_{21} \underline{I}_1 + z_{22} \underline{I}_2\end{aligned}\quad (4.38)$$

Spannungen und Ströme werden zu je einem Vektor, die Koeffizienten $z_{\mu\nu}$ zu einer Matrix zusammengefasst, und es folgt

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix}\quad (4.39)$$

oder

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \quad (4.40)$$

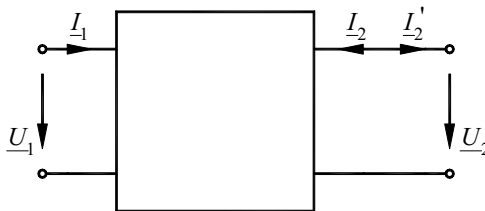


Bild 4-10 Elektrisches Zweitor

Gelegentlich ist die Betrachtung der Ströme als Ursache nicht zulässig, etwa bei einem idealen Übertrager. Dann existiert die Darstellung (4.38) nicht und Ströme und Spannungen müssen in anderer Weise gepaart werden. Von besonderer Bedeutung ist die Beschreibung durch die sogenannte *Kettenmatrix*, wobei Primär- und Sekundärgrößen zu je einem Vektor zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= a_{11} \underline{U}_2 + a_{12} \underline{I}_2' \\ \underline{I}_1 &= a_{21} \underline{U}_2 + a_{22} \underline{I}_2' \\ \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} &= \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.41)$$

Hierbei ist

$$\underline{I}_2' = -\underline{I}_2 \quad (4.42)$$

der nach außen orientierte Sekundärstrom. Diese Darstellung hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sich die Kettenmatrix einer Kettenschaltung von Zweitoren ganz einfach als Pro-

dukt der Teilmatrizen berechnet (vgl. 2.4.4). Aus diesem Grund musste der Sekundärstrom nach rechts orientiert werden, er wird damit zum Primärstrom des nachfolgenden Zweitores.

Der Darstellung (4.41) entnimmt man sofort Regeln zur Berechnung der a-Parameter. So ergibt sich beispielsweise \underline{a}_{11} als Quotient aus \underline{U}_1 zu \underline{U}_2 unter der Voraussetzung, dass der Sekundärstrom \underline{I}_2' verschwindet. Dies wird durch Beschaltung der Sekundärseite mit einem Leerlauf realisiert. Ganz analog erhält man \underline{a}_{22} als Quotienten der Ströme, wenn die Sekundärspannung verschwindet, was man durch Beschaltung mit einem Kurzschluss erreicht. Zusammengefasst lauten die Vorschriften zur Ermittlung der a-Parameter:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{11} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2'=0} & \underline{a}_{12} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2'} \right|_{\underline{U}_2=0} \\ \underline{a}_{21} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2'=0} & \underline{a}_{22} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2'} \right|_{\underline{U}_2=0} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Diese Vorschriften eignen sich auch zur Messung der $\underline{a}_{\mu\nu}$. Die Beschreibung durch die Kettenmatrix hat gewisse Nachteile:

- (i) Zur Messung muss die Sekundärseite im Kurzschluss und im Leerlauf betrieben werden. Zumindest der Kurzschluss verbietet sich bei manchen Anordnungen, beispielsweise bei Verstärkern. Ein Leerlauf erfreut sich in der Hochfrequenztechnik auch nicht uneingeschränkter Beliebtheit, da er Totalreflexion und somit Interferenzen verursacht.
- (ii) Zur Messung muss zwischen Kurzschluss und Leerlauf umgeschaltet werden. Dies macht die Messung aufwändig und fehlerträchtig.
- (iii) Die a-Parameter sind teilweise dimensionsbehaftet, die Dimensionen sind darüber hinaus uneinheitlich.
- (iv) Es gibt Zweitore, zu denen keine Kettenmatrix angegeben werden kann.

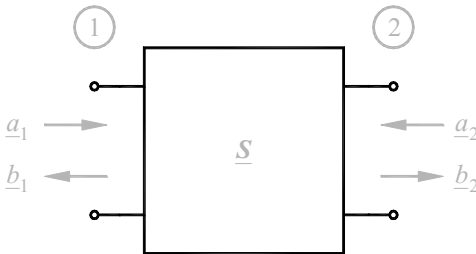


Bild 4-11 Zweitor mit zulaufenden und ablaufenden Wellen

Die Beschreibung eines Zweitores durch eine Matrix soll nun auf die Wellengrößen übertragen werden. Dazu betrachten wir Bild 4-11. Es zeigt ein Zweitor, bei dem Spannungen und Ströme durch die Wellengrößen ersetzt sind. Hierbei bedeuten \underline{a}_1 und \underline{a}_2 die auf Tor 1 bzw. 2 zulaufenden, \underline{b}_1 und \underline{b}_2 die vom jeweiligen Tor ablaufenden Wellen. Fasst man die ablaufenden Wellen als Funktionen der zulaufenden auf, erhält man die Beschreibung [7]

$$\begin{aligned}\underline{b}_1 &= \underline{s}_{11} \underline{a}_1 + \underline{s}_{12} \underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 &= \underline{s}_{21} \underline{a}_1 + \underline{s}_{22} \underline{a}_2\end{aligned}\quad (4.44)$$

oder kompakt

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a} \quad . \quad (4.45)$$

\underline{S} wird *Streumatrix* genannt, die Koeffizienten \underline{s}_{ij} heißen *Streuparameter*. Sie sind dimensionslos und gewöhnlich komplex. Das Symbol \underline{S} leitet sich von der englischen Bezeichnung *scattering matrix* ab. Analog zum Fall der Kettenmatrix können der Darstellung (4.44) sofort Regeln zur Berechnung bzw. zur Messung der s-Parameter entnommen werden.

$$\begin{aligned}\underline{s}_{11} &= \left. \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2=0} & \underline{s}_{12} &= \left. \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_2} \right|_{\underline{a}_1=0} \\ \underline{s}_{21} &= \left. \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} \right|_{\underline{a}_2=0} & \underline{s}_{22} &= \left. \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_2} \right|_{\underline{a}_1=0}\end{aligned}\quad (4.46)$$

Die Bedingungen $\underline{a}_1 = 0$ bzw. $\underline{a}_2 = 0$ werden durch reflexionsfreien Abschluss des betreffenden Tors realisiert, also durch Beschaltung mit der Systemimpedanz R_0 . Dann wird die vom Tor ablaufende Welle nicht reflektiert, die zulaufende verschwindet. Die s-Parameter lassen sich damit ganz einfach deuten. \underline{s}_{11} ist offenbar der primäre Reflexionsfaktor bei sekundärem Abschluss. \underline{s}_{21} beschreibt die Transmission von Tor 1 nach Tor 2 ebenfalls bei sekundärem Abschluss. Auf Grund der Definition der Streuparameter ergibt sich hier eine gewöhnungsbedürftige Reihenfolge der Indizes. Das Ziel der Transmission wird als erster Index genannt, der Ausgangspunkt als zweiter. \underline{s}_{22} und \underline{s}_{12} haben analoge Bedeutung bei Vertauschung der Tore. Das Instrument Streumatrix bietet folgende Vorzüge:

- (i) Die s-Parameter sind bei Abschluss der Tore zu ermitteln. Dies ist HF-technisch leicht zu bewerkstelligen. Man braucht weder Kurzschluss noch Leerlauf und es ist kein Umschalten erforderlich.
- (ii) Die s-Parameter sind dimensionslos.
- (iii) Die Streumatrix existiert für jedes in sich widerspruchsfreie Zweitor.
- (iv) Die Darstellung kann auf n-Tore, also auf Anordnungen mit mehr als zwei Toren, erweitert werden.

Zur messtechnischen Bestimmung der Streumatrix eines Zweitors dient der *s-Parameter-Messplatz*. Er ermittelt alle s-Parameter eines angeschlossenen Prüflings in einem vom Benutzer vorgegebenen Frequenzintervall und stellt diese grafisch dar. Für die Reflexionsfaktoren \underline{s}_{11} und \underline{s}_{22} wird hierbei gern das SMITH-Diagramm verwendet, die Transmissionen werden eher im BODE-Diagramm dargestellt.

4.2.2 Beispiele

Zunächst wird das in Bild 4-12 gezeigte Leitungsstück untersucht. Es ist in der in Abschnitt 4.1.4 eingeführten Wellendarstellung angegeben, eine Leitungsverbindung wird durch eine einzige Linie symbolisiert. Durch Wellenwiderstand - hier gleich der Systemimpedanz R_0 - Ausbreitungsmaß γ und physikalische Länge l ist das Zweitor vollständig beschrieben. Gesucht ist seine Streumatrix. Zur Bestimmung von \underline{s}_{11} und \underline{s}_{21} muss die Leitung an Tor 2

mit der Systemimpedanz R_0 abgeschlossen werden. Diese transformiert sich über die Leitung bekanntlich in sich selbst, somit ist Tor 1 reflexionsfrei ($\underline{s}_{11} = 0$). Eine sich über die Leitung ausbreitende Welle wird mit dem Faktor $e^{-\gamma l}$ bewertet, was dem Transmissionsfaktor \underline{s}_{21} entspricht. Die gleichen Überlegungen lassen sich bei Speisung an Tor 2 verbunden mit Abschluss an Tor 1 anstellen. Somit ergibt sich die gesuchte Streumatrix zu

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Die Symmetrie von $\underline{\underline{S}}$ trägt dem Umstand Rechnung, dass es sich um ein *struktursymmetrisches Zweitor* handelt.

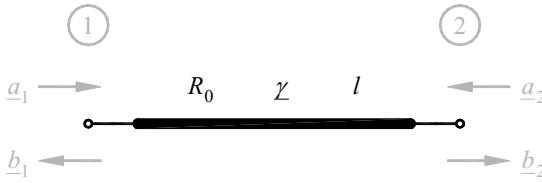


Bild 4-12 Leitungsstück in der Wellendarstellung

In einem zweiten Beispiel soll die in Bild 4-13 gezeigte $\lambda/4$ lange verlustlose Leitung untersucht werden, deren Wellenwiderstand R_W ungleich der Systemimpedanz R_0 ist. Da bei dieser speziellen Anordnung auf Ströme und Spannungen zurückgegriffen werden muss, wurde die klassische Zweileiter-Darstellung gewählt. Ein an Tor 2 angebrachter Abschluss R_0 transformiert sich über die Leitung in

$$R_1 = R_W \frac{R_0 + j R_W \tan \beta l}{R_W + j R_0 \tan \beta l}, \quad (4.48)$$

man vergleiche hierzu Abschnitt 3.4.3. Im vorliegenden Fall ist

$$\tan \beta l = \tan \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty,$$

also wird

$$R_1 = \frac{R_W^2}{R_0}. \quad (4.49)$$

Dieser Widerstand verursacht im R_0 -System einen Reflexionsfaktor

$$\underline{s}_{11} = \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} = \frac{R_W^2 - R_0^2}{R_W^2 + R_0^2}.$$

Die weitere Analyse dieser eigentlich simplen Anordnung gestaltet sich überraschend schwierig. Man muss nun zwischen Wellengrößen im R_0 -System und solchen im R_W -System unterscheiden. Dies ist in Bild 4-13 durch entsprechende Indizes geschehen. Beide müssen in einem sinnvollen Verhältnis zu den tatsächlich vorhandenen Strömen und Spannungen stehen, gemäß den Gleichungen (4.8) und (4.9). Betrachten wir zunächst Tor 1. Hier gilt wie soeben berechnet

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_1 \quad .$$

Damit erhalten wir für normierte Spannung und normierten Strom im R_0 -System.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{1N0} &= \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{R_0}} \\ \underline{I}_{1N0} &= \underline{I}_1 \cdot \sqrt{R_0} = \underline{U}_1 \frac{\sqrt{R_0}}{R_1} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die vorlaufende Welle im R_0 -System ist somit

$$\underline{a}_{10} = \frac{1}{2} (\underline{U}_{1N0} + \underline{I}_{1N0}) = \frac{1}{2} \underline{U}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{R_0}} + \frac{\sqrt{R_0}}{R_1} \right) \quad . \quad (4.51)$$

Analog erhalten wir für die vorlaufende Welle im R_W -System

$$\underline{a}_{1W} = \frac{1}{2} \underline{U}_1 \left(\frac{1}{\sqrt{R_W}} + \frac{\sqrt{R_W}}{R_1} \right) \quad . \quad (4.52)$$

Es lässt sich ein Verhältnis aus \underline{a}_{1W} und \underline{a}_{10} ablesen, woraus nach längerer Rechnung unter Einbeziehung von (4.49)

$$\underline{a}_{1W} = \underline{a}_{10} \cdot \sqrt{R_W R_0} \frac{R_W + R_0}{R_W^2 + R_0^2} \quad . \quad (4.53)$$

folgt. Diese Wellengröße transformiert sich über die $\lambda/4$ lange Leitung in

$$\underline{b}_{2W} = -j \underline{a}_{1W} \quad . \quad (4.54)$$

Nun muss in vergleichbarer aber einfacherer Weise der Übergang von \underline{b}_{2W} zu \underline{b}_{20} berechnet werden. Hier wird der einfache Zusammenhang

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = R_0$$

ausgenutzt. Es ist

$$\underline{b}_{2W} = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{U}_2}{\sqrt{R_W}} + \underline{I}_2' \sqrt{R_W} \right) = \frac{1}{2} \underline{U}_2 \left(\frac{1}{\sqrt{R_W}} + \frac{\sqrt{R_W}}{R_0} \right) \quad (4.55)$$

und

$$\underline{b}_{20} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{R_0}}$$

also

$$\underline{b}_{20} = \frac{2\sqrt{R_W R_0}}{R_W + R_0} \cdot \underline{b}_{2W} \quad . \quad (4.56)$$

Jetzt lässt sich die gesuchte Transmission im R_0 -System ablesen.

$$\underline{s}_{21} = \frac{\underline{b}_{20}}{\underline{a}_{10}} = -j 2 \frac{R_W R_0}{R_W^2 + R_0^2} \quad (4.57)$$

Wegen der Symmetrie ist somit die Streumatrix vollständig bestimmt; wir erhalten

$$\underline{S} = \frac{1}{R_W^2 + R_0^2} \cdot \begin{pmatrix} R_W^2 - R_0^2 & -j 2 R_W R_0 \\ -j 2 R_W R_0 & R_W^2 - R_0^2 \end{pmatrix} . \quad (4.58)$$

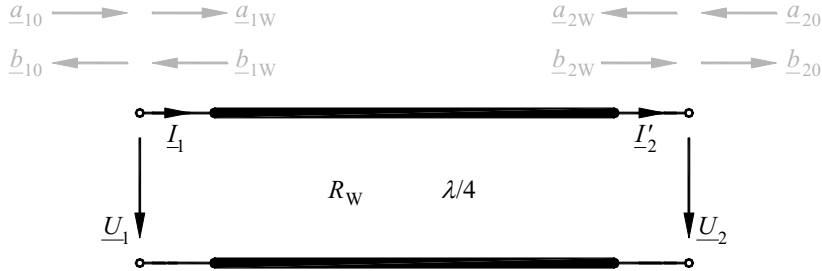


Bild 4-13 Verlustlose $\lambda/4$ -Leitung mit Wellenwiderstand R_W

Dieses Beispiel macht noch einmal deutlich, dass die s-Parameter stets in Verbindung mit der gewählten Systemimpedanz zu sehen sind.

Schließlich wird das in Bild 4-14 gezeigte symmetrische Widerstandsnetzwerk, also ein Zweitor aus konzentrierten Elementen, untersucht. Widerstandsanordnungen dieser Struktur kommen als Dämpfungsglieder zum Einsatz. Beschaltet man Tor 2 mit der Systemimpedanz R_0 , so zeigt sich am Tor 1 ein Widerstand

$$R_1 = R_0 + 2R_0 \parallel (R_0 + R_0) = 2R_0 ,$$

der einen Reflexionsfaktor

$$\underline{s}_{11} = \frac{2R_0 - R_0}{2R_0 + R_0} = \frac{1}{3}$$

verursacht. Strom und Spannung auf der Primärseite stehen im Verhältnis

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1$$

zueinander. Mit (4.9) erhält man daraus für die auf Tor 1 zulaufende Welle:

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{2} (\underline{U}_{1N} + \underline{I}_{1N}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\underline{I}_1 R_1}{\sqrt{R_0}} + \underline{I}_1 \sqrt{R_0} \right) \quad (4.59)$$

Mit Hilfe der Stromteilungsgleichung errechnet sich der Sekundärstrom zu

$$\underline{I}'_2 = \underline{I}_1 \frac{2R_0}{2R_0 + R_0 + R_0} = \frac{1}{2} \underline{I}_1 ,$$

der wegen der sekundären Beschaltung mit R_0 im Verhältnis

$$\underline{U}_2 = R_0 \underline{I}_2'$$

zur Sekundärspannung steht. Daraus folgt für die von Tor 2 ablaufende Welle

$$\underline{b}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_{2N} + \underline{I}_{2N}') = \frac{1}{2} \underline{I}_1 \sqrt{R_0} \quad (4.60)$$

(4.59) und (4.60) liefern dann die gesuchte Transmission

$$\underline{s}_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} = \frac{R_0}{R_1 + R_0} = \frac{1}{3} \quad .$$

Das Zweitor ist symmetrisch, somit folgt

$$\underline{S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Dieses Zweitor wäre als Dämpfungsglied nicht zu gebrauchen, da es nicht eigenreflexionsfrei ist.

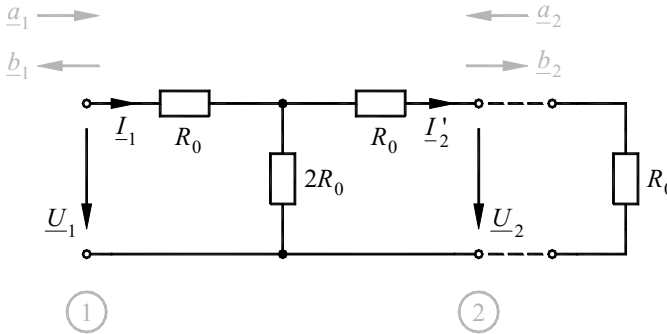
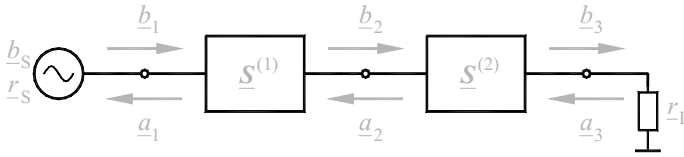


Bild 4-14 Zweitor aus Widerständen

4.2.3 Die Kettenschaltung

Betrachten wir die in Bild 4-15 dargestellte Anordnung aus einer realen Wellenquelle, zwei Zweitoren und einem Verbraucher. Quelle und Verbraucher werden durch ihre spezifischen Eigenschaften, die Zweitore durch ihre Streumatrizen beschrieben, wobei diese durch einen hochgestellten Index zu unterscheiden sind. An jedem Tor ist eine Wellengröße in Vorwärtsrichtung und eine in Rückwärtsrichtung eingeführt. Die in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten Zusammenhänge liefern nun:

**Bild 4-15** Eine Kettenschaltung

$$\begin{aligned}
 \underline{b}_1 &= \underline{b}_S + r_S \underline{a}_1 \\
 \underline{b}_2 &= \underline{s}_{21}^{(1)} \underline{b}_1 + \underline{s}_{22}^{(1)} \underline{a}_2 \\
 \underline{b}_3 &= \underline{s}_{21}^{(2)} \underline{b}_2 + \underline{s}_{22}^{(2)} \underline{a}_3 \\
 \underline{a}_3 &= r_L \underline{b}_3 \\
 \underline{a}_2 &= \underline{s}_{12}^{(2)} \underline{a}_3 + \underline{s}_{11}^{(2)} \underline{b}_2 \\
 \underline{a}_1 &= \underline{s}_{12}^{(1)} \underline{a}_2 + \underline{s}_{11}^{(1)} \underline{b}_1
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Dies ist ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die eingeführten Wellengrößen. Die Lösung erfolgt mit gängigen Methoden, beispielsweise dem GAUSSschen Algorithmus.

4.2.4 Zusammenhang zwischen Streumatrix und Kettenmatrix

Aus der Grundlagenliteratur sind Umrechnungsformeln für die unterschiedlichen Zweitordarstellungen bekannt [9], man findet diese auch im Abschnitt 2.4.5. So können beispielsweise die Elemente der in 4.2.1 eingeführten Impedanzmatrix \underline{Z} durch die Elemente der Kettenmatrix \underline{A} ausgedrückt werden. Wir wollen nun versuchen, einen vergleichbaren Zusammenhang zwischen der Streumatrix und der Kettenmatrix herzustellen. Hierzu wird zunächst die normierte Kettenmatrix eingeführt [7].

