

Elektro-Aufgaben

Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation

von Studiendirektor Helmut Lindner †, Mittweida
und Prof. Dr. Edgar Balcke

6. Auflage

Mit 257 Bildern



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

| | |
|--|--------------------|
| Band 1: Gleichstrom | ISBN 3-446-21915-3 |
| Band 2: Wechselstrom | ISBN 3-446-21705-3 |
| Band 3: Leitungen – Vierpole – Fourier-Analyse – Laplace-Transformation | ISBN 3-446-21706-1 |

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek:

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN 3-446-21706-1

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

© 1994/2001/2003 Carl Hanser Verlag München Wien
Internet: <http://www.fachbuch-leipzig.hanser.de>
Druck und Bindung: Druckhaus „Thomas Müntzer“ GmbH, Bad Langensalza
Printed in Germany

Vorwort

Ein Merkmal unserer Zeit besteht in der Mechanisierung und Automatisierung, die sich fast auf alle Zweige von Wissenschaft, Technik und Wirtschaft erstreckt und von einem zunehmenden Vordringen der Elektrotechnik begleitet wird. Sowohl bei der Ausbildung der Facharbeiter, Techniker, Meister und Ingenieure als auch in der Weiterbildung der in der Praxis Tätigen erhöhen sich ständig die Anforderungen an jeden, der sich mit der Elektrotechnik beschäftigt.

Die schwierige Aufgabe der Bewältigung des Stoff-Zeit-Problems führt oft dazu, daß der Herausbildung von Fertigkeiten durch Berechnung von Übungsaufgaben nicht genügend Beachtung gewidmet wird.

Mit dem vorliegenden dritten Band, der eine umfangreiche Sammlung an Formeln und Aufgaben zur Leitungs- und zur Vierpoltheorie sowie zur FOURIER-Analyse und zur LAPLACE-

Transformation enthält, erfolgt daher eine systematische Ergänzung zu den beiden seit langem erscheinenden Bänden der „Elektro-Aufgaben“.

Zur besonderen Übung der mathematischen Hilfsmittel sind im 1. Abschnitt Aufgaben mit Funktionen komplexer Zahlen und zur Matrizenrechnung vorangestellt. Diese beschränken sich aber nur auf die in der Vierpoltheorie benötigten Matrizen zur Ordnung 2. Die Kenntnis der Differential- und Integralrechnung wird vorausgesetzt.

Für die mühevolle Arbeit des Nachrechnens sei an dieser Stelle den Herren Dr.-Ing. J. HESTERBERG und Dr. rer. nat. H. LINDNER sowie den beteiligten Studenten der Ingenieurhochschule Mittweida herzlichst gedankt.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

| | Aufgaben | Seite | | Aufgaben | Seite | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|-------------|-------|---|-------------|-------|---|--|----|--------------------------------------|-----------|----|--------------|--|----|------------------------|--|----|-------------|--|----|--------------------------|--|----|---------------------------------|--|----|------------------------|--|----|--------------------------|-----------|----|-----------------------------------|-----------|----|--------------------|--|-----|--|--|--|---------------------------|--|-----|
| | Nr. | | | Nr. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1. Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen | | | 3.6. Transistoren und Röhren als Vierpole | 3.80...90 | 41 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.1. Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl | 1.1 ... 25 | 5 | 3.7. Vierpolgleichungen mit Wellenparametern | 3.91...100 | 45 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.2. Exponentialfunktionen mit komplexen Exponenten und Logarithmen komplexer Zahlen | 1.26 ... 49 | 5 | 4. Fourier-Analyse | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.3. Hyperbelfunktionen komplexer Argumente | 1.50 ... 80 | 6 | 4.1. FOURIER-Reihen in trigonometrischer Form | 4.1...39 | 47 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.4. Rechnen mit Matrizen | 7 | | 4.2. FOURIER-Reihen in komplexer Form | 4.40...45 | 51 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.4.1. Determinante einer Matrix | 1.81...100 | 7 | 4.3. FOURIER-Integrale | 4.46...51 | 53 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.4.2. Addition von Matrizen und Multiplikation mit einem Faktor | 1.101...110 | 8 | 5. Laplace-Transformation | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1.4.3. Multiplikation von Matrizen | 1.111...130 | 9 | 5.1. Transformation elementarer Funktionen | 5.1...30 | 54 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2. Leitungen | | | 5.2. Tafel einiger LAPLACE-Transformationen | | 55 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.1. Grundgrößen elektrischer Leitungen | 2.1...16 | 10 | 5.3. Anwendung weiterer Rechenregeln | 5.31...45 | 57 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.2. Näherungsweise Berechnung häufig vorkommender Sonderfälle | 2.17...30 | 13 | 5.4. Transformation der Ableitung und des Integrals einer Funktion | 5.46...62 | 57 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.3. Spannung, Strom und Widerstand auf Leitungen | 2.31...54 | 14 | 5.5. Inverse LAPLACE-Transformation (Rücktransformation) | | 58 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.4. Anpassung und Reflexion | 2.55...70 | 17 | 5.5.1. Inverse Transformation durch elementare Umformung | 5.63...88 | 58 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.5. Verlustlose Hochfrequenz-Leitung | 2.71...88 | 19 | 5.5.2. Inverse Transformation durch Partialbruchzerlegung | 5.89...100 | 59 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2.6. Anwendung hyperbolischer Funktionen | 2.89...112 | 21 | 5.5.3. Inverse Transformation mit Hilfe des Faltungssatzes | 5.101...108 | 59 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3. Vierpole | | | 5.6. Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung | 5.109...128 | 60 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1. Vierpolgleichungen und -parameter | | 23 | 5.7. Berechnung von Schaltvorgängen mittels LAPLACE-Transformation | 5.129...139 | 61 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1.1. Widerstandsform | 3.1...6 | 23 | 5.8. Berechnung zeitabhängiger Ausgangsgrößen passiver Vierpole | 5.140...147 | 62 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1.2. Leitwertform | 3.7...10 | 25 | Lösungen | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1.3. Hybridform | 3.11...13 | 26 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.1.4. Kettenform | 3.14...19 | 26 | 3.2. Umrechnung der Vierpolparameter | 3.20...29 | 28 | 1. Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen | | 64 | 3.3. Zusammenschaltung von Vierpolen | 3.30...45 | 29 | 2. Leitungen | | 67 | 3.3.1. Reihenschaltung | | 29 | 3. Vierpole | | 77 | 3.3.2. Parallelschaltung | | 30 | 3.3.3. Reihen-Parallelschaltung | | 30 | 3.3.4. Kettenschaltung | | 30 | 3.4. Vierpol-Widerstände | 3.46...60 | 34 | 3.5. Vierpol-Übertragungsfaktoren | 3.61...79 | 37 | 4. FOURIER-Analyse | | 108 | | | | 5. LAPLACE-Transformation | | 120 |
| 3.2. Umrechnung der Vierpolparameter | 3.20...29 | 28 | 1. Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen | | 64 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.3. Zusammenschaltung von Vierpolen | 3.30...45 | 29 | 2. Leitungen | | 67 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.3.1. Reihenschaltung | | 29 | 3. Vierpole | | 77 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.3.2. Parallelschaltung | | 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.3.3. Reihen-Parallelschaltung | | 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.3.4. Kettenschaltung | | 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.4. Vierpol-Widerstände | 3.46...60 | 34 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3.5. Vierpol-Übertragungsfaktoren | 3.61...79 | 37 | 4. FOURIER-Analyse | | 108 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 5. LAPLACE-Transformation | | 120 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

1. Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen

Aufgaben zur Einführung in das Rechnen mit komplexen Zahlen, insbesondere zur Umrechnung der Normalform in die Exponentialform und umgekehrt, sind im Band II der Elektro-Aufgaben (Wechselstrom) enthalten.

1.1. Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl

Liegt der Radikand in der Exponentialform vor, so ist die Quadratwurzel aus dem Betrag Z zu ziehen und der Winkel φ zu halbieren:

$$\sqrt{Ze^{j\varphi}} = \sqrt{Z} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}}$$

Liegt der Radikand in der Normalform $Z = a + jb$ vor, dann ist diese zuvor in die Exponentialform umzuwandeln: $\sqrt{a + jb} = \sqrt{Ze^{j\varphi}}$ mit $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = \frac{b}{a}$; ferner ist

$$\sqrt{-a + jb} = j\sqrt{a - jb}$$

Aus folgenden Ausdrücken ist die Quadratwurzel zu ziehen und diese in der Normalform anzugeben:

$$1.1. \sqrt{e^j}$$

$$1.2. \sqrt{2e^{j30^\circ}}$$

$$1.3. \sqrt{16e^{j150^\circ}}$$

$$1.4. \sqrt{0,01e^{-j5^\circ}}$$

$$1.5. \sqrt{j9}$$

$$1.6. \sqrt{-j}$$

$$1.7. \sqrt{-j0,16}$$

$$1.8. \sqrt{\frac{5}{j}}$$

$$1.9. \sqrt{1+j}$$

$$1.10. \sqrt{-1-j}$$

$$1.11. \sqrt{1-j}$$

$$1.20. \sqrt{\frac{1+j}{1-j}}$$

$$1.12. \sqrt{-1+j}$$

$$1.13. \sqrt{2-j3}$$

$$1.22. \sqrt{\frac{1}{1+j}}$$

$$1.14. \sqrt{-5+j4}$$

$$1.15. \sqrt{-3-j6}$$

$$1.16. \sqrt{-2,65 + j1,68}$$

$$1.17. j\sqrt{5+j}$$

$$1.18. \frac{\sqrt{3+j5}}{j}$$

$$1.19. \sqrt{\frac{13}{5+j}}$$

$$1.20. \sqrt{\frac{1+j}{1-j}}$$

$$1.21. \sqrt{\frac{1}{j}}$$

$$1.22. \sqrt{\frac{1}{1+j}}$$

$$1.23. \sqrt[3]{j}$$

$$1.24. (1 - \sqrt{j})^2$$

$$1.25. \frac{1+j}{\sqrt{j}}$$

1.2. Exponentialfunktionen mit komplexen Exponenten und Logarithmen komplexer Zahlen

Die Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten kann in einen reellen und einen imaginären Faktor zerlegt werden:

$$e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb}.$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl kann in einen reellen und einen imaginären Teil aufgespalten werden:

$$\ln(a + jb) = \ln(Ze^{j\varphi}) = \ln Z + j\varphi.$$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $Z = Ae^{j\varphi}$ gebracht werden:

1.26. e^{2+j3}

1.27. $e^{-1,5+j0,8}$

1.28. $e^{-(0,75+j0,4)}$

1.29. $\sqrt{e^{0,84-j1,24}}$

1.30. $\sqrt{e^{-1,25+j0,6}}$

1.31. $\frac{e^{1,6+j0,9}}{e^j}$

1.32. $\frac{e^{0,1+j0,2}}{e^{0,2-j0,1}}$

1.33. $e^{0,1} + e^{j0,2}$

1.34. $e^{0,2+j1,5} + e^{0,2-j1,5}$

1.35. $\frac{1}{2} [e^{0,8+j0,8} + e^{-(0,8+j0,8)}]$

1.36. $\frac{1}{2} (e^g - e^{-g}) \text{ mit } g = (1+j)$

1.37. $\frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}}$ mit $g = 0,6 + j0,5$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $Z = a + jb$ gebracht werden:

1.38. $\ln(16e^{j90^\circ})$

1.39. $\ln(0,1e^{-j20^\circ})$

1.40. $\ln(2,15e^{j10^\circ})$

1.41. $\ln(3 + j4)$

1.42. $\ln(0,4 - j0,2)$

1.43. $\ln(-1 - j)$

1.44. $\ln(0,05 + j0,02)$

1.45. $(50 - j0,2)$

1.46. $\ln \sqrt{2 - j4}$

1.47. $\ln(j3)$

1.48. $\ln\left(\frac{1}{j3}\right)$

1.49. $\ln \sqrt{j3}$

1.3. Hyperbelfunktion komplexer Argumente

Die Kenntnis der Hyperbelfunktionen und ihrer Eigenschaften wird hier vorausgesetzt. Beim Vorliegen komplexer Argumente werden die Funktionswerte unter Benutzung der allgemein verbreiteten Zahlentafeln mit den hier angegebenen Formeln berechnet. Sie können aber auch mit Hilfe besonderer Netztafeln (Sinus- und Tangensrelief) ermittelt werden.

$$\sinh(a \pm jb) = \sinh a \cdot \cos b \pm j \cosh a \cdot \sin b$$

$$\cosh(a \pm jb) = \cosh a \cdot \cos b \pm j \sinh a \cdot \sin b$$

$$\tanh(a \pm jb) = \frac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} \pm \frac{j \sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$$

Ist der Funktionswert von $\tanh(a + jb)$ in der Form $Ze^{j\varphi}$ (oder in der entsprechenden Normalform) gegeben, so findet man die Komponenten des Argumentes $a + jb$ mit den Formeln

$$\tanh 2a = \frac{2Z \cos \varphi}{1 + Z^2} \quad \text{und} \quad \tan 2b = \frac{2Z \sin \varphi}{1 - Z^2}$$

Die Werte von a und b können dann entsprechenden tanh- bzw. tan-Tabellen entnommen werden.

Die Werte der folgenden Funktionen sind in der Normalform anzugeben:

1.50. $\sinh j$ 1.51. $\sinh(0,5j)$

1.52. $\sinh(0,5 + j1,5)$

1.53. $\sinh(0,8 - j0,8)$

1.54. $\sinh(0,2 + j1,2)$

1.55. $\sinh(0,2 + j\pi)$

1.56. $\sinh(1,65 - j2,50)$

1.57. $\sinh(\pi/2 + j)$

1.58. $\cosh(1 + j)$

1.59. $\cosh j0,9$

1.60. $\cosh(0,6 + j0,2)$

1.61. $\cosh(0,8 - j0,8)$

1.63. $\cosh j\pi/4$

1.62. $\cosh(\pi/2 - j\pi)$

1.65. $\tanh(1 + j)$

1.64. $\tanh j\pi$

1.67. $\tanh e^{-j60^\circ}$

1.66. $\tanh(0,2 + j0,3)$

1.68. $\tanh 1,5 (1 + e^{j30^\circ})$

1.68. $\tanh \sqrt{0,5 e^{j40^\circ}}$

1.70. $\tanh \frac{1}{j3}$

Zu berechnen sind die komplexen Argumente $(a + jb)$ folgender Funktionswerte:

$$1.71. \tanh(a + jb) = j$$

$$1.72. \tanh(a + jb) = 2 + j2$$

$$1.73. \tanh(a + jb) = 0,253 + j0,519$$

$$1.74. \tanh(a + jb) = 0,923 + j0,157$$

$$1.75. \tanh(a + jb) = 0,3e^{j1,5}$$

$$1.76. \tanh(a + jb) = 0,8e^{j0,6}$$

$$1.77. \tanh(a + jb) = 0,7 - j0,2$$

$$1.78. \tanh(a + jb) = 1,117e^{j14,1^\circ}$$

$$1.79. \tanh(a + jb) = 0,366e^{j54^\circ}$$

$$1.80. \tanh(a + jb) = 1,11e^{j40^\circ}$$

1.4. Rechnen mit Matrizen

Zur Abkürzung der in der Vierpoltheorie vorkommenden Gleichungssysteme bedient man sich meist der Matrizenform.

Definition: Unter einer Matrix A versteht man die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnete Gesamtheit von $m \cdot n$ Elementen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ist z.B. ein Vierpol durch die Gleichungen

$$\underline{U}_e = Z_{11}\underline{I}_e + Z_{12}\underline{I}_a$$

$$\underline{U}_a = Z_{21}\underline{I}_e + Z_{22}\underline{I}_a$$

gegeben, so lautet die entsprechende Matrzenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_e \\ \underline{U}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_e \\ \underline{I}_a \end{pmatrix}$$

Die Matrix auf der linken Gleichungsseite besteht nur aus einer einzigen Spalte, während auf der rechten Seite das Produkt aus einer quadratischen Matrix von der Ordnung 2, d.h. vom Typ (2,2), und einer einspaltigen Matrix steht.

Zur Lösung der im Abschnitt 3. behandelten Aufgaben werden lediglich Matrizen der Ordnung 2 und einspaltige Matrizen verwendet, deren Handhabung recht einfach ist.

1.4.1. Determinante einer Matrix

Während eine Matrix in runde Klammern eingeschlossen wird und nur ein Schema von Koeffizienten darstellt, besitzt deren in gerade Striche gesetzte Determinante ΔA (oder auch $\det A$) einen berechenbaren Zahlenwert.

Für eine Matrix der Ordnung 2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lautet die Determinante

$$\boxed{\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Anwendungsbeispiel:

Sind 2 lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y gegeben:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

so findet man nach der „CRAMERSchen Regel“:

$$x = \frac{1}{\Delta A} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{\Delta A} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Wie lauten die Determinanten folgender Matrizen?

$$1.81. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1.82. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$1.83. \quad A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$1.84. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.85. \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$1.86. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & ab \\ 1/a & b \end{pmatrix}$$

$$1.87. \quad A = \begin{pmatrix} a+b & c+a \\ -c-b & b+c \end{pmatrix}$$

1.88. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2, deren 1. Zeile die Elemente (5,6) und deren Determinante den Wert 12 hat, wenn die Elemente der 2. Zeile im Verhältnis 3:4 zueinander stehen?

1.89. Wenn das 1. Element der Matrix $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ verdoppelt wird, nimmt die Determinante den 3fachen Betrag an. Wie lauten die Matrix und deren Determinante?

1.90. Die Determinante einer quadratischen 2reihigen Matrix hat mit $\Delta A = 5$ denselben Betrag wie die beiden Elemente der 1. Zeile. Wie lautet die Matrix, wenn $a_{22} = 11$ ist?

1.91. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2 deren Determinante $\Delta A = 1$ ist (Einheitsmatrix)?

1.92. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus 4 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht?

1.93. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus 4 aufeinanderfolgenden geraden Zahlen besteht?

In den folgenden Gleichungssystemen sind mit Hilfe von Determinanten die Unbekannten x und y zu bestimmen.

$$1.94. \quad 3x - 2y = 11 \quad 1.95. \quad 8x + 5y = 63 \\ 2x + 3y = 16 \quad 7x - 5y = 27$$

$$1.96. \quad 5y = 2x + 1 \quad 1.97. \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ 8y = 5x - 11 \quad (x-y) = (a-b)^2$$

$$1.98. \quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{a-b} \\ 3x - 2y = 3a - 2b$$

$$1.99. \quad \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{6x+1}{4y+5} = \frac{13}{11}$$

$$1.100. \quad \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = 2b$$

1.4.2. Addition von Matrizen und Multiplikation mit einem Faktor

Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert (subtrahiert), indem man die einander entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird mit einem Faktor k multipliziert, indem jedes Element mit dem Faktor k multipliziert wird:

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

Enthalten alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor, so können sie durch den Faktor dividiert und dieser vor die Matrix geschrieben werden.

$$1.101. \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$1.102. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1.103. \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1.104. \begin{pmatrix} 3a & 2b \\ -b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2b & 3a \end{pmatrix}$$

$$1.105. a \cdot \begin{pmatrix} b & 1/a \\ a & 1/b \end{pmatrix} \quad 1.106. 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 5000 & 4500 \\ 500 & 1200 \end{pmatrix}$$

Folgende Ausdrücke sind auf die kürzeste Form zu bringen:

$$1.107. \begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 19 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$1.108. \begin{pmatrix} a - 2b & 2b - a \\ 2a - b & b - 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & a \end{pmatrix}$$

1.109. Um welchen Faktor vergrößert sich die Determinante A einer 2reihigen quadratischen Matrix, wenn diese mit dem Faktor k multipliziert wird?

1.110. Welche Matrix B ist zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 2,5 \\ 4,5 & 3,0 \end{pmatrix}$$

zu addieren, damit die Einheitsmatrix entsteht?

1.4.3. Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen A und B werden miteinander multipliziert, indem man die Zeilen der Matrix A mit den Spalten der Matrix B in der folgenden Weise zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation ist nur dann ausführbar, wenn die Zahl der Spalten von A mit der Zahl der Zeilen von B übereinstimmt.

Das Produkt zweier Matrizen ist nicht kommutativ, d.h., im allgemeinen ist $AB \neq BA$. Man unterscheidet die Multiplikation von links her (AB) und von rechts her (BA).

Die Determinante $\Delta(AB)$ des Produktes ist gleich dem Produkt der Determinanten ΔA und ΔB , auch dann, wenn $AB \neq BA$ ist.

Berechne die folgenden Produkte und weise nach, daß das Produkt der Determinanten der Faktoren gleich der Determinante des Produktes ist:

$$1.111. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$1.112. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1.113. \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.114. \begin{pmatrix} 1,5 & 2,5 \\ 0,5 & 3,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 4,5 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$$

$$1.115. \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$1.116. (6 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Stelle durch Ausrechnen fest, ob die folgenden Produkte kommutativ sind:

$$1.117. \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$1.118. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1.119. \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad 1.120. \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Folgende Produkte sind in die Form eines Gleichungssystems umzuschreiben:

$$1.121. \begin{pmatrix} U_e \\ U_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_e \\ I_a \end{pmatrix}$$

$$1.122. \begin{pmatrix} U_e \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_a \\ I_a \end{pmatrix}$$

Die in den folgenden Matrizengleichungen enthaltenen Unbekannten x, y bzw. U_1, U_2 usw. sind mit Hilfe von Determinanten zu berechnen (siehe auch die Anleitung S. 8):

$$1.123. \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$1.124. \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}$$

$$1.125. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1,9 \\ 8 & -3,9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$1.126. \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ 1/7 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$1.127. \begin{pmatrix} 60 \text{ V} \\ 1,2 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 50 \Omega \\ 0,02 \text{ S} & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$1.128. \begin{pmatrix} 50 \text{ V} \\ 0,3 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 100 \Omega \\ 0,02 \text{ S} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$1.129. \begin{pmatrix} 50 \text{ V} \\ 10 \text{ V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \Omega & 50 \Omega \\ 4 \Omega & 80 \Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$1.130. \begin{pmatrix} 1,5 \text{ A} \\ 0,3 \text{ A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \text{ mS} & 4 \text{ mS} \\ 1 \text{ mS} & 2 \text{ mS} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

2. Leitungen

2.1. Grundgrößen elektrischer Leitungen

Formeln:

$$\underline{Z}' = R' + j\omega L'$$

$$Z' = \sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}$$

$$\underline{Y}' = G' + j\omega C'$$

$$Y' = \sqrt{G'^2 + \omega^2 C'^2}$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}} = Z_L e^{j\varphi}$$

$$\gamma = \sqrt{Z' Y'}$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

$$\tan \varepsilon = \frac{R'}{\omega L'}$$

$$\tan \delta = \frac{G'}{\omega C'}$$

$$\varphi = \frac{\delta - \varepsilon}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{Z' Y'} \cdot \sin \frac{\delta + \varepsilon}{2}$$

$$\beta = \sqrt{Z' Y'} \cdot \cos \frac{\delta + \varepsilon}{2}$$

| Größe | Zeichen | Einheit |
|-------------------------------|-----------|---|
| Länge der Leitung | l | km |
| Widerstandsbelag | R' | Ω/km |
| Induktivitätsbelag | L' | H/km |
| Kapazitätsbelag | C' | F/km |
| Ableitungsbelag | G' | S/km |
| Längswiderstand je Kilometer | Z' | Ω/km |
| Querleitwert je Kilometer | Y' | S/km |
| Wellenwiderstand | Z_L | Ω |
| Winkel des Wellenwiderstandes | φ | ° |
| Ausbreitungskoeffizient | γ | $1/\text{km}$ |
| Dämpfungsbelag | α | Np/km oder $1/\text{km}$ |
| Phasenbelag | β | rad/km oder $1/\text{km}$ |

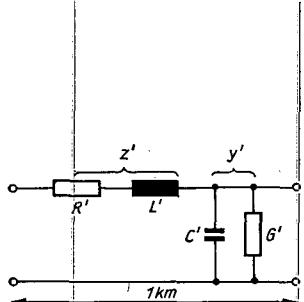


Bild 2.1. Ersatzschaltbild einer Leitung von 1 km Länge

Außer dem ohmschen Widerstand R weisen alle elektrischen Freileitungen und Kabel eine bestimmte Induktivität L , eine Kapazität C sowie eine von den Isolations- und dielektrischen Verlusten herrührende Ableitung G auf. In dem zumeist vorliegenden Fall der homogenen Leitung kann man sich diese Größen gleichmäßig auf die gesamte Leitungslänge verteilt denken und bezieht sie dann auf je 1 km Länge der Doppelleitung. Damit ergeben sich die Leitungskonstanten: Widerstandsbelag R' , Induktivitätsbelag L' , Ableitungsbelag G' und Kapazitätsbelag C' . Für 1 km Leitungslänge entsteht so das Ersatzschaltbild (Bild 2.1). Hierbei lassen sich noch R' und L' zum komplexen Längswiderstand Z' sowie G' und $\omega C'$ zum komplexen Querleitwert Y' zusammenfassen. Übungsaufgaben zur Berechnung der Induktivität und Kapazität von Leitungen befinden sich im Band I dieser Aufgabensammlung (Gleichstrom, Abschn. 7.3. und 9.5.).

Mit zunehmender Entfernung vom Leitungseingang nehmen Spannung und Strom nach einem Exponentialgesetz ab. Hierfür ist der Dämpfungsbelag α bzw. für die gesamte Leitungslänge l das Dämpfungsmaß $a = \alpha l$ maßgebend. Gleichzeitig tritt eine zunehmende Phasenverschiebung von Spannung und Strom gegenüber den Werten am Leitungseingang auf. Maßgebend hierfür ist der Phasenbelag β bzw. für die gesamte Leitungslänge das Phasenmaß $b = \beta l$. Beide Größen setzen sich zum komplexen Ausbreitungskoeffizienten γ bzw. für die gesamte Leitungslänge l zum Ausbreitungsmaß $g = \gamma l$ zusammen.

Bei unendlich großer Leitungslänge ist der Eingangswiderstand gleich dem Wellenwiderstand Z_L . Wenn eine Leitung von endlicher Länge mit dem Wellenwiderstand Z_L abgeschlossen wird, liegt der besondere, in der Praxis meist angestrebte Fall der Anpassung vor. Dann ist der Quotient aus Spannung und Strom an jedem beliebigen Punkt der Leitung gleich dem Wellenwiderstand, und die übertragene Leistung hat ihren maximalen Wert.

Ausbreitungsmaß g und Wellenwiderstand Z_L lassen sich nach den angegebenen Gleichungen aus dem Längswiderstand Z' und dem Querleitwert Y' berechnen. Hierbei ergeben sich α und β aus dem Ausbreitungskoeffizienten γ als reelle bzw. imaginäre Komponente. Ein zweiter Weg zur Berechnung des Ausbreitungskoeffizienten γ führt über die Beträge von Z' , Y' und die zugehörigen Verlustwinkel δ und ε .

2.1. Gegeben sind die Grundgrößen folgender Leitungen:

| | | R' in Ω/km | L' in mH/km | G' in $\mu\text{S/km}$ | C' in nF/km |
|----|---|----------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|
| a) | Starkstromleitung ($f = 50 \text{ Hz}$) | 0,2 | 1,5 | 0,5 | 5 |
| b) | Fernsprechleitung ($\omega = 5000 \text{ 1/s}$) | 5 | 2,0 | 0,8 | 6 |
| c) | Fernsprechkabel ($\omega = 5000 \text{ 1/s}$) | 60 | 0,7 | 1,0 | 30 |

Zu berechnen sind: Wellenwiderstand Z_L , Dämpfungsbelag α , Phasenbelag β und Ausbreitungskoeffizient γ .

2.2. Welcher komplexe Ausdruck für den Ausbreitungskoeffizienten γ ergibt sich für eine Freileitung mit $R' = 8 \Omega/\text{km}$, $L' = 2 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 1 \mu\text{S}/\text{km}$, $C' = 5 \text{ nF}/\text{km}$ und $\omega = 5000 \text{ 1/s}$?

2.3. Wie groß sind der Dämpfungsbelag α und der Phasenbelag β , wenn das Ausbreitungsmaß einer 50 km langen Leitung
a) $g = 1,5e^{j30^\circ}$, b) $g = 2,5e^{-j15^\circ}$ und
c) $g = 2,5 + j1,2$ beträgt?

2.4. Wie lautet das Ausbreitungsmaß g in der Exponentialform für ein Kabel mit den folgenden Werten?

- a) $\alpha = 45 \text{ mNp/km}$; $\beta = 3,2^\circ/\text{km}$; $l = 40 \text{ km}$
- b) $\alpha = 60 \text{ mNp/km}$; $\beta = 0,07 \text{ rad/km}$; $l = 120 \text{ km}$
- c) $\alpha = 30 \text{ mNp/km}$; $\beta = 0,1 \text{ rad/km}$; $l = 300 \text{ km}$

2.5. Das Ausbreitungsmaß eines Kabels, dessen Phasenmaß $b = 15 \text{ rad}$ ist, hat den Betrag $|g| = 25$. Welchen Wert hat das Dämpfungsmaß a ?

2.6. Eine frei verlegte Telefonleitung hat die Kenngrößen $R' = 18 \Omega/\text{km}$, $G' = 2 \mu\text{S}/\text{km}$, $L' = 1,6 \text{ mH}/\text{km}$ und $C' = 4 \text{ nF}/\text{km}$. Zu berechnen sind der Dämpfungs- und Phasenbelag sowie der Ausbreitungskoeffizient und der Wellenwiderstand bei Annahme der Kreisfrequenz $\omega = 5000 \text{ 1/s}$.

2.7. Für eine Fernsprechleitung mit $R' = 12 \Omega/\text{km}$, $L' = 2,2 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 3 \mu\text{S}/\text{km}$, $C' = 5 \text{ nF}/\text{km}$ und $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ ist auf kürzestem Weg der Winkel φ des Wellenwiderstandes zu berechnen.

2.8. Der Verlustwinkel des Längswiderstandes einer Fernsprechleitung beträgt 55° , der Winkel des Wellenwiderstandes -25° und der Kapazitätsbelag $32 \text{ nF}/\text{km}$. Wie groß ist der Ableitungsbelag bei der Kreisfrequenz 5000 1/s ?

2.9. Welches Dämpfungs- und Phasenmaß hat ein 40 km langes Kabel mit den Kenngrößen $R' = 30 \Omega/\text{km}$, $L' = 0,7 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 0$ und $C' = 35 \text{ nF}/\text{km}$ bei der Frequenz 800 Hz ($\omega = 5000 \text{ 1/s}$)?

2.10. Von einer Leitung sind folgende Werte bekannt: Induktivitätsbelag $L' = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ H}/\text{km}$, Kapazitätsbelag $C' = 6 \cdot 10^{-9} \text{ F}/\text{km}$,

Winkel des Wellenwiderstandes $\varphi = -20^\circ$, Verlustwinkel des Längswiderstandes $\epsilon = 60^\circ$. Zu berechnen sind der Wellenwiderstand Z_L und der Ausbreitungskoeffizient γ sowie R' und G' bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$.

2.11. Ein Kabel hat den Wellenwiderstand $Z_L = 300 \Omega$, den Dämpfungsbelag $\alpha = 40 \text{ mNp/km}$ und den Phasenbelag $\beta = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$. Welche Beträge haben der Längswiderstand Z' und der Querleitwert Y' ?

2.12. Berechne den Ausbreitungskoeffizienten und den Wellenwiderstand eines Kabels mit den Konstanten $R' = 50 \Omega/\text{km}$, $L' = 0,6 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 0$ und $C' = 40 \text{ nF}/\text{km}$ bei den Kreisfrequenzen a) $\omega = 314 \text{ 1/s}$ (50 Hz), b) $\omega = 1000 \text{ 1/s}$ (160 Hz), c) $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ (800 Hz) und d) $\omega = 25000 \text{ 1/s}$ (4000 Hz).

2.13. Ausgehend von den Gleichungen $Z_L = |Z_L| e^{j\varphi}$ und $\gamma = \alpha + j\beta$ erhält man für die Leitungskonstanten die Ausdrücke

$$R' = Z_L(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)$$

$$Z' = \frac{Z_L}{\omega} (\beta \cos \varphi + \alpha \sin \varphi)$$

$$G' = \frac{1}{Z_L} (\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi)$$

$$C' = \frac{1}{\omega Z_L} (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi).$$

Diese Beziehungen sind aus den eingangs genannten Gleichungen herzuleiten.

2.14. Berechne die Leitungskonstanten R' , L' , G' und C' mit den in Aufgabe 2.13 genannten Formeln für eine Leitung, deren Ausbreitungskoeffizient $\gamma = 0,03 e^{j50^\circ} \text{ 1/km}$ und Wellenwiderstand $Z_L = 900 e^{-j20^\circ} \Omega$ betragen ($\omega = 5000 \text{ 1/s}$).

2.15. Eine Starkstromleitung (50 Hz) hat den Dämpfungsbelag $\alpha = 0,3 \text{ mNp/km}$ und den Phasenbelag $\beta = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/km}$ sowie den Wellenwiderstand $Z_L = 600 e^{-j3^\circ} \Omega$. Berechne R' , L' , G' und C' mit den in Aufgabe 2.13 genannten Formeln.

2.16. Welche Konstanten R' , L' , G' und C' hat eine Fernsprechleitung mit dem Ausbreitungskoeffizienten $\gamma = 75 \cdot 10^{-3} e^{j50^\circ} \text{ 1/km}$ und dem Wellenwiderstand $Z_L = 400 e^{-j40^\circ} \Omega$ bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ (unter Benutzung der in Aufgabe 2.13 genannten Formeln)?

2.2. Näherungsweise Berechnung häufig vorkommender Sonderfälle

Für dickdrähtige Fernmeldeleitungen:

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \quad \alpha \approx \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' Z_L \right); \quad \beta \approx \omega \sqrt{L' C'}$$

Für Fernmeldekabel:

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}}; \quad \alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{R' \omega C'}{2}}; \quad \varphi = -45^\circ$$

Für Gleichstromleitungen:

$$Z_L = \sqrt{\frac{R'}{G'}}; \quad \alpha = \sqrt{R' G'}$$

Für die verlustlose Leitung:

siehe den besonderen Abschnitt 2.5.

Für die vereinfachte Berechnung in der Praxis werden gern Näherungsformeln verwendet. Insbesondere ist bei Freileitungen und Koaxialkabeln $R' \ll \omega L'$ und die Ableitung $G' \ll \omega C'$. Dadurch vereinfacht sich die Gleichung für den Wellenwiderstand, der sich nunmehr allein aus Induktivität und Kapazität berechnet. In besonderem Maße erleichtern sich dabei die Berechnung des Dämpfungsbelags α und des Phasenbelags β , die sich direkt aus den Grundgrößen der Leitung ergeben.

Bei den aus dünnen Drähten bestehenden Fernmeldekabeln ist in umgekehrter Weise $\omega L' \ll R'$ und $G' \ll \omega C'$, womit sich ebenfalls stark vereinfachte Formeln ergeben.

Bei Gleichstromleitungen entfallen schließlich induktiver Widerstand und kapazitiver Leitwert vollständig ($\omega L' = \omega C' = 0$), so daß allein die durch den ohmschen Widerstand und die Ableitung bedingten Wirkverluste verbleiben.

2.17. Welche Ausdrücke für den Wellenwiderstand und den Ausbreitungskoeffizienten ergeben sich für eine völlig verlustfreie Wechselstromleitung ($R' = G' = 0$)?

2.18. Welche Werte ergeben sich für den Dämpfungsbelag und den Wellenwiderstand einer Gleichstromleitung mit $R' = 20 \Omega/\text{km}$?

2.19. Wie kommt die Näherungsformel für den Dämpfungsbelag eines Kabels $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{R' \omega C'}{2}}$ zustande? (Hinweis: Auszugehen ist von $\gamma = \sqrt{Z' Y'}$ mit $G' = L' = 0$.)

2.20. Berechne für Aufgabe 2.1 b) und c) den Betrag des Wellenwiderstandes Z_L , den Dämpfungsbelag α und den Phasenbelag β nach den angegebenen Näherungsformeln und stelle die Abweichungen vom genauen Wert in Prozenten fest.

2.21. Ein Fernsprechkabel hat bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ den Dämpfungsbelag $\alpha = 38 \text{ mNp/km}$ und den Wellenwiderstand

$Z_L = 360 \Omega$. Wie groß sind bei näherungsweiser Berechnung Widerstands- und Kapazitätsbelag R' bzw. C' ?

2.22. Eine Freileitung hat den Kapazitätsbelag $C' = 8 \text{ nF/km}$ und den Phasenbelag $\beta = 20 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$. Wie groß ist bei näherungsweiser Berechnung und $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ der Wellenwiderstand Z_L ?

2.23. Zu berechnen ist der Ausbreitungskoeffizient γ a) für eine aus 1,5 mm Kupferdraht bestehende Freileitung mit $R' = 20,1 \Omega/\text{km}$, $L' = 2,3 \text{ mH/km}$, $G' = 1 \mu\text{S/km}$ und $C' = 5,1 \text{ nF/km}$ sowie b) für ein aus gleich dickem Draht bestehendes Kabel mit $L' = 0,7 \text{ mH/km}$, $G' = 1 \mu\text{S/km}$ und $C' = 35 \text{ nF/km}$ bei jeweils $\omega = 5000 \text{ 1/s}$.

2.24. Ein zweiadriges Fernmeldekabel (Kupfer, Durchmesser 0,6 mm, Kabellänge 1 km) hat den Kapazitätsbelag $C' = 35 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$. a) Welche Werte haben Wellenwiderstand, Dämpfungs- und Phasenbelag bei der Kreisfrequenz 5000 1/s unter Anwendung der Näherungsformeln? b) Weshalb beträgt hier

die Nacheilung des Wellenwiderstandes $\varphi = -45^\circ$?

2.25. Ein Kabel hat die Kreisfrequenz $\omega_1 = 5000 \text{ 1/s}$, den Wellenwiderstand $Z_L = 350 \Omega$ sowie den Dämpfungs- und Phasenbelag $\alpha_1 = \beta_1 = 0,050 \text{ 1/km}$. Welche Werte haben diese Größen bei der Kreisfrequenz a) 2000 1/s , b) 10000 1/s und c) 50000 1/s ?

2.26. Ein zweiadriges, 1 km langes Kabel mit Kupferdrähten hat bei der Kreisfrequenz $\omega = 20000 \text{ 1/s}$ den Kapazitätsbelag $C' = 31 \text{ nF/km}$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 300 \Omega$. Welchen Durchmesser d haben die Adern? ($\rho_{Cu} = 0,0178 \Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$)

2.27. Bei der Frequenz $f = 1500 \text{ Hz}$ ist der Wellenwiderstand eines Kabels $Z_L = 280 \Omega$

und der Widerstandsbelag $R' = 35 \Omega/\text{km}$. Wie groß ist der Kapazitätsbelag C' ?

2.28. Ein Ortskabel hat den Widerstandsbelag $R' = 65 \Omega/\text{km}$, den Kapazitätsbelag $C' = 41 \text{ nF/km}$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 458 \Omega$. a) Für welche Frequenz gelten diese Werte? b) Welchen Wert hat der Dämpfungsbelag?

2.29. Bei der Frequenz $f = 1500 \text{ Hz}$ beträgt der Wellenwiderstand eines Kabels $Z_L = 350 \Omega$. Wie groß ist der Widerstandsbelag, wenn der Kapazitätsbelag $C' = 30,3 \text{ nF/km}$ ist?

2.30. Der Wellenwiderstand einer Fernsprech-Freileitung beträgt 400Ω . Wie groß ist der Kapazitätsbelag, wenn der Induktivitätsbelag $1,5 \text{ mH/km}$ beträgt?

2.3. Spannung, Strom und Widerstand auf Leitungen

Allgemeine Leitungsgleichungen:

$$U_x = \frac{1}{2} [(U_e + Z_L I_e) e^{-\gamma x} + (U_e - Z_L I_e) e^{\gamma x}]$$

$$I_x = \frac{1}{2Z_L} [(U_e + Z_L I_e) e^{-\gamma x} - (U_e - Z_L I_e) e^{\gamma x}]$$

Im Fall der Anpassung gilt:

$$U_a = U_e e^{-\frac{x}{l}}; \quad I_a = I_e e^{-\frac{x}{l}}$$

$$U_a = U_e e^{-a}; \quad I_a = I_e e^{-a}$$

$$a = \ln \frac{U_e}{U_a}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta}$$

| |
|-----------------------------------|
| $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$ |
| $1 \text{ dB} = 0,115 \text{ Np}$ |

| Größe | Zeichen |
|--|------------------|
| Entfernung vom Leitungseingang | x |
| Spannung und Strom am Eingang bzw. Ausgang der Leitung | U_e, I_e |
| | U_a, I_a |
| desgl. an einer beliebigen Stelle | U_x, I_x |
| Wellenwiderstand | Z_L |
| Eingangswiderstand bei Leerlauf bzw. Kurzschluß | Z_{eL}, Z_{eK} |
| Dämpfungsmaß | $a = \alpha l$ |
| Ausbreitungsmaß | $g = \gamma l$ |
| Wellenlänge | λ |
| Phasengeschwindigkeit | v |

Spannung und Strom breiten sich mit der Phasengeschwindigkeit v wellenförmig auf der Leitung aus (Bild 2.2). Bei nicht zu langer Leitung wird die am Leitungsende an kommende Spannungs- bzw. Stromwelle reflektiert und läuft unter weiterer Abnahme ihrer Amplitude nach dem Leitungsanfang zurück. Für jede Einzelwelle ist in jedem Punkt der Leitung der Quotient aus Spannung Strom konstant und gleich dem Wellenwiderstand Z_L . In den all-

gem einen Leitungsgleichungen stellt der erste Summand die hinlaufende, der zweite Summand die rückläufige Welle dar.¹⁾ Die Reflexion und damit die rückläufige Welle verschwinden bei relativ langen Leitungen und im Fall der Anpassung, d.h., wenn die Leitung mit dem

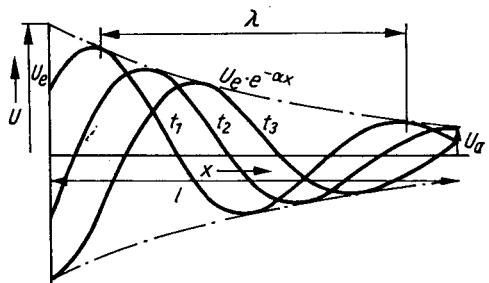


Bild 2.2. Verlauf der Spannung im Fall der Anpassung und Lage der Spannungswelle in 3 aufeinanderfolgenden Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$

Wellenwiderstand Z_L abgeschlossen wird. Die Amplituden beider Wellen nehmen exponentiell mit der Entfernung x vom Ausgangspunkt ab (Bild 2.2). Der Exponent ist das Dämpfungsmaß $a = \alpha x$. Gleichzeitig eilt der Winkel von Spannung und Strom gegenüber dem Wert am Anfang der Leitung um das Phasenmaß $b = \beta x$ nach. Für $\beta x = 2\pi$ ist der Anfangswert wieder erreicht. Diese Strecke x entspricht der Wellenlänge λ . Spannungs- und Stromwellen bewegen sich auf der Leitung mit der Phasengeschwindigkeit $v = \omega/\beta$. Das Dämpfungsmaß a ist gleich dem natürlichen Logarithmus des Verhältnisses der Spannungen am Anfang und Ende der Leitung und wird mit der Bezeichnung Neper (Np) versehen. Das Dezibel (dB) ist gleich dem 20fachen dekadischen Logarithmus des Spannungsverhältnisses. Zur Umrechnung dienen die angegebenen Beziehungen.

2.31. An Hand der allgemeinen Leitungsgleichungen ist zu bestätigen, daß der Wellenwiderstand gleich dem Verhältnis von Spannung und Strom der hinlaufenden oder auch der rückläufigen Welle ist.

2.32. Aus den allgemeinen Leitungsgleichungen ist der Sonderfall $U_a = U_e e^{-\alpha l}$ (Amplitude der Spannungswelle am Leitungsende) herzuleiten.

2.33. Wie entsteht die Gleichung $v = \frac{\omega}{\beta}$ aus der Gleichung $\lambda = -\frac{2\pi}{\beta}$?

2.34. Das in Dezibel ausgedrückte Dämpfungsmaß berechnet sich nach der Gleichung $a_{dB} = \lg \frac{U_e}{U_a}$. Durch Vergleich mit der Glei-

chung $a_{Np} = \ln \frac{U_e}{U_a}$ ist der Umrechnungsfaktor von Np in dB herzuleiten.

2.35. Aus der allgemeinen Leitungsgleichung folgt der Eingangswiderstand bei Leerlauf am Leitungsende $Z_{eL} = Z_L \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}$. Wie kommt diese Formel zustande?

2.36. Aus der allgemeinen Leitungsgleichung folgt der Eingangswiderstand bei Kurzschluß am Leitungsende $Z_{eK} = Z_L \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}$. Wie kommt diese Gleichung zustande?

In den folgenden Aufgaben 2.37 bis 2.49 wird der Fall der Anpassung vorausgesetzt:

2.37. Wie groß ist die Dämpfung in Neper und Dezibel, wenn am Anfang einer Leitung

¹⁾ Die allgemeinen Leitungsgleichungen beschreiben das stationäre Verhalten sinusförmiger Spannungen und Ströme, d.h. im eingeschwungenen Zustand. Einschwingvorgänge und einmalige Spannungsstöße, Impulse und Impulsfolgen werden hier nicht betrachtet. (Über die Behandlung aperiodischer Vorgänge und Impulse s. 4.3. FOURIER-Integrale und 5. LAPLACE-Transformation.)

die Spannung U_e und am Ende die Spannung U_a gemessen wird?

- a) $U_e = 120 \text{ V}$; $U_a = 115 \text{ V}$
- b) $U_e = 60 \text{ V}$; $U_a = 25 \text{ V}$
- c) $U_e = 2,72 \text{ V}$; $U_a = 1 \text{ V}$

2.38. Wie groß ist die Spannung am Ausgang einer 120 km langen Fernsprechleitung, wenn am Eingang die Spannung $U_e = 60 \text{ V}$ liegt und der Dämpfungsbelag a) 6 mNp/km, b) 45 mNp/km und c) 125 mNp/km beträgt?

2.39. Die Dämpfung einer 250 km langen Starkstromleitung beträgt 0,75 dB; wie groß ist die Eingangsspannung, wenn am Ausgang 225 V gemessen werden?

2.40. Wie lang ist ein Fernsprechkabel, wenn der Dämpfungsbelag 72 mNp/km und die Dämpfung 20 dB betragen?

2.41. Wie lang ist eine Fernsprechleitung, wenn die Spannungen am Anfang bzw. Ende der Leitung $U_e = 65 \text{ V}$ bzw. $U_a = 45 \text{ V}$ und der Dämpfungsbelag $\alpha = 4,5 \text{ mNp/km}$ betragen?

2.42. Der Dämpfungsbelag einer Kupferfreileitung bei der Frequenz 100 kHz steigt von a) 22 mNp/km (bei trockenem Wetter) auf b) 100 mNp/km (bei starkem Rauhreif) an. Welche Spannung U_a wird am Ausgang der 25 km langen Leitung in beiden Fällen gemessen, wenn am Eingang die Spannung $U_e = 60 \text{ V}$ liegt?

2.43. Bei der Frequenz $f = 60 \text{ kHz}$ sinkt die Spannung am Ende einer 80 km langen Bronzeleitung von 11,0 V (trockenes Wetter) auf 1,8 V (Rauhreif), wenn die Eingangsspannung 100 V beträgt. Welche Werte hat in beiden Fällen der Dämpfungsbelag?

2.44. Am Ausgang einer Leitung besteht bei dem Ausbreitungsmaß $g = 1,8 e^{j30^\circ}$ die Spannung $U_a = 15e^{-j60^\circ} \text{ V}$. Wie groß ist die Spannung am Eingang?

2.45. Welchen Wert hat die Spannung am Ende einer 80 km langen Leitung, wenn sie am Anfang a) 120 V und b) $40e^{j20^\circ} \text{ V}$ beträgt und der Ausbreitungskoeffizient in beiden Fällen $\gamma = 0,02e^{-j20^\circ}$ ist?

2.46. Wenn an den Eingang einer 100 km langen Leitung die Spannung $U_e = 50 \text{ V}$ gelegt wird, beträgt sie am Ausgang nur noch

25 V und eilt dort (bei Anpassung) um den Winkel 40° gegenüber dem Eingang nach. Wie groß sind das Ausbreitungsmaß, das Dämpfungs- und Phasenmaß a und b sowie die entsprechenden Beläge?

2.47. Eine 150 km lange Fernsprechleitung hat die Konstanten $R' = 30 \Omega/\text{km}$, $L' = 0,6 \text{ mH/km}$, $C' = 30 \text{ nF/km}$ und $G' = 0,5 \mu\text{S/km}$. Sie wird mit 60 V gespeist und ist mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen. Welche Spannung ergibt sich am Leitungsende bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$?

2.48. Bezeichnen P_e und P_a die am Anfang und Ende der Leitung gemessenen Leistungen, so ist $a = 10 \lg \frac{P_e}{P_a}$, wobei \lg den dekadischen Logarithmus bedeutet. Es ist zu beweisen, daß sich hierbei das Dämpfungsmaß a in dB ergibt.

2.49. Wie groß ist die an den Belastungswiderstand $Z_a = Z_L$ abgegebene Wirkleistung im Verhältnis zu der am Leitungseingang aufgewandten Leistung, wenn das Dämpfungsmaß a) $a = 0,1$, b) $a = 0,5$, c) $a = 1$ und d) $a = 2$ ist?

2.50. Ein Kabel hat bei der Frequenz $f = 1000 \text{ Hz}$ den Widerstandsbelag $R' = 74 \Omega/\text{km}$ und den Kapazitätsbelag $C' = 35 \text{ nF/km}$. Wie groß sind näherungsweise der Wellenwiderstand Z_L und die Phasengeschwindigkeit v ?

2.51. Von einer kupfernen Freileitung sind bekannt: $R' = 7,4 \Omega/\text{km}$, $L' = 2,3 \text{ mH/km}$, $G' = 0,8 \mu\text{S/km}$ und $v = 2,9 \cdot 10^6 \text{ km/s}$. Hieraus sind näherungsweise zu berechnen: der Kapazitätsbelag C' , der Wellenwiderstand Z_L und der Dämpfungsbelag α .

2.52. Eine Freileitung hat den Induktivitätsbelag $L' = 1,8 \text{ mH/km}$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 500 \Omega$. Wie groß sind bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$ und näherungsweiser Berechnung die Phasengeschwindigkeit v und die Wellenlänge λ ?

2.53. Bei welcher Frequenz hat ein dünnes Kabel mit dem Widerstandsbelag $R' = 35 \Omega/\text{km}$ und dem Kapazitätsbelag $C' = 45 \text{ nF/km}$ nach der Näherungsformel den Wellenwiderstand $|Z_L| = 250 \Omega$ und wie groß sind dann Phasengeschwindigkeit v und Wellenlänge λ ?

- 2.54. Eine Freileitung hat den Wellenwiderstand $|Z_L| = 450 \Omega$. Wie groß sind nach den Näherungsformeln Induktivitäts- und Kapa-

zitätsbelag, wenn die Phasengeschwindigkeit $v = 260\,000 \text{ km/s}$ beträgt?

2.4. Anpassung und Reflexion

Formeln:

$$p = \frac{Z_a - Z_L}{Z_a + Z_L}$$

$$U_a = U'_a + U''_a = (1 + p) U'_a$$

$$I_a = I'_a + I''_a = (1 - p) I'_a$$

$$Z_L = \frac{U'_x}{I'_x} = - \frac{U''_x}{I''_x}$$

$$p = \frac{U''}{U'}$$

$$Z_e = Z_L \frac{e^{\frac{jx}{\lambda}} + p e^{-\frac{jx}{\lambda}}}{e^{\frac{jx}{\lambda}} - p e^{-\frac{jx}{\lambda}}}$$

| Größe | Zeichen |
|--|----------------|
| Spannung und Strom am Ausgang der Leitung | U_a, I_a |
| Spannung und Strom der am Leitungsausgang ankommenden Welle | U'_a, I'_a |
| desgl. der am Leitungsausgang reflektierten Welle | U''_a, I''_a |
| desgl. der reflektierten Welle am Leitungseingang | U''_e, I''_e |
| desgl. der hinlaufenden Welle in beliebiger Entfernung x vom Leitungseingang | U'_x, I'_x |
| Reflexionsfaktor und sein Betrag | $p, p $ |
| Eingangswiderstand | Z_e |
| Abschlußwiderstand | Z_a |
| Wellenwiderstand | Z_L |

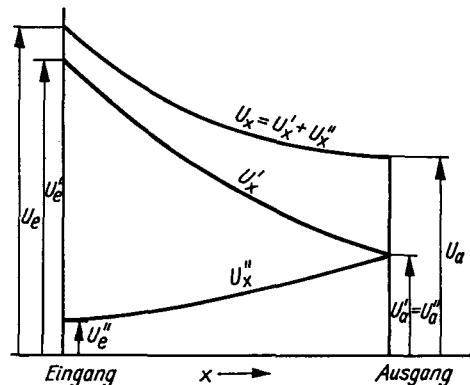


Bild 2.3. Verlauf der Spannungsamplitude bei vollständiger Reflexion (Leerlauf) am Leitungsende ($p = 1$)

Schließt die Leitung mit einem Widerstand $Z_a = \frac{U_a}{I_a}$ ab, der nicht gleich ihrem Wellenwiderstand Z_L ist, so wird die am Leitungsausgang ankommende Spannungs- bzw. Stromwelle teilweise oder vollständig reflektiert. Das Verhältnis aus dem reflektierten und ankommenden Anteil der Welle ist der Reflexionsfaktor p . Er ist im allgemeinen eine komplexe Größe. Spannung U_a und Strom I_a am Leitungsausgang setzen sich somit aus je 2 Anteilen U'_a und U''_a bzw. I'_a und I''_a zusammen (Bild 2.3). Im Falle der Anpassung sind p und daher auch U''_a und I''_a gleich 0. Der von der reflektierten Welle nach dem Leitungseingang zurückkehrende Rest kann in vielen Fällen vernachlässigt werden.

2.55. Die Spannung am Anfang einer Leitung ist $U' = 100 \text{ V}$, die Dämpfung ist $\alpha = 1,2$ und der Reflexionsfaktor $p = 0,6$. Welchen Wert hat die Gesamtspannung am Leitungsausgang, wenn alle Werte reell sind?

2.56. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe die Gesamtspannung U_e am Eingang der Leitung?

2.57. Wie groß ist der Reflexionsfaktor, wenn der Abschlußwiderstand die Werte a) $Z_a = Z_L$, b) $Z_a = 1,5Z_L$, c) $Z_a = Z_L$ und d) $Z_a = 0,5Z_L$ annimmt?

2.58. Ein Kabel hat den Wellenwiderstand $Z_L = 600e^{-j40^\circ} \Omega$ und schließt mit dem Widerstand $Z_a = 400 \Omega$ (reell) ab. Wie groß ist der Reflexionsfaktor?

2.59. Eine Leitung hat den Wellenwiderstand $Z_L = 600e^{-j45^\circ} \Omega$ und den Reflexionsfaktor $p = 0,6e^{j65^\circ}$. Welcher Widerstand Z_a schließt die Leitung ab?

2.60. Bei Fehlanpassung hat die am Leitungsende ankommende Spannungswelle den Wert $U'_a = 2,5e^{j42^\circ} \text{ V}$ mit dem Reflexionsfaktor $p = 0,7e^{-j58^\circ}$. Wie groß ist die Gesamtspannung am Leitungsende?

2.61. Die Spannungswelle am Ende einer Leitung mit $Z_L = 600e^{-j45^\circ} \Omega$ hat den Wert $U'_a = 40e^{-j30^\circ} \text{ V}$. Wie groß sind Gesamtspannung und Gesamtstrom am Leitungsende, wenn der Abschlußwiderstand $Z_a = 800e^{-j30^\circ} \Omega$ ist?

2.62. Die am Leitungsende ankommende Spannungswelle hat die Amplitude $50e^{j45^\circ} \text{ V}$, die der reflektierten Welle ist $8,5e^{j20^\circ} \text{ V}$. Wie groß ist der Reflexionsfaktor?

2.63. Der Eingangswiderstand einer Leitung ist beim Ausbreitungsmaß $g = 1$ das 1,2fache des Wellenwiderstandes. Wie groß ist der Abschlußwiderstand im Verhältnis zum Wellenwiderstand?

2.64. In welchem Verhältnis $x = \frac{Z_a}{Z_L}$ stehen Abschlußwiderstand Z_a und Wellenwiderstand Z_L einer Leitung zueinander, wenn in-

folge Fehlanpassung die abgegebene Leistung nur die Hälfte ihres Maximalwertes beträgt? Alle Größen seien als reell angenommen.

2.65. Zwischen welchen Grenzen kann sich das Verhältnis $x = \frac{Z_a}{Z_L}$ aus dem Abschlußwiderstand Z_a und dem Wellenwiderstand Z_L bewegen, wenn bei der Übertragung ein Leistungsverlust von 10% in Kauf genommen wird?

2.66. Eine 80 km lange Freileitung hat den Wellenwiderstand $Z_L = 480e^{-j20^\circ} \Omega$, schließt mit dem Widerstand $Z_a = 500e^{j0^\circ} \Omega$ ab und hat den Ausbreitungskoeffizienten $\gamma = (5+j12) \times 10^{-3} \text{ 1/km}$. Wie groß sind die Spannungen U_e und U_a , wenn am Eingang die Spannung $U'_e = 100e^{j0^\circ} \text{ V}$ liegt?

2.67. Am Ausgang einer Leitung werden bei Leerlauf die Spannung $U_a = 170 \text{ V}$ und bei Kurzschluß der Strom $I_a = 0,3 \text{ A}$ gemessen. Wie groß ist der Wellenwiderstand?

2.68. Eine Leitung hat den Wellenwiderstand $Z_L = 550 \Omega$. Im Falle der Anpassung fließt der Strom $I_a = 50 \text{ mA}$. a) Wie groß ist die abgegebene Leistung bei Anpassung? Wie groß ist die Leistung bei gleich großer ankommender Stromwelle I'_a , aber Fehlanpassung mit dem Abschlußwiderstand b) $Z_a = 300 \Omega$, c) 450Ω , d) 650Ω und e) 1000Ω . Was ist über den Verlauf des Leistungsmaximums zu sagen?

2.69. Eine Leitung gibt bei Abschluß mit dem Wellenwiderstand $Z_L = 500 \Omega$ die Leistung $P_{\max} = 0,288 \text{ W}$ ab. Welchen Betrag hat der Abschlußwiderstand Z_a , wenn lediglich $0,24 \text{ W}$ abgegeben werden?

2.70. Eine Leitung wird als „elektrisch lang“ bezeichnet, wenn die Gesamtdämpfung den Wert $\alpha = 2$ überschreitet. In welchem Verhältnis stehen dabei die Amplitude der primären Spannungswelle U'_e zu derjenigen U''_e , die nach Totalreflexion am anderen Ende wieder zum Eingang zurückkehrt? In welchem Verhältnis stehen die entsprechenden Leistungen?

2.5. Verlustlose Hochfrequenz-Leitung

Formeln:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega \sqrt{L'C'}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$$

$$Z_L = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$$

$$Z_{eK} = jZ_L \tan \beta l$$

$$Z_{eL} = -jZ_L \cot \beta l$$

Für symmetrische HF-Leitungen:

$$Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{2a}{d} \quad (\text{Bild 2.4})$$

Für koaxiale HF-Kabel:

$$Z_L = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} \quad (\text{Bild 2.5})$$

Bei sehr hohen Frequenzen sind induktiver und kapazitiver Widerstand $\omega L'$ bzw. $1/\omega C'$ so groß, daß die Wirkkomponenten R' bzw. G' , besonders bei kurzen Leitungen, vernachlässigt werden können. Man spricht daher in diesem Fall von verlustlosen Leitungen. Sie bringen einige rechnerische Vereinfachungen mit sich: der Wellenwiderstand Z_L ist reell, der Dämpfungsbelag $\alpha = 0$, der Ausbreitungskoeffizienten γ ist rein imaginär und gleich dem Phasenbelag β , die Phasengeschwindigkeit v wird frequenzunabhängig.

Je nach Leitungslänge und der Art des Leitungsabschlusses treten jedoch einige Besonderheiten auf. An dieser Stelle werden nur die Fälle der Anpassung, des Leerlaufes und des Kurzschlusses behandelt, nicht aber Fehlanpassung und Abschluß mit Blind- oder komplexen Widerständen.

Leerlauf:

Strom- und Spannungswelle werden am Leitungsende vollständig reflektiert. Die Überlagerung der hin- und zurücklaufenden Welle ergibt eine stehende Welle (Bild 2.6), wobei am

| Größe | Zeichen | Einheit |
|---|----------------------|----------|
| Maximalwerte von Spannung und Strom | U_{\max}, I_{\max} | V, A |
| Wellenwiderstand | Z_L | Ω |
| Eingangswiderstand bei leerlaufender bzw. kurzgeschlossener Leitung | Z_{eL}, Z_{eK} | Ω |
| Phasenbelag | β | 1/m |
| Phasengeschwindigkeit | v | m/s |
| Lichtgeschwindigkeit | c | m/s |
| Wellenlänge | λ | m |
| Leiterabstand | a | mm |
| Leiterdurchmesser | d | mm |
| Durchmesser des Außenleiters | D | mm |

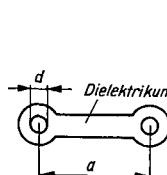


Bild 2.4. Symmetrische HF-Leitung (Querschnitt)

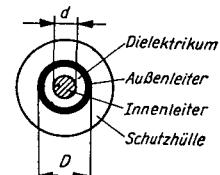
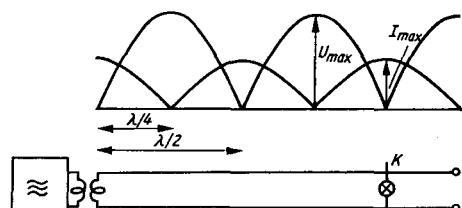


Bild 2.5. Koaxiales HF-Kabel (Querschnitt)

Bild 2.6. Abgestimmte Paralleldrahtleitung mit induktiver Ankopplung K verschiebbarer Kurzschlußbügel mit Probelampchen



Leitungsende die Spannung einen Maximalwert, den Spannungsbauch U_{\max} , der Strom aber einen Minimalwert, d.h. einen Stromknoten, bildet. Auch im übrigen Leitungsverlauf fallen die Spannungs- bzw. Strommaxima jeweils mit den Strom- bzw. Spannungsminima zusammen. Bäuche und Knoten folgen einander in Abständen von $\lambda/4$. In Luft breiten sich diese Wellen ($\mu_r = 1, \epsilon_r = 1$) mit der Lichtgeschwindigkeit c , in dichteren Medien entsprechend langsamer aus. Bei einer abgestimmten Leitung, deren Länge ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/4$ beträgt, ist das Spannungsmaximum U_{\max} gleich der Resonanzspannung U_{res} .

Kurzschluß:

Dieser Fall ist zu dem des Leerlaufes analog. Am Leitungsende befinden sich jedoch ein Strombauch und ein Spannungsknoten. Der Eingangswiderstand Z_{eK} ist ebenso wie Z_{eL} bei Leerlauf ein reiner Blindwiderstand und hat je nach dem sich ergebenden Vorzeichen kapazitiven ($-j$) oder induktiven ($+j$) Charakter.

Anpassung:

Schließt die Leitung mit einem reellen Widerstand $Z_a = Z_L$ ab, so findet keine Reflexion statt. Damit können sich auch keine stehenden Wellen bilden, und die gesamte am Eingang aufgebrachte Leistung geht verlustlos in den Verbraucher über.

2.71. Welchen Kapazitätsbelag hat eine HF-Leitung, deren Wellenwiderstand 240Ω und Induktivitätsbelag $1,2 \mu\text{H}/\text{m}$ betragen?

2.72. Welche Phasengeschwindigkeit hat eine HF-Leitung, deren Wellenwiderstand 250Ω und Kapazitätsbelag $20 \text{ pF}/\text{m}$ betragen?

2.73. Welchen Wert hat die Dielektrizitätszahl des isolierenden Mediums, in das eine Doppelleitung eingebettet ist, deren Wellenwiderstand 120Ω und Kapazitätsbelag $50 \text{ pF}/\text{m}$ betragen?

2.74. Welchen Phasenbelag hat eine HF-Leitung bei der Frequenz 500 kHz , deren Wellenwiderstand 300Ω und Induktivitätsbelag $1,8 \mu\text{H}/\text{m}$ sind?

2.75. Bei welcher Frequenz hat eine HF-Leitung den Phasenbelag $0,025 \text{ 1/m}$ und die Phasengeschwindigkeit $2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$?

