POTENZREIHEN

1. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der Temperatur T °C ist durch c(T) = $c_0 . \sqrt{1+\frac{T}{T_0}}$ gegeben. Hier bedeutet c_0 = 331,5m/s die Schallgeschwindigkeit bei 0°C und T_0 = 273,15K die Temperatur bei 0°C in Kelvin.
   a. Nähere die Funktion c, die jeder Temperatur die entsprechende Schallgeschwindigkeit zuordnet an der Stelle 0 durch eine quadratische Funktion an.
   b. Nähere die Funktion c an der Stelle 0 durch eine lineare Funktion an.
   c. Berechne den relativen Fehler, der bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit bei einer Temperatur von 100°C
   bei Verwendung der linearen Näherung/ bei Verwendung der quadratischen Näherung auftritt.

2. Berechne unter Zuhilfenahme der Sätze über Potenzreihen ein Taylorpolynom 6.Grades für artanhx, wenn gilt:

$$ar\tanh x = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

Berechne mit Hilfe des Ergebnisses ln2 und gib den relativen Fehler der Näherungsrechnung im Vergleich mit dem TR an, wenn folgende Beziehung gilt:

$$ln\, x = 2 \cdot ar\, tanh\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

3. Wenn der Luftwiderstand dem Quadrat der Fallgeschwindigkeit proportional ist, gilt folgender Zusammenhang zwischen der Fallgeschwindigkeit v und dem Fallweg s:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}$$

m: Masse des fallenden Körpers; g: Erdbeschleunigung; k: Reibungskoeffizient.

Entwickle zunächst die Funktion f(x) = e^x in eine Reihe und berechne den Konvergenzradius. Verwende diese Reihe um mit Hilfe eines Grenzüberganges $k \to 0$ das bekannte Fallgesetz für den luftleeren Raum $v = \sqrt{2gs}$ aus der oben angegebenen Beziehung abzuleiten.

4. Eine Bodenvase hat die Form eines einschaligen Drehhyperboloids, das durch Drehung der Kurve $5x^2 - y^2 = 95$ von $y = -8\ bis\ y = 8$ um die Ordinatenachse entstanden ist (Maße in dm).
   a. Berechne den schmalsten Durchmesser der Vase.
   b. Berechne das Volumen der Vase.
   c. Berechne die Oberfläche dieser Vase (Mantel und Boden)
      - mit Hilfe der Keplerschen Fassregel.
      - durch Entwickeln des Integranden in eine Potenzreihe und anschließendes gliedweises Integrieren (3 Glieder).

5. Ein Fass hat die Form eines Ellipsoids, das durch Drehung der Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ von $x = -1 \; bis \; x = +1$ um die x-Achse entstanden ist.
   a. Berechne das Volumen des Fasses.
   b. Berechne die Oberfläche dieses Fasses (Mantel + Boden + Deckel)
      - mit Hilfe der Keplerschen Fassregel.
      - durch Entwickeln des Integranden in eine Potenzreihe und anschließendes gliedweises Integrieren (3 Glieder).

   Hinweis: Mantel $M_x = 2\pi \int_a^b y.\sqrt{1+y'^2}\,dx$

6. Ein Leitungsseil ist in einer Höhe von 8m auf zwei Masten befestigt, die voneinander einen Abstand von 2s = 50m haben. Der größte Seildurchhang ist d = 2,5m. Die Seilkurve ist durch $f(x) = a.\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$ gegeben.
   Bestimme die Parameter a und b näherungsweise, wenn f(x) durch eine quadratische Funktion (über Taylorreihe) ersetzt wird.

   Berechne anschließend die Länge des Seils nach der Formel $s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

7. Ein L = 8m langes Seil ist zwischen 2 Masten, die 6m voneinander entfernt sind, aufgehängt. Die Masten sind jeweils 10m hoch.
   Das Seil hängt gemäß der Kurve $f(x) = a \cdot cosh(\frac{x}{a}) + b$.
   Fertige eine Skizze an und ermittle die Seilkurve mit Hilfe der gegebenen Informationen Verwende die Beziehung $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ sowie eine Potenzreihenentwicklung für f(x) = sinh(x) bis zur 3. Potenz, um die Parameter a und b zu berechnen.
   Wie groß ist der maximale Durchhang des Seils?