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_{1N} \\ \underline{I}_{1N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11N} & \underline{a}_{12N} \\ \underline{a}_{21N} & \underline{a}_{22N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{2N} \\ \underline{I}_{2N} \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

Sie beschreibt Zusammenhänge zwischen den normierten elektrischen Größen; ihre Elemente werden zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Kettenmatrix mit \underline{a}_{iivN} bezeichnet. Sie sind dimensionslos, und wie man sich leicht überlegen kann, gilt

$$\begin{aligned}
 \underline{a}_{11N} &= \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12N} &= \frac{\underline{a}_{12}}{R_0} \\
 \underline{a}_{21N} &= \underline{a}_{21} \cdot R_0 & \underline{a}_{22N} &= \underline{a}_{22}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Zur Bestimmung von \underline{s}_{11} und \underline{s}_{21} muss das Zweitor gemäß Bild 4-16 betrieben werden. Die Beschaltung erzwingt

$$\underline{U}_2 = R_0 \underline{I}_2' ,$$

woraus sofort

$$\underline{U}_{2N} = \underline{I}_{2N}' \tag{4.65}$$

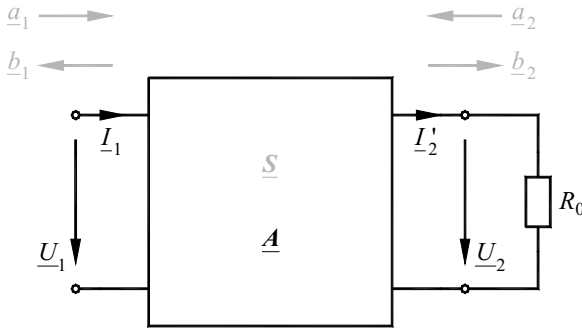


Bild 4-16 Betrieb eines Zweitors zur Bestimmung von \underline{s}_{11} und \underline{s}_{21}

folgt. Die Gleichungen (4.9) für die Wellengrößen liefern daraus in Verbindung mit der Darstellung (4.63):

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= \frac{1}{2} (\underline{U}_{1N} + \underline{I}_{1N}) = \frac{1}{2} (\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}) \underline{I}_{2N}' \\ \underline{b}_1 &= \frac{1}{2} (\underline{U}_{1N} - \underline{I}_{1N}) = \frac{1}{2} (\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} - \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{22N}) \underline{I}_{2N}' \\ \underline{b}_2 &= \frac{1}{2} (\underline{U}_{2N} + \underline{I}_{2N}') = \underline{I}_{2N}'\end{aligned}\quad (4.66)$$

Daraus lassen sich schon die Streuparameter \underline{s}_{11} und \underline{s}_{21} ablesen.

$$\begin{aligned}\underline{s}_{11} &= \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} = \frac{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} - \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{22N}}{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}} \\ \underline{s}_{21} &= \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} = \frac{2}{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}}\end{aligned}\quad (4.67)$$

Zur Bestimmung der restlichen Streuparameter muss das Zweitor auf der Primärseite mit der Systemimpedanz R_0 beschaltet werden, siehe Bild 4-17. Diese Beschaltung erzwingt

$$\underline{U}_{1N} = -\underline{I}_{1N} \quad (4.68)$$

Aus der Definition der normierten Kettenmatrix (4.63) liest man ab:

$$\underline{U}_{1N} = \underline{a}_{11N} \underline{U}_{2N} + \underline{a}_{12N} \underline{I}_{2N}' \quad (4.69)$$

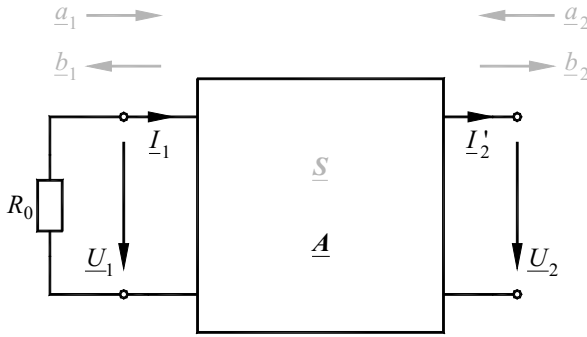
$$\underline{I}_{1N} = \underline{a}_{21N} \underline{U}_{2N} + \underline{a}_{22N} \underline{I}_{2N}' = -\underline{U}_{1N} \quad (4.70)$$

(4.69) wird nach \underline{U}_{2N} aufgelöst, das Ergebnis wird in (4.70) eingesetzt

$$-\underline{U}_{1N} = \frac{\underline{a}_{21N}}{\underline{a}_{11N}} (\underline{U}_{1N} - \underline{a}_{12N} \underline{I}_{2N}') + \underline{a}_{22N} \underline{I}_{2N}',$$

woraus durch Auflösung nach \underline{I}_{2N}'

$$\underline{I}_{2N}' = \frac{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{21N}}{\underline{a}_{12N} \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{11N} \underline{a}_{22N}} \underline{U}_{1N} \quad (4.71)$$

**Bild 4-17** Betrieb eines Zweitores zur Bestimmung von \underline{s}_{12} und \underline{s}_{22}

folgt. Die Gleichungen (4.69) und (4.70) werden addiert und das Ergebnis in (4.71) eingesetzt.

$$0 = (\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{21N}) \underline{U}_{2N} + (\underline{a}_{12N} + \underline{a}_{22N}) \underline{I}'_{2N} \Rightarrow$$

$$\underline{U}_{2N} = \frac{\underline{a}_{12N} + \underline{a}_{22N}}{\underline{a}_{11N} \underline{a}_{22N} - \underline{a}_{12N} \underline{a}_{21N}} \cdot \underline{U}_{1N} \quad (4.72)$$

Nun können die Wellengrößen extrahiert werden

$$\underline{b}_1 = \underline{U}_{1N}$$

$$\underline{b}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_{2N} + \underline{I}'_{2N}) = \frac{1}{2} \frac{\underline{a}_{11N} - \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{22N}}{\underline{a}_{12N} \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{11N} \underline{a}_{22N}} \underline{U}_{1N}, \quad (4.73)$$

$$\underline{a}_2 = \frac{1}{2} (\underline{U}_{2N} - \underline{I}'_{2N}) = \frac{1}{2} \frac{-\underline{a}_{11N} - \underline{a}_{12N} - \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{22N}}{\underline{a}_{12N} \underline{a}_{21N} - \underline{a}_{11N} \underline{a}_{22N}} \underline{U}_{1N}$$

was schließlich auf die gesuchten s-Parameter führt.

$$\underline{s}_{12} = \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_2} = 2 \frac{\underline{a}_{11N} \underline{a}_{22N} - \underline{a}_{12N} \underline{a}_{21N}}{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}} \quad (4.74)$$

$$\underline{s}_{22} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_2} = \frac{-\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} - \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}}{\underline{a}_{11N} + \underline{a}_{12N} + \underline{a}_{21N} + \underline{a}_{22N}}$$

Durch Entnormierung und Zusammenfassung erhalten wir

$$\underline{S} = \frac{1}{\underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{R_0} + \underline{a}_{21} R_0 + \underline{a}_{22}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{R_0} - \underline{a}_{21} R_0 - \underline{a}_{22} & 2(\underline{a}_{11} \underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} \underline{a}_{21}) \\ 2 & -\underline{a}_{11} + \frac{\underline{a}_{12}}{R_0} - \underline{a}_{21} R_0 + \underline{a}_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.75)$$

Hier ist eine wichtige Anmerkung nötig. Bei reziproken Zweitoren gilt bekanntlich [9] (vgl. 2.4.4)

$$\det \underline{A} = \underline{a}_{11} \underline{a}_{22} - \underline{a}_{12} \underline{a}_{21} = 1 \quad . \quad (4.76)$$

Für diesen Fall liefert (4.75)

$$\underline{s}_{12} = \underline{s}_{21} \quad . \quad (4.77)$$

Der bei Beschreibung durch Spannungen und Ströme schwierig zu deutende Begriff der Reziprozität bedeutet für die Wellengrößen nichts anderes als die Gleichheit von Vorwärts- und Rückwärtstransmission. Dies wird zu einem wichtigen Lehrsatz zusammengefasst:

Reziproke Zweitore sind transmissionssymmetrisch.

(4.75) kann nach den a-Parametern aufgelöst werden. Wir ersparen uns die mühsame Rechenarbeit und begnügen uns mit dem Ergebnis:

$$\underline{A} = \frac{1}{2\underline{s}_{21}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1 + \underline{s}_{11} - \underline{s}_{22} - (\underline{s}_{11}\underline{s}_{22} - \underline{s}_{12}\underline{s}_{21})}{R_0} & R_0 \cdot [1 + \underline{s}_{11} + \underline{s}_{22} + (\underline{s}_{11}\underline{s}_{22} - \underline{s}_{12}\underline{s}_{21})] \\ \frac{1 - \underline{s}_{11} - \underline{s}_{22} + (\underline{s}_{11}\underline{s}_{22} - \underline{s}_{12}\underline{s}_{21})}{R_0} & 1 - \underline{s}_{11} + \underline{s}_{22} - (\underline{s}_{11}\underline{s}_{22} - \underline{s}_{12}\underline{s}_{21}) \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Demnach ist eine von Null verschiedene Vorwärtstransmission \underline{s}_{21} Voraussetzung für die Existenz der Kettenmatrix.

In Abschnitt 2.4.5 finden sich Umrechnungsformeln für die verschiedenen Zweitordbeschreibungen. Zusammen mit (4.78) kann somit jede Zweitordarstellung aus der Streumatrix gewonnen werden, sofern sie existiert. Exemplarisch wird dies für die Admittanzmatrix angegeben:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_0 [(1 + \underline{s}_{11})(1 + \underline{s}_{22}) - \underline{s}_{12}\underline{s}_{21}]} \cdot \begin{pmatrix} (1 - \underline{s}_{11})(1 + \underline{s}_{22}) + \underline{s}_{12}\underline{s}_{21} & -2\underline{s}_{12} \\ -2\underline{s}_{21} & (1 + \underline{s}_{11})(1 - \underline{s}_{22}) + \underline{s}_{12}\underline{s}_{21} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Moderne s-Parameter-Messplätze erlauben die Darstellung solcher Matrizenelemente, wobei die Kettenmatrix und die bei Transistorschaltungen verbreitete Hybridmatrix von besonderer Bedeutung sind. Sie werden in der hier gezeigten Weise aus den gemessenen s-Parametern berechnet, sind also Ergebnis einer erweiterten Software.

4.2.5 Dreitore

Das Konzept der Beschreibung hochfrequenztechnischer Baugruppen durch die Streumatrix kann ohne Schwierigkeiten auf Anordnungen mit mehr als zwei Toren erweitert werden. Wir betrachten dazu das in Bild 4-18 gezeigte Dreitor. Nun müssen drei ablaufende Wellen \underline{b}_ν als Funktionen der zulaufenden \underline{a}_μ ausgedrückt werden. Folge ist eine 3x3-Matrix.

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{s}_{11} & \underline{s}_{12} & \underline{s}_{13} \\ \underline{s}_{21} & \underline{s}_{22} & \underline{s}_{23} \\ \underline{s}_{31} & \underline{s}_{32} & \underline{s}_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{a}_3 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Ein Hauptdiagonalelement $\underline{s}_{\nu\nu}$ beschreibt dabei die Eigenreflexion am Tor ν , ein Außerdiagonalelement $\underline{s}_{\mu\nu}$ die Transmission von Tor ν zu Tor μ . Die Elemente sind wie gewohnt bei Abschluss der Tore mit der Systemimpedanz R_0 zu bestimmen, was gleichermaßen für die Berechnung wie für die Messung gilt. Sind auf den Wellenleitern mehrere Moden ausbrei-

tungsfähig, kann man ein physikalisches Tor durch mehrere logische Tore beschreiben entsprechend der Anzahl der Ausbreitungsmoden. Die s-Parameter beschreiben dann auch den Übergang von einem Mode in den anderen [1].

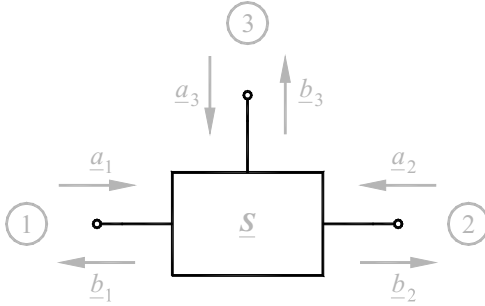


Bild 4-18 Dreitor

4.2.6 Aktive, passive und verlustlose n-Tore

Die Streumatrix besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, dass gewisse Merkmale des beschriebenen n-Tors direkt entnommen werden können [1]. So ist beispielsweise die Streumatrix eines verlustlosen n-Tors grundsätzlich *unitär*. Dies wird im Folgenden ausgehend von einer Leistungsbilanz hergeleitet. Wie in Abschnitt 4.1.1 begründet, beschreiben die Betragsquadrate der Wellengrößen die durch die Wellen transportierten Leistungen. Demnach lässt sich die gesamte einem n-Tor zugeführte Leistung als Differenz aus zugeführter und abgeführter beschreiben:

$$P = \sum_{v=1}^n (|a_v|^2 - |b_v|^2) \quad (4.81)$$

Man kann das Betragsquadrat einer komplexen Zahl als Produkt aus dieser Zahl und ihrer konjugiert komplexen darstellen. Für die zulaufenden Wellen erhalten wir damit ¹⁵

$$\begin{aligned} \sum |a_v|^2 &= a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + \dots + a_n^* a_n \\ &= \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & \dots & a_n^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \underline{a}^*{}^T \cdot \underline{a} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Drückt man die ablaufenden Wellen gemäß

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a} \quad (4.83)$$

durch die zulaufenden aus, ergibt sich völlig analog

¹⁵ Der hochgestellte Index T bezeichnet den transponierten Vektor bzw. die transponierte Matrix. Zeilen sind gegen Spalten vertauscht.

$$\begin{aligned} \sum |b_v|^2 &= (\underline{S} \cdot \underline{a})^{*T} \cdot \underline{S} \cdot \underline{a} \\ &= \underline{a}^{*T} \cdot \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} \cdot \underline{a} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Die gesamte Leistung gemäß (4.81) wird also

$$P = \underline{a}^{*T} \cdot (\underline{E} - \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S}) \cdot \underline{a} \quad (4.85)$$

Die zwischen den Vektoren stehende quadratische Matrix soll mit \underline{H} bezeichnet werden.

$$\underline{H} := \underline{E} - \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} \quad (4.86)$$

Da allgemein

$$(\underline{S}^{*T} \cdot \underline{S})^T = \underline{S}^T \cdot \underline{S}^* = (\underline{S}^{*T} \cdot \underline{S})^* \quad (4.87)$$

gilt, hat \underline{H} folgende spezielle Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \underline{H}^T &= (\underline{E} - \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S})^T \\ &= \underline{E} - (\underline{S}^{*T} \cdot \underline{S})^* \\ &= \underline{H}^* \end{aligned} \quad (4.88)$$

Man sagt, \underline{H} ist *HERMITESch*. Als Folge hat auch die quadratische Form

$$P = \underline{a}^{*T} \cdot \underline{H} \cdot \underline{a} \quad (4.89)$$

spezielle Eigenschaften und zwar gilt:

(i) P ist reell.

(ii) Im Fall

$$\underline{S}^{*T} = \underline{S}^{-1} \quad (4.90)$$

folgt

$$\underline{H} = 0$$

also

$$P = 0 \quad (4.91)$$

(iii) Falls \underline{H} *positiv definit* ist, folgt

$$P > 0$$

(iv) Falls \underline{H} *negativ definit* ist, folgt

$$P < 0$$

Hier sind weitergehende Erklärungen zu den einzelnen Punkten notwendig.

Zu (i) Dadurch ist gezeigt, dass der Ausdruck (4.85) in jedem Fall ein als Leistung interpretierbares Ergebnis liefert, wobei das Vorzeichen zum Ausdruck bringt, ob Leistung aufgenommen oder abgegeben wird.

Zu (ii) Eine Matrix mit der Eigenschaft (4.90) heißt *unitär*. Das Resultat (4.91) besagt, dass das n-Tor unter dem Strich weder Leistung aufnimmt noch abgibt, es ist demnach verlustlos. Dies führt auf einen wichtigen Lehrsatz:

Die Streumatrix eines verlustlosen n-Tors ist unitär.

Zu (iii) Hier ist ein Exkurs in die Matrizenrechnung notwendig. Eine quadratische Matrix heißt positiv definit, wenn alle *Hauptminoren* positiv sind. Hauptminoren sind Unterdeterminanten, die durch Streichung von Zeilen und Spalten mit gleichen Indizes entstehen. Machen wir ein Beispiel: Gegeben sei die 3x3-Matrix

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.92)$$

Sie besitzt folgende Hauptminoren:

$$\begin{aligned} m_1 &= \begin{vmatrix} h_{22} & h_{23} \\ h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} \\ m_2 &= \begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{31} & h_{33} \end{vmatrix} \\ m_3 &= \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \\ m_{12} &= h_{33} \\ m_{13} &= h_{22} \\ m_{23} &= h_{11} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Das in diesem Fall folgende Ergebnis $P > 0$ besagt, dass das n-Tor insgesamt mehr Leistung aufnimmt als es abgibt. Es ist demnach passiv, aber nicht verlustlos.

Zu (iv) Dieser Fall liegt absolut dual zu (iii). Alle Hauptminoren sind negativ, die abgegebene Leistung überwiegt, das n-Tor ist aktiv.

In manchen Fällen ist \mathbf{H} weder positiv noch negativ definit und auch nicht unitär. Dann kann dem n-Tor keine pauschale Eigenschaft zugeschrieben werden, es hängt von der äußeren Beschaltung ab, ob es sich aktiv oder passiv verhält. Ein Beispiel dazu wird im nächsten Abschnitt behandelt.

4.2.7 Beispiele

Wir betrachten zunächst eine verlustlose $\lambda/4$ -Leitung mit dem Wellenwiderstand R_W , welche im R_0 -System beschrieben wird (Bild 4-19). Diese Anordnung wurde bereits im Abschnitt 4.2.2 untersucht, die Berechnung führte auf die Streumatrix

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{R_W^2 + R_0^2} \begin{pmatrix} R_W^2 - R_0^2 & -j2 R_W R_0 \\ -j2 R_W R_0 & R_W^2 - R_0^2 \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Zum Test auf Verlustlosigkeit muss $\underline{\mathbf{S}}^{*T} \cdot \underline{\mathbf{S}}$ berechnet und geprüft werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} &= \frac{1}{(R_W^2 + R_0^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} R_W^2 - R_0^2 & j2 R_W R_0 \\ j2 R_W R_0 & R_W^2 - R_0^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_W^2 - R_0^2 & -j2 R_W R_0 \\ -j2 R_W R_0 & R_W^2 - R_0^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{E}
 \end{aligned} \quad (4.95)$$

\underline{S} ist also unitär, (4.94) beschreibt erwartungsgemäß ein verlustloses Zweitor.



Bild 4-19 Verlustlose $\lambda/4$ -Leitung mit Wellenwiderstand R_W

Im zweiten Beispiel wird ein allgemeines Zweitor betrachtet. Zum Test auf Passivität muss die in 4.2.6 eingeführte Matrix \underline{H} untersucht werden.

$$\begin{aligned}
 \underline{H} &= \underline{E} - \begin{pmatrix} * & * \\ \underline{s}_{11} & \underline{s}_{21} \\ * & * \\ \underline{s}_{12} & \underline{s}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{s}_{11} & \underline{s}_{12} \\ \underline{s}_{21} & \underline{s}_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \underline{s}_{11}^* \underline{s}_{11} - \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{21} & -\underline{s}_{11}^* \underline{s}_{12} - \underline{s}_{21}^* \underline{s}_{22} \\ -\underline{s}_{12}^* \underline{s}_{11} - \underline{s}_{22}^* \underline{s}_{21} & 1 - \underline{s}_{12}^* \underline{s}_{12} - \underline{s}_{22}^* \underline{s}_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \quad (4.96)$$

Der 1. Hauptminor von \underline{H} lautet

$$m_1 = 1 - |\underline{s}_{22}|^2 - |\underline{s}_{12}|^2, \quad (4.97)$$

er lässt sich leicht deuten. $|\underline{s}_{22}|^2$ bewertet die an Tor 2 reflektierte Leistung, $|\underline{s}_{12}|^2$ die von Tor 2 nach Tor 1 transmittierte. Der Fall $m_1 \leq 1$ besagt demnach, dass die auf Tor 2 zulaufende Welle in der Summe nicht verstärkt wird. Den zweiten Hauptminor

$$m_2 = 1 - |\underline{s}_{11}|^2 - |\underline{s}_{21}|^2 \quad (4.98)$$

kann man völlig analog interpretieren. Dadurch gelangt man zu dem Ergebnis, dass es sich um ein passives Zweitor handelt, wenn beide Hauptminoren nicht negativ sind, bzw. um ein aktives, wenn beide Hauptminoren positiv sind. Im letzten Fall wird sowohl die auf Tor 1 zulaufende, als auch die auf Tor 2 zulaufende Welle in der Leistung verstärkt. Im Fall unterschiedlicher Vorzeichen der Hauptminoren erfolgt in einer Richtung Leistungsverstärkung, in der anderen Dämpfung. Ob das Zweitor dann in der Summe mehr Leistung abgibt, als es aufnimmt, hängt vom Wert der zulaufenden Wellen, also vom Betriebsfall ab. Eine pauschale Aussage über das Leistungsverhalten ist dann nicht möglich. Die Gleichungen (4.97) und (4.98) eignen sich also zum Test eines Zweitors auf Passivität.

Ein gutes Beispiel für ein Zweitor, über dessen Passivität keine Aussage gemacht werden kann, ist ein gewöhnlicher Verstärker. Bei normalem Betrieb, also Beschaltung des Eingangs mit einer Signalquelle und Beschaltung des Ausgangs mit einer Last, verhält er sich aktiv. Schließt man hingegen die Quelle am Ausgang und die Last am Eingang an, kommt es nicht zu einer Signalverstärkung, das Zweitor ist passiv. Die Streumatrix des Verstärkers hat im einfachsten Fall die Form

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.99)$$

Hierbei wäre Tor 1 der Eingang, Tor 2 der Ausgang und die Spannungsverstärkung $V > 1$. Die Gleichungen (4.97) und (4.98) führen auf

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 > 0 \\ m_2 &= 1 - V^2 < 0 \end{aligned} . \quad (4.100)$$

4.2.8 Symmetrieeigenschaften

Dieser Abschnitt dient der Definition leicht zu interpretierender Fachbegriffe. Im Fall

$$\underline{\underline{s}}_{11} = \underline{\underline{s}}_{22} = \dots = \underline{\underline{s}}_{nn} \quad (4.101)$$

spricht man von einem *reflexionssymmetrischen* n-Tor. Eine Streumatrix mit der Eigenschaft

$$\underline{\underline{s}}_{\mu\nu} = \underline{\underline{s}}_{\nu\mu}$$

für alle Kombinationen

$$\mu = 1, 2 \dots n$$

$$\nu = 1, 2 \dots n$$

$$\mu \neq \nu$$

also

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^T \quad (4.102)$$

beschreibt ein *transmissionssymmetrisches* n-Tor. Die Streumatrix eines reflexions- und transmissionssymmetrischen Dreitors hat demnach die Form

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} r & t_A & t_B \\ t_A & r & t_C \\ t_B & t_C & r \end{pmatrix} . \quad (4.103)$$

4.3 Realisierungen

4.3.1 Passive Eintore

Jede Impedanz \underline{Z} bildet im Sinne der n-Tor-Theorie ein Eintor. Voraussetzung für Passivität ist die Eigenschaft

$$\operatorname{Re} \underline{Z} \geq 0 . \quad (4.104)$$

Im R_0 -System verursacht diese Impedanz bekanntlich den Reflexionsfaktor

$$r = \frac{\underline{Z} - R_0}{\underline{Z} + R_0} , \quad (4.105)$$

wodurch ihre Wirkung auf die Wellengrößen vollständig beschrieben ist. Bei passiver Impedanz gilt

$$|\underline{r}| \leq 1 \quad . \quad (4.106)$$

Spezialfälle sind der Wellensumpf $\underline{Z} = R_0$ mit dem Reflexionsfaktor $\underline{r} = 0$, der Kurzschluss $\underline{Z} = 0$ mit dem Reflexionsfaktor $\underline{r} = -1$ und der Leerlauf $\underline{Z} \rightarrow \infty$ mit dem Reflexionsfaktor $\underline{r} = +1$.