2.76. Wie kommt die Gleichung für den Wellenwiderstand einer Paralleldrahtleitung $Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{r}$ zustande, wenn für den

Induktivitäts- bzw. Kapazitätsbelag die Ausdrücke $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{a}{r}$ und $C' = \frac{\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln a/r}$ gelten?

2.77. Welchen Wellenwiderstand hat eine HF-Leitung, dessen Phasenbelag $0,015 \text{ 1/m}$ und Induktivitätsbelag $1,2 \mu\text{H}/\text{m}$ betragen ($\omega = 3 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$)?

2.78. Welchen Wellenwiderstand hat ein Flachbandkabel mit dem Leiterabstand $6,4 \text{ mm}$, dem Leitungsdurchmesser $0,9 \text{ mm}$ und dem Kapazitätsbelag $13 \text{ pF}/\text{m}$?

2.79. Um wieviel Ohm nimmt der Wellenwiderstand einer Paralleldrahtleitung zu, wenn der Leiterabstand von $4,4 \text{ mm}$ auf $6,4 \text{ mm}$ vergrößert wird ($\epsilon_r = 1$)?

2.80. Außen- und Innenleiter eines konzentrischen HF-Kabels mit dem Wellenwiderstand 50Ω haben die Durchmesser $8,1 \text{ mm}$ und $2,15 \text{ mm}$. Welchen Durchmesser muß der Innenleiter haben, wenn der Wellenwiderstand bei sonst unveränderten Daten auf 75Ω gebracht werden soll?

2.81. Die im Abstand von 18 cm aufeinanderfolgenden Strom- und Spannungsmaxima einer LECHER-Leitung haben die Werte $1,5 \text{ A}$ und 345 V . Welche Werte haben a) der Wellenwiderstand, b) die Wellenlänge, c) die Frequenz, d) der Phasenbelag, e) die Induktivität und f) die Kapazität je Meter Leitungslänge?

2.82. Welchen Eingangswiderstand hat eine 80 cm lange leerlaufende Paralleldrahtleitung mit dem Wellenwiderstand 250Ω in Luft, die an einen Generator von 60 MHz angekoppelt ist?

2.83. Welche Länge hat eine leerlaufende Paralleldrahtleitung in Luft vom Wellen-

widerstand 300Ω , die bei der Frequenz 80 kHz den Eingangswiderstand 180Ω (kapazitiv) hat?

2.84. Die Strombäuche einer LECHER-Leitung haben in Luft die Abstände 15 cm und nach dem Eintauchen der Leitung in Anilin nur noch 5,8 cm Abstand. Welchen Betrag hat die Dielektrizitätszahl des Anilins?

2.85. Welchen Wellenwiderstand hat eine 10 m lange, in Luft verlaufende, kurzgeschlossene Paralleldrahtleitung, wenn ein kapazitiver Eingangswiderstand von $-j 450 \Omega$ und eine Wellenlänge von 1,20 m gemessen werden?

2.6. Anwendung hyperbolischer Funktionen

Allgemeine Leitungsgleichungen:

$$U_a = U_e \cosh g - Z_L I_e \sinh g$$

$$I_a = I_e \cosh g - \frac{U_e}{Z_L} \sinh g$$

$$U_e = U_a \cosh g + Z_L I_a \sinh g$$

$$I_e = \frac{U_a}{Z_L} \sinh g + I_a \cosh g$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{eL} \cdot Z_{eK}}$$

$$Z_e = Z_L \frac{Z_a \cosh g + Z_L \sinh g}{Z_a \sinh g + Z_L \cosh g} = Z_L \frac{Z_a + Z_L \tanh g}{Z_L + Z_a \tanh g}$$

$$Z_{eL} = Z_L \coth g; \quad Z_{eK} = Z_L \tanh g; \quad \tanh g = \sqrt{\frac{Z_{eK}}{Z_{eL}}}$$

Die Leitungsgleichungen gewinnen an Übersichtlichkeit und Einfachheit, wenn sie mit Hilfe von Hyperbelfunktionen formuliert werden. Es gelten dabei die Definitionen

$$\sinh g = \frac{e^g - e^{-g}}{2}; \quad \cosh g = \frac{e^g + e^{-g}}{2}; \quad \tanh g = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}}$$

Da das hier vorkommende Argument, das Ausbreitungsmaß g , im allgemeinen komplex ist und meist nur Tafeln für reelles Argument vorliegen, müssen die Funktionswerte durch Zwischenformeln ermittelt werden. Über deren Handhabung siehe die Aufgaben im Abschnitt 1.3.

2.89. Aus dem zweiten Gleichungspaar ist die Gleichung für den Eingangswiderstand Z_e herzuleiten.

2.90. Aus der Gleichung für den Eingangswiderstand Z_e ist der Ausdruck für den Wellenwiderstand Z_L herzuleiten.

2.86. Wie verändert sich der Eingangswiderstand in Aufgabe 2.85, wenn bei sonst unveränderten Daten die Leitung um $\lambda/4$ verlängert wird?

2.87. Bei welcher Frequenz hat eine 6 m lange, in Luft verlaufende, kurzgeschlossene LECHER-Leitung vom Wellenwiderstand 320Ω einen induktiven Eingangswiderstand von 1000Ω ?

2.88. Welche Länge hat die in Aufgabe 2.85 genannte kurzgeschlossene Leitung, wenn bei sonst unveränderten Daten der Eingangswiderstand 450Ω induktiv ist?

| Größe | Zeichen |
|---------------------------------|--------------|
| Eingangswiderstand | Z_e |
| Abschlußwiderstand | Z_a |
| Eingangswiderstand bei Leerlauf | Z_{eL} |
| desgl. bei Kurzschluß | Z_{eK} |
| Ausbreitungsmaß | $g = a + jb$ |
| Wellenwiderstand | Z_L |

2.91. Aus den im Abschnitt 2.4. genannten Gleichungen für p und Z_e ist die Gleichung für den Eingangswiderstand Z_e herzuleiten.

2.92. Aus den im Abschnitt 2.4. angegebenen allgemeinen Leitungsgleichungen ist das erste Gleichungspaar herzuleiten.

2.93. In welcher Weise vereinfacht sich die Gleichung für die Eingangsspannung U_e , wenn eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_L belastet wird?

2.94. Anhand des zweiten Gleichungspaares für U_e und I_e ist zu beweisen, daß der Eingangswiderstand gleich dem Wellenwiderstand ist, wenn die Leitung mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen wird. *Hinweis:* Man setze $\frac{U_a}{I_a} = Z_L$.

2.95. Welche Eingangsgrößen U_e und I_e hat eine 300 km lange Gleichstromleitung mit folgenden Daten: Widerstandsbelag $R' = 12 \Omega/\text{km}$, Ableitungsbelag $G' = 0,8 \mu\text{S}/\text{km}$, Belastung am Ausgang mit 20 mA bei 75 V?

2.96. Welcher Strom I_2 fließt am Leitungseingang, wenn bei dem Ausbreitungsmaß $g = 0,8$ am Ausgang der Kurzschlußstrom $I_a = 20 \text{ mA}$ fließt?

2.97. Eine Leitung hat den Kurzschlußwiderstand $Z_{eK} = 250e^{j15^\circ} \Omega$ und den Leerlaufwiderstand $Z_{eL} = 720e^{-j30^\circ} \Omega$. Berechne hieraus den Wellenwiderstand Z_L sowie $\tanh g$.

2.98. Die Spannungen am Eingang bzw. Ausgang einer Fernsprechleitung sind 65 V bzw. 22 V. Welche Ströme fließen am Eingang und Ausgang, wenn die Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z_L = 560 \Omega$ abschließt und $\beta = 0$ angenommen wird?

2.99. Welche Spannungen liegt im Falle der Anpassung am Leitungseingang, wenn bei Leerlauf am Ausgang die Spannung $U_a = 12 \text{ V}$ liegt und das Ausbreitungsmaß $g = 0,6 + j0,3$ beträgt?

2.100. Am Eingang einer 300 km langen Fernmeldeleitung liegt die Spannung $U_e = 150 \text{ V}$ bei einem Strom $I_e = 50 \text{ mA}$. Welche Werte haben Spannung und Strom bei dem Dämpfungsbelag $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}$ und dem Wellenwiderstand $Z_L = 3500 \Omega$ am Leitungsende, wenn $\beta = 0$ angenommen wird?

2.101. Berechne den Leerlauf- und den Kurzschlußwiderstand eines Kabels mit der Länge 15 km, dem Dämpfungsbelag $\alpha = 40 \text{ Np/km}$, dem Phasenmaß $\beta = 65 \text{ mrad/km}$

und dem Wellenwiderstand $Z_L = 650 e^{-j45^\circ} \Omega$.

2.102. Der Leerlaufwiderstand einer Fernmeldeleitung beträgt $Z_{eL} = 350e^{-j35^\circ} \Omega$ und das Ausbreitungsmaß $g = 0,4 + j0,25$. Wie groß sind Kurzschluß- und Wellenwiderstand?

2.103. Eine 200 km lange Fernsprech-Freileitung hat bei $\omega = 4000 \text{ 1/s}$ den Leerlauf- bzw. den Kurzschlußwiderstand $Z_{eL} = 850e^{-j30^\circ} \Omega$ bzw. $Z_{eK} = 500e^{j3^\circ} \Omega$. Berechne hieraus den Wellenwiderstand Z_L , den Dämpfungsbelag α und den Phasenbelag β .

2.104. Ein 10 km langes Fernsprechkabel hat den Dämpfungsbelag $\alpha = 60 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}$, den Phasenbelag $\beta = 70 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 620e^{-j40^\circ} \Omega$. Berechne hieraus den Eingangswiderstand bei Leerlauf und Kurzschluß am Leitungsende.

2.105. Welche Werte haben Leerlaufeingangswiderstand und Ausbreitungsmaß einer Fernsprechfreileitung, deren Wellenwiderstand $Z_L = 550e^{-j12^\circ} \Omega$ und Kurzschlußwiderstand $Z_{eK} = 880e^{-j3^\circ} \Omega$ betragen?

2.106. Eine Fernsprechfreileitung hat den Ausbreitungskoeffizienten $\gamma = 75 \cdot 10^{-3} e^{j50^\circ} \text{ 1/km}$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 450e^{-j40^\circ} \Omega$. Wie groß sind Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand bei den Streckenlängen a) 1 km, b) 5 km, c) 10 km und d) 100 km?

2.107. Eine Fernsprech-Freileitung hat den Wellenwiderstand $Z_L = 450e^{-j30^\circ} \Omega$ und bei Kurzschluß in 1 km Entfernung den Eingangswiderstand $Z_{eK} = 400e^{j15^\circ} \Omega$. Wie groß ist dieser bei Kurzschluß in 3 km Entfernung?

2.108. Ein Fernsprechkabel hat folgende Daten:

| | a) | b) |
|--------------------|--------------------------------------|--------------|
| $\omega =$ | 2000 1/s | 5000 1/s |
| $Z_L =$ | 553 Ω | 350 Ω |
| $\alpha = \beta =$ | 0,032 1/km | 0,050 1/km |
| | c) | |
| $\omega =$ | 50000 1/s | |
| $Z_L =$ | 111 Ω ; $\varphi = -45^\circ$ | |
| $\alpha = \beta =$ | 0,158 1/km | |

Zu berechnen sind der Leerlauf- und Kurzschlußwiderstand.

2.109. Welcher Strom I_e fließt beim Leerlauf einer Leitung, wenn der Wellenwiderstand $Z_L = 400 \Omega$ und das Ausbreitungsmaß $g = 0,8$ sowie die Eingangsspannung $\bar{U}_e = 80 \text{ V}$ betragen?

2.110. Welcher Strom I_e fließt im Anpassungsfall am Eingang einer Leitung, wenn die Spannungen $\bar{U}_e = 60 \text{ V}$, $\bar{U}_a = 2,5 \text{ V}$ und der Wellenwiderstand $Z_L = 580 \Omega$ gemessen werden?

2.111. Mit welchem Widerstand schließt eine Leitung ab, wenn am Eingang die Spannung $U_e = 60 \text{ V}$ und der Strom $I_e = 100 \text{ mA}$, der Wellenwiderstand $Z_L = 550 \Omega$ sowie das Ausbreitungsmaß $g = 0,5 + j0,2$ betragen?

2.112. Eine 80 km lange 2-mm-Freileitung hat die Daten $R' = 12 \Omega/\text{km}$, $L' = 2,2 \text{ mH}/\text{km}$, $G' = 1 \mu\text{S}/\text{km}$, $C' = 5,4 \text{ nF}/\text{km}$. Wie groß ist ihr Eingangswiderstand Z_e bei $\omega = 5000 \text{ 1/s}$, wenn sie mit dem Widerstand $Z_a = 1000e^{j30^\circ} \Omega$ abgeschlossen ist (Näherungsformeln)?

3. Vierpole

Als Vierpole werden hier elektrische Schaltungen oder Systeme mit 4 äußeren Klemmen bezeichnet, von denen jeweils 2 zu einem Klemmepaar zusammengefaßt sind, so daß nur 2 von einander verschiedene Ströme I_1 und I_2 an den Klemmen (Bild 3.1) auftreten können.

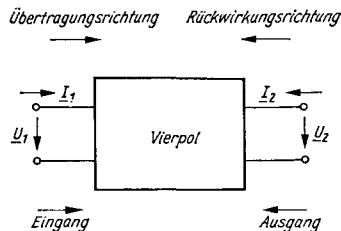


Bild 3.1. Zählpfeilrichtungen am Vierpol

Die betrachteten Vierpole sollen *linear* (es gilt das Superpositionsprinzip), *zeitinvariant* (die Klemmeneigenschaften sind unabhängig vom betrachteten Zeitpunkt) und *stabil* (wenn das Eingangssignal verschwindet, geht auch das Ausgangssignal in einer endlichen Zeit gegen Null) sein. Mit den genannten Einschränkungen läßt sich das Übertragungsverhalten des Vierpols, ohne Kenntnis des inneren Aufbaus, stets durch zwei voneinander unabhängige Gleichungen vollständig beschreiben. Die in diesen Vierpolgleichungen auftretenden Koeffizienten werden als *Vierpolparameter* bezeichnet.

Es ist zu beachten, daß sich alle nachfolgenden Gleichungen auf die in Bild 3.1 angegebenen Zählpfeilrichtungen der Klemmenspannungen und -ströme beziehen. Bei anderen Zählpfeilrichtungen treten in einigen Gleichungen andere Vorzeichen auf.

3.1. Vierpolgleichungen und -parameter

3.1.1. Widerstandsform

Formeln:

$$U_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}$$

$$U_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22}$$

| Größe | Zeichen | Einheit |
|-------------------------|---------|---------|
| Eingangsklemmenspannung | U_1 | V |
| Ausgangsklemmenspannung | U_2 | V |

| Formeln: | Größe | Zeichen | Einheit |
|--|---------------------------------|----------------|----------|
| $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$ | Eingangsstrom Ausgangsstrom | I_1 I_2 | A A |
| $Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big _{I_2=0}$ | Leerlauf-Eingangswiderstand | Z_{11} | Ω |
| $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big _{I_1=0}$ | Leerlauf-Rückwirkungswiderstand | Z_{12} | Ω |
| $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big _{I_2=0}$ | Leerlauf-Übertragungswiderstand | Z_{21} | Ω |
| $Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big _{I_1=0}$ | Leerlauf-Ausgangswiderstand | Z_{22} | Ω |

Determinante

$$\text{des Vierpolwiderstandsparameters } \Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

Die Widerstandsform ist besonders geeignet für Vierpole, bei denen der Eingang von einer Spannungsquelle gespeist wird (Bild 3.2), deren Lastwiderstand Z_a sich aus einer Reihenschaltung von Teilwiderständen zusammensetzt, sowie für die Berechnung der Reihenschaltung von Vierpolen.

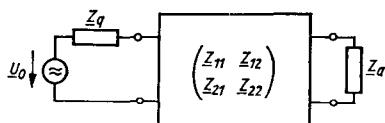


Bild 3.2. Beschalteter Vierpol mit Widerstands-matrix

3.1. Für die Schaltungen

- a) Halbglied (Bild 3.3); b) T-Glied (Bild 3.4);
 - c) II-Glied (Bild 3.5); d) Kreuzglied (Bild 3.6);
 - e) überbrücktes T-Glied (Bild 3.7)
- sind die Matrizen der Vierpol-Widerstandsparameter zu ermitteln.

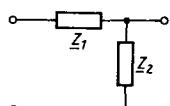


Bild 3.3. Halbglied

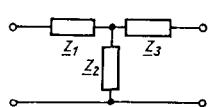


Bild 3.4. T-Glied

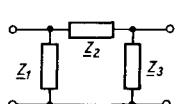


Bild 3.5. II-Glied

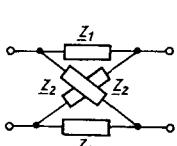


Bild 3.6.
Symmetrische Kreuzschaltung

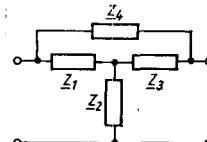


Bild 3.7.
Überbrücktes T-Glied

3.2. Wie lauten die Widerstandsparameter eines Halbgliedes nach Bild 3.3 mit

- a) $Z_1 = 6 \text{ k}\Omega$, $Z_2 = 10 \text{ k}\Omega$;
- b) $Z_1 = j 40 \text{ k}\Omega$; $Z_2 = -j 20 \text{k}\Omega$?

3.3. Aus welchen Einzelwiderständen Z_1 , Z_2 , Z_3 ist ein T-Glied aufgebaut, wenn folgende Vierpolparameter gemessen werden?

| a) | b) | c) |
|----------------------|--------------|--|
| $Z_{11} = 90 \Omega$ | 245Ω | $-j 9500 \Omega$ |
| $Z_{12} = 75 \Omega$ | 125Ω | $-j 10 \text{ k}\Omega$ |
| $Z_{21} = 75 \Omega$ | 125Ω | $-j 10 \text{ k}\Omega$ |
| $Z_{22} = 90 \Omega$ | 275Ω | $1 \text{ k}\Omega - j 10 \text{ k}\Omega$ |

Dabei ist $\omega = 10^3 \cdot 1/\text{s}$.

3.4. Eine T-Schaltung besteht aus 3 gleichen Widerständen mit je 60Ω . Welchen Wert hat die Widerstandsdeterminante?

3.5. Für eine Π -Schaltung nach Bild 3.5 sind die Widerstandsparameter zu berechnen mit

a) $Z_1 = 50 \Omega$, $Z_2 = 20 \Omega$, $Z_3 = 80 \Omega$

b) $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 10 \text{ k}\Omega$

c) $Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$, $Z_2 = j\omega L$, $Z_3 = \frac{1}{j\omega C_2}$

3.6. a) Durch Umzeichnen der Kreuzschaltung (Bild 3.6) ist nachzuweisen, daß diese mit einer Brückenschaltung identisch ist.

b) Aus $Z_{11} = 300 \Omega$ und $Z_{21} = 100 \Omega$ sind die Widerstände Z_1 und Z_2 der Brücke zu ermitteln.

3.1.2. Leitwertform

Formeln:

$$I_1 = U_1 Y_{11} + U_2 Y_{12}$$

$$I_2 = U_2 Y_{21} + U_1 Y_{22}$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0}$$

| Größe | Zeichen | Einheit |
|---------------------------------|----------|---------|
| Eingangsstrom | I_1 | A |
| Ausgangsstrom | I_2 | A |
| Eingangsklemmenspannung | U_1 | V |
| Ausgangsklemmenspannung | U_2 | V |
| Kurzschluß-Eingangsleitwert | Y_{11} | S |
| Kurzschluß-Rückwirkungsleitwert | Y_{12} | S |
| Kurzschluß-Übertragungsleitwert | Y_{21} | S |
| Kurzschluß-Ausgangsleitwert | Y_{22} | S |

$$\text{Determinante: } \Delta Y = Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}$$

Die Leitwertform ist besonders geeignet für Vierpole, bei denen der Eingang von einer Stromquelle gespeist wird (Bild 3.8), deren Lastleitwert Y_a sich aus der Parallelschaltung von Teilleitwerten zusammensetzt, sowie für die Berechnung der Parallelschaltung von Vierpolen.

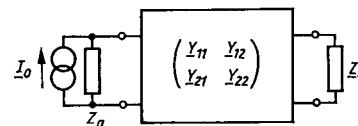


Bild 3.8. Beschalteter Vierpol mit Leitwertmatrix

3.7. Für die Schaltungen nach Bild 3.3 bis Bild 3.7 sind die Matrizen der Vierpol-Leitwertparameter zu ermitteln.

3.8. An einem Π -Glied wurden folgende Y -Parameter gemessen: $Y_{11} = 0,01 \text{ S}$, $Y_{12} = Y_{21} = -0,0033 \text{ S}$, $Y_{22} = 0,0089 \text{ S}$. Welche Werte besitzen die Widerstände des Π -Gliedes?

3.9. Wie lauten die Leitwertparameter einer aus gleich großen Widerständen bestehenden

a) T-Schaltung; b) Π -Schaltung; c) Kreuzschaltung?

3.10. Welche Y -Parameter besitzt der Vierpol nach Bild 3.9?

a) allgemein; b) für $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$, $\omega = 10^4 \cdot 1/\text{s}$?

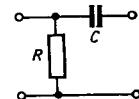


Bild 3.9. Aufgabe 3.10

3.1.3. Hybridform

Formeln:

$$U_1 = I_1 H_{11} + U_2 H_{12}$$

$$I_2 = I_1 H_{21} + U_2 H_{22}$$

$$\left(\begin{array}{c} U_1 \\ I_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} I_1 \\ U_2 \end{array} \right)$$

$$H_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0}$$

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0}$$

$$H_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0}$$

$$\text{Determinante: } \Delta H = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}$$

Die Hybridform ist besonders geeignet für Vierpole, bei denen der Eingang von einer Spannungsquelle gespeist wird, deren Lastleitwert Y_a sich aus der Parallelschaltung von Teilleitwerten zusammensetzt, für die Reihen-Parallelschaltung von Vierpolen sowie für Transistoren bei niedrigen Frequenzen (Bild 3.10).

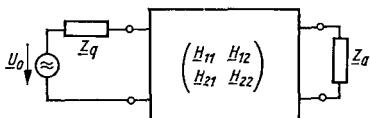


Bild 3.10. Beschalteter Vierpol mit Hybridmatrix

3.11. Wie lauten die Hybridmatrizen der Vierpole nach Bild 3.3 bis Bild 3.7?

- 3.12. Für a) ein T-Glied und
b) ein Π -Glied

aus jeweils 3 gleichen Widerständen $Z = 100 \Omega$ sind H_{11} und H_{21} zu berechnen.

3.13. Ein Halbglied nach Bild 3.3 besitzt folgende Hybridparameter:

$$H_{11}$$

$$\text{a)} - j 200 \Omega$$

$$\text{b)} + j 200 \Omega$$

$$\text{c)} (5 + j 10) \text{ k}\Omega$$

$$\text{d)} (5 - j 10) \text{ k}\Omega$$

$$H_{22}$$

$$(5 + j 10) \text{ mS}$$

$$(5 - j 10) \text{ mS}$$

$$- j 2 \text{ mS}$$

$$+ j 2 \text{ mS}$$

Für jedes der Parameterpaare sind bei $\omega = 10^4 \text{ 1/s}$ zwei Halbgliedschaltungen anzugeben.

3.1.4. Kettenform

Formeln:

$$U_1 = U_2 A_{11} + (-I_2) A_{12}$$

$$I_1 = U_2 A_{21} + (-I_2) A_{22}$$

Größe

Eingangsklemmenspannung

Eingangsstrom

Zeichen

U_1

Einheit

V

I_1

A

Formeln:

$$\left(\begin{array}{c} U_1 \\ I_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} U_2 \\ -I_2 \end{array} \right)$$

$$A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$A_{12} = \frac{U_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0}$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0}$$

$$A_{22} = \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{U_2=0}$$

$$\text{Determinante: } \Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Die Kettenform ist besonders geeignet für Vierpole, bei denen der Eingang von einer Stromquelle gespeist wird, deren Lastwiderstand sich aus der Reihenschaltung von Teilwiderständen zusammensetzt, sowie für die Berechnung der Kettenschaltung von Vierpolen (Bild 3.11). Es sei vermerkt, daß noch andere als die hier behandelten Vierpolparameter definiert werden können.

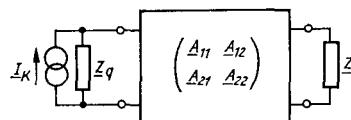


Bild 3.11. Beschalteter Vierpol mit Kettenmatrix

3.14. Wie lauten die Kettenmatrizen der Vierpole nach Bild 3.3 bis Bild 3.7?

3.15. Für die Schaltungen nach Bild 3.12 bis 3.15 sind die Kettenparameter zu ermitteln, wobei jeweils die Determinantenbedingung $\Delta A = 1$ nachzuprüfen ist.

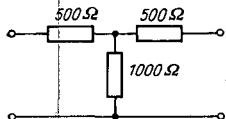


Bild 3.12. Aufgabe 3.15 a)

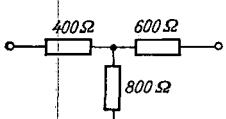


Bild 3.13. Aufgabe 3.15 b)

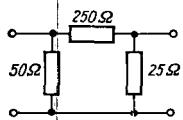


Bild 3.14. Aufgabe 3.15 c)

Größe

Ausgangsklemmenspannung

Zeichen

U_2

Einheit

V

Ausgangsstrom

I_2

A

reziproker Leerlaufspannungs-Übertragungsfaktor

A_{11}

-

Kurzschluß-Übertragungswiderstand

A_{12}

Ω

Leerlauf-Übertragungsleitwert

A_{21}

S

reziproker Kurzschlußstrom-Übertragungsfaktor

A_{22}

-

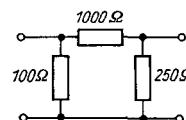


Bild 3.15. Aufgabe 3.15 d)

3.16. Für $A_{11} = 2$, $A_{12} = 3Z_1 = 60 \Omega$, $A_{21} = \frac{1}{Z_1}$ und $A_{22} = 2$ sind die Widerstände einer T-Schaltung zu berechnen.

3.17. Die in Bild 3.16 angegebene Π -Schaltung ist unter Benutzung der Kettenparameter in eine gleichwertige T-Schaltung umzuwandeln.

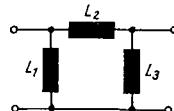


Bild 3.16. Aufgabe 3.17

3.18. Eine symmetrische T-Schaltung hat den Widerstand $Z_1 = 60 \Omega$ und den Ketten-

parameter $A_{21} = \frac{1}{300}$ S. Welche Werte haben Z_2 und Z_3 ?

3.19. Welche Widerstände besitzen eine sym-

metrische T- und Π -Schaltung, von denen die Vierpolparameter $A_{11} = 4,5$ und $A_{21} = \frac{1}{250}$ S bekannt sind?

3.2. Umrechnung der Vierpolparameter

Zwischen den verschiedenen Vierpolparametern bestehen bestimmte Zusammenhänge, die in der nachfolgenden Umrechnungstabelle zusammengestellt sind.

Tafel 3.1. Umrechnungstabelle für Vierpolparameter

| | Z | Y | H | A |
|------------|--|---|---|--|
| Z | $Z_{11} Z_{12}$ | $\frac{Y_{22}}{\Delta Y} - \frac{Y_{12}}{\Delta Y}$ | $\frac{\Delta H}{H_{22}} \frac{H_{12}}{H_{22}}$ | $\frac{A_{11}}{A_{21}} \frac{\Delta A}{A_{21}}$ |
| | $Z_{21} Z_{22}$ | $\frac{-Y_{21}}{\Delta Y} \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$ | $\frac{-H_{21}}{H_{22}} \frac{1}{H_{22}}$ | $\frac{1}{A_{21}} \frac{A_{22}}{A_{21}}$ |
| Y | $\frac{Z_{22}}{\Delta Z} - \frac{-Z_{12}}{\Delta Z}$ | $Y_{11} Y_{12}$ | $\frac{1}{H_{11}} - \frac{H_{12}}{H_{11}}$ | $\frac{A_{22}}{A_{12}} - \frac{-\Delta A}{A_{12}}$ |
| | $\frac{-Z_{21}}{\Delta Z} \frac{Z_{11}}{\Delta Z}$ | $Y_{21} Y_{22}$ | $\frac{H_{21}}{H_{11}} \frac{\Delta H}{H_{11}}$ | $\frac{-1}{A_{12}} \frac{A_{11}}{A_{12}}$ |
| H | $\frac{\Delta Z}{Z_{22}} \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ | $\frac{1}{Y_{11}} - \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$ | $H_{11} H_{12}$ | $\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{\Delta A}{A_{22}}$ |
| | $\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \frac{1}{Z_{22}}$ | $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \frac{\Delta Y}{Y_{11}}$ | $H_{21} H_{22}$ | $\frac{-1}{A_{22}} \frac{A_{21}}{A_{22}}$ |
| A | $\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \frac{\Delta Z}{Z_{21}}$ | $\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \frac{-1}{Y_{21}}$ | $\frac{-\Delta H}{H_{21}} \frac{-H_{11}}{H_{21}}$ | $A_{11} A_{12}$ |
| | $\frac{1}{Z_{21}} \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$ | $\frac{-\Delta Y}{Y_{21}} \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$ | $\frac{-H_{22}}{H_{21}} \frac{-1}{H_{21}}$ | $A_{21} A_{22}$ |
| ΔZ | $Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$ | $\frac{1}{\Delta Y}$ | $\frac{H_{11}}{H_{22}}$ | $\frac{A_{12}}{A_{21}}$ |
| ΔY | $\frac{1}{\Delta Z}$ | $Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$ | $\frac{H_{22}}{H_{11}}$ | $\frac{A_{21}}{A_{12}}$ |
| ΔH | $\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$ | $\frac{Y_{22}}{Y_{11}}$ | $H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$ | $\frac{A_{11}}{A_{22}}$ |
| ΔA | $\frac{Z_{12}}{Z_{21}}$ | $\frac{Y_{12}}{Y_{21}}$ | $-\frac{H_{12}}{H_{21}}$ | $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ |

3.20. Aus den Vierpolgleichungen in Widerstandsform sind die *Y*-Parameter als Funktion der *Z*-Parameter herzuleiten.

3.21. Mit Hilfe der Vierpol-Kettengleichungen sind die *H*-Parameter als Funktion der Kettenparameter zu berechnen.

3.22. Die Determinante für die *Z*-Matrix ist durch die a) *Y*-Parameter; b) *H*-Parameter; c) *A*-Parameter zu beschreiben.

3.23. Für das Halbglied nach Bild 3.17 sind aus den *Z*-Parametern die *Y*-Parameter und die *H*-Parameter zu ermitteln.

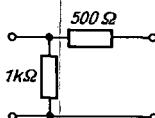


Bild 3.17. Aufgabe 3.23

3.24. Durch Umrechnen der Vierpolparameter sind die Lösungsmatrizen der Aufgaben a) 3.7 d) und 3.11 d);
b) 3.11 a) und 3.14 a);
c) 3.14 c) und 3.1 c)
auf Richtigkeit zu überprüfen.

3.25. Wie lautet die zur Widerstandsmatrix

$$Z = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ k}\Omega \text{ gehörende Kettenmatrix?}$$

3.26. Die *Y*-Matrix $\begin{pmatrix} 5 + j 10 & 2 \\ -2 & 4 - j 8 \end{pmatrix} \text{ mS}$ ist in eine *Z*- und in eine *H*-Matrix umzurechnen.

3.27. Eine aus 3 gleich großen Einzelwiderständen bestehende Π -Schaltung hat den Parameter $Z_{11} = 40 \Omega$. Welche Werte besitzen die zugehörigen Kettenparameter und der Widerstand *Z*?

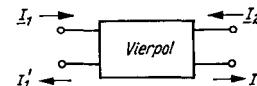
3.28. Wie groß sind die 3 Widerstände einer Π -Schaltung, wenn folgende Parameter bekannt sind: $Z_{11} = Z_{22} = 75 \Omega$ und $A_{11} = A_{22} = 5$?

3.29. Aus welchen Widerständen besteht eine T-Schaltung, deren Determinante $\Delta Z = 8750 \Omega^2$, $A_{12} = 87,5 \Omega$ und $Z_{11} = 1,25 \Omega$ lauten?

3.3. Zusammenschaltung von Vierpolen

Bei der Zusammenschaltung von Vierpolen muß für jeden Einzelvierpol die Bedingung $I_1 = I'_1; I_2 = I'_2$ (Bild 3.18) eingehalten werden.

Bild 3.18. Klemmenströme zur Erläuterung der Zusammenschaltbedingung



3.3.1. Reihenschaltung

Die Gesamtmatrix einer Reihenschaltung von Vierpolen ergibt sich aus der Summe der Widerstandsmatrizen der Einzelvierpole. Die Einzelvierpole müssen durchgehende Verbindungen (Bild 3.19) besitzen, um die Zusammenschaltungsbedingung (Bild 3.18) nicht zu verletzen.

$$Z' + Z'' = Z$$

$$\begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z''_{11} & Z''_{12} \\ Z''_{21} & Z''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z'_{11} + Z''_{11} & Z'_{12} + Z''_{12} \\ Z'_{21} + Z''_{21} & Z'_{22} + Z''_{22} \end{pmatrix}$$

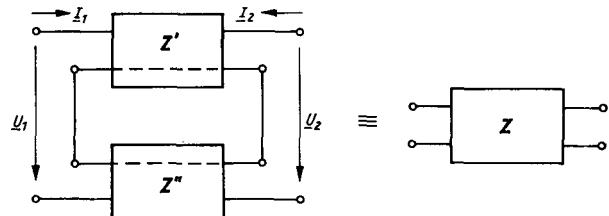


Bild 3.19. Reihenschaltung von Vierpolen

3.3.2. Parallelschaltung

Die Gesamtmatrix einer Parallelschaltung von Vierpolen ergibt sich aus der Summe der Leitwertmatrizen der Einzelvierpole. Die Einzelvierpole müssen durchgehende Verbindungen (Bild 3.20) besitzen.

$$Y' + Y'' = Y$$

$$\begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y''_{11} & Y''_{12} \\ Y''_{21} & Y''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} + Y''_{11} & Y'_{12} + Y''_{12} \\ Y'_{21} + Y''_{21} & Y'_{22} + Y''_{22} \end{pmatrix}$$

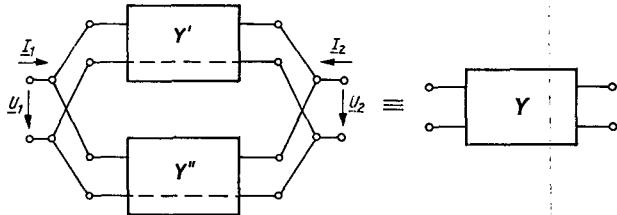


Bild 3.20. Parallelschaltung von Vierpolen

3.3.3. Reihen-Parallelschaltung

Die Gesamtmatrix einer Reihen-Parallelschaltung von Vierpolen ergibt sich aus der Summe der Hybridmatrizen der Einzelvierpole. Die Einzelvierpole müssen durchgehende Verbindungen (Bild 3.21) besitzen.

$$H' + H'' = H$$

$$\begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H''_{11} & H''_{12} \\ H''_{21} & H''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{11} + H''_{11} & H'_{12} + H''_{12} \\ H'_{21} + H''_{21} & H'_{22} + H''_{22} \end{pmatrix}$$

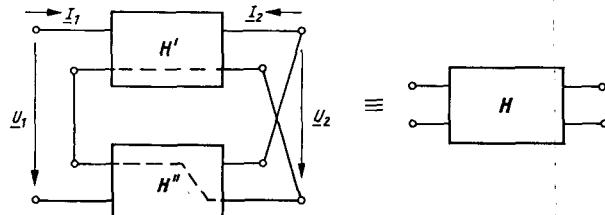


Bild 3.21.
Reihen-Parallelschaltung von Vierpolen

3.3.4. Kettenenschaltung

Die Gesamtmatrix einer Kettenenschaltung von Vierpolen ergibt sich aus dem Produkt der Kettenmatrizen der Einzelvierpole.

$$A'A'' = A$$

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{21} & A''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21} & A'_{11}A''_{12} + A'_{12}A''_{22} \\ A'_{21}A''_{11} + A'_{22}A''_{21} & A'_{21}A''_{12} + A'_{22}A''_{22} \end{pmatrix}$$

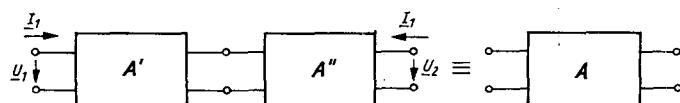


Bild 3.22.
Kettenenschaltung von Vierpolen

3.30. Zwei T-Glieder sollen in Reihe geschaltet werden. Welche Werte besitzen die

1. T-Glied

- | | Z_1 | Z_2 | Z_3 |
|----|---------------------|-----------------------|----------------------|
| a) | 10Ω | 10Ω | 10Ω |
| b) | 5Ω | 10Ω | 5Ω |
| c) | $(5 + j 10) \Omega$ | $(50 - j 100) \Omega$ | $(10 + j 20) \Omega$ |

Gesamt-Z-Matrix sowie die Einzelwiderstände der resultierenden T-Schaltung für

2. T-Glied

- | | Z_1 | Z_2 | Z_3 |
|--|----------------------|-----------------------|---------------------|
| | 10Ω | 10Ω | 10Ω |
| | 15Ω | 30Ω | 20Ω |
| | $(10 - j 20) \Omega$ | $(50 + j 600) \Omega$ | $(5 - j 10) \Omega$ |

3.31. Für die Reihenschaltung der in den Bildern 3.23 bis 3.27 dargestellten Vierpole sind die resultierenden Gesamtschaltungen und deren Einzelwiderstände zu ermitteln.

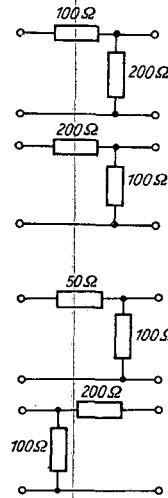


Bild 3.23. Aufgabe 3.31 a)

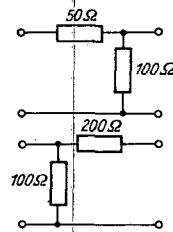


Bild 3.24. Aufgabe 3.31 b)

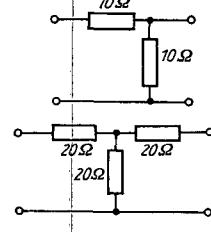


Bild 3.25. Aufgabe 3.31 c)

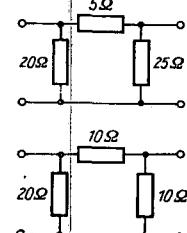


Bild 3.26. Aufgabe 3.31 d)

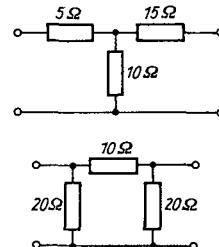


Bild 3.27. Aufgabe 3.31 e)

3.32. Wie lautet die Z-Matrix der Reihenschaltung zweier Vierpole mit den Einzelmatrizen

$$\begin{pmatrix} 15 + j 2 & 10 \\ 10 & 24 - j 4 \end{pmatrix} \Omega \text{ und } \begin{pmatrix} 5 & -j 10 \\ j 10 & 8 \end{pmatrix} \Omega ?$$

3.33. Aus welchen Widerständen bestehen die zur 1. Teilmatrix nach Aufgabe 3.32 gehörende T-Schaltung und die zur 2. Teilmatrix gehörende symmetrische Brückenschaltung?

3.34. Die in den Bildern 3.28 bis 3.31 dargestellten Vierpole sollen parallelgeschaltet werden. Zu ermitteln sind die Einzelleitwerte

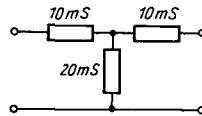


Bild 3.28. Aufgabe 3.34 a)

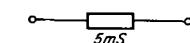


Bild 3.29. Aufgabe 3.34 b)

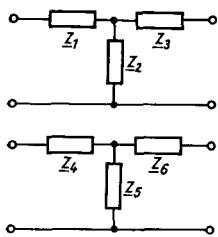


Bild 3.30. Aufgabe 3.34 c)

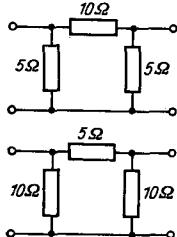


Bild 3.31. Aufgabe 3.34 d)

sowie die Y -Matrizen der resultierenden Schaltungen.

3.35. Wie lautet die Gesamtmatrix der Parallelschaltung von Vierpolen mit den folgenden Matrizen?

$$a) \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 2 \end{pmatrix} \text{k}\Omega, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1,5 & 500 \Omega \\ 1 \text{ mS} & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 10 \text{ k}\Omega & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0,15 & -0,05 \\ -0,05 & 0,25 \end{pmatrix} \text{mS}$$

$$c) \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 5 - j5 & -j10 \\ -j10 & 5 + j5 \end{pmatrix} \Omega,$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 20 + j10 & j10 \\ j10 & 5 - j5 \end{pmatrix} \text{mS}$$

3.36. Zwei Vierpole mit den Matrizen

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 20 & 100 \end{pmatrix} \Omega \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 50 \Omega & 0,2 \\ -0,2 & 4 \text{ mS} \end{pmatrix}$$

sollen parallelgeschaltet werden. Wie lauten die Y -, Z - und H -Matrix des Ersatzvierpoles?

3.37. Zwei T-Glieder sind so in Reihe zu schalten, daß die Vierpolbedingung ($I_1 = I'_1$; $I_2 = I'_2$) eingehalten wird. Die Gesamtenschaltung ist zu skizzieren. Aus der Gesamtenschaltung ist mit dem Ergebnis von Aufgabe 3.1 b) die Z -Matrix zu bestimmen und durch Addition der Z -Matrizen der Teilvierpole zu kontrollieren.

3.38. Zwei Π -Glieder sind so parallel zu schalten, daß die Vierpolbedingung ($I_1 = I'_1$; $I_2 = I'_2$) eingehalten wird. Es ist die Gesamtenschaltung zu skizzieren und daraus mit dem Ergebnis von Aufgabe 3.7 c) die Y -Matrix zu ermitteln. Durch Addition der Leitwertmatrizen der Einzelglieder ist das Ergebnis auf Richtigkeit zu überprüfen.

3.39. Für folgende Vierpol-Zusammenschaltungen sind die Gesamtenschaltung und die resultierende Matrix anzugeben:

a) Reihenschaltung:

Querwiderstand - T-Glied

b) Parallelschaltung:

Längswiderstand - Π -Glied

c) Kettenschaltung:

T-Halbglied - Π -Halbglied (Bild 3.32)

d) Kettenschaltung:

Querwiderstand - Π -Glied.

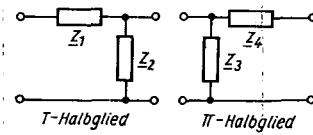


Bild 3.32.
Aufgabe 3.39 c)

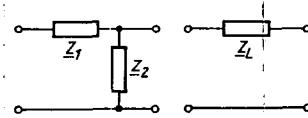


Bild 3.33.
Aufgabe 3.40

3.40. Ein Halbglied und ein Längswiderstand (Bild 3.33) sind so zusammenzuschalten, daß sich als resultierende Schaltung ein T-Glied ergibt.

a) Welche Art der Zusammenschaltung ist erforderlich?

b) Die Zusammenschaltung ist zu skizzieren.

c) Welche Matrix besitzt der Gesamtvierpol, wenn für den Längswiderstand $Z_L = 1 \text{ k}\Omega$ und für das Halbglied $Z_1 = 2 \text{ k}\Omega$ und $Z_2 = 4 \text{ k}\Omega$ gegeben sind?

3.41. Für die in den Bildern 3.34 bis 3.39 dargestellten Vierpole sind die Matrizen der Kettenschaltung zu ermitteln.

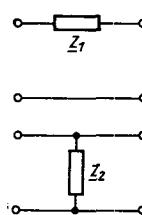


Bild 3.34. Aufgabe 4.41 a)

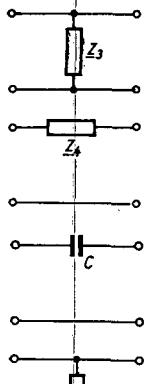


Bild 3.35. Aufgabe 3.41 b)

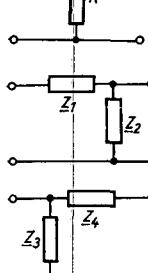


Bild 3.36. Aufgabe 3.41 c)

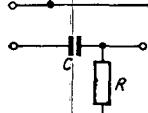


Bild 3.37. Aufgabe 3.41 d)

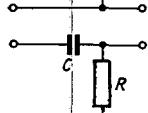


Bild 3.38. Aufgabe 3.41 e)

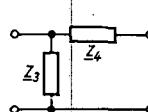


Bild 3.39. Aufgabe 3.41 f)

3.42. Wie lautet die Gesamtmatrix der Kettenschaltung von

- 2 Π -Gliedern
- 3 T-Gliedern

mit jeweils gleichen Einzelwiderständen Z ?

3.43. Welche Gesamtmatrix besitzt die Kettenschaltung von Vierpolen mit den folgenden Matrizen?

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1,5 & 1250 \Omega \\ 1 \text{ mS} & 1,5 \end{pmatrix}$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1,5 & 1300 \Omega \\ \frac{1}{800} \text{ S} & 1,75 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 250 \Omega \\ 0,26 \text{ S} & 6 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \text{ k}\Omega \\ 54 \text{ mS} & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} Z = \begin{pmatrix} 16 \text{ k}\Omega & 10 \text{ k}\Omega \\ 10 \text{ k}\Omega & 10 \text{ k}\Omega \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0,2 \text{ mS} & -0,2 \text{ mS} \\ -0,2 \text{ mS} & 0,4 \text{ mS} \end{pmatrix}$$

3.44. Durch die Reihenschaltung eines Transistors mit einem Widerstand Z_K (Bild 3.40) entsteht für den Transistorvierpol eine Stromreihengegenkopplung. Wie lauten die Z -Matrix und die H -Matrix der Gesamtschaltung

a) allgemein

b) mit $Z_K = 200 \Omega$ und

$$H_{\text{Trans}} = \begin{pmatrix} 1 \text{ k}\Omega & 5 \cdot 10^{-4} \\ 50 & 100 \mu\text{S} \end{pmatrix}?$$

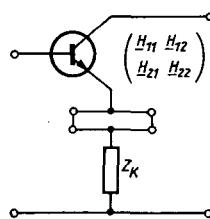


Bild 3.40. Transistor mit Stromreihengegenkopplung

3.45. Durch die Parallelschaltung eines Transistors mit einem Widerstand Z_K (Bild 3.41) entsteht für den Transistorvierpol eine Spannungsparallelgegenkopplung. Wie laufen die Y -Matrix und die H -Matrix der Gesamtschaltung

a) allgemein

b) mit $Z_K = 100 \text{ k}\Omega$ und

$$H_{\text{Trans}} = \begin{pmatrix} 1 \text{ k}\Omega & 5 \cdot 10^{-4} \\ 50 & 100 \mu\text{S} \end{pmatrix}?$$

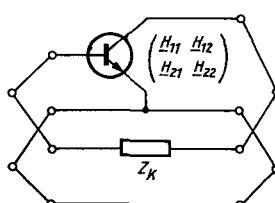


Bild 3.41. Transistor mit Spannungsparallelgegenkopplung

3.4. Vierpol-Widerstände

Die in den Vierpolgleichungen enthaltenen Parameter, die Widerstände darstellen, z.B. Z_{11} , Z_{22} , H_{11} , gelten nur für die Spezialfälle Leerlauf oder Kurzschluß. Für die Zusammenschaltung des Vierpoleinganges mit einem Generator (Spannungsquelle, Bild 3.42, oder Stromquelle, Bild 3.43) besitzt der Vierpoleingangswiderstand Z_e wesentliche Bedeutung; ebenso muß am Vierpolausgang das Verhältnis von Vierpolausgangswiderstand Z_i und Lastwiderstand Z_a berücksichtigt werden. Bedingt durch die innere Schaltung des Vierpoles ist die Größe von Z_e sowohl abhängig von den Vierpolparametern als auch vom Lastwiderstand Z_a ; genauso hängt Z_i nicht nur von den Vierpolparametern, sondern auch vom Innenwiderstand oder Quellenwiderstand Z_q des an den Eingang angeschlossenen Generators ab.

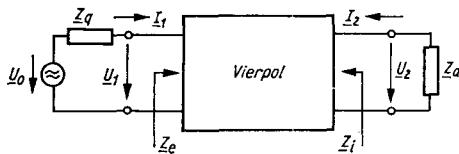


Bild 3.42. Beschalteter Vierpol mit Spannungsquelle

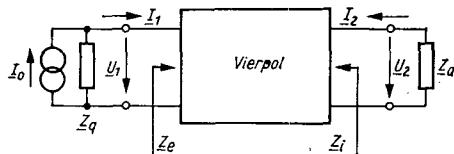


Bild 3.43. Beschalteter Vierpol mit Stromquelle

Formeln:

$$Z_e = \frac{U_1}{I_1}$$

$$Z_{eL} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_{eK} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$Z_i = \frac{U_2}{I_2}$$

$$Z_{iL} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$Z_{iK} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0}$$

$$Z_{L1} = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}}$$

$$Z_{L2} = \sqrt{Z_{iL} Z_{iK}}$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{L1} Z_{L2}}$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{eK} Z_{iL}}$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{eK} Z_{iL}}$$

Größe

Vierpol-Eingangswiderstand
- bei beliebigem Z_a

Zeichen

Z_e

- bei $Z_a = \infty$

Z_{eL}

- bei $Z_a = 0$

Z_{eK}

Vierpol-Ausgangswiderstand
- bei beliebigem Quellenwiderstand Z_q

Z_i

- bei $Z_q = \infty$

Z_{iL}

- bei $Z_q = 0$

Z_{iK}

Eingangs-Wellenwiderstand

Z_{L1}

Ausgangs-Wellenwiderstand

Z_{L2}

Wellenwiderstand des Vierpols

Z_L

Bei Widerstandsanpassung am Eingang $Z_q = Z_e$ gilt $Z_i = Z_{L2}$. Bei Widerstandsanpassung am Ausgang $Z_a = Z_i$ gilt $Z_e = Z_{L1}$. Bei Widerstandsanpassung am Eingang und am Ausgang gilt

$$Z_q = Z_e = Z_{L1}; \quad Z_a = Z_i = Z_{L2}.$$

Die Abhängigkeit der Eingangs- und Ausgangswiderstände von den Vierpolparametern ist in Tafel 3.2 zusammengestellt.

Tafel 3.2. Abhängigkeit der Ein- und Ausgangswiderstände von den Vierpol-Parametern

| | Eingangswiderstand | Ausgangswiderstand |
|-----|---|---|
| Z | $Z_e = \frac{Z_{11}Z_a + \Delta Z}{Z_{22} + Z_a}$ | $Z_i = \frac{Z_{22}Z_q + \Delta Z}{Z_{11} + Z_q}$ |
| Y | $Z_e = \frac{Y_{22} + Y_a}{Y_{11}Y_a + \Delta Y}$ | $Z_i = \frac{Y_{11} + Y_q}{Y_{22}Y_q + \Delta Y}$ |
| H | $Z_e = \frac{H_{11}Y_a + \Delta H}{H_{22} + Y_a}$ | $Z_i = \frac{H_{11} + Z_q}{H_{22}Z_q + \Delta H}$ |
| A | $Z_e = \frac{A_{12} + A_{11}Z_a}{A_{22} + A_{21}Z_a}$ | $Z_i = \frac{A_{12} + A_{22}Z_q}{A_{11} + A_{21}Z_q}$ |

- 3.46. Für den im Bild 3.44 dargestellten T-Vierpol sollen
 a) der Eingangswiderstand Z_e
 b) der Ausgangswiderstand Z_i
 ermittelt und auf die in Tafel 3.2 angegebene Form gebracht werden.

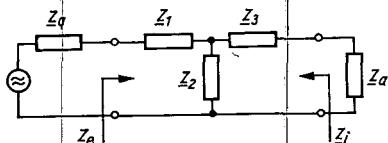


Bild 3.44. Beschalteter T-Vierpol

- 3.47. Aus den in Tafel 3.2 angegebenen Gleichungen zur Berechnung der Vierpol-Eingangs- und -Ausgangswiderstände sind die Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände Z_{eL} , Z_{eK} , Z_{iL} , Z_{iK} sowie die Eingangs- und Ausgangswellenwiderstände mit Z -, Y -, H - und A -Parametern abzuleiten und in einer Tabelle zusammenzustellen.

- 3.48. Aus den Vierpol-Widerstandsgleichungen sind die Beziehungen zur Berechnung des Vierpol-Eingangs- und -Ausgangswiderstandes mit Z -Parametern abzuleiten.

- 3.49. Für den im Bild 3.45 dargestellten Π -Vierpol sind Z_e und Z_i mit Y -Parametern
 a) allgemein
 b) für die angegebenen Werte
 zu ermitteln.

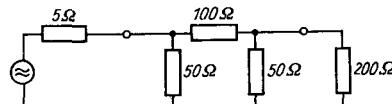


Bild 3.45. Beschalteter Π -Vierpol

- 3.50. Für die in den Bildern 3.46 bis 3.49 dargestellten T-Glieder sollen
 - die Leerlauf-Eingangs- und -Ausgangswiderstände
 - die Kurzschluß-Eingangs- und -Ausgangswiderstände
 - die Eingangs- und Ausgangswellenwiderstände
 - die Vierpol-Wellenwiderstände

ermittelt werden. Die Leerlauf- und die Kurzschlußwiderstände sind dabei 1. direkt aus der Schaltung abzulesen und 2. mit den in Aufgabe 3.47 abgeleiteten Formeln zu berechnen.

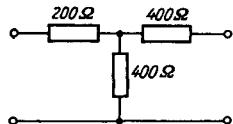


Bild 3.46.
Aufgabe 3.50 a)

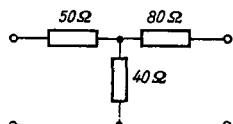


Bild 3.47.
Aufgabe 3.50 b)

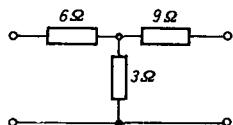


Bild 3.48.
Aufgabe 3.50 c)

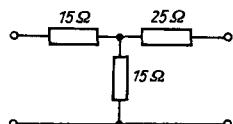


Bild 3.49.
Aufgabe 3.50 d)

3.51. Für die in den Bildern 3.50 und 3.51 dargestellten Halbglieder sind die Gleichungen für Z_{eL} , Z_{eK} , Z_{IL} und Z_{IK} anzugeben.

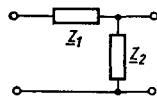


Bild 3.50. T-Halbglied

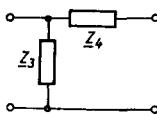


Bild 3.51. Pi-Halbglied

3.52. Zu den in den Bildern 3.52 und 3.53 angegebenen Π -Gliedern sind

- die Leerlauf-Eingangs- und -Ausgangswiderstände
 - die Kurzschluß-Eingangs- und -Ausgangswiderstände
 - die Eingangs- und Ausgangswellenwiderstände
 - die Vierpolwellenwiderstände
- zu berechnen.

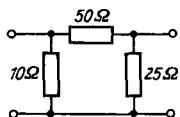


Bild 3.52. Aufgabe 3.52 a)

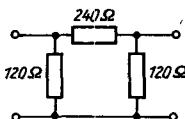


Bild 3.53. Aufgabe 3.52 b)

3.53. Eine symmetrische Brückenschaltung besteht aus den Widerständen $Z_1 = 100 \Omega$, $Z_2 = 200 \Omega$. Welche Werte besitzen die Leerlauf- und Kurzschluß-Eingangs- und -Ausgangswiderstände sowie die Wellenwiderstände des Vierpols?

3.54. Welchen Wert müssen die 3 gleichen Widerstände eines T-Gliedes erhalten, wenn der Wellenwiderstand des Gliedes $Z_L = 600 \Omega$ betragen soll?

3.55. Durch Berechnung des Wellenwiderstandes Z_L mit Hilfe der Z -Parameter des T-Gliedes ist das Ergebnis der Aufgabe 3.54 auf Richtigkeit zu überprüfen.

3.56. Welchen Wert müssen die 3 gleichen Widerstände eines Π -Gliedes erhalten, wenn der Wellenwiderstand $Z_L = 600 \Omega$ betragen soll?

3.57. Für ein widerstandssymmetrisches Π -Glied ($Y_{11} = Y_{22}$) sind Z_{L1} , Z_{L2} und Z_L zu bestimmen.

3.58. An Hand der Gleichungen mit Z -Parametern ist zu beweisen, daß Z_e in Z_{L1} übergeht, wenn Z_a gleich Z_{L2} gewählt wird.

3.59. Ein unsymmetrisches T-Glied mit $Z_1 = 50 \Omega$, $Z_2 = 334 \Omega$ und $Z_3 = 143 \Omega$ besitzt einen Eingangswellenwiderstand von $Z_{L1} = 240 \Omega$. Dieser Vierpol soll bei der Zusammenschaltung mit einem Generator an den Eingangsklemmen und einem Lastwiderstand an den Ausgangsklemmen

- mit Anpassung am Ausgang $Z_a = Z_{L2}$ bei willkürlich gewähltem $Z_q = 600 \Omega$
- mit Anpassung am Eingang $Z_q = Z_{L1}$ bei willkürlich gewähltem $Z_a = 600 \Omega$
- mit Anpassung am Eingang und am Ausgang

betrieben werden.

Für jeden der drei Fälle sind Z_e und Z_i zu berechnen und jeweils mit den Vierpolwellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} zu vergleichen.

3.60. Ein Vierpol (Leitung) mit einem Wellenwiderstand von 60Ω soll mit einem zweiten Vierpol (Leitung) mit $Z_L = 240 \Omega$ unter Verwendung eines dritten Vierpols so in Kette geschaltet werden, daß Anpassung besteht, d.h. die Wellenwiderstände der Vierpole an

den Klemmen, an denen die Zusammenschaltung erfolgt, gleich sind.

- Welche Werte Z_{L1} , Z_{L2} und Z_L muß der dritte Vierpol erhalten?
- Die Zusammenschaltung ist zu skizzieren.

3.5. Vierpol-Übertragungsfaktoren

Die **Vierpol-Übertragungsfaktoren** werden hier als Verhältnis der an den Klemmen des Vierpols messbaren Ausgangsgröße zur Eingangsgröße definiert. Die Eingangs- und Ausgangsgrößen können dabei Spannungen, Ströme oder Leistungen darstellen.

Die Übertragungsfaktoren sind abhängig von den Vierpolparametern sowie von dem an den Vierpolausgang angeschlossenen Lastwiderstand Z_a .

Die Übertragungsfaktoren stellen beim Vorhandensein frequenzabhängiger Widerstände komplexe Größen dar, die sich in Betrag $|G|$ und Phasenwinkel φ zerlegen lassen, wobei φ die Phasendrehung zwischen Ausgangs- und Eingangsgröße angibt. Enthält ein Vierpol auch aktive Elemente, z.B. Transistoren oder Röhren, dann werden die Übertragungsfaktoren auch oft als **Verstärkungsfaktoren** $|V|$ bezeichnet.

Es ist besonders zu beachten, daß bei den Verstärkervierpolen insbesondere die **Wirkleistungsübertragung** von Bedeutung ist; die Aufgaben 3.76 bis 3.79 beziehen sich deshalb auch nur auf reelle Vierpolparameter sowie Generator- und Lastwiderstände.

Da Vierpole sowohl vorwärts, d.h. Anschluß des Generators an den Vierpoleingang und Anschluß des Lastwiderandes an den Vierpolausgang, als auch rückwärts, d.h. vom Ausgang zum Eingang, betrieben werden können, besteht die Möglichkeit, auch Übertragungsfaktoren „rückwärts“ zu definieren. Diese Möglichkeit wird hier nicht behandelt.

Formeln:

| | Größe | Zeichen |
|-------------------------------|--|---------|
| $G_u = Y_u = \frac{U_2}{U_1}$ | Spannungsübertragungsfaktor bzw. Spannungsverstärkung | G_u |
| $G_i = Y_i = \frac{I_2}{I_1}$ | Stromübertragungsfaktor bzw. Stromverstärkung | G_i |
| $G_p = Y_p = \frac{P_2}{P_1}$ | Leistungsübertragungsfaktor bzw. Leistungsverstärkung | G_p |

Die angegebenen drei Übertragungsfaktoren stellen komplexe Größen dar, die sich auf eine konstante Eingangsgröße U_1 , I_1 oder P_1 beziehen und nicht den Einfluß des Quellwiderstandes Z_q des vorgeschalteten Generators berücksichtigen.

In bezug auf das Zusammenwirken von Generator und Vierpoleingang (Bild 3.42 und Bild 3.43) sind folgende Sonderfälle zu unterscheiden:

- $Z_q = 0$ ($Z_q \ll Z_e$): $U_1 = U_0$;
am Vierpoleingang liegt eine *konstante Spannung* U_1 .
- $Z_q = \infty$ ($Z_q \gg Z_e$): $I_1 = I_0$;
in den Vierpoleingang fließt ein *konstanter Strom* I_1 .

$$3. \quad Z_q = Z_e: \quad U_1 = \frac{U_0}{2}, \quad I_1 = \frac{I_0}{2};$$

dieser Fall wird als *Widerstandsanpassung am Eingang* bezeichnet. Wird zusätzlich $Z_a = Z_l$ realisiert, dann liegt *Wellenwiderstandsanpassung* vor, da dann gilt (Aufgabe 3.59) $Z_e = Z_{L1} = Z_q$; $Z_l = Z_{L2} = Z_a$.

Sind die Vierpolparameter sowie Z_q und Z_a reell, dann wird dabei die *maximale Leistung* übertragen.

Entsprechend gelten abhängig vom Wert des Lastwiderstandes am Vierpolausgang die Sonderfälle:

1. *Leerlauf*:

$$Z_a = \infty \quad (Z_a \gg Z_i)$$

2. *Kurzschluß*:

$$Z_a = 0 \quad (Z_a \ll Z_i)$$

3. *Widerstandsanpassung am Ausgang*:

$$Z_a = Z_i$$

Tafel 3.3.

Abhängigkeit der Spannungs- und Stromübertragungsfaktoren von den Vierpolparametern

| | Spannungs- übertragungsfaktor | Strom- übertragungsfaktor |
|-----|--|--|
| Z | $G_u = \frac{Z_{21}Z_a}{Z_{11}Z_a + \Delta Z}$ | $G_i = \frac{-Z_{21}}{Z_{22} + Z_a}$ |
| Y | $G_u = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_a}$ | $G_i = \frac{Y_{21}Y_a}{Y_{11}Y_a + \Delta Y}$ |
| H | $G_u = \frac{-H_{21}}{H_{11}Y_a + \Delta H}$ | $G_i = \frac{H_{21}Y_a}{H_{22} + Y_a}$ |
| A | $G_u = \frac{Z_a}{A_{11}Z_a + A_{12}}$ | $G_i = \frac{-1}{A_{21}Z_a + A_{22}}$ |

In der Nachrichtentechnik und auch der Regelungstechnik ist es oft üblich, die Übertragungsfaktoren logarithmisch zu bewerten. Diese Darstellungsweise hat u.a. den Vorteil, daß bei der Kettenschaltung von Vierpolen der resultierende „logarithmische Übertragungsfaktor“ aus der Summe der logarithmischen Einzelübertragungsfaktoren hervorgeht.

Die sich für die logarithmisch bewerteten Übertragungsfaktoren ergebenden Zahlenwerte erhalten eine zusätzliche Benennung, damit sofort erkennbar ist, daß es sich um ein logarithmisches Maß handelt.

Formeln:

$$a = \ln \frac{1}{|G|} = -\ln |G|$$

Größe

Np

$$a = 20 \lg \frac{1}{|G|} = -20 \lg |G|$$

Dämpfungsmaß

dB

Das Dämpfungsmaß wurde bereits in Abschnitt 2.1. eingeführt; in Abschnitt 2.3. ist der Zusammenhang zwischen den Werten in Neper und Dezibel angegeben.

3.61. Aus der 2. Vierpol-Leitwertsgleichung

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

sind unter Verwendung der Beziehungen

$$U_1 = I_1 Z_e \quad \text{und} \quad I_2 = -U_2 Y_a$$

die Gleichungen für den Spannungs- und den Stromübertragungsfaktor abzuleiten.

3.62. Die in Tafel 3.3 angegebenen Gleichungen für G_i mit H -Parametern und G_u mit A -Parametern sind durch Umformung der zugehörigen Vierpolgleichungen auf Richtigkeit zu überprüfen.