8. Die Masse eines Elektrons hängt von seiner Geschwindigkeit v ab. Es gilt folgender Zusammenhang:
   $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ m_0: Ruhemasse c: Lichtgeschwindigkeit (≈ 300.00 km/s)

   Die kinetische Energie des Elektrons ergibt sich nach der Formel: $E_{kin} = (m - m_0)c^2$
   Zeige mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung dass folgender Zusammenhang gilt, wenn v<<c:
   $E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$

9. Die Erdbeschleunigung nimmt mit der Höhe nach folgender Formel ab:
   $g(h) = g_0 \left(\frac{1}{1+\frac{h}{R}}\right)^2$ $g_0 \approx 9{,}81 m/s^2$, h: Höhe über der Erdoberfläche in km, $R \approx 6380 km$
   Entwickle g(h) in eine Reihe nach Potenzen von $\frac{h}{R}$ bis inkl. der 3. Potenz.
   Berechne danach g(300) über die Reihe und durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung und ermittle den Fehler der Reihe.

10. Eine gedämpfte Schwingung kann durch eine Funktion der Form f(t) = e^{-t} cos(t) beschrieben werden.

    a. Bestimme die Stammfunktion dieser Funktion mit Hilfe einer geeigneten Integrationsmethode (partielles Integral)
       Zwischenergebnis: F(t) = $\frac{e^{-t}}{2}(\sin(t) - \cos(t))$
    b. Entwickle die Funktion in eine Taylorreihe 5. Grades.
    c. Berechne die Fläche zwischen der Funktion und der t-Achse im Intervall $[0;1]$ mit Hilfe der Stammfunktion und näherungsweise durch gliedweise Integration der Reihe. Wie groß sind der absolute und der relative Fehler?

11. Wird ein Körper der Länge L_1 um die Temperatur Δt erwärmt, so vergrößert sich seine Länge auf L_2 nach der Formel:
    $L_2 = L_1\sqrt[3]{1+\gamma\Delta t}$ γ ist eine Materialkonstante.
    Man zeige: Bei geringer Ausdehnung kann man gut mit der Näherungsformel $L_2 = L_1(1+\frac{\gamma}{3}\Delta t)$ arbeiten.

12. Eine Spule mit N Windungen, der Länge L und dem Durchmesser d wird von einem Strom I durchflossen. Für die magnetische Feldstärke H gilt folgender Zusammenhang:
    $H = \frac{N.I}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{l}\right)^2}}$
    Bestimme für den Fall, dass d<<l eine Näherungsformel für H mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung und bestimme den Fehler, wenn d 10% von l beträgt.

13. Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:
    a. $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+.....$
    b. $\frac{x}{2.5}-\frac{x^2}{2.5^2}+\frac{x^3}{2.5^3}-\frac{x^4}{2.5^4}+.....$
    c. $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......$
    d. $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+....$
    e. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+.......$

Lösungen (ohne Gewähr):

1. a) $c(t) = c_0(1+\frac{1}{2T_0}T-\frac{1}{8T_0^2}T^2)$; b) $(t) = c_0(1+\frac{1}{2T_0}T)$; c) 1,22%; 0,214%
2. $\approx x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots, 0{,}002\%$
3.
4. a) 8,71dm; b) 1169,5l; c) 488,6 dm²; 474,4dm²; Boden: 99,9dm²
5. a) 111,59VE; b) Mantel: 37,5372FE; 37,5376FE, Boden und Deckel: 54,286FE
6. a= 125, b= -119,5; s = 50,33m
7. a = 2,12; b = 3,39; D = 2,49m
8.
9. abs. Fehler: 0,6771, rel. Fehler:7,5%
10.
11.
12. 0,0037%
13. 1, 5, ∞, ∞, 1