4.3.2 Aktive Eintore

Aktive Eintore werden in der HF-Technik *Reflexionsverstärker* genannt. Die ablaufende Welle ist im Betrag größer als die zulaufende, was mit

$$|\underline{r}| > 1 \quad (4.107)$$

einhergeht. Um daraus einen Verstärker mit Eingang und Ausgang zu machen, müssen zulaufende und ablaufende Welle voneinander getrennt werden. Dies gelingt beispielsweise mit Hilfe eines Zirkulators. Dieses Dreitor wird in Abschnitt 4.3.8 detailliert beschrieben. Bild 4-20 zeigt das Schaltsymbol des Reflexionsverstärkers.

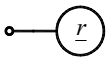


Bild 4-20 Schaltsymbol des Reflexionsverstärkers

Die Realisierung kann mit Hilfe einer *Tunnel diode* erfolgen, ihre Kennlinie ist in Bild 4-21 dargestellt. Für kleine Aussteuerungen um den Punkt A kann die Kennlinie durch die grau dargestellte Gerade angenähert werden, und das ist wiederum die Arbeitsgerade einer realen Spannungsquelle. Somit ist die Verstärkerwirkung erklärt. Man fragt sich, woher ein passives Bauteil die für Verstärkung notwendige Energie bezieht. Für den beschriebenen Betrieb muss der Arbeitspunkt A durch Anlegen einer Gleichspannung eingestellt werden. Diese fungiert als Energielieferant.

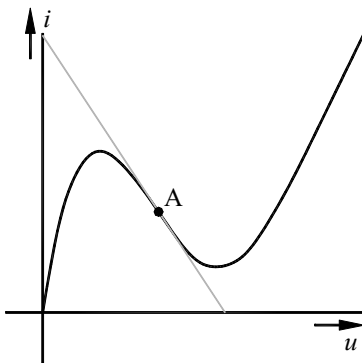


Bild 4-21 Kennlinie einer Tunnel diode

Der Vorteil dieser Realisierung besteht darin, dass die Tunnel diode als passives Bauteil beliebig gekühlt werden kann. Bei einem Transistor ist das nicht möglich, er würde die für Verstärkerbetrieb erforderlichen Eigenschaften verlieren. Durch Kühlung wird das thermische Rauschen herabgesetzt, weshalb sich der Reflexionsverstärker für besonders rauscharme Anwen-

dungen anbietet. Ein Beispiel ist der Empfangsverstärker in einer Bodenstation für Satellitenfunk. Hier werden die Bauteile in flüssigem Helium gekühlt.

4.3.3 Die Leitung

Eine Leitung definierter Länge, deren Wellenwiderstand mit der Systemimpedanz R_0 übereinstimmt, stellt ein besonders einfaches Beispiel für ein passives Zweitor dar. In Abschnitt 4.2.2 wurde die Streumatrix

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.108)$$

berechnet. Im R_0 -System eine Beschreibung für eine Leitung mit veränderter Wellenimpedanz anzugeben, gestaltet sich ungleich schwieriger. Dieser Fall wurde im Abschnitt 4.2.2 speziell für die $\lambda/4$ -Leitung behandelt.

4.3.4 Der Phasenschieber

Für messtechnische Anwendungen ist es häufig hilfreich, eine definierte Phasenverschiebung eines Signals herbeizuführen. Dazu dient der Phasenschieber, dessen Schaltsymbol in Bild 4-22 zu sehen ist. Er kann z. B. in koaxialer Technik als teleskopartig ausziehbare Leitung realisiert werden. Die Streumatrix hat die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j\varphi} \\ e^{-j\varphi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.109)$$

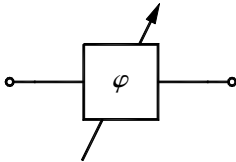


Bild 4-22 Schaltsymbol des Phasenschiebers

Der Phasenschieber wird auch *Gyrator* genannt, darf aber nicht mit dem aus der Elektronik bekannten Gyrator - einem Vierpol aus zwei spannungsgesteuerten Stromquellen - verwechselt werden. Letzterer wird in der Niederfrequenztechnik gern zur Realisierung von aktiven Filtern eingesetzt, man spricht in diesem Zusammenhang von Gyratorfiltern.

4.3.5 Das Dämpfungsglied

Bild 4-23 zeigt das Schaltsymbol eines Dämpfungsglieds. Das große Pi im Symbol rührt daher, dass die Realisierung des Dämpfungsglieds durch Zusammenschaltung von drei Widerständen an diesen Buchstaben erinnert. Man könnte es auch mit Hilfe der Stern-Dreieck-Transformation in eine T-Struktur überführen. Das Dämpfungsglied ist beidseitig angepasst, und schwächt das Signal in beiden Richtungen in derselben definierten Weise ab. Die Dämpfung a wird als Dezibel-Wert angegeben und ist dann gleichermaßen Leistungsdämpfung wie

Spannungsdämpfung, da das Zweitor zwischen gleichen Abschlüssen betrieben wird. Die Streumatrix lautet somit

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 10^{-a/20\text{dB}} \\ 10^{-a/20\text{dB}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.110)$$

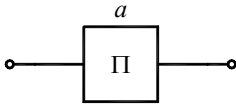


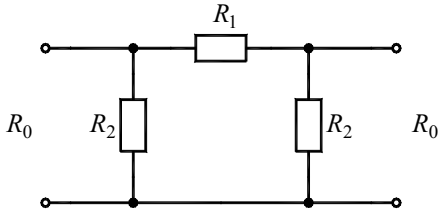
Bild 4-23 Schaltsymbol des Dämpfungsglieds

Da das Dämpfungsglied nur aus Widerständen aufgebaut ist, lässt es sich einfach und präzise realisieren. Dämpfungsglieder werden an verschiedenen Stellen eingesetzt:

- * **Effektivwertmessung:** Ein unbekanntes Signal wird in definierter Weise so weit abgeschwächt, bis sein Effektivwert dem eines bekannten, geeichten Signals genau gleich ist. Für die Messung braucht man lediglich ein RMS-Voltmeter. Aus der Dämpfung kann dann ganz einfach auf den Pegel des unbekannten Signals geschlossen werden. Hierfür ist ein in Stufen einstellbares Dämpfungsglied notwendig, das auf Grund der Anwendung den Namen *Eichleitung* erhielt. Ist das unbekannte Signal schwächer als das geeichte, verfährt man genau umgekehrt.
- * **Pegelanpassung:** Ein zu messendes Signal wird so weit abgeschwächt, dass ein Empfangsteil, z. B. ein Messwerk, genau richtig ausgesteuert wird. Ein wichtiges Messgerät der HF-Technik ist der *Spectrum Analyzer*, der es erlaubt ein hochfrequentes Signal nach seinen spektralen Eigenschaften darzustellen. Dieser besitzt im Eingangsteil ein einstellbares Dämpfungsglied, welches bis heute Eichleitung genannt wird. Der nachfolgende Mischer, der die Aufgabe hat das zu messende Signal in eine andere Frequenzlage umzusetzen, ist äußerst empfindlich, damit auch sehr schwache Signale dargestellt werden können.¹⁶ Das Dämpfungsglied muss vom Anwender so eingestellt werden, dass der Mischer gerade noch nicht übersteuert wird. Damit erzielt man die größte Dynamik.
- * **Verbesserung des Reflexionsfaktors:** Einem Fehlabschluss wird ein Dämpfungsglied vorgeschaltet. Die Reflexionsdämpfung erhöht sich dadurch um den zweifachen Dämpfungswert, da sowohl die auf den Fehlabschluss zulaufende, als auch die von ihm reflektierte Welle das Dämpfungsglied durchläuft.

Dämpfungsglieder sind häufig mit Kühlrippen ausgestattet und daran leicht erkennbar. Damit wird die aus der Signalvernichtung resultierende Wärmeabfuhr unterstützt; für sehr große Leistungen werden sogar Flüssigkeitskühlungen eingesetzt. Neuerdings sind sogenannte *digitale Dämpfungsglieder* als integrierte Bausteine erhältlich. Digital bedeutet hierbei, dass durch Anlegen eines speziellen Bitmusters eine definierte Dämpfung eingestellt werden kann. Diese sind sehr vorteilhaft bei Funkempfängern, die sich damit per Software an veränderte Funkbedingungen anpassen können. Bild 4-24 zeigt die Realisierung eines Dämpfungsglieds in Pi-Struktur.

¹⁶ Ein Verstärker am Eingang des Geräts ist nicht denkbar. Er müsste die komplette Bandbreite des Geräts abdecken und Linearitätsanforderungen erfüllen, die sich bis heute nicht realisieren lassen.

**Bild 4-24** Dämpfungsglied in Pi-Struktur

Es folgt ein Beispiel: Wir wollen ein 20dB-Dämpfungsglied für ein 50Ω -System dimensionieren. Als erstes wird die Anpassbedingung formuliert: Ein am rechten Tor angebrachter Abschluss R_0 transformiert sich zum linken in sich selbst.

$$R_0 = R_2 \parallel (R_1 + R_2 \parallel R_0) = \frac{R_2 \left(R_1 + \frac{R_2 \cdot R_0}{R_2 + R_0} \right)}{R_2 + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_0}{R_2 + R_0}} \quad (4.112)$$

Diese Gleichung lässt sich in einigen Rechenschritten nach R_1 auflösen, und man erhält

$$R_1 = \frac{2 R_0^2 R_2}{(R_2 - R_0) \cdot (R_2 + R_0)} \quad (4.113)$$

Nun wird die Dämpfungsbedingung formuliert: Bei Beschaltung des rechten Tores mit R_0 erfolgt eine Spannungsteilung um den Faktor 10 entsprechend der vorgegebenen Dämpfung von 20dB. Für diese Berechnung müssen Ströme eingeführt werden wie in Bild 4-25 zu sehen. Der Abschluss R_0 transformiert sich vereinbarungsgemäß zum linken Tor in sich selbst. Damit gilt

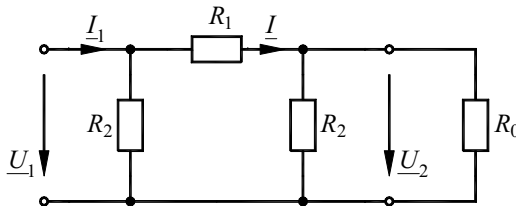
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_0} \quad (4.114)$$

Mit der Spannungsteilungsgleichung erhält man

$$\underline{I} = \underline{I}_1 \frac{R_2}{R_2 + R_1 + R_2 \parallel R_0} \quad (4.115)$$

was schließlich auf

$$\underline{U}_2 = \underline{I} \cdot R_2 \parallel R_0 = \frac{\underline{U}_1}{R_0} \cdot \frac{R_2 \cdot R_2 \parallel R_0}{R_2 + R_1 + R_2 \parallel R_0} \quad (4.116)$$

**Bild 4-25** Zur Berechnung der Spannungsteilung

führt. Setzt man hier das Spannungsverhältnis ein, ergibt sich eine Gleichung für die Widerstände. Durch Elimination von R_1 mit Hilfe von (4-113) und anschließende Auflösung nach R_2 ist ein erstes Ergebnis gefunden. Dieses wird in (4.113) eingesetzt, und die Aufgabe ist gelöst. Das endgültige Resultat lautet:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{11}{20} R_0 = 27,5\Omega \\ R_2 &= \frac{11}{9} R_0 = 61,1\Omega \end{aligned} \quad (4.117)$$

Dem interessierten Leser wird dringend empfohlen die komplette Rechnung selbst zu verifizieren. Er wird überrascht sein von dem immensen Rechenaufwand, der hier zur Bestimmung von gerade einmal zwei Widerstandswerten erforderlich ist.

4.3.6 Das Anpassglied

Das Anpassglied ist streng genommen die verallgemeinerte Form des Dämpfungsglieds und unterscheidet sich deshalb nur wenig. Die Systemimpedanzen auf den beiden Seiten sind nun unterschiedlich, als Folge ergeben sich unterschiedliche Querwiderstände. Bild 4-26 zeigt eine typische Realisierung. Es gibt nun zwei Anpassbedingungen:

- * Ein Abschluss R_{02} am rechten Tor transformiert sich in R_{01} am linken,
- * Ein Abschluss R_{01} am linken Tor transformiert sich in R_{02} am rechten.

Hinzu kommt wie gehabt eine Dämpfungsbedingung, sodass insgesamt drei Vorgaben bestehen, welche eine eindeutige Lösung für die drei Widerstände liefern. Wegen der unterschiedlichen Abschlüsse muss nun strikt zwischen Spannungs- und Leistungsdämpfung unterschieden werden. Auch ist die Angabe einer Streumatrix nicht ohne Weiteres möglich.

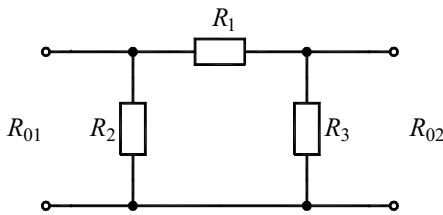


Bild 4-26 Anpassglied in Pi-Struktur

Häufig besteht nur die Anforderung ein bestimmtes Impedanzniveau an ein anderes anzupassen, dann wählt man das *Anpassglied minimaler Dämpfung*. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass ein Querwiderstand entfällt, das ist der auf der hochohmigeren Seite, man vergleiche Bild 4-27. Ein typisches Beispiel für die Notwendigkeit eines Anpassglieds ist der Einsatz eines Messgeräts mit einer bestimmten Eingangsimpedanz zur Messung an einem gegebenen System. Es gibt auch Messgeräte mit umschaltbarer Eingangsimpedanz. Die Umschaltung bedeutet dabei nichts anderes als das Zuschalten eines Anpassglieds im Eingangsteil und Kompensation des dadurch verursachten Signalverlusts über die Gerätesoftware.

Als praktisches Beispiel soll ein Anpassglied minimaler Dämpfung für einen Übergang von 50Ω auf 75Ω entworfen werden. Wir verwenden Bild 4-27 mit

$$\begin{aligned} R_{01} &= 50\Omega \\ R_{02} &= 75\Omega \end{aligned} \quad (4.118)$$

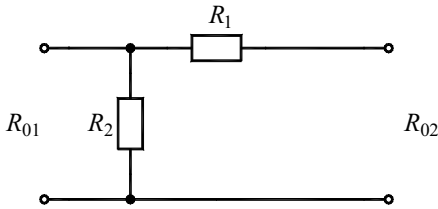


Bild 4-27 Anpassglied minimaler Dämpfung für $R_{01} < R_{02}$

Die Anpassungsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} R_{01} &= R_2 \parallel (R_1 + R_{02}) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_{02})}{R_2 + R_1 + R_{02}} \\ R_{02} &= R_1 + R_2 \parallel R_{01} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_{01}}{R_2 + R_{01}} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Dieses Gleichungspaar lässt sich nach den gesuchten Größen R_1 und R_2 auflösen, wobei der Aufwand an algebraischer Rechnung wieder überraschend hoch ist. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{R_{02}^2 - R_{01} \cdot R_{02}} = 43,3\Omega \\ R_2 &= R_{01} \cdot \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{02} - R_{01}}} = 86,6\Omega \end{aligned} \quad (4.120)$$

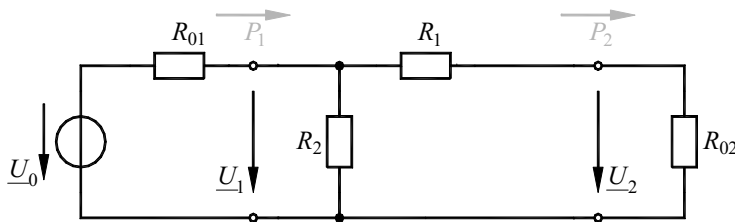


Bild 4-28 Zur Berechnung der Wellendämpfung a_{21}

Im nächsten Schritt wollen wir die vom Anpassglied verursachte Wellendämpfung berechnen und zwar für beide Richtungen (vgl. 2.3.2). Zunächst wird an Tor 1 gespeist, siehe Bild 4-28. Das Verhältnis der Scheinleistungen P_1 und P_2 liefert die Dämpfung a_{21} .¹⁷ R_{02} transformiert sich in R_{01} , folglich ist

¹⁷ Die Indizierung wurde in Anlehnung an die bei s-Parametern eingeführte Regel gewählt. Der erste Index bezeichnet das Ziel, der zweite die Quelle.

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_{01}} . \quad (4.121)$$

Die Widerstände R_1 und R_{02} bilden einen Spannungsteiler, also ist

$$P_2 = \left(U_1 \cdot \frac{R_{02}}{R_1 + R_{02}} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_{02}} . \quad (4.122)$$

Unter Berücksichtigung von (4.120) ergibt sich die gesuchte Dämpfung ausgedrückt durch die beiden Systemimpedanzen zu

$$a_{21} = 10 \cdot \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{(\sqrt{R_{02}} + \sqrt{R_{02} - R_{01}})^2}{R_{01}} \text{ dB} = 5,72 \text{ dB} . \quad (4.123)$$

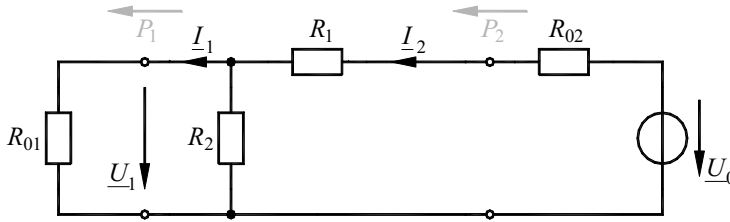


Bild 4-29 Zur Berechnung der Wellendämpfung a_{12}

Nun soll die Wellendämpfung in der Gegenrichtung bestimmt werden, der dazu erforderliche Betrieb ist in Bild 4-29 gezeigt. Mit der gleichen Begründung wie vorher ist

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_{02} . \quad (4.124)$$

I_1 ergibt sich aus I_2 durch Stromteilung und es folgt

$$P_1 = I_2^2 \cdot \left(\frac{R_2}{R_2 + R_{01}} \right)^2 \cdot R_{01} . \quad (4.125)$$

Nach einigen Rechenschritten erhält man

$$a_{12} = 10 \cdot \lg \frac{P_2}{P_1} \text{ dB} = 10 \cdot \lg \frac{(\sqrt{R_{02}} + \sqrt{R_{02} - R_{01}})^2}{R_{01}} \text{ dB} = a_{21} . \quad (4.126)$$

Die Analyse führt auf das interessante Ergebnis, dass die Wellendämpfung in beiden Richtungen gleich ist. Das ist eine unmittelbare Folge der Reziprozität passiver n-Tore. Dieser Dämpfungswert dient allgemein zur Spezifikation von Anpassgliedern minimaler Dämpfung.

4.3.7 Die Richtungsleitung

Bild 4-30 zeigt das Schaltsymbol der Richtungsleitung [1]. Die Wirkungsweise dieses Zweitors ist schnell erklärt. Es ist beidseitig angepasst, die Transmission ist in Pfeilrichtung hoch, entgegen der Pfeilrichtung niedrig. Die Richtungsleitung wird deshalb auch die Diode der HF-Technik genannt. Die Streumatrix einer idealen Richtungsleitung hat demzufolge die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.127)$$

Im realen Fall liegt eine gewisse Fehlanpassung vor, Transmission und Unterdrückung sind nicht hundertprozentig und es erfolgt eine Phasenverschiebung. Dann erhält die Streumatrix die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} r_1 & s \\ t & r_2 \end{pmatrix}, \quad (4.128)$$

wobei man

$$\begin{aligned} |r_{1,2}| &\ll 1 \\ |s| &\ll 1 \\ |t| &\approx 1 \end{aligned} \quad (4.129)$$

anstrebt.

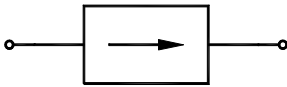


Bild 4-30 Schaltsymbol der Richtungsleitung

Zur Realisierung dient ein Zirkulator, er wird in Abschnitt 4.3.8 besprochen. Richtungsleitungen werden zum Schutz empfindlicher Tore eingesetzt. Beispielsweise sollte bei einem Verstärker grundsätzlich vermieden werden, dass ein Signal auf das Ausgangstor zuläuft. Die Folge wären *Intermodulationen* in Folge nichtlinearer Verzerrungen. Darunter versteht man die unerwünschte Entstehung neuer Signalfrequenzen durch Kombination der Signale. Dieses Phänomen wurde in Abschnitt 2.5.3 genau erklärt. Bei einem Verstärker, der eine Sendeantenne speist, kann dies durch ein von der Antenne empfangenes Fremdsignal leicht passieren. Gelegentlich hat die Richtungsleitung auch die Aufgabe Beschädigungen zu verhindern.

4.3.8 Der Zirkulator

Bild 4-31 zeigt das Schaltsymbol des Zirkulators [1]. Auch hier ist die Wirkungsweise leicht zu verstehen. Alle drei Tore sind angepasst. Eine auf ein Tor zulaufende Welle wird in Pfeilrichtung zum Nachbortor weitergeleitet, in Gegenrichtung unterdrückt. Die Streumatrix des idealen Zirkulators hat somit die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

Im realen Fall sind die Werte unvollkommen, das Verhalten ist aber in aller Regel symmetrisch, d.h. die Reflexionsfaktoren sowie die Transmissionen sind untereinander gleich. Es ergibt sich

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \underline{r} & \underline{s} & \underline{t} \\ \underline{t} & \underline{r} & \underline{s} \\ \underline{s} & \underline{t} & \underline{r} \end{pmatrix}, \quad (4.131)$$

wobei man

$$\begin{aligned} |\underline{r}| &<< 1 \\ |\underline{s}| &<< 1 \\ |\underline{t}| &\approx 1 \end{aligned} \quad (4.132)$$

anstrebt. Die Abweichung der Beträge von den idealen Werten können im dB-Maß angegeben werden in Form einer Reflexionsdämpfung, einer Vorwärtsdämpfung und einer Rückwärtsunterdrückung.

$$\begin{aligned} a_r &= -20 \lg |\underline{r}| \text{ dB} \\ a_t &= -20 \lg |\underline{t}| \text{ dB} \\ a_s &= -20 \lg |\underline{s}| \text{ dB} \end{aligned} \quad (4.133)$$

a_s wird auch *Isolation* genannt.