3.63. Für das T-Glied nach Bild 3.54 sind der Spannungsübertragungsfaktor für $Z_a = 2 \text{ k}\Omega$,

der Spannungsübertragungsfaktor für Leerlauf und der Stromübertragungsfaktor für $Z_a = 2 \text{ k}\Omega$

- unter Verwendung der in Tafel 3.3 angegebenen Gleichungen mit Z -Parametern;
- mit Hilfe der KIRCHHOFFSchen Gesetze zu berechnen.

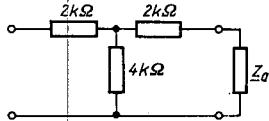


Bild 3.54.
Aufgabe 3.63

3.64. Der Vierpol nach Aufgabe 3.63 wird durch einen Widerstand $Z_4 = 2 \text{ k}\Omega$ zu einem überbrückten T-Glied erweitert. Mit Hilfe der Kettenparameter sind G_u und G_i für $Z_a = 2 \text{ k}\Omega$ zu berechnen.

3.65. Für Übertragungsfaktoren

$$|G_u| = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = 0,001; 0,01; 0,1; 1; 10; 100; \\ 1000$$

ist das Dämpfungsmaß α in Neper und Dezibel zu ermitteln.

3.66. Für folgende Dämpfungsmaßwerte sind die zugehörigen Beträge des Stromübertragungsfaktors zu ermitteln:

- $\alpha/\text{Np} = 0,5; 0,69; -2; 2; 5; -9,2$
- $\alpha/\text{dB} = 1; 3; 6; 10; 26; -26; -46; -52$

3.67. Um welchen Wert ändert sich das Dämpfungsmaß in Neper und in Dezibel bei einer Änderung von $|G_u|$?

- um den Faktor 10;
- um den Faktor 2?

3.68. Für das RC -Halbglied nach Bild 3.55 sind zu ermitteln:

- die Z -Matrix
- der Leerlaufspannungübertragungsfaktor G_{uL}
- die Frequenz ω_g , bei der $|G_{uL}|$ auf den $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \right)$ fachen Wert gegenüber dem bei der Frequenz $\omega = 0$ abgesunken ist
- $|G_{uL}|$ und φ_L als Funktion der normierten Frequenz $\frac{\omega}{\omega_g}$ speziell bei $\frac{\omega}{\omega_g} = 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 3; 4; 5; 10$

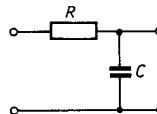


Bild 3.55. RC -Halbglied

Hinweis: Als Normierung bezeichnet man das Beziehen einer veränderlichen Größe oder einer Funktion auf einen festen, frei wählbaren Bezugswert. Durch die Normierung erhält man ein dimensionsloses Verhältnis der Größe oder der Funktion, deren Auswertung zu allgemeingültigen Aussagen führt.

e) für $R = 100 \text{ k}\Omega$ und $C = 1 \text{ nF}$: ω_g sowie $|G_{uL}|$ und φ_L bei $f_1 = 800 \text{ Hz}$ und $f_2 = 8 \text{ kHz}$
f) $|G_u|$ und φ als Funktion der normierten Frequenz $\frac{\omega}{\omega_g}$ sowie der Einfluß von Z_a auf ω_g , $|G_u|$ und φ

g) $|G_u|$ und φ für $R = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ nF}$, $Z_a = 100 \text{ k}\Omega$ bei den Frequenzen $f_1 = 800 \text{ Hz}$ und $f_2 = 8 \text{ kHz}$.

3.69. Für das RC -Tiefpaßglied nach Bild 3.55 sind zu ermitteln:

- das Leerlauf-Dämpfungsmaß $a_L = \ln \frac{1}{|G_{uL}|}$ in Neper und Dezibel als Funktion der normierten Frequenz $\frac{\omega}{\omega_g} = 10^{-2}; 10^{-1}; 10^0; 10^1; 10^2$
- für ein RC -Tiefpaßglied mit $R = 20 \text{ k}\Omega$ und $C = 0,5 \mu\text{F}$ die Frequenzen ω , bei denen das Leerlauf-Dämpfungsmaß die Werte $a = 3,69 \text{ Np}; 34 \text{ dB}; 60 \text{ dB}$ erreicht.

3.70. Für das CR -Halbglied nach Bild 3.56 sind die Aufgaben 3.68 a) bis g) mit den gleichen Zahlenwerten zu lösen.

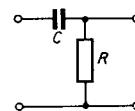


Bild 3.56. CR -Halbglied

3.71. a) Für das CR -Hochpaßglied nach Bild 3.56 ist das Leerlauf-Dämpfungsmaß a_L in Neper und Dezibel als Funktion der normierten Frequenz für $\frac{\omega}{\omega_g} = 10^{-2}; 10^{-1}; 10^0; 10^1; 10^2$ zu berechnen und in einem Diagramm darzustellen.

b) Aus Bild L 74 sind für die Frequenzen $\omega = 0,04\omega_g$; $\omega = 0,2\omega_g$; $\omega = 2\omega_g$ und

$\omega = 10\omega_g$, die Dämpfungsmaßwerte in Np und dB zu ermitteln.

3.72. Für den RC -Vierpol (WIEN-Glied) nach Bild 3.57 sind zu ermitteln:

- die Y-Matrix
- G_{uL} und $|G_{uL}|$
- die Frequenz ω_0 , bei der $|G_{uL}|$ den Maximalwert erreicht
- $|G_{uL}|$ als Funktion der normierten Frequenz $\frac{\omega}{\omega_0} = 0,25; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 5$ für $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$
- Welche Phasendrehung besitzt G_{uL} bei der Frequenz ω_0 ?

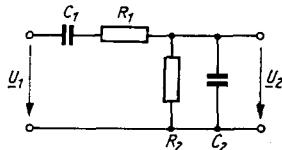


Bild 3.57.
WIEN-Glied

3.73. Für die in Bild 3.58 dargestellte Phasenkette sind zu ermitteln:

- der Leerlaufspannungsübertragungsfaktor
- die Frequenz, bei der G_{uL} reell wird
- G_{uL} bei der unter b) ermittelten Frequenz.

Anleitung: Für die Berechnung sollen die Kettenparameter verwendet werden; die Phasenkette kann als Kettenbeschaltung eines T-Gliedes mit einem Π -Glied betrachtet werden.

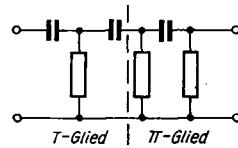


Bild 3.58.
CR-Phasenkette

3.74. Für die Phasenkette nach Bild 3.59 sind mit Hilfe der Kettenparameter, wie bei Aufgabe 3.73,

- G_{uL} , $|G_{uL}|$;
- die Phasendrehung zwischen U_2 und U_1 zu berechnen.

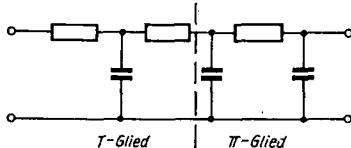


Bild 3.59. RC-Phasenkette

3.75. Für die in den Bildern 3.60 bis 3.70 dargestellten Vierpole sind mit Hilfe der Vierpolmatrix des Halbgliedes G_{uL} und $|G_{uL}|$ zu ermitteln.

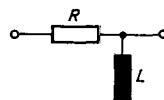


Bild 3.60. Aufgabe 3.75 a)

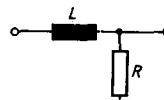


Bild 3.61. Aufgabe 3.75 b)

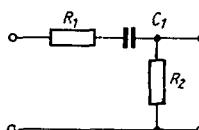


Bild 3.62. Aufgabe 3.75 c)

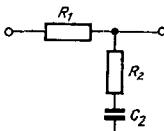


Bild 3.63. Aufgabe 3.75 d)

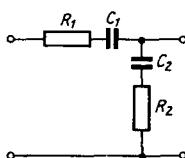


Bild 3.64. Aufgabe 3.75 e)

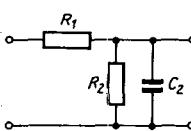


Bild 3.65. Aufgabe 3.75 f)

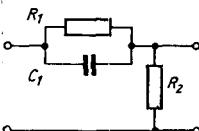


Bild 3.66. Aufgabe 3.75 g)

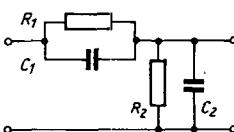


Bild 3.67.
Aufgabe 3.75 h)

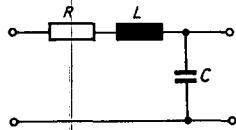


Bild 3.68.
Aufgabe 3.75 i)

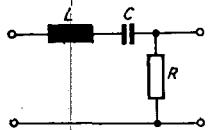


Bild 3.69.
Aufgabe 3.75 j)

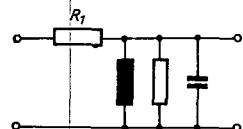


Bild 3.70.
Aufgabe 3.75 k)

3.76. In welchem Verhältnis müssen der Quellenwiderstand Z_q des Generators und der Eingangswiderstand Z_e des Vierpols (Bild 3.71) zueinander stehen, damit der Generator die maximale Leistung an den Vierpol abgibt, d.h.

$$P_1 = \frac{U_1^2}{Z_e} = P_{1\max} ?$$

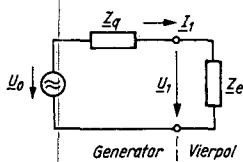


Bild 3.71. Aufgabe 3.76.

3.6. Transistoren und Röhren als Vierpole

Alle bisher angegebenen Vierpolgleichungen gelten auch für Transistoren und Röhren, wenn bei der Aussteuerung dieser aktiven Bauelemente die Bedingungen der Linearität, Zeitinvarianz und Stabilität (vgl. die vor Abschnitt 3.1. angegebenen Voraussetzungen) eingehalten werden. Es ist zu beachten, daß die zur Kennzeichnung des dynamischen Verhaltens von Transistoren und Röhren angegebenen Vierpolparameter für einen bestimmten Arbeitspunkt gelten, der mit Hilfe von Gleichspannungen bzw. -strömen auf den Kennlinien dieser aktiven Bauelemente eingestellt werden kann. Das statische Verhalten der Transistoren und Röhren sowie deren physikalische Wirkungsweise sind nicht Gegenstand der nachfolgenden Aufgaben. Es ist üblich und zweckmäßig, zur Beschreibung der Transistorvierpole bei niedrigen Frequenzen die H -Parameter (i. allg. reelle Größen) und bei hohen Frequenzen die Y -Parameter (i. allg. komplexe Größen) zu verwenden.

Bei den Röhren werden vom Hersteller in der Regel keine Vierpolparameter angegeben. Sie lassen sich jedoch aus den Röhrenkennwerten errechnen. Wichtige Röhrenkennwerte sind:
 S : Steilheit,
 R_i : Innenwiderstand,

Anleitung: Extremwertbestimmung durchführen. Mit $U_1 = U_0 \frac{Z_e}{Z_e + Z_q}$ erhält man

$P_1 = \frac{U_0^2 Z_e}{(Z_e + Z_q)^2}$; P_1 nach Z_e differenzieren, den Zähler des Ergebnisses gleich Null setzen und daraus Z_e ermitteln.

3.77. Ausgehend von der Definition des Leistungsübertragungsfaktors $G_p = \frac{P_2}{P_1}$ sind mit Hilfe der Beziehungen

$P_2 = I_2^2 Z_a$ und $P_1 = I_1^2 Z_e$ die Gleichungen zur Berechnung von G_p

a) mit H -Parametern

b) mit Y -Parametern

abzuleiten (H , Y , Z_a , Z_e reell).

3.78. Mit Hilfe der Gleichung für G_p mit H -Parametern (Aufgabe 3.77 a) soll ermittelt werden, bei welcher Dimensionierung von Z_a der Leistungsübertragungsfaktor das Maximum erreicht.

Anleitung: Extremwertbestimmung durchführen. G_p wird nach Z_a differenziert, der Zähler des Ergebnisses gleich Null gesetzt und daraus $Z_a = Z_{a\text{opt}}$ ermittelt.

3.79. Durch Einsetzen von $Z_{a\text{opt}}$ (Aufgabe 3.78) in die Beziehung für G_p mit H -Parametern (Aufgabe 3.77a) ist $G_{p\text{opt}}$ zu ermitteln.

- C_{gk} : wirksame Kapazität zwischen Gitter und Katode,
 C_{ga} : wirksame Kapazität zwischen Gitter und Anode,
 C_a : wirksame Kapazität zwischen Anode und Katode.

Zusammenhang zwischen den Röhrenkennwerten und den Y -Parametern der Röhre in Katodenbasisschaltung:

| | |
|--------------------------------------|---|
| $Y_{11K} = j\omega(C_{gk} + C_{ga})$ | $Y_{12K} = -j\omega C_{ga}$ |
| $Y_{21K} = S - j\omega C_{ga}$ | $Y_{22K} = \frac{1}{R_i} + j\omega(C_a + C_{ga})$ |

Sowohl bei den Transistoren als auch bei den Röhren lassen sich drei Grundschaltungen unterscheiden, deren Merkmal dadurch festgelegt ist, welche der 3 Elektroden

E: Emitter, B: Basis, C: Kollektor beim Transistor bzw.

K: Katode, G: Gitter, A: Anode bei der Röhrentriode

den gemeinsamen Bezugspunkt für die Eingangs- und die Ausgangswechselspannung darstellt (Bild 3.72 bis Bild 3.77).

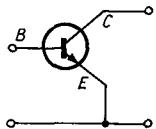


Bild 3.72.
Transistor in Emitterschaltung

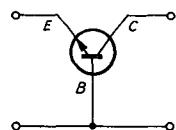


Bild 3.73.
Transistor in Basisschaltung

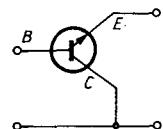


Bild 3.74. Transistor
in Kollektorschaltung

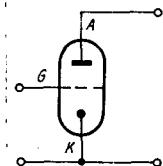


Bild 3.75. Triode
in Katodenbasisschaltung

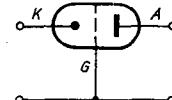


Bild 3.76.
Triode in Gitterbasisschaltung

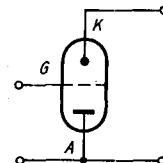


Bild 3.77.
Triode in Anodenbasisschaltung

Die Vierpolparameter der 3 Grundschaltungen besitzen unterschiedliche Werte. Für die H - und die Y -Parameter sind die gegenseitigen Zusammenhänge in Tafel 3.4 und Tafel 3.5 dargestellt. Sind die Vierpolparameter von Transistor bzw. Röhre nicht mit einem zusätzlichen Index gekennzeichnet, gelten sie für die Emitterschaltung bzw. die Katodenbasisschaltung; andernfalls beziehen sich die Indices e, b, oder c bzw. k, g oder a auf die jeweilige Grundschaltung.

Tafel 3.4. Zusammenhänge zwischen den H -Parametern der Transistor-Grundschaltungen

| Emitterschaltung | Basischaltung | Kollektorschaltung |
|--|---|--|
| $(\underline{H}_{11e} \underline{H}_{12e})$ $(\underline{H}_{21e} \underline{H}_{22e})$ | $\frac{1}{1 + \underline{H}_{21e}} \left(\begin{array}{cc} \underline{H}_{11e} & \Delta H_e - \underline{H}_{12e} \\ -\underline{H}_{21e} & \underline{H}_{22e} \end{array} \right)$ | $\left(\begin{array}{cc} \underline{H}_{11e} & 1 - \underline{H}_{12e} \\ -(1 + \underline{H}_{21e}) & \underline{H}_{22e} \end{array} \right)$ |
| $\Delta H_e = \underline{H}_{11e}\underline{H}_{22e} - \underline{H}_{12e}\underline{H}_{21e}$ | $\Delta H_b = \frac{\Delta H_e}{1 + \underline{H}_{21e}}$ | $\Delta H_c = 1 + \underline{H}_{21e}$ |

Tafel 3.5. Zusammenhänge zwischen den Y -Parametern der Transistor-Grundschaltungen

| Emitterschaltung | Basisschaltung | Kollektorschaltung |
|--|---|---|
| $\begin{pmatrix} Y_{11e} & Y_{12e} \\ Y_{21e} & Y_{22e} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \Sigma Y_e & -(Y_{12e} + Y_{22e}) \\ -(Y_{21e} + Y_{22e}) & Y_{22e} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} Y_{11e} & -(Y_{11e} + Y_{12e}) \\ -(Y_{11e} + Y_{21e}) & \Sigma Y_e \end{pmatrix}$ |
| $\Delta Y_e = Y_{11e}Y_{22e} - Y_{12e}Y_{21e}$ | $\Delta Y_b = \Delta Y_e$ $\Sigma Y_e = Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e}$ | $\Delta Y_c = \Delta Y_e$ |

Anmerkung: Die in den Tafeln angegebenen Umrechnungsbeziehungen lassen sich auch auf Röhrenvierpole übertragen, wenn man beachtet, daß folgende Zuordnungen zwischen den Grundschatungen bestehen:
Emitterschaltung \triangleq Katodenbasissschaltung
Basisschaltung \triangleq Gitterbasissschaltung

Kollektorschaltung \triangleq Anodenbasissschaltung

3.80. Ausgehend von den Vierpolgleichungen mit Hybridparametern der Emitterschaltung

$$U_{1e} = I_{1e}H_{11e} + U_{2e}H_{12e}$$

$$I_{2e} = I_{1e}H_{21e} + U_{2e}H_{22e}$$

sind unter Beachtung der Zusammenhänge zwischen den Zählpfeilrichtungen der Spannungen und Ströme der in Bild 3.78 dargestellten Schaltungen die Vierpol- H -Parameter der Kollektorschaltung zu ermitteln.

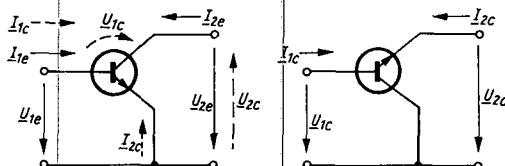
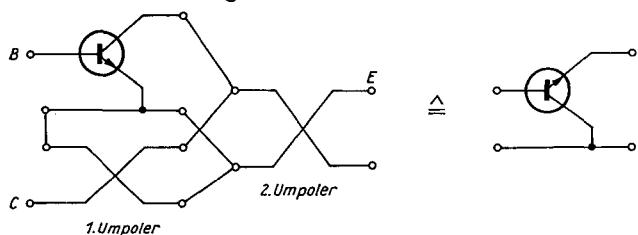


Bild 3.78. Zählpfeilrichtungen bei der Emitter- und der Kollektorschaltung

Bild 3.79. Kollektorschaltung als Zusammenschaltung einer Emitterstufe mit zwei Umpolern



3.82. Ausgehend von den Vierpolgleichungen mit Leitwertparametern der Emitterschaltung

$$I_{1e} = U_{1e}Y_{11e} + U_{2e}Y_{12e}$$

$$I_{2e} = U_{1e}Y_{21e} + U_{2e}Y_{22e}$$

Anleitung: In die Vierpolgleichungen der Emitterschaltung sind folgende aus Bild 3.78 ablesbare Zusammenhänge zwischen den Spannungen und Strömen einzusetzen:

$$U_{1e} = U_{1c} - U_{2e}; \quad U_{2e} = -U_{2c};$$

$$I_{1e} = I_{1c}; \quad I_{2e} = -I_{2c} - I_{1c}$$

Anschließend sind die Gleichungen durch Umformung auf die Grundform der Hybrid-Vierpolgleichungen zu bringen.

3.81. Aus der Emitterschaltung entsteht eine Kollektorschaltung, wenn man die in Bild 3.79 dargestellte Zusammenschaltung der Emitterschaltung mit zwei als Umpoler bezeichneten Vierpolen realisiert.

- Welche Zusammenschaltungsarten liegen vor?
- Wie lautet die H -Matrix eines Umpolers?
- Wie lautet die Matrix der Gesamtenschaltung, die zugleich die Matrix der Kollektorschaltung darstellt?

sind unter Beachtung der Zusammenhänge zwischen den Zählpfeilrichtungen der Spannungen und Ströme der in Bild 3.78 dargestellten Schaltungen die Vierpol- Y -Parameter der Kollektorschaltung zu ermitteln.

Anleitung: Der Rechengang entspricht dem der Aufgabe 3.80.

3.83. Ein Transistor mit den H-Parametern

$$H_{11} = 2 \text{ k}\Omega, H_{12} = 4 \cdot 10^{-4},$$

$$H_{21} = 25, H_{22} = 50 \mu\text{s}$$

wird zwischen einen Generator mit $Z_q = 2 \text{ k}\Omega$ und einen Lastwiderstand $Z_a = 2 \text{ k}\Omega$ geschaltet (Bild 3.80). Zu berechnen sind Z_e, Z_i , G_u und G_i für die
 a) Emitterschaltung;
 b) Basisschaltung;
 c) Kollektorschaltung.

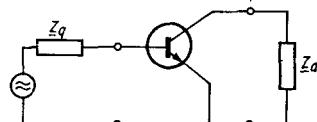


Bild 3.80. Transistorvierpol in Emitterschaltung mit Generator und Lastwiderstand

3.84. Für den Transistorvierpol in Emitterschaltung nach Aufgabe 3.83 sollen Z_q und Z_a für Wellenwiderstandsanpassung am Eingang und am Ausgang ermittelt werden.

3.85. Für den Transistorvierpol in Emitterschaltung nach Aufgabe 3.83 sind G_u , G_i und G_p mit $Z_{qopt} = 1,9 \text{ k}\Omega$ und $Z_{aopt} = 21 \text{ k}\Omega$ zu berechnen.

3.86. Welche Werte besitzen Z_e , Z_i und G_u bei einer Transistorstufe in Emitterschaltung, die zwischen einen Generator mit $Z_q = 1 \text{ k}\Omega$ und einen Lastwiderstand $Z_a = 10 \text{ k}\Omega$ geschaltet ist, wenn folgende Transistor-Vierpolparameter gegeben sind:

$$Y_{11e} = (1,4 + j1) \text{ mS}; \quad Y_{12e} = -j50 \mu\text{s};$$

$$Y_{21e} = 32 \text{ mS}; \quad Y_{22e} = (34 + j245) \mu\text{s}?$$

3.87. Eine Triode in Katodenbasisschaltung wird zwischen einen Generator mit $Z_q = 50 \text{ k}\Omega$ und einen Lastwiderstand $Z_a = 100 \text{ k}\Omega$ geschaltet (Bild 3.81). Bei der Frequenz $f = 10 \text{ kHz}$ besitzt die Röhre folgende Kennwerte:

$$S = 2 \text{ mA/V}; \quad R_i = 50 \text{ k}\Omega;$$

$$C_{gk} = 1,5 \text{ pF}; \quad C_{ga} = 1,7 \text{ pF}; \quad C_a = 0,5 \text{ pF}.$$

Zu ermitteln sind Z_e , Z_i und G_u der Schaltung
 a) mit; b) ohne Berücksichtigung der Röhrenkapazitäten.

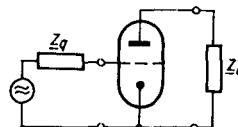


Bild 3.81. Triode in Katodenbasisschaltung, Aufgabe 3.87

3.88. Aus den Kennwerten $S = 5 \text{ mA/V}$ und $R_i = 40 \text{ k}\Omega$ einer Triode in Katodenbasis schaltung sind die Y-Parameter der zugehörigen Anodenbasisstufe zu ermitteln.

3.89. Um zu erreichen, daß ein hochohmiger Generator mit $Z_q = 500 \text{ k}\Omega$ an den niederohmigen Verbraucher mit $Z_a = 250 \Omega$ eine möglichst hohe Leistung abgeben kann, soll eine Anodenbasisstufe dazwischengeschaltet werden (Bild 3.82). Die Y-Parameter der zu verwendenden Triode lauten

$$Y_{11K} = 0; \quad Y_{12K} = 0; \quad Y_{21K} = 4 \text{ mS}; \\ Y_{22K} = 20 \mu\text{s}.$$

a) Wie groß sind Z_e , Z_i und G_u der Anodenbasisstufe? Welche Leistung P_a gibt der Generator mit $U_0 = 1 \text{ V}$ an Z_a
 b) ohne;
 c) mit

Zwischenschaltung der Anodenbasisstufe ab?

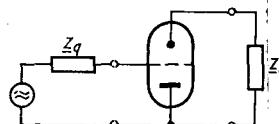


Bild 3.82. Triode in Anodenbasisschaltung, Aufgabe 3.89

3.90. Ein niederohmiger Generator mit $Z_q = 200 \Omega$ soll über eine Gitterbasisstufe mit einem relativ hochohmigen Verbraucher verbunden werden (Bild 3.83). Röhrenkennwerte:

$$S = 10 \text{ mA/V}; \quad R_i = 50 \text{ k}\Omega.$$

Zu ermitteln sind Z_e , Z_i und G_u für $Z_a = 50 \text{ k}\Omega$.

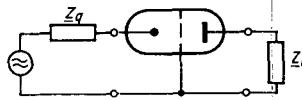


Bild 3.83. Triode in Gitterbasisschaltung, Aufgabe 3.90

3.7. Vierpolgleichungen mit Wellenparametern

Für verschiedene Anwendungsgebiete, z.B. bei der Untersuchung von Leitungen und Siebschaltungen, ist es möglich, an Stelle der im Abschn. 3.1. angegebenen Vierpolparameter mit **Wellenparametern** zu rechnen. Da jede elektrische Leitung einen Vierpol darstellt, lassen sich die allg. Leitungsgleichungen (Abschn. 2.5.) in formaler Hinsicht auch zur Beschreibung beliebiger Vierpole heranziehen. Anstelle der Kettenparameter A_{11}, A_{12}, \dots treten dann die Wellenparameter, d.h. der Wellenwiderstand Z_L und das Übertragungsmaß g . Mit der Anwendung auf beliebige Vierpole verlieren diese Größen ihre mit der Ausbreitung forschreitender Wellen verbundene ursprüngliche Bedeutung. Man bezeichnet daher g als **Übertragungsmaß des Vierpols** und Z_L als **Wellenwiderstand des Vierpols** (vgl. Abschn. 3.4.).

Die nachfolgenden Gleichungen und Aufgaben werden nur auf *symmetrische Vierpole* beschränkt. Symmetrische Vierpole besitzen:

Widerstandssymmetrie, d.h., es gilt

$$Z_{11} = Z_{22} \text{ oder } Y_{11} = Y_{22} \text{ oder } A_{11} = A_{22} \text{ oder } \Delta H = 0,$$

und = **Übertragungssymmetrie**, d.h., es gilt

$$Z_{12} = Z_{21} \text{ oder } Y_{12} = Y_{21} \text{ oder } A_{12} = A_{21} \text{ oder } \Delta A = 1.$$

Vierpolgleichungen mit Wellenparametern:

$$U_e = \cosh g \cdot U_a + Z_L \sinh g \cdot I_a$$

$$I_e = \frac{\sinh g}{Z_L} \cdot U_a + \cosh g \cdot I_a$$

Beziehungen zu den Kettenparametern:

$$A_{11} = \cosh g; \quad A_{12} = Z_L \sinh g; \quad A_{21} = \frac{\sinh g}{Z_L}; \quad A_{22} = \cosh g;$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{eL} \cdot Z_{eK}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}};$$

das Vorzeichen der Wurzel ist so zu wählen, daß der Realteil von Z_L positiv wird.

$$A_{11}^2 - A_{12}A_{21} = 1, \text{ d.h. } \cosh^2 g - \sinh^2 g = 1; \quad g = \ln(\sqrt{A_{11}^2 - 1});$$

$$\text{das Vorzeichen der Wurzel ist gleich dem von } \sqrt{\frac{A_{12}}{Z_L}}.$$

Zusammenhang zwischen den Wellenparametern und den Schaltungswiderständen:

| | symm. T-Glied | symm. II-Glied |
|-----------|--------------------------|-------------------------------------|
| $\cosh g$ | $1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ | $1 + \frac{Z_3}{Z_1}$ |
| Z_L | $\sqrt{Z_1(Z_1 + 2Z_3)}$ | $Z_1 \sqrt{\frac{Z_3}{2Z_1 + Z_3}}$ |

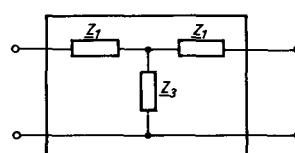


Bild 3.84.
T-Ersatzschaltung eines symmetrischen Vierpols

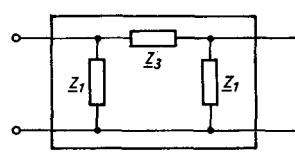


Bild 3.85.
II-Ersatzschaltung eines symmetrischen Vierpols

3.91. Wenn der Ausgang mit dem Wellenwiderstand Z_L abschließt, nehmen die allgemeinen Gleichungen die Form

$$U_e = U_a (\cosh g + \sinh g) \quad \text{bzw.}$$

$$I_e = I_a (\cosh g + \sinh g)$$

an. Dies ist zu beweisen.

3.92. Aus der in Aufgabe 3.91 genannten Gleichung ist herzuleiten, daß im Fall der Anpassung $g = \ln \frac{U_e}{U_a}$ ist.

3.93. Wie lauten die Kettenparameter folgender symmetrischer Vierpole, deren Übertragungsmaß g und Wellenwiderstand Z_L gegeben sind?

a) $\underline{g} = 1,2; Z_L = 500 \Omega$

b) $\underline{g} = 0,4 + j 0,2; Z_L = 600 \Omega$

c) $\underline{g} = 0,5 - j 0,4; Z_L = 400 (1 + j) \Omega$

d) $\underline{g} = 2,0 + j 0,8; Z_L = (250 - j 50) \Omega$

3.94. Ein symmetrischer Vierpol hat den Kettenparameter $A_{12} = (250 + j 125) \Omega$.

Welche Werte haben die Parameter A_{11} und A_{21} , wenn der Wellenwiderstand $Z_L = 500 \Omega$ ist?

3.95. Welchen Wellenwiderstand und Parameter A_{21} haben folgende symmetrische Vierpole?

a) $A_{11} = 3; A_{12} = (150 + j 100) \Omega$

b) $A_{11} = 1 + j 0,4; A_{12} = (200 + j 50) \Omega$

c) $A_{11} = 1,5 + j 0,1; A_{12} = (-3 + j 60) \Omega$

d) $A_{11} = 0,5 - j 2,0; A_{12} = (-8 + j 100) \Omega$

3.96. Ein 50 km langes Kabel mit der Dämpfungskonstante $\alpha = 0,07 \text{ Np/km}$ und dem Wellenwiderstand $Z_L = 600 \Omega$ soll durch eine symmetrische T-Schaltung nachgebildet werden. Aus welchen Widerständen Z_1 und Z_3 besteht diese?

3.97. a) bis d) Welches Übertragungsmaß g und welchen Wellenwiderstand Z_L haben die in den Bildern 3.86 bis 3.89 dargestellten T-Glieder?

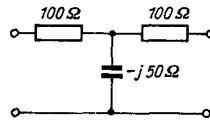


Bild 3.86. Aufgabe 3.97 a)

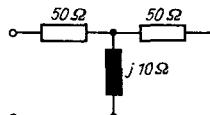


Bild 3.87. Aufgabe 3.97 b)

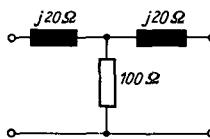


Bild 3.88. Aufgabe 3.97 c)

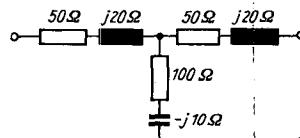


Bild 3.89. Aufgabe 3.97 d)

3.98. Welches Dämpfungsmaß a und welchen Wellenwiderstand haben folgende symmetrische Π -Glieder?

a) $Z_1 = 800 \Omega; Z_3 = 50 \Omega$

b) $Z_1 = 50 \Omega; Z_3 = 5 \Omega$

c) $Z_1 = 5 \Omega; Z_3 = 0,02 \Omega$

3.99. Ein T-Glied hat die Längswiderstände $Z_1 = Z_2 = 300 \Omega$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 450 \Omega$. Welchen Wert hat der Querwiderstand Z_3 ? Es ist ferner zu bestätigen, daß das äquivalente Π -Glied den gleichen Wellenwiderstand hat.

3.100. Ein symmetrisches T-Glied hat das Übertragungsmaß $g = 2,5$ und den Wellenwiderstand $Z_L = 800 \Omega$. Aus welchen Widerständen Z_1 und Z_3 besteht die Schaltung?

4. Fourier-Analyse

4.1. Fourier-Reihen in trigonometrischer Form

Ist $f(t)$ eine periodische Funktion mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$, so kann sie durch eine trigonometrische Summe $s_n(t)$, genannt **Fourier-Reihe**, exakt oder näherungsweise dargestellt werden:

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \dots + a_n \cos n\omega t + \\ + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots + b_n \sin n\omega t.$$

Auf diese Weise ist es möglich, jede beliebige periodische Schwingung in eine Reihe sinusförmiger Schwingungen zu zerlegen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der gegebenen Grundfrequenz sind. Die Amplituden dieser Teilschwingungen ($a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$) werden 1., 2. usw. Harmonische genannt. Sie werden mit zunehmender Frequenz immer kleiner, weshalb in vielen Fällen nur die ersten Glieder der Reihe von Interesse sind.

Stellt man die verschiedenen Teilschwingungen graphisch dar und addiert sie, so wird die resultierende Kurve $s_n(t)$ der ursprünglichen Funktion $f(t)$ um so ähnlicher, je mehr Teilschwingungen verwendet werden (Bild 4.1). Die Näherungsfunktion $s_n(t)$ ist dann die beste Approximation für die gegebene Funktion $f(t)$, wenn für die einzelnen Harmonischen a_k und b_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) die **Fourier-Koeffizienten** gewählt werden.

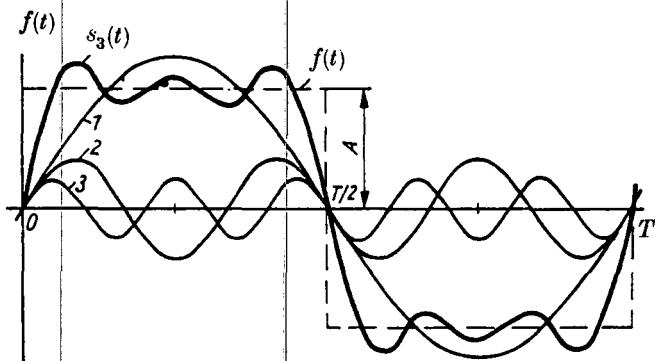


Bild 4.1. Zusammensetzung der ersten 3 Teilschwingungen 1, 2, 3 einer rechteckförmigen Schwingung $f(t)$ zu ihrer Resultierenden $s_3(t)$

Bevor man eine **FOURIER**-Analyse durchführt, sollte die betreffende Funktion hinsichtlich ihrer Symmetrie untersucht werden. Diese ist oft erst nach einer passenden Achsenverschiebung des Koordinatensystems erkennbar. Die gegebene Funktion $f(t)$ lässt sich dann als symmetrische Funktion behandeln. Meist genügt eine Verschiebung der Vertikalachse und damit des Nullpunktes. Dieser Schritt führt zu einer Reihe rechentechnischer Vereinfachungen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Gerade Funktion: $f(t) = f(-t)$

(Bild 4.2)

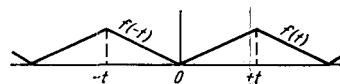


Bild 4.2. Gerade Funktion

Ungerade Funktion: $f(t) = -f(-t)$

(Bild 4.3)

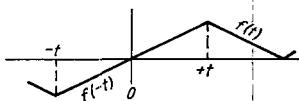


Bild 4.3. Ungerade Funktion

Formeln für die Fourier-Koeffizienten

Allgemeiner Fall:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt$$

Gerade Funktion:

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_k = 0$$

Ungerade Funktion:

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt$$

Benötigte Integrale:

$$\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a};$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{ax \sin ax + \cos ax}{a^2};$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{-ax \cos ax + \sin ax}{a^2}$$

$$\int \sin ax \sin bx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b} \right) & \text{für } a \neq b \\ \frac{1}{4b} (2bx - \sin 2bx) & \text{für } a = b \end{cases}$$

$$\int \cos ax \cos bx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b} \right) & \text{für } a \neq b \\ \frac{1}{4b} (2bx + \sin 2bx) & \text{für } a = b \end{cases}$$

$$\int \sin ax \cos bx dx = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(a+b)x}{a+b} + \frac{\cos(a-b)x}{a-b} \right) & \text{für } a \neq b \\ \frac{1}{2b} \sin^2 bx & \text{für } a = b \end{cases}$$

| Größe | Zeichen |
|-----------------------|---------------------------|
| Kreisfrequenz | $\omega = 2\pi f$ |
| Periodendauer | $T = \frac{2\pi}{\omega}$ |
| Laufindex | $k = 0, 1, 2, \dots, n$ |
| Stammfunktion | $f(t)$ |
| FOURIER-Reihe | $s_n(t)$ |
| FOURIER-Koeffizienten | a_k, b_k |

Die folgenden periodischen Funktionen sind unter Zuhilfenahme einer Skizze daraufhin zu untersuchen, ob sie in bezug auf den Nullpunkt gerade, ungerade oder asymmetrisch sind.

4.1. $f(t) = A; \quad 0 \leq t \leq T/2$

$$f(t) = -A; \quad -T/2 \leq t \leq T$$

4.2. $f(t) = A; \quad -T/4 \leq t \leq T/4$

$$f(t) = -A; \quad T/4 \leq t \leq 3T/4$$

4.3. $f(t) = A; \quad T/8 \leq t \leq 3T/8$

$$f(t) = -A; \quad 5T/8 \leq t \leq 7T/8$$

in den übrigen Bereichen ist $f(t) = 0$

4.4. $f(t) = \frac{2At}{T}; \quad -T/2 \leq t \leq T/2$

4.5. $f(t) = 0; \quad 0 \leq t \leq T/2$

$$f(t) = \frac{2At}{T}; \quad T/2 \leq t \leq T$$

4.6. $f(t) = \frac{A\left(\frac{T}{2} + t\right)}{T/2}; \quad -T/2 \leq t \leq 0$

$$f(t) = \frac{A\left(\frac{T}{2} - t\right)}{T/2}; \quad 0 \leq t \leq T/2$$

4.7. $f(t) = A \sin \omega t$

4.8. $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi); \quad |\varphi| < \frac{\omega T}{4}$

4.9. $f(t) = A \sin^2 \omega t$

4.10. $f(t) = A(1 + \cos \omega t)$

Zu den auf den Bildern 4.4 bis 4.31 gezeichneten periodischen Funktionen sind die FOURIER-Koeffizienten zu berechnen und die ersten Glieder der entsprechenden FOURIER-Reihen anzugeben.

4.11. (Bild 4.4) a) Die Funktion ist als gerade zu betrachten.

b) Die Funktion ist als ungerade zu behandeln.

c) Das Ergebnis von a) ist aus b) durch eine Verschiebung der Vertikalachse herzuleiten.

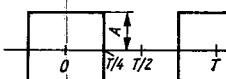


Bild 4.4. Aufgabe 4.11

4.12. (Bild 4.5) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

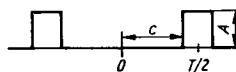


Bild 4.5. Aufgabe 4.12

4.13. (Bild 4.6) a) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

b) Es ist der Sonderfall $c = T/4$ hieraus abzuleiten.

c) Es ist der Sonderfall $c = 0$ hieraus abzuleiten und mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.11 b) zu vergleichen.

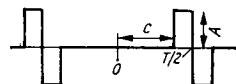


Bild 4.6. Aufgabe 4.13

4.14. (Bild 4.7) a) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

b) Es ist der Sonderfall $c = 0$ hieraus abzuleiten und mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.11 b) zu vergleichen.

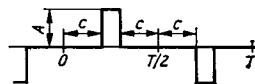


Bild 4.7. Aufgabe 4.14

4.15. (Bild 4.8) a) Die Funktion ist als ungerade zu behandeln.

b) Die Funktion ist als gerade zu behandeln.

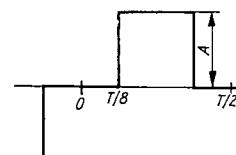


Bild 4.8. Aufgabe 4.15

4.16. (Bild 4.9)

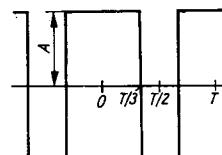


Bild 4.9. Aufgabe 4.16

4.17. (Bild 4.10)

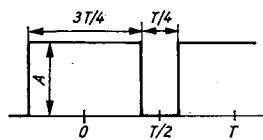


Bild 4.10.
Aufgabe 4.17

4.18. (Bild 4.11)

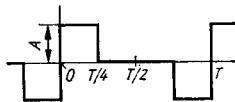


Bild 4.11. Aufgabe 4.18

4.19. (Bild 4.12)

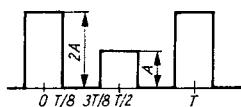


Bild 4.12. Aufgabe 4.19

4.20. (Bild 4.13)

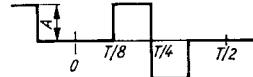


Bild 4.13.
Aufgabe 4.20

4.21. (Bild 4.14) a) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

b) Es ist der Sonderfall $c = d = 0$ hieraus abzuleiten und mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.11 b) zu vergleichen.

c) Herleitung des Sonderfalls $c = T/8$ und $d = 0$ und Vergleich mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.15 b)

d) Herleitung des Sonderfalls $c = 0$ und $d = T/8$ und Vergleich mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.20

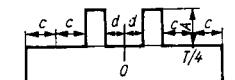


Bild 4.14. Aufgabe 4.21

4.22. (Bild 4.15)

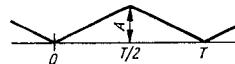


Bild 4.15. Aufgabe 4.22

4.23. (Bild 4.16) a) Lösung durch Bestimmung der Koeffizienten

b) Lösung durch Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 4.22 unter Verschiebung des Koordinatenursprungs

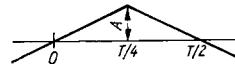


Bild 4.16. Aufgabe 4.23

4.24. (Bild 4.17)

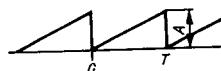


Bild 4.17. Aufgabe 4.24

4.25. (Bild 4.18) a) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

b) Herleitung des Sonderfalls $c = T$ und Vergleich mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.24

c) Herleitung des Sonderfalls $c = T/2$ und Berechnung der ersten Glieder der FOURIER-Reihe

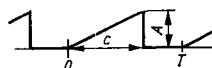


Bild 4.18. Aufgabe 4.25

4.26. (Bild 4.19)

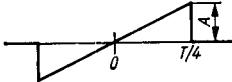


Bild 4.19. Aufgabe 4.26

4.27. (Bild 4.20)

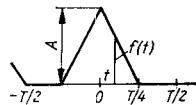


Bild 4.20. Aufgabe 4.27

4.28. (Bild 4.21) a) Lösung durch Bestimmung der Koeffizienten

b) Lösung unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 4.27 durch Verschieben des Koordinatenursprungs

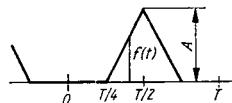


Bild 4.21.
Aufgabe 4.28 a) und b)

4.29. (Bild 4.22) Lösung unter direkter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 4.27 und 4.28 a)

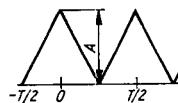


Bild 4.22. Aufgabe 4.29

4.30. (Bild 4.23)

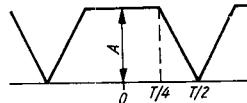


Bild 4.23. Aufgabe 4.30

4.31. (Bild 4.24)

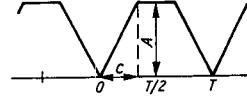


Bild 4.24.
Aufgabe 4.31 und 4.32

4.32. Aus dem Ergebnis von Aufgabe 4.31 sind folgende Sonderfälle abzuleiten:

- $c = T/4$ und Vergleich mit den in Aufgabe 4.30 erhaltenen Koeffizienten a_k
- $c = T/2$ und Vergleich mit den in Aufgabe 4.22 erhaltenen Koeffizienten a_k
- $c = T/3$; Angabe der ersten Glieder der FOURIER-Reihe

4.33. (Bild 4.25) a) Berechnung der Koeffizienten in allgemeiner Form

b) Herleitung des Sonderfalls $c = T/4$ und Angabe der ersten Glieder der FOURIER-Reihe

c) Desgl. für den Sonderfall $c = 0$

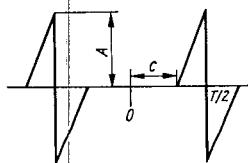


Bild 4.25.
Aufgabe 4.33

4.34. (Bild 4.26) a) Es sind die Koeffizienten in allgemeiner Form zu berechnen.

b) Herleitung des Sonderfalls $c = T/4$ und Vergleich mit dem Ergebnis von Aufgabe 4.23 a)

c) Sonderfall $c = 0$ und Vergleich mit Aufgabe 4.11 b)

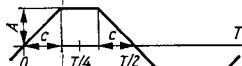


Bild 4.26. Aufgabe 4.34

4.2. Fourier-Reihen in komplexer Form

Ausgehend von der trigonometrischen Form der FOURIER-Reihe

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

ergibt sich mit der EULERSchen Formel für komplexe Zahlen

$$\cos k\omega t = \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) \quad \text{und}$$

$$\sin k\omega t = \frac{1}{j2} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})$$

der Ausdruck

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = \frac{1}{2} (a_k - jb_k) e^{jk\omega t} + \frac{1}{2} (a_k + jb_k) e^{-jk\omega t}$$

4.35. (Bild 4.27)

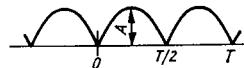


Bild 4.27.
Aufgabe 4.35

4.36. (Bild 4.28)

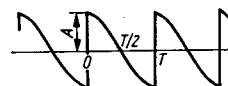


Bild 4.28. Aufgabe 4.36

4.37. (Bild 4.29)

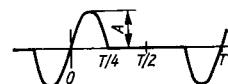


Bild 4.29. Aufgabe 4.37

4.38. (Bild 4.30)

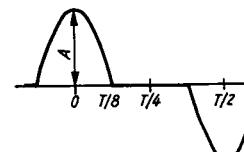


Bild 4.30. Aufgabe 4.38

4.39. (Bild 4.31)

a) Lösung durch Bestimmung der Koeffizienten

b) Lösung unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabe 4.38 durch Verschieben des Koordinatenursprungs

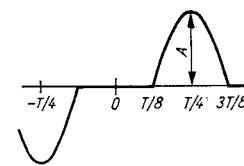


Bild 4.31. Aufgabe 4.39

Mit der Substitution

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - jb_k) \quad \text{und} \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + jb_k)$$

ergibt sich

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (c_k e^{jk\omega t} + c_{-k} e^{-jk\omega t}).$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-jk\omega t} = \sum_{k=-1}^{-n} c_k e^{jk\omega t}$$

entsteht schließlich die komplexe Form der FOURIER-Reihe:

| | |
|---|--|
| $s_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}$ | mit $k = -n, \dots, -1, 0, +1, \dots, n$ |
|---|--|

Faßt man in dieser Reihe die Glieder mit den Faktoren $e^{jk\omega t}$ und $e^{-jk\omega t}$ in Anwendung der EULERSchen Formel mit gleichem k -Wert paarweise zusammen, so folgt wieder die entsprechende trigonometrische Form der FOURIER-Reihe.

**Formeln
für die komplexen Fourier-Koeffizienten:**

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt \quad \text{oder:}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Eulersche Formeln:

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

| Größe | Zeichen |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| Kreisfrequenz | $\omega = 2\pi f$ |
| Periodendauer | $T = \frac{2\pi}{\omega}$ |
| Laufindex | $k = -n, \dots, -1, 0, +1, \dots, +n$ |
| Stammfunktion | $f(t)$ |
| FOURIER-Reihe | $s_n(t)$ |
| FOURIER-Koeffizient in komplexer Form | c_k |

Die auf den Bildern 4.32 bis 4.37 gezeichneten periodischen Funktionen sind unter Benutzung komplexer Funktionen in Fou-

RIER-Reihen zu entwickeln. Zum Schluß ist die trigonometrische Form daraus abzuleiten.

4.40. (Bild 4.32)

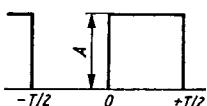


Bild 4.32. Aufgabe 4.40

4.41. (Bild 4.33)

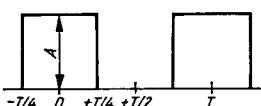


Bild 4.33.
Aufgabe 4.41

4.42. (Bild 4.34)



Bild 4.34.
Aufgabe 4.42

4.43. (Bild 4.35)

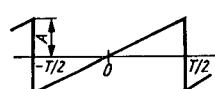


Bild 4.35. Aufgabe 4.43

4.44. (Bild 4.36)

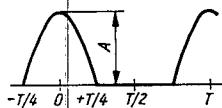


Bild 4.36. Aufgabe 4.44

4.45. (Bild 4.37)

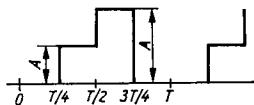


Bild 4.37.
Aufgabe 4.45

4.3. Fourier-Integrale

Wenn die zu analysierende Funktion $f(t)$ nichtperiodisch ist bzw. nur aus einem einzigen Impuls oder einer begrenzten Impulgruppe besteht, so ist das entsprechende Frequenzspektrum $F(\omega)$ kontinuierlich. Anstelle der einzelnen Glieder der FOURIER-Reihe tritt das **Fourier-Integral**, das sich über alle Perioden von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Das FOURIER-Integral kann in ein Funktionspaar zerlegt werden:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$F(\omega)$ ist das **Frequenzspektrum** von $f(t)$ und ist im allgemeinen komplex, d. h., es enthält sowohl eine Amplitude als auch eine Phase.

Um den Verlauf des Frequenzspektrums $F(\omega)$ darzustellen, bringt man die Funktion $F(\omega)$ mit Hilfe der EULERSchen Formeln (S. 52) wieder in die trigonometrische Form. Charakteristische Werte findet man zweckmäßig, indem man für ω einzelne Bruchteile bzw. Vielfache von π einsetzt. Wenn sich hierbei (z.B. für $\omega = 0$) unbestimmte Ausdrücke ergeben, wendet man die L'HOSPITALSche Regel an.

Für die auf den Bildern 4.38 bis 4.43 gezeichneten Impulse ist das Frequenzspektrum $F(\omega)$ zu berechnen. Für Aufgabe 4.46 bis 4.49 sind mit $A = 1/2$ bzw. 1 und $T/2 = 1$ die einzelnen Werte für $\omega = 0, \pi/4, \pi/2$ usw. zu berechnen und das Frequenzspektrum $F(\omega)$ zu zeichnen.

4.46. (Bild 4.38) Einfacher Rechteckimpuls

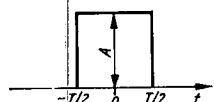


Bild 4.38. Aufgabe 4.46

4.47. (Bild 4.39) Doppelter Rechteckimpuls

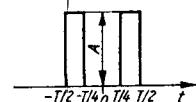


Bild 4.39. Aufgabe 4.47

4.48. (Bild 4.40) Stufenförmiger Impuls

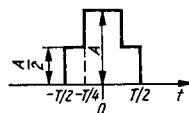


Bild 4.40. Aufgabe 4.48

4.49. (Bild 4.41) Dreieckimpuls

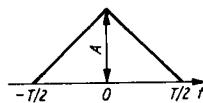


Bild 4.41. Aufgabe 4.49

4.50. (Bild 4.42) $f(t) = e^{-at^2}$; Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2 - bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

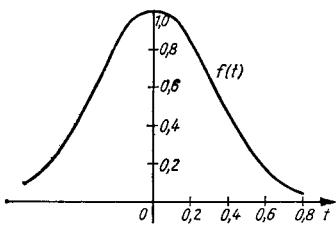


Bild 4.42. Aufgabe 4.50

4.51. (Bild 4.43) DIRAC-Impuls (Nadelimpuls, $\delta \rightarrow 0$); Hinweis: Grenzübergang für $\delta \rightarrow 0$ ist nach vollzogener Integration vorzunehmen.

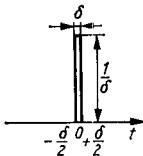


Bild 4.43. Aufgabe 4.51

5. Laplace-Transformation

5.1. Transformation elementarer Funktionen

Bei näherer Betrachtung des FOURIER-Integrals ist festzustellen, daß das Frequenzspektrum $F(\omega)$ nur dann einen physikalischen Sinn hat, wenn sich die Funktion $f(t)$ im Unendlichen so verhält, daß $F(\omega)$ konvergiert. Bei vielen Vorgängen in Physik und Technik trifft dies nicht zu. Aus diesem Grunde wird die Funktion $f(t)$ durch $f(t) \cdot e^{-\sigma t}$ ersetzt. Gleichzeitig wird nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ wie bei der FOURIER-Transformation, sondern nur von 0 bis $+\infty$ integriert. Dieser Schritt schließt die Betrachtung des physikalisch nicht interessierenden Zeitbereiches $-\infty < t < 0$ aus.

Damit ergibt sich für das Frequenzspektrum

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt.$$

Dieses Spektrum wird auch als **Laplace-Integral** bezeichnet. Mit $p = \sigma + j\omega$ schreibt man

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Für die Zuordnung zwischen $f(t)$ und $F(p)$ gilt auch der Begriff der **Laplace-Transformation**. Mit ihrer Hilfe lassen sich viele in der Technik vorkommende nichtperiodische Funktionen mathematisch vereinfacht behandeln.

für die **Originalfunktion** $f(t)$ gilt auch die Bezeichnung **Oberfunktion**, während die **LAPLACE-transformierte** $F(p)$ als **Bild- oder Unterfunktion** bezeichnet wird. Für die **LAPLACE-Transformation** gelten folgende Symbole:

$$F(p) = \mathfrak{L}\{f(t)\} \quad \text{sowie}$$

$$F(p) \bullet\!\!-\!\!-\!\!○ f(t)$$

Rechenregeln

Konstante Faktoren: Vor der Oberfunktion stehende konstante Faktoren bleiben bei der **LAPLACE-Transformation** unverändert:

$$af(t) \bullet\!\!-\!\!-\!\!○ aF(p)$$

Additionssatz: Die **LAPLACE-Transformierte** einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der **LAPLACE-Transformierten** der einzelnen Funktionen:

$$f_1(t) + f_2(t) \bullet\!\!-\!\!-\!\!○ F_1(p) + F_2(p)$$

Zu berechnen sind die LAPLACE-Transformierten $F(p)$ der folgenden Funktionen. Dabei ist für $t < 0$ stets $f(t) = 0$ vorausgesetzt.

5.1. (Bild 5.1) Einheitssprung $f(t) = 1$

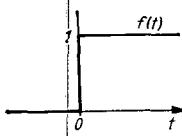


Bild 5.1.
Aufgabe 5.1 Einheitssprung

5.2. (Bild 5.2) DIRAC-Impuls (Nadelimpuls) für $\delta \rightarrow 0$; Hinweis: Grenzübergang erst nach erfolgter Integration

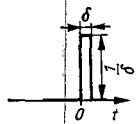


Bild 5.2.
Aufgabe 5.2 Nadelimpuls

5.3. (Bild 5.3) $f(t) = t$

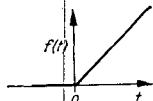


Bild 5.3. Aufgabe 5.3

5.4. (Bild 5.4) $f(t) = t^2$

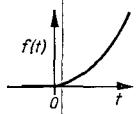


Bild 5.4. Aufgabe 5.4

5.5. $f(t) = t^3$ 5.6. $f(t) = t^n$

5.7. $f(t) = 3(t - 3)^2$

$$5.8. f(t) = (t + 1)^2 - (t - 1)^2$$

$$5.9. f(t) = 3(t + 2)^2 - 2(t - 3)^2$$

$$5.10. f(t) = e^{at} \quad 5.11. f(t) = e^{j\omega t}$$

$$5.12. f(t) = e^{a+j\omega t} \quad 5.13. f(t) = 2 - e^{3t}$$

$$5.14. f(t) = 2 + 6t + 4t^2 - 2e^{3t}$$

$$5.15. f(t) = te^{at}$$

$$5.16. f(t) = \frac{1}{a^2} [1 + (at - 1) e^{at}]$$

$$5.17. f(t) = \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \quad 5.18. f(t) = \frac{1}{a} e^{-t/a}$$

$$5.19. f(t) = \frac{1}{a} (e^{at} - 1)$$

$$5.20. f(t) = \frac{1}{a^2} (e^{at} - at - 1)$$

$$5.21. f(t) = (1 - e^{-t/a})$$

$$5.22. f(t) = ae^{-t/a} + t - a$$

$$5.23. f(t) = \frac{1}{ab} \left(1 + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{a - b} \right)$$

Die folgenden Funktionen sind mit Hilfe der EULERSchen Formeln für komplexe Zahlen der LAPLACE-Transformation zu unterziehen:

$$5.24. f(t) = \sin \omega t \quad 5.25. f(t) = \cos \omega t$$

$$5.26. f(t) = Ae^{-at} \sin \omega t$$

$$5.27. f(t) = Ae^{-at} \cos \omega t$$

$$5.28. f(t) = \sin (\omega t + \varphi)$$

$$5.29. f(t) = \sinh \omega t \quad 5.30. f(t) = \cosh \omega t$$

5.2. Tafel einiger Laplace-Transformationen

| Nr. | Originalfunktion $f(t)$ | Bildfunktion $F(p)$ |
|-----|---------------------------------------|----------------------|
| 1 | $\delta(t)$ (DIRAC- oder Nadelimpuls) | 1 |
| 2 | $f(t) = 1$ (Einheitssprung) | $\frac{1}{p}$ |
| 3 | t | $\frac{1}{p^2}$ |
| 4 | t^n | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |

| Nr. | Originalfunktion $f(t)$ | Bildfunktion $F(p)$ |
|-----|--|---------------------------------------|
| 5 | e^{at} | $\frac{1}{p - a}$ |
| 6 | $e^{j\omega t}$ | $\frac{1}{p - j\omega}$ |
| 7 | te^{at} | $\frac{1}{(p - a)^2}$ |
| 8 | $\frac{1}{a} e^{-t/a}$ | $\frac{1}{ap + 1}$ |
| 9 | $\frac{1}{a} (e^{at} - 1)$ | $\frac{1}{p(p - a)}$ |
| 10 | $\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$ | $\frac{1}{p^2(p + a)}$ |
| 11 | $\frac{1}{a^2 + b^2} \left(e^{-at} + \frac{a}{b} \sin bt - \cos bt \right)$ | $\frac{1}{(p + a)(p^2 + b^2)}$ |
| 12 | $\frac{a}{a^2 + b^2} \left(\cos bt + \frac{b}{a} \sin bt - e^{-at} \right)$ | $\frac{p}{(p + a)(p^2 + b^2)}$ |
| 13 | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |
| 14 | $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |
| 15 | $\frac{t}{2} \sin \omega t$ | $\frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| 16 | $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$ |
| 17 | $\cosh \omega t$ | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$ |
| 18 | $e^{-at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$ |
| 19 | $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$ |

5.3. Anwendung weiterer Rechenregeln

Durch Beachtung der folgenden Regeln lassen sich auch kompliziertere Originalfunktionen mit der LAPLACE-Transformation behandeln.

Verschiebungssatz:

$$f(t - a) \circ \bullet e^{-ap} F(p)$$

Ähnlichkeitssatz:

$$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Dämpfungssatz:

$$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(p + a)$$

Unter Anwendung dieser Regeln und Zuhilfenahme der unter 5.2. aufgeführten Funktionentafel sind die LAPLACE-Transformierten der folgenden Funktionen zu ermitteln.

5.31. $f(t) = (t - 3)^2; f(t) = 0$ für $t \leq 3$

5.32. $f(t) = (t - a)^3; f(t) = 0$ für $t \leq a$

5.33. $f(t) = \sin \omega(t - T/4)$

5.34. $f(t) = e^{(t-a)}; f(t) = 0$ für $t \leq a$

5.35. $f(t) = e^{at-b}; f(t) = 0$ für $t \leq b/a$

5.36. $f(t) = e^{-t/2}$ 5.37. $f(t) = 3e^{t/3}$

5.38. $f(t) = \frac{1}{a} e^{-t/a}$ 5.39. $f(t) = \sin \omega t / 2$

5.40. $f(t) = e^{-t/5} \cos \omega t / 5$

5.41. $f(t) = \frac{t/4 \sin \omega t / 4}{2\omega}$

5.42. $f(t) = e^{-at} \sin \omega t$

5.43. $f(t) = t^2 e^{-t}$ 5.44. $f(t) = \frac{e^{j\omega t}}{e^{3t}}$

5.45. $f(t) = e^{-2t} \cosh 2t$

5.4. Transformation der Ableitung und des Integrals einer Funktion

Differentiationssatz: $f'(t) \circ \bullet pF(p) - f(0)$

$$f''(t) \circ \bullet p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

Integrationssatz: $\int f(t) dt \circ \bullet \frac{1}{p} F(p) + \frac{1}{p} [\int f(t) dt]_{t=0}$

Der zweite Term des Differentiationssatzes ist die Integrationskonstante, d.h. der Wert der Stammfunktion von $f(t)$ für $t = 0$. Er verschwindet, wenn als Anfangsbedingung die Stammfunktion den Wert 0 hat.

Man kann die genannten Sätze auch dadurch ableiten, daß man die Funktion $f(t)$ zuerst differenziert (integriert) und dann transformiert.

Für folgende Aufgaben ist die LAPLACE-Transformierte der ersten Ableitung $f'(t)$ und ab Aufgabe 5.50 auch die zweite Ableitung $f''(t)$ zu berechnen.

5.46. $f(t) = t$

5.47. $f(t) = t^3$

5.48. $f(t) = e^{-at}$

5.49. $f(t) = te^{at}$

5.50. $f(t) = \frac{1}{a} e^{-t/a}$

5.51. $f(t) = \sin \omega t$

5.52. $f(t) = \cos \omega t$

5.53. $f(t) = \frac{\sinh \omega t}{\omega}$

5.54. $f(t) = Ae^{-at} \sin \omega t$

Für folgende Funktionen ist die LAPLACE-Transformierte des Integrals $\int f(t) dt$ unter Berücksichtigung der Integrationskonstanten zu berechnen.

5.55. $f(t) = t$

5.56. $f(t) = t^3$

5.57. $f(t) = e^{at}$

5.58. $f(t) = ae^{-t/a}$

5.59. $f(t) = te^{at}$

5.60. $f(t) = \sin \omega t$

5.61. $f(t) = Ae^{-at} \cos \omega t$

5.62. $f(t) = 3 \sinh 3t$

5.5. Inverse Laplace-Transformation (Rücktransformation)

Die Aufgabe der inversen LAPLACE-Transformation besteht in der Auffindung der Originalfunktion $f(t)$ aus der gegebenen Bildfunktion $F(p)$. Symbolisch wird geschrieben:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) \quad \text{oder auch}$$

$$F(p) \bullet\bullet\circ f(t)$$

In einfachen Fällen findet man die Originalfunktion bereits durch Vergleich mit entsprechenden Tafelwerten (S. 55f.). Bei komplizierteren Bildfunktionen ist es günstig, vor der Rücktransformation eine zweckmäßige Umformung (Abspalten konstanter Faktoren, Erweitern, Zerlegen in einzelne Summanden usw.) auszuführen.

5.5.1. Inverse Transformation durch elementare Umformung

Zu den folgenden Bildfunktionen ist durch einfache Umformung und unmittelbaren Vergleich mit der Tafel Abschnitt 5.2. (S. 55f.) die entsprechende Originalfunktion zu ermitteln.

$$5.63. \quad F(p) = \frac{6}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{3}{p}$$

$$5.64. \quad F(p) = \frac{6}{p^4} - \frac{1}{p^3}$$

$$5.65. \quad F(p) = \left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p} \right)^2$$

$$5.66. \quad F(p) = \frac{n-1}{p^n}$$

$$5.67. \quad F(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} \right)^2 - \frac{9}{p^4}$$

$$5.68. \quad F(p) = 12(p^{-6} + p^{-4})$$

$$5.69. \quad F(p) = \frac{3}{p-3} \quad 5.70. \quad F(p) = \frac{j}{jp-\omega}$$

$$5.71. \quad F(p) = \frac{\omega^2}{\omega p - 1}$$

$$5.72. \quad F(p) = \frac{4}{4p-1}$$

$$5.73. \quad F(p) = \frac{5}{15p+3}$$

$$5.74. \quad F(p) = \frac{1}{p+\omega} + \frac{1}{p-\omega}$$

$$5.75. \quad F(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$5.76. \quad F(p) = 0,5 \left(\frac{1}{p+j\omega} + \frac{1}{p-j\omega} \right)$$

$$5.77. \quad F(p) = \frac{1}{p+1/RC}$$

$$5.78. \quad F(p) = \frac{E}{R(p+1/RC)}$$

$$5.79. \quad F(p) = \frac{1}{p^2 + 100}$$

$$5.80. \quad F(p) = \frac{4p}{p^2 + 64}$$

$$5.81. \quad F(p) = \frac{\omega-1}{p^2 + \omega^2}$$

$$5.82. \quad F(p) = \frac{15p}{3p^2 + 6,75}$$

$$5.83. \quad F(p) = \frac{\omega^2}{a^2p^2 - \omega^2}$$

$$5.84. \quad F(p) = 1 - \frac{p^2 + \omega^2 - \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$5.85. \quad F(p) = \frac{2}{p^2 + 4p + 8}$$

$$5.86. \quad F(p) = \frac{15}{p^2 + 2p + 26}$$

$$5.87. \quad F(p) = \frac{3p+12}{p^2 + 8p + 25}$$

$$5.88. \quad F(p) = \frac{0,1p}{(p+0,1\omega)^2 - 0,2p\omega}$$

5.5.2. Inverse Transformation durch Partialbruchzerlegung

Ist die Bildfunktion in der Form $F(p) = \frac{ap^n + bp^{n-1} + \dots}{(p-d)(p-e)(p-f)\dots}$ gegeben, so kann sie in eine Summe von Einzelbrüchen (Partialbrüchen)

$$F(p) = \frac{A}{p-d} + \frac{B}{p-e} + \frac{C}{p-f} + \dots$$

zerlegt werden. Die Werte von A, B, C, \dots werden bestimmt, indem diese Brüche auf den Hauptnenner gebracht,

$$F(p) = \frac{A(p-e)(p-f)\dots + B(p-d)(p-f)\dots + C(p-d)(p-e)\dots}{(p-d)(p-e)(p-f)\dots},$$

die im Zähler dieses Bruches stehenden Produkte ausmultipliziert und die gleich großen Potenzen von p zusammengefaßt werden. Die zu den p^n, p^{n-1}, \dots gehörigen Faktoren werden dann mit den entsprechenden Koeffizienten a, b, \dots , die im Zähler der gegebenen Funktion $F(p)$ stehen, verglichen. Dies liefert n Gleichungen, aus denen die Werte für A, B, \dots berechnet werden können.