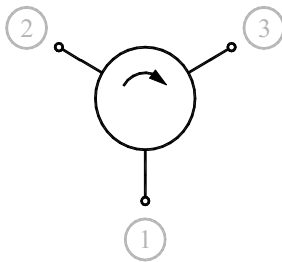


Bild 4-31 Schaltsymbol des Zirkulators

Zirkulatoren können in koaxialer Technik, als Streifenleiter oder auch als Hohlleiter realisiert werden. Dabei kommen Permanentmagneten aus ferromagnetischen Stoffen zum Einsatz. Auf die feldtheoretische Erklärung der Wirkungsweise muss hier verzichtet werden. Man kann sich bildhaft vorstellen, dass ein senkrecht zur Leitungsrichtung wirkendes statisches Magnetfeld die Welle in gezielter Weise zum Nachbartor ablenkt, vergleichbar der Ablenkung eines Elektronenstrahls. Wegen der mehr oder weniger stark ausgeprägten nichtlinearen Eigenschaften aller Ferromagnete neigen Zirkulatoren zu nichtlinearen Verzerrungen, also zur Entstehung von Oberschwingungen und Intermodulationen. Bei hohen Anforderungen an den Störabstand sollen Zirkulatoren aus diesem Grund nicht eingesetzt werden. Über nichtlineare Verzerrungen finden sich ausführliche Erklärungen in Abschnitt 2.5.3. Bild 4-32 zeigt die Realisierung einer Richtungsleitung mit Hilfe eines geeignet beschalteten Zirkulators. Eine auf Tor 1 zulaufende Welle wird dämpfungsarm zum Tor 2 durchgeleitet. Eine auf Tor 2 zulaufende Welle wird zum Tor 3 geleitet und dort abgesumpft, gelangt also nicht an das Tor 1. Reicht die Isolation so nicht aus, kann man zwei derartige Anordnungen kaskadieren.

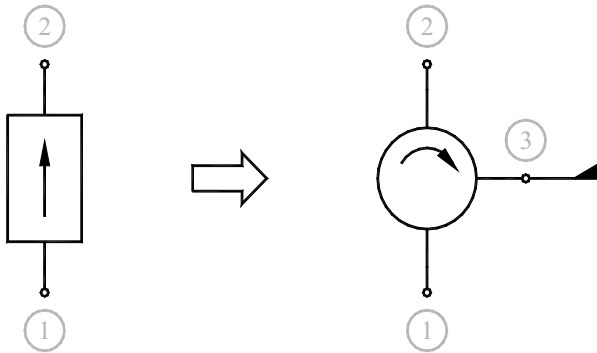


Bild 4-32 Realisierung der Richtungsleitung mit Zirkulator

In Bild 4-33 ist dargestellt, wie man mit einem Zirkulator einen Reflexionsverstärker zu einem herkömmlichen Verstärker - also einem Zweitor mit Eingang und Ausgang - umbauen kann. Die Funktionsweise erklärt sich von selbst, der Betrag des Reflexionsfaktors liefert direkt die Verstärkung. Diese Anordnung würde sich im Prinzip auch zur Reflexionsfaktormessung eignen. Dafür verwendet man aber besser die im nächsten Abschnitt beschriebene Reflexionsfaktor-Messbrücke.

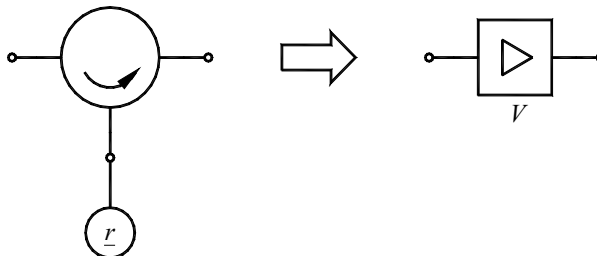


Bild 4-33 Praktischer Aufbau eines Reflexionsverstärkers

Ein weiteres Beispiel für den Einsatz des Zirkulators ist in Bild 4-34 skizziert. Es handelt sich um einen sogenannten *Transceiver*. Dieses Akronym ist durch Zusammenziehen der Begriffe *Transmitter* für Sender und *Receiver* für Empfänger entstanden. Es handelt sich um eine kommunikationstechnische Einrichtung, die zugleich senden und empfangen kann, deshalb mit einem Sender (T), einem Empfänger (R) und einer gemeinsamen Antenne ausgestattet ist. Solche Einrichtungen kommen überall dort zum Einsatz, wo Funkverkehr in beide Richtungen stattfindet, also bei Gegensprechsystemen. Man spricht auch vom *full-duplex*-Betrieb. Im Bereich des GSM-Mobilfunks gibt es den Begriff BTS für *Base Transceiver Station*, das ist die Funkstation, mit der das einzelne Mobiltelefon in Kontakt steht.¹⁸ Der Zirkulator hat die Aufgabe den Sender vom Empfänger zu trennen. Das Sendesignal gelangt über den Zirkulator zur Antenne, welche angepasst sein muss, und wird von dieser abgestrahlt. Das von der An-

¹⁸ Allerdings werden bei GSM-Mobilfunk wegen der extrem hohen Anforderungen an die Dynamik keine Zirkulatoren eingesetzt; man verwendet Duplexer gemäß 3.3.10.

tenne empfangene Signal wird an den ebenfalls angepassten Empfänger geleitet. Somit ist sichergestellt, dass das Sendesignal nicht an den Empfängereingang gelangt.

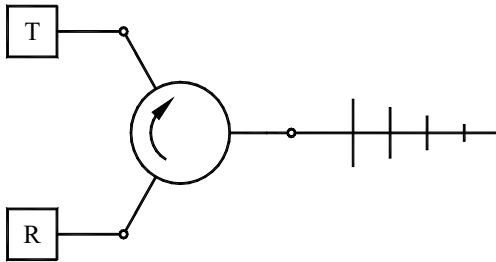


Bild 4-34 Blockschaltbild einer Transceiver-Station

4.3.9 Die Reflexionsfaktor-Messbrücke

In Bild 4-35 ist das Schaltsymbol der Reflexionsfaktor-Messbrücke dargestellt. Die Funktionsweise dieses Dreitors lässt sich folgendermaßen verbal beschreiben:

- * Alle Tore sind angepasst.
- * In Pfeilrichtung erfolgt auf den entsprechend gekennzeichneten Pfaden Transmission mit definierter Dämpfung.
- * Eine Signalausbreitung entgegen der Pfeilrichtung wird unterdrückt.
- * Die Tore 1 und 3 sind vollständig entkoppelt.

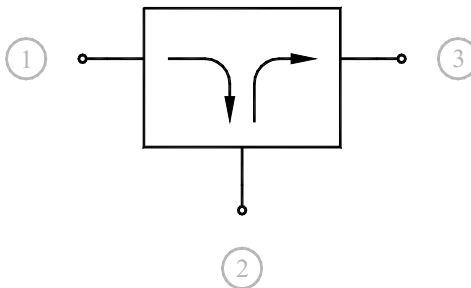


Bild 4-35 Schaltsymbol der Reflexionsfaktor-Messbrücke

Die Streumatrix der idealen Reflexionsfaktor-Messbrücke hat die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} . \quad (4.134)$$

In diesem Fall hätten die Pfade eine Dämpfung von je 3dB. Kleinere Dämpfungen sind bei Reflexionsfaktor-Messbrücken der hier behandelten Art nicht realisierbar. Das Dreitor ist also nicht verlustlos; hierin besteht ein gewisser Nachteil gegenüber dem Zirkulator. Bild 4-36 zeigt den kompletten Aufbau zur Messung eines Reflexionsfaktors. Die Anordnung soll im Folgenden analysiert werden. Die Signalquelle ist angepasst, somit gilt

$$\underline{r}_S = 0 .$$

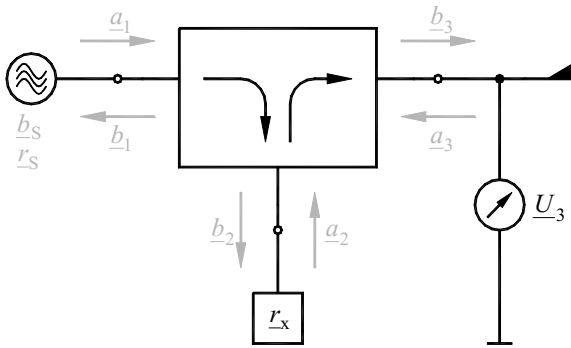


Bild 4-36 Anordnung zur Messung des Reflexionsfaktors

Wegen

$$\underline{s}_{11} = \underline{s}_{12} = \underline{s}_{13} = 0$$

ist

$$\underline{b}_1 = 0 ,$$

folglich ist die Spannung an Tor 1 der Quellwelle proportional gemäß

$$\underline{U}_1 = \frac{\sqrt{R_0}}{2} \cdot \underline{b}_S .$$

Weiter gilt

$$\underline{b}_2 = \underline{s}_{21} \underline{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{b}_S$$

$$\underline{a}_2 = \underline{r}_x \underline{b}_2 = \frac{\underline{r}_x}{\sqrt{2}} \underline{b}_S$$

und schließlich

$$\underline{b}_3 = \underline{s}_{32} \underline{a}_2 = \frac{r_x}{2} \underline{b}_S .$$

Der Sumpf an Tor 3 hat

$$\underline{a}_3 = 0$$

zur Folge, somit ist die an Tor 3 messbare Spannung

$$\underline{U}_3 = \frac{\sqrt{R_0}}{2} \cdot \underline{b}_3$$

dem Reflexionsfaktor proportional und wir erhalten

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_1} = \frac{r_x}{2} . \quad (4.135)$$

In der Praxis sind die Streuparameter \underline{s}_{21} und \underline{s}_{32} im Betrag kleiner als $1/\sqrt{2}$ und ihre Phase ist von Null verschieden. Diese Grunddämpfung und die Phasenverschiebung werden vor der eigentlichen Messung in einem Normalisierungszyklus ermittelt. Hierbei wird an Stelle des Prüflings ein Kurzschluss, der bekanntlich den Reflexionsfaktor -1 hat, angebracht. Die Messergebnisse werden später mit denen der Normalisierung verrechnet, was auf den korrekten Reflexionsfaktor r_x führt. Zur Ermittlung des Spannungsverhältnisses $\underline{U}_3/\underline{U}_1$ dient der sogenannte *Network Analyzer*, ein Messplatz bestehend aus einem Signalgenerator und einem frequenzselektiven Voltmeter, welche in Frequenz und Pegel miteinander kommunizieren. Die Messung erfolgt über ein vom Anwender vorgegebenes Frequenzintervall, das Resultat ist also ein Frequenzgang des Reflexionsfaktors.

Bei realen Reflexionsfaktor-Messbrücken sind die Tore 1 und 3 nicht vollständig entkoppelt, ein kleiner Teil des Signals gelangt direkt von Tor 1 nach Tor 3. Diese Eigenschaft wird durch die sogenannte *Directivity D* quantitativ beschrieben. Das ist die Dämpfung auf dem direkten Pfad von Tor 1 nach Tor 3 bezogen auf die Grunddämpfung der Messbrücke.

$$D = -20 \cdot \lg \frac{|\underline{s}_{31}|}{|\underline{s}_{21} \cdot \underline{s}_{32}|} \text{ dB} \quad (4.136)$$

Die Directivity ist ein wichtiges Qualitätsmerkmal einer Reflexionsfaktor-Messbrücke. Es ergeben sich zwei Konsequenzen:

- * Ein Teil des von der Signalquelle gelieferten Signals gelangt nicht zum Prüfling, es geht also für die Messung verloren. Dieser Effekt kann in aller Regel vernachlässigt werden.
- * An Tor 3 erfolgt eine Überlagerung des vom Prüfling reflektierten und des direkt transmittierten Signals, was zu einer Verfälschung des Messergebnisses führt.

Der zuletzt genannte Effekt soll etwas genauer untersucht werden. Man erkennt sofort, dass die Verfälschung umso gravierender ist, je schwächer das von r_x reflektierte Signal ist. Die Messung wird also bei Prüflingen mit hoher Reflexionsdämpfung kritisch. Es sind zwei Extremfälle denkbar, woraus sich Fehlergrenzen abschätzen lassen.

- * Reflektiertes und transmittiertes Signal überlagern sich gleichphasig. Der Messwert nimmt den größtmöglichen Wert an.
- * Die Signale überlagern sich gegenphasig, der Messwert wird zu klein. Bei Betragsgleichheit erfolgt eine Auslöschung, der Messwert wird null.

Machen wir ein Beispiel: Die Grunddämpfung einer Reflexionsfaktor-Messbrücke beträgt 8,5dB, ihre Directivity wird mit 37dB angegeben. Nach Normalisierung wurde eine Reflexionsdämpfung von 6,5dB gemessen. Es stellt sich die Frage nach dem Vertrauensbereich, dem Wertebereich, in dem die wahre Reflexionsdämpfung des Prüflings liegt. In Bild 4-37 sind die Signalflüsse skizziert. Die an Tor 3 ablaufende Welle \underline{b}_3 setzt sich aus einem durch die Directivity verursachten Anteil \underline{b}_{3d} und einem durch die Reflexion verursachten Anteil \underline{b}_{3r} zusammen. Über deren Phasenlage ist nichts bekannt. \underline{b}_{3d} ist gegenüber \underline{a}_1 um (37+8,5)dB gedämpft, \underline{b}_{3r} um (x+8,5)dB und die Überlagerung \underline{b}_3 um (6,5+8,5)dB. Da alle Verhältnisse den additiven Anteil 8,5dB entsprechend der Grunddämpfung haben, kann dieser für den Vergleich weggelassen werden. Die Abschätzung der Überlagerung ist im Dezibel-Maß nicht möglich, es müssen die tatsächlichen Verhältnisse berechnet werden.

$$V_d = 10^{-37/20} = 0,0141$$

$$V = 10^{-6,5/20} = 0,473$$

Nun müssen die beiden Extremfälle der Überlagerung untersucht werden.

- (i) V hat sich durch gleichphasige Überlagerung der Wellenanteile ergeben.

$$V = V_{x1} + V_d$$

$$V_{x1} = V - V_d = 0,459 \quad \Rightarrow$$

$$a_{R1} = 6,76\text{dB}$$

- (ii) Es fand gegenphasige Überlagerung statt.

$$V = V_{x2} - V_d$$

$$V_{x2} = V + V_d = 0,487 \quad \Rightarrow$$

$$a_{R2} = 6,24\text{dB}$$

Somit folgt für den Vertrauensbereich der Reflexionsdämpfung

$$6,24\text{dB} \leq a_R \leq 6,76\text{dB} \quad .$$

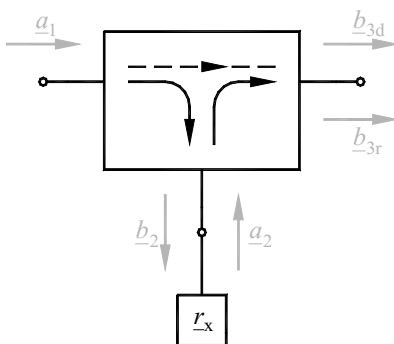


Bild 4-37 Signalflüsse

Man erkennt wieder, dass sich im Falle der Gleichheit von Directivity und wahrer Reflexionsdämpfung im Fall gegenphasiger Überlagerung

$$V = V_{x2} - V_d = 0$$

ergibt. Es wird überhaupt kein Signal mehr gemessen, man würde auf unendliche Reflexionsdämpfung schließen. Dies bedeutet die Grenze der Einsetzbarkeit einer Reflexionsfaktor-Messbrücke. In der Praxis achtet man darauf, dass Directivity der Messbrücke und Empfindlichkeit des Analysators in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen.

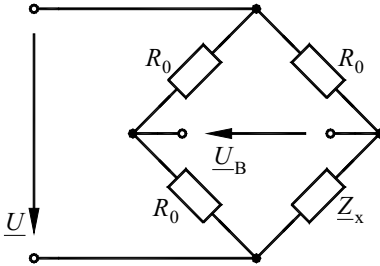


Bild 4-38 Realisierung einer Reflexionsfaktor-Messbrücke

In Bild 4-38 sieht man eine Realisierung. Es liegt tatsächlich eine Brückenschaltung vor, gebildet aus drei gleichen Widerständen vom Wert der Systemimpedanz R_0 und dem Prüfling Z_x . Am linken Tor wird mit einer Spannung \underline{U} gespeist, die Spannung \underline{U}_B im Brückenzweig wird gemessen. Durch Anwendung der Spannungsteilungsgleichung auf die beiden parallel liegenden Pfade erhält man

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{U}}{2} - \underline{U} \frac{R_0}{\underline{Z}_x + R_0} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_x - R_0}{2(\underline{Z}_x + R_0)} \quad (4.137)$$

woraus mit 4-33

$$\underline{r}_x = 2 \frac{\underline{U}_B}{\underline{U}} \quad (4.138)$$

folgt. Das Spannungsverhältnis liefert den Reflexionsfaktor. Bild 4-38 ist prinzipiell zu verstehen. Bei Realisierung in koaxialer Technik verfügen die drei Tore über ein gemeinsames Massepotenzial¹⁹, was bei der hier gezeigten Schaltung nicht möglich ist. Abhilfe ließe sich durch Auskopplung von \underline{U}_B mit einem Übertrager schaffen. Auf alle Fälle eignet sich Bild 4-38 gut zum grundsätzlichen Verständnis der Funktionsweise einer Reflexionsfaktor-Messbrücke. In Bild 4-43 ist eine Reflexionsfaktor-Messbrücke in praktischer Ausführung zu sehen.

4.3.10 Der Duplexer

Bei diesem Dreitor handelt es sich um die Zusammenschaltung von zwei Bandpassfiltern mit unterschiedlichen Durchlassbereichen. Es wird deshalb auch *HF-Frequenzweiche* genannt. Reflexions- und Transmissionsverhalten lassen sich wie in den Tabellen 4.3 und 4.4 zusammengestellt beschreiben.

¹⁹ gegeben durch die Außenleiter der drei koaxialen Konnektoren

Tabelle 4.3 Reflexionsverhalten des Duplexers

Tor	ist angepasst im Durchlassbereich von
1	Bandpass 1 und Bandpass 2
2	Bandpass 1
3	Bandpass 2

Tabelle 4.4 Transmissionsverhalten des Duplexers

von Tor	nach Tor	Transmission im Durchlassbereich von
1	2	Bandpass 1
2	1	
1	3	Bandpass 2
3	1	
2	3	keine Transmission Tore sind entkoppelt
3	2	

Demnach haben die Beträge der s-Parameter die in Bild 4-40 gezeigten Frequenzgänge. Der Duplexer eignet sich sehr gut zum Zusammenführen von Signalen aus zwei Quellen. Diese werden dann an die Tore 2 und 3 angeschlossen. Wegen der vollständigen Entkopplung gibt es keine gegenseitige Beeinflussung. Auch der Betrieb eines Senders und eines Empfängers an einer gemeinsamen Antenne, wie das in Abschnitt 4.3.8 beschrieben wurde, ist so gut möglich. Die Antenne kommt dann an Tor 1. Voraussetzung hierfür ist, dass Sender und Empfänger in unterschiedlichen Frequenzbändern arbeiten. Dies ist bei realen Transceiver-Stationen in aller Regel gegeben. Umgekehrt eignet sich der Duplexer auch zum Aufspalten eines Frequenzgemischs in einzelne Bänder.

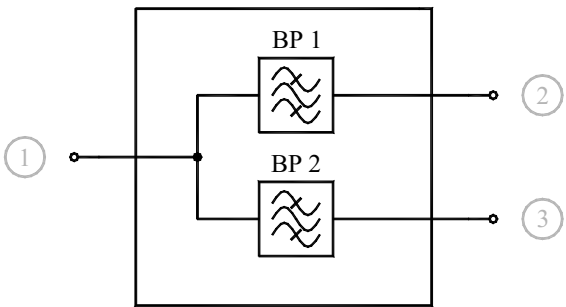


Bild 4-39 Schaltsymbol des Duplexers

Es muss noch darauf hingewiesen werden, dass die Begriffswahl nicht einheitlich ist. Man liest auch *Diplexer*, und das Wort Duplexer wird gelegentlich für die Doppel-T-Verzweigung verwendet (siehe 4.3.13).

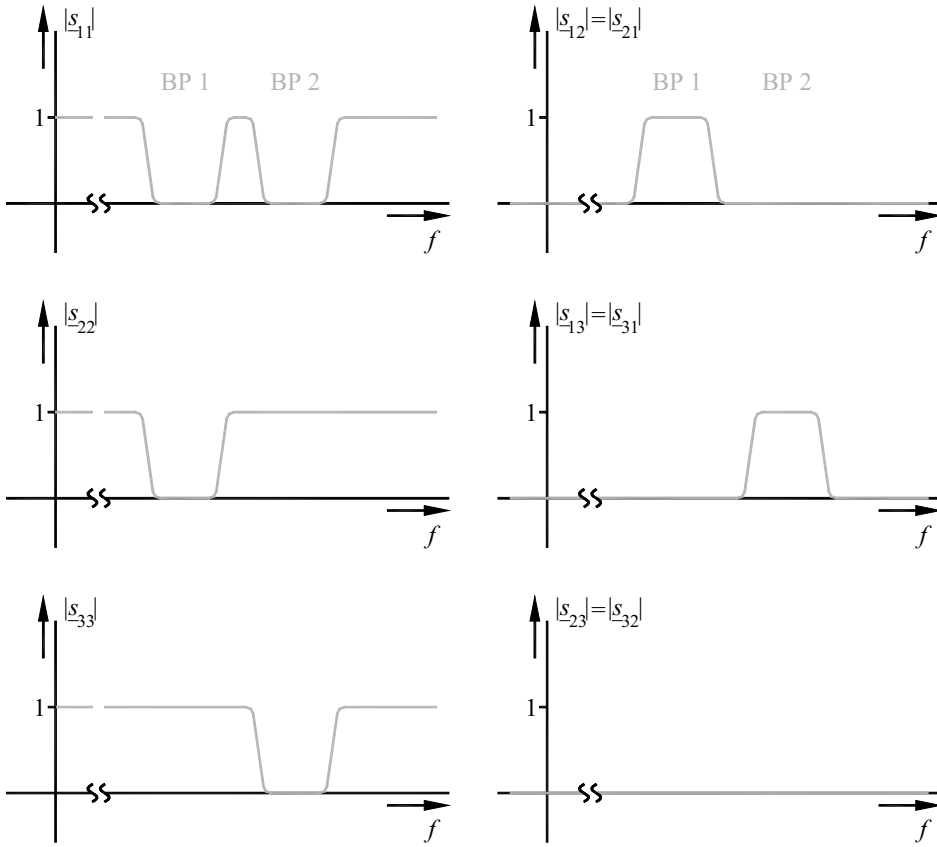


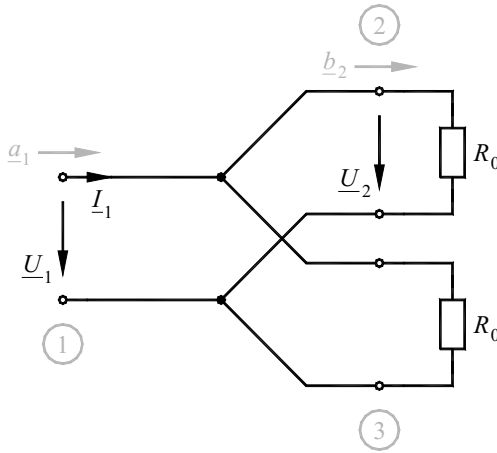
Bild 4-40 Betragsfrequenzgänge der s-Parameter des Duplexers

4.3.10 Die Leitungsverzweigung

In Messaufbauten werden gelegentlich sogenannte *T-Stücke* eingesetzt, die nichts anderes als simple Leitungsverzweigungen darstellen. Damit ist es beispielsweise möglich, das von einem Generator an eine Testschaltung gelieferte Signal zugleich zu oszilloskopieren. Eine teilweise beschaltete Leitungsverzweigung ist in Bild 4-41 dargestellt. Die Streumatrix soll berechnet werden. Zur Bestimmung der Streuparameter \underline{s}_{11} und \underline{s}_{21} ist das Dreitor wie gezeigt zu beschalten. Die Abschlüsse an den Toren 2 und 3 liegen parallel; sie bilden also aus der Sicht von Tor 1 einen Widerstand $R_0/2$. Folglich ist

$$\underline{s}_{11} = \frac{\frac{R_0}{2} - R_0}{\frac{R_0}{2} + R_0} = -\frac{1}{3} . \quad (4.139)$$

Aus dem gleichen Grund berechnet sich der Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an Tor 1 zu

**Bild 4-41** Teilweise beschaltete Leitungsverzweigung

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_0/2} = 2 \frac{\underline{U}_1}{R_0} ,$$

also ist

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_{1N} + \underline{I}_{1N}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{R_0}}$$

(vgl. Abschnitt 4.1.1). Wegen der Anpassung an Tor 2 gilt

$$\underline{b}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{R_0}} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{R_0}} ,$$

somit folgt

$$\underline{s}_{21} = \frac{\underline{b}_2}{\underline{a}_1} = \frac{2}{3} . \quad (4.140)$$

Da es sich um ein struktursymmetrisches Dreitor handelt, ist die Streumatrix damit schon vollständig bestimmt.

$$\underline{S} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.141)$$

Die Leitungsverzweigung ist verlustlos, weil sie keine Bauteile enthält, welche Wirkleistung aufnehmen könnten. Dies lässt sich auch durch den Test gemäß Abschnitt 4.2.6 bestätigen.

$$\underline{S}^{*T} \cdot \underline{S} = \underline{E} \quad (4.142)$$

Der große Nachteil der Leitungsverzweigung besteht darin, dass sie nicht eigenreflexionsfrei ist, was man an

$$\underline{s}_{11} = \underline{s}_{22} = \underline{s}_{33} \neq 0 \quad (4.143)$$

erkennt. T-Stücke dürfen deshalb nur dann eingesetzt werden, wenn Fehlanpassung keine Rolle spielt, was bei niedrigen Frequenzen gelegentlich der Fall ist. Seit geraumer Zeit werden unter dem Schlagwort *PLC*²⁰ Computernetze angeboten, die das gewöhnliche Lichtnetz zum Datentransfer nutzen. Sie funktionieren mehr schlecht als recht. Dies ist unter anderem dadurch begründet, dass es im Lichtnetz von Leitungsverzweigungen nur so wimmelt. Im Konsumbereich sind T-Stücke zum Anschluss mehrerer Empfänger an einen Antennenanschluss im Handel. Bei deren Verwendung sind Probleme wegen Fehlanpassung vorprogrammiert. Der Hochfrequenztechniker sieht das T-Stück grundsätzlich mit Argusaugen. In Bild 4-43 ist ein T-Stück mit BNC-Konnektoren²¹ zu sehen.

4.3.11 Der Power-Splitter

In der Hochfrequenztechnik verwendet man zur Aufspaltung von Signalen an Stelle von reinen Leitungsverzweigungen sogenannte Power-Splitter. Bild 4-42 zeigt einen teilweise beschalteten Zweifach-Power-Splitter, womit ein Signal auf zwei Pfade aufgeteilt werden kann. Man kann nach dem gleichen Muster auch Dreifach- oder Vierfach-Power-Splitter bauen, die internen Widerstände erhalten dann andere Werte. Der Abschluss an Tor 2 addiert sich mit dem internen Widerstand $R_0/3$ zu $4/3 R_0$. Das Gleiche geschieht mit dem Abschluss an Tor 3; beide liegen parallel, bilden also im Verzweigungspunkt einen Widerstand $2/3 R_0$. An Tor 1 erscheint somit die Reihenschaltung aus dem internen Widerstand $R_0/3$ und dem soeben berechneten Wert $2/3 R_0$, also die Systemimpedanz R_0 . Tor 1 ist angepasst.

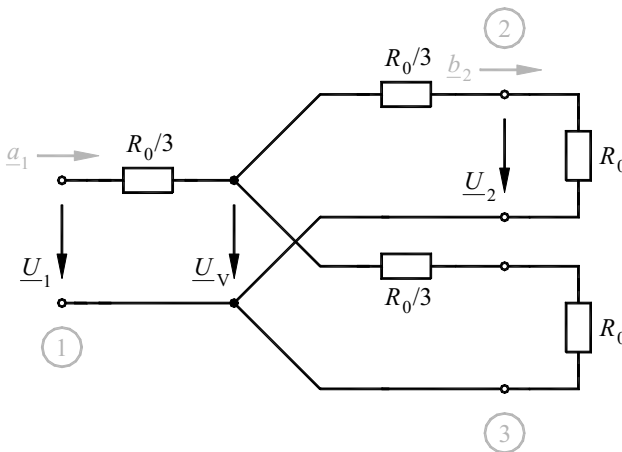


Bild 4-42 Teilweise beschalteter Zweifach-Power-Splitter

Die Transmission lässt sich folgendermaßen berechnen: Die Spannung \underline{U}_1 teilt sich in den Verzweigungspunkt zu

²⁰ PLC: Power Line Communication

²¹ BNC: Bajonet Navy Connector

$$\underline{U}_V = \frac{2}{3} \underline{U}_1 ,$$

durch nochmalige Spannungsteilung ergibt sich

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_V \frac{R_0}{\frac{4}{3} R_0} = \frac{3}{4} \underline{U}_V = \frac{1}{2} \underline{U}_1 . \quad (4.144)$$



Bild 4-43 Koaxiales T-Stück, dreifach Power-Splitter, Reflexionsfaktor-Messbrücke und Dämpfungsglied für 50W

Die Halbierung der Spannung hat zur Folge, dass je ein Viertel der an Tor 1 eingespeisten Leistung zu den Toren 2 und 3 gelangt. Die Hälfte der an Tor 1 eingespeisten Leistung geht also verloren, sie wird in den internen Widerständen in Wärme umgesetzt. Hierin besteht ein gewisser Nachteil gegenüber dem T-Stück, wegen der Reflexionsfreiheit wird der Power-Splitter dennoch bevorzugt. Im Dezibel-Maß lässt sich die Funktionsweise des Power-Splitters so beschreiben: Jeder Pfad hat für sich 6dB Dämpfung, der Leistungsverlust beträgt insgesamt 3dB. Wegen Anpassung an allen Toren sind die Wellengrößen den Spannungen proportional, sodass sich aus den Spannungsverhältnissen die s-Parameter ergeben. Somit folgt

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.145)$$

In Bild 4-43 ist ein Dreifach-Power-Splitter zu sehen.

4.3.12 Der Richtkoppler

Bei parallel verlegten Leitungen taucht das in der Regel unerwünschte Phänomen des sogenannten *Nebensprechens* auf. Ein Teil des auf Leitung 1 übertragenen Signals koppelt auf Leitung 2 über und breitet sich dort weiter aus. Im klassischen analogen Telefonsystem äußert sich diese Erscheinung dadurch, dass man ein fremdes Gespräch schwach im Hintergrund hören kann, daher der Name. Bei digitaler Übertragung ist dieses Problem nicht grundsätzlich beseitigt; es kann zur Folge haben, dass einzelne Bits kippen, also Bitfehler auftreten. Da diese aber nicht am Empfangsort zu einem hörbaren Gespräch decodiert werden, gibt es das klassische Nebensprechen nicht mehr, es erfolgt lediglich ein Qualitätsverlust.

Physikalisch lässt sich diese Erscheinung pauschal relativ leicht erklären. Das vom Strom in Leitung 1 hervorgerufene Magnetfeld induziert in Leitung 2²² eine der Änderung des Stroms proportionale Spannung. Man spricht von *magnetischer* oder *induktiver* Kopplung. Außerdem bilden die Leiter der Leitung 1 mit denen der Leitung 2 Kondensatoren, es liegt also zusätzlich *elektrische* bzw. *kapazitive* Kopplung vor. Beide Kopplungsarten sind über die Leitungslänge verteilt und bewirken zusammen den beschriebenen Effekt. Eine exakte feldtheoretische Analyse ist äußerst schwierig.

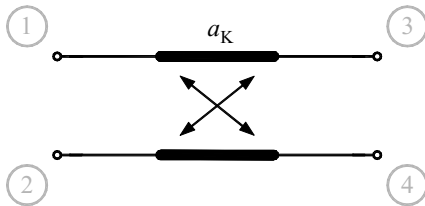


Bild 4-44 Schaltsymbol des Richtkopplers

In der Hochfrequenztechnik macht man aus der Not eine Tugend und nutzt das Phänomen des Nebensprechens für Messzwecke gezielt aus. Ergebnis ist der sogenannte *Richtkoppler*, dessen Schaltsymbol in Bild 4-44 dargestellt ist [1]. Dieser Vierpol besteht aus zwei durchgehenden Leitungen, die in Diagonalrichtung eine definierte Kopplung aufweisen, während die direkt nebeneinander liegenden Tore entkoppelt sind. Alle Tore sind angepasst. Im Idealfall hat die Streumatrix die Form

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{1-k^2} & \pm jk \\ 0 & 0 & \pm jk & \sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & \pm jk & 0 & 0 \\ \pm jk & \sqrt{1-k^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

²² Genauer: In der aus Leitung 2, ihrer Quelle und ihrem Abschluss gebildeten Leiterschleife.

mit

$$0 < k < 1 . \quad (4.147)$$

Die Elemente auf der Nebendiagonale beschreiben die Kopplung auf den diagonalen Pfaden, also die Transmission zwischen den Toren 1 und 4 bzw. 2 und 3. Sie sind im Idealfall rein imaginär, was eine Phasenverschiebung um 90° entsprechend $\pi/2$ im Bogenmaß zur Folge hat. Der Richtkoppler wird deshalb gelegentlich auch *$\pi/2$ -Hybrid* genannt. Häufig ist

$$k \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1-k^2} \approx 1 . \quad (4.148)$$

Man beschreibt den Richtkoppler dann durch seine Koppeldämpfung

$$a_K = -20 \lg k \text{ dB} . \quad (4.149)$$

Für einen 40dB-Koppler ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} a_K = 40 \text{ dB} & \Leftrightarrow k = \frac{1}{100} \\ \sqrt{1-k^2} &= 0,99995 \Rightarrow -0,0004 \text{ dB} \end{aligned}$$

Durch die Auskopplung eines kleinen Signalanteils ergibt sich auf den durchgehenden Pfaden ein Verlust von gerade einmal $0,0004 \text{ dB}$. Diese Eigenschaft macht den Richtkoppler für messtechnische Anwendungen äußerst attraktiv. Ein übertragenes Signal kann ohne merkliche Beeinflussung beobachtet werden. Der ausgekoppelte Teil ist lediglich mit der bekannten Koppeldämpfung zu korrigieren. Richtkoppler lassen sich in coaxialer Technik, als Streifenleiter oder als Hohlleiter breitbandig und mit guter Präzision realisieren.

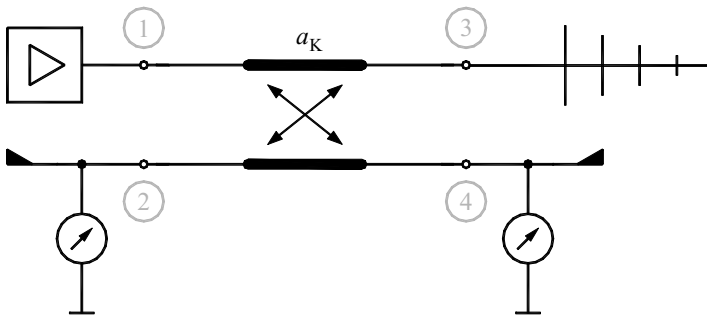


Bild 4-45 Monitoring einer Sendeantenne

Es folgen Beispiele:

- (i) Einsatz eines Richtkopplers zum Monitoring einer Sendeantenne. Die Anordnung ist in Bild 4-45 skizziert. Das Messgerät an Tor 2 gibt Aufschluss über das Reflexionsverhalten der Antenne. Bei ordnungsgemäßigem Betrieb, also bei angepasster Antenne, zeigt es Null an. Das Messgerät an Tor 4 erlaubt zusammen mit der Koppeldämpfung die Bestimmung des auf die Antenne zulaufenden und somit des von ihr abgestrahlten Signals. An Tor 4 kann auch ein Demodulator angeschlossen werden, um das Signal unmittelbar vor der Abstrahlung zu kontrollieren. Bei Rundfunksendern ist diese Methode gang und gäbe.

- (ii) Kontrolle des Transmissionsverhaltens eines Zweitors im laufenden Betrieb. Die Messschaltung ist in Bild 4-46 zu sehen. Es wird nur ein Koppelpfad des Richtkopplers genutzt, Tor 2 ist abgesumpft. Zur Messung dient hier das sogenannte *Power Meter*, ein angepasstes Voltmeter, das den Pegel des anliegenden Signals anzeigen kann, z. B. in dBm. Wenn beide Richtkoppler die gleiche Koppeldämpfung haben, ergibt sich die Dämpfung bzw. Verstärkung des Zweitors direkt als Differenz der beiden Anzeigen. Wie man sieht, wird hier die Wellendämpfung gemessen, was für die Auswertung ohne Relevanz ist, da sich im angepassten Fall Einfügungsdämpfung, Betriebsdämpfung und Wellendämpfung nicht unterscheiden (vgl. 2.3.2). Die Definition der Wellendämpfung wurde durch die Messschaltung von Bild 4-46 motiviert.

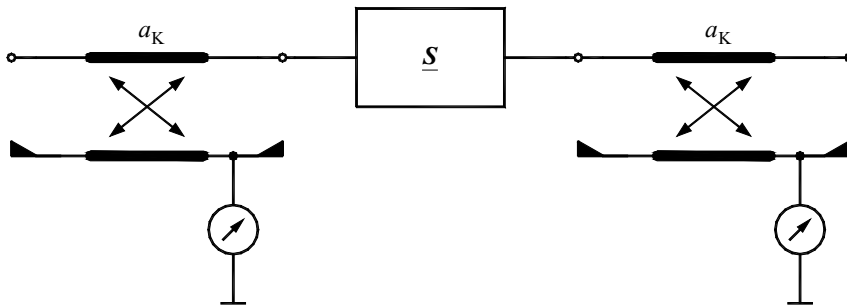


Bild 4-46 Messschaltung zur Bestimmung des Transmissionsverhaltens eines Zweitors

4.3.13 Die Doppel-T-Verzweigung

Dieses auch unter dem Namen *magisches T* bekannte Viertor kann als Hohlleiteranordnung gemäß Bild 4-47 realisiert werden [1]. Es besteht aus vier Hohlleiterstücken, welche *kollineare Arme* (Tore 3 und 4), *H-Arm* (Tor 1) und *E-Arm* (Tor 2) genannt werden. Das Viertor besitzt folgende Eigenschaften:

- * Alle Tore sind angepasst.

$$\underline{s}_{11} = \underline{s}_{22} = \underline{s}_{33} = \underline{s}_{44} = 0 \quad (4.150)$$

- * Die Tore 3 und 4 sind vollständig entkoppelt.

$$\underline{s}_{34} = \underline{s}_{43} = 0 \quad (4.151)$$

Diese Eigenschaft lässt sich damit begründen, dass die nach oben bzw. nach vorn angeschlossenen Arme die Wandströme in dem aus den kollinearen Armen gebildeten Hohlleiter total unterbrechen.

- * Man kann feldtheoretisch zeigen, dass auch die Tore 1 und 2 entkoppelt sind.

$$\underline{s}_{12} = \underline{s}_{21} = 0 \quad (4.152)$$

- * Das Viertor ist aufbaubedingt verlustlos, somit ist seine Streumatrix unitär.

$$\underline{S}^{*T} = \underline{S}^{-1} \quad (4.153)$$

- * Das Viertor ist aufbaubedingt passiv, somit ist es reziprok und für seine Streumatrix gilt

$$\underline{S} = \underline{S}^T . \quad (4.154)$$

All diesen Eigenschaften wird eine Streumatrix der Form

$$\underline{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.155)$$

gerecht. Es bestehen also Kopplungen mit je 3dB Dämpfung zwischen den Toren 1 - 3 und 1 - 4 sowie zwischen 2 - 3 und 2 - 4. Ursache für die Kopplung zum Tor 1 ist die magnetische Feldstärke, deshalb der Name H-Arm. Umgekehrt wird die Kopplung zum Tor 2 durch das E-Feld bewirkt, weshalb man hier vom E-Arm spricht. Die Transmissionen zwischen den Toren 2 und 4 sind im Idealfall reell negativ, bewirken also eine Phasenverschiebung um 180° oder um π im Bogenmaß. Die Doppel-T-Verzweigung wird deshalb auch π -Hybrid genannt.

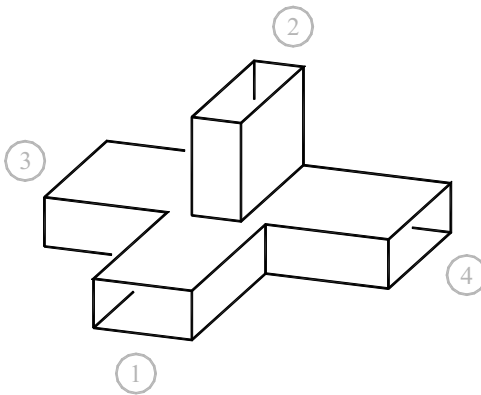


Bild 4-47 Doppel-T-Verzweigung in Hohlleitertechnik

Auf Grund der speziellen Eigenschaften ergeben sich mannigfache Anwendungen für das magische T. Zwei sollen kurz skizziert werden.

- (i) Redundante Speisung von zwei Verbrauchern aus zwei Generatoren: Diese Methode wird bei Rundfunksendern gerne angewendet. Die Verbraucher sind dabei zwei Antennen, die in unterschiedliche Himmelsrichtungen abstrahlen. Sie werden an die Tore 3 und 4 angeschlossen. Die Tore 1 und 2 sind mit je einem Endverstärker verbunden, von denen nur einer arbeitet. Wegen der Entkopplung der Tore 1 und 2 „sehen sich die Verstärker gegenseitig nicht“. Das vom aktiven Verstärker gelieferte Signal wird verlustlos zu gleichen Teilen den beiden Antennen zugeführt. Sollte dieser ausfallen, muss nur der zweite eingeschaltet werden, und der Betrieb läuft ohne Unterbrechung weiter.
- (ii) Messtechnik: Vergleich einer unbekannten Impedanz Z_x mit einer gegebenen Z_N . Z_x und Z_N werden an die kollinearen Arme (Tore 3 und 4) angeschlossen, am H-Arm (Tor 1) wird gespeist. Der E-Arm (Tor 2) ist abgeschlossen, dort wird gemessen. Wie man sich leicht überlegen kann, erfolgt im Fall

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_N$$

eine Signalauslöschung an Tor 2. Diese Methode bietet sich an, wenn \underline{Z}_x auf den gewünschten Wert \underline{Z}_N abgeglichen werden soll. Der Abgleich ist dann so vorzunehmen, dass eine Nullindikation erfolgt. Häufig ist der gegebene Wert \underline{Z}_N gerade die Systemimpedanz R_0 .

Das magische T kann auch als Ringstruktur in koaxialer Technik oder als Streifenleitungsanordnung realisiert werden.

5 Mikrowellennetze

5.1 Definition

Eine Zusammenschaltung von n-Toren wird *Mikrowellennetz* genannt. Es unterscheidet sich von einem herkömmlichen elektrischen Netzwerk dadurch, dass nicht in beliebiger Weise Knoten miteinander verbunden werden dürfen. Stattdessen werden Tore über Leitungen zusammengeschaltet, wodurch sich verglichen mit herkömmlichen Netzwerken viel einfachere und übersichtlichere Strukturen ergeben. In der sehr verbreiteten Koaxialtechnik erfolgt die Zusammenschaltung über Koaxialkabel mit entsprechenden Konnektoren. Die n-Tore werden durch ihre Streumatrizen beschrieben. Wenn der Einfluss der Leitungen (Dämpfung, Verzögerung) in die Berechnung eingehen soll, ist auch jede Leitung als Zweitor mit entsprechender Streumatrix aufzufassen. Ein unbeschaltetes Tor wird als Leerlauf mit dem Reflexionsfaktor $\underline{\Gamma} = 1$ aufgefasst, eine Leitungsverzweigung ist als Dreitor gemäß 4.3.10 durch seine Streumatrix zu beschreiben. Netzwerkvariable sind je eine vorlaufende und eine rücklaufende Welle an jeder Zusammenschaltung.

Unter Mikrowellen versteht man hochfrequente Signale, deren Wellenlänge zwischen 1mm und 10cm liegt. Die in diesem Kapitel vorgestellte Theorie beschränkt sich aber keineswegs auf das damit verbundene Frequenzgebiet oberhalb 3GHz, sondern sie ist immer dann angebracht, wenn sich eine Signalbeschreibung durch Wellengrößen anbietet. So gesehen ist der Begriff Mikrowellennetz nicht sinnvoll gewählt. Er kam vermutlich folgendermaßen zu Stande: Gegen Mitte des 20. Jahrhunderts gelang die technische Handhabung von Frequenzen über 3GHz, wodurch das Wort Mikrowellen einen gewissen Modecharakter erhielt, es ging um etwas Brandneues. Etwa zeitgleich etablierte sich auch die hier beschriebene Theorie, weshalb der gerade topaktuelle Begriff gleich dafür herhalten musste.

Bild 5-1 zeigt als einführendes Beispiel einen Generator, der über ein Leitungsstück und einen als Richtungsleitung beschalteten Zirkulator eine Antenne speist. Die Netzwerkvariablen sind eingetragen.