Bei mehrfachen Wurzelfaktoren im Nenner ist nach

$$F(p) = \frac{A}{p-d} + \frac{B}{(p-d)^2} + \dots$$

zu zerlegen.

$$5.89. F(p) = \frac{3}{p(3-p)}$$

$$5.90. F(p) = \frac{5p}{(p-1)(p+4)}$$

Zu folgenden Bildfunktionen $F(p)$ ist die Originalfunktion $f(t)$ zu ermitteln:

$$5.91. F(p) = \frac{2p+1}{p^2+p}$$

$$5.92. F(p) = \frac{3p^2+12p+11}{(p+1)(p+2)(p+3)}$$

$$5.93. F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

$$5.94. F(p) = \frac{p+6}{p^2+5p+6}$$

$$5.95. F(p) = \frac{3(p+1)}{p^2-5p+4}$$

$$5.96. F(p) = \frac{p+4}{(p+3)^2}$$

$$5.97. F(p) = \frac{p^2+p+1}{p^2(p-2)}$$

$$5.98. F(p) = \frac{2p^2+6p-6}{p^2(p-3)}$$

$$5.99. F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$$

$$5.100. F(p) = \frac{p^2-3}{p^3-9p}$$

5.5.3. Inverse Transformation mit Hilfe des Faltungssatzes

Wenn die Bildfunktion $F(p)$ in ein Produkt von zwei Funktionen $F_1(p)$ und $F_2(p)$ zerlegt werden kann, deren Inverse $f_1(t)$ und $f_2(t)$ einzeln existieren, läßt sich die inverse LAPLACE-Transformation über den Faltungssatz ausführen. Dazu ist es erforderlich, $f_1(t)$ durch $f_1(t-\tau)$ und $f_2(t)$ durch $f_2(\tau)$ zu ersetzen. Sodann wird über das Produkt $f_1(t-\tau)f_2(\tau)$ integriert, wobei t als Konstante zu behandeln ist:

$$F_1(p)F_2(p) \bullet \circ \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau) d\tau$$

Zu folgenden Bildfunktionen $F(p)$ ist die Originalfunktion $f(t)$ mit Hilfe des Faltungssatzes zu ermitteln:

$$5.101. \quad F(p) = \frac{1}{(p+a)(p+b)}$$

$$5.102. \quad F(p) = \frac{1}{(p+3)p^2}$$

$$5.103. \quad F(p) = \frac{1}{(p-1)p^3}$$

$$5.104. \quad F(p) = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$$

$$5.105. \quad F(p) = \frac{1}{(3p+1)^2}$$

$$5.106. \quad F(p) = \frac{\omega}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$$

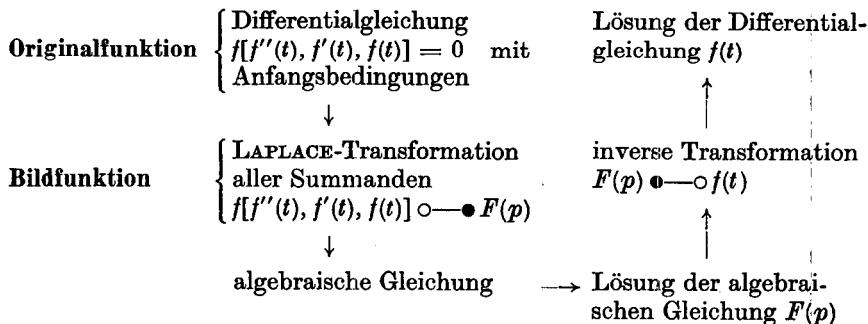
$$5.107. \quad F(p) = \frac{1}{(ap+1)p}$$

$$5.108. \quad F(p) = \frac{1}{(4p+1)^2 p}$$

5.6. Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung

Viele Vorgänge in der Technik (z. B. Schwingungen) können nicht durch einfache algebraische Gleichungen, sondern nur durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Anstelle der Variablen treten dann Funktionen bzw. deren Ableitungen. Handelt es sich dabei um Funktionen mit nur einer Variablen, so spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Lösungsgang:



Die Lösung der algebraischen Gleichung $F(p)$ bringt man in eine Form, die eine einfache Anwendung der Funktionentafel Abschn. 5.2. (S. 55f.) ermöglicht.

Die folgenden Differentialgleichungen sind unter Berücksichtigung der angegebenen Anfangsbedingungen $f(0)$ bzw. $f'(0)$ zu lösen:

$$5.109. \quad f'(t) + f(t) = 0; \quad f(0) = 3$$

$$5.110. \quad f'(t) + f(t) + 5 = 0; \quad f(0) = 0$$

$$5.111. \quad f'(t) - f(t) + t = 1; \quad f(0) = 2$$

$$5.112. \quad f'(t) + f(t) = 3t + 3; \quad f(0) = 1$$

$$5.113. \quad f'(t) - f(t) = 8 - 7t; \quad f(0) = 2$$

$$5.114. \quad f'(t) + 3f(t) = 7e^{t/2}; \quad f(0) = 3$$

$$5.115. \quad f'(t) - 4f(t) = -e^{3t}; \quad f(0) = 2$$

$$5.116. \quad f'(t) - jf(t) = e^{-jt}; \quad f(0) = 0$$

$$5.117. \quad f'(t) + \frac{\omega}{j} f(t) = \frac{\omega e^{-j\omega t}}{j}; \quad f(0) = 1$$

$$5.118. \quad f'(t) = \omega f(t) = \omega e^{-\omega t}; \quad f(0) = 0$$

$$5.119. \quad f'(t) + j\omega f(t) = \omega(ja + be^{j\omega t}); \quad f(0) = a$$

$$5.120. \quad f''(t) + 9f(t) = 0; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 9$$

$$5.121. \quad f''(t) + f(t) = 0; \quad f(0) = 4; \quad f'(0) = 3$$

$$5.122. \quad f''(t) - a^2 f(t) = 0; \quad f(0) = 2; \quad f'(0) = 0$$

$$5.123. \quad f''(t) - 3f'(t) + 2f(t) = 0; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 1$$

$$5.124. \quad f''(t) - f'(t) = e^t; \quad f(0) = 0; \quad f'(0) = 1$$

5.125. $f''(t) + 10f'(t) + 16f(t) = 0; f(0) = 0; f'(0) = -6$

5.126. $f''(t) - f'(t) = 2t - t^2; f(0) = 0; f'(0) = 2$

5.127. $f''(t) + 2f'(t) = e^t; f(0) = 0; f'(0) = 1$

5.128. $f'(t) + 2af(t) + (a^2 + \omega^2)F(p) = 0; f(0) = 0; f'(0) = \omega$

5.7. Berechnung von Schaltvorgängen mittels Laplace-Transformation

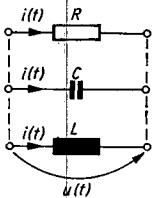


Bild 5.5. Strom-Zeit-Funktionen

| Größe | Formel |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| Spannung am Kondensator | $u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$ |
| Strom im Kondensator | $i(t) = C \frac{du}{dt} = Cu'(t)$ |
| Spannung an der Induktivität | $u(t) = L \frac{di}{dt} = Li'(t)$ |
| Strom in der Induktivität | $i(t) = 1/L \int u(t) dt$ |
| Spannung am ohmschen Widerstand | $u(t) = Ri(t)$ |
| Zeitkonstante | $\tau = L/R$ bzw. $\tau = RC$ |

Lösungsgang:

1. Aufstellen der Differentialgleichung mit den zeitabhängigen Funktionen $i(t)$ bzw. $u(t)$ nach dem Knoten- und Maschensatz
2. Transformation in den Bildbereich unter Beachtung der Anfangsbedingungen
3. Lösung der Gleichung nach $i(p)$ bzw. $u(p)$
4. Rücktransformation in den Originalbereich

5.129. (Bild 5.6) Berechne den zeitlichen Verlauf des Stromes nach Einschalten der konstanten Gleichspannung U ; $i(0) = 0$.

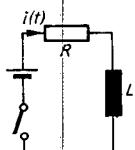


Bild 5.6. Aufgabe 5.129

5.130. (Bild 5.7) Berechne den zeitlichen Verlauf der Spannung $u(t)$ am Kondensator nach Einschalten der konstanten Gleichspannung U ; $u_C(0) = 0$.

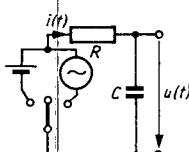


Bild 5.7.
Aufgaben 5.130 bis 5.132

5.131. (Bild 5.7) Berechne den zeitlichen Verlauf der Spannung $u(t)$ am Kondensator nach Einschalten einer sinusförmigen Wechselspannung $u = \hat{u} \sin \omega t$; $u_C(0) = 0$.

5.132. (Bild 5.7) Berechne den zeitlichen Verlauf des Ladestromes, wenn der Kondensator schon vor dem Einschalten der Gleichspannung U mit der Spannung $U_0 < U$ geladen ist.

5.133. (Bild 5.8) Berechne den zeitlichen Verlauf des Stromes, wenn die konstante Gleichspannung U an den noch ungeladenen Kondensator geschaltet wird. Die Zuleitung ist widerstandslos zu denken.

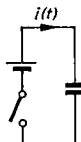


Bild 5.8. Aufgabe 5.133

5.134. (Bild 5.9) Welchen zeitlichen Verlauf hat der Strom, wenn die Gleichspannung U an eine Reihenschaltung aus L und C bei widerstandsloser Zuleitung gelegt wird?

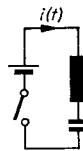


Bild 5.9. Aufgabe 5.134

5.135. (Bild 5.10) Welchen zeitlichen Verlauf hat der durch eine Drossel fließende Strom, nachdem diese durch einen Schalter kurzgeschlossen wurde ($R_2 \ll R_1$)?

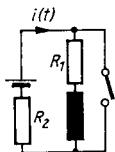


Bild 5.10. Aufgabe 5.135

5.136. (Bild 5.11) Welchen zeitlichen Verlauf hat die Spannung am Kondensator eines Integrergliedes nach dem Umschalten von der konstanten Gleichspannung U_0 auf die Spannung $U > U_0$?

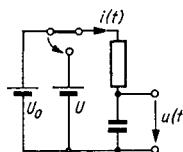


Bild 5.11.
Aufgaben 5.136 und 5.137

5.137. Welchen zeitlichen Verlauf hat in der vorigen Aufgabe der Strom nach dem Umschalten?

5.138. (Bild 5.12) Berechne den zeitlichen Verlauf der Spannung am Widerstand R nach dem Einschalten einer sinusförmigen Wechselspannung $u = \hat{u} \sin \omega t$?

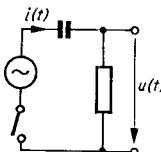


Bild 5.12. Aufgabe 5.138

5.139. (Bild 5.13) Berechne den zeitlichen Verlauf des Stromes durch die Induktivität L nach dem Einschalten der konstanten Gleichspannung U .

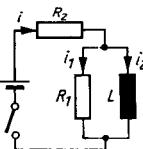


Bild 5.13. Aufgabe 5.139

5.8. Berechnung zeitabhängiger Ausgangsgrößen passiver Vierpole

Wirkt eine sinusförmige Wechselspannung U_e auf den Eingang eines passiven Vierpols, so kann mit der üblichen komplexen Rechnung unter Benutzung der KIRCHHOFFSchen Regeln, Spannungsteilerregel usw. die am Ausgang wirkende Spannung U_a bestimmt werden. Das

Verhältnis $\frac{U_a}{U_e} = F(j\omega) = G_u$ nennt man den Übertragungsfaktor, der das stationäre Verhalten des Vierpols gegenüber sinusförmigen Wechselspannungen kennzeichnet (siehe Abschn. 3. sowie die Aufgaben 657...671 im Bd. II). Wirkt nun auf diesen Vierpol irgendein zeitabhängiges Eingangssignal $u_e(t)$, so liefert dieser als „Antwort“ ein entsprechendes Ausgangssignal $u_a(t)$. Mit den LAPLACE-Transformierten besteht dann der analoge Zusammenhang

$$\frac{U_a(p)}{U_e(p)} = F(p),$$

wobei $F(p)$ als Übertragungsfunktion bezeichnet wird, in der $j\omega$ durch den Parameter p ersetzt ist. Dabei darf aber nicht (wie sonst üblich) j^2, j^3 usw. durch $-1, -j$ usw. ersetzt werden!

Ist also die Übertragungsfunktion eines Vierpols bekannt, so kann mit Hilfe der LAPLACE-Transformation das Ausgangssignal $u_a(t)$ für jedes beliebige Eingangssignal $u_e(t)$ auf verhältnis-

mäßig einfacherem Weg berechnet werden:

$$u_a(p) = F(p) u_e(p).$$

Durch Rücktransformation in den Zeitbereich erhält man dann die gesuchte Funktion $u_a(t)$.

Aufgaben 5.140 bis 5.147. Wie lautet die Übertragungsfunktion $F(p)$ der folgenden Schaltungen, und welches Signal $u_a(t)$ (Sprungantwort) ergibt sich am Ausgang, wenn an den Eingang die konstant bleibende Spannung $f(t) = 1$ (Einheitssprung) gegeben wird?

5.140. (Bild 5.14)

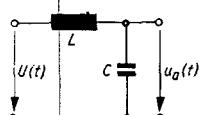


Bild 5.14. Aufgabe 5.140

5.141. (Bild 5.15)

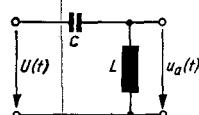


Bild 5.15. Aufgabe 5.141

5.142. (Bild 5.16)

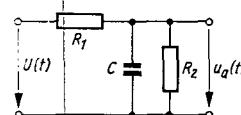


Bild 5.16. Aufgabe 5.142

5.143. (Bild 5.17)

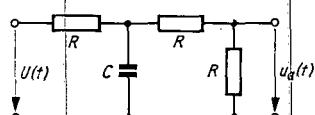


Bild 5.17.
Aufgabe 5.143

5.144. (Bild 5.18)

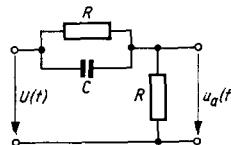


Bild 5.18. Aufgabe 5.144

5.145. (Bild 5.19)

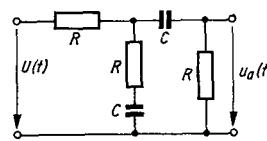


Bild 5.19.
Aufgabe 5.145

5.146. (Bild 5.20)

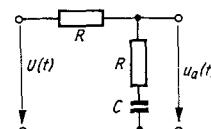


Bild 5.20. Aufgabe 5.146

5.147. (Bild 5.21)

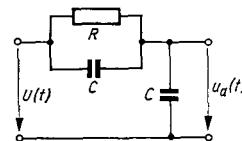


Bild 5.21. Aufgabe 5.147

LÖSUNGEN

1. Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen

$$1.1. e^{j0,5} = \underline{0,878 + j 0,479}$$

$$1.2. \sqrt{2} e^{j15^\circ} = \underline{1,366 + j 0,366}$$

$$1.3. 4e^{j75^\circ} = \underline{1,035 + j 3,864}$$

$$1.4. 0,1e^{-j2,5^\circ} = \underline{0,100 - j 0,004}$$

$$1.5. \sqrt{9e^{j90^\circ}} = 3e^{j45^\circ} = \underline{2,121 (1 + j)}$$

$$1.6. \sqrt{e^{j270^\circ}} = e^{j135^\circ} = \underline{0,707 (-1 + j)}$$

$$1.7. 0,4(-0,71 + j 0,71) = \underline{0,283 (-1 + j)}$$

$$1.8. \sqrt{\frac{5}{j}} = \sqrt{-j5} = \underline{1,58 (-1 + j)}$$

$$1.9. \sqrt{\sqrt{2} e^{j45^\circ}} = 1,19e^{j22,5^\circ} = \underline{1,10 + j 0,46}$$

$$1.10. \sqrt{\sqrt{2} e^{j225^\circ}} = 1,19e^{j112,5^\circ} = \underline{-0,46 + j 1,10}$$

$$1.11. \sqrt{\sqrt{2} e^{j315^\circ}} = 1,19e^{j157,5^\circ} = \underline{-1,10 + j 0,46}$$

$$1.12. \sqrt{\sqrt{2} e^{j135^\circ}} = 1,19e^{j67,5^\circ} = \underline{0,46 + j 1,10}$$

$$1.13. \sqrt{3,61e^{-j56,8^\circ}} = 1,90e^{-j28,2^\circ} = \underline{1,67 - j 0,90}$$

$$1.14. j\sqrt{5 - j4} = j\sqrt{6,40e^{-j38,7^\circ}} =$$

$$= j 2,53e^{-j10,4^\circ} = \underline{0,84 + j 2,39}$$

$$1.15. j\sqrt{3 + j6} = j\sqrt{6,71e^{j63,4^\circ}} =$$

$$= j 2,59e^{j31,7^\circ} = \underline{-1,36 + j 2,20}$$

$$1.16. j\sqrt{2,65 - j1,68} = j\sqrt{3,14}e^{-j16,2^\circ} =$$

$$= \underline{0,49 + j 1,70}$$

$$1.17. j\sqrt{5,10e^{j11,3^\circ}} = j2,26e^{j5,7^\circ} =$$

$$= \underline{-0,22 + j 2,25}$$

$$1.18. \frac{1}{j}\sqrt{5,83e^{j59^\circ}} = \frac{1}{j}(2,10 + j 1,19) =$$

$$= \underline{1,19 - j 2,10}$$

$$1.19. \sqrt{\frac{13(5 - j)}{26}} = \sqrt{2,5 - j 0,5} = 1,6e^{-j5,65^\circ} \\ = \underline{1,59 - j 0,157}$$

$$1.20. \sqrt{\frac{(1 + j)^2}{2}} = \sqrt{j} = \sqrt{e^{j90^\circ}} = e^{j45^\circ} = \\ = \underline{0,707 (1 + j)}$$

$$1.21. \sqrt{\frac{1}{e^{j90^\circ}}} = \sqrt{e^{-j90^\circ}} = \cos(-45^\circ) + \\ + j \sin(-45^\circ) = \underline{0,707 (1 - j)}$$

$$1.22. \sqrt{\frac{1 - j}{2}} = \sqrt{0,5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \\ = 0,841(\cos 22,5^\circ - j \sin 22,5^\circ) = \underline{0,78 - j 0,32}$$

$$1.23. \sqrt[3]{e^{j90^\circ}} = e^{j30^\circ} = \underline{0,866 + j 0,5}$$

$$1.24. 1 - 2\sqrt{j} + j = 1 + 2\sqrt{2}(1 + j) + j = \\ = \underline{-1,828(1 + j)}$$

$$1.25. \frac{2(1 + j)}{\sqrt{2}(1 + j)} = \sqrt{2} \text{ oder auch: } \frac{\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{e^{j45^\circ}} = \underline{\sqrt{2}}$$

$$1.26. e^2 \cdot e^{j3} = \underline{7,39e^{j171,9^\circ}}$$

$$1.27. \frac{1}{e^{1,5}} \cdot e^{j0,8} = \underline{0,223e^{j45,8^\circ}}$$

$$1.28. \frac{1}{e^{0,75}} \cdot e^{-j0,4} = \underline{0,472e^{-j22,9^\circ}}$$

$$1.29. \sqrt{2,316e^{-j71,0^\circ}} = \underline{1,52e^{-j35,5^\circ}}$$

$$1.30. \sqrt{0,287e^{j34,4^\circ}} = \underline{0,535e^{j17,2^\circ}}$$

$$1.31. 4,95e^{j(0,9 - 1)} = \underline{4,95e^{-j5,7^\circ}}$$

$$1.32. \frac{1,105e^{j0,2}}{1,221e^{-j0,1}} = 0,90e^{j0,3} = \underline{0,90e^{j17,2^\circ}}$$

$$1.33. 1,105 + (\cos 0,2 + j \sin 0,2) = \\ = 2,085 + j 0,199 = \underline{2,094e^{j5,5^\circ}}$$

$$1.34. e^{0,2} (e^{j1,5} + e^{-j1,5}) = 2e^{0,2} \cos 1,5 = \underline{0,173}$$

$$1.35. \frac{1}{2} \cdot 2,226e^{j0,8} + 0,449e^{-j0,8} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2,226 (\cos 0,8 + j \sin 0,8) +$$

$$+ 0,449 (\cos 0,8 - j \sin 0,8) = (0,932 + j 0,637) = \\ = \underline{1,13e^{j34,4^\circ}}$$

$$1.36. \frac{1}{2} \cdot 2,718 (\cos 1 + j \sin 1) -$$

$$- 0,3679 (\cos 1 - j \sin 1) = 0,6350 + j 1,2985 = \\ = \underline{1,45e^{j63,9^\circ}}$$

$$1.37. \frac{1,1174 + j 1,1396}{2,0807 + j 0,6105} = \frac{1,596e^{j45,6^\circ}}{2,168e^{j16,4^\circ}} = \underline{0,736e^{j29,2^\circ}}$$

$$1.38. \underline{2,77 + j 1,57} \quad 1.39. \underline{-2,30 - j 0,35}$$

$$1.40. \underline{0,77 + j 0,17}$$

$$1.41. \ln(5e^{j58,1^\circ}) = \ln 5 + \ln(e^{j58,1^\circ}) = \\ = \underline{1,61 + j 0,93}$$

$$1.42. \ln(0,447e^{-j26,6^\circ}) = \underline{-0,81 - j 0,46}$$

$$1.43. \underline{0,35 + j 3,93}$$

$$1.44. \ln(0,0539e^{j21,8^\circ}) = \underline{-2,92 + j 0,38}$$

$$1.45. \ln(50e^{-j0,2^\circ}) = \underline{3,9120 - j 0,0035}$$

$$1.46. \frac{1}{2} \ln(4,472e^{-j63,4^\circ}) = \underline{0,75 - j 0,55}$$

$$1.47. \ln(3e^{j90^\circ}) = \underline{1,10 + j 1,57}$$

$$1.48. -\ln(3e^{j90^\circ}) = \underline{-(1,10 + j 1,57)}$$

$$1.49. \frac{1}{2} \ln(3e^{j90^\circ}) = \underline{0,55 + j 0,79}$$

$$1.50. \sinh 0 \cdot \cos 1 + j \cosh 0 \cdot \sin 1 = \underline{j 0,8415}$$

$$1.51. \underline{-j 0,4794}$$

$$1.52. \sinh 0,5 \cdot \cos 1,5 + j \cosh 0,5 \cdot \sin 1,5 = \\ = \underline{0,0369 + j 1,1248}$$

$$1.53. \underline{0,6187 - j 0,9593} \quad 1.54. \underline{0,0730 + j 0,9507}$$

$$1.55. \underline{-0,2013}$$

$$1.56. \underline{-2,0088 - j 1,6156}$$

$$1.57. \underline{1,2434 + j 2,1114}$$

$$1.58. \cosh 1 \cdot \cos 1 + j \sinh 1 \cdot \sin 1 =$$

$$= \underline{0,8337 + j 0,9889}$$

$$1.59. \underline{0,6216}$$

$$1.60. \underline{-0,4933 + j 0,5789}$$

$$1.61. \underline{0,9318 - j 0,6371} \quad 1.62. \underline{-2,5092}$$

$$1.63. \underline{0,7071}$$

$$1.64. \frac{\sin 2 \cdot 0}{\cos 2 \cdot 0 + \cos 2\pi} + j \frac{\sin 2\pi}{\cos 2 \cdot 0 + \cos 2\pi} = 0$$

$$1.65. \underline{1,0839 + j 0,2718} \quad 1.66. \underline{0,2155 + j 0,2962}$$

$$1.67. \tanh(\cos 60^\circ - j \sin 60^\circ) =$$

$$= \tanh(0,5 - j 0,866) = \underline{0,8500 - j 0,7139}$$

$$1.68. \underline{0,9994 + j 0,0074} \quad 1.69. \underline{0,6043 + j 0,1600}$$

$$1.70. \tanh\left(-j \frac{1}{3}\right) = 0 - \frac{j \sin(0,667)}{\cosh 0 + \cos(0,667)} = \\ = \underline{-j 0,346}$$

$$1.71. j = e^{j90^\circ}; \tanh 2a = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{1 + 1} = 0;$$

$$\tan 2b = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{0} = \infty; 2b = 1,57; b = 0,785;$$

$$(a + jb) = \underline{j 0,785}$$

$$1.72. (2 + j 2) = 2 \sqrt{2} e^{j45^\circ};$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2}{1 + 8} = 0,444; 2a = 0,478;$$

$$a = 0,239; \tan 2b = -\frac{4}{7}; 2b = 2,62; b = 1,31;$$

$$(a + jb) = \underline{0,24 + j 1,31}$$

$$1.73. (0,253 + j 0,519) = 0,577e^{j64^\circ};$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 0,577 \cdot 0,4384}{1 + 0,3329} = 0,3796; 2a = 0,40;$$

$$a = 0,2; \tan 2b = \frac{2 \cdot 0,577 \cdot 0,8988}{1 - 0,3329} = 1,555;$$

$$2b = 1,00; b = 0,5; (a + jb) = \underline{0,2 + j 0,5}$$

$$1.74. (0,923 + j 0,157) = 0,936e^{j9,7^\circ};$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 0,936 \cdot 0,9857}{1 + 0,8761} = 0,9835; 2a = 2,4;$$

$$a = 1,2; \tan 2b = \frac{2 \cdot 0,936 \cdot 0,1685}{1 - 0,8761} = 2,5459;$$

$$2b = 1,20; b = 0,60; (a + jb) = \underline{1,2 + j 0,6}$$

$$1.75. \tanh 2a = 0,03894; a = 0,02;$$

$$\tan 2b = 0,6577; b = 0,33; (a + jb) = \underline{0,02 + j 0,33}$$

$$1.76. \tanh 2a = 0,8052; a = 0,56; \tan 2b = 2,5095;$$

$$b = 0,60; (a + jb) = \underline{0,56 + j 0,60}$$

$$1.77. (0,7 - j 0,2) = 0,728e^{-j16^\circ}; \tanh 2a = 0,9148;$$

$$a = 0,778; \tan 2b = -0,8538; b = -0,353;$$

$$(a + jb) = \underline{0,777 - j 0,353}$$

1.78. $\tanh 2a = 0,9640$; $a = 1$; $\tan 2b = -2,197$;
 $b = -0,6$; $(a + jb) = \underline{1 - j 0,6}$

1.79. $\tanh 2a = 0,3797$; $2a = 0,4$; $a = 0,2$;
 $\tan 2b = 0,6845$; $2b = 0,6$; $b = 0,3$;
 $(a + jb) = \underline{0,2 + j 0,3}$

1.80. $\tanh 2a = 0,7619$; $2a = 1$; $a = 0,5$;
 $\tan 2b = 6,1482$; $2b = 1,410$; $b = 0,7$;
 $(a + jb) = \underline{0,5 + j 0,7}$

1.81. $\Delta A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = \underline{7}$

1.82. $\Delta A = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = (4 \cdot 9 - 7 \cdot 5) = \underline{1}$

1.83. $\Delta A = (10 \cdot 10 + 9 \cdot 11) = \underline{199}$

1.84. $\Delta A = (1 \cdot 1 - 0) = \underline{1}$

1.85. $\Delta A = (ab - ab) = \underline{0}$

1.86. $\Delta A = (2b - b) = \underline{b}$

1.87. $\Delta A = (a + b)(b + c) + (c + a)(c + b) =$
 $= \underline{(b + c)(2a + b + c)}$

1.88. Mit den Elementen der 2. Zeile ($3x, 4x$) lautet die Determinante $\Delta A = 5 \cdot 4x - 6 \cdot 3x = 12$, woraus $x = 6$ folgt; $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$

1.89. Aus $2x \cdot 6 - 5 \cdot 12 = 3(6x - 5 \cdot 12)$ folgt

$x = 20$; $A = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$; $\Delta A = \underline{60}$

1.90. $\Delta A = 5 \cdot 11 - 5a_{21} = 5$; $a_{21} = 10$;

$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$

1.91. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.92. $\Delta A = a(a + 3) - (a + 1)(a + 2) = \underline{-2}$

1.93. $\Delta A = a(a + 6) - (a + 2)(a + 4) = \underline{-8}$

1.94. $\Delta A = [3 \cdot 3 - (-2 \cdot 2)] = 13$;

$x = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} (33 + 32) = \underline{5}$

$y = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} (48 - 22) = \underline{2}$

1.95. $\Delta A = 8 \cdot (-5) - 5 \cdot 7 = -75$;

$x = -\frac{1}{75} \begin{vmatrix} 63 & 5 \\ 27 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{75} \cdot (-450) = \underline{6}$

$y = -\frac{1}{75} \begin{vmatrix} 8 & 63 \\ 7 & 27 \end{vmatrix} = -\frac{1}{75} \cdot (-225) = \underline{3}$

1.96. Nach Umformung ist

$2x - 5y = -1$

$5x - 8y = 11$; hieraus $\Delta A = -9$;

$x = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = \underline{7}$;

$y = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = \underline{3}$

1.97. Nach Umformung ist

$bx - ay = 0$

$x - y = (a - b)^2$; hieraus $\Delta A = -b + a$;

$x = \frac{1}{a - b} \begin{vmatrix} 0 & -a \\ (a - b)^2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{a(a - b)}$

$y = \frac{1}{a - b} \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & (a - b)^2 \end{vmatrix} = \underline{b(a - b)}$

1.98. Nach Umformung ist

$-bx + ay = 0$

$3x - 2y = 3a - 2b$; hieraus $\Delta A = 2b - 3a$;

$x = \frac{1}{2b - 3a} \begin{vmatrix} 0 & a \\ 3a - 2b & -2 \end{vmatrix} = \underline{a}$

$y = \frac{1}{2b - 3a} \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 3 & 3a - 2b \end{vmatrix} = \underline{b}$

1.99. Nach Umformung ist

$6x - 5y = 0$

$66x - 52y = 54$; $\Delta A = 18$; $x = \underline{15}$; $y = \underline{18}$

1.100. Nach Umformung ist

$x(a - b) + y(a + b) = 2a(a^2 - b^2)$

$x(a + b) - y(a - b) = 2b(a^2 - b^2)$;

$\Delta A = -2b(a^2 + b^2)$; $x = y = \underline{a^2 - b^2}$

1.101. $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$ 1.102. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

1.103. $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ 1.104. $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$

1.105. $\begin{pmatrix} ab & 1 \\ a^2 & a/b \end{pmatrix}$ 1.106. $\begin{pmatrix} 5 & 4,5 \\ 0,5 & 1,2 \end{pmatrix}$

1.107. $\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 12 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.108. $\begin{pmatrix} a-b & b-a \\ a-b & b-a \end{pmatrix} = (a-b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1.109. Aus der Definition der Determinante folgt
 $\Delta kA = k^2 \Delta A$

$$1.110. \begin{pmatrix} 0,5 & 2,5 \\ 4,5 & 3,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 & -2,5 \\ -4,5 & -2,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.111. \begin{pmatrix} 2+5 & 4+6 \\ 4+15 & 8+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 19 & 26 \end{pmatrix}; \Delta A = 2;$$

$$\Delta B = -4; \Delta AB = \underline{-8}$$

$$1.112. \begin{pmatrix} 2+8 & 1+6 \\ 10+24 & 5+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 34 & 23 \end{pmatrix};$$

ΔA und ΔB s. Aufgabe 1.111

$$1.113. \begin{pmatrix} 5+6 & 5+6 \\ 4+8 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = 16; \Delta B = 0; \Delta AB = \underline{0}$$

$$1.114. \begin{pmatrix} 4,5 & 5,5 \\ 5,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \Delta A = 4; \Delta B = -7;$$

$$\Delta AB = \underline{-28}$$

$$1.115. \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+3 \\ 24+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 26 \end{pmatrix};$$

Determinante nicht definiert

$$1.116. (30+4 \cdot 18+2) = (34 \cdot 20); \text{ Determinante nicht definiert}$$

$$1.117. AB = \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -11 & 11 \end{pmatrix};$$

nicht kommutativ

$$1.118. AB = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 11 & 24 \end{pmatrix};$$

kommutativ

$$1.119. AB = \begin{pmatrix} 46 & 44 \\ 33 & 38^{2/3} \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 46 & 44 \\ 33 & 38^{2/3} \end{pmatrix};$$

kommutativ

$$1.120. AB = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 28 & 52 \end{pmatrix}; BA = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 34 & 54 \end{pmatrix};$$

nicht kommutativ

$$1.121. U_e = Z_{11}I_e + Z_{12}I_a; U_a = Z_{21}I_e + Z_{22}I_a$$

$$1.122. U_e = A_{11}U_a + A_{12}I_a; I_e = A_{21}U_e + A_{22}I_a$$

$$1.123. 2x - 3y = 1 \quad x = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = \underline{5};$$

$$3x - 7y = -6 \quad y = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \underline{3}$$

1.124.

$$5x - 7y = -0,1 \quad x = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -0,1 & -7 \\ 1,7 & -9 \end{vmatrix} = \underline{3,2}$$

$$7x - 9y = 1,7 \quad y = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 5 & -0,1 \\ 7 & 1,7 \end{vmatrix} = \underline{2,3}$$

$$1.125. 4x - 1,9y = 1$$

$$8x - 3,9y = 1;$$

$$x = \frac{1}{-0,4} \begin{vmatrix} 1 & -1,9 \\ 1 & -3,9 \end{vmatrix} = \underline{5}; \quad y = \underline{10}$$

$$1.126. x = \underline{21}; \quad y = \underline{18}$$

$$1.127. x = \underline{15 \text{ V}}; \quad y = \underline{0,75 \text{ A}}$$

$$1.128. 4 \cdot U_2 + 100 \Omega \cdot I_2 = 50 \text{ V}$$

$$0,02 \text{ S} \cdot U_2 + 1 \cdot I_2 = 0,3 \text{ A};$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 50 \text{ V} & 100 \Omega \\ 0,3 \text{ A} & 1 \end{vmatrix} = \underline{10 \text{ V}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 50 \text{ V} \\ 0,02 \text{ S} & 0,3 \text{ A} \end{vmatrix} = \underline{0,1 \text{ A}}$$

$$1.129. 40 \Omega \cdot I_1 + 50 \Omega \cdot I_2 = 50 \text{ V}$$

$$4 \cdot \Omega \cdot I_1 + 80 \Omega \cdot I_2 = 10 \text{ V};$$

$$I_1 = \frac{1}{3000 \Omega^2} \begin{vmatrix} 50 \text{ V} & 50 \Omega \\ 10 \text{ V} & 80 \Omega \end{vmatrix} = \underline{1,167 \text{ A}}; \quad I_2 = \underline{0,067 \text{ A}}$$

$$1.130. 6 \text{ mS} \cdot U_1 + 4 \text{ mS} \cdot U_2 = 1,5 \text{ A}$$

$$1 \text{ mS} \cdot U_1 + 2 \text{ mS} \cdot U_2 = 0,3 \text{ A};$$

$$U_1 = \frac{1}{8 \text{ mS}^2} \begin{vmatrix} 1,5 \text{ A} & 4 \text{ mS} \\ 0,3 \text{ A} & 2 \text{ mS} \end{vmatrix} = \underline{225 \text{ V}}$$

$$U_2 = \frac{1}{8 \text{ mS}^2} \begin{vmatrix} 6 \text{ mS} & 1,5 \text{ A} \\ 1 \text{ mS} & 0,3 \text{ A} \end{vmatrix} = \underline{37,5 \text{ V}}$$

2. Leitungen

$$2.1. \text{ a)} \tan \varepsilon = \frac{0,2}{0,471}; \quad \varepsilon = 23,0^\circ;$$

$$\tan \delta = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{1,57 \cdot 10^{-6}} = 0,3185; \quad \delta = 17,7^\circ;$$

$$\varphi = -2,7^\circ; \quad Z' = \sqrt{0,2^2 + 0,471^2} \Omega/\text{km} =$$

$$= 0,512 \Omega/\text{km}; \quad Y' = \sqrt{0,5^2 \cdot 10^{-12} + 1,57^2 \cdot 10^{-12}} \times$$

$$\times \text{S/km} = 1,65 \cdot 10^{-6} \text{ S/km};$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \cdot e^{j\varphi} = \underline{557 e^{-j2,7 \Omega}}; \quad \sin \frac{\delta + \varepsilon}{2} = 0,3478;$$

$$\cos \frac{\delta + \varepsilon}{2} = 0,9375; \quad \alpha = \sqrt{0,512 \cdot 1,65 \cdot 10^{-6}} \times$$

$$\times 0,3478 \text{ Np/km} = \underline{0,32 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}};$$

$$\beta = \sqrt{0,512 \cdot 1,65 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,9375 \text{ rad/km} =$$

$$= \underline{0,86 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}};$$

mit komplexen Größen: $Z' = 0,512e^{j67^\circ} \Omega/\text{km}$;

$$Y' = 1,65 \cdot 10^{-6} e^{j72,3^\circ} \text{S}/\text{km};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{0,512e^{j67^\circ} \cdot 1,65 \cdot 10^{-6} e^{j72,3^\circ}} \text{1/km} =$$

$$= 0,919 \cdot 10^{-3} e^{j69,7^\circ} \text{1/km};$$

$$\underline{\gamma} = (0,32 + j 0,86) 10^{-3} \text{1/km};$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{0,512e^{j67^\circ}}{1,65 \cdot 10^{-6} e^{j72,3^\circ}}} \Omega = 557e^{-j2,7^\circ} \Omega$$

b) $Z' = 11,18e^{j63,4^\circ} \Omega/\text{km}$;

$$Y' = 30,01 \cdot 10^{-6} e^{j88,5^\circ} \text{S}/\text{km}; Z_L = 610e^{-j12,6^\circ} \Omega$$

$$\varepsilon = 26,6^\circ; \delta = 1,5^\circ; \varphi = -12,6^\circ;$$

$$\underline{\gamma} = 18,32 \cdot 10^{-3} e^{j76^\circ} \text{1/km}$$

$$\beta = 17,8 \cdot 10^{-3} \text{rad/km}; \alpha = 4,43 \cdot 10^{-3} \text{Np/km}$$

c) $Z' = 60,1e^{j3,3^\circ} \Omega/\text{km}$;

$$Y' = 150 \cdot 10^{-6} e^{j89,6^\circ} \text{S}/\text{km}; \tan \varepsilon = 17,1;$$

$$\varepsilon = 86,7^\circ; \delta = 0,4^\circ; Z_L = 633e^{-j43,2^\circ} \Omega;$$

$$\underline{\gamma} = 0,095e^{j46,4^\circ} \text{1/km}; \alpha = 66 \cdot 10^{-3} \text{Np/km};$$

$$\beta = 69 \cdot 10^{-3} \text{rad/km}$$

2.2. $Z' = (8 + j 10) \Omega/\text{km}$;

$$Y' = (1 + j 25) \mu\text{S}/\text{km}; \underline{\gamma} = \sqrt{Z' Y'} =$$

$$= \sqrt{(8 + j 10)(1 + j 25) \cdot 10^{-6}} \text{1/km} =$$

$$= \sqrt{320,4 \cdot 10^{-6} e^{j139,1^\circ}} \text{1/km} =$$

$$= 17,90 \cdot 10^{-3} e^{j89,6^\circ} \text{1/km} \quad \text{oder}$$

$$(6,2 + j 16,8) 10^{-3} \text{1/km}$$

2.3. a) Umrechnung in die Normalform:

$$\underline{g} = 1,299 + j 0,75; \alpha = \frac{\alpha}{l} = \frac{1,299}{50 \text{ km}} =$$

$$= 26 \text{ mNp/km}; \beta = \frac{\beta}{l} = \frac{0,75}{50 \text{ km}} = 15 \text{ mrad/km}$$

b) $\underline{g} = 2,41 - j 0,65; \alpha = 48 \text{ mNp/km}$;

$$\beta = -13,0 \text{ mrad/km}$$

c) $\alpha = 50 \text{ mNp/km}; \beta = 24 \text{ mrad/km}$

2.4. a) $\underline{g} = \underline{g} l = l(\alpha + j\beta) =$

$$= 40 \text{ km} (0,045 + j 0,056) \text{1/km} = 2,87e^{j51,2^\circ} \text{1/km}$$

b) $\underline{g} = 7,2 + j 8,4 = 11,1e^{j48,4^\circ}$;

c) $\underline{g} = 9 + j 30 = 31,3e^{j73,3^\circ}$

2.5. Aus $|\underline{g}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird $a = \sqrt{|\underline{g}|^2 - b^2} = 20$

2.6. $Z' = R' + j\omega L' = (18 + j 8) \Omega/\text{km} =$

$$= 19,70e^{j24,0^\circ} \Omega/\text{km};$$

$$Y' = G' + j\omega C' = (2 + j 20) \mu\text{S}/\text{km} =$$

$$= 20,10 \cdot 10^{-6} e^{j84,3^\circ} \text{S}/\text{km};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{Z' Y'} =$$

$$= \sqrt{19,70e^{j23,9^\circ} \cdot 20,10 \cdot 10^{-6} e^{j84,3^\circ}} \text{1/km} =$$

$$= 19,90 \cdot 10^{-3} e^{j54,1^\circ} \text{1/km}$$

$$\underline{\gamma} = (11,67 + j 16,12) \cdot 10^{-3} \text{1/km};$$

$$\alpha = 11,67 \cdot 10^{-3} \text{1/km}; \beta = 16,12 \cdot 10^{-3} \text{1/km};$$

$$Z_L = 980e^{-j30,2^\circ} \Omega$$

2.7. $\tan \delta = \frac{3}{25} = 0,1200; \delta = 6,8^\circ$;

$$\tan \varepsilon = \frac{12}{11} = 1,091; \varepsilon = 47,5^\circ;$$

$$\varphi = \frac{\delta - \varepsilon}{2} = -20,4^\circ$$

2.8. Aus $\varphi = \frac{\delta - \varepsilon}{2}$ wird $\delta = 2\varphi + \varepsilon = 5^\circ$;

$$\tan \delta = 0,0875; G' = \tan \delta \cdot \omega C' = 14 \mu\text{S}/\text{km}$$

2.9. $\underline{\gamma} = \sqrt{(30 + j 3,5) j 175 \cdot 10^{-6}} \text{1/km} =$

$$= \sqrt{(-612,5 + j 5250) 10^{-6}} \text{1/km} =$$

$$= \sqrt{5,285 \cdot 10^{-3} e^{j96,7^\circ}} \text{1/km} = 0,0727e^{j48,4^\circ} \text{1/km};$$

$$\underline{\gamma} = 0,0727 (\cos 48,4^\circ + j \sin 48,4^\circ) \text{1/km} =$$

$$= (0,0483 + j 0,0544) \text{1/km};$$

$$a = \alpha l = 0,0483 \cdot 40 = 1,93 \text{ Np};$$

$$b = \beta l = 0,0544 \cdot 40 = 2,18 \text{ rad}$$

2.10. Aus $\varphi = \frac{\delta - \varepsilon}{2}$ wird $\delta = 2\varphi + \varepsilon = 20^\circ$;

$$G' = \omega C' \tan \delta = 10,92 \mu\text{S}/\text{km};$$

$$R' = \omega L' \tan \varepsilon = 20,78 \Omega/\text{km};$$

$$Z' = (R' + j\omega L') = 24e^{j30^\circ} \Omega/\text{km};$$

$$Y' = (G' + j\omega C') = 31,9e^{j70^\circ} \mu\text{S}/\text{km};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{24e^{j30^\circ} \cdot 31,9 \cdot 10^{-6} e^{j70^\circ}} \text{1/km} =$$

$$= 27,7 \cdot 10^{-3} e^{j50^\circ} \text{1/km};$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{24 \cdot 10^6 e^{j30^\circ}}{31,9 e^{j70^\circ}}} \Omega = 867e^{-j20^\circ} \Omega$$

2.11. Der Ausbreitungskoeffizient ist

$$|\underline{\gamma}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0,0402; \text{ aus } \underline{\gamma} = \sqrt{Z' Y'} \text{ und}$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} \text{ folgt } Y' = \frac{|\underline{\gamma}|}{|Z_L|} = \underline{1,34 \cdot 10^{-4} \text{ S/km}}$$

sowie $Z' = Z_L^2 Y' = \underline{12,1 \Omega/\text{km}}$

$$2.12. \text{ a) } Z' = R' + j\omega L' = (50 + j0,1884) \Omega/\text{km} =$$

$$= 50e^{j0,2^\circ} \Omega/\text{km};$$

$$Y' = G' + j\omega C' = j12,56 \cdot 10^{-6} \text{ S/km} =$$

$$= 12,56 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ} \text{ S/km};$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{50e^{j0,2^\circ}}{12,56e^{j90^\circ}} \Omega} = \sqrt{4,0 \cdot 10^6 e^{-j89,8^\circ} \Omega} =$$

$$= \underline{1995e^{-j44,0^\circ} \Omega};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{50e^{j0,2^\circ} \cdot 12,56 \cdot 10^{-6} e^{j90^\circ}} \text{ 1/km} =$$

$$= \underline{25,1 \cdot 10^{-3} e^{j45,1^\circ} \text{ 1/km}}$$

$$\text{b) } Z_L = \underline{1118e^{-j44,7^\circ} \Omega}; \quad \underline{\gamma} = \underline{44,7 \cdot 10^{-3} e^{j45,4^\circ} \text{ 1/km}}$$

$$\text{c) } Z_L = \underline{500e^{-j43,8^\circ} \Omega}; \quad \underline{\gamma} = \underline{100 \cdot 10^{-3} e^{j46,7^\circ} \text{ 1/km}}$$

$$\text{d) } Z_L = \underline{228e^{-j36,7^\circ} \Omega}; \quad \underline{\gamma} = \underline{228 \cdot 10^{-3} e^{j58,4^\circ} \text{ 1/km}}$$

$$2.13. \text{ Aus } \underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} =$$

$$= \alpha + j\beta \text{ erhält man } \sqrt{G' + j\omega C'} = \frac{\alpha + j\beta}{\sqrt{R' + j\omega L'}};$$

dies in $Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$ eingesetzt, ergibt

$$Z_L = Z_L(\cos \varphi + j \sin \varphi) =$$

$$= \frac{\sqrt{R' + j\omega L'} \sqrt{R' + j\omega L'}}{\alpha + j\beta} \text{ oder}$$

$$Z_L(\cos \varphi + j \sin \varphi)(\alpha + j\beta) = R' + j\omega L' \text{ bzw.}$$

$$Z_L(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi + j\alpha \sin \varphi + j\beta \cos \varphi) =$$

$$= R' + j\omega L';$$

die Trennung dieser Gleichung in reelle und imaginäre Teile liefert $R' = Z_L(\alpha \cos \varphi - \beta \sin \varphi)$ bzw. $\omega L' = Z_L(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$.

Für G' und C' verfährt man analog.

$$2.14. \quad \underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,03 (\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ) \text{ 1/km};$$

hieraus folgt

$$\alpha = 0,0193 \text{ Np/km} \text{ und } \beta = 0,0230 \text{ rad/km};$$

$$R' = 900 \Omega/\text{km} \times$$

$$\times [0,0193 \cos 20^\circ - 0,0230 \sin (-20^\circ)] =$$

$$= (16,32 + 7,08) \Omega/\text{km};$$

$$R' = \underline{23,4 \Omega/\text{km}}; \quad \omega L' = (19,45 - 5,94) \Omega/\text{km} =$$

$$= \underline{13,51 \Omega/\text{km}}; \quad L' = \underline{2,7 \text{ mH/km}}$$

$$G' = \underline{29 \mu\text{S/km}}; \quad C' = \underline{6,3 \text{ nF/km}}$$

$$2.15. \quad R' = 600 \Omega/\text{km} [0,3 \cdot 10^{-3} \cos (-3^\circ) -$$

$$- 0,9 \cdot 10^{-3} \sin (-3^\circ)] = \underline{0,21 \Omega/\text{km}};$$

$$L' = \frac{600}{314} \text{ H/km} [0,9 \cdot 10^{-3} \cos (-3^\circ) +$$

$$+ 0,3 \cdot 10^{-3} \sin (-3^\circ)] = \underline{1,7 \text{ mH/km}};$$

$$G' = \frac{1}{600} \text{ S/km} [0,3 \cdot 10^{-3} \cos (-3^\circ) +$$

$$+ 0,9 \cdot 10^{-3} \sin (-3^\circ)] = \underline{0,42 \mu\text{S/km}};$$

$$C' = \underline{4,9 \text{ nF/km}}$$

$$2.16. \quad \underline{\gamma} = 0,075 (\cos 50^\circ + j \sin 50^\circ) \text{ 1/km};$$

$$\alpha = 0,04821 \text{ 1/km}; \quad \beta = 0,05745 \text{ 1/km};$$

$$R' = 400 \Omega/\text{km} [0,04821 \cos (-40^\circ) -$$

$$- 0,05745 \sin (-40^\circ)] = \underline{30 \Omega/\text{km}};$$

$$L' = \frac{400}{5000} \text{ H/km} [0,05745 \cos (-40^\circ) +$$

$$+ 0,04821 \sin (-40^\circ)] = \underline{1,0 \text{ mH/km}};$$

$$G' \approx \underline{0}; \quad C' = \underline{37,5 \text{ nF/km}}$$

$$2.17. \quad Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ (reell);}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega L' \cdot j\omega C'} = j\omega \sqrt{L'C'}$$

$$2.18. \quad Z_L = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^6}{0,8}} \Omega^2 = \underline{5000 \Omega};$$

$$\alpha = \sqrt{20 \cdot 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/km}^2} = \underline{4 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}}$$

$$2.19. \quad \underline{\gamma} = \sqrt{Z' Y'} = \sqrt{j\omega R' C'} = \sqrt{\omega R' C'} \cdot \sqrt{j} =$$

$$= \sqrt{\omega R' C'} (\cos 45^\circ + j \sin 45^\circ);$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} (1 + j)$$

$$2.20. \quad \text{b) } Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \underline{577 \Omega};$$

$$\frac{\Delta Z_L}{Z_L} = \frac{(610 - 577)}{610} = 0,054 = \underline{5,4\%};$$

$$\alpha = \frac{R'}{2Z_L} + \frac{G' Z_L}{2} = \underline{4,34 \text{ mNp/km}};$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = 0,020 = \underline{2,0\%}$$

$$\beta = \omega \sqrt{L'C'} = 17,32 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km};$$

$$\frac{\Delta \beta}{\beta} = 0,027 = 2,7\%$$

$$\text{c) } Z_L = 632,46 \Omega; \frac{\Delta Z_L}{Z_L} = 0,001 = 0,1\%;$$

$$\alpha = \beta = 67 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} \approx 0,015 = 1,5\%; \frac{\Delta \beta}{\beta} = 0,029 = 2,9\%$$

2.21. Aus $\alpha = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}}$ und $Z_L = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}}$ folgt durch Zusammenfassen

$$R' = \alpha Z_L \sqrt{2} = 19,3 \Omega/\text{km} \text{ und}$$

$$C' = \frac{R'}{\omega Z_L^2} = 29,8 \text{ nF/km}$$

2.22. Aus $\beta = \omega \sqrt{L'C'}$ und $Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ erhält man

$$Z_L = \frac{\beta}{\omega C'} = 500 \Omega$$

$$\text{2.23. a) } Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 672 \Omega;$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' Z_L \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (0,0299 + 0,0007) \text{ Np/km} =$$

$$= 0,0153 \text{ Np/km};$$

$$\beta = 5000 \text{ } 1/\text{s} \sqrt{2,3 \cdot 10^{-3} \cdot 5,1 \cdot 10^{-9} \text{ s}^2/\text{km}^2} =$$

$$= 5000 \text{ } 1/\text{s} \sqrt{11,73 \cdot 10^{-12} \text{ s}^2/\text{km}^2} = 0,0171 \text{ } 1/\text{km};$$

$$\gamma = (0,0153 + j 0,0171) \text{ } 1/\text{km}$$

$$\text{b) } \alpha = \beta = \sqrt{\frac{R' \omega C'}{2}} = \sqrt{175,9 \cdot 10^{-4} \text{ } 1/\text{km}^2} =$$

$$= 0,042 \text{ } 1/\text{km};$$

$$\gamma = (0,042 + j 0,042) \text{ } 1/\text{km}$$

$$\text{2.24. a) } R' = \frac{0,0178 \Omega \text{mm}^2 \cdot 2 \cdot 1000 \text{ m}}{\text{m} \cdot 0,2827 \text{ mm}^2} = 126 \Omega;$$

$$Z_L = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} = \sqrt{\frac{126 \text{ sV}^2 \cdot 10^9}{5000 \cdot 35 \text{ A}^2 \text{s}}} = 849 \Omega;$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{R' \omega C'}{2}} = 0,105 \text{ } 1/\text{km}$$

b) Der Ausdruck für den Wellenwiderstand lautet

$$\text{vollständiger } Z_L = \sqrt{\frac{R}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{1}{j}} \cdot \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}};$$

$$\frac{1}{j} = \sqrt{e^{-j90^\circ}} = e^{-j45^\circ}; \varphi = -45^\circ$$

$$\text{2.25. a) Wegen } Z_{L_1} = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} \text{ ist } \sqrt{\frac{R'}{C'}} = Z_{L_1} \sqrt{\omega_1}$$

$$\text{und daher } Z_{L_1} = Z_{L_1} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} = 350 \sqrt{\frac{5000}{2000}} \Omega =$$

$$= 553 \Omega; \text{ wegen } \alpha_1 = \beta_1 = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} \text{ ist}$$

$$\sqrt{\frac{R' C'}{2}} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\omega_1}} = \frac{\beta_1}{\sqrt{\omega_1}} \text{ und daher } \alpha_2 = \alpha_1 \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}};$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0,050 \sqrt{\frac{2000}{5000}} \text{ } 1/\text{km} = 0,032 \text{ } 1/\text{km}$$

$$\text{b) } Z_{L_2} = 350 \sqrt{1/2} \Omega = 247 \Omega;$$

$$\alpha_3 = \beta_3 = 0,050 \sqrt{2} \text{ } 1/\text{km} = 0,071 \text{ } 1/\text{km}$$

$$\text{c) } Z_{L_4} = 111 \Omega; \alpha_4 = \beta_4 = 0,158 \text{ } 1/\text{km}$$

2.26. Aus $R' = Z_L^2 \omega C' = 55,8 \Omega/\text{km}$ erhält man

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 2\varrho}{\pi R'}} = 0,9 \text{ mm}$$

$$\text{2.27. } C' = \frac{R'}{\omega Z_L^2} = 47,4 \text{ nF/km}$$

$$\text{2.28. a) Aus } Z_L = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} \text{ wird } \omega = \frac{R'}{Z_L^2 C'} =$$

$$= 7558 \text{ } 1/\text{s}; f = 1203 \text{ Hz}$$

$$\text{b) } \alpha = \sqrt{\frac{R' \omega C'}{2}} = 100,4 \text{ mNp/km}$$

$$\text{2.29. } R' = \omega C' Z_L^2 = 35,7 \Omega/\text{km}$$

$$\text{2.30. } C' = \frac{L'}{Z_L^2} = 9,4 \text{ nF/km}$$

2.31. Der jeweils 1. Summand in den allgemeinen Leitungsgleichungen entspricht der hinauflaufenden Spannungs- bzw. Stromwelle. Der Quotient dieser

Summanden ist $\frac{U}{I} = \frac{U_e + Z_L I_e}{U_e/Z_L + I_e} = Z_L$; für die rückläufige Welle ergeben die zweiten Summanden unter Umkehrung des Vorzeichens für den Strom

$$\frac{U}{-I} = \frac{U_e - Z_L I_e}{U_e/Z_L - I_e} = Z_L.$$

2.32. Da für jede Einzelwelle auch $Z_L = \frac{U_e}{I_e}$ gilt, entsteht aus der ersten allgemeinen Gleichung

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2} (U_e + U_e) e^{-\underline{\gamma}x} + (U_e - U_e) e^{\underline{\gamma}x} = \\ &= U_e e^{-\underline{\gamma}x}; \text{ mit } x = l \text{ wird dann für den Betrag } \\ U_a &= U_e e^{-\alpha l}. \end{aligned}$$

2.33. Wird auf beiden Seiten mit der Frequenz f multipliziert, so entsteht $\lambda f = \frac{2\pi f}{\beta}$, wobei λf die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Welle und $2\pi f$ die Kreisfrequenz ω der Wechselspannung ist.

$$\begin{aligned} \text{2.34. Einsetzen von } \frac{U_e}{U_a} &= 10^{\alpha \text{dB}/20} \text{ in } a_{Np} = \ln \frac{U_e}{U_a} \\ \text{ergibt } a_{Np} &= \ln 10^{\alpha \text{dB}/20} = \frac{\alpha \text{dB}}{20} \ln 10 = \\ &= \alpha \text{dB} \cdot \frac{2,303}{20} = \underline{\alpha \text{dB} \cdot 0,115} \end{aligned}$$

2.35. Bei Leerlauf ist am Leitungsende ($x = l$) $I_a = 0$, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2Z_L} [(U_e + Z_L I_e) e^{-\underline{\gamma}l} - (U_e - Z_L I_e) e^{\underline{\gamma}l}] &= 0 \\ \text{bzw. } (U_e + Z_L I_e) e^{-\underline{\gamma}l} &= (U_e - Z_L I_e) e^{\underline{\gamma}l}; \text{ hieraus folgt } U_e (e^{\underline{\gamma}l} - e^{-\underline{\gamma}l}) = Z_L I_e (e^{\underline{\gamma}l} + e^{-\underline{\gamma}l}) \text{ usw.} \end{aligned}$$

2.36. Bei Kurzschluß ist am Leitungsausgang ($x = l$) $U_a = 0$, d.h.

$$\frac{1}{2} [(U_e + Z_L I_e) e^{-\underline{\gamma}l} + (U_e - Z_L I_e) e^{\underline{\gamma}l}] = 0;$$

nach Ausmultiplizieren und Umordnen der Glieder folgt daraus der Ausdruck für $Z_{eK} = \frac{U_{eK}}{I_{eK}}$

$$\text{2.37. a) } \alpha = \ln \frac{120}{115} = \underline{0,048 \text{ Np}} = \underline{0,37 \text{ dB}}$$

$$\text{b) } \underline{0,875 \text{ Np}} = \underline{7,6 \text{ dB}} \quad \text{c) } \underline{1 \text{ Np}} = \underline{8,69 \text{ dB}}$$

$$\text{2.38. a) } U_a = \frac{U_e}{e^{0,72}} = \underline{29,2 \text{ V}} \quad \text{b) } \underline{0,271 \text{ V}} \quad \text{c) } \underline{18,4 \mu \text{V}}$$

$$\text{2.39. } U_e = U_a e^{0,08625} = \underline{225 \text{ V}} \cdot 1,09 = \underline{245,3 \text{ V}}$$

$$\text{2.40. } l = \frac{a}{\alpha} = \underline{32 \text{ km}}$$

$$\text{2.41. } l = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{65}{40} = \underline{81,7 \text{ km}}$$

$$\text{2.42. a) } U_a = U_e e^{-0,55} = \underline{34,6 \text{ V}}$$

$$\text{b) } U_a = U_e e^{-2,5} = \underline{4,9 \text{ V}}$$

$$\text{2.43. a) } \alpha = \frac{1}{l} \ln \frac{U_e}{U_a} = \frac{1}{80 \text{ km}} \ln 9,091 =$$

$$= \underline{27,6 \text{ mNp/km}} \quad \text{b) } = \underline{50,2 \text{ mNp/km}}$$

$$\text{2.44. } g = 1,8 (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 1,56 + j 0,9;$$

$$\begin{aligned} U_e &= U_a e^g = \underline{U_a e^{(1,56+j0,9)}} = \underline{U_a e^{1,56} \cdot e^{j0,9}}; \\ U_e &= U_a \cdot 4,76 e^{j51,6^\circ} = 15 e^{-j60^\circ} \text{ V} \cdot 4,76 e^{j51,6^\circ} = \\ &= \underline{71,4 e^{-j8,4^\circ} \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\text{2.45. } g = \underline{\gamma l} = 1,6 e^{-j20^\circ} = 1,5 - j 0,547$$

$$\begin{aligned} \text{a) } U_a &= U_e e^{(-1,5+j0,547)} = 120 \text{ V} \cdot 0,223 e^{j0,547} = \\ &= \underline{26,76 e^{j31,3^\circ} \text{ V}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } U_a = 40 e^{j20^\circ} \text{ V} \cdot 0,223 e^{j31,3^\circ} = \underline{8,9 e^{j51,3^\circ} \text{ V}}$$

$$\text{2.46. Mit } U_e = 50 \text{ V und } U_a = 25 \text{ V} \cdot e^{-j40^\circ} \text{ wird } g = \ln \frac{U_e}{U_a} = \ln \frac{50}{25 e^{-j40^\circ}}; \quad g = \ln (2 e^{j40^\circ}) =$$

$$\begin{aligned} &= \ln 2 + \ln (e^{j40^\circ}) = 0,0693 + j 40^\circ = \\ &= \underline{0,693 + j 0,698}; \quad a = \underline{0,693 \text{ Np}}; \quad b = \underline{0,698 \text{ rad}}; \\ \alpha &= \underline{6,93 \text{ mNp/km}}; \quad \beta = \underline{6,98 \text{ mrad/km}} \end{aligned}$$

$$\text{2.47. } \underline{\gamma} = \sqrt{(R' + j\omega L') (G' + j\omega C')} =$$

$$= \sqrt{30,15 e^{j5,7^\circ} \cdot 150 \cdot 10^{-6} e^{j89,8^\circ}} \text{ 1/km} =$$

$$= 67,25 \cdot 10^{-3} e^{j47,8^\circ} \text{ 1/km} =$$

$$= (0,04517 + j 0,04982) \text{ 1/km};$$

$$g = 6,78 + j 7,47; \quad U_a = U_e e^{-\underline{g}} =$$

$$= 60 \text{ V} \cdot e^{-(6,78+7,47)} = 60 \cdot 1,14 \cdot 10^{-3} e^{-j7,47} \text{ V};$$

$$U_a = \underline{0,068 e^{-j68^\circ} \text{ V}}$$

2.48. Da sich die Leistungen wie die Quadrate der Spannungen verhalten und die Umrechnung mit $\ln x = 2,3 \lg x$ vorzunehmen ist, gilt

$$a = \frac{10}{2,3} \ln \left(\frac{U_e}{U_a} \right)^2 = \frac{20}{2,3} \ln \frac{U_e}{U_a} = 8,69 \ln \frac{U_e}{U_a},$$

$$\text{d.h. } \underline{1 \text{ Np}} = \underline{8,69 \text{ dB}}$$

$$\text{2.49. Mit } P_e = U_e I_e \cos \varphi \text{ wird } P_a = U_a I_a \cos \varphi = \frac{U_e I_e \cos \varphi}{e^{2a}} \text{ und damit } \frac{P_a}{P_e} = \frac{U_a I_a}{U_e I_e} = \frac{1}{e^{2a}}$$

$$\text{a) } \frac{1}{e^{0,2}} = \underline{1:1,22}$$

$$\text{b) } \frac{1}{e^1} = \underline{1:2,72} \quad \text{c) } \underline{1:7,4} \quad \text{d) } \underline{1:54,6}$$

$$\text{2.50. } Z_L = \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}} = \underline{580 \Omega};$$

$$v = \sqrt{\frac{2\omega}{R' C'}} = \underline{69,655 \text{ km/s}}$$

$$2.51. \text{ Bei Freileitungen ist } v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \text{ und}$$

$$\text{damit } C' = \frac{1}{v^2 L'} = \underline{0,052 \text{ nF/km}};$$

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \underline{6651 \Omega};$$

$$\alpha \approx \left(\frac{7,4}{13302} + \frac{0,8 \cdot 10^{-6} \cdot 6651}{2} \right) \text{ Np/km} = \\ = \underline{3,2 \text{ mNp/km}}$$

$$2.52. \text{ Mit } C' = \frac{L'}{Z_L^2} \text{ wird } \beta = \omega \frac{L'}{Z_L} \text{ und somit}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{Z_L}{L'} = \underline{277800 \text{ km/s}};$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2\pi Z_L}{\omega L'} = \underline{349 \text{ km}}$$

$$2.53. f = \frac{R'}{2\pi C' |Z_L|^2} = \underline{1981 \text{ Hz}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega R' C'}{2}} = 0,099 \text{ rad/km};$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \underline{125700 \text{ km/s}}; \lambda = \frac{v}{f} = \underline{63,5 \text{ km}}$$

$$2.54. \text{ Aus } Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ und } v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \text{ gewinnt man}$$

$$L' = \frac{Z_L}{v} = 1,73 \cdot 10^{-3} \text{ H/km};$$

$$C' = \frac{L'}{Z_L^2} = \underline{8,55 \text{ nF/km}}$$

$$2.55. U'_a = U'_e e^{-\alpha} = 30,1 \text{ V}; U''_a = p U'_a = 18,1 \text{ V}; \\ U_a = U'_a + U''_a = \underline{48,2 \text{ V}}$$

$$2.56. \text{ Der zum Eingang zurückkehrende Anteil der reflektierten Welle ist } U''_e = U''_a e^{-\alpha} = \frac{18,1 \text{ V}}{3,32} = \\ = 5,5 \text{ V}; U_e = U'_e + U''_e = \underline{105,5 \text{ V}}$$

$$2.57. \text{ a) } \underline{p = 0} \text{ b) } \underline{0,2} \text{ c) } \underline{0,33} \text{ d) } \underline{-0,33}$$

$$2.58. \text{ Mit } Z_L = (459,6 - j 385,7) \Omega \text{ und } Z_a = 400 \Omega$$

$$\text{wird } \underline{p = \frac{-59,6 + j 385,7}{859,6 - j 385,7}} =$$

$$= \frac{(-20 + j 30,86) \cdot 10^4}{88,77 \cdot 10^4} = \underline{0,414 e^{j123^\circ}}$$

$$2.59. \text{ Aus } \underline{p = \frac{Z_a - Z_L}{Z_a + Z_L}} \text{ wird } Z_a = \frac{1 + p}{1 - p} Z_L = \\ = \frac{1 + 0,6 e^{j65^\circ}}{1 - 0,6 e^{j65^\circ}} \cdot 600 e^{-j45^\circ} \Omega; \text{ der Bruch ist}$$

$$\frac{1 + 0,25356 + j 0,54378}{1 - 0,25356 - j 0,54378} = \frac{1,367 e^{j23,5^\circ}}{0,922 e^{-j36,1^\circ}} = \\ = 1,48 e^{j59,6^\circ};$$

$$Z_a = 1,48 e^{j59,6^\circ} \cdot 600 e^{-j45^\circ} \Omega = \underline{888 e^{j14,5^\circ} \Omega}$$

$$2.60. \underline{U''_a = p U'_a} = 0,7 e^{-j58^\circ} \cdot 2,5 e^{j42^\circ} \text{ V} = \\ = 1,75 e^{-j16^\circ} \text{ V};$$

$$U_a = U'_a + U''_a = [(1,858 + j 1,673) + \\ + (1,682 - j 0,482) - (3,540 + j 1,191)] \text{ V}; \\ U_a = \underline{3,74 e^{j18,6^\circ} \text{ V}}$$

$$2.61. \text{ Mit } Z_L = (424,3 - j 424,3) \Omega \text{ und}$$

$$Z_a = (692,8 - j 400) \Omega \text{ wird der Reflexionsfaktor} \\ \underline{p = \frac{268,5 + j 24,3}{1117,1 - j 824,3}} = 0,194 e^{j41,6^\circ};$$

$$U''_a = \underline{p U'_a} = 7,76 e^{j11,6^\circ} \text{ V};$$

$$U_a = U'_a + U''_a = [(34,64 - j 20) + \\ + (7,60 + j 1,56)] \text{ V};$$

$$I_a = \frac{U_a}{Z_a} = \frac{46,1 e^{-j28,6^\circ}}{800 e^{-j30^\circ}} \text{ A} = \underline{0,0576 e^{j6,4^\circ} \text{ A}}$$

$$2.62. \underline{p = \frac{U''_a}{U'_a} = \frac{8,5 e^{j20^\circ}}{50,0 e^{j45^\circ}}} = \underline{0,17 e^{-j25^\circ}}$$

$$2.63. 1,2 Z_L = Z_L \frac{e + \underline{p e^{-1}}}{e - \underline{p e^{-1}}}; \underline{p = \frac{e^2}{11}} = 0,672;$$

$$Z_a = \frac{1 + \underline{p}}{1 - \underline{p}} Z_L = \underline{5,1 Z_L}$$

$$2.64. \text{ Bei Anpassung ist } P = \frac{U'_a^2}{Z_L}; \text{ bei Fehlanpas-}$$

$$\text{sung ist } \frac{P}{2} = \frac{U'_a^2}{x Z_L}; \text{ zusammengefaßt ist } \frac{U'_a^2}{2 Z_L} = \frac{U'_a^2}{x Z_L};$$

$$\text{mit } U_a = (1 + p) U'_a \text{ wird } \frac{1}{2} = \frac{(1 + p)^2}{x} \text{ und mit}$$

$$\underline{p = \frac{x - 1}{x + 1}} \text{ die quadratische Gleichung } x(x + 1)^2 = \\ = 2(2x)^2 \text{ mit den beiden Lösungen } x_1 = \underline{0,17} \text{ und } x_2 = \underline{5,83}$$

$$2.65. \text{ Ähnlich wie in der vorigen Aufgabe entsteht} \\ \text{die Gleichung } 0,9 = \frac{(1 + p)^2}{x} \text{ und daraus die qua-} \\ \text{dratische Gleichung } x(x + 1)^2 = 1,11 (2x)^2 \text{ mit den} \\ \text{Wurzeln } x_1 = \underline{0,52} \text{ und } x_2 = \underline{1,92}.$$

$$2.66. \underline{g = \gamma l = 0,4 + j 0,96}; \text{ am Ausgang kommt} \\ \text{die Spannungswelle an: } \underline{U'_a = U'_e e^{-\underline{g l}}} = 100 \text{ V} \times \\ \times e^{-(0,4 + j 0,96)} = 100 e^{-0,4} \cdot e^{-j0,96} \text{ V} = \underline{67,0 e^{-j55^\circ} \text{ V}};$$

$$\underline{p} = \frac{500 - (451 - j164)}{500 + (451 - j164)} = \frac{171,2e^{j73,4^\circ}}{965,0e^{-j9,8^\circ}} = \\ = 0,177e^{j83,2^\circ}; \underline{U_a}' = \underline{p} \underline{U_a}' = 11,86e^{j28,2^\circ} \text{ V}; \\ \underline{U_a} = \underline{U_a}' + \underline{U_a}'' = \\ = (38,43 - j54,88 + 10,45 + j5,60) \text{ V} = \\ = 69,4e^{-j45,2^\circ} \text{ V};$$

an den Leitungsanfang kehrt zurück

$$\underline{U_e}'' = \underline{U_a}'' e^{-\underline{q}} = 11,86e^{j28,2^\circ} \cdot (0,4 + j0,96) \text{ V} = \\ = 7,95e^{j27,2^\circ} \text{ V}; \\ \underline{U_e} = \underline{U_a} + \underline{U_e}'' = 100e^{j0^\circ} + 7,95e^{j27,2^\circ} = \\ = 107e^{j1,0^\circ} \text{ V}$$

2.67. Wegen $Z_a = \infty$ ist im Leerlauf $p = 1$, womit wegen $\underline{U_a} = (1 + 1)\underline{U_a}'$ die ankommende Spannungswelle den Betrag $\underline{U_a}' = 85 \text{ V}$ hat. Wegen $Z_a = 0$ ist bei Kurzschluß $p = -1$, so daß wegen $I_a = (1 + 1)\underline{I_a}'$ der ankommende Strom den Betrag

$$\underline{I_a}' = 0,15 \text{ A} \text{ hat. } Z_L = \frac{\underline{U_a}'}{\underline{I_a}'} = \underline{567 \Omega}$$

$$\underline{2.68. a)} P_{\max} = I_a^2 Z_L = 0,05^2 \text{ A}^2 550 \Omega = 1,375 \text{ W}; \\ I_a' = I_a \text{ (Anpassung)}$$

$$b) \text{ Reflexionsfaktor } p = \frac{300 - 550}{300 + 500} = -0,294;$$

$$I_a = I_a'(1 - p) = 64,7 \text{ mA}; P = I_a^2 Z_a = \underline{1,26 \text{ W}}$$

$$c) p = -0,1; I_a = 55 \text{ mA}; P = \underline{1,36 \text{ W}}$$

$$d) p = 0,083; I_a = 45,9 \text{ mA}; P = \underline{1,36 \text{ W}}$$

$$e) p = 0,290; I_a = 35,5 \text{ mA}; P = \underline{1,26 \text{ W}}$$

f) Das Leistungsmaximum hat in der Umgebung der Anpassung einen sehr flachen Verlauf.

$$\underline{2.69.} \text{ Wegen } P_{\max} = \frac{U_a'^2}{Z_L} \text{ ist } U_a' = \sqrt{P_{\max} Z_L} = \\ = 12 \text{ V}; \text{ die verminderte Leistung ist } P = \frac{U_a^2}{Z_a}; \text{ mit} \\ U_a = (1 + p) U_a' \text{ wird daraus } P = \frac{(1 + p)^2 U_a'^2}{Z_a} \\ \text{und mit } p = \frac{Z_a - Z_L}{Z_a + Z_L} \text{ die quadratische Gleichung} \\ \frac{P}{U_a'^2} = \frac{(2Z_a)^2}{Z_a(Z_a + Z_L)^2} \text{ mit den L\"osungen} \\ Z_{a_1} = 210 \Omega \text{ und } Z_{a_2} = \underline{1190 \Omega}$$

$$\underline{2.70.} \text{ Am Leitungsausgang ist } U_a' = U_e' e^{-2}; \text{ nach} \\ \text{R\"ucklauf ist bei } p = 1 \text{ (vollst\"andige Reflexion)} \\ U_e'' = U_e' (e^{-2}) (e^{-2}) = U_e' e^{-4} = \frac{U_e'}{54,6}; \text{ da die Lei-} \\ \text{stungen dem Quadrat der Spannungen proportional}$$

sind, folgt $P_e'' = P_e'(e^{-4})^2 = P_e' e^{-8} = \frac{P_e'}{2981}$, d.h., die R\"uckwirkung des reflektierten Anteils auf den Eingang kann vernachl\"assigt werden.

$$\underline{2.71.} C' = \frac{L'}{Z_L^2} = \frac{1,2 \cdot 10^{-6} \text{ VsA}^2}{240^2 \text{ A V}^2 \text{ m}} = \underline{20,8 \text{ pF/m}}$$

$$\underline{2.72.} v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{C'^2 Z_L^2}} = \frac{1}{C' Z_L} = \underline{2 \cdot 10^8 \text{ m/s}}$$

$$\underline{2.73.} \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}; \text{ mit } L' = C' Z_L^2 \text{ wird } \frac{1}{C' Z_L} = \\ = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \text{ und hieraus } \epsilon_r = (c C' Z_L)^2 = \underline{3,24}$$

$$\underline{2.74.} \text{ Mit } C' = \frac{L'}{Z_L^2} \text{ erh\"alt man aus } \beta = \omega \sqrt{L'C'} \\ \text{den Ausdruck}$$

$$\beta = \frac{L'}{Z_L} = \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 1,8 \cdot 10^{-6} \text{ VsA}}{\text{As} \cdot 300 \text{ V m}} = \\ = \underline{0,019 \text{ 1/m}}$$

$$\underline{2.75.} f = \frac{v\beta}{2\pi} = \underline{0,995 \text{ MHz}}$$

$$\underline{2.76.} Z_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r} \left(\ln \frac{a}{r} \right)^2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi^2 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a}{r};$$

die erste Quadratwurzel mit den Konstanten ergibt $\approx 120 \Omega$.

$$\underline{2.77.} Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}; \text{ hierbei ist } C' = \frac{\beta^2}{L'\omega^2}, \text{ so daß} \\ Z_L = \frac{\omega L'}{\beta} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ Vs m}}{\text{As m} \cdot 0,015} = \underline{240 \Omega}$$

$$\underline{2.78.} \text{ Nach Aufgabe 2.76 ist } \epsilon_r = \frac{C' \ln a/r}{\pi \epsilon_0} = 1,236;$$

$$Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{1,236}} \ln \frac{6,4}{0,45} = \underline{286 \Omega}$$

$$\underline{2.79.} \Delta Z_L = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} (\ln a_2/r - \ln a_1/r) = \\ = \frac{120 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{a_2}{a_1} = 120 \Omega \cdot 0,375 = \underline{45 \Omega}$$

$$\underline{2.80.} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{60 \Omega}{50 \Omega} \ln \frac{8,1}{2,15} = 1,59; \epsilon_r = 2,53;$$

$$\Delta Z_L = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} (\ln D/d_2 - \ln D/d_1) = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{d_1}{d_2};$$

$$\ln d_1/d_2 = 0,66275; d_2 = d_1/1,94 = \underline{1,1 \text{ mm}}$$

$$2.81. \text{ a) } Z_L = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} = \underline{\underline{230 \Omega}}$$

$$\text{b) } \lambda = 4 \cdot 0,18 \text{ m} = \underline{\underline{0,72 \text{ m}}}$$

$$\text{c) } f = \frac{c}{\lambda} = \underline{\underline{416,7 \text{ MHz}}} \quad \text{d) } \beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \underline{\underline{8,73 \text{ rad/m}}}$$

$$\text{e) aus } C' = \frac{L'}{Z_L^2} = \frac{\beta^2}{\omega^2 L'} \text{ folgt}$$

$$L' = \frac{\rho Z_L}{\omega} = \underline{\underline{0,767 \mu\text{H/m}}}$$

$$\text{f) } C' = \frac{L'}{Z_L^2} = \underline{\underline{14,5 \text{ pF/m}}}$$

$$2.82. \lambda = \frac{c}{f} = 5 \text{ m}; \beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = 1,0053 \text{ rad} = \\ = 57,6^\circ; Z_{eL} = -j 250 \Omega \cot 57,6^\circ = \underline{\underline{-j 168,65 \Omega}}$$

(kapazitiv)

$$2.83. \cot \beta l = \frac{Z_{eK}}{-j Z_L} = \frac{-j 180}{-j 300} = 0,6;$$

$$\beta l = 59,0^\circ = 1,030 \text{ rad}; \frac{2\pi l}{\lambda} = 1,030 \text{ rad};$$

$$l = \frac{1,030 c}{2\pi f} = \underline{\underline{615 \text{ m}}};$$

wegen der Periodizität der \cot -Funktion sind auch die weiteren Längen $l' = (615 \text{ m} + n\lambda/2)$ möglich, z.B. 2490 m; 4365 m usw.

$$2.84. \lambda_1 = \frac{c}{f}; \lambda_2 = \frac{v}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\epsilon_r}};$$

$$\frac{c}{f} = \lambda_1 = \lambda_2 \sqrt{\epsilon_r}; \epsilon_r = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \underline{\underline{6,7}}$$

$$2.85. \beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = 3000^\circ; \tan 3000^\circ = \tan 120^\circ;$$

$$Z_L = \frac{Z_{eK}}{j \tan 120^\circ} = \frac{-j 450 \Omega}{-j 1,7321} = \underline{\underline{259,8 \Omega}}$$

$$2.86. \beta l' = \frac{2\pi(l + \lambda/4)}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 10,3 \text{ m}}{1,2 \text{ m}} =$$

$$= 53,93 \text{ rad} = 3090^\circ;$$

$$Z_{eK} = j Z_L \tan 210^\circ = j 150 \Omega \text{ (induktiv)}$$

$$2.87. \tan \beta l = \frac{j 1000 \Omega}{j Z_L} = \frac{j 1000 \Omega}{j 320 \Omega} = 3,125;$$

$$\frac{2\pi fl}{c} = 72,2553^\circ = 1,2611 \text{ rad};$$

$$f = \frac{1,2611 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m}}{2\pi \cdot 6 \text{ ms}} = \underline{\underline{10,0 \text{ MHz}}}$$

$$2.88. \tan \beta l = \frac{Z_{eK}}{j Z_L} = \frac{j 450 \Omega}{j 259,8 \Omega} = 1,7321;$$

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = 1,0472 \text{ rad}; l = \frac{1,0472 \cdot 1,2 \text{ m}}{2\pi} = \underline{\underline{0,2 \text{ m}}};$$

wegen der Periodizität der \tan -Funktion sind auch die weiteren Längen $l' = (0,2 \text{ m} + n\lambda/2)$ möglich, d.h. z.B. 0,8 m; 1,4 m usw.

2.89. Man bildet den Quotienten

$$Z_e = \frac{U_e}{I_e} = \frac{U_a \cosh g + Z_L I_a \sinh g}{U_a / Z_L \cdot \sinh g + I_a \cosh g};$$

werden Zähler und Nenner mit Z_L multipliziert und durch I_a dividiert, so folgt daraus die Gleichung für Z_e .

$$2.90. \text{ Bei Kurzschluß am Leitungsausgang ist } Z_a = 0, \text{ womit } Z_{eK} = \frac{Z_L^2 \sinh g}{Z_L \cosh g} = Z_L \tanh g \text{ wird.}$$

Bei Leerlauf ist Z_a sehr groß, wodurch $Z_{eL} = \frac{Z_L Z_a \cosh g}{Z_a \sinh g} = Z_L \coth g$ wird. Das Produkt ergibt $Z_L^2 = Z_{eL} Z_{eK}$ und $Z_L = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}}$.

$$2.91. \text{ Wird der Reflexionsfaktor } p = \frac{Z_a - Z_L}{Z_a + Z_L} \text{ in } Z_e = \frac{Z_a (e^g + e^{-g}) + Z_L (e^g - e^{-g})}{Z_a (e^g - e^{-g}) + Z_L (e^g + e^{-g})} \text{ eingesetzt und ausmultipliziert, so entsteht nach Umordnen}$$

$$Z_e = Z_L \frac{Z_a (e^g + e^{-g}) + Z_L (e^g - e^{-g})}{Z_a (e^g - e^{-g}) + Z_L (e^g + e^{-g})}$$

mit den Definitionen für $\sinh g$ und $\cosh g$ ergibt sich die Gleichung für Z_e :

2.92. Mit $x = l$ und $yx = g$ wird zunächst

$$U_a = \frac{1}{2} [(U_e + Z_L I_e) e^{-g} + (U_e - Z_L I_e) e^g] \text{ sowie}$$

$$I_a = \frac{1}{2Z_L} [(U_e + Z_L I_e) e^{-g} - (U_e - Z_L I_e) e^g];$$

nach Ausmultiplizieren und Umordnen wird daraus

$$U_a = \frac{1}{2} [U_e (e^g + e^{-g}) - Z_L I_e (e^g - e^{-g})] \text{ und}$$

$$I_a = \frac{1}{2Z_L} [Z_L I_e (e^g + e^{-g}) - U_e (e^g - e^{-g})];$$

mit den Definitionen für $\sinh g$ und $\cosh g$ ist schließlich $U_a = U_e \cosh g - Z_L I_e \sinh g$ und

$$I_a = I_e \cosh g - \frac{U_e}{Z_L} \sinh g.$$

2.93. In diesem Fall ist $\frac{U_a}{I_a} = Z_L$. Einsetzen ergibt

$$U_e = U_a (\cosh g + \sinh g) = U_a e^g.$$

2.94. Mit $I_a Z_L = U_a$ wird das zweite Gleichungspaar $U_e = (\cosh g + \sinh g) U_a$ und in entsprechender Weise $I_e = (\cosh g - \sinh g) I_a$; Dividieren

liefert $\frac{U_e}{I_e} = \frac{U_a}{I_a} = Z_L$

2.95. Dämpfungsbelag $\alpha = \sqrt{R'G'} = 3,10 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km}$; Dämpfungsmaß $a = \alpha l = 0,930 \text{ Np}$; Wellenwiderstand $Z_L = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = 3873 \Omega$;

$$U_e = 75 \text{ V} \cosh 0,930 + 20 \text{ mA} \cdot 3873 \Omega \sinh 0,930 = 75 \cdot 1,4645 \text{ V} + 77,46 \cdot 1,070 \text{ V} = 193 \text{ V};$$

$$I_e = \frac{75 \text{ V}}{3873 \Omega} \sinh 0,930 + 20 \text{ mA} \cdot \cosh 0,930 = 50 \text{ mA}$$

2.96. Wegen $U_a = 0$ ist

$$I_e = \cosh g \cdot I_a = 1,337 \cdot 0,02 \text{ A} = 26,7 \text{ mA}$$

2.97. $Z_L = \sqrt{250e^{j15^\circ} \cdot 720e^{-j30^\circ} \Omega^2} = 424e^{-j7,5^\circ} \Omega$;

$$\tanh g = \sqrt{\frac{250e^{j15^\circ}}{720e^{-j30^\circ}}} = 0,589e^{j22,5^\circ}$$

2.98. $g = a = \ln \frac{U_e}{U_a} = 1,083$;

$$I_a = \frac{U_e - \cosh a \cdot U_a}{\sinh a \cdot Z_L} = \frac{(65 - 1,646 \cdot 22) \text{ V}}{1,306 \cdot 560} = 39,4 \text{ mA}; I_e = \sinh 1,082 \cdot \frac{22}{560} \text{ A} + \cosh 1,083 \cdot 0,0394 \text{ A} = 116 \text{ mA}$$

2.99. Wegen $I_a = 0$ ist $U_e = \cosh g \cdot U_a = (\cosh a \cdot \cos b + j \sinh a \cdot \sin b)$ =

$$= (1,132 + j 0,188) 12 \text{ V} = 13,80 e^{j0,4^\circ} \text{ V}$$

2.100. $U_a = \cosh 0,6 \cdot 150 \text{ V} - \sinh 0,6 \cdot 0,05 \cdot 3500 \text{ V} = 66,4 \text{ V}$

$$I_a = -\sinh 0,6 \cdot \frac{150}{3500} \text{ A} + \cosh 0,6 \cdot 0,05 \text{ A} = 32 \text{ mA}$$

2.101. $g = 0,6 + j 0,975$;

$$\tanh g = \frac{\sinh 1,2 + j \sin 111,7^\circ}{\cosh 1,2 + \cos 111,7^\circ} =$$

$$= 1,048 + j 0,645 = 1,23 e^{j31,6^\circ};$$

$$Z_{eK} = 650e^{-j45^\circ} \Omega \cdot 1,22e^{j31,6^\circ} = 800e^{-j18,4^\circ} \Omega;$$

$$Z_{eL} = \frac{Z_L}{\tanh g} = \frac{650 e^{-j45^\circ} \Omega}{1,23 e^{j31,6^\circ}} = 528 e^{-j76,6^\circ} \Omega$$

2.102. $\tanh g = \frac{\sinh 0,8 + j \sin 0,5}{\cosh 0,8 + \cos 0,5} =$

$$= 0,401 + j 0,216 = 0,455 e^{j28,3^\circ};$$

$$Z_{eK} = \tanh^2 g \cdot Z_{eL} = 0,207 e^{j56,6^\circ} \cdot 350 e^{-j35^\circ} \Omega =$$

$$= 72,5 e^{j21,6^\circ} \Omega; Z_L = \frac{Z_{eK}}{\tanh g} = \frac{159,3 e^{-j6,7^\circ} \Omega}{\tanh g}$$

2.103. $Z_L = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = \sqrt{850 \cdot 500 e^{-j30^\circ} e^{j5^\circ} \Omega^2} = 652 e^{-j12,5^\circ} \Omega$;

$$\tanh g = \sqrt{\frac{Z_{eK}}{Z_{eL}}} = 0,7670 e^{j17,5^\circ}; \text{ nach Abschnitt 1.3. ist}$$

$$\tanh 2a = \frac{2Z \cos \varphi}{1 + Z^2} = \frac{2 \cdot 0,767 \cdot 0,9537}{1 + 0,767^2} =$$

$$= 0,9211; 2a = 1,6 \text{ Np};$$

$$a = 0,8 \text{ Np}; \alpha = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Np/km};$$

$$\tan 2b = \frac{2 \cdot 0,767 \cdot 0,3007}{1 - 0,767^2} = 1,1204;$$

$$2b = 0,84 \text{ rad}; b = 0,42 \text{ rad}; \beta = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km}$$

2.104. Mit $a = 0,6 \text{ Np}$ und $b = 0,7 \text{ rad}$ wird

$$\tanh g = \frac{1,5095}{1,8107 + 0,1700} + j \frac{0,9855}{1,8107 + 0,1700} =$$

$$= 0,7621 + j 0,4976 = 0,9102 e^{j33,1^\circ};$$

$$Z_{eK} = Z_L \tanh g = 620 e^{-j40^\circ} \cdot 0,9101 e^{j33,1^\circ} \Omega =$$

$$= 564 e^{-j6,9^\circ} \Omega; Z_{eL} = \frac{Z_L}{\tanh g} = \frac{620 e^{-j40^\circ}}{0,9101 e^{j33,1^\circ}} =$$

$$= 681 e^{-j3,1^\circ} \Omega$$

2.105. $Z_{eL} = \frac{Z_L^2}{Z_{eK}} = 344 e^{-j21^\circ} \Omega$;

$$\tanh g = \sqrt{\frac{Z_{eK}}{Z_{eL}}} = 1,6 e^{j9^\circ};$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 0,9877}{1 + 1,6^2} = 0,888$$

(s. Abschnitt 1.3.);

$$2a = 1,41; a = 0,705;$$

$$\tan 2b = \frac{2 \cdot 1,6 \cdot 0,156}{1 - 1,6^2} = -0,301$$

(s. Abschnitt 1.3.); $2b = -0,31$;

$$b = -0,16; g = 0,71 - j 0,16$$

$$2.106. \text{ a) } g = 0,075 e^{j50^\circ} = 0,04821 + j 0,05745;$$

$$\tanh g = \frac{0,0966}{1,0047 + 0,9934} + j \frac{0,115}{1,0047 + 0,9934} = \\ = 0,04835 + j 0,0576 = 0,07520 e^{j50^\circ};$$

$$Z_{eL} = \frac{Z_L}{\tanh g} = 5984 e^{-j90^\circ} \Omega;$$

$$Z_{eK} = Z_L \tanh g = 33,8 e^{j10^\circ} \Omega$$

$$\text{b) } g = 0,375 e^{j50^\circ} = 0,241 + j 0,287; \tanh g = \\ = 0,256 + j 0,277 = 0,377 e^{j47,3^\circ};$$

$$Z_{eL} = 1194 e^{-j87,3^\circ} \Omega; Z_{eK} = 170 e^{j7,3^\circ} \Omega$$

$$\text{c) } g = 0,75 e^{j50^\circ} = 0,4821 + j 0,5745;$$

$$\tanh g = 0,586 + j 0,4774 = 0,756 e^{j39,2^\circ};$$

$$Z_{eL} = 595 e^{-j79,2^\circ} \Omega; Z_{eK} = 340 e^{-j0,8^\circ} \Omega$$

d) Für $l = 100 \text{ km}$ geht $\tanh g$ gegen 1, so daß $Z_{eL} = Z_{eK} = Z_L$ ist.

$$2.107. \tanh \gamma l_1 = \frac{Z_{eK}}{Z_L} = 0,889 e^{j45^\circ};$$

$$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 0,889 \cdot 0,7071}{1 + 0,7903} = 0,702$$

(s. Abschnitt 1.3.); $2a = 0,87; a = 0,435$;

$$\tan 2b = \frac{2 \cdot 0,889 \cdot 0,7071}{1 - 0,7903} = 5,995;$$

$2b = 1,41; b = 0,705; \gamma l_1 = 0,435 + j 0,705$; für $l_2 = 3 \text{ km}$ ist $\gamma l_2 = 1,305 + j 2,115$ und $\tanh \gamma l_2 =$

$$= \frac{6,84}{6,76 - 0,464} - j \frac{0,8859}{6,76 - 0,464} =$$

$$= 1,086 - j 0,1407 = 1,095 e^{-j7,4^\circ};$$

$$Z_{eK} = Z_L \tanh \gamma l_2 = 492 e^{-j37,4^\circ} \Omega$$

$$2.108. \text{ a) } \tanh g = \tanh (0,032 + j 0,032) =$$

$$= 0,032 + j 0,032 = 0,04525 e^{j45^\circ};$$

$$Z_{eL} = \frac{Z_L}{\tanh g} = \frac{553 e^{-j45^\circ}}{0,04525 e^{j45^\circ}} = 12220 e^{-j90^\circ};$$

$$Z_{eK} = Z_L \tanh g = 25,0 e^{j0^\circ}$$

$$\text{b) } \tanh g = 0,07071 e^{j45^\circ}; Z_{eL} = 4950 e^{-j90^\circ} \Omega;$$

$$Z_{eK} = 25,0 e^{j0^\circ}$$

$$\text{c) } \tanh g = 0,2235 e^{j44^\circ}; Z_{eL} = 497 e^{-j89^\circ} \Omega;$$

$$Z_{eK} = 25,0 e^{-j1^\circ} \Omega$$

$$2.109. \text{ Aus } Z_{eL} = \frac{U_e}{I_e} = Z_L \coth g \text{ wird}$$

$$I_e = \frac{U_e}{Z_L} \tanh g = 0,133 \text{ A}$$

$$2.110. g = \ln \frac{U_e}{U_a} = \ln 24 = 3,18;$$

$$I_e = \frac{U_a - \cosh g \cdot U_e}{-\sinh g \cdot Z_L} = 0,103 \text{ A}$$

$$\text{oder auch kürzer: } I_e = \frac{U_e}{Z_L} = 0,103 \text{ A}$$

$$2.111. \cosh g = 1,105 + j 0,1035;$$

$$\sinh g = 0,5107 + j 0,2240;$$

$$U_a = \cosh g \cdot U_e - \sinh g \cdot Z_L I_e = \\ = 38,21 - j 6,11 = 38,7 e^{-j9,1^\circ} \text{ V};$$

$$I_a = I_e \cosh g - \frac{U_e}{Z_L} \sinh g = \\ = (55,30 - j 14,13) \text{ mA} = 57,1 e^{-j14,3^\circ} \text{ mA};$$

$$Z_a = \frac{U_a}{I_a} = 683 e^{j5,2^\circ} \Omega$$

$$2.112. Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 638 \Omega;$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_L} + G' Z_L \right) = 0,00972 \text{ Np/km};$$

$$\alpha = 0,78 \text{ Np}; \beta = \omega \sqrt{L' C'} = 17,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/km};$$

$$b = 1,38 \text{ rad}; g = 0,78 + j 1,38;$$

$$\tanh g = 1,4602 + j 0,2388;$$

$$Z_a = Z_L \frac{Z_a + Z_L \tanh g}{Z_L + Z_a \tanh g} = 638 \times$$

$$\times \frac{866 + j 500 + 931,6 + j 152,5}{638 + 1264,4 + j 206,8 + j 730,1 - 119,5} \Omega;$$

$$Z_e = 638 \cdot \frac{1797,6 + j 652,5}{1782,9 + j 936,9} \Omega =$$

$$= 638 \cdot \frac{1912 e^{j20,0^\circ}}{2014 e^{j27,7^\circ}} \Omega;$$

$$Z_e = 606 e^{-j7,7^\circ} \Omega$$

3. Vierpole

3.1. a) Direkte Ermittlung der Vierpolparameter aus der Schaltung.

Die in der Formel für Z_{11} angegebene Bedingung $I_2 = 0$ bedeutet, daß die Ausgangsklemmen des Vierpols offen sind (Leerlauf). Die Eingangsklemmenspannung U_1 ist dann gleich der Summe der vom Strom I_1 an den beiden Widerständen verursachten Spannungsabfälle:

$$U_1 = I_1(Z_1 + Z_2).$$

Der Leerlauf-Eingangswiderstand ist daher

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_1 + Z_2 \quad (\text{Bild L 1});$$

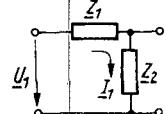


Bild L 1. Aufgabe 3.1 a)

Die in der Formel für Z_{12} enthaltene Bedingung $I_1 = 0$ bedeutet, daß die Eingangsklemmen des Vierpols offen sind und allein der Strom I_2 durch den Widerstand Z_2 fließt. Die Eingangsspannung U_1 ist in diesem Fall gleich dem Spannungsabfall $I_2 Z_2$:

$$Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_2 \quad (\text{Bild L 2});$$

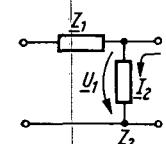


Bild L 2. Aufgabe 3.1 a)

Sind dagegen weder I_1 noch I_2 gleich 0, so ist die Eingangsspannung gleich der Summe

$$U_1 = I_1(Z_1 + Z_2) + I_2 Z_2.$$

Das gleiche Ergebnis liefert bei gleichzeitiger Berücksichtigung beider Ströme auch der auf die linke Seite der Schaltung angewandte Maschensatz. Für die Ausgangsseite des Vierpols gelten entsprechende Überlegungen bzw. ebenfalls der Maschensatz:

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_2 \quad (\text{Bild L 3})$$

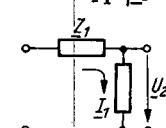


Bild L 3. Aufgabe 3.1 a)

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_2 \quad (\text{Bild L 4})$$

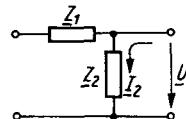


Bild L 4. Aufgabe 3.1 a)

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

b) Ermittlung der Vierpolgleichungen mit Hilfe der Maschensätze (Bild L 5a)

$$I_1 Z_1 + (I_1 + I_2) Z_2 = U_1;$$

$$I_2 Z_3 + (I_1 + I_2) Z_2 = U_2$$

Aus der Umstellung der Maschensätze ergeben sich die Elemente der Matrix der Widerstandsparameter

$$U_1 = I_1(Z_1 + Z_2) + I_2 Z_2;$$

$$U_2 = I_1 Z_2 + I_2(Z_2 + Z_3);$$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix}$$

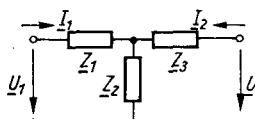


Bild L 5a.
Aufgabe 3.1 b)

c) Umwandlung der Dreieck- in eine Sternschaltung (siehe Bd. I, Abschn. 9.5.) ergibt die Sternersatzwiderstände (Bild L 5b)

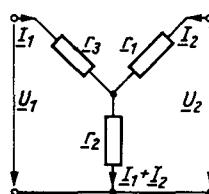


Bild L 5b. Aufgabe 3.1 c)

$$r_1 = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad r_2 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3};$$

$$r_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}.$$

Die Maschensätze liefern die Gleichungen mit $Z_1 + Z_2 + Z_3 = \Sigma Z$:

$$U_1 = I_1 \left(\frac{Z_1 Z_2}{\Sigma Z} \right) + (I_1 + I_2) \left(\frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} \right);$$

$$U_2 = I_2 \left(\frac{Z_2 Z_3}{\Sigma Z} \right) + (I_1 + I_2) \left(\frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} \right);$$

nach Umordnen der Summanden folgt

$$U_1 = I_1 \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{\Sigma Z} + I_2 \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z};$$

$$U_2 = I_1 \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} + I_2 \frac{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{\Sigma Z};$$

Vergleich mit den Vierpol-Widerstandsgleichungen liefert

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{\Sigma Z} & \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} \\ \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} & \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{\Sigma Z} \end{pmatrix}$$

d) Umzeichnung der Kreuz- in eine Brückenschaltung ergibt Bild L 5c. Wegen der Symmetrie teilen sich die Ströme I_1 und I_2 in Zweigströme von je $\frac{I_1}{2}$ und $\frac{I_2}{2}$. Die Maschensätze ergeben

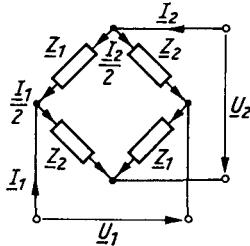


Bild L 5c.
Aufgabe 3.1d)

$$U_1 = \frac{I_1}{2} (Z_1 + Z_2) + \frac{I_2}{2} (Z_2 - Z_1);$$

$$U_2 = \frac{I_1}{2} (Z_2 - Z_1) + \frac{I_2}{2} (Z_1 + Z_2);$$

Vergleich mit den Vierpol-Widerstandsgleichungen liefert

$$Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix}$$

e) Umwandlung der oberen Widerstandsgruppe in einen Stern (Bild L 5d) ergibt die Sternersatzwiderstände

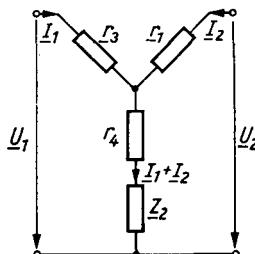


Bild L 5d.
Aufgabe 3.1e)

$$r_1 = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4}; r_3 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4};$$

$$r_4 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4}.$$

Mit $Z_1 + Z_3 + Z_4 = \Sigma Z$ wird unter Anwendung der Maschensätze

$$U_1 = I_1 \frac{Z_1 Z_4}{\Sigma Z} + (I_1 + I_2) \left(\frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} + Z_2 \right);$$

$$U_2 = I_2 \frac{Z_1 Z_4}{\Sigma Z} + (I_1 + I_2) \left(\frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z} + Z_2 \right).$$

Umordnen der Summanden und Vergleich mit den Vierpol-Widerstandsgleichungen liefert

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{Z_1(Z_3 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} + Z_3 & \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} + Z_2 \\ \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4} + Z_2 & \frac{Z_3(Z_1 + Z_4)}{Z_1 + Z_3 + Z_4} + Z_2 \end{pmatrix}$$

3.2. a) $Z_{11} = Z_1 + Z_2 = \underline{16 \text{ k}\Omega}$,

$Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = Z_2 = \underline{10 \text{ k}\Omega}$

b) $Z_{11} = j \underline{20 \text{ k}\Omega}$,

$Z_{12} = Z_{21} = Z_{22} = Z_2 = \underline{-j 20 \text{ k}\Omega}$

3.3. a) $Z_1 = Z_{11} - Z_2 = Z_{11} - Z_{12} = \underline{15 \Omega}$,

$Z_2 = Z_{12} = \underline{75 \Omega}$,

$Z_3 = Z_{22} - Z_2 = Z_{22} - Z_{21} = \underline{15 \Omega}$

b) $Z_1 = \underline{120 \Omega}$, $Z_2 = \underline{125 \Omega}$, $Z_3 = \underline{150 \Omega}$

c) $Z_1 = j\omega L = j \underline{500 \Omega}$; $L = 5 \text{ H}$;

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C} = \underline{-j 10 \text{ k}\Omega}$$
; $C = 1 \mu\text{F}$; $Z_3 = \underline{1 \text{ k}\Omega}$

3.4. $\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} =$

$$= (Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3) - Z_2^2; \Delta Z = \underline{10800 \Omega^2}$$

3.5. a) Bei stromlosem Ausgang ($I_2 = 0$) liegen Z_2 und Z_3 in Reihe parallel zu Z_1 . Daher ist der Eingangsleerlaufwiderstand gleich dem Ersatzwiderstand

$$Z_{11} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \underline{33,3 \Omega}$$

Ebenso ist

$$Z_{22} = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \underline{37,3 \Omega}$$

Fließt allein Strom I_2 , so ist die Eingangsspannung U_1 vom Strom I_2 durch den Sternersatzwiderstand (siehe Band I, Abschn. 2.5.) bestimmt, der aus den Dreieckwiderständen Z_1 , Z_2 , Z_3 zu berechnen ist.

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \underline{26,7 \Omega}$$

Das gleiche trifft auch für U_2 zu, wenn allein I_1 fließt, so daß

$Z_{21} = \underline{26,7 \Omega}$.

b) $Z_{11} = Z_{22} = \underline{6,67 \text{ k}\Omega}$; $Z_{12} = Z_{21} = \underline{3,33 \text{ k}\Omega}$

$$c) Z_{11} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2}} =$$

$$= \frac{\frac{L}{C_1} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}{j \left[\omega L - \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} \right]};$$

$$Z_{12} = Z_{21} = \frac{\frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}{-j \left[\omega L - \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} \right]};$$

$$Z_{22} = \frac{\frac{L}{C_2} - \frac{1}{\omega^2 C_1 C_2}}{j \left[\omega L - \frac{1}{\omega(C_1 + C_2)} \right]};$$

3.6. a) Bild L 6

b) $Z_{11} = 300 \Omega = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$; $Z_2 = 400 \Omega$;

$$Z_{21} = 100 \Omega = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$$
; $Z_1 = 200 \Omega$

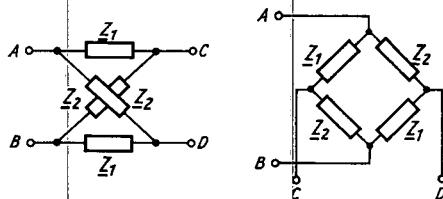


Bild L 6. Aufgabe 3.6 a)

3.7. a) Ermittlung der Vierpolgleichungen aus der Schaltung nach Bild L 7

$$I_1 Z_1 + (I_1 + I_2) Z_2 = U_1; I_2 Z_2 = U_2 - I_1 Z_2;$$

$$(I_1 + I_2) Z_2 = U_2; I_2 Z_2 = U_2 - \left(\frac{U_1 - U_2}{Z_1} \right) Z_2;$$

$$I_1 Z_1 + U_2 = U_1; I_2 = -U_1 \frac{1}{Z_1} + \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \right) U_2;$$

$$I_1 = U_1 \frac{1}{Z_1} - U_2 \frac{1}{Z_1}$$

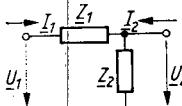


Bild L 7. Aufgabe 3.7 a)

Durch Vergleich mit den Vierpol-Leitwertgleichungen erhält man:

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_1}, Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_1}, Y_{22} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2},$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{pmatrix}$$

Direkte Ermittlung der Vierpolparameter aus der Schaltung:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{Z_1} \quad (\text{Bild L 8})$$

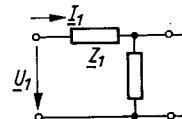


Bild L 8. Aufgabe 3.7 a)

$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -\frac{1}{Z_1} \quad (\text{Bild L 9})$$

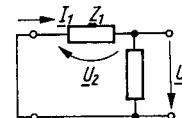


Bild L 9. Aufgabe 3.7 a)

Das negative Vorzeichen resultiert aus der entgegengesetzten Richtung von I_1 und U_2 .

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} = -\frac{1}{Z_1} \quad (\text{Bild L 10})$$

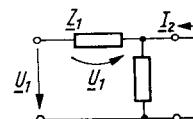


Bild L 10. Aufgabe 3.7 a)

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (\text{Bild L 11})$$

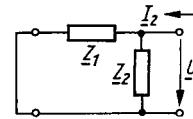


Bild L 11. Aufgabe 3.7 a)

b) Die Berechnung erfolgt entweder direkt nach einem der beiden unter a) angegebenen Lösungswege oder erst nach vorheriger Umwandlung der T-Schaltung in eine Π -Schaltung (Bild L 12).

$$Y_a = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}, \quad Y_b = \frac{Y_1 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3},$$

$$Y_c = \frac{Y_2 Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3};$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{\Sigma Y} & -\frac{Y_1 Y_3}{\Sigma Y} \\ -\frac{Y_1 Y_3}{\Sigma Y} & \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{\Sigma Y} \end{pmatrix};$$

$$\Sigma Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

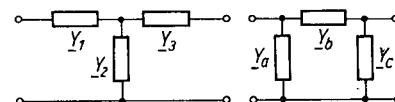


Bild L 12. Aufgabe 3.7 b)

$$c) \underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -\underline{Y}_2 \\ -\underline{Y}_2 & \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 \end{pmatrix}$$

$$d) \underline{Y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 & -(\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2) \\ -(Y_1 - Y_2) & \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \end{pmatrix}$$

e) Wie bei b) wird zweckmäßig zuerst das T-Glied in ein II-Glied umgerechnet (Bild L 13);

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)}{\Sigma \underline{Y}} + \underline{Y}_4 & -\left(\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\Sigma \underline{Y}} + \underline{Y}_4\right) \\ -\left(\frac{\underline{Y}_1 \underline{Y}_3}{\Sigma \underline{Y}} + \underline{Y}_4\right) & \frac{\underline{Y}_3(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2)}{\Sigma \underline{Y}} + \underline{Y}_4 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

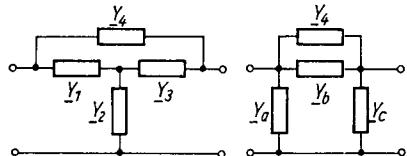


Bild L 13. Aufgabe 3.7 e)

$$3.8. \underline{Y}_1 = \underline{Y}_{11} - \underline{Y}_{12} = 6,7 \text{ mS},$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} \approx 150 \Omega;$$

$$\underline{Y}_2 = \underline{Y}_{21} = (-)3,3 \text{ mS}, \underline{Z}_2 \approx (-)300 \Omega$$

Anmerkung: Das negative Vorzeichen bei \underline{Y}_2 bzw. \underline{Z}_2 ergibt sich aus der willkürlich angenommenen Richtung von I_2 , die im speziellen Fall der vorliegenden Schaltung physikalisch nicht zutrifft. Praktisch stellt \underline{Z}_2 einen ohmschen Widerstand von 300Ω dar.

$$\underline{Y}_3 = \underline{Y}_{22} - \underline{Y}_2 = 5,6 \text{ mS}, \underline{Z}_3 \approx 180 \Omega.$$

$$3.9. \quad \underline{Y}_{11} \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} \quad \underline{Y}_{22}$$

$$a) \quad \frac{2\underline{Y}}{3} \quad -\frac{1\underline{Y}}{3} \quad \frac{2\underline{Y}}{3}$$

$$b) \quad 2\underline{Y} \quad -\underline{Y} \quad 2\underline{Y}$$

$$c) \quad \underline{Y} \quad 0 \quad \underline{Y}$$

$$3.10. a) \quad \underline{Y}_{11} = \frac{1}{R} + j\omega C, \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -j\omega C,$$

$$\underline{Y}_{22} = j\omega C$$

$$b) \quad \underline{Y}_{11} = (1 + j 10) \text{ mS}, \quad \underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -j 10 \text{ mS},$$

$$\underline{Y}_{22} = j 10 \text{ mS}$$

$$3.11. a) \quad H_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = Z_1; \quad (\text{Bild L 14})$$

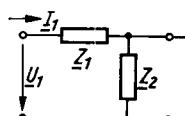


Bild L 14. Aufgabe 3.11 a)

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0} = 1; \quad H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0} = -1;$$

$$H_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{1}{Z_2} \quad (\text{Bild L 15});$$

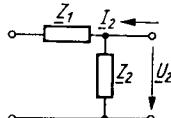


Bild L 15. Aufgabe 3.11 a)

$$H = \begin{pmatrix} Z_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{Z_2} \end{pmatrix}$$

$$b) \quad H = \begin{pmatrix} Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} & \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \\ -\frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad H = \begin{pmatrix} \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_3(Z_1 + Z_2)} \end{pmatrix}$$

$$d) \quad H = \begin{pmatrix} 2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} & \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} & 2 \end{pmatrix}$$

e) Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, die II-Schaltung $Z_1 Z_2 Z_3$ des überbrückten T-Glieds in eine T-Schaltung umzuwandeln (Bild L 16) und auf diese T-Schaltung die Lösung von Aufgabe 3.11 b) anzuwenden.

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4}; \quad Z_b = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3 + Z_4};$$

$$Z_c = \frac{Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_3 + Z_4}$$

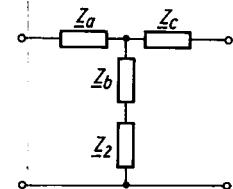
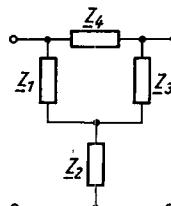


Bild L 16. Aufgabe 3.11 e)

Nach Aufgabe 3.11 b) gilt:

$$H = \begin{pmatrix} Z_a + \frac{(Z_2 + Z_b) Z_c}{Z_2 + Z_b + Z_c} & \frac{Z_2 + Z_b}{Z_2 + Z_b + Z_c} \\ -\frac{Z_2 + Z_b}{Z_2 + Z_b + Z_c} & \frac{1}{Z_2 + Z_b + Z_c} \end{pmatrix}$$

umgeformt:

$$H_{11} = \frac{Z_1 Z_4}{\Sigma Z} + \frac{\frac{Z_2 Z_3 Z_4}{\Sigma Z} \frac{Z_1 Z_3 Z_4}{(\Sigma Z)^2}}{Z_2 + \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4)}{\Sigma Z}}$$

$$H_{12} = -H_{21} = \frac{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z}}{Z_2 + \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4)}{\Sigma Z}}$$

$$H_{22} = \frac{1}{Z_2 + \frac{Z_3 (Z_1 + Z_4)}{\Sigma Z}}$$

$$\Sigma Z = Z_1 + Z_3 + Z_4$$

3.12. a) $H_{11} = Z + \frac{Z}{2} = \underline{150 \Omega}$,

$$H_{21} = -\frac{Z}{2Z} = \underline{-0,5}$$

b) $H_{11} = \underline{50 \Omega}$, $H_{21} = \underline{-0,5}$

3.13. a) $H_{11} = Z_1 = -j 200 \Omega = \frac{1}{j\omega C_1}$;

$$C_1 = 0,5 \mu F, \quad H_{22} = \frac{1}{Z_2} = (5 + j 10) mS$$

1. Möglichkeit: H_{22} kennzeichnet die Parallelschaltung zweier Leitwerte $G_2 = 5 mS$, $\omega C_2 = 10 mS$, $C_2 = 1 \mu F$ (Bild L 17)

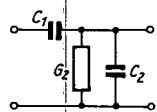


Bild L 17. Aufgabe 3.13 a)

2. Möglichkeit: H_{22} kennzeichnet die Reihenschaltung zweier Widerstände

$$Z_2 = \frac{1}{(5 + j 10) mS} = \frac{5 \cdot 10^3 \Omega}{125} - j \frac{10 \cdot 10^3 \Omega}{125} =$$

$$= (40 - j 80) \Omega,$$

$$R_2 = 40 \Omega, \frac{1}{\omega C_2} = 80 \Omega, C_2 = 1,25 \mu F \text{ (Bild L 18)}$$

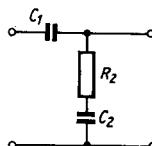


Bild L 18. Aufgabe 3.13 a)

b) $L_1 = 20 mH, L_2 = 1 \mu H, R_2 = 200 \Omega$
(Bild L 19);

$L_1 = 20 mH, L_2 = 8 mH, R_2 = 40 \Omega$
(Bild L 20)

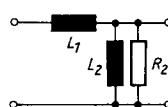


Bild L 19. Aufgabe 3.13 b)

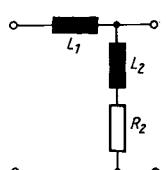


Bild L 20. Aufgabe 3.13 b)

c) $R_1 = 5 k\Omega, L_1 = 1 H, L_2 = 50 mH$
(Bild L 21);

$R_1 = 25 k\Omega, L_1 = 1,25 H, L_2 = 50 mH$
(Bild L 22)

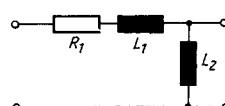


Bild L 21. Aufgabe 3.13 c)

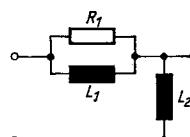


Bild L 22. Aufgabe 3.13 c)

d) $R_1 = 5 k\Omega, C_1 = 10 nF, C_2 = 0,2 \mu F$
(Bild L 23);

$R_1 = 25 k\Omega, C_1 = 8 nF, C_2 = 0,2 \mu F$
(Bild L 24)

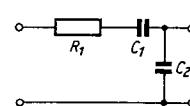


Bild L 23. Aufgabe 3.13 d)

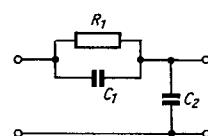


Bild L 24. Aufgabe 3.13 d)

$$3.14. \text{ a) } A_{11} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2};$$

$$A_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_1=0} = Z_1;$$

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} = \frac{1}{Z_2}; \quad A_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_1=0} = 1;$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} & \frac{2 Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1} \\ \frac{2}{Z_2 - Z_1} & \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2 - Z_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } A_{11} = 1 + \frac{Z_1 Z_4}{Z_2 (Z_1 + Z_3 + Z_4) + Z_1 Z_3};$$

$$A_{12} = \frac{Z_4 (Z_1 + Z_3)}{\Sigma Z} + \frac{Z_1 Z_3 Z_4^*}{\Sigma Z [Z_2 \Sigma Z + Z_1 Z_3]};$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{\Sigma Z}}; \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_3 Z_4}{Z_2 \Sigma Z + Z_1 Z_3};$$

$$\Sigma Z = Z_1 + Z_3 + Z_4$$

$$3.15. \text{ a) } A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1,5;$$

$$A_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = 1250 \Omega;$$

$$A_{21} = \frac{1}{Z_2} = 1 \text{ mS}; \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2} = 1,5;$$

$$\Delta A = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 2,25 - 1,25 = 1$$

$$\text{b) } A_{11} = 1,5; \quad A_{12} = 1300 \Omega; \quad A_{21} = \frac{1}{800 \text{ S}};$$

$$A_{22} = 1,75; \quad \Delta A = 2,625 - 1,625 = 1$$

$$\text{c) } A_{11} = 11; \quad A_{12} = 250 \Omega; \quad A_{21} = 0,26 \text{ S};$$

$$A_{22} = 6; \quad \Delta A = 66 - 65 = 1$$

$$\text{d) } A_{11} = 5; \quad A_{12} = 1000 \Omega; \quad A_{21} = 54 \text{ mS};$$

$$A_{22} = 11; \quad \Delta A = 55 - 54 = 1$$

$$3.16. \quad A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 2; \quad Z_1 = Z_2; \\ A_{22} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2} = 2; \quad Z_2 = Z_3;$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 20 \Omega$$

$$3.17. \quad A_{11} = A_{22} = \frac{j\omega L + j\omega L}{j\omega L} = 2;$$

$$A_{12} = Z_2 = j\omega L; \quad A_{21} = \frac{3j\omega L}{(j\omega L)^2} = \frac{3}{j\omega L}$$

Für die Widerstände der T-Schaltung erhält man:

$$Z_2 = \frac{1}{A_{21}} = \frac{j\omega L}{3}; \quad Z_1 = (A_{11} - 1) Z_2 = \frac{j\omega L}{3}$$

$$Z_3 = \frac{j\omega L}{3}$$

$$3.18. \quad Z_1 = Z_3 = 60 \Omega; \quad Z_2 = \frac{1}{A_{21}} = 300 \Omega$$

$$3.19. \quad \text{T-Schaltung: } Z_2 = \frac{1}{A_{21}} = 250 \Omega;$$

$$Z_1 = (A_{11} - 1) Z_2 = 875 \Omega = Z_3;$$

$$\text{II-Schaltung: } A_{21} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1}{Z_1 Z_3} = \\ = \frac{A_{11}}{Z_1} + \frac{1}{Z_1}; \quad Z_1 = Z_3;$$

$$Z_1 = \frac{A_{11} + 1}{A_{21}} = 1375 \Omega = Z_3;$$

$$Z_2 = (A_{11} - 1) Z_3 \approx 4810 \Omega$$

3.20. Die Vierpolgleichungen mit Z-Parametern

$$U_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} \quad (\text{I})$$

$$U_2 = I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} \quad (\text{II})$$

werden so umgeformt, daß die Spannungen und Ströme an den gleichen Stellen stehen wie in den Leitwertgleichungen.

$$I_1 = \frac{U_1 - I_2 Z_{12}}{Z_{11}} \quad (\text{I})$$

$$I_2 = \frac{U_2 - I_1 Z_{21}}{Z_{22}} \quad (\text{II})$$

Durch Einsetzen von Gl. (I) in Gl. (II) erhält man

$$I_1 = \frac{U_1}{Z_{11}} - \frac{U_2 Z_{12}}{Z_{11} Z_{22}} + \frac{I_1 Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} Z_{22}}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{\Delta Z} - \frac{U_2}{\Delta Z} \frac{Z_{12}}{Z_{21}}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der 1. Vierpolgleichung mit Y -Parametern $I_1 = \underline{U}_1 Y_{11} + \underline{U}_2 Y_{12}$ ergibt sich $\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta Z}; \underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\Delta Z}$

Durch eine entsprechende Ableitung ergibt sich ebenso $\underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\Delta Z}; \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta Z}$

3.21. Kettengleichungen

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 - \underline{A}_{12}I_2 \quad (I)$$

$$I_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 - \underline{A}_{22}I_2 \quad (II)$$

Gl. (II) wird nach I_2 aufgelöst und in Gl. (I) eingesetzt:

$$-I_2 = \frac{I_1 - \underline{U}_2 \underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \frac{\underline{A}_{12}I_1}{\underline{A}_{22}} - \frac{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}\underline{U}_2}{\underline{A}_{22}}$$

$$\underline{U}_1 = I_1 \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} + \underline{U}_2 \frac{\underline{\Delta A}}{\underline{A}_{22}}$$

Durch Vergleich mit den Koeffizienten der Vierpol-Hybridgleichung $\underline{U}_1 = I_1 \underline{H}_{11} + \underline{U}_2 \underline{H}_{12}$ erhält man

$$\underline{H}_{11} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}; \underline{H}_{12} = \frac{\underline{\Delta A}}{\underline{A}_{22}}$$

Ebenso ergibt sich:

$$\underline{H}_{21} = -\frac{1}{\underline{A}_{22}}; \underline{H}_{22} = \frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}$$

$$3.22. \text{ a)} \Delta Z = \frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta Y} \cdot \frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta Y} - \frac{-\underline{Y}_{12}}{\Delta Y} \cdot \frac{-\underline{Y}_{21}}{\Delta Y} = \frac{\Delta Y}{\Delta Y^2} = \frac{1}{\Delta Y}$$

$$\text{b)} \Delta Z = \left(\frac{\underline{H}_{11}\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{22}} - \frac{\underline{H}_{12}\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \right) \frac{1}{\underline{H}_{22}} - \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}} \left(-\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} \right) = \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{22}}$$

$$\text{c)} \Delta Z = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}$$

3.23. $Z_{11} = 1 \text{ k}\Omega; Z_{12} = 1 \text{ k}\Omega; Z_{21} = 1 \text{ k}\Omega; Z_{22} = 1,5 \text{ k}\Omega;$

$$\Delta Z = 0,5 \cdot 10^6 \Omega^2;$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta Z} = 3 \text{ mS}; \underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\Delta Z} = -2 \text{ mS};$$

$$\underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\Delta Z} = -2 \text{ mS}; \underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta Z} = 2 \text{ mS};$$

$$\underline{H}_{11} = 0,33 \text{ mS}; \underline{H}_{12} = 0,67; \underline{H}_{21} = -0,67;$$

$$\underline{H}_{22} = 0,67 \text{ mS}$$

$$3.24. \text{ a)} \underline{Y} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} & -\frac{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2}{2} \\ -\frac{\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2}{2} & \frac{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} & -\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \\ -\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2} \end{pmatrix};$$

$$\Delta \underline{Y} = \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^2}{4\underline{Z}_1^2 \underline{Z}_2^2} - \frac{(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1)^2}{4\underline{Z}_1^2 \underline{Z}_2^2} = \frac{1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$$

$$\underline{H} = \begin{pmatrix} \frac{2\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \\ -\frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} & \frac{2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \underline{H} = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{\underline{Z}_2} \end{pmatrix};$$

$$\Delta \underline{H} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}; \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ \frac{1}{\underline{Z}_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} & \underline{Z}_2 \\ \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \end{pmatrix};$$

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \\ \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} & \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \end{pmatrix}$$

$$3.25. \underline{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 1,4 \text{ k}\Omega \\ 0,2 \text{ mS} & 1,6 \end{pmatrix}$$

$$3.26. \underline{Z} = \begin{pmatrix} \frac{(4 - j 8) \cdot 10^3}{104} & -\frac{2 \cdot 10^3}{104} \\ -\frac{2 \cdot 10^3}{104} & \frac{(5 + j 10) \cdot 10^3}{104} \end{pmatrix} \Omega;$$

$$\Delta \underline{Y} = (5 + j 10)(4 - j 8) \cdot 10^{-6} \text{ S}^2 + 1 \cdot 10^{-6} \text{ S}^2 = 104 \cdot 10^{-6} \text{ S}^2;$$

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 39,2 - j 78,4 & -19,6 \\ -19,6 & 49 + j 98 \end{pmatrix} \Omega;$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{(5+j10) \text{ mS}} & \frac{-2 \text{ mS}}{(5+j10) \text{ mS}} \\ -2 \text{ mS} & \frac{104 \cdot 10^{-6} \text{ S}^2}{(5+j10) \text{ mS}} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} (40-j80) \Omega & -(0,08-j0,16) \\ -(0,08-j0,16) & (4,16-j8,32) \text{ mS} \end{pmatrix}$$

3.27. Aus $Z_{11} = \frac{2Z^2}{3Z}$ erhält man $Z = 60 \Omega$; ferner

gilt $A_{11} = A_{22} = \underline{2}$;

$A_{12} = \underline{60 \Omega}$; $A_{21} = \underline{0,05 \text{ S}}$

3.28. $A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{11}} = \frac{1}{15 \text{ S}}$;

$A_{12} = \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{21}} = \underline{360 \Omega} = Z_2$;

$Z_1 = Z_3 = \frac{Z_2}{A_{11} - 1} = \underline{90 \Omega}$

3.29. $A_{21} = -\frac{A_{12}}{\Delta Z} = 0,01 \text{ S}$; $Z_2 = \frac{1}{A_{21}} = \underline{100 \Omega}$;

$Z_1 = Z_2(A_{11} - 1) = \underline{25 \Omega}$;

$Z_3 = \frac{Z_2(A_{21} - Z_1)}{Z_1 + Z_2} = \underline{50 \Omega}$

3.30. Aus den Widerständen der T-Glieder sind die Z -Matrizen zu ermitteln; deren Addition ergibt die gesuchte Gesamtmatrix.

a) $\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \Omega + \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix} \Omega = Z_{\text{ges}}$;

$Z_{1\text{ges}} = Z_{11\text{ges}} - Z_{2\text{ges}} = \underline{20 \Omega}$;

$Z_{2\text{ges}} = Z_{12\text{ges}} = \underline{20 \Omega}$;

$Z_{3\text{ges}} = \underline{20 \Omega}$ (Bild L 25)

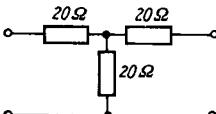


Bild L 25. Aufgabe 3.30 a)

b) $Z = \begin{pmatrix} 60 & 40 \\ 40 & 65 \end{pmatrix} \Omega$; $Z_1 = \underline{20 \Omega}$; $Z_2 = \underline{40 \Omega}$;

$Z_3 = \underline{25 \Omega}$

c) $Z = \begin{pmatrix} 115 + j490 & 100 + j500 \\ 100 + j500 & 115 + j510 \end{pmatrix} \Omega$

$Z_1 = \underline{(15 - j10) \Omega}$; $Z_2 = \underline{(100 + j500) \Omega}$;

$Z_3 = \underline{(15 + j10) \Omega}$ (Bild L 26)

3.31. a) $\begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 200 & 200 \end{pmatrix} \Omega + \begin{pmatrix} 300 & 100 \\ 100 & 100 \end{pmatrix} \Omega =$

$= \begin{pmatrix} 600 & 300 \\ 300 & 300 \end{pmatrix} \Omega = Z$ (Bild L 27)

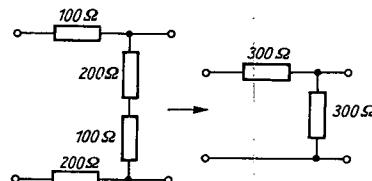


Bild L 27. Aufgabe 3.31 a)

b) $Z = \begin{pmatrix} 250 & 200 \\ 200 & 400 \end{pmatrix} \Omega$ (Bild L 28)

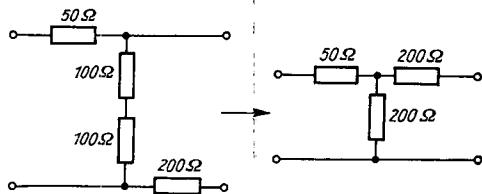


Bild L 28. Aufgabe 3.31 b)

c) $Z = \begin{pmatrix} 60 & 30 \\ 30 & 50 \end{pmatrix} \Omega$ (Bild L 29)

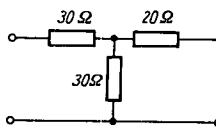


Bild L 29. Aufgabe 3.31 c)

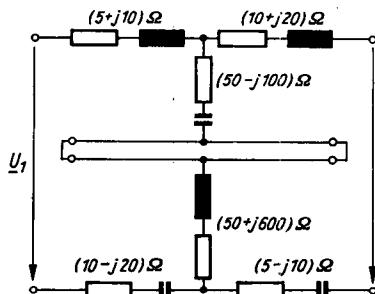


Bild L 26. Aufgabe 3.30 c)

d) $Z = \begin{pmatrix} 22 & 15 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} \Omega$ (Bild L 30)

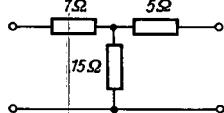


Bild L 30. Aufgabe 3.31 d)

Zum gleichen Ergebnis gelangt man durch Umrechnen der beiden II-Glieder in T-Glieder (Bild L 31)

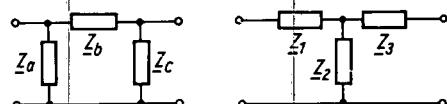


Bild L 31. Aufgabe 3.31 d)

$$Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}; Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c};$$

$$Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

1. T-Glied:

$$Z_1 = \frac{100 \Omega}{50 \Omega} = 2 \Omega; Z_2 = \frac{500 \Omega}{50 \Omega} = 10 \Omega;$$

$$Z_3 = \frac{125 \Omega}{50 \Omega} = 2,5 \Omega$$

2. T-Glied:

$$Z_1 = 5 \Omega; Z_2 = 5 \Omega; Z_3 = 2,5 \Omega$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 12,5 \end{pmatrix} \Omega + \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 7,5 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 22 & 15 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} \Omega = Z$$

(Bild L 32)

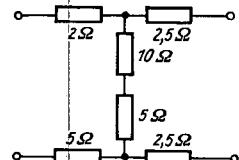


Bild L 32. Aufgabe 3.31 d)

e) $Z = \begin{pmatrix} 27 & 18 \\ 18 & 37 \end{pmatrix} \Omega$ (Bild L 33)

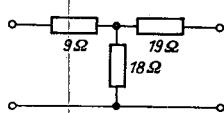


Bild L 33. Aufgabe 3.31 e)

3.82. $Z = \begin{pmatrix} (20 + j 2) \Omega & (10 - j 10) \Omega \\ (10 + j 10) \Omega & (32 - j 4) \Omega \end{pmatrix}$

3.83. Die beiden Teilmatrizen enthalten Z -Parameter. Mit der Lösung von Aufgabe 3.1 b) ergibt sich

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 = (15 + j 2) \Omega; Z_{12} = Z_2 = 10 \Omega;$$

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{22} = (5 + j 2) \Omega;$$

$$Z_{22} = Z_2 + Z_3 = (24 - j 4) \Omega;$$

$$Z_3 = Z_{22} - Z_2 = (14 - j 4) \Omega$$

Mit der Lösung von Aufgabe 3.1 d) ergibt sich für die 2. Teilmatrix

$$Z_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = 5 \Omega; Z_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{2} = -j 10 \Omega;$$

$$Z_1 = 10 \Omega - Z_2; Z_2 = -j 20 \Omega + Z_1;$$

$$2Z_1 = (10 + j 20) \Omega; Z_1 = (5 + j 10) \Omega;$$

$$Z_2 = (5 - j 10) \Omega$$

3.84. a) Die Leitwertmatrizen der Einzelvierpole sind zu addieren. Aus der Lösung von Aufgabe 3.7 b) kann die Y -Matrix des T-Gliedes

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{\Sigma Y} & -\frac{Y_1 Y_3}{\Sigma Y} \\ -\frac{Y_1 Y_3}{\Sigma Y} & \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{\Sigma Y} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

entnommen werden.

$$Y_{11} = \frac{10 \text{ mS} \cdot 30 \text{ mS}}{40 \text{ mS}} = 7,5 \text{ mS} = Y_{22};$$

$$Y_{12} = -\frac{10 \text{ mS} \cdot 10 \text{ mS}}{40 \text{ mS}} = -2,5 \text{ mS} = Y_{21}$$

Die Y -Matrix des Längswiderstandes wird direkt aus der Schaltung abgelesen:

$$Y_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} = Y_4 \quad (\text{Bild L 34})$$

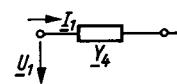


Bild L 34. Aufgabe 3.34 a)

$$Y_{12} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} = -Y_4 \quad (\text{Bild L 35})$$

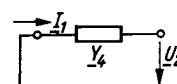


Bild L 35. Aufgabe 3.34 a)

$$Y_{21} = \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_1=0} = -Y_4$$

(Bild L 36)

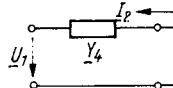


Bild L 36. Aufgabe 3.34 a)

$$Y_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} = Y_4$$

(Bild L 37)

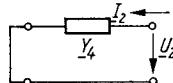


Bild L 37. Aufgabe 3.34 a)

T-Glied:

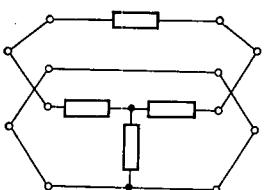
Längswiderstand:

$$Y: \begin{pmatrix} 7,5 & -2,5 \\ -2,5 & 7,5 \end{pmatrix} \text{ mS} + \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \text{ mS} =$$

Gesamtschaltung:

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 12,5 & -7,5 \\ -7,5 & 12,5 \end{pmatrix}}} \text{ mS}$$

Die Einzelleitwerte der als Gesamtschaltung entstehenden überbrückten T-Schaltung können direkt aus der Schaltung Bild L 38 abgelesen werden.