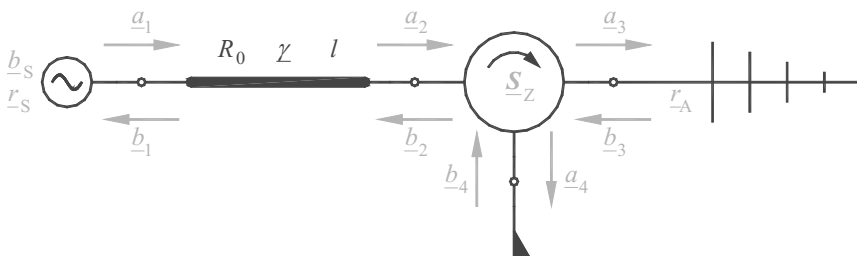


Bild 5-1 Einführendes Beispiel für ein Mikrowellennetz

5.2 Analyse durch lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten nochmals Bild 5-1. Das dargestellte Mikrowellennetz ist aus drei Eintoren (Generator, Antenne, Sumpf), einem Zweitor (Leitung) und einem Dreitor (Zirkulator) aufgebaut. Der Generator wird durch seine Quellgrößen \underline{b}_S und \underline{r}_S , die Antenne durch ihren Eigenreflexionsfaktor \underline{r}_A und der Sumpf durch den Reflexionsfaktor $\underline{r} = 0$ beschrieben. Die Angaben zur Leitung führen auf eine 2x2-Streumatrix gemäß 4.3.3; die Streumatrix des Zirkulators \underline{S}_Z hat drei Zeilen und drei Spalten (vgl. 4.3.8). Netzwerkvariable in Form von Wellengrößen sind eingeführt. Somit sind 8 Gleichungen für 8 Variable gefunden. Sie bilden zusammen ein lineares Gleichungssystem. Daraus wird ohne Beweis ein allgemeiner Lehrsatz für Mikrowellennetze gebildet:

Die beschreibenden Gleichungen aller in einem Mikrowellennetz enthaltenen n-Tore liefern zusammen ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem für die Wellengrößen.

Mit Grauen denken wir zurück an das in einer Grundlagenvorlesung besprochene Maschenstromverfahren und erinnern uns an den immensen Aufwand, der allein zur Aufstellung des Gleichungssystems getrieben werden musste.

Die Analyse soll nun an einem einfachen Beispiel durchexerziert werden. Dazu betrachten wir Bild 5-2. Der Wellenwiderstand der Leitung ist gleich der Systemimpedanz R_0 . Die Quelle liefert eine erste Gleichung.

$$\underline{a}_1 = \underline{b}_S + \underline{r}_S \underline{b}_1 \quad (5.1)$$

Die s-Parameter-Darstellung der Leitung trägt zwei weitere Gleichungen bei.

$$\begin{pmatrix} \underline{a}_2 \\ \underline{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{b}_2 \\ \underline{a}_1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Der Abschluss ist durch eine besonders einfache Gleichung zu beschreiben.

$$\underline{b}_2 = \underline{r}_L \underline{a}_2 \quad (5.3)$$

Die Gleichungen (5.1) bis (5.3) werden zu einem linearen Gleichungssystem zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\underline{r}_S & 0 \\ -e^{-\gamma l} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -e^{-\gamma l} \\ 0 & -\underline{r}_L & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b}_S \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

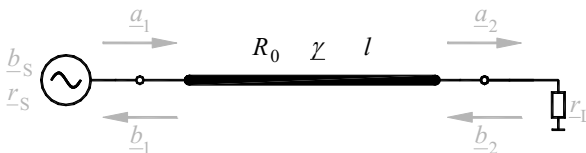


Bild 5-2 Einfaches Mikrowellennetz

Das Gleichungssystem kann nach allen Variablen aufgelöst werden. So erhält man beispielsweise für die vom Abschluss reflektierte Welle

$$\underline{b}_2 = \frac{\underline{r}_L}{e^{\underline{\gamma}l} + \underline{r}_S \underline{r}_L \cdot e^{-\underline{\gamma}l}} \cdot \underline{b}_S \quad (5.5)$$

5.3 Graphentheoretische Methoden

5.3.1 Ausgangspunkt

Ein lineares Gleichungssystem kann durch einen sogenannten *Graphen* visualisiert werden [7]. Ein solches Gebilde aus Knoten und Zweigen²³ wird auch *Signalflussdiagramm* oder *Signalflussgraph* genannt. Hierbei stellen die Knoten die Variablen dar, während die Zweige die Zusammenhänge zwischen diesen beschreiben. In unserem Fall sind die Zweige gerichtet und jeder hat ein Gewicht in Form eines dimensionsbehafteten oder dimensionslosen, reellen oder komplexen Werts. Von außen wirkende Größen - die Quellgrößen - werden durch zusätzliche Knoten repräsentiert, eventuell auch eine oder mehrere nach außen wirkende Größen, die Ausgänge. Zur Erläuterung nehmen wir uns ein lineares Gleichungssystem vor:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Zusätzlich soll eine Ausgangsgröße durch

$$y = c_2 x_2 + c_3 x_3 \quad (5.7)$$

gegeben sein. Hierdurch wird ein System mit drei Variablen, einem Eingang und einem Ausgang beschrieben. Nun wird jede Zeile des Gleichungssystems (5.6) nach einer Variablen aufgelöst.

$$\begin{aligned} x_1 &= a'_{12} x_2 + a'_{13} x_3 + b'_1 \\ x_2 &= a'_{21} x_1 + a'_{23} x_3 \\ x_3 &= a'_{31} x_1 + a'_{32} x_2 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt hierbei

$$\begin{aligned} a'_{v\mu} &= -\frac{a_{v\mu}}{a_{vv}} \\ b'_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Der aus (5.8) und (5.7) gebildete Satz von Gleichungen lässt sich gemäß Bild 5-3 durch einen Graphen veranschaulichen. Jedes Knotensignal wird gerade durch die Summe der zulaufenden Zweige gebildet.

²³ Hierfür findet man in der Literatur auch den Begriff *Kanten*.

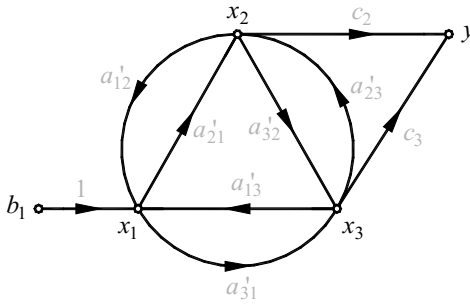


Bild 5-3 Signalflussgraph für ein System mit drei Variablen, einem Eingang und einem Ausgang

5.3.2 Darstellung von Zweitor, Quelle und Last

Wir wollen nun versuchen, einfache n-Tore durch Graphen darzustellen und Zusammenschaltungen zu verifizieren [7]. Bild 5-4 zeigt ein Zweitor, das primär von einer Wellenquelle gespeist wird und sekundär irgendeinen Abschluss versorgt. Für das Zweitor gilt die s-Parameter-Darstellung

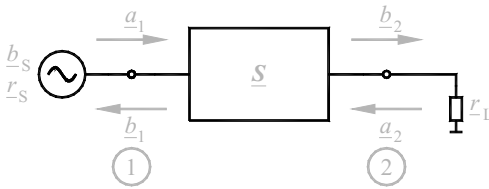


Bild 5-4 Einfaches Mikrowellennetz

$$\begin{aligned} \underline{b}_1 &= s_{11} \underline{a}_1 + s_{12} \underline{a}_2 \\ \underline{b}_2 &= s_{21} \underline{a}_1 + s_{22} \underline{a}_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Dem Gleichungspaar (5.10) lässt sich sofort das in Bild 5-5 dargestellte Signalflussdiagramm entnehmen.

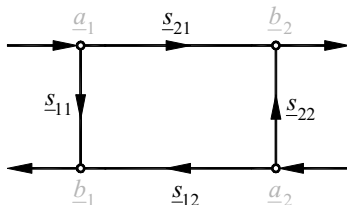


Bild 5-5 Signalflussdiagramm eines Zweitors

Bild 5-6 soll verifizieren, dass es sich hier nicht um graue Theorie handelt. Das Instrument der Signalflussgraphen wird durchaus in der Praxis angewandt. Man sieht ein modernes Messgerät, einen sogenannten *vektoriellen Network Analyzer*. Damit kann man die s-Parameter eines Zweitors in einem vom Anwender gewählten Frequenzintervall messtechnisch ermitteln. Das

Gerät liefert eine graphische Anzeige, im vorliegenden Fall wird die Ortskurve eines Reflexionsfaktors im SMITH-Diagramm dargestellt (\underline{s}_{11} oder \underline{s}_{22}). *Vektoriell* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das Gerät Betrag **und** Phase ermitteln kann, dass es die komplexen Parameter also vollständig bestimmt. Dieser Begriff ist äußerst unglücklich gewählt, da eine komplexe Zahl kein Vektor ist. Es besteht lediglich eine rein äußerliche Ähnlichkeit zwischen der Darstellung einer komplexen Zahl als Zeiger und der eines Vektors. Der Begriff hat sich aber etabliert. Zur Messung sind die Tore des Prüflings an die Konnektoren PORT 1 und PORT 2 des Analyzers anzuschließen. Zwischen diesen ist der gerade gefundene Graph des Zweitors aufgedruckt, um dem geschulten Anwender die Funktionsweise des Geräts zu verdeutlichen. Teile des Signalflussgraphen sind gestrichelt. Damit ist gemeint, dass das Gerät in der vorliegenden Ausbaustufe diese s-Parameter nicht bestimmen kann. Zur Messung von \underline{s}_{12} und \underline{s}_{22} muss der Prüfling gewendet werden.

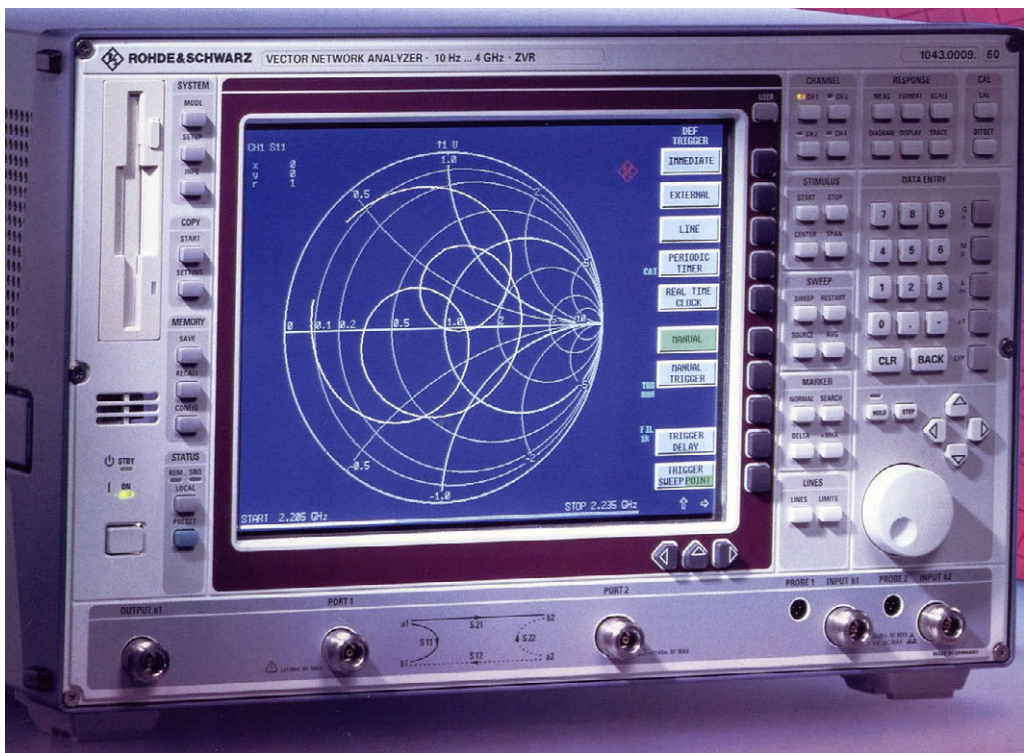


Bild 5-6 Ein Network Analyzer (mit freundlicher Genehmigung der Firma ROHDE & SCHWARZ, München)

Als nächstes betrachten wir die Mikrowellenquelle. Für die hier eingeführten Wellengrößen ist ihre Funktionsweise durch

$$\underline{a}_1 = \underline{b}_S + \underline{r}_S \cdot \underline{b}_1 \quad (5.11)$$

zu beschreiben, was sofort auf einen Signalflussgraphen mit zwei Knoten für die Variablen und einem für die Quellwelle \underline{b}_S führt. Schließlich wird noch der durch seinen Reflexionsfaktor beschriebene Abschluss betrachtet, hier gilt

$$\underline{a}_2 = r_L \cdot \underline{b}_2 \quad . \quad (5.12)$$

Bild 5-7 zeigt die Graphen von Quelle und Last.

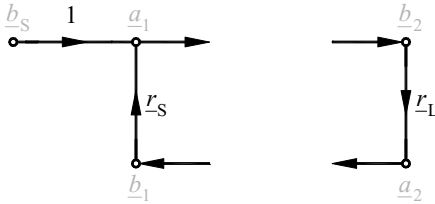


Bild 5-7 Signalflussgraph der Mikrowellenquelle und der Last

Fasst man die so gefundenen Signalflussdiagramme zusammen, ergibt sich der in Bild 5-8 gezeigte Graph der Gesamtschaltung.

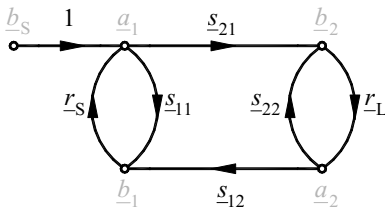


Bild 5-8 Signalflussgraph des Mikrowellennetzes von Bild 5-4

5.3.3 Modifikationen von Signalflussgraphen

In diesem Abschnitt wird ein Satz von Regeln zusammengestellt, nach denen sich ein Graph umformen lässt, ohne Einfluss auf seine Gesamtaussage zu nehmen [7]. De facto ist das nichts anderes als eine Modifikation des zu Grunde liegenden Gleichungssystems in Form bekannter Manipulationen von Zeilen oder Spalten.

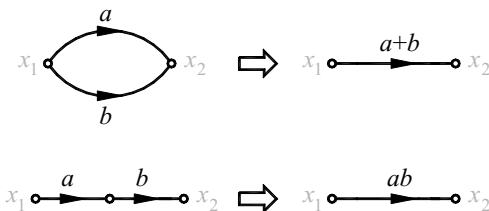


Bild 5-9 Zusammenfassung von konfluenten und von seriellen Zweigen

Besonders einfache und sofort verständliche Modifikationen sind die Zusammenfassung von konfluenten oder von seriellen Zweigen. Bild 5-9 erklärt dies. Die Auflösung von Rückkopplungsschleifen geht nicht ganz so einfach. Sie wird an Hand von Bild 5-10 erläutert. Wir lesen ab

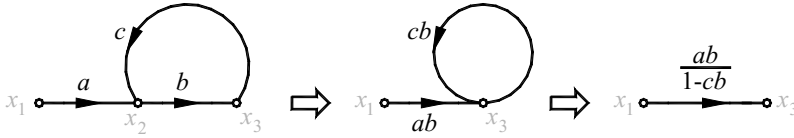


Bild 5-10 Auflösung einer Rückkopplungsschleife

$$\begin{aligned} x_2 &= ax_1 + cx_3 \\ x_3 &= bx_2 = abx_1 + cbx_3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

womit der Knoten x_2 eliminiert ist. Auflösung der letzten Gleichung nach x_3 liefert

$$x_3 = \frac{ab}{1 - cb} x_1 \quad (5.14)$$

Im nächsten Beispiel wird die Ermittlung einer durch einen Signalflussgraphen beschriebenen Übertragungsfunktion demonstriert. Wir betrachten das in Bild 5-11 dargestellte Diagramm mit mehreren Rückkopplungen. Das beschreibende Gleichungssystem lautet

$$x_1 = x_S + d x_3 \quad (5.15)$$

$$x_2 = a x_1 + e x_4 \quad (5.16)$$

$$x_3 = b x_2 \quad (5.17)$$

$$x_4 = c x_3 \quad (5.18)$$

$$x_L = x_4 \quad (5.19)$$

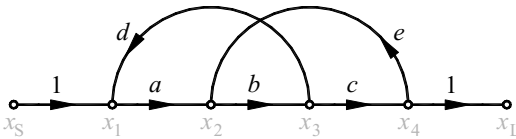


Bild 5-11 Ein Signalflussdiagramm

Setzt man (5.16) in (5.17) ein, ergibt sich

$$x_3 = abx_1 + ebx_4 \quad (5.20)$$

womit die Variable x_2 aus dem Gleichungssystem und somit auch der Knoten x_2 aus dem Signalflussdiagramm eliminiert ist. Bild 5-12 zeigt den reduzierten Signalflussgraphen. Nun wird (5.20) in (5.18) und in (5.15) eingesetzt:

$$x_4 = abc x_1 + ebc x_4 \quad (5.21)$$

$$x_1 = x_S + abd x_1 + ebd x_4 \quad (5.22)$$

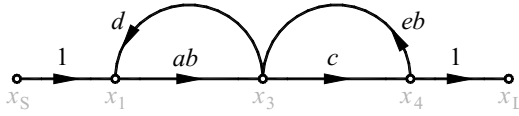


Bild 5-12 Signalflussdiagramm nach Knotenelimination

Nun ist auch x_3 eliminiert. Zur Vereinfachung führt man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} f &:= abc & g &:= ebc \\ h &:= abd & i &:= ebd \end{aligned} \quad (5.23)$$

ein, das resultierende Diagramm ist in Bild 5-13 zu sehen.

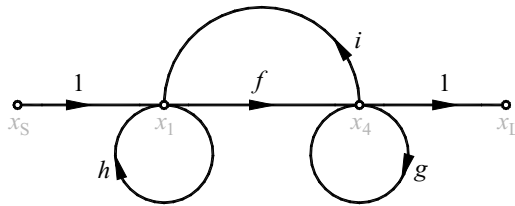


Bild 5-13 Weiter vereinfachtes Signalflussdiagramm

Jetzt werden die Eigenschleifen gemäß Bild 5-10 aufgelöst, es folgt

$$x_4 = \frac{f}{1-g} x_1, \quad (5.24)$$

$$x_1 = \frac{1}{1-h} x_S + \frac{i}{1-h} x_4. \quad (5.25)$$

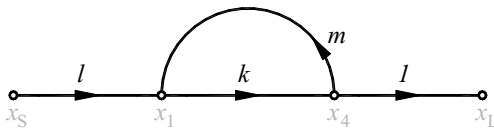


Bild 5-14 Signalflussdiagramm nach der dritten Umformung

Mit den Abkürzungen

$$k := \frac{f}{1-g} \quad l := \frac{1}{1-h} \quad m := \frac{i}{1-h} \quad (5.26)$$

ergibt sich das Signalflussdiagramm gemäß Bild 5-14. Die Auflösung der letzten Rückkopplungsschleife erfolgt durch Einsetzen von (5.25) in (5.24), und wir erhalten

$$x_L = x_4 = \frac{kl}{1-km} x_S, \quad (5.27)$$

womit ein direkter Zusammenhang zwischen der Quellgröße x_S und der Lastgröße x_L hergestellt ist.

5.3.4 Graphentransmissionsfaktor und MASON-Regel

Das zuletzt behandelte Beispiel motiviert dazu, nach einer kompakten Formel oder zumindest einem systematischen Verfahren zu suchen, um eine in Form eines Signalflussgraphen dokumentierte Übertragungsfunktion zu ermitteln. Ergebnis ist die sogenannte *MASON-Regel*, die hier ohne Beweis vorgestellt wird [7]. Zum klaren Verständnis müssen zunächst einige Begriffe eingeführt werden:

- * Ein Knoten, von dem nur Zweige ausgehen, heißt *Quellknoten*.
- * Ganz analog wird ein Knoten, an dem nur Zweige enden *Senkeknoten* genannt.
- * Bildet man den Quotienten aus dem Knotensignal an einem Senkeknoten x_L und dem an einem Quellknoten x_S , ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$T_{LS} = \frac{x_L}{x_S} . \quad (5.28)$$

Diese wird im vorliegenden Fall *Graphentransmissionsfaktor* genannt; die Indizes S und L bezeichnen Quelle und Senke, sie stehen wie an früherer Stelle für *source* und *load*; der Senkeknoten wird demnach als erster, der Quellknoten als zweiter notiert. Diese auf den ersten Blick unlogische Vereinbarung wurde im Hinblick auf eine Übereinstimmung mit der Indizierung der s-Parameter getroffen (s_{21} bezeichnet die Transmission von Tor 1 nach Tor 2).

- * *Pfad* heißt jede Serie vorwärts orientierter Zweige vom Quellknoten zum Senkeknoten, die keinen Knoten mehrfach berührt, also keine Schleifen bildet. Das Produkt aller Gewichte der beteiligten Zweige heißt *Pfadtransmission*. Diese wird mit P_v bezeichnet.
- * Jede Serie gleichorientierter Zweige, die einen geschlossenen Weg bildet und dabei keinen Knoten mehrfach berührt, wird *Schleife erster Ordnung* genannt. Dieser wird eine *Schleifentransmission* zugeordnet; das ist das Produkt aller Gewichte der beteiligten Zweige. Das Symbol für die Transmission der Schleife erster Ordnung ist $L_\mu(1)$.
- * Findet man im Graphen n Schleifen erster Ordnung, die sich nicht berühren, d. h. keinen gemeinsamen Knoten besitzen, bilden diese zusammen eine *Schleife n-ter Ordnung*. Deren Schleifentransmission ist das Produkt der beteiligten Schleifen erster Ordnung. Die Vorgehensweise sieht also so aus, dass man zunächst nach Schleifen erster Ordnung sucht, dann prüft, ob man je zwei voneinander isolierte zu Schleifen zweiter Ordnung kombinieren kann usw. Man erkennt, dass eine Schleife dritter Ordnung zugleich drei Schleifen zweiter Ordnung beinhaltet. Die Transmission der Schleife n -ter Ordnung wird mit $L_\kappa(n)$ bezeichnet.
- * Aus allen Schleifentransmissionen wird gemäß

$$\mathcal{A}_G = 1 - \sum_v L_v(1) + \sum_\mu L_\mu(2) - \sum_\kappa L_\kappa(3) + \dots - \dots \quad (5.29)$$

eine Rechengröße gebildet, die sogenannte *Graphendeterminante*.

- * In vergleichbarer Weise kann jedem Pfad v eine *Pfaddeterminante* Δ_v zugeordnet werden, die sich wie die Graphendeterminante berechnet, wobei jedoch nur **die** Schleifen eingesetzt werden, die den betreffenden Pfad **nicht** berühren.