$\hat{=}$

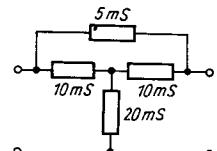


Bild L 38. Aufgabe 3.34 a)

b) **Y-Matrix des Π -Gliedes:** **Y-Matrix des Längswiderstandes:**

(Aufgabe 3.7 c)

(Aufgabe 3.34 a)

$$\begin{pmatrix} 1,3 & -1 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix} \text{ S};$$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & -0,2 \\ -0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \text{ S}$$

Y-Gesamtmatrix:

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1,5 & -1,2 \\ -1,2 & 1,7 \end{pmatrix}}} \text{ S}$$

(Bild L 39)

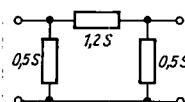


Bild L 39. Aufgabe 3.34 b)

c) Die Addition der Y-Matrizen der beiden T-Glieder ergibt die Y-Matrix des Doppel-T-Gliedes.

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{Y_1(Y_2 + Y_3)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} + \frac{Y_4(Y_5 + Y_6)}{Y_4 + Y_5 + Y_6} & \frac{-Y_1Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} - \frac{Y_4Y_6}{Y_4 + Y_5 + Y_6} \\ \frac{-Y_1Y_3}{Y_1 + Y_2 + Y_3} - \frac{Y_4Y_6}{Y_4 + Y_5 + Y_6} & \frac{Y_3(Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + Y_3} + \frac{Y_6(Y_4 + Y_5)}{Y_4 + Y_5 + Y_6} \end{pmatrix}$$

Durch die Gleichheit der Einzelleitwerte vereinfacht sich das Ergebnis wesentlich.

$$\begin{pmatrix} \frac{2Y^2}{3Y} + \frac{2Y^2}{3Y} - \frac{Y^2}{3Y} - \frac{Y^2}{3Y} \\ -\frac{Y^2}{3Y} - \frac{Y^2}{3Y} \quad \frac{2Y^2}{3Y} + \frac{2Y^2}{3Y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}} \text{ mS}$$

Die Einzelleitwerte bleiben unverändert (Bild L 40).

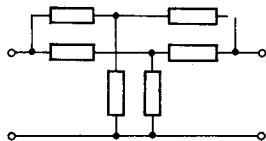


Bild L 40.
Aufgabe 3.34 c)

d) Die Parallelschaltung zweier Π -Glieder ergibt wieder ein Π -Glied. Zuerst werden die Widerstände in Leitwerte umgeformt.

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = 0,2 \text{ S}; Y_2 = 0,1 \text{ S}; Y_3 = 0,2 \text{ S};$$

$$Y_4 = 0,1 \text{ S}; Y_5 = 0,2 \text{ S}; Y_6 = 0,1 \text{ S}$$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ S} + \begin{pmatrix} 0,3 & -0,2 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 \end{pmatrix}}}$$

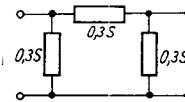


Bild L 41. Aufgabe 3.34 d)

3.35. a) Da bei der Parallelschaltung die Gesamtmatrix aus der Addition der Y-Teilmatrizen entsteht, werden die gegebenen Parameter zunächst in Y-Parameter umgerechnet.

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,14 & -0,286 \\ -0,286 & 0,571 \end{pmatrix} \text{ mS}$$

$$\Delta Z = 2 \cdot 10^6 - 0,25 \cdot 10^6 \Omega^2 = 1,75 \cdot 10^6 \Omega^2$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{\Delta A}{A_{12}} \\ -\frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ mS}$$

$$\Delta A = 1,5 - 500 \cdot 10^{-3} = 1$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = \begin{pmatrix} 3,14 & -2,286 \\ -2,286 & 3,57 \end{pmatrix} \text{ mS}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \text{ mS} + \begin{pmatrix} 0,15 & -0,05 \\ -0,05 & 0,25 \end{pmatrix} \text{ mS} = \\ = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,15 \\ -0,15 & 0,35 \end{pmatrix} \text{ mS}$$

$$\text{c) } Y_1 = \begin{pmatrix} 33,3 + j 33,3 & j 66,7 \\ j 66,7 & 33,3 - j 33,3 \end{pmatrix} \text{ mS};$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 20 + j 10 & j 10 \\ j 10 & 5 - j 5 \end{pmatrix} \text{ mS};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 53,3 + j 43,3 & j 76,7 \\ j 76,7 & 38,3 - j 38,3 \end{pmatrix} \text{ mS}$$

$$\text{3.36. } Y_{11} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} = \frac{100}{4600} \text{ S} = 21,8 \text{ mS};$$

$$Y_{12} = \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} = -\frac{20}{4600} \text{ S} = -4,35 \text{ mS};$$

$$Y_{21} = \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} = -4,35 \text{ mS};$$

$$Y_{22} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} = 10,85 \text{ mS};$$

$$Y_{11} = \frac{1}{H_{11}} = 20 \text{ mS}; \quad Y_{12} = -\frac{H_{12}}{H_{11}} = -4 \text{ mS};$$

$$Y_{21} = \frac{-H_{21}}{H_{11}} = -4 \text{ mS}; \quad Y_{22} = \frac{\Delta H}{H_{11}} = 4,8 \text{ mS};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 21,8 & -4,35 \\ -4,35 & 10,85 \end{pmatrix} \text{ mS} + \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 4,8 \end{pmatrix} \text{ mS} = \\ = \begin{pmatrix} 41,8 & -8,35 \\ -8,35 & 15,65 \end{pmatrix} \text{ mS};$$

$$Z = \begin{pmatrix} 27 & 14 \\ 14 & 72 \end{pmatrix} \Omega; \quad H = \begin{pmatrix} 23,9 \Omega & 0,2 \\ -0,2 & 10,4 \text{ mS} \end{pmatrix}$$

3.37. Bei einer Zusammenschaltung der T-Glieder nach Bild L 42 wird die Vierpolbedingung nicht eingehalten, da keine widerstandsfreien Verbindungen vorhanden sind. Durch Umzeichnen der Schaltung nach Bild L 42 erhält man die im Bild L 43 ange-

gebene Schaltung, deren Gesamtmatrix nicht der Addition der Teilmatrizen der T-Glieder entspricht. Die Lösung nach Bild L 42 ist daher falsch! Bild L 44 zeigt die richtige Zusammenschaltung der T-Glieder. Die Z-Matrix der Schaltung nach Bild L 45 lautet:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_5 & Z_2 + Z_5 \\ Z_2 + Z_5 & Z_2 + Z_3 + Z_5 + Z_6 \end{pmatrix}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man durch Addition der Teil-Z-Matrizen.

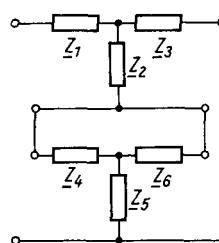


Bild L 42. Aufgabe 3.37

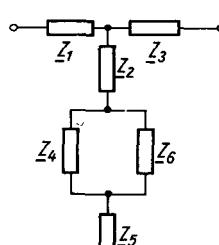


Bild L 43. Aufgabe 3.37

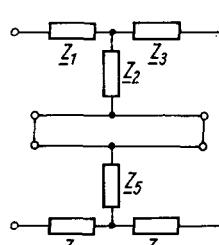


Bild L 44. Aufgabe 3.37

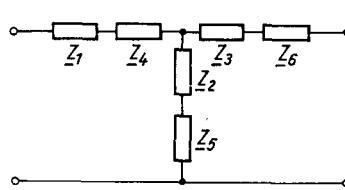


Bild L 45.
Aufgabe 3.37

3.38. Bild L 46

Bild L 47

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_4 + Y_5 & -Y_2 - Y_5 \\ -Y_2 - Y_5 & Y_2 + Y_3 + Y_5 + Y_6 \end{pmatrix}$$

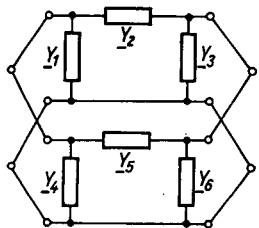


Bild L 46.
Aufgabe 3.38

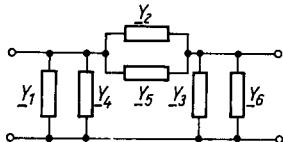


Bild L 47.
Aufgabe 3.38

3.89. a) Die Z -Parameter des Querwiderstandes können direkt aus der Schaltung Bild L 48 abgelesen werden.

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_4; \quad Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_4$$

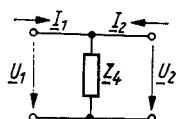


Bild L 48. Aufgabe 3.39 a)

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z_4; \quad Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = Z_4;$$

(Bild L 49 a, b)

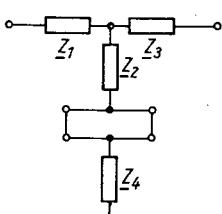


Bild L 49 a.
Aufgabe 3.39 a) Reihenschaltung T-Glied - Querwiderstand

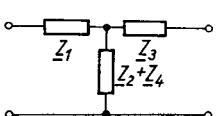


Bild L 49 b.
Aufgabe 3.39 a)
Resultierende T-Schaltung

Querwiderstand: T-Glied:

$$Z = \begin{pmatrix} Z_4 & Z_4 \\ Z_4 & Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} =$$

Gesamtschaltung:

$$= \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_4 & Z_2 + Z_4 \\ Z_2 + Z_4 & Z_2 + Z_3 + Z_4 \end{pmatrix}$$

b) Die Y -Matrix des Längswiderstandes wurde bereits in Aufgabe 3.34 a) bestimmt:

Längswiderstand:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_4 - Y_4 & Y_1 + Y_2 - Y_2 \\ -Y_4 & Y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 - Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{pmatrix} =$$

Gesamtschaltung:

$$= \begin{pmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_4 - (Y_2 + Y_4) \\ -(Y_2 + Y_4) & Y_2 + Y_3 + Y_4 \end{pmatrix}$$

(Bild L 50 a, b)

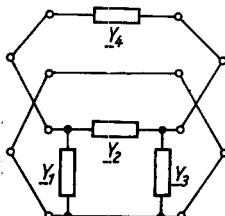


Bild L 50 a.
Aufgabe 3.39 b)

Parallelschaltung Längswiderstand - II-Glied

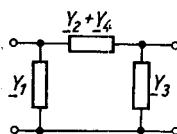


Bild L 50 b. Aufgabe 3.39 b)
Resultierende II-Schaltung

c) Die Kettenmatrix des T-Halbgliedes wurde bereits in Aufgabe 3.14 a) ermittelt. Die Kettenmatrix des II-Halbgliedes lässt sich aus der Kettenmatrix des II-Glieds ableiten (Aufgabe 3.14 c), wobei dort der Leitwert $Y_3 = 0$ bzw. der Widerstand $Z_3 = \infty$ gesetzt werden.

$$A_{\text{II-Glied}} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix};$$

$$A_{\text{II-Halbglied}} = \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ \frac{1}{Z_1} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix};$$

$$\text{mit } A_{21} = \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_3}{Z_1 Z_3} = \frac{1}{Z_1}$$

Den Widerständen Z_1 und Z_2 des II-Gliedes entsprechen die Widerstände Z_3 und Z_4 des II-Halbgliedes nach Bild 3.32. Durch Vertauschen der Indizes erhält man die endgültige II-Halbglied-Matrix, die mit der des T-Halbgliedes zu multiplizieren ist.

T-Halbglied:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$$

II-Halbglied:

$$\begin{pmatrix} 1 & Z_4 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_3} \end{pmatrix}$$

Gesamtschaltung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_1 + Z_4 + \frac{Z_1 Z_4}{Z_2} + \frac{Z_1 Z_4}{Z_3} \\ \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_2} + \frac{Z_4}{Z_3} \end{pmatrix}$$

Vergleicht man die etwas umgeformte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2 Z_3} & Z_1 + Z_4 + \frac{Z_1 Z_4}{Z_2 Z_3} \\ \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_2 Z_3} \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix des T-Gliedes nach Aufgabe 3.14 b), dann erkennt man die Identität, wobei sich der resultierende Querwiderstand des T-Gliedes nach Bild L 51 a, b aus der Parallelschaltung von Z_2 und Z_3 zusammensetzt.

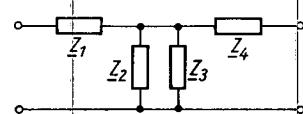


Bild L 51 a. Aufgabe 3.39 c)
T-Halbglied-II-Halbglied

d) (Bild L 52 a, b)

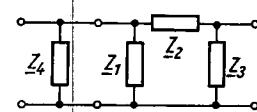


Bild L 52 a.
Aufgabe 3.39 d)
Kettenschaltung Querwiderstand II-Glied

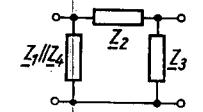


Bild L 52 b. Aufgabe 3.39 d)
Resultierende II-Schaltung

Zuerst werden die Kettenparameter des Querwiderstandes Z_4 ermittelt.

$$A_{11} = 1 \quad (\text{Bild L 53})$$

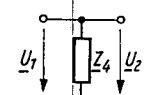


Bild L 53. Aufgabe 3.39 d)

$A_{12} = 0$ Durch den Kurzschluß an den Ausgangsklemmen ($U_2 = 0$) wird U_1 ebenfalls kurzgeschlossen.

$$A_{21} = \frac{1}{Z_4} \quad (\text{Bild L 54})$$

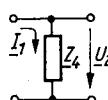


Bild L 54. Aufgabe 3.39 d)

$$A_{22} = 1 \quad (\text{Bild L 55})$$

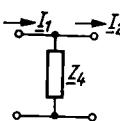


Bild L 55. Aufgabe 3.39 d)

Querwiderstand: II-Glied (Aufgabe 3.39 c):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_4} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \end{pmatrix}$$

Gesamtschaltung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_2}{Z_3} & Z_2 \\ \frac{1}{Z_4} + \frac{Z_2}{Z_3 Z_4} + \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} & 1 + \frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_4} \end{pmatrix}$$

3.40. a) Kettenschaltung

b) Bild L 56

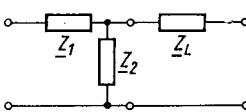


Bild L 56.
Aufgabe 3.40 b)

c) T-Halbglied: Längswiderstand:

$$\begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & Z_L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtschaltung:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} & Z_1 + Z_L \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_L}{Z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 & 3,5 \text{ k}\Omega \\ 0,25 \text{ mS} & 1,25 \end{pmatrix}$$

3.41. a) Längswiderstand: Querwiderstand:

$$\begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix} =$$

T-Halbglied:

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

Durch Vergleich der A -Matrix mit dem Ergebnis von Aufgabe 3.14 a), der Kettenmatrix des T-Halbgliedes, wird die Richtigkeit der Lösung bestätigt (Bild L 57).

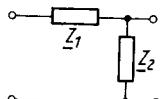


Bild L 57. Aufgabe 3.41 a)

b) Querwiderstand: Längswiderstand:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & Z_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

II-Halbglied:

$$= \begin{pmatrix} 1 & Z_4 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_3} \end{pmatrix} = A \quad (\text{Bild L 58})$$

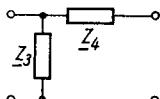


Bild L 58. Aufgabe 3.41 b)

c) Mit dem Ergebnis von 3.41 a) erhält man:

$$\begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{R}{j\omega C} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Bild L 59})$$

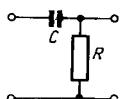


Bild L 59. Aufgabe 3.41 c)

d) T-Halbglied:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 \end{pmatrix}$$

II-Halbglied:

$$\begin{pmatrix} 1 & Z_4 \\ \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_3} \end{pmatrix}$$

Gesamtschaltung: (Bild L 60)

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_1}{Z_3} & Z_4 \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) + Z_1 \left(1 + \frac{Z_4}{Z_3}\right) \\ \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} & 1 + \frac{Z_4}{Z_2} + \frac{Z_4}{Z_3} \end{pmatrix}$$

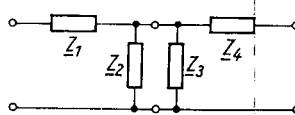


Bild L 60.
Aufgabe 3.41 d)

e) Bild L 61

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2} + \frac{3}{j\omega CR} & \frac{2}{j\omega C} - \frac{1}{\omega^2 C^2 R} \\ \frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega CR^2} & 1 + \frac{1}{j\omega CR} \end{pmatrix}$$

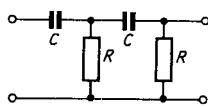


Bild L 61. Aufgabe 3.41 e)

f) Bild L 62

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{Z_1 + Z_4}{Z_2} & Z_1 + Z_4 \\ \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{Z_1 + Z_4}{Z_2 Z_3} & 1 + \frac{Z_1 + Z_4}{Z_3} \end{pmatrix}$$

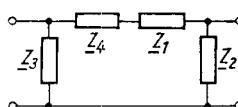


Bild L 62.
Aufgabe 3.41 f)

3.42.

a) A -Matrix eines II-Gliedes mit gleichen Widerständen: Kettenschaltung:

$$\begin{pmatrix} 2 & Z \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4Z \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$$

b) A -Matrix eines T-Gliedes mit gleichen Widerständen: 2 T-Glieder in Kettenschaltung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3Z \\ \frac{1}{Z} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 12Z \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

3 T-Glieder in Kettenschaltung:

$$\begin{pmatrix} 26 & 45Z \\ \frac{15}{Z} & 26 \end{pmatrix}$$

3.43. a) $A = \begin{pmatrix} 3,81 & 4140 \Omega \\ 3,38 \text{ mS} & 3,92 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 68,5 & 13,75 \text{ k}\Omega \\ 1,624 \text{ S} & 326 \end{pmatrix}$

c) Zuerst müssen die Z -Parameter bzw. Y -Parameter in Kettenparameter umgerechnet werden.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1,6 & 6 \text{ k}\Omega \\ 0,1 \text{ mS} & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \text{ k}\Omega \\ 0,2 \text{ mS} & 1 \end{pmatrix}$$

Gesamtmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4,4 & 14 \text{ k}\Omega \\ 0,4 \text{ mS} & 1,5 \end{pmatrix}$$

3.44. a) Die Kenntnis der Wirkungsweise eines Transistors ist zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich, da der Transistor als Vierpol durch die gegebene H -Matrix hinreichend beschrieben wird (Bild L 63).

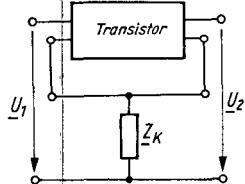


Bild L 63.
Aufgabe 3.44

Da sich bei einer Reihenschaltung die Gesamtmatrix aus der Addition der Z -Matrizen ergibt, sind zuerst die Widerstandsmatrizen von Transistorvierpol und Querwiderstand Z_K zu ermitteln.

Transistor:

$$H_{\text{Trans}} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix};$$

$$Z_{\text{Trans}} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta H}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{pmatrix}; \quad \text{Querwiderstand: } Z = \begin{pmatrix} Z_K & Z_K \\ Z_K & Z_K \end{pmatrix}$$

Z -Matrix der Gesamtgeschaltung:

$$Z' = \left(\begin{array}{cc} \frac{\Delta H}{H_{22}} + Z_K & \frac{H_{12}}{H_{22}} + Z_K \\ -\frac{H_{21}}{H_{22}} + Z_K & \frac{1}{H_{22}} + Z_K \end{array} \right);$$

H -Matrix der Gesamtgeschaltung:

$$H' = \left(\begin{array}{cc} \frac{\Delta Z'}{Z'_{22}} & \frac{Z'_{12}}{Z'_{22}} \\ -\frac{Z'_{21}}{Z'_{22}} & \frac{1}{Z'_{22}} \end{array} \right)$$

b) Die Hybridparameter der Gesamtgeschaltung werden zur Unterscheidung von den H -Parametern des Transistorvierpols „ohne Gegenkopplung“ als Strichgrößen gekennzeichnet. Da die Berechnung der H' -Parameter für die angegebenen Zahlenwerte der Transistor- H -Parameter gefordert wird, müssen zu ihrer Ermittlung die Parameter der Z' -Matrix in die H' -Matrix eingesetzt werden.

$$\Delta Z' = Z'_{11} Z'_{22} - Z'_{12} Z'_{21};$$

$$\Delta Z' = \left(\frac{\Delta H}{H_{22}} + Z_K \right) \left(\frac{1}{H_{22}} + Z_K \right) -$$

$$- \left(\frac{H_{12}}{H_{22}} + Z_K \right) \left(-\frac{H_{21}}{H_{22}} + Z_K \right);$$

$$\Delta Z' =$$

$$= \frac{H_{11}(1 + H_{22}Z_K) + Z_K(1 + H_{21} - H_{12} - H_{12}H_{21})}{H_{22}};$$

$$H'_{11} = \frac{\Delta Z'}{Z'_{22}} = H_{11} + \frac{Z_K(1 + H_{21})(1 - H_{12})}{1 + Z_K H_{22}};$$

$$H'_{12} = \frac{Z'_{12}}{Z'_{22}} = \frac{H_{12} + Z_K H_{22}}{1 + Z_K H_{22}};$$

$$H'_{21} = \frac{-Z'_{21}}{Z'_{22}} = \frac{H_{21} - Z_K H_{22}}{1 + Z_K H_{22}};$$

$$H'_{22} = \frac{1}{Z'_{22}} = \frac{H_{22}}{1 + Z_K H_{22}};$$

$$H'_{11} \approx 1 \text{ k}\Omega + \frac{200 \Omega \cdot (1 + 50)}{1 + 0,025} = 11,2 \text{ k}\Omega;$$

$$H'_{12} = \frac{5 \cdot 10^{-4} + 250 \Omega \cdot 10^{-4} \text{ S}}{1,025} = 250 \cdot 10^{-4};$$

$$H'_{21} = \frac{50 - 0,025}{1,025} \approx 48,8;$$

$$H'_{22} = \frac{100 \mu\text{S}}{1,025} = 97,5 \mu\text{S}$$

3.45. a) Die Matrix Y' der Gesamtgeschaltung ergibt sich durch die Addition der

Y -Matrix des Transistors $\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ mit der

Y -Matrix des Längswiderstandes $Z_K: \begin{pmatrix} Y_K & -Y_K \\ -Y_K & Y_K \end{pmatrix}$

Da in der Aufgabenstellung b) die H -Parameter des Transistors vorgegeben sind, ist es zweckmäßig, diese mit Hilfe der Tafel 3.1 in die Y -Parameter umzurechnen.

$$Y_{\text{Trans}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{H_{11}} & -\frac{H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\Delta H}{H_{11}} \end{pmatrix}$$

Gesamtmatrix:

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{H_{11}} + Y_K & -\frac{H_{12}}{H_{11}} - Y_K \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} - Y_K & \frac{\Delta H}{H_{11}} + Y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{pmatrix}$$

Durch nochmalige Umrechnung erhält man die geforderte Matrix H' der Gesamtschaltung:

$$H' = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y'_{11}} & -\frac{Y'_{12}}{Y'_{11}} \\ \frac{Y'_{21}}{Y'_{11}} & \frac{\Delta Y'}{Y'_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{pmatrix}$$

b) Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die H' -Parameter des gegengekoppelten Transistors als Funktion der H -Parameter des nicht gegengekoppelten Transistors und des Gegenkopplungswiderstandes Z_K berechnet werden.

$$H'_{11} = \frac{1}{Y'_{11}} = \frac{1}{\frac{1}{H_{11}} + Y_K} = \frac{H_{11}}{1 + \frac{H_{11}}{Z_K}}$$

Für $Z_K \gg H_{11}$ wird $\frac{H_{11}}{Z_K} \ll 1$; damit gilt

$$H'_{11} \approx H_{11} = 1 \text{ k}\Omega;$$

$$\begin{aligned} H'_{12} &= -\frac{Y'_{12}}{Y'_{11}} = \frac{\frac{H_{12}}{H_{11}} + \frac{1}{Z_K}}{\frac{1}{H_{11}} + \frac{1}{Z_K}} = \\ &= \frac{H_{12}Z_K + H_{11}}{Z_K + H_{11}} = \frac{H_{12} + \frac{H_{11}}{Z_K}}{1 + \frac{H_{11}}{Z_K}} \end{aligned}$$

Mit $Z_K \gg H_{11}$ gilt $\frac{H_{11}}{Z_K} \ll 1$

$$H'_{12} \approx H_{12} + \frac{H_{11}}{Z_K} = 105 \cdot 10^{-4};$$

$$\begin{aligned} H'_{21} &= \frac{Y'_{21}}{Y'_{11}} = \frac{\frac{H_{21}}{H_{11}} - \frac{1}{Z_K}}{\frac{1}{H_{11}} + \frac{1}{Z_K}} = \\ &= \frac{H_{21}Z_K - H_{11}}{Z_K + H_{11}} = \frac{H_{21} + \frac{H_{11}}{Z_K}}{1 + \frac{H_{11}}{Z_K}} \end{aligned}$$

Mit $H_{21} \gg 1$ und $\frac{H_{11}}{Z_K} \ll 1$ gilt

$$H'_{21} \approx H_{21} = 50;$$

$$H'_{22} = \frac{\Delta Y'}{Y'_{11}};$$

$$\Delta Y' = Y'_{11}Y'_{22} - Y'_{12}Y'_{21}$$

$$\Delta Y' = \frac{(1 + H_{11}Y_K)(\Delta H + H_{11}Y_K)}{H_{11}^2} - \frac{(-H_{12} - H_{11}Y_K)(H_{21} - H_{11}Y_K)}{H_{11}^2}$$

$$\Delta Y' = \frac{H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} + H_{11}Y_K + \frac{H_{11}^2}{H_{11}}H_{22}Y_K - H_{12}H_{21}Y_K + \frac{H_{11}^2}{H_{11}}Y_K^2}{H_{11}^2} +$$

$$+ \frac{H_{12}H_{21} - H_{11}H_{12}Y_K + H_{11}H_{21}Y_K - \frac{H_{11}^2}{H_{11}}Y_K^2}{H_{11}^2}$$

$$\Delta Y' = \frac{H_{22} + H_{11}H_{22}Y_K + Y_K - H_{12}H_{21}Y_K - H_{12}Y_K + H_{21}Y_K}{H_{11}},$$

$$H'_{22} = \frac{H_{11}}{1 + H_{11}Y_K} \cdot \frac{H_{22}(1 + H_{11}Y_K) + Y_K(1 - H_{12} + H_{21} - H_{12}H_{21})}{H_{11}}$$

$$H'_{22} = H_{22} + \frac{Y_K(1 + H_{21})(1 - H_{12})}{1 + H_{11}Y_K} = H_{22} + \frac{(1 + H_{21})(1 - H_{12})}{H_{11} + Z_K}$$

Mit $H_{12} \ll 1$ und $Z_K \gg 1$ gilt

$$H'_{22} \approx H_{22} + \frac{H_{21}}{Z_K} = 600 \mu\text{S}$$

$$3.46. \text{ a)} Z_e = \frac{U_1}{I_1} = Z_1 + \frac{Z_2(Z_3 + Z_a)}{Z_2 + Z_3 + Z_a};$$

$$Z_e = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_a(Z_1 + Z_2) + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_a};$$

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12}; \quad Z_2 = Z_{12} = Z_{21}; \quad Z_3 = Z_{22} - Z_{21};$$

$$Z_e = \frac{(Z_{11} - Z_{12})Z_{22} + Z_a Z_{11} + Z_{12}(Z_{22} - Z_{21})}{Z_{22} - Z_a}$$

$$Z_e = \frac{Z_{11}Z_a + \Delta Z}{Z_{22} + Z_a}$$

b) Bei der Ermittlung von Z_i muß der Quellwiderstand Z_q des an den Vierpoleingang angeschalteten Generators beachtet werden. Zu diesem Zweck wird, wie aus der Zweipoltheorie bekannt ist, die Spannungsquelle als Kurzschluß gewertet; Z_q liegt dann parallel zu den Vierpoleingangsklemmen.

$$Z_i = Z_3 + \frac{Z_2(Z_1 + Z_q)}{Z_2 + Z_1 + Z_q}$$

Durch Umformung ähnlich wie bei a) erhält man:

$$Z_i = \frac{Z_{22}Z_q + \Delta Z}{Z_{11} + Z_q}$$

3.47. In den Gleichungen für Z_e bzw. Z_i sind jeweils Z_a bzw. Z_q gleich Unendlich und gleich Null zu setzen.

Z -Parameter

$$Z_a = \infty: Z_{eL} = \frac{Z_{11}Z_a + \Delta Z}{Z_{22} + Z_a} =$$

$$= \frac{Z_a \left(Z_{11} + \frac{\Delta Z}{Z_a} \right)}{Z_a \left(1 + \frac{Z_{22}}{Z_a} \right)} = Z_{11};$$

$$Z_a = 0: Z_{eK} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}};$$

$$Z_{L1} = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = \sqrt{\frac{Z_{11} \Delta Z}{Z_{22}}};$$

$$Z_q = \infty: Z_{iL} = \frac{Z_{22}Z_q + \Delta Z}{Z_{11} + Z_q} =$$

$$= \frac{Z_q \left(Z_{22} + \frac{\Delta Z}{Z_q} \right)}{Z_q \left(1 + \frac{Z_{11}}{Z_q} \right)} = Z_{22};$$

$$Z_q = 0: Z_{iK} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}};$$

$$Z_{L2} = \sqrt{Z_{iL} Z_{iK}} = \sqrt{\frac{Z_{22} \Delta Z}{Z_{11}}}$$

Die Herleitung für die anderen Vierpolparameter erfolgt analog.

Tafel 3.6. Abhängigkeit der Leerlauf- und Kurzschluß-Eingangs- und -Ausgangswiderstände sowie der Wellenwiderstände von den Vierpolparametern

| | Z_{eL} | Z_{eK} | Z_{iL} | Z_{iK} | Z_{L1} | Z_{L2} |
|-----|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|--|--|
| Z | Z_{11} | $\frac{\Delta Z}{Z_{22}}$ | Z_{22} | $\frac{\Delta Z}{Z_{11}}$ | $\sqrt{\frac{Z_{11} \Delta Z}{Z_{22}}}$ | $\sqrt{\frac{Z_{22} \Delta Z}{Z_{11}}}$ |
| Y | $\frac{Y_{22}}{\Delta Y}$ | $\frac{1}{Y_{11}}$ | $\frac{Y_{11}}{\Delta Y}$ | $\frac{1}{Y_{22}}$ | $\sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \Delta Y}}$ | $\sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \Delta Y}}$ |
| H | $\frac{\Delta H}{H_{22}}$ | H_{11} | $\frac{1}{H_{22}}$ | $\frac{H_{11}}{\Delta H}$ | $\sqrt{\frac{H_{11} \Delta H}{H_{22}}}$ | $\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}}$ |
| A | $\frac{A_{11}}{A_{21}}$ | $\frac{A_{12}}{A_{22}}$ | $\frac{A_{22}}{A_{21}}$ | $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ | $\sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{21} A_{22}}}$ | $\sqrt{\frac{A_{12} A_{22}}{A_{11} A_{21}}}$ |

$$3.48. \underline{U}_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \quad (\text{I})$$

$$\underline{U}_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \quad (\text{II})$$

Für I_2 wird in beiden Gleichungen die für den Vierpolausgang geltende Beziehung $I_2 = -\frac{\underline{U}_2}{Z_a}$ eingesetzt. Das Minuszeichen resultiert aus den willkürlich festgelegten Zählpfeilrichtungen von I_2 und \underline{U}_2 (Bild L 64), die zueinander entgegengesetzt gerichtet sind. Anschließend setzt man die nach \underline{U}_2 aufgelöste Gl. (II) in Gl. (I) ein und stellt diese nach $Z_e = \frac{\underline{U}_1}{I_1}$ um.

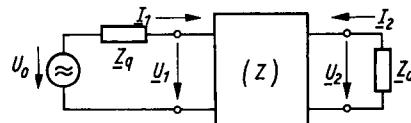


Bild L 64. Aufgabe 3.48

$$\underline{U}_1 = Z_{11} I_1 - \frac{Z_{12}}{Z_a} \underline{U}_2; \quad (\text{I})$$

$$\underline{U}_2 = Z_{21} I_1 - \frac{Z_{22}}{Z_a} \underline{U}_2; \quad (\text{II})$$

$$\underline{U}_2 \left(1 + \frac{Z_{22}}{Z_a} \right) = Z_{21} I_1; \quad \underline{U}_2 = \frac{Z_a Z_{21} I_1}{Z_a + Z_{22}};$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= Z_{11} I_1 - \frac{Z_{12}}{Z_a} \frac{Z_a Z_{21} I_1}{Z_a + Z_{22}} = \\ &= I_1 \frac{Z_{11} Z_a + Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{Z_a + Z_{22}} \end{aligned}$$

$$Z_e = \frac{\underline{U}_1}{I_1} = \frac{Z_{11} Z_a + \Delta Z}{Z_a + Z_{22}}$$

Bei der Ermittlung des Ausgangswiderstandes Z_i muß der Innenwiderstand Z_q des an den Vierpoleingang angeschlossenen Generators (Bild L 64) mit berücksichtigt werden. Betrachtet man die Spannungsquelle als kurzgeschlossen, dann liegt Z_q parallel zu den Vierpoleingangsklemmen, so daß man setzen kann:

$$Z_q = -\frac{U_1}{I_1}; \text{ mit Gl. (I) erhält man}$$

$$-I_1 Z_q = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12}; -I_1 (Z_{11} + Z_q) = I_2 Z_{12};$$

$$-I_1 = \frac{I_2 Z_{12}}{Z_{11} + Z_q};$$

in Gl. (II) eingesetzt

$$U_2 = \frac{I_2 Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_q} + I_2 Z_{22} = \\ = I_2 \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21} + Z_{22} Z_q}{Z_{11} + Z_q};$$

$$Z_1 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{Z_{22} Z_q + \Delta Z}{Z_{11} + Z_q}$$

3.49. a) Da die Parallelschaltungen überwiegen, rechnet man zweckmäßig mit Leitwerten.

$$Y_e = Y_1 + \frac{Y_2(Y_3 + Y_a)}{Y_2 + Y_3 + Y_a} = \\ = \frac{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_1 Y_a + Y_2 Y_3 + Y_2 Y_a}{Y_2 + Y_3 + Y_a} \\ Y_e = \frac{Y_a(Y_1 + Y_2) + Y_1(Y_2 + Y_3) + Y_2 Y_3}{Y_2 + Y_3 + Y_a}$$

Mit der Y -Matrix des Π -Vierpoles gilt:

$$Y_e = \frac{Y_a Y_{11} + Y_{22}(Y_{11} + Y_{12}) - Y_{12}(Y_{22} + Y_{21})}{Y_{22} + Y_a}$$

$$Y_e = \frac{Y_a Y_{11} + \Delta Y}{Y_{22} + Y_a}; Z_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{Y_{22} + Y_a}{Y_{11} Y_a + \Delta Y};$$

$$Y_1 = Y_3 + \frac{Y_2(Y_1 + Y_q)}{Y_2 + Y_1 + Y_q};$$

Nach analogen Umformungen wie oben ergibt sich

$$Z_1 = \frac{Y_{11} + Y_q}{Y_{22} Y_q + \Delta Y}$$

$$\text{b)} Y_{22} = 30 \text{ mS} = Y_{11}; Y_a = 5 \text{ mS}; Y_q = 200 \text{ mS};$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -10 \text{ mS}; \Delta Y = 800 \cdot 10^{-6} \text{ S}^2;$$

$$Z_e = 36,8 \Omega; Z_1 = 33,8 \Omega$$

$$\text{3.50. a)} Z_{eL} = Z_1 + Z_2 = 600 \Omega;$$

$$Z_{eK} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 400 \Omega;$$

$$Z_{iL} = Z_2 + Z_3 = 800 \Omega;$$

$$Z_{iK} = Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = 533 \Omega;$$

$$Z_{eL} = Z_{11} = Z_1 + Z_2 = 600 \Omega;$$

$$Z_{eK} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} = 400 \Omega; \Delta Z = 32 \cdot 10^4 \Omega^2;$$

$$Z_{iL} = Z_{22} = Z_2 + Z_3 = 800 \Omega;$$

$$Z_{iK} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}} = 533 \Omega;$$

$$Z_{L1} = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = 490 \Omega;$$

$$Z_{L2} = \sqrt{Z_{iL} Z_{iK}} = 652 \Omega;$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{L1} Z_{L2}} = 565 \Omega$$

$$\text{b)} Z_{eL} = 90 \Omega; Z_{eK} = 76,6 \Omega; Z_{iL} = 120 \Omega;$$

$$Z_{iK} = 102,2 \Omega; Z_{L1} = 83 \Omega; Z_{L2} = 111 \Omega;$$

$$Z_L = 96 \Omega$$

$$\text{c)} Z_{eL} = 9 \Omega; Z_{eK} = 8,25 \Omega; Z_{iL} = 12 \Omega;$$

$$Z_{iK} = 11 \Omega; Z_{L1} = 8,63 \Omega; Z_{L2} = 11,5 \Omega;$$

$$Z_L = 9,96 \Omega$$

$$\text{d)} Z_{eL} = 30 \Omega; Z_{eK} = 24,4 \Omega; Z_{iL} = 40 \Omega;$$

$$Z_{iK} = 32,5 \Omega; Z_{L1} = 27 \Omega; Z_{L2} = 36 \Omega;$$

$$Z_L = 31,2 \Omega$$

3.51. T-Halbglied

$$Z_{eL} = \underline{Z_1 + Z_2}; Z_{eK} = \underline{Z_1}; Z_{iL} = \underline{Z_2};$$

$$Z_{iK} = \frac{Z_1 Z_2}{\underline{Z_1 + Z_2}}$$

II-Halbglied

$$Z_{eL} = \underline{Z_3}; Z_{eK} = \frac{Z_3 Z_4}{\underline{Z_3 + Z_4}};$$

$$Z_{iL} = \underline{Z_3 + Z_4}; Z_{iK} = \underline{Z_4}$$

$$\text{3.52. a)} Z_{eL} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = 8,82 \Omega;$$

$$Z_{eK} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = 8,33 \Omega;$$

$$Z_{iL} = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3 + Z_1 + Z_2} = 17,7 \Omega;$$

$$Z_{iK} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} = 16,7 \Omega;$$

$$Z_{L1} = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = 8,58 \Omega;$$

$$Z_{L2} = \sqrt{Z_{iL} Z_{iK}} = \underline{17,2 \Omega};$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{L1} Z_{L2}} = \underline{12,1 \Omega}$$

b) Während bei a) die Lösung mit Hilfe der Einzelwiderstände des II-Gliedes ermittelt wurde, sollen jetzt die Y-Parameter benutzt werden.

Für die Schaltung nach Bild 3.53 gilt

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = 12,5 \text{ mS} = Y_{22} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3};$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_2} = -4,17 \text{ mS};$$

$$\Delta Y = 138,8 \cdot 10^{-6} \text{ S}^2;$$

$$Z_{eL} = \frac{Y_{22}}{\Delta Y} = \frac{Y_{11}}{\Delta Y} = Z_{iL} = \underline{90 \Omega};$$

$$Z_{eK} = \frac{1}{Y_{11}} = \frac{1}{Y_{22}} = Z_{iK} = \underline{80 \Omega};$$

$$Z_{L1} = \sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \Delta Y}} = Z_{L2} = \sqrt{\frac{1}{\Delta Y}} = Z_L = \underline{84,8 \Omega}$$

3.53. Nach Aufgabe 3.1 d) lautet die Z-Matrix der Brückenschaltung

$$Z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_1 + Z_2 \end{pmatrix};$$

$$Z_{eL} = Z_{11} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} = \underline{150 \Omega} = Z_{22} = Z_{iL};$$

$$Z_{eK} = \frac{\Delta Z}{Z_{22}} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}} = Z_{iK} = \underline{133 \Omega};$$

$$Z_{L1} = Z_{L2} = Z_L = \underline{141 \Omega}$$

3.54. Da es sich um einen widerstandssymmetrischen Vierpol handelt, gilt

$$Z_L = Z_{L1} = Z_{L2} = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = 600 \Omega$$

Aus den Schaltungen nach Bild L 65 und Bild L 66 wird für Leerlauf und Kurzschluß abgelesen

$$Z_{eL} = Z_1 + Z_2; \quad Z_{eK} = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

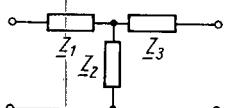


Bild L 65. Aufgabe 3.54

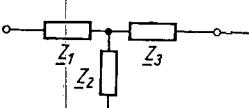


Bild L 66.
Aufgabe 3.54

Infolge der Gleichheit der Widerstände erhält man

$$Z_L = \sqrt{2Z \left(Z + \frac{Z^2}{2Z} \right)} = \sqrt{2Z \cdot 1,5Z} =$$

$$= \sqrt{3Z^2} = 1,73Z;$$

$$Z = \frac{Z_L}{\sqrt{3}} = \underline{346 \Omega}$$

$$\mathbf{3.55.} \quad Z_L = \sqrt{\frac{Z_{11} \Delta Z}{Z_{22}}};$$

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 692 \Omega & 346 \Omega \\ 346 \Omega & 692 \Omega \end{pmatrix};$$

$$\Delta Z = 36 \cdot 10^4 \Omega^2; \quad Z_L = \sqrt{\Delta Z} = \underline{600 \Omega}$$

$$\mathbf{3.56.} \quad Z_{eL} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} = \frac{2}{3} Z;$$

$$Z_{eK} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z}{2};$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{eL} Z_{eK}} = \sqrt{\frac{2}{3} Z \cdot \frac{Z}{2}} = \frac{Z}{\sqrt{3}};$$

$$Z = Z_L \sqrt{3} = \underline{1040 \Omega}$$

$$\mathbf{3.57.} \quad Z_{L1} = \sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \Delta Y}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta Y}} = \\ = \sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \Delta Y}} = Z_{L2};$$

$$Z_L = \sqrt{Z_{L1} Z_{L2}} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\Delta Y}} \frac{1}{\sqrt{\Delta Y}}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta Y}}$$

3.58. Behauptung:

$$Z_e = \frac{Z_{11} Z_a + \Delta Z}{Z_{22} + Z_a} = Z_{L1} = \sqrt{\frac{Z_{11} \Delta Z}{Z_{22}}}$$

$$\text{für } Z_a = Z_{L2} = \sqrt{\frac{Z_{22} \Delta Z}{Z_{11}}};$$

Beweis:

Aus der Gleichung für Z_e wird im Zähler $\sqrt{Z_{11} \Delta Z}$ und im Nenner $\sqrt{Z_{22}}$ ausgeklammert. Der dann innerhalb der Klammer verbleibende Teil der Gleichung muß mit $Z_a = Z_{L2}$ den Wert 1 ergeben.

$$Z_e = \frac{\sqrt{Z_{11}} \sqrt{Z_{11} Z_a + \sqrt{\Delta Z}} \sqrt{\Delta Z}}{\sqrt{Z_{22}} \sqrt{Z_{22} + Z_a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{Z_{11} \Delta Z}}{\sqrt{Z_{22}}} \left(\frac{\frac{\sqrt{Z_{11}} Z_a}{\sqrt{\Delta Z}} + \frac{\sqrt{\Delta Z}}{\sqrt{Z_{11}}}}{\sqrt{Z_{22}} + \sqrt{\frac{Z_a}{Z_{22}}}} \right);$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{L1} \left(\frac{\sqrt{\underline{Z}_{11}} \sqrt{\underline{Z}_{22} \Delta Z}}{\underline{\Delta Z}} + \frac{\sqrt{\Delta Z}}{\sqrt{\underline{Z}_{11}}} \right) =$$

$$= \underline{Z}_{L1} \left(\frac{\sqrt{\underline{Z}_{22}} + \sqrt{\frac{\Delta Z}{\underline{Z}_{11}}}}{\sqrt{\underline{Z}_{22}} + \sqrt{\frac{\Delta Z}{\underline{Z}_{11}}}} \right)$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{L1}$$

3.59. Zuerst werden die für die Berechnung der Eingangs- und Ausgangswiderstände erforderlichen Vierpolparameter sowie der für den geforderten Vergleich benötigte Ausgangswellenwiderstand ermittelt.

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 384 \Omega; \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 334 \Omega;$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 477 \Omega; \Delta Z = 7,16 \cdot 10^4 \Omega^2;$$

$$\underline{Z}_{L2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{22} \Delta Z}{\underline{Z}_{11}}} = 298 \Omega$$

a) Mit $\underline{Z}_q = 600 \Omega$ kann der Ausgangswiderstand des T-Gliedes bestimmt werden.

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_{22} \underline{Z}_q + \Delta Z}{|\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_q|} = 364 \Omega;$$

mit $\underline{Z}_a = \underline{Z}_{L2}$ ergibt sich

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_a + \Delta Z}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_a} = \underline{240 \Omega} = \underline{Z}_{L1}$$

Durch die Anpassung am Vierpolausgang nimmt der Eingangswiderstand, wie in Aufgabe 3.58 allgemein nachgewiesen, den Wert des Eingangswellenwiderstandes an.

Beachte $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_i$, aber $\underline{Z}_a = \underline{Z}_{L2}$

b) Für $\underline{Z}_a = 600 \Omega$ erhält man

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_a + \Delta Z}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_a} = \underline{280 \Omega};$$

mit $\underline{Z}_q = \underline{Z}_{L1}$ ergibt sich

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_{22} \underline{Z}_a + \Delta Z}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_q} = \underline{298 \Omega} = \underline{Z}_{L2}$$

Durch die Anpassung am Vierpoleingang $\underline{Z}_q = \underline{Z}_{L1}$ ($\underline{Z}_q \neq \underline{Z}_e$) nimmt der Ausgangswiderstand des Vierpols den Wert des Ausgangswellenwiderstandes an.

c) Mit den Ergebnissen von a) und b) ergibt sich für den Fall der beiderseitigen Anpassung

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{L1} = \underline{Z}_q = \underline{240 \Omega}; \underline{Z}_i = \underline{Z}_{L2} = \underline{Z}_a = \underline{298 \Omega}$$

3.60. a) Zur Realisierung der Anpassung muß der zwischen Vierpol (VP) 1 und Vierpol 2 geschaltete Vierpol 3 einen Eingangswellenwiderstand von

$\underline{Z}_{L1} = 60 \Omega$ und einen Ausgangswellenwiderstand von $\underline{Z}_{L2} = 240 \Omega$ besitzen.

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\underline{Z}_{L1} \underline{Z}_{L2}} = \underline{120 \Omega}$$

Der 3. Vierpol wirkt als Anpassungsglied wie ein Widerstandstransformator.

b) Bild L 67

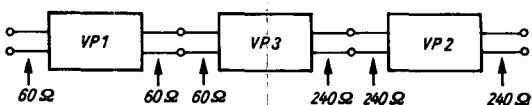


Bild L 67. Aufgabe 3.60 b)

$$3.61. I_2 = Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2;$$

$$- U_2 Y_a - U_2 Y_{22} = U_1 Y_{21};$$

$$G_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_a};$$

$$I_2 = Y_{21} I_1 \underline{Z}_e - Y_{22} \frac{I_2}{Y_a};$$

$$I_2 \left(1 + \frac{Y_{22}}{Y_a} \right) = I_1 Y_{21} \frac{Y_{22} + Y_a}{Y_{11} Y_a + \Delta Y};$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21} (Y_{22} + Y_a)}{(Y_{11} Y_a + \Delta Y) \left(\frac{Y_a + Y_{22}}{Y_a} \right)};$$

$$G_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21} Y_a}{Y_{11} Y_a + \Delta Y}$$

3.62. Vierpolgleichung mit Hybridparametern:

$$I_2 = H_{21} I_1 + H_{22} U_2; \text{ mit } U_2 = -I_2 \underline{Z}_a \text{ erhält man}$$

$$I_2 = H_{21} I_1 - H_{22} \underline{Z}_a I_2; I_2 (1 + H_{22} \underline{Z}_a) = H_{21} I_1;$$

$$G_i = \frac{I_2}{I_1} = \frac{H_{21}}{1 + H_{22} \underline{Z}_a}$$

Vierpolgleichung mit Kettenparametern:

$$U_1 = A_{11} U_2 - A_{12} I_2; U_1 = A_{11} U_2 + A_{12} \frac{U_2}{\underline{Z}_a};$$

$$G_u = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11} + \frac{A_{12}}{\underline{Z}_a}} = \frac{\underline{Z}_a}{A_{11} \underline{Z}_a + A_{12}}$$

3.63. Die Vierpol-Z-Parameter des T-Gliedes mit den in Bild 3.54 angegebenen Werten lauten

$$\underline{Z}_{11} = 6 \text{ k}\Omega, \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = 4 \text{ k}\Omega, \underline{Z}_{22} = 6 \text{ k}\Omega,$$

$$\Delta Z = 20 \cdot 10^6 \Omega^2$$

$$\text{a)} G_u = \frac{\underline{Z}_{21} \underline{Z}_a}{\underline{Z}_{11} \underline{Z}_a + \Delta Z} = \underline{0,25},$$

$$G_{uL} = \frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_a}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_a + \Delta Z} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \frac{\Delta Z}{\underline{Z}_a}} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = 0,667;$$

$$\underline{G}_i = \frac{-\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_a} = -0,5$$

b) Da bei $\underline{Z}_a = \infty$ durch \underline{Z}_3 kein Strom fließt (Bild L 68), erhält man mit der Spannungsteilerregel

$$G_{uL} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = 0,667;$$

mit \underline{Z}_a gilt (Bild L 69)

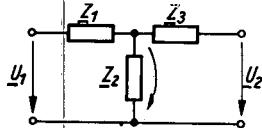


Bild L 68.
Aufgabe 3.63

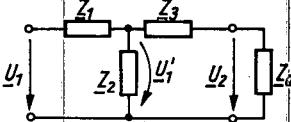


Bild L 69.
Aufgabe 3.63

$$\begin{aligned} G_u &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}'_1} \frac{\underline{U}'_1}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \\ &= \frac{\underline{Z}_a(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_a)}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \frac{\underline{Z}_2(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_a)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_a} = 0,25 \end{aligned}$$

Die Ermittlung von \underline{G}_i erfordert die Anwendung der Stromteilerregel (Bild L 70):

$$\begin{aligned} \underline{G}_i &= \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_a}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_a} = \\ &= -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_a} = -0,5 \end{aligned}$$

Bild L 70.
Aufgabe 3.63

3.64. Zuerst werden die Kettenparameter des überbrückten T-Gliedes ermittelt.

$$A_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4) + \underline{Z}_1\underline{Z}_3} = 1,143;$$

$$A_{12} = \frac{\underline{Z}_4(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} +$$

$$+ \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3\underline{Z}_4^2}{\Sigma \underline{Z}(\underline{Z}_2 \Sigma \underline{Z} + \underline{Z}_1\underline{Z}_3)} \approx 1428 \Omega$$

mit $\Sigma \underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4$;

$$A_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}} = 0,214 \text{ mS};$$

$$A_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_4}{\underline{Z}_2 \Sigma \underline{Z} + \underline{Z}_1\underline{Z}_3} = 1,143;$$

$$G_u = \frac{\underline{Z}_a}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_a + \underline{A}_{12}} = 0,54;$$

$$\underline{G}_i = \frac{-1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_a + \underline{A}_{22}} = -0,635$$

$$3.65. a = \ln \frac{1}{|G_u|}; a = \ln \frac{1}{0,001} = \ln 1000;$$

$$e^a = 1000;$$

$$a = 6,9 \text{ Np}; 1 \text{ Np} = 8,68 \text{ dB}; 6,9 \text{ Np} = 60 \text{ dB}$$

| $ G_u $ | a/Np | a/dB |
|---------|---------------|---------------|
| 0,001 | 6,9 | 60 |
| 0,01 | 4,6 | 40 |
| 0,1 | 2,3 | 20 |
| 1 | 0 | 0 |
| 10 | -2,3 | -20 |
| 100 | -4,6 | -40 |
| 1000 | -6,9 | -60 |

Während bei den positiven Werten von a eine Dämpfung auftritt, d.h. $|\underline{U}_2| < |\underline{U}_1|$, entsprechen die negativen Werte von a einer Verstärkung, $|\underline{U}_2| > |\underline{U}_1|$.

$$3.66. \text{ a) } a = \ln \frac{1}{|G_i|}; a = 0,5 \text{ Np};$$

$$e^{0,5} = 1,65 = \frac{1}{|G_i|}; |G_i| = 0,606;$$

| a/Np | $ G_i $ | a/Np | $ G_i $ |
|---------------|---------|---------------|---------|
| 0,5 | 0,606 | +2 | 0,135 |
| 0,69 | 0,5 | 5 | 0,0066 |
| -2 | 7,4 | -9,2 | 10000 |

$$\text{b) } a/\text{dB} = 20 \lg \frac{1}{|G_i|}$$

| a/dB | $ G_i $ | a/dB | $ G_i $ |
|---------------|---------|---------------|---------|
| 1 | 0,89 | 26 | 0,05 |
| 3 | 0,707 | -26 | 20 |
| 6 | 0,5 | -46 | 200 |
| 10 | 0,316 | -52 | 400 |

3.67. a) Die Änderung von $|G|$ um den Faktor 10 kann aus Aufgabe 3.65 abgelesen werden; a ändert sich dabei um 2,3 Np bzw. 20 dB.

b) Bei einer Änderung von $|G|$ um den Faktor 2 ändert sich α um 0,7 Np bzw. 6 dB.

$$8.68. \text{ a)} Z = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}$$

b) Der Übertragungsfaktor der Spannung wird so umgeformt, daß für $Z_a = \infty$ (Leerlauf) eine auswertbare Gleichung entsteht.

$$\underline{G}_u = \frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_a}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_a + \Delta Z} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11} + \frac{\Delta Z}{\underline{Z}_a}};$$

$$\underline{G}_{uL} = \frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{11}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$|G_{uL}| = |G_{uL}| e^{j\varphi_L} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega g CR)^2}} e^{-j \arctan \omega g CR}$$

Hinweis: Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn das RC-Glied als unbelasteter Spannungssteiler betrachtet und G_{uL} als Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$ ermittelt wird.

$$\text{c)} |G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega g CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\omega g CR)^2 = 1; \quad \omega_g = \frac{1}{CR}$$

$$\text{d)} |G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}; \quad -\varphi_L = \arctan \frac{\omega}{\omega_g}$$

(Bild L 71).

Aus dem Diagramm nach Bild L 71 geht hervor, daß die RC-Schaltung Tiefpaßverhalten besitzt, d.h., der Übertragungsfaktor verringert sich mit zunehmender Frequenz. Die Phasendrehung φ_L zwischen U_2 und U_1 strebt mit zunehmender Frequenz dem Wert $\varphi_L = -90^\circ$ zu.

$$\text{e)} \omega_g = \frac{1}{CR} = 10^4 \frac{1}{s}; \quad f_g = \frac{10^4}{2\pi} = 1,59 \text{ kHz};$$

$$\frac{f_1}{f_g} = \frac{800 \text{ Hz}}{1590 \text{ Hz}} \approx 0,5; \quad \text{aus Bild L 71 wird abgelesen:}$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 0,5; \quad |G_{uL}| = 0,9; \quad \varphi_L = -25^\circ; \quad f_2 = 8 \text{ kHz};$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} \approx 5; \quad |G_{uL}| = 0,2; \quad \varphi_L = -78^\circ$$

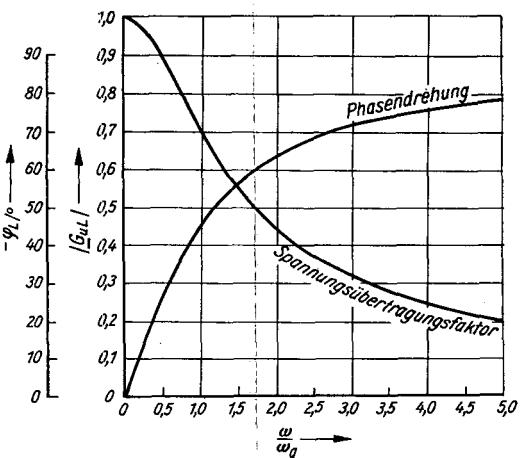


Bild L 71. Betrag und Phasenwinkel des Spannungsübertragungsfaktors eines RC-Tiefpaßgliedes als Funktion der Frequenz

f) Durch Umformen der Gleichung für G_u läßt sich zeigen, daß das in Bild L 71 dargestellte Diagramm $|G_{uL}| = f\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$ auch für $|G_u|$ verwendet werden kann.

$$\begin{aligned} G_u &= \frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_a}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_a + \Delta Z} = \\ &= \frac{\frac{1}{j\omega C}\underline{Z}_a}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{Z}_a + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\frac{1}{j\omega C} - \left(\frac{1}{j\omega C}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_u &= \frac{\underline{Z}_a}{j\omega CR \underline{Z}_a + \underline{Z}_a + R} = \\ &= \frac{\underline{Z}_a}{R + \underline{Z}_a} \frac{1}{1 + j\omega C \frac{R\underline{Z}_a}{R + \underline{Z}_a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_u &= K \frac{1}{1 + j\omega C \underline{Z}_{ers}}; \quad K = \frac{\underline{Z}_a}{R + \underline{Z}_a}; \\ \underline{Z}_{ers} &= \frac{R\underline{Z}_a}{R + \underline{Z}_a} \end{aligned}$$

Wenn \underline{Z}_a einen reellen endlichen Widerstand darstellt, ergibt sich für K ein konstanter Zahlenwert <1. Betrachtet man an Stelle von G_u das Verhältnis

$$\begin{aligned} G_{u_{ers}} &= \frac{G_u}{K} = \frac{1}{1 + j\omega C \underline{Z}_{ers}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C \underline{Z}_{ers})^2}} e^{-j \arctan \omega C \underline{Z}_{ers}} \end{aligned}$$

und definiert als Grenzfrequenz, bei der $|G_{u_{ers}}|$ auf

den $\sqrt{\frac{1}{2}}$ -fachen Wert gegenüber dem bei $\omega = 0$ abgesunken ist, $\omega_{gers} = \frac{1}{CZ_{ers}}$, dann erhält man die Gleichungen

$$|G_{uers}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{gers}}\right)^2}}; \quad \varphi = -\arctan \frac{\omega}{\omega_{gers}},$$

für die die in Bild L 71 dargestellten Diagramme mit den geänderten Achsenbezeichnungen $|G_{uL}| \rightarrow |G_{uers}|$ und $\varphi_L \rightarrow \varphi$ volle Gültigkeit besitzen.

Durch den Einfluß von Z_a werden

$$|G_u| < |G_{uL}|; |\varphi| < |\varphi_L|; \omega_{gers} > \omega_g$$

$$g) Z_{ers} = \frac{RZ_a}{R + Z_a} = 50 \text{ k}\Omega;$$

$$\omega_{gers} = \frac{1}{CZ_{ers}} = 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}};$$

$$f_{gers} = 3,18 \text{ kHz};$$

$$f_1 = 800 \text{ Hz}: \frac{f_1}{f_{gers}} = \frac{\omega_1}{\omega_{gers}} \approx 0,25; \text{ aus Bild L 71 wird abgelesen } |G_{uers}| = 0,97; |G_u| = 0,97 \cdot K = 0,485 \text{ mit } K = \frac{100}{200} = 0,5; \varphi = -15^\circ;$$

$$f_2 = 8 \text{ kHz}: \frac{f_2}{f_{gers}} = \frac{\omega_2}{\omega_{gers}} \approx 2,5;$$

$$|G_{uers}| = 0,38; |G_u| = 0,19; \varphi = -68^\circ$$

$$3.69. a) a_L = \ln \frac{1}{|G_{uL}|} = \ln \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

Bild L 72 zeigt die grafische Darstellung $a_L = f\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$

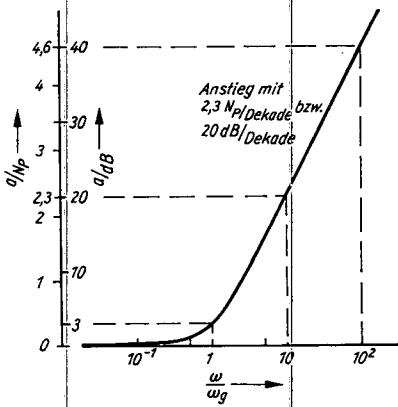


Bild L 72. Dämpfungsmaß eines RC-Tiefpaßgliedes

Hinweis: Bei logarithmisch geteilten Skalen lassen sich die Zwischenwerte näherungsweise wie folgt ermitteln:

Bezeichnet man die Länge der Strecke zwischen zwei Zehnerpotenzen wie z.B. 10^1 und 10^2 mit x , dann gilt

$$2 \approx 0,3x \quad 6 \approx 0,775x$$

$$3 \approx 0,475x \quad 7 \approx 0,842x$$

$$4 \approx 0,6x \quad 8 \approx 0,903x$$

$$5 \approx 0,7x \quad 9 \approx 0,952x$$

Von der Grenzfrequenz ω_g , die auch als 3-dB- oder Knickfrequenz bezeichnet wird, ausgehend in Richtung $\omega = 0$ nähert sich a_L asymptotisch dem Wert Null; für $\omega \gg \omega_g$ stellt das Leerlaufdämpfungsmaß des RC-Tiefpaßgliedes eine linear ansteigende Gerade mit dem Anstieg 2,3 Np/Dekade bzw. 20 dB/Dekade oder 0,69 Np/Oktave bzw. 6 dB/Oktave dar. Dekade: Frequenzverzehnfachung; Oktave: Frequenzverdopplung

b) $\omega_g = \frac{1}{CR} = 100 \frac{1}{\text{s}}$; aus dem Diagramm nach Bild L 72 wird abgelesen:

$$a_L = 3,69 \text{ Np}: \frac{\omega}{\omega_g} = 40; \quad \omega = 4000 \frac{1}{\text{s}}$$

$$a_L = 34 \text{ dB}: \frac{\omega}{\omega_g} = 50; \quad \omega = 5000 \frac{1}{\text{s}}$$

$$a_L = 60 \text{ dB}: \frac{\omega}{\omega_g} = 1000; \quad \omega = 100000 \frac{1}{\text{s}}$$

$$3.70. a) Z = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & R \\ R & R \end{pmatrix}$$

$$b) G_{uL} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}}$$

$$G_{uL} = |G_{uL}| e^{j\varphi_L} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}} e^{j \arctan \frac{1}{\omega CR}}$$

$$c) |G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{2}}; \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2 = 1; \quad \omega_g = \frac{1}{CR}$$

$$d) |G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g}\right)^2}}; \quad \varphi_L = \arctan \frac{1}{\omega_g}$$

(Bild L 73).

Wie aus dem Diagramm nach Bild L 73 hervorgeht besitzt das CR-Halbglied Hochpaßeigenschaften

Die Phasendrehung ändert sich zwischen $+90^\circ$ und Null.

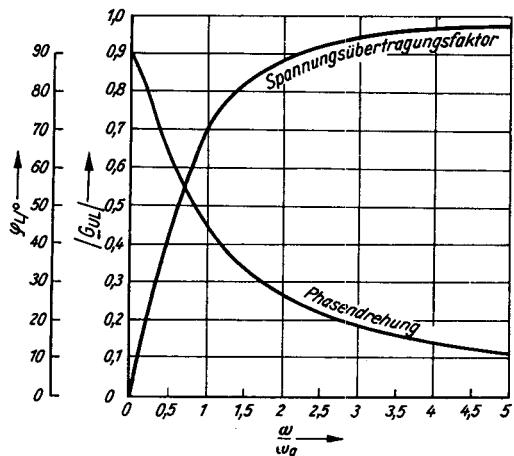


Bild L 73. Betrag und Phasenwinkel des Spannungsübertragungsfaktors eines RC -Hochpaßgliedes als Funktion der Frequenz

e) Für $R = 100 \text{ k}\Omega$ und $C = 1 \text{ nF}$ wird

$$\omega_g = \frac{1}{CR} = 10^4 \frac{1}{\text{s}}$$

$$f_1 = 800 \text{ Hz}: \frac{f_1}{f_g} = \frac{\omega_1}{\omega_g} \approx 0,5;$$

$$|G_{uL}| = 0,42; \varphi_L = 65^\circ;$$

$$f_2 = 8 \text{ kHz}: \frac{f_2}{f_g} = \frac{\omega_2}{\omega_g} \approx 5;$$

$$|G_{uL}| = 0,98; \varphi_L = 12^\circ$$

$$f) G_u = \frac{Z_{21}Z_a}{Z_{11}Z_a + \Delta Z} =$$

$$= \frac{RZ_a}{\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)Z_a + \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)R - R^2}$$

$$G_u = \frac{RZ_a}{RZ_a + \frac{Z_a}{j\omega C} + \frac{R}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C} \frac{RZ_a}{R + Z_a}}$$

$$\text{mit } \omega_{gers} = \frac{1}{CZ_{ers}}; Z_{ers} = \frac{RZ_a}{R + Z_a}$$

erhält man die Gleichungen

$$|G_u| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g}\right)^2}}; \varphi = \arctan \frac{\frac{1}{\omega}}{\omega_{gers}}$$

für die die Diagramme im Bild L 73 ebenfalls anwendbar sind, wenn die Achsenbezeichnungen von $|G_{uL}|$ in $|G_u|$, φ_L in φ und $\frac{\omega}{\omega_g}$ in $\frac{\omega}{\omega_{gers}}$ geändert werden.

Durch den Einfluß von Z_a (reeller Widerstand vorausgesetzt) werden $|G_u| < |G_{uL}|$; $|\varphi| > |\varphi_L|$; $\omega_{gers} > \omega_g$.

$$g) Z_{ers} = \frac{RZ_a}{R + Z_a} = 50 \text{ k}\Omega;$$

$$\omega_{gers} = \frac{1}{CZ_{ers}} = 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{s}}.$$

Aus dem Diagramm nach Bild L 73 wird abgelesen:

$$f_1 = 800 \text{ Hz}: \frac{f_1}{f_{gers}} = \frac{\omega_1}{\omega_{gers}} \approx 0,25;$$

$$|G_u| = 0,25; \varphi = 76^\circ;$$

$$f_2 = 8 \text{ kHz}: \frac{f_2}{f_{gers}} = \frac{\omega_2}{\omega_{gers}} \approx 2,5;$$

$$|G_u| = 0,98; \varphi = 22^\circ$$

$$8.71. \text{ a) } a_L = \ln \frac{1}{|G_{uL}|} = \ln \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_{gers}}}\right)^2}$$

Die Berechnung erfolgt in gleicher Weise wie in Aufgabe 3.69 (Bild L 74).

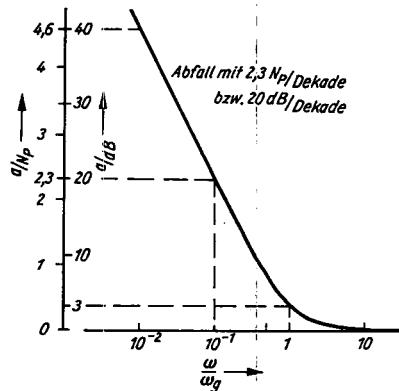


Bild L 74.
Dämpfungsmaß eines RC -Hochpaßgliedes

b) Aus Bild L 74 wird abgelesen:

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 0,04: a_L \approx 3,22 \text{ Np}; a_L \approx 28 \text{ dB}$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 0,2: a_L \approx 1,61 \text{ Np}; a_L \approx 14 \text{ dB}$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 2 : a_L \approx 0,173 \text{ Np}; a_L \approx 1,5 \text{ dB}$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} = 10 : a_L \approx 0$$

8.72. a) $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{pmatrix}$ mit

$$Y_1 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}};$$

$$Y_1 + Y_2 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2$$

b) $G_{uL} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}}{\frac{1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_2}$

$$G_{uL} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} + j\left(\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega C_1 R_2}\right)}$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right)^2 + \left(\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega C_1 R_2}\right)^2}}$$

c) Den größten Wert erreicht $|G_{uL}|$, wenn der Nenner der Gleichung ein Minimum wird; das ist der Fall, wenn der Imaginärteil des Nenners Null ist. Diese Bedingung tritt ein bei der Frequenz

$$\omega_0 C_2 R_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1 R_2} = 0; \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}$$

$$|G_{uLmax}| = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}$$

d) Für $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ vereinfachen sich G_{uL} und ω_0 .

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{3^2 + \left(\omega CR - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}; \omega_0 = \frac{1}{CR}$$

$|G_{uL}| = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ ist in Bild L 75 dargestellt.

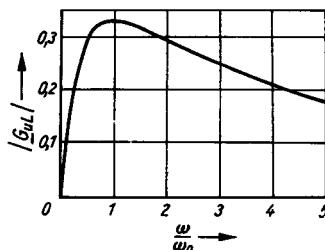


Bild L 75. Betrag des Leerlaufspannungsübertragungsfaktors eines WIEN-Gliedes als Funktion der Frequenz

e) $\varphi_L = -\arctan \frac{\omega C_2 R_1 - \frac{1}{\omega C_1 R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}$

Für $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ gilt

$$\varphi_L = -\arctan \frac{\omega CR - \frac{1}{\omega CR}}{3}$$

Bei ω_0 ist $\varphi_L = 0$

8.73. a) Der Spannungsübertragungsfaktor mit Kettenparametern $G_u = \frac{Z_a}{A_{11}Z_a + A_{12}}$ vereinfacht

sich bei Leerlauf, d.h. für $Z_a = \infty$, auf $G_{uL} = \frac{1}{A_{11}}$.

Bei einer Kettenschaltung ergibt sich die Gesamtmatrix aus dem Produkt der Einzelmatrizen

$$A_{11} = A'_{11}A''_{11} + A'_{12}A''_{21}$$

$$\text{T-Glied: } A'_{11} = 1 + \frac{Z_1}{Z_2} = 1 + \frac{1}{j\omega CR};$$

$$A'_{12} = Z_1 + Z_3 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = \frac{2}{j\omega C} + \frac{1}{(j\omega C)^2 R};$$

$$\text{II-Glied: } A''_{11} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3} = 1 + \frac{1}{j\omega CR};$$

$$A''_{21} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3} = \frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega CR^2};$$

Phasenkette:

$$A_{11} = \left(1 + \frac{1}{j\omega CR}\right)^2 + \left(\frac{2}{j\omega C} - \frac{1}{\omega^2 C^2 R^2}\right) \left(\frac{2}{R} + \frac{1}{j\omega CR^2}\right)$$

$$A_{11} = 1 - \frac{5}{\omega^2 C^2 R^2} + \frac{6}{j\omega CR} - \frac{1}{j\omega^3 C^3 R^3};$$

$$G_{uL} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 - \frac{5}{\omega^2 C^2 R^2} - j \frac{6\omega^2 C^2 R^2 - 1}{\omega^3 C^3 R^3}}$$

b) Die Phasendrehung zwischen \underline{U}_2 und \underline{U}_1 wird Null, d.h. G_{uL} reell bei

$$\frac{6\omega_0^2 C^2 R^2 - 1}{\omega_0^3 C^3 R^3} = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{6CR}}$$

c) Bei $\omega = \omega_0$ gilt

$$G_{uL} = \frac{1}{1 - \frac{5}{\omega_0^2 C^2 R^2}} = -\frac{1}{29}$$

3.74. a) T-Glied: $A'_{11} = 1 + j\omega CR$;

$$A'_{12} = 2R + j\omega CR^2;$$

II-Glied: $A''_{11} = 1 + j\omega CR$;

$$A''_{21} = 2j\omega C - \omega^2 C^2 R;$$

Phasenkette:

$$A_{11} = (1 + j\omega CR)^2 + (2R + j\omega CR^2) \times$$

$$\times (2j\omega C - \omega^2 C^2 R)$$

$$G_{uL} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 - 5\omega^2 C^2 R^2 + j(6\omega CR - \omega^3 C^3 R^3)};$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - 5\omega^2 C^2 R^2)^2 + (6\omega CR - \omega^3 C^3 R^3)^2}}$$

$$b) \varphi_L = -\arctan \frac{6\omega CR - \omega^3 C^3 R^3}{1 - 5\omega^2 C^2 R^2}$$

3.75. a) Man verwendet zweckmäßig die Widerstandsparameter.

Z-Matrix des Halbgliedes

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 & Z_2 \end{pmatrix}; \quad G_{uL} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}}$$

$$G_{uL} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{\omega L}};$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

$$b) G_{uL} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$$

$$c) G_{uL} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega C(R_1 + R_2)}};$$

$$|G_{uL}| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega C R_{\text{ers}}}\right)^2}};$$

$$R_{\text{ers}} = R_1 + R_2$$

$$d) G_{uL} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} =$$

$$= \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 (R_1 + R_2)};$$

$$|G_{uL}| = \frac{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_{\text{ers}})^2}}; \quad R_{\text{ers}} = R_1 + R_2$$

$$e) G_{uL} = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}} =$$

$$= \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{1 + j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega \left[\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (R_1 + R_2) \right]}$$

$$|G_{uL}| = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{\sqrt{1 + (\omega C_2 R_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_{\text{ers}} R_{\text{ers}})^2}};$$

$$C_{\text{ers}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad R_{\text{ers}} = R_1 + R_2$$

f) Da das Halbglied nach Bild 3.65 eine Parallelschaltung enthält, ist es günstig, die Leitwertparameter zu verwenden.

Y-Matrix des Halbgliedes

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & -Y_1 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 \end{pmatrix}; \quad G_{uL} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}}$$

$$G_{uL} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + j\omega C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$|G_{uL}| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega C R_{ers})^2}};$$

$$R_{ers} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{aligned} g) \quad G_{uL} &= \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1} = \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \end{aligned}$$

$$|G_{uL}| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_{ers})^2}};$$

$$R_{ers} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\begin{aligned} h) \quad G_{uL} &= \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1 + j\omega C_2} = \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega(C_1 + C_2) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}; \end{aligned}$$

$$|G_{uL}| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{\sqrt{1 + (\omega C_1 R_1)^2}}{\sqrt{1 + (\omega C_{ers} R_{ers})^2}};$$

$$C_{ers} = C_1 + C_2; \quad R_{ers} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

i) Verwendung der Z -Parameter

$$\begin{aligned} G_{uL} &= \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \\ &= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega CR}; \end{aligned}$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

$$j) \quad G_{uL} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)}$$

$$\frac{dG_p}{dZ_a} = \frac{(H_{11} + \Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + H_{22} \Delta H Z_a^2)}{(H_{11} + \Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + H_{22} \Delta H Z_a)^2} \frac{H_{21}^2 - H_{21}^2 Z_a (\Delta H + H_{11} H_{22} + 2 H_{22} \Delta H Z_a)}{(H_{11} + \Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + H_{22} \Delta H Z_a)^2}$$

$$H_{21}^2 (H_{11} + \Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + H_{22} \Delta H Z_a^2) - H_{21}^2 (\Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + 2 H_{22} \Delta H Z_a) = 0;$$

$$|G_{uL}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega CR}\right)^2}}$$

k) Verwendung der Y -Parameter

$$\begin{aligned} G_{uL} &= \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = \\ &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + j \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}; \\ |G_{uL}| &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left[R_{ers} \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]^2}}; \\ R_{ers} &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

$$3.76. \quad P_1 = \frac{U_0^2 Z_e}{(Z_e + Z_q)^2}$$

Differentiation mit Hilfe der Quotientenregel

$$\frac{dP_1}{dZ_e} = \frac{(Z_e + Z_q)^2 U_0^2 - 2 U_0^2 Z_e (Z_e + Z_q)}{(Z_e + Z_q)^4};$$

$$U_0^2 (Z_e^2 + 2 Z_e Z_q + Z_q^2 - 2 Z_e^2 - 2 Z_e Z_q) = 0;$$

$$Z_e = Z_q;$$

bei Widerstandsanpassung am Eingang gibt der Generator die maximale Leistung an den Vierpol ab.

$$3.77. \quad a) \quad G_p = \frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2^2 Z_a}{I_1^2 Z_e} = G_1^2 \frac{Z_a}{Z_e};$$

$$G_p = \frac{H_{21}^2 Y_a Z_a}{(H_{22} + Y_a)^2 \left(\frac{H_{11} Y_a + \Delta H}{H_{22} + Y_a} \right)};$$

$$G_p = \frac{H_{21}^2 Z_a}{(1 + H_{22} Z_a) (H_{11} + \Delta H Z_a)}$$

$$b) \quad G_p = \frac{Y_{21}^2 Z_a}{(1 + Y_{22} Z_a) (Y_{11} + \Delta Y Z_a)}$$

3.78.

$$G_p = \frac{H_{21}^2 Z_a}{H_{11} + \Delta H Z_a + H_{11} H_{22} Z_a + H_{22} \Delta H Z_a^2};$$

Differentiation mit Hilfe der Quotientenregel

$$H_{11} - H_{22} \Delta H Z_a^2 = 0;$$

$$Z_a = Z_{a\text{ opt}} = \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}} = Z_{L2}$$

Der Vierpol realisiert die maximale Leistungsübertragung vom Vierpoleingang zum Lastwiderstand, wenn Z_a gleich dem Ausgangswellenwiderstand Z_{L2} gewählt wird (alle Vierpol-Parameter und Z_a reell).

$$8.79. G_{p\text{ opt}} = \frac{H_{21}^2 Z_{a\text{ opt}}}{(1 + H_{22} Z_{a\text{ opt}})(H_{11} + \Delta H Z_{a\text{ opt}})};$$

$$G_{p\text{ opt}} = \frac{H_{21}^2 \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}}}{H_{11} + \Delta H \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}} + H_{11} H_{22} \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}} + H_{22} \Delta H \frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}},$$

$$G_{p\text{ opt}} = \frac{H_{21}^2}{(\sqrt{H_{11} H_{22}} + \sqrt{\Delta H})^2}$$

$$8.80. (I) U_{1e} = I_{1e} H_{11e} + U_{2e} H_{12e};$$

$$(II) I_{2e} = I_{1e} H_{21e} + U_{2e} H_{22e};$$

$$(I) U_{1c} - U_{2c} = I_{1c} H_{11e} - U_{2c} H_{12e}$$

$$U_{1c} = I_{1c} H_{11e} + U_{2c}(1 - H_{12e});$$

$$(II) -I_{2c} - I_{1c} = I_{1c} H_{21e} - U_{2c} H_{22e}$$

$$I_{2c} = I_{1c}(-1 - H_{21e}) + U_{2c} H_{22e};$$

$$H_{11c} = H_{11e}; H_{12c} = 1 - H_{12e};$$

$$H_{21c} = -(1 + H_{21e}); H_{22c} = H_{22e}$$

8.81. a) Transistorvierpol in Emitterschaltung und Umpoler 1 (Bild 3.79) sind reihen-parallelgeschaltet. Der zweite Umpoler bildet mit der Reihen-Parallelenschaltung eine Kettenbeschaltung.

$$b) H_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = 0 \quad (\text{Bild L 76});$$



Bild L 76. Aufgabe 3.81

$$H_{12} = \frac{U_1}{U_2} \Big|_{I_1=0} = -1 \quad (\text{Bild L 77});$$



Bild L 77. Aufgabe 3.81

$$H_{21} = \frac{I_2}{I_1} \Big|_{U_2=0} = 1 \quad (\text{Bild L 78});$$

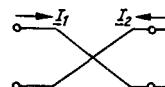


Bild L 78. Aufgabe 3.81

$$H_{22} = \frac{I_2}{U_2} \Big|_{I_1=0} = 0; H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Reihen-Parallelschaltung mit Umpoler 1:

$$H' = H_e + H_{U1}$$

$$\begin{aligned} H' &= \begin{pmatrix} H_{11e} & H_{12e} \\ H_{21e} & H_{22e} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H_{11e} & H_{12e} - 1 \\ H_{21e} + 1 & H_{22e} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berücksichtigung des 2. Umpolers:

Da eine Kettenbeschaltung vorliegt, müßten zuerst die Parameter der H' -Matrix und die H -Parameter der Umpoler-Matrix in Kettenparameter umgerechnet und dann beide Matrizen multipliziert werden. Diese Rechengänge können entfallen, wenn man berücksichtigt, daß durch den zweiten Umpoler lediglich die Vorzeichen von U_2 und I_2 der Reihen-Parallelschaltung umgekehrt werden. Da U_2 und I_2 in H'_{12} und H'_{21} nur einfach, in H'_{22} jedoch gleichzeitig auftreten, ändern sich nur die Vorzeichen von H'_{12} und H'_{21} .

$$\begin{aligned} H_{\text{ges}} &= H_c = \begin{pmatrix} H_{11c} & H_{12c} \\ H_{21c} & H_{22c} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} H_{11e} & 1 - H_{12e} \\ -(1 + H_{21e}) & H_{22e} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$8.82. (I) I_{1e} = U_{1e} Y_{11e} + U_{2e} Y_{12e}$$

$$I_{1c} = (U_{1c} - U_{2c}) Y_{11e} + U_{2c} Y_{12e}$$

$$I_{1c} = U_{1c} Y_{11e} + U_{2c}(-Y_{11e} - Y_{12e});$$

$$(II) I_{2e} = U_{1e} Y_{21e} + U_{2e} Y_{22e}$$

$$-I_{2c} - I_{1c} = (U_{1c} - U_{2c}) Y_{21e} - U_{2c} Y_{22e}$$

$$-I_{2c} - U_{1c} Y_{11e} - U_{2c}(-Y_{11e} - Y_{12e}) =$$

$$= U_{1c} Y_{21e} - U_{2c}(Y_{21e} + Y_{22e})$$

$$-I_{2c} = U_{1c}(Y_{11e} + Y_{21e}) -$$

$$-U_{2c}(Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e})$$

$$I_{2c} = U_{1c}(-Y_{11e} - Y_{21e}) +$$

$$+ U_{2c}(Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e});$$

$$Y_c = \begin{pmatrix} Y_{11c} & Y_{12c} \\ Y_{21c} & Y_{22c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11e} & -(Y_{11e} + Y_{12e}) \\ -(Y_{11e} + Y_{21e}) & Y_{11e} + Y_{12e} + Y_{21e} + Y_{22e} \end{pmatrix}$$

3.83. a) Emitterschaltung:

$$Z_e = \frac{H_{11e}Y_a + \Delta H_e}{H_{22e} + Y_a} = 1,98 \text{ k}\Omega;$$

$$Y_a = \frac{1}{Z_a} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ S};$$

$$\Delta H_e = H_{11e}H_{22e} - H_{12e}H_{21e} = 9 \cdot 10^{-2};$$

$$Z_i = \frac{H_{11e} + Z_q}{H_{22e}Z_q + \Delta H_e} = 21 \text{ k}\Omega;$$

$$G_u = \frac{-H_{21e}}{H_{11e}Y_a + \Delta H_e} = -23;$$

$$G_i = \frac{H_{21e}Y_a}{H_{22e} + Y_a} = 22,7$$

b) Basisschaltung:

Die Vierpolparameter der Basisschaltung werden mit den in Tafel 3.4 angegebenen Umrechnungsbeziehungen ermittelt.

$$H_{11b} = \frac{H_{11e}}{1 + H_{21e}} = 77 \text{ }\Omega;$$

$$H_{12b} = \frac{\Delta H_e - H_{12e}}{1 + H_{21e}} = 3,45 \cdot 10^{-3};$$

$$\Delta H_b = \frac{\Delta H_e}{1 + H_{21e}} = 34,7 \cdot 10^{-4};$$

$$H_{21b} = \frac{-(1 + H_{21e})}{1 + H_{21e}} = -1;$$

$$H_{22b} = \frac{H_{22e}}{1 + H_{21e}} = 1,92 \mu\text{S};$$

$$Z_e = \frac{H_{11b}Y_a + \Delta H_b}{H_{22b} + Y_a} = 83,8 \text{ }\Omega;$$

$$Z_i = \frac{H_{11b} + Z_q}{H_{22b}Z_q + \Delta H_b} = 284 \text{ k}\Omega;$$

$$G_u = \frac{-H_{21b}}{H_{11b}Y_a + \Delta H_b} = 23,9;$$

$$G_i = \frac{H_{21b}Y_a}{H_{22b} + Y_a} \approx 1$$

c) Kollektorschaltung:

Die Vierpolparameter der Kollektorschaltung werden ebenfalls mit den in Tafel 3.4 angegebenen Umrechnungsbeziehungen ermittelt.

$$H_{11c} = H_{11e} = 2 \text{ k}\Omega; H_{12c} = 1;$$

$$H_{21c} = -1 - H_{21e} = -26; H_{22c} = H_{22e} = 50 \mu\text{S};$$

$$\Delta H_c = 1 + H_{21e} = 26;$$

$$Z_e = \frac{H_{11c}Y_a + \Delta H_c}{H_{22c} + Y_a} = 49 \text{ k}\Omega;$$

$$Z_i = \frac{H_{11c} + Z_q}{H_{22c}Z_q + \Delta H_c} = 153 \text{ }\Omega;$$

$$G_u = \frac{-H_{21c}}{H_{11c}Y_a + \Delta H_c} = 0,964;$$

$$G_i = \frac{H_{21c}Y_a}{H_{22c} + Y_a} = -23,7$$

$$3.84. Z_{q\text{ opt}} = Z_{L1} = \sqrt{\frac{H_{11}\Delta H}{H_{22}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 \Omega \cdot 9 \cdot 10^{-2}}{50 \cdot 10^{-6} \text{ S}}} = 1,9 \text{ k}\Omega;$$

$$Z_{a\text{ opt}} = Z_{L2} = \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \Delta H}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^3 \Omega}{50 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot 9 \cdot 10^{-2}}} = 21 \text{ k}\Omega$$

$$3.85. G_u = \frac{-H_{21}}{H_{11}Y_{a\text{ opt}} + \Delta H} = -135;$$

$$Y_{a\text{ opt}} = \frac{1}{Z_{a\text{ opt}}} = 47,6 \mu\text{S};$$

$$G_i = \frac{H_{21}Y_{a\text{ opt}}}{H_{22} + Y_{a\text{ opt}}} = 12,2;$$

$$G_{p\text{ opt}} = \frac{H_{21}^2}{(\sqrt{H_{11}H_{22}} + \sqrt{\Delta H})^2} = 1645;$$

Kontrolle:

$$G_{p\text{ opt}} = |G_u| \cdot |G_i| = 135 \cdot 12,2 = 1645$$

$$3.86. Z_e = \frac{Y_{22} + Y_a}{Y_{11}Y_a + \Delta Y} =$$

$$= \frac{(34 + j 245) \cdot 10^{-6} \text{ S} + 100 \cdot 10^{-6} \text{ S}}{(1,4 + j 1) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ S}^2 + (-197,4 + j 1977) \cdot 10^{-6} \text{ S}^2}$$

$$Z_e \approx (124 - j 725) \Omega;$$

$$\Delta Y = (-197,4 + j 1977) \cdot 10^{-6} \text{ S}^2;$$

$$Z_i = \frac{Y_{11} + Y_q}{Y_{22}Y_q + \Delta Y} \approx (524 - j 1040) \Omega;$$

$$G_u = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_a} \approx -5,5 + j 10$$

3.87. Zuerst werden die Y -Parameter des Röhrenvierpols berechnet.

$$a) Y_{11} = j\omega(C_{gk} + C_{ga}) = j 0,2 \mu\text{S};$$

$$Y_{12} = -j\omega C_{ga} = -j 0,107 \mu\text{S};$$

$$\begin{aligned}
 Y_{21} &= S - j\omega C_{ga} = \\
 &= 2 \cdot 10^{-3} S - j 0,107 \mu S \approx 2 \cdot 10^{-3} S; \\
 Y_{22} &= \frac{1}{R_1} + j\omega(C_a + C_{ga}) = \\
 &= 20 \cdot 10^{-6} S + j 0,138 \mu S \approx 20 \cdot 10^{-6} S; \\
 \Delta Y &= j 224 \cdot 10^{-12} S^2; \\
 Z_e &= \frac{Y_{22} + Y_a}{Y_{11}Y_a + \Delta Y} \approx \underline{-j 133 \text{ k}\Omega}; \\
 Z_i &= \frac{Y_{11} + Y_q}{Y_{22}Y_q + \Delta Y} \approx \underline{(38,5 - j 21,7) \text{ k}\Omega}; \\
 G_u &= \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + Y_a} \approx \underline{-67}
 \end{aligned}$$

b) $Y_{11} = 0$; $Y_{12} = 0$; $Y_{21} = 2 \text{ mS}$; $Y_{22} = 20 \mu S$;
 $Z_e = \infty$; $\Delta Y = 0$; $Z_i \approx 50 \text{ k}\Omega$; $G_u \approx -67$

Die Spannungsverstärkung hat deshalb bei a) und b) den gleichen Wert, weil auch bei a) die kapazitiven Anteile von Y_{21} und Y_{22} vernachlässigt worden sind.

3.88. $Y_{11K} = 0$; $Y_{12K} = 0$; $Y_{21K} = S = 5 \text{ mA/V}$;
 $Y_{22K} = \frac{1}{R_1} = 25 \mu S$

Die Umrechnung der Vierpolparameter erfolgt mit Hilfe der Tafel 3.5, wobei zu berücksichtigen ist, daß die Anodenbasisschaltung der Röhre der Kollektorschaltung des Transistors entspricht (s. Bilder 3.74 und 3.77).

$$\begin{aligned}
 Y_{11a} &= Y_{11K} = 0; \quad Y_{12a} = -(Y_{11K} + Y_{12K}) = 0; \\
 Y_{21a} &= -(Y_{11K} + Y_{21K}) = -S = \underline{-5 \text{ mA/V}}; \\
 Y_{22a} &= Y_{11K} + Y_{12K} + Y_{21K} + Y_{22K} = \\
 &= 5 \text{ mS} + 25 \mu S = \underline{5,025 \text{ mS}}
 \end{aligned}$$

3.89. a) Y -Parameter der Anodenbasisschaltung:

$$Y_{11a} = Y_{11K} = 0; \quad Y_{12a} = -(Y_{11K} + Y_{12K}) = 0;$$

$$Y_{21a} = -(Y_{11K} + Y_{21K}) = -4 \text{ mS};$$

$$Y_{22a} = \Sigma Y_K = 4 \text{ mS} + 20 \mu S \approx 4 \text{ mS};$$

$$\Delta Y_a = \Delta Y_K = 0;$$

$$Z_e = \frac{Y_{22a} + Y_a}{Y_{11a}Y_a + \Delta Y_a} = \infty;$$

$$Z_i = \frac{Y_{11a} + Y_q}{Y_{22a}Y_q + \Delta Y_a} = \underline{250 \Omega};$$

$$G_u = \frac{-Y_{21a}}{Y_{22a} + Y_a} = \underline{0,5}$$

b) Für die Schaltung nach Bild L 79 gilt:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{U_0}{Z_q + Z_a} = \frac{1 \text{ V}}{5 \cdot 10^5 \Omega + 250 \Omega} \approx \\
 &\approx \frac{1 \text{ V}}{5 \cdot 10^5 \Omega} = 2 \mu A; \\
 P_a &= I_1^2 Z_a = \underline{10 \cdot 10^{-10} \text{ W}}
 \end{aligned}$$

$$c) \quad U_1 = U_0 \frac{Z_e}{Z_e + Z_q} = U_0 \frac{1}{1 + \frac{Z_q}{Z_e}} = \underline{U_0};$$

$$U_2 = U_1 G_u = 0,5 \text{ V};$$

$$P_2 = P_a = \frac{U_2^2}{Z_a} = \underline{1 \text{ mW}}$$

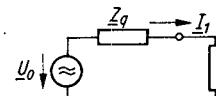


Bild L 79.
Aufgabe 3.89 b)

3.90. Y -Parameter der Kathodenbasisschaltung:

$$Y_{11K} = 0; \quad Y_{12K} = 0; \quad Y_{21K} = 10 \text{ mS};$$

$$Y_{22K} = 20 \mu S$$

Mit Tafel 3.5 können die zugehörigen Y -Parameter der Gitterbasisstufe (\triangleq Basisschaltung) ermittelt werden.

$$\begin{aligned}
 Y_{11g} &= Y_{11K} + Y_{12K} + Y_{21K} + Y_{22K} = \\
 &= 10 \text{ mS} + 20 \mu S \approx 10 \text{ mS};
 \end{aligned}$$

$$Y_{12g} = -(Y_{12K} + Y_{22K}) = -20 \mu S;$$

$$Y_{21g} = -(Y_{21K} + Y_{22K}) =$$

$$= -10 \text{ mS} - 20 \mu S \approx -10 \text{ mS};$$

$$Y_{22g} = Y_{22K} = 20 \mu S; \quad \Delta Y_g = \Delta Y_K = 0;$$

$$Z_e = \frac{Y_{22g} + Y_a}{Y_{11g}Y_a + \Delta Y_g} = \underline{200 \Omega};$$

$$Z_i = \frac{Y_{11g} + Y_q}{Y_{22g}Y_q + \Delta Y_g} = \underline{150 \text{ k}\Omega};$$

$$G_u = \frac{-Y_{21g}}{Y_{22g} + Y_a} = \underline{250}$$

3.91. Für den Abschlußwiderstand gilt in diesem Fall $\frac{U_a}{I_a} = Z_L$, womit man in der ersten Gleichung I_a und in der zweiten Gleichung U_a substituiert.

3.92. Unter Verwendung der Definitionen für $\cosh g$ und $\sinh g$ erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{U_e}{U_a} &= \cosh g + \sinh g = \frac{e^g + e^{-g}}{2} + \frac{e^g - e^{-g}}{2} = \\
 &= e^g, \quad \text{wonach } g = \ln \frac{U_e}{U_a} \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

3.93. a) $A_{11} = \cosh g = 1,81$; $\sinh g =$
 $= \sqrt{\cosh^2 g - 1} = \sqrt{2,28} = 1,51$;

$A_{12} = Z_L \sinh g = 755 \Omega$; $A_{21} = \frac{\sinh g}{Z_L} = 3 \text{ mS}$

b) $A_{11} = \cosh g = 1,059 + j 0,082$;

$\sinh g = \sqrt{\cosh^2 g - 1} = \sqrt{0,115 + j 0,174} =$
 $= \sqrt{0,209 e^{j56,5^\circ}} = 0,403 + j 0,216$;

$A_{12} = (241,8 + j 29,8) \Omega$;

$A_{21} = (6,7 + j 3,6) \cdot 10^{-4} \text{ S}$

c) $A_{11} = 1,039 - j 0,203$;

$A_{12} = -(369,6 + j 14,4) \Omega$;

$A_{21} = (-0,45 + j 11,55) \cdot 10^{-4} \text{ S}$

d) $A_{11} = 2,621 + j 2,602$;

$A_{12} = (767,5 + j 548,5) \Omega$;

$A_{21} = (7,7 + j 12,3) \text{ mS}$

3.94. Mit $A_{21} = a + j b$ wird

$Z_L = \sqrt{\frac{(250 + j 125)(a - jb)}{a^2 + b^2}}$; da Z_L reell ist, muß
im Zähler des Radikanden $125a = 250b$, d.h.
 $a = 2b$ sein. Damit wird $b = \frac{625}{5Z_L^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ S}$,

$a = 10 \cdot 10^{-4} \text{ S}$ und $A_{21} = (10 + j 5) \cdot 10^{-4} \text{ S}$;

$A_{11} = \sqrt{1 + A_{12}A_{21}} = 1,09 + j 1,15$

3.95. a) $\sinh g = \sqrt{3^2 - 1} = 2\sqrt{2}$;

$Z_L = \frac{150 + j 100}{2\sqrt{2}} \Omega = (53,0 + j 35,4) \Omega$;

$A_{21} = \frac{8}{150 + j 100} \text{ S} = (0,037 - j 0,025) \text{ S}$

b) $\sinh g = \sqrt{(1 + j 0,4)^2 - 1} =$

$= \sqrt{0,816 e^{j101,3^\circ}} = 0,57 + j 0,70$;

$Z_L = \frac{200 + j 50}{0,57 + j 0,70} \Omega = (183 - j 137) \Omega$;

$A_{21} = \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{12}} = \frac{-0,16 + j 0,8}{200 + j 50} \text{ S} =$

$= (1,88 + j 39,5) \cdot 10^{-4} \text{ S}$

c) $\sinh g = \sqrt{1,24 + j 0,3} = \sqrt{1,28 e^{j13,6^\circ}} =$
 $= 1,12 + j 0,134$;

$Z_L = \frac{A_{12}}{\sinh g} = \frac{-3 + j 60}{1,12 + j 0,134} \Omega = (3,68 + j 53,13) \Omega$

$A_{21} = \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{12}} = \frac{1,24 + j 0,3}{-3 + j 60} \text{ S} =$
 $= (39,6 - j 209) \cdot 10^{-4} \text{ S}$

d) $Z_L = (43,79 - j 5,24) \Omega$;
 $A_{21} = (-161 + j 488) \cdot 10^{-4} \text{ S}$

3.96. Mit dem Dämpfungsmaß $a = 3,5$ wird $\cosh 3,5 = 16,57$; aus den beiden Gleichungen

$16,57 = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ und $600 \Omega = \sqrt{Z_1^2 + 2Z_1Z_3}$ erhält

man $Z_1 = 600 \Omega \sqrt{\frac{\cosh a - 1}{\cosh a + 1}} = 565 \Omega$;

$Z_3 = \frac{Z_1}{\cosh a - 1} = 36,3 \Omega$

3.97. a) $A_{11} = 1 + \frac{100}{-j 50} = 1 + j 2$;

$g = \ln(1 + j 2 + \sqrt{1 + j 4 - 4 - 1})$; der Wurzel-
ausdruck liefert $\sqrt{-4 + j 4} = \sqrt{5,66} e^{j135^\circ} =$
 $= 2,38 e^{j67,5^\circ} = 0,911 + j 2,200$;

$g = \ln 4,61 e^{j65,5^\circ} = 1,528 + j 1,143$;

$Z_L = 119 e^{-j22,5^\circ} \Omega$

b) $A_{11} = 1 - j 5$;

$g = \ln(1 - j 5 - \sqrt{(1 - j 5)^2 - 1})$; der Wurzel-
ausdruck liefert $\sqrt{-25 - j 10} = \sqrt{26,93} e^{j201,8^\circ} =$
 $= 5,19 e^{j100,9^\circ} = -0,981 + j 5,096$;

$g = \ln(1,981 - j 10,096) = \ln(10,29 e^{-j78,9^\circ})$;

$g = 2,33 - j 1,38$; $Z_L = \sqrt{50(50 + j 20) \Omega^2} =$
 $= \sqrt{2693} e^{j21,8^\circ} \Omega^2 = 51,9 e^{j10,9^\circ} \Omega$

c) $A_{11} = 1 + j 0,2$; $A_{12} = (-4 + j 40)$;

$Z_L = \sqrt{(-400 + j 4000) \Omega^2} = \sqrt{4020} e^{j95,7^\circ} \Omega^2 =$
 $= 63,40 e^{j47,9^\circ} \Omega$;

$g = \ln(1 + j 0,2 + \sqrt{(1 + j 0,2)^2 - 1})$; der Wurzel-
ausdruck ergibt $\sqrt{-0,04 + j 0,4} = \sqrt{0,402} e^{j95,7^\circ} =$
 $= 0,634 e^{j47,9^\circ} = 0,425 + j 0,470$;

$g = \ln(1,425 + j 0,670) = \ln 1,575 e^{j25,2^\circ} =$
 $= 0,454 + j 0,440$

d) $A_{11} = 1,475 + j 0,248$;

$A_{12} = (118,8 + j 61,9) \Omega$;

$g = \ln(1,475 + j 0,248 + \sqrt{(1,475 + j 0,248)^2 - 1})$;

der Wurzelausdruck liefert $\sqrt{1,114 + j 0,732} =$

$$= \sqrt{1,33e^{j38,8^\circ}} = 1,153e^{j16,7^\circ} = 1,104 + j 0,331$$

$$g = \ln 2,643e^{j12,7^\circ} = 0,972 + j 0,222$$

$$Z_L = \sqrt{(12500 + j 5000) \Omega^2} = \sqrt{13463e^{j21,8^\circ} \Omega^2} =$$

$$= 116e^{j10,9^\circ} \Omega$$

8.98. a) $\cosh a = 1 + \frac{50}{800} = 1,0625$; $a = 0,352 \text{ Np}$;

$$Z_L = 800 \sqrt{\frac{50}{1650}} \Omega = 139 \Omega$$

4. Fourier-Analyse

4.1. (Bild L 80) ungerade Funktion

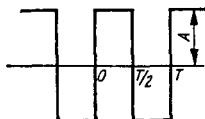


Bild L 80. Aufgabe 4.1

4.2. (Bild L 81) gerade Funktion

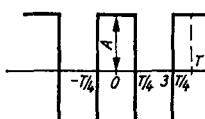


Bild L 81. Aufgabe 4.2

4.3. (Bild L 82) ungerade Funktion

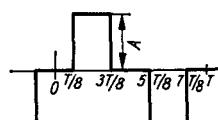


Bild L 82. Aufgabe 4.3

4.4. (Bild L 83) ungerade Funktion

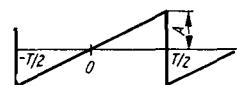


Bild L 83. Aufgabe 4.4

4.5. (Bild L 84) asymmetrische Funktion



Bild L 84. Aufgabe 4.5

b) $\cosh a = 1,1$; $a = 0,44 \text{ Np}$; $Z_L = 10,9 \Omega$

c) $\cosh a = 1,004$; $a = 0,09 \text{ Np}$; $Z_L = 0,223 \Omega$

3.99. Aus $Z_L = \sqrt{Z_1(Z_1 + 2Z_3)}$ erhält man $Z_3 =$

$$= \frac{Z_L^2 - Z_1^2}{2Z_1} = 187,5 \Omega; \text{ für das entsprechende } \Pi\text{-Glied ergibt die Stern-Dreieck-Umwandlung den Längswiderstand } Z'_3 = 1080 \Omega \text{ und die Querwiderstände } Z'_1 = Z'_2 = 675 \Omega; \text{ damit wird}$$

$$Z_L = 675 \sqrt{\frac{1080}{1350 + 1080}} \Omega = 450 \Omega$$

3.100. Aus $\cosh g = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}$ erhält man $Z_1 = 5,13Z_3$, und damit

$$Z_L = \sqrt{5,13Z_3(5,13Z_3 + 2Z_3)} = \sqrt{36,58Z_3^2}; \\ Z_3 = 132 \Omega; Z_1 = 677 \Omega$$

4.6. (Bild L 85) gerade Funktion

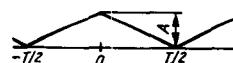


Bild L 85. Aufgabe 4.6

4.7. (Bild L 86) ungerade Funktion

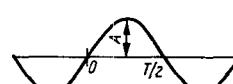


Bild L 86. Aufgabe 4.7

4.8. (Bild L 87) asymmetrische Funktion

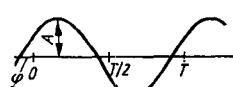


Bild L 87. Aufgabe 4.8

4.9. (Bild L 88) gerade Funktion

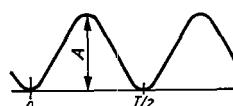


Bild L 88. Aufgabe 4.9

4.10. (Bild L 89) gerade Funktion

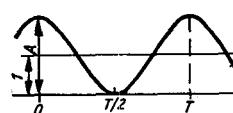


Bild L 89. Aufgabe 4.10

4.11. a) $a_k = 2 \cdot \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/4} A \cos k\omega t dt + \int_{T/4}^{T/2} (-A) \cos k\omega t dt \right) =$

 $= \frac{4A}{k\omega T} \left(\left| \sin k\omega t \right|_0^{T/4} - \left| \sin k\omega t \right|_{T/4}^{T/2} \right) =$
 $= \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{k\pi}{2} - \sin k\pi \right); a_0 = 0;$
 $a_1 = \frac{4A}{\pi}; a_2 = 0;$
 $s_n(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \frac{\cos 5\omega t}{5} + \dots \right)$

b) (Bild L 90) $b_k = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} A \sin k\omega t dt - \int_{T/2}^T A \sin k\omega t dt \right) =$

 $= - \frac{2A}{k\omega T} \left(\left| \cos k\omega t \right|_0^{T/2} - \left| \cos k\omega t \right|_{T/2}^T \right) =$
 $= - \frac{2A}{k\omega T} \left(\cos \frac{k\omega T}{2} - 1 - \cos k\omega T + \cos \frac{k\omega T}{2} \right) =$
 $= - \frac{2A}{k\omega T} \left(2 \cos \frac{k\omega T}{2} - 1 - \cos k\omega T \right) =$
 $= - \frac{A}{k\pi} \left(2 \cos k\pi - \cos 2k\pi - 1 \right) =$
 $= \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos k\pi); \text{ für alle geraden } k \text{ ist } b_k = 0;$

$b_0 = 0 \text{ in Analogie zu a); } b_1 = 2 \cdot \frac{4A}{2\pi} = \frac{4A}{\pi};$

$b_3 = \frac{4A}{3\pi};$

$s_n(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$

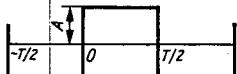


Bild L 90.
Aufgabe 4.11 b)

c) Für das erste Glied von $s_n(t)$ gilt

$\frac{4A}{\pi} \left[\sin \left(\omega t + \frac{\omega T}{4} \right) \right] = \frac{4A}{\pi} \left[\sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] =$
 $= \frac{4A}{\pi} \cos \omega t \text{ usw.}$

4.12. Die Funktion ist gerade;

$a_k = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^{-c} A \cos k\omega t dt + \int_c^{T/2} A \cos k\omega t dt \right) =$
 $= \frac{4A}{T} \int_c^{T/2} \cos k\omega t dt = \frac{4A}{k\omega T} \left| \sin k\omega t \right|_c^{T/2} =$
 $= \frac{4A}{k\omega T} \left(\sin \frac{k\omega T}{2} - \sin k\omega c \right) =$
 $= \frac{2A}{k\pi} (\sin k\pi - \sin k\omega c)$

4.13. a) Die Funktion ist ungerade;

$b_k = \frac{4}{T} \int_c^{T/2} A \sin k\omega t dt = \frac{4A}{k\omega T} \left| -\cos k\omega t \right|_c^{T/2} =$
 $= \frac{2A}{k\pi} (\cos k\omega c - \cos k\pi)$

$b_k = \frac{2A}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi}{2} - \cos k\pi \right)$

$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t - \sin 2\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$

$b_k = \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos k\pi)$

$4.14. \text{ a) } b_k = \frac{4}{T} \int_c^{T/2-c} A \sin k\omega t dt =$

$= - \frac{4A}{k\omega T} \left| \cos k\omega t \right|_c^{T/2-c} =$

$= \frac{2A}{k\pi} [\cos k\omega c - \cos k\omega(T/2 - c)]$

$b_k = \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos k\pi)$

$4.15. \text{ a) } b_k = \frac{4}{T} \int_{T/8}^{3T/8} A \sin k\omega t dt =$

$= - \frac{4A}{k\omega T} \left| \cos k\omega t \right|_{T/8}^{3T/8} =$

$= - \frac{2A}{k\pi} \left(\cos \frac{3k\pi}{4} - \cos \frac{k\pi}{4} \right);$

für alle geraden k ist $b_k = 0$, ebenso auch $b_0 = 0$;

$b_1 = \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2A\sqrt{2}}{\pi} \text{ usw.}$

$s_n(t) = \frac{2A\sqrt{2}}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{\sin 7\omega t}{7} + \dots \right)$

b) (Bild L 91)

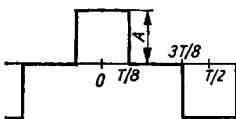


Bild L 91.
Aufgabe 4.15 b)

$$a_k = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/8} A \cos k\omega t dt - \int_{3T/8}^{T/2} A \cos k\omega t dt \right) = \\ = \frac{4A}{k\omega T} \left(\left| \sin k\omega t \right|_0^{T/8} - \left| \sin k\omega t \right|_{3T/8}^{T/2} \right) = \\ = \frac{2A}{k\pi} \left(\sin \frac{k\pi}{4} - \sin k\pi + \sin \frac{3k\pi}{4} \right);$$

für alle geraden k ist $a_k = 0$, ebenso auch $a_0 = 0$;

$$a_1 = \frac{2A}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2A\sqrt{2}}{\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{2A\sqrt{2}}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3} - \frac{\cos 5\omega t}{5} - \frac{\cos 7\omega t}{7} + \dots \right)$$

4.16. Die Funktion ist gerade;

$$a_k = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/3} A \cos k\omega t dt - \int_{T/3}^{T/2} A \cos k\omega t dt \right) = \\ = \frac{4A}{k\omega T} \left(\left| \sin k\omega t \right|_0^{T/3} - \left| \sin k\omega t \right|_{T/3}^{T/2} \right) = \\ = \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{2k\pi}{3} - \sin k\pi \right);$$

$$\text{für } k = 3, 6, 9, \dots \text{ wird } a_k = 0; a_0 = \frac{2A}{3};$$

$$s_n(t) = \frac{2A}{3} + \frac{2A\sqrt{3}}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\cos 4\omega t}{4} \dots \right)$$

4.17. Die Funktion ist gerade;

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{3T/8} A dt = \frac{3}{2} A;$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{3T/8} A \cos k\omega t dt = \frac{4A}{k\omega T} \left| \sin k\omega t \right|_0^{3T/8} = \\ = \frac{2A}{k\pi} \sin \frac{3k\pi}{4};$$

für $k = 4, 8, 12, \dots$ wird $a_k = 0$;

$$s_n(t) = \frac{3A}{4} + \frac{A}{\pi} \left(\sqrt{2} \cos \omega t - \cos 2\omega t + \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 3\omega t \dots \right)$$

4.18. Die Funktion ist ungerade;

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} A \sin k\omega t dt = \frac{4A}{k\omega T} \left| -\cos k\omega t \right|_0^{T/4} = \\ = \frac{4A}{k\pi} \left(\cos 0 - \cos \frac{k\pi}{2} \right) = \frac{2A}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right);$$

für alle ungeraden k ist

$$b_k = \frac{2A}{k\pi}; b_0 = 0; \text{ für } k = 2, 6, 10, \dots \text{ ist } b_k = \frac{4A}{k\pi};$$

für $k = 4, 8, 12, \dots$ ist $b_k = 0$;

$$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t + \sin 2\omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} \dots \right)$$

4.19. Die Funktion ist gerade;

$$a_0 = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/8} 2A dt + \int_{3T/8}^{T/2} A dt \right) = \frac{3A}{2};$$

$$a_k = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/8} 2A \cos k\omega t dt + \int_{3T/8}^{T/2} A \cos k\omega t dt \right) = \\ = \frac{4A}{k\pi T} \left(\left| 2 \sin k\omega t \right|_0^{T/8} + \left| \sin k\omega t \right|_{3T/8}^{T/2} \right) = \\ = \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{k\pi}{4} + \sin k\pi - \sin \frac{3k\pi}{4} \right);$$

$$s_n(t) = \frac{3A}{4} + \frac{A}{\pi} \left(\sqrt{2} \cos \omega t + 3 \cos 2\omega t + \sqrt{2} \frac{\cos 3\omega t}{3} + \sqrt{2} \frac{\cos 5\omega t}{5} \dots \right)$$

4.20. Die Funktion ist gerade;

$$a_0 = \frac{4}{T} \left(\int_{T/8}^{T/4} A dt - \int_{T/4}^{3T/8} A dt \right) = 0;$$

$$a_k = \frac{4}{T} \left(\int_{T/8}^{T/4} A \cos k\omega t dt - \int_{T/4}^{3T/8} A \cos k\omega t dt \right) = \\ = \frac{4A}{k\omega T} \left(\left| \sin k\omega t \right|_{T/8}^{T/4} - \left| \sin k\omega t \right|_{T/4}^{3T/8} \right) = \\ = \frac{4A}{k\omega T} \left(\sin \frac{k\omega T}{4} - \sin \frac{k\omega T}{8} - \sin \frac{3k\omega T}{8} + \sin \frac{k\omega T}{4} \right) = \\ = \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{k\pi}{2} - \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{3k\pi}{4} \right);$$

für alle geraden k ist $a_k = 0$;

$$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \left((2 - \sqrt{2}) \cos \omega t - (2 + \sqrt{2}) \frac{\cos 3\omega t}{3} + (2 + \sqrt{2}) \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$$

4.21. a) Die Funktion ist gerade; $a_0 = 0$;

$$a_k = \frac{4A}{T} \int_0^{T/4-c} \cos k\omega t dt - \frac{4A}{T} \int_{T/4-c}^{T/2-d} \cos k\omega t dt =$$

$$= \frac{4A}{k\omega T} [\sin k\omega(T/4 - c) - \sin k\omega d -$$

$$- \sin k\omega(T/2 - d) + \sin k\omega(T/4 + c)]$$

b) $a_k = \frac{2A}{k\pi} \left(\sin \frac{k\pi}{2} - \sin k\pi + \sin \frac{k\pi}{2} \right) =$

$$= \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{k\pi}{2} \sin k\pi \right)$$

c) $a_k = \frac{2A}{k\pi} \left(\sin \frac{k\pi}{4} + \sin \frac{3k\pi}{4} \right)$

d) $a_k = \frac{2A}{k\pi} \left(2 \sin \frac{k\pi}{2} - \sin \frac{k\pi}{4} - \sin \frac{3k\pi}{4} \right)$

4.22. Die Funktion ist gerade;

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2At}{T} dt = \frac{4}{T} \left| \frac{At^2}{T} \right|_0^{T/2} = A;$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \frac{2At}{T} \cos k\omega t dt =$$

$$= \frac{8A}{(k\omega T)^2} \left| k\omega t \sin k\omega t + \cos k\omega t \right|_0^{T/2} =$$

$$= \frac{8A}{(2\pi k)^2} (\cos k\pi - 1); \text{ für alle geraden } k \text{ wird}$$

$a_k = 0$, und für alle ungeraden k wird

$$a_k = -\frac{4A}{(k\pi)^2};$$

$$s_n(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

4.23. a) $f(t) = \frac{4At}{T}$ für $0 \leq t \leq T/4$

$$f(t) = \frac{4A(T/2 - t)}{T} \text{ für } T/4 \leq t \leq T/2$$

Die Funktion ist ungerade;

$$b_k = \frac{4}{T} \left(\int_0^{T/4} \frac{4At}{T} \sin k\omega t dt + \right.$$

$$+ \int_{T/4}^{T/2} \frac{4At}{T} \sin k\omega t dt - \int_{T/2}^{T/4} \frac{4At}{T} \sin k\omega t dt \left. \right) =$$

$$= \frac{16A}{(k\omega T)^2} \left(\left| \sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t \right|_0^{T/4} - \right.$$

$$- \frac{8A}{k\omega T} \left| \cos k\omega t \right|_0^{T/2} -$$

$$- \frac{16A}{(k\omega T)^2} \left| \sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t \right|_0^{T/2} = \frac{8A}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2};$$

für alle geraden k ist $b_k = 0$;

$$s_n(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \frac{\sin 5\omega t}{25} - \dots \right)$$

b) $s_n(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2} \left[\cos \omega(t + T/4) + \right.$

$$\left. + \frac{\cos \omega(3t + 3T/4)}{9} + \dots \right]$$

$$= \frac{4A}{\pi^2} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 3\omega t}{9} + \dots \right)$$

4.24. Die Funktion ist asymmetrisch;

$$f(t) = \frac{At}{T} \text{ für } 0 \leq t \leq T;$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} dt = \frac{2A}{T^2} \left| \frac{t^2}{2} \right|_0^T = A;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \cos k\omega t dt =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \left| \frac{k\omega t \sin k\omega t + \cos k\omega t}{(k\omega)^2} \right|_0^T =$$

$$= \frac{A}{2(k\pi)^2} (\cos 2k\pi - 1) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \sin k\omega t dt =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \left| \frac{\sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t}{(k\omega)^2} \right|_0^T =$$

$$= -\frac{A}{k\pi} \cos 2k\pi = -\frac{A}{k\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$

4.25. a) Die Funktion ist asymmetrisch;

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^c \frac{At}{c} dt = \left| \frac{2At^2}{2Tc} \right|_0^c = \frac{Ac}{T};$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{At}{c} \cos k\omega t \, dt =$$

$$= \frac{2A}{Tc} \left| \frac{k\omega t \sin k\omega t + \cos k\omega t}{(k\omega)^2} \right|_0^{\frac{T}{4}} =$$

$$= \frac{2A}{(k\omega)^2 Tc} (k\omega c \sin k\omega c + \cos k\omega c - 1)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{At}{c} \sin k\omega t \, dt =$$

$$= \frac{2A}{(k\omega)^2 Tc} (\sin k\omega c - k\omega c \cos k\omega c)$$

b) $a_0 = A; a_k = 0; b_k = -\frac{A}{k\pi} \cos 2k\pi$

c) $a_0 = \frac{A}{2}; a_k = \frac{A}{(k\pi)^2} (k\pi \sin k\pi + \cos k\pi - 1);$

für alle geraden k ist $a_k = 0$, für alle ungeraden k ist $a_k = -\frac{2A}{(k\pi)^2}; b_k = \frac{A}{(k\pi)^2} (-k\pi \cos k\pi)$; für alle

geraden k ist $b_k = -\frac{A}{k\pi}$; für alle ungeraden k ist

$$b_k = \frac{A}{k\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{A}{4} - \frac{2A}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

$$+ \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right)$$

4.26. Die Funktion ist ungerade;

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4At}{T} \sin k\omega t \, dt =$$

$$= \frac{16A}{T^2} \left| \frac{\sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t}{(k\omega)^2} \right|_0^{\frac{T}{4}} =$$

$$= \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\sin \frac{k\pi}{2} - \frac{k\pi}{2} \cos \frac{k\pi}{2} \right);$$

$$s_n(t) = \frac{4A}{\pi^2} \left(\sin \omega t + \frac{\pi \sin 2\omega t}{4} - \frac{\sin 3\omega t}{9} - \frac{2\pi \sin 4\omega t}{16} \dots \right)$$

4.27. Die Funktion ist gerade; aus der Proportion

$$\frac{f(t)}{T/4 - t} = \frac{A}{T/4} \text{ erhält man } f(t) = \frac{4A(T/4 - t)}{T};$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4A}{T} \frac{T}{4} \, dt - \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4A}{T} t \, dt = \frac{A}{2};$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4A}{T} \frac{T}{4} \cos k\omega t \, dt -$$

$$- \frac{4}{T} \int_0^{T/4} \frac{4A}{T} t \cos k\omega t \, dt =$$

$$= \frac{4A}{k\omega T} \left| \sin k\omega t \right|_0^{T/4} -$$

$$- \frac{16A}{(k\omega T)^2} \left| \cos k\omega t + \frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right|_0^{T/4} =$$

$$= \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right);$$

$$s_n(t) = \frac{A}{4} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{2 \cos 2\omega t}{4} + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

4.28. a) Die Funktion ist gerade; wegen $\frac{f(t)}{t - T/4} =$

$$= \frac{A}{T/4} \text{ ist } f(t) = \frac{4A(t - T/4)}{T};$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4At}{T} \, dt - \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4AT}{4T} \, dt = \frac{A}{2};$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4At}{T} \cos k\omega t \, dt -$$

$$- \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4AT}{4T} \cos k\omega t \, dt =$$

$$= \frac{16A}{(k\omega T)^2} \left(\left| \cos k\omega t + \frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right|_{T/4}^{T/2} - \left| \frac{k\omega T}{4} \sin k\omega t \right|_{T/4}^{T/2} \right) =$$

$$= \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\cos k\pi - \cos \frac{k\pi}{2} \right);$$

$$s_n(t) = \frac{A}{4} + \frac{4A}{\pi^2} \left(-\cos \omega t + \frac{2 \cos 2\omega t}{4} - \frac{\cos 3\omega t}{9} - \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

b) Bei Verschiebung um $T/2$ ändern die cos-Glieder das Vorzeichen, wenn k ungerade ist. Daraus folgt

unmittelbar die durch Berechnung der Koeffizienten erhaltene Reihe von Aufgabe 4.28 a).