Somit sind alle Vorbereitungen zur endgültigen Formulierung der MASON-Regel getroffen. Ein Graphentransmissionsfaktor T_{LS} berechnet sich formal gemäß

$$T_{LS} = \frac{1}{\Delta_G} \sum_{v=1}^N (P_v \cdot \Delta_v) \quad (5.30)$$

N ist hierbei die Gesamtzahl der Pfade.

Es folgen Beispiele:

- (i) Bild 5-15 zeigt ein Signalflussdiagramm mit Quellknoten x_S , Senkeknoten x_L und inneren Knoten x_1 bis x_5 [7]. Der Graphentransmissionsfaktor

$$T_{LS} = \frac{x_L}{x_S} \quad (5.31)$$

soll mit Hilfe der Mason-Regel ermittelt werden.

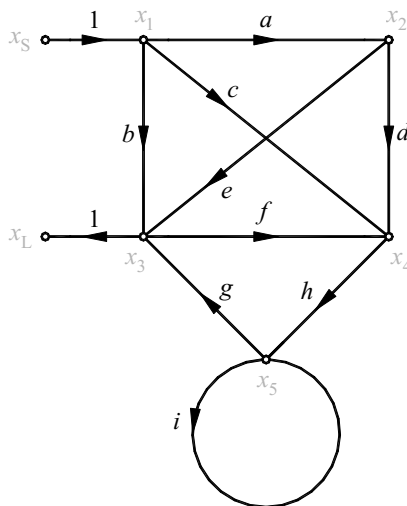


Bild 5-15 Ein Signalflussdiagramm

Wir suchen zunächst nach Pfaden und geben die zugehörigen Pfadtransmissionen an.

$$\begin{aligned} x_S - x_1 - x_2 - x_3 - x_L &\Rightarrow P_1 = ae \\ x_S - x_1 - x_2 - x_4 - x_5 - x_3 - x_L &\Rightarrow P_2 = adhg \\ x_S - x_1 - x_4 - x_5 - x_3 - x_L &\Rightarrow P_3 = chg \\ x_S - x_1 - x_3 - x_L &\Rightarrow P_4 = b \end{aligned}$$

Folgende Schleifen erster Ordnung lassen sich finden:

$$\begin{aligned} x_3 - x_4 - x_5 - x_3 &\Rightarrow L_1(1) = fhg \\ x_5 - x_5 &\Rightarrow L_2(1) = i \end{aligned}$$

Schleifen höherer Ordnung existieren nicht. Die Pfade P_1 und P_4 tangieren die Schleife $L_2(1)$ nicht, die anderen Pfade berühren alle Schleifen. Die Graphendeterminante lautet

$$\Delta_G = 1 - fhg - i, \quad (5.32)$$

für die Pfaddeterminanten findet man

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 - L_2(1) = 1 - i \\ \Delta_2 &= 1 \\ \Delta_3 &= 1 \\ \Delta_4 &= 1 - L_2(1) = 1 - i \end{aligned} \quad (5.33)$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Graphentransmissionsfaktor

$$T_{LS} = \frac{ae(1-i) + adh g + chg + b(1-i)}{1 - fgh - i}. \quad (5.34)$$

- (ii) Wir nehmen uns noch einmal das in Abschnitt 5.3.2 behandelte Mikrowellennetz aus realer Quelle, Zweitor und Last vor, wie es in Bild 5-4 dargestellt ist. Quellgröße soll die Urwellenquelle \underline{b}_S sein, Senkegröße die auf den Verbraucher zulaufende Welle \underline{b}_2 . Der Signalfussgraph von Bild 5-8 ist demnach gemäß Bild 5-16 zu erweitern.

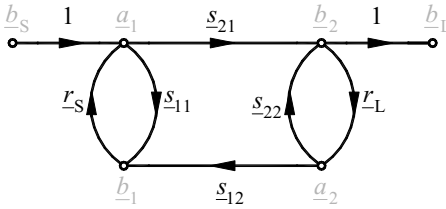


Bild 5-16 Signalfussgraph des Mikrowellennetzes von Bild 5-4

Hier findet man nur einen einzigen Pfad:

$$\underline{b}_S - \underline{a}_1 - \underline{b}_2 - \underline{b}_L \Rightarrow \underline{P}_1 = \underline{s}_{21}$$

Es gibt drei Schleifen erster Ordnung:

$$\underline{a}_1 - \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{L}_1(1) = \underline{r}_S \cdot \underline{s}_{11}$$

$$\underline{a}_2 - \underline{b}_2 - \underline{a}_2 \Rightarrow \underline{L}_2(1) = \underline{r}_L \cdot \underline{s}_{22}$$

$$\underline{a}_1 - \underline{b}_2 - \underline{a}_2 - \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{L}_3(1) = \underline{s}_{21} \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{s}_{12} \cdot \underline{r}_S$$

$\underline{L}_1(1)$ und $\underline{L}_3(1)$ haben keinen gemeinsamen Knoten, bilden also zusammen eine Schleife zweiter Ordnung.

$$\underline{L}_1(1) \& \underline{L}_3(1) \Rightarrow \underline{L}_1(2) = \underline{r}_S \cdot \underline{s}_{11} \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{s}_{22}$$

Alle Schleifen berühren den Pfad, also hat die Pfaddeterminante Δ_1 den Wert 1. Für die Graphendeterminante ergibt sich

$$\Delta_G = 1 - \underline{r}_S \underline{s}_{11} - \underline{r}_L \underline{s}_{22} - \underline{s}_{21} \underline{r}_L \underline{s}_{12} \underline{r}_S + \underline{r}_S \underline{s}_{11} \underline{r}_L \underline{s}_{22}.$$

Somit lautet das gesuchte Resultat

$$T_{LS} = \frac{\underline{s}_{21}}{1 - \underline{r}_S \underline{s}_{11} - \underline{r}_L \underline{s}_{22} - \underline{s}_{21} \underline{r}_L \underline{s}_{12} \underline{r}_S + \underline{r}_S \underline{s}_{11} \underline{r}_L \underline{s}_{22}} \quad (5.35)$$

- (iii) Bild 5-17 zeigt ein Mikrowellennetz mit einem Zirkulator. Er soll halbideal sein, d.h. er ist zwar eigenreflexionsfrei an allen Toren, jedoch ist die Rückwärtstransmission nicht vernachlässigbar. Sie wird mit \underline{s} bezeichnet, die Vorwärtstransmission mit \underline{t} . Die beschreibende Streumatrix lautet demnach

$$\underline{S}_Z = \begin{pmatrix} 0 & \underline{s} & \underline{t} \\ \underline{t} & 0 & \underline{s} \\ \underline{s} & \underline{t} & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

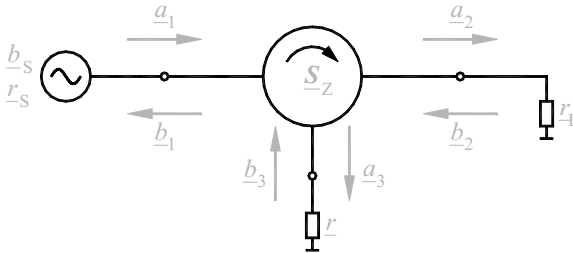


Bild 5-17 Ein Mikrowellennetz

An Tor 1 ist eine reale Wellenquelle, an Tor 2 ein Verbraucher \underline{r}_L und an Tor 3 eine durch ihren Reflexionsfaktor \underline{r} beschriebene Last angeschlossen. Quellgröße soll die Urwellenquelle \underline{b}_S , Senkegröße die auf den Verbraucher zulaufende Welle \underline{a}_2 sein. Mit diesen Angaben findet man schnell den in Bild 5-18 dargestellten Signalflussgraphen. Hier gibt es zwei Pfade:

$$\underline{b}_S - \underline{a}_1 - \underline{a}_2 - \underline{a}_L \Rightarrow \underline{P}_1 = \underline{t}$$

$$\underline{b}_S - \underline{a}_1 - \underline{a}_3 - \underline{b}_3 - \underline{a}_2 - \underline{a}_L \Rightarrow \underline{P}_2 = \underline{s} \cdot \underline{r} \cdot \underline{s}$$

Diese Wege lassen sich wunderbar im Schaltbild verfolgen. \underline{P}_1 ist der reguläre Weg für die Signalausbreitung, während \underline{P}_2 durch zweimalige Rückwärtstransmission und Reflexion an \underline{r} zu Stande kommt. Es gibt folgende Schleifen erster Ordnung:

$$\underline{a}_1 - \underline{a}_3 - \underline{b}_3 - \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{S}_1(1) = \underline{s} \cdot \underline{r} \cdot \underline{t} \cdot \underline{r}_S$$

$$\underline{a}_2 - \underline{b}_2 - \underline{a}_3 - \underline{b}_3 - \underline{a}_2 \Rightarrow \underline{S}_2(1) = \underline{r}_L \cdot \underline{t} \cdot \underline{r} \cdot \underline{s}$$

$$\underline{a}_1 - \underline{a}_2 - \underline{b}_2 - \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{S}_3(1) = \underline{t} \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{s} \cdot \underline{r}_S$$

$$\underline{a}_1 - \underline{a}_2 - \underline{b}_2 - \underline{a}_3 - \underline{b}_3 - \underline{b}_1 - \underline{a}_1 \Rightarrow \underline{S}_4(1) = \underline{t} \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{t} \cdot \underline{r} \cdot \underline{t} \cdot \underline{r}_S = \underline{t}^3 \cdot \underline{r}_L \cdot \underline{r} \cdot \underline{r}_S$$

Schleifen höherer Ordnung existieren nicht, alle Schleifen berühren beide Pfade, somit haben beide Pfaddeterminanten den Wert 1. Für die Graphendeterminante findet man

$$\Delta_G = 1 - \underline{s} \underline{r} \underline{t} \underline{r}_S - \underline{r}_L \underline{t} \underline{r} \underline{s} - \underline{t} \underline{r}_L \underline{s} \underline{r} \underline{r}_S - \underline{t}^3 \underline{r}_L \underline{r} \underline{r}_S$$

und damit

$$T_{LS} = \frac{\underline{t} + \underline{s}^2 \underline{r}}{1 - \underline{s} \underline{r} \underline{t} \underline{r}_S - \underline{r}_L \underline{t} \underline{r} \underline{s} - \underline{t} \underline{r}_L \underline{s} \underline{r}_S - \underline{t}^3 \underline{r}_L \underline{r} \underline{r}_S} \quad (5.37)$$

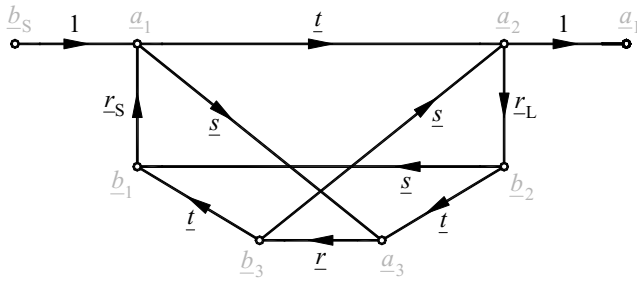


Bild 5-18 Signalflussdiagramm zum Mikrowellennetz von Bild 5-17

6 Signalausbreitung im freien Raum

6.1 Elektromagnetische Wellen

Die Möglichkeit, Signale ohne Verwendung von Leitungen über den freien Raum zu übertragen, stellt ohne jeden Zweifel ein ganz besonderes Highlight der Hochfrequenztechnik dar. Auch hier findet eine Wellenausbreitung statt, jedoch wird die Welle nicht durch Ströme und Spannungen gebildet, sondern durch Feldgrößen. Elektrisches und magnetisches Feld tauschen Energie untereinander aus und bewegen sich zugleich als Schwingungsmuster vorwärts. Da weder das elektrische noch das magnetische Feld auf Materie angewiesen ist, kann diese Welle auch im absolut leeren Raum existieren. Das ist gut so, denn sonst könnte das Sonnenlicht die Erde nicht erreichen und es wäre nie Leben auf der Erde entstanden. Andererseits ist es nicht selbstverständlich - Schallwellen sind nur in Materie ausbreitungsfähig.

Die mathematische Berechnung elektromagnetischer Wellen erfolgt mit den Mitteln der *Vektoranalysis*. Da von der hier angesprochenen Zielgruppe keine dezidierten Kenntnisse in diesem anspruchsvollen Gebiet der höheren Mathematik erwartet werden, müssen wir auf explizite Berechnungen verzichten, sie würden den Rahmen dieses Buches total sprengen. Dieses Kapitel verfolgt lediglich den Zweck, den vektoranalytischen Lösungsweg zu skizzieren. Der Leser wird möglicherweise nicht jeden Rechenschritt bis ins Detail verstehen.

Die Zusammenhänge im elektromagnetischen Feld werden durch die *MAXWELLSchen Gleichungen* vollständig beschrieben. Diese lauten in differentieller Form:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{6.1}$$

Dabei haben die Symbole folgende Bedeutungen:

- * **div** : Die *Divergenz* ist ein vektoranalytischer Differentialoperator. Sie beschreibt die Quellen des Feldes. Man denke an eine geschlossene Hüllfläche, eine Blase. Über die gesamte Fläche wird die Normalkomponente der von innen nach außen wirkenden Feldstärke integriert. Das Ergebnis wird durch die Fläche dividiert. Nun wird die Hüllfläche verkleinert und schließlich auf einen Punkt zusammengezogen. Der so entstehende Grenzwert ist die Divergenz des Feldes an dem betrachteten Punkt.
- * **rot** : Die *Rotation* ist ebenfalls ein vektoranalytischer Differentialoperator. Sie beschreibt die Wirbel des Feldes. Hier denkt man an eine geschlossene Raumkurve, längs der das Feld aufsummiert wird. Das Resultat wird auf den Umfang der Kurve bezogen. Nun wird die Kurve auf einen Punkt zusammengezogen, es entsteht wieder ein Grenzwert. Die Rotation hat Vektorcharakter, und zwar steht der Vektor senkrecht auf dem Wirbel gemäß der RECHTEN-HAND-REGEL.

- * \mathbf{r} : Ortsvektor, beschreibt die Lage des Raumpunkts in irgendeinem Koordinatensystem.
- * \mathbf{E} : Vektor der elektrischen Feldstärke.
- * ρ : Raumladungsdichte.
- * ε : Dielektrizitätskonstante.
- * $\frac{\partial}{\partial t}$: Partielle Ableitung nach der Zeit.
- * \mathbf{B} : Vektor der magnetischen Flussdichte.
- * \mathbf{H} : Vektor der magnetischen Feldstärke.
- * \mathbf{J} : Vektor der Stromdichte.

Die MAXWELLSchen Gleichungen sind also partielle Differentialgleichungen in vier Variablen, nämlich den drei Raumkoordinaten und der Zeit. Man spricht von *verteilten Parametern*. Im materiefreien Raum gelten folgende Besonderheiten:

- * Es existieren keine Ladungen, somit verschwindet die Raumladungsdichte.

$$\rho = 0 \quad (6.2)$$

- * Es ist die Dielektrizitätskonstante des Vakuums einzusetzen.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad (6.3)$$

- * Flussdichte und magnetische Feldstärke sind zueinander proportional gemäß

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mathbf{H} \quad , \quad (6.4)$$

wobei μ_0 die magnetische Permeabilität des Vakuums ist.

- * Da keine Ladungen existieren, fließt auch kein Strom.

$$\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (6.5)$$

Damit erhalten die Gleichungen (6.1) folgende einfachere Form:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Jedes Feldmuster, das den Gleichungen (6.6) genügt, ist prinzipiell existenzfähig. Man sieht, dass es keine statische Lösung gibt. Denn dann würden die Ableitungen nach der Zeit verschwinden, das Gleichungssystem (6.6) hätte nur die triviale Lösung ($\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$).

Ohne Begründung werden nun ein paar Besonderheiten elektromagnetischer Wellen genannt:

- * Sie breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit c_0 aus, wobei

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (6.7)$$

gilt.

- * Die Beträge (Effektivwerte) von elektrischer und magnetischer Feldstärke sind zueinander proportional gemäß

$$\frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_F = 120\pi\Omega \quad . \quad (6.8)$$

Da E die Dimension V/m, H die Dimension A/m hat, ergibt sich für das Verhältnis formal ein Widerstand. Z_F wird *Feldwellenwiderstand* genannt.

Die einfachste Lösung der Gleichungen (6.6) ist die *gleichförmige ebene Welle*. Sie besitzt eine definierte Ausbreitungsrichtung, und in jeder Ebene senkrecht dazu findet man ein einheitliches schwingendes Feldmuster, welches sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Man erkennt sofort, dass es sich hierbei um eine Idealisierung handelt, denn der komplette Raum wäre von einem einheitlichen Feldmuster erfüllt. Realitätsnäher ist die *Kugelwelle*, wobei man ausgehend von einem Zentrum Kugelschalen mit einheitlichem Feldmuster vorfindet. Betrachtet man einen Ausschnitt aus einer solchen Kugelschale, der so klein ist, dass die Krümmung vernachlässigt werden kann, ist das Feldmuster dem der gleichförmigen ebenen Welle vergleichbar. Da die Oberfläche einer Kugelschale mit Abstand vom Zentrum zunimmt, nimmt die Feldstärke in gleichem Maße ab. *TEM-Welle*²⁴ ist eine Bezeichnung für ein Feldmuster, bei dem sowohl elektrischer als auch magnetischer Feldstärkevektor grundsätzlich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Existieren im Raum mehrere Wellen, z. B. ausgehend von unterschiedlichen Wellenquellen, kommt es zu einer Überlagerung der Feldstärkevektoren. Darauf wird im nächsten Abschnitt noch genauer eingegangen. Trifft eine elektromagnetische Welle auf Materie, so wird sie dort absorbiert oder reflektiert. Absorption bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Welle in die Materie eindringt und ihre Energie dort auf Grund von Verlusten in Wärme umgesetzt wird (z. B. Induktion von Wirbelströmen). Gewöhnlich wird ein Teil absorbiert, der andere reflektiert.

6.2 Antennen

Voraussetzung für die Entstehung einer elektromagnetischen Welle ist die Existenz einer Störung im Raum. Diese kann dann als Feldquelle angesehen werden. Zwei physikalische Effekte kommen primär hierfür in Betracht:

- * Polarisation eines leitfähigen Körpers, die sich ständig ändert. Folge ist ein ebenso zeitlich veränderliches E-Feld vom aktuell positiv zum negativ geladenen Ende des Körpers. Außerdem bewirkt die permanente Ladungsverschiebung Wechselströme im Leiter, die ihrerseits Magnetfelder verursachen. Nach diesem Prinzip arbeiten *Dipolantennen*.
- * Wechselstrom in einem ringförmig geschlossenen Leiter. Das dadurch verursachte magnetische Wechselfeld fungiert als Feldquelle. Nach diesem Prinzip arbeiten *Rahmenantennen*.

Im Folgenden sollen einige für die Praxis wichtige Eigenschaften und Erkennungsmerkmale von Antennen erläutert werden:

- * Antennen sind passiv und somit grundsätzlich reziprok (vgl. 4.2.4). Das bedeutet, jede Antenne eignet sich in gleicher Weise zum Senden wie zum Empfangen. Alle Charakte-

²⁴ transversal elektro magnetisch

ristika, die im Sendebetrieb ermittelt wurden (z. B. Frequenzgang, Richtcharakteristik) dürfen eins zu eins auf den Empfangsbetrieb übertragen werden.

- * Aus Sicht von Sender und Empfänger ist eine Antenne ein Zweipol. Somit besitzt sie eine messbare Impedanz \underline{Z}_A . In Verbindung mit einer Systemimpedanz R_0 kann daraus gemäß

$$\underline{r}_A = \frac{\underline{Z}_A - R_0}{\underline{Z}_A + R_0} \quad (6.9)$$

ein Reflexionsfaktor gebildet werden, dessen Betrag im Interesse einer guten Anpassung möglichst klein sein sollte. Er kann mit der Reflexionsfaktor-Messbrücke gemessen werden (4.3.9). Impedanz und Reflexionsfaktor sind frequenzabhängig. Diesem Frequenzgang entnimmt man ein Frequenzband hoher Reflexionsdämpfung, in dem die Antenne sinnvoll eingesetzt werden kann.

- * Häufig erfolgt die Signalausbreitung nicht nur auf dem direkten Weg, sondern über Reflexionen auch auf Umwegen. Man spricht von *Mehrwegeausbreitung*. Da diese Wege unterschiedlich lang sind, kommt es zu Laufzeitunterschieden. Am Empfangsort findet eine Überlagerung der einzelnen Signale statt, was bei ungünstiger Phasenlage eine Abschwächung oder sogar Auslöschung des Signals zur Folge hat. Dieses Phänomen wird in der Fachsprache *fading* genannt (englisch auszusprechen). Es gibt zwei Methoden dem zu begegnen. Eine ist die sogenannte *antenna diversity*²⁵. Man arbeitet mit zwei oder mehr Empfangsantennen, die einen Abstand von etwa $\lambda/4$ zueinander haben. Man kann dann davon ausgehen, dass mindestens eine Antenne bleibt, bei der keine Signalauslöschung stattfindet. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass ebenso viele Empfänger wie Antennen vorhanden sein müssen, es ist teuer. Die zweite Möglichkeit bietet das unter dem Namen *frequency hopping* bekannte Frequenzsprungverfahren. Die durch den Laufzeitunterschied bedingte Phasenlage der Signale hängt von der Frequenz ab. Schaltet man diese beständig um, kann man davon ausgehen, dass nicht zu allen Zeiten eine Signalauslöschung vorliegt. Dieses Verfahren wird beispielsweise bei GSM-Mobilfunk eingesetzt. Hierbei wird das Signal in Zeitschlitze zerlegt und zwischen drei Frequenzen umgeschaltet. Bei der vorhergehenden Codierung des Signals wurde Redundanz eingebaut, die so organisiert ist, dass bei Ausfall eines Zeitschlitzes noch kein Informationsverlust eintritt.
- * Praktisch alle Antennen zeigen eine mehr oder weniger stark ausgeprägte *Richtcharakteristik*. In bestimmte Raumrichtungen erfolgt starke Abstrahlung, in andere schwächere. Dieses Verhalten wird durch das *Richtdiagramm* dokumentiert, es ist in Bild 6-1 dargestellt. Es wird folgendermaßen gewonnen: Man montiert die Antenne auf einem drehbaren Teller mit Winkelskala und schließt sie an einen Sender an. In einer gewissen Entfernung montiert man eine Prüfantenne, die mit einem Messgerät verbunden ist. Nun ermittelt man die Richtung der stärksten Abstrahlung, diese entspricht dem Winkel 0° . Die Winkelskala wird entsprechend justiert, der Punkt $0^\circ/1,0$ in das Diagramm eingetragen. Nun dreht man die Antenne in kleinen Winkelschritten und trägt den auf den Maximalwert bezogenen Messwert mit Hilfe der durch die konzentrischen Kreise gegebenen Koordinaten unter dem eingestellten Winkel in das Diagramm ein. Man erkennt in Bild 6-1, dass unter einem Winkel von etwa 29° gerade die Hälfte des Maximalwerts gemessen wurde (gestrichelte Linie). Auf diese Weise entsteht die für Richtantennen typische keu-

²⁵ Wurde auch zu *Antennendiversität* eingedeutscht.

lenförmige Kurve, welche deshalb auch *Funkkeule* genannt wird. Charakteristisch sind Nebenkeulen, die hier unter einem Winkel von 75° auftreten. Zur vollständigen Dokumentation muss ein Horizontal- und ein Vertikaldiagramm erstellt werden.