4.29. Die Funktion ist die Summe der Funktionen von Aufgabe 4.27 und 4.28 a). Die Addition der Ergebnisse liefert

$$s_n(t) = \frac{A}{2} + \frac{16A}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\omega t}{4} + \frac{\cos 6\omega t}{36} + \right. \\ \left. + \frac{\cos 10\omega t}{100} + \dots \right)$$

4.30. Die Funktion ist gerade;

$$f(t) = A \text{ für } 0 \leq t \leq T/4$$

$$f(t) = \frac{4A(T/2 - t)}{T} \text{ für } T/4 \leq t \leq T/2$$

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} A dt + \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4A(T/2 - t)}{T} dt = \frac{3A}{2};$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} A \cos k\omega t dt + \\ + \frac{4}{T} \int_{T/4}^{T/2} \frac{4A(T/2 - t)}{T} \cos k\omega t dt = \\ = \frac{4A}{T} \left(\left| \frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right|_0^{T/4} + \left| \frac{2 \sin k\omega t}{k\omega} \right|_{T/4}^{T/2} - \right. \\ \left. - \frac{4}{(k\omega)^2 T} \left| k\omega t \sin k\omega t + \cos k\omega t \right|_{T/4}^{T/2} \right) = \\ = \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\cos \frac{k\pi}{2} - \cos k\pi \right);$$

$$s_n(t) = \frac{3A}{4} + \frac{4A}{\pi^2} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 2\omega t}{2} + \frac{\cos 3\omega t}{9} + \right. \\ \left. + \frac{\cos 5\omega t}{25} + \dots \right)$$

4.31. Die Funktion ist gerade;

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^c \frac{At}{c} dt + \frac{4}{T} \int_c^{T/2} A dt = 2A \left(1 - \frac{c}{T} \right);$$

$$a_k = \frac{4}{T} \left(\int_0^c \frac{At}{c} \cos k\omega t dt + A \int_c^{T/2} \cos k\omega t dt \right) = \\ = \frac{4A}{T} \left(\left| \frac{k\omega t \sin k\omega t + \cos k\omega t}{c(k\omega)^2} \right|_0^c + \left| \frac{\sin k\omega t}{k\omega} \right|_c^{T/2} \right) =$$

$$= \frac{4A}{T} \left(\frac{k\omega c \sin k\omega c + \cos k\omega c - 1}{c(k\omega)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\sin k\pi - \sin k\omega c}{k\omega} \right) = \\ = \frac{4A}{(k\omega)^2 T c} (\cos k\omega c - 1); \\ s_n(t) = \frac{A \left(1 - \frac{c}{T} \right) + \frac{AT}{\pi^2 c} \cos(\omega c - 1) \cos \omega t +}{4} \\ + \frac{\cos(2\omega c - 1) \cos 2\omega t}{4} + \dots$$

4.32. a) $a_k = \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right)$; Verschieben der Funktion von Aufgabe 4.30 um $T/2$ liefert ebenfalls

$$a_k = \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\cos \frac{3k\pi}{2} - \cos 2\pi \right) = \\ = \frac{2A}{(k\pi)^2} \left(\cos \frac{k\pi}{2} - 1 \right) \text{ usw.}$$

$$\text{b) } a_k = \frac{8A}{(k\omega T)^2} (\cos k\pi - 1) = \frac{2A}{(k\pi)^2} (\cos k\pi - 1);$$

$$\text{c) } a_0 = \frac{4A}{3}; a_k = \frac{12A}{(k\omega T)^2} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right) = \\ = \frac{3A}{(k\pi)^2} \left(\cos \frac{2k\pi}{3} - 1 \right)$$

$$s_n(t) = \frac{2A}{3} - \frac{20A}{2} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 2\omega t}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\cos 4\omega t}{16} + \dots \right)$$

4.33. a) Die Funktion ist ungerade; $f(t) = \frac{A(t - c)}{T/2 - c}$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_c^{T/2} \frac{A(t - c) \sin k\omega t}{T/2 - c} dt = \\ = \frac{4A}{T} \left(\int_c^{T/2} \frac{t \sin k\omega t}{T/2 - c} dt - \int_c^{T/2} \frac{c \sin k\omega t}{T/2 - c} dt \right) = \\ = \frac{4A}{T(T/2 - c)} \left(\left| \frac{-k\omega t \cos k\omega t + \sin k\omega t}{(k\omega)^2} \right|_c^{T/2} + \right. \\ \left. + \frac{c \cos k\omega t}{k\omega} \right) = \\ = \frac{4A}{T(T/2 - c)(k\omega)^2} [k(\omega c - \pi) \cos k\pi - \sin k\omega c]$$

$$\text{b) } b_k = \frac{-4A}{(k\pi)^2} \left(\frac{k\pi}{2} \cos k\pi + \sin \frac{k\pi}{2} \right);$$

$$s_n(t) = -\frac{4A}{\pi^2} \left[(1 - \pi/2) \sin \omega t + \frac{\pi \sin 2\omega t}{4} - \frac{(1 + 3\pi/2) \sin 3\omega t}{9} + \dots \right]$$

$$\text{c) } b_k = -\frac{2Ak}{(k\pi)^2} \cos k\pi = -\frac{2A}{k\pi} (-1)^k$$

$$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right)$$

4.34. a) Die Funktion ist ungerade;

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4A}{T} \left(\int_0^c \frac{t}{c} \sin k\omega t dt + \int_c^{T/2-c} \sin k\omega t dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/2-c}^{T/2} \frac{T/2-t}{c} \sin k\omega t dt \right) = \\ &= \frac{4A}{T} \left(\left| \frac{\sin k\omega t - k\omega t \cos k\omega t}{c(k\omega)^2} \right|_0^c - \right. \\ &\quad \left. - \left| \frac{\cos k\omega t}{k\omega} \right|_c^{T/2-c} - \frac{T \cos k\omega t}{2ck\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{k\omega t \cos k\omega t - \sin k\omega t}{c(k\omega)^2} \right|_{T/2-c}^{T/2} \right) \\ &= \frac{2A}{k^2 c \pi \omega} [\sin k\omega c + \sin k\omega(T/2 - c) - \sin k\omega T/2] \end{aligned}$$

$$\text{b) } b_k = \frac{4A}{(k\pi)^2} \left(\sin \frac{k\pi}{2} + \sin \frac{k\pi}{2} \right) = \frac{8A}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2}$$

c) Nach der L'HOSPITALSchen Regel ist

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin k\omega c}{c} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{k\omega \cos k\omega c}{1} = k\omega \text{ sowie}$$

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin k\omega(T/2 - c)}{c} = -\frac{k\omega \cos k\omega(T/2 - c)}{1} = -k\omega \cos k\pi, \text{ womit}$$

$$b_k = \frac{2A}{k\pi} - \frac{2A}{k\pi} \cos k\pi = \frac{2A}{k\pi} (1 - \cos k\pi)$$

4.35. Die Funktion ist gerade; $f(t) = A |\sin \omega t|$ für $0 \leq t \leq T$;

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A \sin \omega t dt = -\frac{4A}{T\omega} \left| \cos \omega t \right|_0^{T/2} = \frac{4A}{\pi};$$

$$a_k = \frac{4A}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t \cos k\omega t dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4A}{T} \left(-\frac{1}{2} \left| \frac{\cos(1+k)\omega t}{(1+k)\omega} + \frac{\cos(1-k)\omega t}{(1-k)\omega} \right|_0^{T/2} \right) = \\ &= -\frac{A}{\pi} \left[\frac{\cos(1+k)\pi}{1+k} + \frac{\cos(1-k)\pi}{1-k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+k} - \frac{1}{1-k} \right]; \end{aligned}$$

für alle ungeraden k wird $a_k = 0$, für alle geraden k wird $a_k = \frac{4A}{\pi(1-k^2)}$;

$$s_n(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

4.36. Die Funktion ist ungerade; $f(t) = A \cos \frac{\omega t}{2}$

für $0 \leq t \leq T$;

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} A \cos \frac{\omega t}{2} \sin k\omega t dt =$$

$$= \frac{4A}{T} \left(-\frac{1}{2} \left| \frac{\cos(k+1/2)\omega t}{(k+1/2)\omega} \right. \right. +$$

$$\left. \left. + \frac{\cos(k-1/2)\omega t}{(k-1/2)\omega} \right|_0^{T/2} \right) =$$

$$= -\frac{A}{\pi} \left[\frac{\cos(k+1/2)\pi}{k+1/2} + \frac{\cos(k-1/2)\pi}{k-1/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2k}{k^2 - 1/4} \right] = \frac{2kA}{\pi(k^2 - 1/4)}$$

$$s_n(t) = \frac{8A}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1 \cdot 3} + \frac{2 \sin 2\omega t}{3 \cdot 5} + \frac{3 \sin 3\omega t}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

4.37. Die Funktion ist ungerade; $f(t) = A \sin 2\omega t$ für $0 \leq t \leq T/4$;

$$b_k = \frac{4A}{T} \int_0^{T/4} \sin 2\omega t \sin k\omega t dt =$$

$$= \frac{4A}{2\omega T} \left| \frac{\sin(2-k)\omega t}{2-k} - \frac{\sin(2+k)\omega t}{2+k} \right|_0^{T/4} =$$

$$= \frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin(2-k)\pi/2}{2-k} - \frac{\sin(2+k)\pi/2}{2+k} \right];$$

für $k = 2$ wird

$$b_2 = \frac{4A}{T} \frac{1}{8\omega} \left| 4\omega t - \sin 4\omega t \right|_0^{T/4} = \frac{A}{2};$$

für die übrigen geradzahligen k ist $b_k = 0$.

$$b_1 = \frac{4A}{3\pi}; \quad b_2 = \frac{A}{2}; \quad b_3 = \frac{4A}{5\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{3} + \frac{\pi \sin 2\omega t}{8} + \frac{\sin 3\omega t}{5} - \frac{\sin 5\omega t}{21} + \dots \right)$$

4.38. Die Funktion ist gerade; $f(t) = A \cos 2\omega t$ für $0 \leq t \leq T/2$, $f(t) = -A \cos 2\omega t$ für $3T/8 \leq t \leq T/2$

$$a_0 = \frac{4A}{T} \left(\int_0^{T/8} \cos 2\omega t dt - \int_{3T/8}^{T/2} \cos 2\omega t dt \right) =$$

$$= \frac{4A}{2T} \left(\left| \sin 2\omega t \right|_0^{T/8} - \left| \sin 2\omega t \right|_{3T/8}^{T/2} \right) =$$

$$= \frac{A}{\pi} (\sin \pi/2 - \sin 2\pi + \sin 3\pi/2) = 0;$$

$$a_k = \frac{4A}{T} \left(\int_0^{T/8} \cos 2\omega t \cos k\omega t dt - \right.$$

$$\left. - \int_{3T/8}^{T/2} \cos 2\omega t \cos k\omega t dt \right) =$$

$$= \frac{4A}{2\omega T} \left[\left| \frac{\sin (2+k)\omega t}{2+k} + \frac{\sin (2-k)\omega t}{2-k} \right|_0^{T/8} - \right.$$

$$\left. - \left| \frac{\sin (2+k)\omega t}{2+k} + \frac{\sin (2-k)\omega t}{2-k} \right|_{3T/8}^{T/2} \right] =$$

$$= \frac{A}{\pi} \left[\frac{\sin (2+k)\pi/4}{2+k} + \frac{\sin (2-k)\pi/4}{2-k} + \frac{\sin (2+k)3\pi/4}{2+k} + \frac{\sin (2-k)3\pi/4}{2-k} \right];$$

für alle geraden k ist $a_k = 0$;

$$a_1 = \frac{A}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}/2}{3} + \frac{\sqrt{2}/2}{1} + \frac{\sqrt{2}/2}{3} + \frac{\sqrt{2}/2}{1} \right) =$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{3\pi};$$

$$a_3 = \frac{A}{\pi} \left(-\frac{\sqrt{2}/2}{5} + \sqrt{2}/2 - \frac{\sqrt{2}/2}{5} + \sqrt{2}/2 \right) =$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{5\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{4A\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\cos \omega t}{3} + \frac{\cos 3\omega t}{5} + \frac{\cos 5\omega t}{21} + \dots \right)$$

4.39. a) Die Funktion ist ungerade;

$$f(t) = -A \cos 2\omega t \text{ für } T/8 \leq t \leq 3T/8;$$

$$b_k = \frac{4A}{T} \int_{T/8}^{3T/8} -\cos 2\omega t \sin k\omega t dt =$$

$$= \frac{4A}{2\omega T} \left[\frac{\cos (k+2)\omega t}{k+2} + \frac{\cos (k-2)\omega t}{k-2} \right]_{T/8}^{3T/8} =$$

$$= \frac{A}{\pi} \left[\frac{\cos (k+2)3\pi/4}{k+2} + \frac{\cos (k-2)3\pi/4}{k-2} - \frac{\cos (k+2)\pi/4}{k+2} - \frac{\cos (k-2)\pi/4}{k-2} \right];$$

für gerade k ist $b_k = 0$;

$$b_2 = \frac{4A}{T} \frac{1}{8\omega} \left| \cos 2\omega t \right|_{T/8}^{3T/8} = 0;$$

$$b_1 = \frac{A}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}/2}{3} + \frac{\sqrt{2}/2}{1} + \frac{\sqrt{2}/2}{3} + \frac{\sqrt{2}/2}{1} \right) =$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{3\pi};$$

$$b_3 = \frac{A}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}/2}{5} - \frac{\sqrt{2}/2}{1} + \frac{\sqrt{2}/2}{5} - \frac{\sqrt{2}/2}{1} \right) =$$

$$= -\frac{4A\sqrt{2}}{5\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{4A\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{3} - \frac{\sin 3\omega t}{5} + \frac{\sin 5\omega t}{21} - \dots \right)$$

$$\text{b)} \quad s_n(t) = \frac{4A\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\cos (\omega t - \omega T/4)}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos (3\omega t - 3\omega T/4)}{5} + \dots \right]$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\cos (\omega t - \pi/2)}{3} + \frac{\cos (3\omega t - 3\pi/2)}{5} + \frac{\cos (5\omega t - 5\pi/2)}{21} + \dots \right]$$

$$= \frac{4A\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{3} - \frac{\sin 3\omega t}{5} + \frac{\sin 5\omega t}{21} - \dots \right)$$

$$4.40. \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A e^{-jk\omega t} dt;$$

$$c_k = -\frac{A}{jk\omega T} (e^{-jk\omega T/2} - 1) =$$

$$= -\frac{A}{2jk\pi} (e^{-jk\pi} - 1);$$

für $k = 0$ ist nach der L'HOSPITALSchen Regel

$$c_0 = \frac{A}{2}; \quad \text{für alle geraden } k \text{ ist der Klammerausdruck gleich 0; für alle ungeraden } k \text{ ist der Klammer-}$$

ausdruck gleich -2 ; indem man jeweils das (k)-te und ($-k$)-te Glied zusammenfaßt, folgt:

$$s_n(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} + \\ + \frac{2A}{3\pi} \frac{e^{j3\omega t} - e^{-j3\omega t}}{j2} + \dots;$$

mit $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ ergibt sich

$$s_n(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \dots \right)$$

$$4.41. c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} f(t) e^{-jk\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} e^{-jk\omega t} dt;$$

$$c_k = -\frac{A}{jk\omega T} (e^{-jk\omega T/4} - e^{jk\omega T/4}) =$$

$$= -\frac{A}{jk\pi} (e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2});$$

für $k = 0$ ist nach der L'HOSPITALSchen Regel

$c_0 = \frac{A}{2}$; für alle geraden k ist der Klammerausdruck gleich 0 ; für ungerade Werte von k ergibt der Klammerausdruck:

| k | $e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}$ |
|-----|------------------------------|
| +1 | -j2 |
| -1 | +j2 |
| +3 | +j2 |
| -3 | -j2 |
| +5 | -j2 |
| -5 | +j2 |

$$s_n(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} - \\ - \frac{2A}{3\pi} \frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2} + \dots$$

$$s_n(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left(\cos \omega t - \frac{\cos 3\omega t}{3} + \right. \\ \left. + \frac{\cos 5\omega t}{5} - \dots \right)$$

$$4.42. c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/8}^{+T/8} f(t) e^{-jk\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{T} \int_{-T/8}^{+T/8} e^{-jk\omega t} dt = \frac{-A}{jk\omega} (e^{-jk\omega T/8} - e^{jk\omega T/8});$$

$$c_k = \frac{-A}{2jk\pi} (e^{-jk\pi/4} - e^{jk\pi/4});$$

für $k = 0$ ist nach der L'HOSPITALSchen Regel $c_0 = \frac{A}{4}$; für alle geraden k ist der Klammerausdruck gleich 0 ; für alle ungeraden k ist der Klammerausdruck:

| k | $e^{-jk\pi/4} - e^{jk\pi/4}$ |
|-----|------------------------------|
| +1 | -j $\sqrt{2}$ |
| -1 | +j $\sqrt{2}$ |
| +3 | -j $\sqrt{2}$ |
| -3 | +j $\sqrt{2}$ |
| +5 | +j $\sqrt{2}$ |
| -5 | -j $\sqrt{2}$ |

$$s_n(t) = \frac{A}{4} + \frac{A\sqrt{2}}{\pi} \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} +$$

$$+ \frac{A\sqrt{2}}{3\pi} \frac{e^{j3\omega t} + e^{-j3\omega t}}{2} -$$

$$- \frac{A\sqrt{2}}{5\pi} \frac{e^{j5\omega t} + e^{-j5\omega t}}{2} + \dots$$

$$s_n(t) = \frac{A}{4} + \frac{A\sqrt{2}}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3} - \frac{\cos 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

$$4.43. c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt; \text{ wegen } \frac{f(t)}{t} = \frac{A}{T/2}$$

ist $c_k = \frac{2A}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} t e^{-jk\omega t} dt$; die Methode der partiellen Integration liefert

$$c_k = \frac{2A}{T^2} \left[e^{-jk\omega t} \left(\frac{1}{k^2\omega^2} - \frac{t}{jk\omega} \right) \right]_{-T/2}^{+T/2} =$$

$$= \frac{2A}{T^2} \left[e^{-jk\omega T/2} \left(\frac{1}{k^2\omega^2} - \frac{T/2}{jk\omega} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{jk\omega T/2} \left(\frac{1}{k^2\omega^2} + \frac{T/2}{jk\omega} \right) \right];$$

für $k = 0$ ergibt die L'HOSPITALSche Regel $c_0 = 0$;

$$c_{+1} = \frac{2A}{T^2} \left[e^{-j\pi} \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{T/2}{j\omega} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{j\pi} \left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{T/2}{j\omega} \right) \right] = \frac{A}{j\pi};$$

$$c_{-1} = -\frac{A}{j\pi}; \quad c_0 = -\frac{A}{j2\pi}; \quad c_{-2} = \frac{A}{j2\pi};$$

$$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} -$$

$$-\frac{A}{\pi} \frac{e^{j2\omega t} - e^{-j2\omega t}}{j2} + \dots$$

$$s_n(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \dots \right)$$

$$\begin{aligned} 4.44. \quad c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} f(t) e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{+T/4} \cos \omega t e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{2T} \int_{-T/4}^{+T/4} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \frac{A}{2T} \int_{-T/4}^{+T/4} (e^{j\omega t(1-k)} + e^{-j\omega t(1+k)}) dt = \\ &= \frac{A}{2T} \left[\frac{T}{j2\pi(1-k)} e^{j(1-k)\pi/2} - \right. \\ &\quad - \frac{T}{j2\pi(1+k)} e^{-j(1+k)\pi/2} - \\ &\quad - \frac{T}{j2\pi(1-k)} e^{-j(1-k)\pi/2} + \\ &\quad \left. + \frac{T}{j2\pi(1+k)} e^{j(1+k)\pi/2} \right]; \end{aligned}$$

für $k = 0$ ist $c_0 = \frac{A}{\pi}$; für $k = +1$ und $k = -1$

führt die L'HOSPITALSche Regel auf $c_{\pm 1} = \frac{A}{4}$, im weiteren folgen:

| k | c_k |
|---------|-----------------------------|
| ± 2 | $\frac{A(1 - 1/3)}{2\pi}$ |
| ± 3 | 0 |
| ± 4 | $\frac{A(1/5 - 1/3)}{2\pi}$ |

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2} + \\ &+ \frac{2A}{3\pi} \frac{e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t}}{2} - \\ &- \frac{2A}{15\pi} \frac{e^{j4\omega t} + e^{-j4\omega t}}{2} + \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{A}{\pi} + \frac{A}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \cos \omega t + \frac{2}{3} \cos 2\omega t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{15} \cos 4\omega t + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.45. \quad c_k &= \frac{1}{T} \left(\int_{T/4}^{T/2} A e^{-jk\omega t} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{T/2}^{3T/4} 2A e^{-jk\omega t} dt \right) = \\ &= -\frac{A}{jk\omega T} (e^{-jk\omega T/2} - e^{-jk\omega T/4} + \\ &\quad + 2e^{-jk\omega 3T/4} - 2e^{-jk\omega T/2}); \end{aligned}$$

nach L'HOSPITAL: $c_0 = \frac{3A}{4}$;

$$c_k = -\frac{A}{jk 2\pi} (e^{-jk\pi} - e^{-jk\pi/2} + 2e^{-jk3\pi/2} - 2e^{-jk\pi})$$

$$c_1 = -\frac{A}{j2\pi} (1 + j3); \quad c_{-1} = \frac{A}{j2\pi} (1 - j3);$$

$$c_2 = -\frac{A}{j4\pi} (-2); \quad c_{-2} = \frac{A}{j4\pi} (-2);$$

$$c_3 = -\frac{A}{j6\pi} (1 - j3); \quad c_{-3} = \frac{A}{j6\pi} (1 + j3);$$

$$c_4 = 0; \quad c_{-4} = 0;$$

$$c_5 = -\frac{A}{j10\pi} (1 + j3); \quad c_{-5} = \frac{A}{j10\pi} (1 - j3);$$

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{3A}{8} - \frac{A}{j2\pi} \left[(1 + j3) e^{j\omega t} - (1 - j3) e^{-j\omega t} - \right. \\ &\quad \left. - e^{j2\omega t} + e^{-j2\omega t} + \frac{1}{3} (1 - j3) e^{j3\omega t} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} (1 + j3) e^{-j3\omega t} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{3A}{8} - \frac{A}{\pi} \left(\sin \omega t + 3 \cos \omega t - \sin 2\omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \cos 3\omega t + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \frac{3 \cos 5\omega t}{5} - + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.46. \quad F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{-T/2} 0 \cdot e^{-j\omega t} dt + A \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j\omega t} dt + \\ &\quad + \int_{T/2}^{+\infty} 0 \cdot e^{-j\omega t} dt; \end{aligned}$$

$$F(\omega) = \frac{A}{-\text{j}\omega} (\text{e}^{-\text{j}\omega T/2} - \text{e}^{\text{j}\omega T/2}) =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \frac{\text{e}^{\text{j}\omega T/2} - \text{e}^{-\text{j}\omega T/2}}{\text{j}2};$$

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2}; \text{ mit } A = 1/2 \text{ und } T/2 = 1 \text{ erhält}$$

gibt sich die Wertetabelle:

| ω | $\sin \omega$ | $F(\omega)$ |
|----------|---------------|----------------|
| 0 | 0 | 1 (L'HOSPITAL) |
| $\pi/4$ | 0,707 | 0,90 |
| $\pi/2$ | 1,0 | 0,64 |
| $3\pi/4$ | 0,707 | 0,30 |
| π | 0 | 0 |

und die vereinfachte Funktion $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$ (Bild L 92).

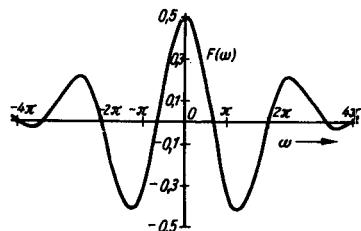


Bild L 93. Aufgabe 4.47

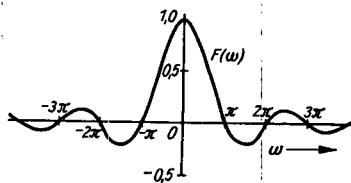


Bild L 92. Aufgabe 4.46

$$4.47. F(\omega) = A \int_{-T/2}^{-T/4} \text{e}^{-\text{j}\omega t} dt + A \int_{T/4}^{T/2} \text{e}^{-\text{j}\omega t} dt;$$

$$F(\omega) = \frac{A}{-\text{j}\omega} (\text{e}^{\text{j}\omega T/4} - \text{e}^{\text{j}\omega T/2} + \text{e}^{-\text{j}\omega T/2} - \text{e}^{-\text{j}\omega T/4});$$

$$F(\omega) = \frac{2A}{\omega} \left(\sin \frac{\omega T}{2} - \sin \frac{\omega T}{4} \right)$$

Mit $A = 1/2$ und $T/2 = 1$ ergibt sich die Wertetabelle:

| ω | $\sin \omega$ | $\sin \omega/2$ | $F(\omega)$ |
|----------|---------------|-----------------|------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0,5 (L'HOSPITAL) |
| $\pi/2$ | 1 | 0,707 | 0,186 |
| π | 0 | 1,0 | -0,318 |
| $5\pi/4$ | -0,707 | 0,924 | -0,416 |
| $3\pi/2$ | -1 | 0,707 | -0,361 |

sowie die vereinfachte Funktion $F(\omega) = \frac{\sin \omega - \sin \omega/2}{\omega}$ (Bild L 93)

$$4.48. F(\omega) = \frac{A}{2} \int_{-T/2}^{-T/4} \text{e}^{-\text{j}\omega t} dt + A \int_{-T/4}^{T/4} \text{e}^{-\text{j}\omega t} dt + \frac{A}{2} \int_{T/4}^{T/2} \text{e}^{-\text{j}\omega t} dt;$$

$$F(\omega) = \frac{A}{-\text{j}2\omega} (\text{e}^{\text{j}\omega T/4} - \text{e}^{\text{j}\omega T/2}) - \frac{A}{\text{j}\omega} (\text{e}^{-\text{j}\omega T/4} - \text{e}^{\text{j}\omega T/4}) + \frac{A}{-\text{j}2\omega} (\text{e}^{-\text{j}\omega T/2} - \text{e}^{-\text{j}\omega T/4}) =$$

$$= \frac{-A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{4} + \frac{A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} + \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{4}; \quad F(\omega) = \frac{A}{\omega} (\sin \omega T/4 + \sin \omega T/2);$$

mit $A = 1$ und $T/2 = 1$ ergibt sich die Wertetabelle:

| ω | $\sin \omega/2$ | $\sin \omega$ | $\sin \omega/2 + \sin \omega$ | $F(\omega)$ |
|----------|-----------------|---------------|-------------------------------|-------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1,5 |
| $\pi/2$ | 0,707 | 1 | 1,707 | 1,09 |
| π | 1,0 | 0 | 1,0 | 0,318 |
| $3\pi/2$ | 0,707 | -1 | -0,293 | -0,062 |
| 2π | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $5\pi/2$ | -0,707 | 1 | +0,293 | +0,037 |
| 3π | -1,0 | 0 | -1,0 | -0,106 |

sowie die vereinfachte Funktion

$$F(\omega) = \frac{\sin \omega/2 + \sin \omega}{\omega} \quad (\text{Bild L 94})$$

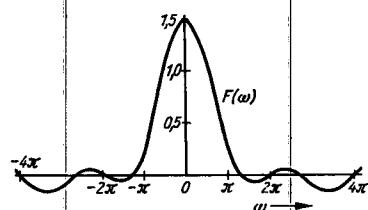


Bild L 94. Aufgabe 4.48

$$\begin{aligned} 4.49. \quad & F(\omega) = A \int_{-T/2}^0 \frac{T/2+t}{T/2} e^{-j\omega t} dt + \\ & + A \int_0^{T/2} \frac{T/2-t}{T/2} e^{-j\omega t} dt = \\ & = A \int_{-T/2}^0 e^{-j\omega t} dt + A \int_0^{T/2} e^{-j\omega t} dt + \\ & + \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^0 t e^{-j\omega t} dt - \frac{2A}{T} \int_0^{T/2} t e^{-j\omega t} dt; \end{aligned}$$

nach der Methode der partiellen Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) + \\ & + \frac{4A}{T\omega^2} + \frac{jA}{\omega} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) - \\ & - \frac{2A}{T\omega^2} (e^{-j\omega T/2} + e^{j\omega T/2}) = \frac{4A}{T\omega^2} (1 - \cos \omega T/2) \end{aligned}$$

Mit $A = 1/2$ und $T/2 = 1$ ergibt sich die Wertetabelle:

| ω | $\cos \omega$ | $1 - \cos \omega$ | $F(\omega)$ |
|----------|---------------|-------------------|------------------|
| 0 | 1,0 | 0 | 0,5 (L'HOSPITAL) |
| $\pi/4$ | 0,707 | 0,293 | 0,475 |
| $\pi/2$ | 0 | 1,0 | 0,406 |
| $3\pi/4$ | -0,707 | 1,707 | 0,303 |
| π | -1,0 | 2,0 | 0,203 |

und die vereinfachte Funktion

$$F(\omega) = \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \quad (\text{Bild L 95})$$

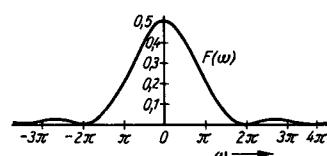


Bild L 95. Aufgabe 4.49

$$4.50. \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 - j\omega t} dt;$$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi}} e^{\frac{-\omega^2}{4\pi}} = e^{\frac{-(2\pi f)^2}{4\pi}} = e^{-\pi f^2};$$

d.h., die gegebene Funktion hat die gleiche Form wie ihr eigenes Frequenzspektrum.

$$4.51. \quad F(\omega) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \frac{1}{\delta} e^{-j\omega t} dt = \left| \frac{-e^{-j\omega \delta/2}}{j\delta\omega} \right|_{-\delta/2}^{\delta/2} =$$

$$= \frac{2}{\delta\omega} \frac{e^{j\omega\delta/2} - e^{-j\omega\delta/2}}{j2} =$$

$$= \frac{2 \sin \omega\delta/2}{\delta\omega}; \text{ für } \delta \rightarrow 0 \text{ gilt}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \omega\delta/2}{\delta\omega} =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2\omega/2 \cos \omega\delta/2}{\omega} \text{ (L'HOSPITAL)} = 1 \quad (\text{Bild L 96}).$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß im Spektrum sämtliche Frequenzen von $-\infty$ bis $+\infty$ mit konstanter Amplitude vorliegen. Ein derartiges unendlich breites Spektrum wird „weißes Spektrum“ (weißes Rauschen) genannt.

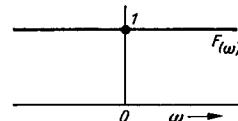


Bild L 96. Aufgabe 4.51

5. Laplace-Transformation

$$5.1. F(p) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt} dt = \left| \frac{1}{-p} e^{-pt} \right|_0^\infty = -\frac{1}{p} (-1) = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

$$5.2. F(p) = \int_0^\delta \frac{1}{\delta} e^{-pt} dt = \frac{1}{\delta} \left| \frac{-e^{-pt}}{p} \right|_0^\delta = \frac{-e^{-p\delta} + 1}{\delta p};$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F(p) = \frac{p e^{-p\delta}}{p} = 1 \text{ (Regel von L'HOSPITAL)}$$

5.3. $F(p) = \int_0^\infty t e^{-pt} dt$; nach der partiellen Integration $\int u dv = uv - \int v du$ setzt man $u = t$ und $dv = e^{-pt} dt$, wonach $du = 1 \cdot dt$ und $v = -\frac{1}{p} e^{-pt}$ ist;

$$F(p) = \left| -\frac{t}{p} e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right|_0^\infty = -0 + \frac{1}{p^2} = \underline{\underline{\frac{1}{p^2}}}$$

5.4. $F(p) = \int_0^\infty t^2 e^{-pt} dt$; nach der partiellen Integration $\int u dv = uv - \int v du$ setzt man $u = t^2$, $dv = e^{-pt} dt$, $du = 2t dt$ und $v = \frac{e^{-pt}}{-p}$ und erhält

$$F(p) = \left| \frac{t^2}{-p} e^{-pt} \right|_0^\infty + 2 \int_0^\infty \frac{t e^{-pt}}{p} dt =$$

$$= \left| -\frac{t^2}{p} e^{-pt} \right|_0^\infty + \frac{2}{pp^2} \text{ (s. Aufgabe 5.3)}$$

$$F(p) = \underline{\underline{\frac{2}{p^3}}}$$

5.5. Analog zu Aufgabe 5.4 und unter Benutzung der Ergebnisse von Aufgabe 5.3 und 5.4 ergibt sich

$$F(p) = \underline{\underline{\frac{3!}{p^4}}}$$

5.6. In Verallgemeinerung von Aufgabe 5.5 ergibt sich $F(p) = \underline{\underline{\frac{n!}{p^{n+1}}}}$

$$5.7. F(p) = 3 \int_0^\infty (t^2 - 6t + 9) e^{-pt} dt = \\ = 3 \left(\frac{2}{p^3} - \frac{6}{p^2} + \frac{9}{p} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{p^3}(2 - 6p + 9p^2)}}$$

$$5.8. f(t) = 4t; F(p) = \underline{\underline{\frac{4}{p^2}}}$$

$$5.9. F(p) = \underline{\underline{\frac{2}{p^3}(1 + 12p - 3p^2)}}$$

$$5.10. F(p) = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = \\ = \left| \frac{1}{-(p-a)} e^{-(p-a)t} \right|_0^\infty = \underline{\underline{\frac{1}{p-a}}}$$

Da die Konstante a in Aufgabe 5.10 jeden beliebigen positiven, negativen oder komplexen Wert annehmen kann, können die Ergebnisse der folgenden Aufgaben 5.11 bis 5.23 durch entsprechende Substitution gefunden werden.

$$5.11. F(p) = \underline{\underline{\frac{1}{p-j\omega}}}$$

$$5.12. F(p) = \underline{\underline{\frac{1}{p-a-j\omega}}}$$

$$5.13. F(p) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-3} = \underline{\underline{\frac{p-6}{p(p-3)}}}$$

$$5.14. F(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{8}{p^3} - \frac{2}{p-3} = \\ = \underline{\underline{-\frac{10p+24}{p^3(p-3)}}}$$

5.15. $F(p) = \int_0^\infty t e^{-(p-a)t} dt$; unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 5.3 und 5.10 ergibt sich

$$F(p) = \left| -\frac{t e^{-(p-a)t}}{p-a} \right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} dt = \\ = \left| -\frac{t e^{-(p-a)t}}{p-a} + \frac{e^{-(p-a)t}}{(p-a)^2} \right|_0^\infty = \underline{\underline{\frac{1}{(p-a)^2}}}$$

$$5.16. f(t) = \frac{1}{a^2} (1 + at e^{at} - e^{at});$$

$$F(p) = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{p} + \frac{a}{(p-a)^2} - \frac{1}{p-a} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{p(p-a)^2}}}$$

$$5.17. F(p) = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{p + j\omega} = \underline{\frac{1}{\omega(jp - \omega)}}$$

$$5.18. F(p) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-(1/a+pt)} dt = \underline{\frac{1}{1+ap}}$$

$$5.19. F(p) = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} \right) = \underline{\frac{1}{p(p-a)}}$$

$$5.20. F(p) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{a}{p^2} - \frac{1}{p} \right) = \underline{\frac{1}{p^2(p-a)}}$$

$$5.21. F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1/a} = \underline{\frac{1}{p(ap+1)}}$$

$$5.22. F(p) = \frac{a}{p+1/a} + \frac{1}{p^2} - \frac{a}{p} = \underline{\frac{1}{p^2(ap+1)}}$$

$$5.23. F(p) = \frac{1}{ab} \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{a-b} \left(\frac{b}{p-a} - \frac{a}{p-b} \right) \right] = \\ = \underline{\frac{1}{p(p-a)(p-b)}}$$

$$5.24. F(p) = \frac{1}{j2} \int_0^\infty (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{j2} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \underline{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

$$5.25. F(p) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) = \underline{\frac{p}{p^2 + \omega^2}}$$

5.26.

$$F(p) = \frac{A}{j2} \int_0^\infty (e^{-(a+p-j\omega)t} - e^{-(a+p+j\omega)t}) dt =$$

$$= \frac{A}{j2} \left(\frac{1}{p+a-j\omega} - \frac{1}{p+a+j\omega} \right) =$$

$$= \underline{\frac{A}{(p+a)^2 + \omega^2}}$$

5.27.

$$F(p) = \frac{A}{2} (e^{-(a+p-j\omega)t} + e^{-(a+p+j\omega)t}) dt =$$

$$= \frac{A}{2} \left(\frac{1}{p+a-j\omega} + \frac{1}{p+a+j\omega} \right) =$$

$$= \underline{\frac{A(p+a)}{(p+a)^2 + \omega^2}}$$

$$5.28. F(p) = \int_0^\infty \sin(\omega t + \varphi) e^{-pt} dt =$$

$$= \int_0^\infty (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) e^{-pt} dt = \\ = \int_0^\infty \left(\cos \varphi \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2} + \sin \varphi \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) e^{-pt} dt = \\ = \frac{1}{2} \left[\cos \varphi \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) + \sin \varphi \left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right) \right] = \underline{\frac{\omega \cos \varphi + p \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}}$$

$$5.29. F(p) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega} \right) = \underline{\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}}$$

$$5.30. F(p) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) e^{-pt} dt = \underline{\frac{p}{p^2 - \omega^2}}$$

Verschiebungssatz:

$$5.31. F(p) = \underline{\frac{e^{-3p}}{p^3}}$$

$$5.32. F(p) = \underline{\frac{e^{-ap}}{p^4}}$$

$$5.33. F(p) = \underline{\frac{e^{-Tp/4}}{p^2 + \omega^2}}$$

$$5.34. F(p) = \underline{\frac{e^{-ap}}{p-1}}$$

$$5.35. f(t) = e^{a(t-b/a)}; F(p) = \underline{\frac{e^{-bp/a}}{p-a}}$$

Ahnlichkeitssatz:

$$5.36. F(p) = \underline{\frac{2}{2p+1}}$$

$$5.37. F(p) = \underline{\frac{3}{p-1/3}} = \underline{\frac{9}{3p-1}}$$

$$5.38. F(p) = \underline{\frac{1}{a(p+1/a)}} = \underline{\frac{1}{ap+1}}$$

$$5.39. F(p) = \underline{\frac{2\omega}{(2p)^2 + \omega^2}}$$

Dämpfungssatz:

$$5.40. F(p) = \underline{\frac{5(5p+1)}{(1+5p)^2 + \omega^2}}$$

$$5.41. F(p) = \underline{\frac{16p}{(16p^2 + \omega^2)^2}}$$

$$5.42. F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$5.43. F(p) = \frac{2}{(p+1)^2}$$

$$5.44. F(p) = \frac{1}{p+3-j\omega}$$

$$5.45. F(p) = \frac{p+2}{p(p+4)}$$

$$5.46. f'(t) \circ \bullet p \frac{1}{p^2} - 0 = \frac{1}{p}$$

$$5.47. f''(t) \circ \bullet \frac{3!}{p^3}$$

$$5.48. f'(t) \circ \bullet p \frac{p}{p+a} - 1 = \frac{-a}{p+a}$$

$$5.49. f'(t) \circ \bullet \frac{p}{(p-a)^2}$$

$$5.50. f''(t) \circ \bullet \frac{p}{a(p+1/a)} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a(ap+1)};$$

$$f'''(t) \circ \bullet \frac{p^2}{ap+1} - \frac{p}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2(ap+1)}$$

$$5.51. f'(t) \circ \bullet \frac{p\omega}{p^2+\omega^2};$$

$$f''(t) \circ \bullet \frac{p^2\omega}{p^2+\omega^2} - p \cdot 0 - \omega \cos 0 = -\frac{\omega^3}{p^2+\omega^2}$$

$$5.52. f'(t) \circ \bullet -\frac{\omega^2}{p^2+\omega^2};$$

$$f''(t) \circ \bullet \frac{p^3}{p^2+\omega^2} - p + \omega \sin 0 = -\frac{p\omega^3}{p^2+\omega^2}$$

$$5.53. f'(t) \circ \bullet \frac{p}{p^2-\omega^2};$$

$$f''(t) \circ \bullet \frac{p^2}{p^2-\omega^2} - 0 - \frac{\omega \cosh 0}{\omega} = \frac{\omega^2}{p^2-\omega^2}$$

$$5.54. f'(t) \circ \bullet \frac{A\omega p}{(p+a)^2 + \omega^2};$$

$$f''(t) \circ \bullet \frac{-A\omega(a^2 + 2ap + \omega^2)}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$5.55. \int t dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} [\int t dt]_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0} = \frac{1}{p^3}$$

$$5.56. \int t^3 dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{3!}{p^4} + \frac{1}{p} \left[\frac{t^4}{4} \right]_{t=0} = \frac{3!}{p^5}$$

$$5.57. \int e^{at} dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{1}{p+a} + \frac{1}{p} [\int e^{at} dt]_{t=0} = \\ = \frac{1}{p(p-a)} + \frac{1}{ap} = \frac{1}{a(p-a)}$$

$$5.58. \int a e^{-t/a} dt \circ \bullet \frac{a}{p} \frac{1}{p+1/a} + \\ + \frac{a}{p} [-a e^{-t/a}]_{t=0} = \\ = \frac{a^2}{p(ap+1)} - \frac{a^2}{p} = -\frac{a^3}{ap+1}$$

$$5.59. \int t e^{at} dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{1}{(p-a)^2} + \\ + \frac{1}{p} [\int t e^{at} dt]_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{p(p-a)^2} - \frac{1}{pa^2} = \frac{2a-p}{a^2(p-a)^2}$$

$$5.60. \int \sin \omega t dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \\ + \frac{1}{p} [\int \sin \omega t dt]_{t=0} = \\ = \frac{\omega}{p(p^2 + \omega^2)} - \frac{1}{p\omega} = \frac{p}{\omega(p^2 + \omega^2)}$$

$$5.61. \int A e^{-at} \cos \omega t dt \circ \bullet \frac{A(p+a)}{p[(p+a)^2 + \omega^2]} + \\ + \frac{A}{p} \left[\frac{e^{-at}(-a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)}{a^2 + \omega^2} \right]_{t=0} = \\ = \frac{A(\omega^2 - 2a^2 - pa)}{[(p+a)^2 + \omega^2](a^2 + \omega^2)}$$

$$5.62. \int 3 \sinh 3t dt \circ \bullet \frac{1}{p} \frac{9}{p^2 - 9} + \frac{1}{p} = \frac{p}{p^2 - 9}$$

$$5.63. F(p) = \frac{3 \cdot 2!}{p^3} + \frac{4 \cdot 1}{p^2} + \frac{3 \cdot 1}{p} \bullet \circ \\ \bullet \circ \underline{3t^2 + 4t + 3}$$

$$5.64. F(p) = \frac{3!}{p^4} - \frac{2!}{2p^3} \bullet \circ \underline{t^3 - t^2/2}$$

$$5.65. F(p) = \frac{5!}{5! p^6} - \frac{3 \cdot 2}{3p^4} + \frac{1}{p^2} \bullet \circ \\ \bullet \circ \underline{t^5/120 - t^3/3 + t}$$

$$5.66. F(p) = \frac{(n-2)! (n-1)!}{(n-2)! p^n} = \\ = \frac{(n-1)!}{(n-2)! p^n} \bullet \circ \frac{t^{n-1}}{(n-2)!}$$

$$5.67. F(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{6}{p^3} \bullet \circ t - 3t^2$$

$$5.68. F(p) = \frac{12 \cdot 5!}{120 p^6} + \frac{12 \cdot 3!}{6 p^4} \bullet \circ 0,1t^5 + 2t^3$$

$$5.69. F(p) = \frac{3}{p-3} \bullet \circ 3e^{3t}$$

$$5.70. F(p) = \frac{1}{p+j\omega} \bullet \circ e^{-j\omega t}$$

$$5.71. F(p) = \frac{\omega}{p-1/\omega} \bullet \circ \omega e^{t/\omega}$$

$$5.72. F(p) = \frac{1}{p-1/4} \bullet \circ e^{t/4}$$

$$5.73. F(p) = \frac{5}{3(5p+1)} =$$

$$= \frac{5}{15(p+1/5)} \bullet \circ \frac{e^{-t/5}}{3}$$

$$5.74. F(p) = \frac{2p}{p^2 - \omega^2} \bullet \circ 2 \cosh \omega t$$

oder auch $F(p) \bullet \circ (e^{-\omega t} + e^{\omega t}) = 2 \cosh \omega t$

$$5.75. F(p) = \frac{-1}{(p-1)^2} \bullet \circ -t e^t$$

$$5.76. F(p) \bullet \circ \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \cos \omega t$$

$$5.77. F(p) \bullet \circ e^{-t/RC}$$

$$5.78. F(p) = \frac{E}{R} \frac{1}{p+1/RC} \bullet \circ \frac{E}{R} e^{-t/RC}$$

$$5.79. F(p) = \frac{0,1 \cdot 10}{p^2 + 10^2} \bullet \circ 0,1 \sin 10t$$

$$5.80. F(p) \bullet \circ 4 \cos 8t$$

$$5.81. F(p) \bullet \circ \frac{\omega-1}{\omega} \sin \omega t$$

$$5.82. F(p) = \frac{5p}{p^2 + 2,25} \bullet \circ 5 \cos 1,5t$$

$$5.83. F(p) = \omega/a \frac{\omega/a}{p^2 - (\omega/a)^2} \bullet \circ \omega/a \sinh \omega t/a$$

$$5.84. F(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \bullet \circ \sin \omega t$$

$$5.85. F(p) = \frac{2}{(p+2)^2 + 2^2} \bullet \circ e^{-2t} \sin 2t$$

$$5.86. F(p) = \frac{3 \cdot 5}{(p+1)^2 + 25} \bullet \circ 3e^{-t} \sin 5t$$

$$5.87. F(p) = \frac{3(p+4)}{(p+4)^2 + 9} \bullet \circ 3e^{-4t} \cos 3t$$

$$5.88. F(p) = \frac{0,1p}{p^2 + (0,1\omega)^2} \bullet \circ 0,1 \cos 0,1\omega t$$

5.89. $F(p) = \frac{-3}{p(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-3}$; der Zähler von $F(p)$ ist $A(p-3) + Bp = -3$; Vergleich der Koeffizienten von p ergibt $A + B = 0$ und $-3A = -3$; hieraus folgen $A = 1$ und $B = -1$;

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p-3} \bullet \circ 1 - e^{3t}$$

5.90. $F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+4}$; der Zähler von $F(p)$ ist $A(p+4) + B(p-1) = 5p$; Koeffizientenvergleich ergibt $A + B = 5$ und $4A - B = 0$; hieraus folgen $A = 1$ und $B = 4$;

$$F(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{4}{p+4} \bullet \circ e^t + 4e^{-4t}$$

5.91. $F(p) = \frac{2p+1}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1}$; der Zähler von $F(p)$ ist $Ap + A + Bp = 2p + 1$; Vergleich der Koeffizienten von p ergibt $A + B = 2$ und $A = 1$; somit ist $A = 1$ und $B = 1$;

$$F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \bullet \circ 1 + e^{-t}$$

$$5.92. F(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \\ + \frac{1}{p+3} \bullet \circ e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t}$$

5.93. $F(p) = \frac{A}{p+a} + \frac{B}{p+b}$; der Zähler ist $Ap + Ab + Bp + Ba = 1$; Koeffizientenvergleich ergibt $A + B = 0$ und $Ab + Ba = 1$ sowie

$$A = \frac{1}{b-a} \text{ und } B = -\frac{1}{b-a};$$

$$F(p) = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{p+b} - \frac{1}{p+a} \right) \bullet \circ \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b}$$

5.94. $F(p) = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p+3}$; der Zähler ist $A(p+3) + B(p+2) = p+6$; Koeffizientenvergleich ergibt $A = 4$ und $B = -3$, so daß

$$F(p) = \frac{4}{p+2} - \frac{3}{p+3} \bullet \circ 4e^{-2t} - 3e^{-3t}$$

5.95. $F(p) = \frac{A}{p-4} + \frac{B}{p-1}$; der Zähler ist
 $A(p-1) + B(p-4) = 3p + 3$, Koeffizientenvergleich ergibt $A = 5$ und $B = -2$, so daß

$$F(p) = \frac{5}{p-4} - \frac{2}{p-1} \bullet\circ \underline{5e^{4t} - 2e^t}$$

5.96. $F(p) = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{(p+3)^2}$; der Zähler von $F(p)$ ist $A(p+3) + B = p+4$; hieraus folgen $A = B = 1$, so daß

$$F(p) = \frac{1}{p+3} + \frac{1}{(p+3)^2} \bullet\circ \underline{e^{-3t}(1+t)}$$

5.97. $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-2}$; der Zähler ist

$Ap^2 - 2Ap + Bp - 2B + Cp^2 = p^3 + p + 1$;
 Koeffizientenvergleich ergibt $A = -0,75$, $B = -0,5$, $C = 1,75$;

$$F(p) = \frac{-0,75}{p} - \frac{0,5}{p^2} + \frac{1,75}{p-2} \bullet\circ \underline{-0,75 - 0,5t + 1,75 e^{2t}}$$

5.98. $F(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-3}$; der Zähler ist
 $A(p-3) + Bp(p-3) + Cp^2 = 2p^2 + 6p - 6$;
 Koeffizientenvergleich ergibt $A = 2$, $B = -4/3$ und $C = 10/3$;

$$F(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{4}{3p} + \frac{10}{3(p-3)} \bullet\circ \underline{2t - 4/3 + 10/3e^{3t}}$$

5.99. $F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2}$;

$A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = -1/2$;

$$F(p) \bullet\circ \underline{1/4 - 1/4e^{-2t}(1+2t)}$$

5.100. $F(p) = \frac{p^2 - 3}{p(p+3)(p-3)} =$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p-3}; A = B = C = 1/3;$$

$$F(p) \bullet\circ \underline{1/3(1+2\cosh 3t)}$$

5.101. $F(p) = \frac{1}{p+a}$; $f_1(t) = e^{-at}$;

$f_1(t-\tau) = e^{-a(t-\tau)}$;

$F_2(p) = \frac{1}{p+b}$; $f_2(\tau) = e^{-b\tau}$;

$$\begin{aligned} F(p) \bullet\circ f(t) &= \int_0^t e^{-a(t-\tau)} e^{-b\tau} d\tau = \\ &= e^{-at} \int_0^t e^{(a-b)\tau} d\tau = \frac{e^{-at}}{a-b} [e^{(a-b)t} - 1] = \\ &= \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{a-b} \end{aligned}$$

5.102. $F_1(p) = \frac{1}{p+3}$; $f_1(t-\tau) = e^{-3(t-\tau)}$;

$$F_2(p) = \frac{1}{p^2}; f_2(\tau) = \tau;$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \tau d\tau = e^{-3t} \int_0^t \tau e^{3\tau} d\tau = \\ &= e^{-3t} \left| \frac{e^{3\tau}(3\tau-1)}{9} \right|_0^\tau = \frac{e^{-3t} + 3t - 1}{9} \end{aligned}$$

5.103. $F_1(p) = \frac{1}{p-1}$; $F_2(p) = \frac{1}{p^3}$;

$$f_1(t-\tau) = e^{t-\tau}; f_2(\tau) = \frac{\tau^2}{2};$$

$$f(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \tau^2/2 d\tau = \frac{e^t}{2} \left| e^{-\tau} \left(\frac{\tau^2}{-1} - \frac{2\tau}{1} + \frac{2}{-1} \right) \right|_0^t;$$

$$f(t) = \frac{2e^t - t^2 - 2t - 2}{2}$$

5.104. $F_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$; $f_1(t-\tau) = \cos \omega(t-\tau)$;

$$f_2(\tau) = \sin \omega \tau; f(t) = \int_0^t \cos \omega(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau;$$

mittels Additionstheorem und Abspaltung der als Konstanten zu behandelnden Faktoren $\cos \omega t$ und

$$\sin \omega t$$
 ergibt sich $f(t) = \frac{t \sin \omega t}{2}$

5.105. $F_1(p) = F_2(p) = \frac{1}{3p+1}$;

$$f_1(t-\tau) = \frac{1}{3} e^{-(t-\tau)/3};$$

$$f_2(\tau) = \frac{1}{9} \int_0^t e^{-t/3} e^{\tau/3} e^{-\tau/3} d\tau =$$

$$= \frac{1}{9} e^{-t/3} \int_0^t d\tau = \frac{te^{-t/3}}{9}$$

5.106. $F_1(p) = \frac{1}{p+a}$; $F_2(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$;

$f_1(t-\tau) = e^{-a(t-\tau)}$; $f_2(\tau) = \sin \omega t$;

$$f(t) = \int_0^t e^{-at} e^{a\tau} \sin \omega \tau \, d\tau =$$

$$= e^{-at} \left| \frac{e^{a\tau}}{a^2 + \omega^2} (a \sin \omega \tau - \omega \cos \omega \tau) \right|_0^t =$$

$$f(t) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} (a \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-at})$$

5.107. $F_1(p) = \frac{1}{ap+1}; F_2(p) = \frac{1}{p};$

$$f_1(t-\tau) = 1/a e^{-(t-\tau)/a}; \quad f_2(\tau) = 1;$$

$$f(t) = \frac{e^{-t/a}}{a} \int_0^t e^{\tau/a} \, d\tau = 1 - \frac{e^{-t/a}}{a}$$

5.108. $F_1(p) = \frac{1}{p}; F_2(p) = \frac{1}{(4p+1)^2};$

$$f_1(t-\tau) = 1; f_2(\tau) = \frac{1}{16} \tau e^{-\tau/4} \text{ (s. Aufgabe 5.105);}$$

$$f(t) = \frac{1}{16} \int_0^t \tau e^{-\tau/4} \, d\tau =$$

$$= \frac{1}{16} \left| 16e^{-\tau/4} \left(-\frac{\tau}{4} - 1 \right) \right|_0^t = 1 - \frac{4+t}{4} e^{-t/4}$$

5.109. $pF(p) - 3 + F(p) = 0;$

$$F(p)(p+1) - 3 = 0;$$

$$F(p) = \frac{3}{p+1}; F(p) \bullet \circ \underline{3e^{-t}}$$

5.110. $pF(p) - 0 + F(p) + \frac{5}{p} = 0;$

$$F(p) = \frac{-5}{p(p+1)} \bullet \circ \underline{5(e^{-t} - 1)}$$

5.111. $pF(p) - 2 - F(p) + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = 0;$

$$F(p) = \frac{2}{p-1} - \frac{1}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)};$$

$$F(p) \bullet \circ \underline{2e^t - (e^t - t - 1) - (e^t - 1)} = t + 2$$

5.112. $pF(p) - 1 + F(p) = \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p};$

$$F(p) = \frac{3}{p^2(p+1)} + \frac{3}{p(p+1)} +$$

$$+ \frac{1}{p+1} \bullet \circ \underline{e^{-t} + 3t}$$

5.113. $pF(p) - 2 - F(p) = \frac{8}{p} - \frac{7}{p^2};$

$$F(p) = -\frac{7}{p^2(p-1)} + \frac{8}{p(p-1)} +$$

$$+ \frac{2}{p-1} \bullet \circ \underline{3e^t + 7t - 1}$$

5.114. $pF(p) - 3 + 3F(p) = \frac{7}{p-1/2};$

$$F(p) = \frac{7}{(p-1/2)(p+3)} + \frac{3}{p+3};$$

Partialbruchzerlegung: $F(p) = \frac{2}{p-1/2} - \frac{2}{p+3} +$

$$+ \frac{3}{p+3} \bullet \circ \underline{2e^{t/2} + e^{-3t}}$$

5.115. $pF(p) - 2 - 4F(p) = -\frac{1}{p-3};$

$$F(p) = -\frac{1}{(p-3)(p-4)} + \frac{2}{p-4};$$

$$F(p) = \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p-4} + \frac{2}{p-4} \bullet \circ \underline{e^{3t} + e^{4t}}$$

5.116. $pF(p) - jF(p) = \frac{1}{p+j};$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} \bullet \circ \underline{\sin t}$$

5.117. $pF(p) - 1 + \frac{\omega}{j} F(p) = \frac{\omega}{j} \frac{1}{p+j\omega};$

$$F(p) = \frac{\omega}{j} \frac{1}{p^2+\omega^2} + \frac{1}{p-j\omega};$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2} \bullet \circ \underline{\cos \omega t}$$

5.118. $pF(p) - \omega F(p) = \frac{\omega}{p+\omega};$

$$F(p) = \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \bullet \circ \underline{\sinh \omega t}$$

5.119. $pF(p) - a + j\omega F(p) = \frac{j\omega}{p} + \frac{\omega b}{p-j\omega};$

$$F(p) = \frac{j\omega}{p(p+j\omega)} + \frac{b\omega}{p^2+\omega^2} +$$

$$+ \frac{a}{p+j\omega} \bullet \circ \underline{a + b \sin \omega t}$$

5.120. $p^2F(p) - 9 + 9F(p) = 0;$

$$F(p) = \frac{9}{p^2+9} \bullet \circ \underline{3 \sin 3t}$$

5.121. $p^2F(p) - 4p - 3 + F(p) = 0;$

$$F(p) = \frac{3}{p^2+1} + \frac{4p}{p^2+1};$$

$$F(p) \bullet\circ 3 \sin t + 4 \cos t$$

$$5.122. p^2 F(p) - 2p - a^2 F(p) = 0;$$

$$F(p) = \frac{2p}{p^2 - a^2} \bullet\circ 2 \cosh at$$

$$5.123. p^2 F(p) - 1 - 3p F(p) + 2F(p) = 0;$$

Partialbruchzerlegung:

$$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1} = e^{2t} - e^t$$

$$5.124. p^2 F(p) - 1 - p F(p) = \frac{1}{p-1};$$

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)};$$

$$F(p) = \frac{1+p-1}{p(p-1)(p-1)} = \frac{1}{(p-1)^2} \bullet\circ t e^t$$

$$5.125. p^2 F(p) + 6 + 10p F(p) + 16F(p) = 0;$$

$$F(p) = \frac{-6}{(p+2)(p+8)};$$

Partialbruchzerlegung:

$$F(p) = \frac{1}{p+8} - \frac{1}{p+2} \bullet\circ e^{-8t} - e^{-2t}$$

$$5.126. p^2 F(p) - 2 - p F(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p^3};$$

$$F(p) = \frac{2}{p^3(p-1)} - \frac{2}{p^4(p-1)} + \frac{2}{p(p-1)};$$

$$\text{Partialbruchzerlegung: } F(p) = \frac{2}{p^4} + \frac{2}{p(p-1)};$$

$$F(p) \bullet\circ \frac{t^3}{3} + 2(e^t - 1)$$

$$5.127. p^2 F(p) - 1 + 2p F(p) = \frac{1}{p-1};$$

$$F(p) = \frac{1}{p(p+2)(p-1)} + \frac{1}{p(p+2)};$$

$$F(p) = \frac{1}{(p+2)(p-1)};$$

Partialbruchzerlegung:

$$F(p) = \frac{1}{3(p-1)} - \frac{1}{3(p+2)} \bullet\circ \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$$

$$5.128. p^2 F(p) - \omega + 2ap F(p) + (a^2 + \omega^2) F(p) = 0;$$

$$F(p) = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \bullet\circ e^{-at} \sin \omega t$$

$$5.129. \text{Maschensatz: } u_R + u_L = U \text{ oder}$$

$$Ri(t) + Li'(t) = U;$$

$$\text{transformiert: } Ri(p) + pLi(p) = \frac{U}{p};$$

$$\text{aufgelöst: } i(p) = \frac{U}{p(pL + R)} \text{ oder mit } \tau = L/R$$

$$i(p) = \frac{U}{RTp(p+1/\tau)};$$

$$\text{rücktransformiert: } i(p) \bullet\circ i(t) = \frac{U}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$5.130. \text{Maschensatz: } u_R + u_C = U \text{ oder}$$

$$RCu'(t) + u(t) = U;$$

$$\text{transformiert: } pRCu(p) = U/p;$$

$$\text{aufgelöst: } u(p) = \frac{U}{\tau p(p+1/\tau)};$$

$$\text{rücktransformiert: } u(p) \bullet\circ u(t) = \frac{U(1 - e^{-t/\tau})}{\tau}$$

$$5.131. \text{Maschensatz: } RCu'(t) + u(t) = \dot{u} \sin \omega t;$$

$$\text{transformiert: } RCpu(p) + u(p) = \frac{\dot{u}\omega}{p^2 + \omega^2}; \text{ mit}$$

$\tau = RC$ und aufgelöst:

$$u(p) = \frac{\dot{u}\omega}{(p\tau + 1)(p^2 + \omega^2)} = \frac{\dot{u}\omega}{\tau(p + 1/\tau)(p^2 + \omega^2)}$$

rücktransformiert:

$$u(p) \bullet\circ u(t) = \frac{\dot{u}\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \left(e^{-t/\tau} + \frac{1}{\omega\tau} \sin \omega t - \cos \omega t \right)$$

$$5.132. u_C(0) = U_0; \text{ Maschensatz:}$$

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = U; \text{ transformiert:}$$

$$Ri(p) + \frac{1}{pC} i(p) + \frac{U_0}{p} = \frac{U}{p}; \text{ mit } \tau = RC \text{ und}$$

$$\text{aufgelöst: } i(p) = \frac{U - U_0}{R} \frac{1}{p + 1/\tau};$$

$$\text{rücktransformiert: } i(p) \bullet\circ i(t) = \frac{U - U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$5.133. i(0) = 0; u_C(0) = 0; \frac{1}{C} \int i(t) dt = U;$$

$$\frac{1}{pC} i(p) = \frac{U}{p}; i(p) = UC \bullet\circ \delta(t) UC = \underline{\delta(t)Q};$$

hierbei sind $\delta(t)$ der Nadelimpuls (sog. Stoßfunktion, Aufgabe 5.2) und $Q = UC$ die Ladungsmenge.

$$5.184. i(0) = 0; \frac{1}{C} \int i(t) dt + L i'(t) = U;$$

$$\frac{i(p)}{pC} + p L i(p) = \frac{U}{p}; i(p) = \frac{U}{L(p^2 + 1/RC)}$$

$$i(p) \bullet\circ i(t) = \underline{U \sqrt{C/L} \sin \sqrt{1/RC} t}$$

(ungedämpfte Schwingung mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

5.185. $i(0) = I$; nach dem Kurzschließen ist

$$Ri(t) + L i'(t) = 0; p L i(p) - L I + R i(p) = 0;$$

$$i(p) = \frac{I}{p + 1/\tau} (\tau = L/R); i(p) \bullet\circ i(t) = \underline{I e^{-t/\tau}}$$

$$5.186. Ri(t) + u(t) = U; u(0) = U_0;$$

$$RCu'(t) + u(t) = U;$$

$$pRCu(p) - RCU_0 + u(p) = \frac{U}{p}; \text{ mit } \tau = RC \text{ wird}$$

$$u(p) = \frac{U_0}{p + 1/\tau} + \frac{U}{p\tau(p + 1/\tau)} \bullet\circ u(t) =$$

$$= \underline{U - (U - U_0) e^{-t/\tau}}$$

$$5.187. u(0) = U_0; Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt + U_0 = U;$$

$$Ri(p) + \frac{1}{pC} i(p) = \frac{U - U_0}{p}; i(p) = \frac{U - U_0}{R(p + 1/\tau)}$$

$$i(p) \bullet\circ i(t) = \underline{\frac{U - U_0}{R} e^{-t/\tau}}$$

$$5.188. \frac{1}{C} \int i(t) dt + u(t) = \underline{U \sin \omega t}; \text{ mit } i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$\text{folgt } \frac{u(p)}{pRC} + u(p) = \frac{\hat{u}\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$u(p) = \frac{\hat{u}\omega p}{(p + 1/\tau)(p^2 + \omega^2)}$$

$$u(p) \bullet\circ u(t) =$$

$$= \underline{\frac{\hat{u}\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t - e^{-t/\tau})}$$

$$5.189. (i_1 + i_2)R_2 + u_L = U; \text{ mit } i_1 = \frac{u_L}{R_1} \text{ und}$$

$$u_L = L i'_2 \text{ wird } i_2 R_2 + L i'_2 \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = U; \text{ transformiert: } R_2 i_2(p) + p L i_2(p) \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = \frac{U}{p} \text{ und}$$

aufgelöst:

$$i_2(p) = \frac{U}{p \left[pL \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) + R_2 \right]}; \text{ mit}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ und } \tau = L/R \text{ folgt}$$

$$i_2(p) = \frac{UR}{R_2 L p (p + 1/\tau)} \bullet\circ i_2(t) = \\ = \underline{\frac{U}{R_2} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$5.140. F(p) = \frac{1/pC}{pL + 1/pC} = \frac{1}{p^2 LC + 1};$$

$$u_a(p) = F(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{pLC(p^2 + 1/RC)} \bullet\circ u_a(t) = \\ = \underline{1 - \cos \sqrt{1/RC} t};$$

d.i. eine ungedämpfte Schwingung mit der Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1/RC}.$$

$$5.141. F(p) = \frac{pL}{pL + 1/pC} = \frac{p^2 LC}{p^2 LC + 1};$$

$$u_a(p) = F(p) \frac{1}{p} = \frac{p}{p^2 + 1/RC} \bullet\circ \cos \sqrt{1/RC} t$$

$$5.142. F(p) = \frac{\frac{R_2/pC}{R_2 + 1/pC}}{R_1 + \frac{R_2/pC}{R_2 + 1/pC}} =$$

$$= \underline{\frac{R_2}{pCR_1R_2 + R_1 + R_2}};$$

$$\text{mit } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ wird } u_a(p) = F(p) \frac{1}{p} =$$

$$= \underline{\frac{1}{pCR_1(p + 1/RC)}} \text{ und mit } \tau = RC \text{ schließlich}$$

$$u_a(p) \bullet\circ u_a(t) = \underline{\frac{R}{R_1} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$5.143. (\text{Bild L 97}) F(p) = \frac{\underline{Z_1} \underline{Z_2}}{\underline{Z_3} \underline{Z_1}} =$$

$$= \frac{R}{2R} \frac{\frac{2R/pC}{2R + 1/pC}}{R + \frac{2R/pC}{2R + 1/pC}} = \frac{1}{pRC + 3};$$

$$\text{mit } \tau = RC \text{ wird } u_a(p) = F(p) \frac{1}{p} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2p\tau(p + 3/2\tau)} \bullet\circ \frac{1}{3} (1 - e^{-3t/2\tau})}$$

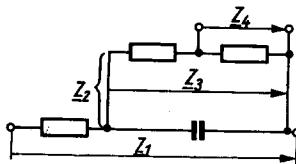


Bild L 97.
Aufgabe 5.143

$$5.144. F(p) = \frac{R}{R + \frac{R/pC}{R + 1/pC}} = \frac{p\tau + 1}{p\tau + 2}$$

mit $\tau = RC$; $u_a(p) = F(p) \frac{1}{p} = \frac{p + 1/\tau}{p(p + 2/\tau)}$;

mit Partialbruchzerlegung wird

$$u_a(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2(p + 2/\tau)} \bullet \circ u_a(t) = \frac{1 + e^{-2t/\tau}}{2}$$

$$5.145. (\text{Bild L 98}) F(p) = \frac{\underline{Z}_4 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3 \underline{Z}_1} =$$

$$= \frac{R}{R + 1/pC} \frac{1/2(R + 1/pC)}{R + 1/2(R + 1/pC)} =$$

$$= \frac{pRC}{3pRC + 1} = \frac{p\tau}{3p\tau + 1}$$

mit $\tau = RC$;

$$u_a(p) = \frac{1}{3(p + 1/3\tau)} \bullet \circ u_a(t) = \frac{e^{-t/3\tau}}{3}$$

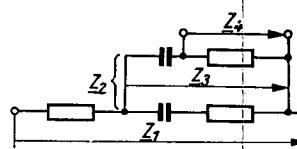


Bild L 98.
Aufgabe 5.145

$$5.146. F(p) = \frac{1/pC}{1/pC + \frac{R/pC}{R + 1/pC}} = \frac{p\tau + 1}{2p\tau + 1}$$

mit $\tau = RC$;

$$u_a(p) = \frac{p + 1/\tau}{2p(p + 1/2\tau)} \bullet \circ u_a(t) = 1 - \frac{e^{-t/2\tau}}{2}$$

5.147. Diese Schaltung liefert die gleiche Übertragungsfunktion wie Aufgabe 5.146;

$$F(p) = \frac{R + 1/pC}{R + R + 1/pC} = \frac{R + 1/pC}{2R + 1/pC} = \frac{p\tau + 1}{2p\tau + 1};$$

$$u_a(t) = 1 - \frac{e^{-t/2\tau}}{2}$$