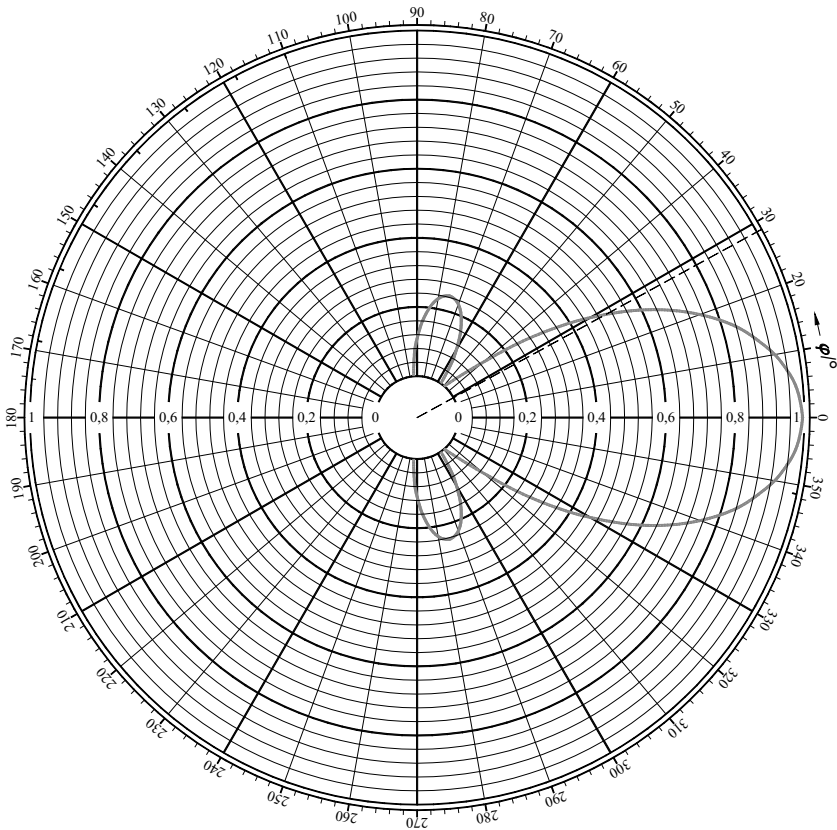


Bild 6-1 Richtdiagramm einer Antenne

Eine Möglichkeit zur quantitativen Beurteilung der Richtwirkung bietet der sogenannte *Antennengewinn*. Hierzu vergleicht man die in Hauptabstrahlrichtung zu beobachtende Leistungsdichte mit der eines isotropen Kugelstrahlers²⁶ und drückt das Verhältnis in gewohnter Weise im Dezibel-Maß aus. Es hat sich eingebürgert, an dieser Stelle *dBi* zu schreiben. Das *i* steht hierbei für *isotrop*, da mit einem isotropen Kugelstrahler verglichen wurde. Machen wir ein Beispiel: Eine angepasste Antenne wird aus einem Verstärker gespeist. Der Pegel der auf die Antenne zulaufenden Welle beträgt 46 dBm . Er wurde mit dem in Abschnitt 4.3.12 beschriebenen Verfahren ermittelt. In Hauptabstrahlrichtung der Antenne misst man in 9 m Entfernung mit einer Feldsonde eine elektrische Feldstärke

²⁶ gleiches Abstrahlverhalten in alle Raumrichtungen; exakt nicht realisierbar.

$$E = 6,44 \frac{\text{V}}{\text{m}} .$$

Es stellt sich die Frage nach dem Antennengewinn. Wegen

$$H = \frac{E}{Z_F} = \frac{6,44 \frac{\text{V}}{\text{m}}}{120\pi\Omega} = 17,1 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

kann man aus der gemessenen Feldstärke die Leistungsdichte

$$p = E \cdot H = 110 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$$

herleiten. Sie ist mit der Leistungsdichte, die der Kugelstrahler zur Folge hätte, zu vergleichen. Aus

$$p_p = 46 \text{ dBm}$$

folgt für die abgestrahlte Leistung

$$P_A = 39,8 \text{ W} .$$

Die Oberfläche einer Kugel mit 9m Radius beträgt

$$O = 4\pi r^2 = 1018 \text{ m}^2 ,$$

die Leistungsdichte des Kugelstrahlers demnach

$$p = \frac{39,8 \text{ W}}{1018 \text{ m}^2} = 39,1 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2} .$$

Somit errechnet sich der Antennengewinn zu

$$g = 10 \cdot \lg \frac{110 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}}{39,1 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}} \text{ dBi} = 4,49 \text{ dBi} .$$

- * Ein weiteres Merkmal einer Antenne ist die sogenannte *Antennenhöhe*. Dieser Begriff wird vorwiegend im EMV-Bereich verwendet, wo man elektrische Feldstärken nachweisen möchte. Hierzu charakterisiert der Hersteller seine Antenne durch das Verhältnis von Spannung am Antennensockel zu elektrischer Feldstärke am Ort der Antenne

$$h = \frac{U}{E} . \quad (6.11)$$

Man erkennt sofort, dass h die Dimension einer Länge hat, daher der Begriff *Höhe*. Mit Höhe im Sinne einer geometrischen Größe hat das nichts zu tun.

Symbole

Matrizen und Vektoren werden durch fett gedruckte Buchstaben dargestellt. Komplexe Größen sind unterstrichen. Variable werden kursiv geschrieben, Konstanten und Indizes aufrecht. Beispiel: \underline{S}_Z bezeichnet eine Matrix mit komplexen Elementen, die variabel sind.

Rechtsbündig ist die Dimension angegeben. 1 bedeutet hierbei, dass es sich um eine dimensionslose Größe handelt. Falls die betreffende Größe verschiedene Dimensionen haben kann, werden diese durch Semikolon getrennt. Ein horizontaler Strich besagt, dass dem Symbol keine Dimension zugeordnet werden kann (z. B. das Dezibel).

a	Dämpfung	dB
\underline{a}	Wellengröße, Leistungswelle	\sqrt{W}
$\underline{\underline{a}}$	Vektor der zulaufenden Wellen	\sqrt{W}
α	Dämpfungsmaß	m^{-1}
\underline{a}_{uv}	Element der Kettenmatrix, komplex	1 ; Ω ; S
A	Fläche	m^2
A	Arbeitspunkt	---
\underline{A}	Kettenmatrix, komplex	1 ; Ω ; S
b	Breite	mm
\underline{b}	Wellengröße, Leistungswelle	\sqrt{W}
$\underline{\underline{b}}$	Vektor der ablaufenden Wellen	\sqrt{W}
β	Phasenmaß	m^{-1}
\mathbf{B}	magnetische Flussdichte, Vektor	$T = Vs/m^2$
\underline{B}	Inverse der Kettenmatrix, komplex	1 ; Ω ; S
B	Suszeptanz (Imaginärteil der Admittanz)	S
c	Geschwindigkeit	m/s
c_0	Lichtgeschwindigkeit, Naturkonstante	$3 \cdot 10^8 m/s$
C	Kapazität	F
C	Raumkurve	---
C^*	Kapazitätsbelag (einer Leitung)	nF/km
d	Durchmesser, Dicke	mm
$d\mathbf{A}$	vektorielles Flächenelement	m^2
dB	Dezibel	---
dB _i	Dezibel isotrop	---
div	Divergenz, vektoranalytischer Differentialoperator	---
ds	vektorielles Wegelement	m

D	Durchmesser	mm
D	directivity (einer Reflexionsfaktor-Messbrücke)	dB
Δ_{μ}	Graphendeterminante	1
e	EULERSche Zahl	2,7183
ε	Dielektrizitätskonstante	$\frac{As}{Vm}$
ε_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums, Naturkonstante	$8,854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
ε_r	relative Dielektrizitätszahl, Materialkonstante	1
E	Einheitsmatrix	---
E	elektrische Feldstärke, Vektor	V/m
φ	Phasenwinkel, räumlicher Winkel	Bogenmaß oder °
f	Frequenz	Hz
F	Kraft	N
FC	Crest-Faktor	1
Φ	magnetischer Fluss	Wb = Vs
g	Antennengewinn	dB
γ	Ausbreitungsmaß, komplex	m ⁻¹
G	Leitwert, Konduktanz	S
G'	Ableitbelag (einer Leitung)	μS/km
\underline{G}	Parallelreihenmatrix, komplex	1 ; Ω ; S
h	Antennenhöhe	m
$h_{\mu\nu}$	Element der Hybridmatrix, komplex; h-Parameter	1 ; Ω ; S
H	magnetische Feldstärke, Vektor	A/m
\underline{H}	Übertragungsfunktion, komplex	1
H	HERMITESche Matrix	---
\underline{H}	Hybridmatrix, komplex	1 ; Ω ; S
$i, I, \underline{I}, \hat{i}$	elektrischer Strom (Zeitfunktion, Effektivwert, komplexer Zeiger, Amplitude)	A
j	imaginäre Einheit	$\sqrt{-1}$
J	Stromdichte, Vektor	A/m ²
k	Boltzmann-Konstante, Naturkonstante	$1,38 \cdot 10^{-23}$ Ws/K
k	Klirrfaktor	%
k	Kopplung	dB ; 1
l	Länge	m
lg	dekadischer Logarithmus	---
ln	natürlicher Logarithmus	---
log	Logarithmus, allgemein	---

λ	Wellenlänge	m
L	Induktivität	H
L'	Induktivitätsbelag (einer Leitung)	$\mu\text{H/km}$
$L_{\mu}(v)$	Schleifentransmission	1
m	Masse	kg
m	Hauptminor (einer Matrix)	---
m	Anpassfaktor	1
μ	magnetische Permeabilität	$\frac{V_s}{A_m}$
μ_0	magnetische Permeabilität des Vakuums, Naturkonstante	$4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V_s}{A_m}$
μ_r	relative magnetische Permeabilität, Materialkonstante	1
M	Gegeninduktivität	H
N	Index, bezeichnet eine normierte Größe	---
N_p	Neper, veraltetes Übertragungsmaß	---
O	Oberfläche	m^2
ω	Kreisfrequenz	s^{-1}
p	Leistungsdichte (bezogen auf Fläche)	W/m^2
p_U	Spannungspegel	z. B. dBu
p_P	Leistungspegel	z. B. dBm
$p_x(x)$	Verteilungsdichtefunktion	---
P_{μ}	Pfadtransmission	1
π	Kreiszahl	3,1416
ψ	Phasenwinkel	Bogenmaß oder °
P	Leistung	W
Q	elektrische Ladung	As
Q	Güte	1
r	Radius	m
r	Raumkoordinate	---
\mathbf{r}	Ortsvektor	---
\underline{r}	Reflexionsfaktor, komplex	1
rot	Rotation, vektoranalytischer Differentialoperator, Vektor	---
ρ	Raumladungsdichte	As/m^3
R	Widerstand, Resistanz	Ω
R'	Widerstandsbelag (einer Leitung)	Ω/km
R_0	Wellenwiderstand (einer Leitung)	Ω
R_0	Systemimpedanz	Ω

s	Länge, Weg	m
s	Stehwellenverhältnis, VSWR	1
\underline{s}	Transmission	1
σ	Standardabweichung	---
σ^2	Varianz	---
$\underline{s}_{\mu\nu}$	Element der Streumatrix, komplex	1
$\underline{\underline{S}}$	Streumatrix, komplex	1
$S(f)$	spektrale Leistungsdichte	W/Hz
$S_U(f)$	spektrale Spannungsdichte	V/ $\sqrt{\text{Hz}}$
t	Zeit	s
\underline{t}	Transmission	1
τ	normierte Zeit	1
T_{LS}	Graphentransmissionsfaktor	1
Θ	Durchflutung	A
$u, U, \underline{U}, \hat{u}$	elektrische Spannung (Zeitfunktion, Effektivwert, komplexer Zeiger, Amplitude)	V
\ddot{u}	Übersetzungsverhältnis, Windungszahlenverhältnis	1
v	Geschwindigkeit	m/s
V	Verstärkung	dB ; 1
VK	Verkürzungsfaktor	1
$VSWR$	Stehwellenverhältnis	1
x	Weg	m
X	Reaktanz	Ω
$\underline{y}_{\mu\nu}$	Element der Admittanzmatrix, komplex	S
\underline{Y}	Admittanz, komplex	S
$\underline{\underline{Y}}$	Admittanzmatrix, komplex	S
z	Raumkoordinate	---
$\underline{z}_{\mu\nu}$	Element der Impedanzmatrix, komplex	Ω
\underline{Z}	Impedanz, komplex	Ω
$\underline{\underline{Z}}$	Impedanzmatrix, komplex	Ω
\underline{Z}_0	Wellenimpedanz (einer Leitung), komplex	Ω
Z_F	Feldwellenwiderstand	$120\pi\Omega$

Literaturverzeichnis

- [1] BRAND, H.: Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze. S. Hirzel Verlag Stuttgart 1970
- [2] HEUERMANN, H.: Hochfrequenztechnik. Vieweg + Teubner Verlag Wiesbaden 2009
- [3] HOFFMANN, M.: Hochfrequenztechnik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1997
- [4] KRÖGER, R.; UNBEHAUEN, R.: Elektrodynamik. B. G. Teubner Stuttgart 1993
- [5] LEUCHTMANN, P.: Einführung in die elektromagnetische Feldtheorie. Pearson Studium München 2005
- [6] MEYERS Enzyklopädisches Lexikon, Bd. 1-25. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich 1975
- [7] REISDORF, F.: Hochfrequenztechnik 1. Manuskript zur Vorlesung, Fachhochschule Bingen 2008
- [8] SCHUON, E.; WOLF, H.: Nachrichtennmesstechnik. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1981
- [9] UNBEHAUEN, R.: Grundlagen der Elektrotechnik 1 & 2. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1994
- [10] ZINKE, O.; BRUNSWIG, H.: Hochfrequenztechnik 1. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 2000
- [11] UMMINGER, M. et al.: Ablation kontaminierter Oberflächen zementgebundener Bauteile beim Rückbau kerntechnischer Anlagen. Abschlussbericht, BMBF Förderkennzeichen 02S8709 und 02S8719, 2015

Stichwortverzeichnis

1dB-Kompressionspunkt.....	56	Diplexer.....	157
A-Bewertungsfilter.....	32	Dipolantenne	183
Absorption.....	183	Directivity	154
Admittanz	18	Dispersion	110
Admittanzmatrix.....	38, 136	<i>Divergenz</i>	181
Anpassfaktor	73, 89	Doppelleitung, homogene	57
Anpassglied	146	Doppel-T-Verzweigung	157, 164
Anpassglied minimaler Dämpfung.....	146	Dreitor	136
Anpassung	68, 94	Dreitor, struktursymmetrisches	159
antenna diversity	184	Duplexer.....	156
Antenne	183	Durchflutungsgesetz.....	106
Antennengewinn.....	185	E-Arm.....	164
a-Parameter.....	41, 127	Eichleitung	144
Arbeitsgerade	121, 142	Einfügungsdämpfung	28, 164
Ausbreitungsmaß.....	63	Eintor, aktives	142
Autokorrelationsfunktion	48	Eintor, passives	141
Bandpassfilter.....	156	Elektrodynamik	V
Base Transceiver Station	151	EMV	111, 112
Betriebsdämpfung	29, 164	Entzerrer.....	51
BNC-Connector.....	160	Erwartungswert	50
BODE-Diagramm	23, 128	EULERSche Formel	9, 72
Calibration Kit.....	43	fading	184
CAN-Bus.....	113	Feldstärke elektrische.....	182
charakteristische Impedanz	64	Feldstärke magnetische	182
Conduktanz	20	Feldtheorie.....	V
Crest-Faktor.....	46	Feldwellenwiderstand.....	183
Dämpfung.....	2	Flussdichte magnetische.....	182
Dämpfungsglied	131, 143	FOURIER-Reihe	46
Dämpfungsmaß	27, 63	FOURIER-Transformation.....	47
dB	23	frequency hopping.....	184
Dezibel	23	full-duplex	151
Dielektrizitätskonstante	101, 182	Funkkeule.....	185
Differentialgleichung	7	GAUSSsche Zahlenebene	21

GAUSS-Verteilung.....	50	Leitungsbeläge.....	58
Geräuschpegel.....	32	Leitungsgleichungen.....	58
Graphendeterminante.....	175	Leitungstransformation.....	69, 85
Graphentheorie.....	169	Leitungsverzweigung.....	158
Graphentransmissionsfaktor.....	175	LENTZsche Regel.....	58
Gruppengeschwindigkeit.....	66	Lichtgeschwindigkeit.....	182
GSM-Mobilfunk.....	151, 184	magisches T.....	164
Gyrator.....	143	Maschenregel.....	18
H-Arm.....	164	MASON-Regel.....	175
Hauptminor.....	139	Matrix, HERMITESche.....	138
HF-Frequenzweiche.....	156	Matrix, negativ definite.....	138
Hohlleiter.....	57	Matrix, positiv definite.....	138
h-Parameter.....	43	Matrix, unitäre.....	137
Hybridmatrix.....	43, 136	MAXWELLSche Gleichungen V, 7, 102, 105, 181	
ideale Leitung.....	71, 85	Mehrwegeausbreitung.....	184
Impedanz.....	18, 124	micro strip line.....	114
Impedanzmatrix.....	35, 126	Mikro-Streifenleitung.....	114
Interferenz.....	1	Mikrowellennetz.....	167
Intermodulation.....	149, 150	Moden, höhere.....	111
IP3-Punkt.....	53	Nebenkeule.....	185
Isolation.....	150	Nebensprechen.....	162
Kabelschlag.....	112	Neper.....	24
Kettenmatrix.....	40, 126, 133, 136	Network Analyzer.....	29, 154, 170
Knotenregel.....	18	Normalisierung.....	43
Koaxialleitung.....	101	Normalverteilung.....	49
kollinearer Arm.....	164	normierte Admittanz.....	88
konforme Abbildung.....	81	normierte Impedanz.....	76
konzentrierte Elemente.....	1	n-Tor, aktives.....	137
Kopplung, elektrische.....	162	n-Tor, passives.....	137
Kopplung, induktive.....	162	n-Tor, reflexionssymmetrisches.....	141
Kopplung, kapazitive.....	162	n-Tor, transmissionssymmetrisches.....	141
Kopplung, magnetische.....	162	n-Tor, verlustloses.....	137
Kugelwelle.....	183	n-Tore.....	117
LAN-Netz.....	112	Nullindikation.....	166
Leistungspegel.....	30	Oberschwingung.....	150
Leistungswelle.....	118		

Ortskurve	22, 100	Schlaglänge	112
Pegelmaß	30	Schleife n-ter Ordnung	175
Permeabilität	101	Schleifentransmission	175
Pfaddeterminante	176	Senkeknoten	175
Pfadtransmission	175	signal to noise	51
Phasengeschwindigkeit	66	Signalflussdiagramm, -graph	169
Phasenmaß	63	Skineffekt	59
Phasenschieber	143	SMITH-Chart	75
Pi-Struktur	145	SMITH-Diagramm	75, 128
PLC	160	Sonar	6
Power Meter	34, 164	Spannungspegel	30
Power-Splitter	160	Spannungsquelle, eingeprägte	119
Quellknoten	175	s-Parameter	126
Rahmenantenne	183	s-Parameter-Messplatz	128, 136
Raumladungsdichte	182	Spectrum Analyzer	47, 144
Rauschen	45, 142	spektrale Leistungsdichte	47
Reaktanz	20	spektrale Spannungsdichte	48
Receiver	151	Standardabweichung	50
Rechteck-Hohlleiter	115	Stehwellenverhältnis	73, 89
Rechte-Hand-Regel	106, 111, 114, 181	Störabstand	150
Reflexion	1, 66, 183	Streumatrix	126, 133
Reflexionsdämpfung	68	Streuparameter	128
Reflexionsfaktor	66	Stromdichte	182
Reflexionsfaktor-Messbrücke	152	Stromquelle, reale	121
Reflexionsverstärker	142, 151	Struktursymmetrie	129
Resistanz	20	Suszeptanz	20
Resonanzüberhöhung	22	Symmetrieeigenschaften	141
Reziprozität	37, 39, 42, 136, 183	symmetrische Leitung	112
Richtcharakteristik	184	symmetrische Technik	113
Richtdiagramm	184	Systemimpedanz	29, 120, 131
Richtkoppler	29, 114, 162	Telefonkanal	32
Richtungsleitung	149	TEM-Welle	110, 183
Rotation	181	third order intercept point	53
Rückflusssdämpfung	68	Totalreflexion	68
S/N-Verhältnis	51	Transceiver	151
scattering matrix	128	Transmitter	151

T-Struktur	143	Welle, gleichförmige ebene.....	183
T-Stück	158	Wellendämpfung	29, 164
Tunnel diode.....	142	Wellengröße	V, 117
twisted pair	112	Wellenimpedanz.....	63
Übertragungsmaß	23	Wellenlänge.....	2, 65
Ultraschall	6	Wellenquelle, reale	119
Urspannungsquelle	119	Wellensumpf	125, 142
Varianz	50	Wellenwiderstandssprung	91
Vektoranalysis	181	X-Band	116
Verkürzungsfaktor.....	3, 72	y-Parameter	38
verlustlose Leitung	71	Zeigerdiagramm	21
Verschiebungsstrom	106	Zirkulator.....	114, 149
verteilte Parameter.....	3, 61, 182	z-Parameter.....	35
Verteilungsdichtefunktion	48	$\lambda/4$ -Leitung	75
Verzerrung.....	51, 52	$\lambda/4$ -Resonator	75
Verzerrung, nichtlineare	149	$\lambda/4$ -Transformator.....	99
VSWR	74, 91	$\pi/2$ -Hybrid	163
Welle, elektromagnetische.....	181	π -Hybrid	165