Elektronik 4

Klaus Beuth

Digitaltechnik

9., überarbeitete Auflage
unter Mitarbeit von Annette Beuth

Vogel Buchverlag

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheits-
aufnahme

Elektronik. – Würzburg: Vogel.

4. Beuth, Klaus: Digitaltechnik. – 9., überarb.
Aufl. – 1992

Beuth, Klaus:
Digitaltechnik / Klaus Beuth. Unter Mitarb.
von Annette Beuth. – 9., überarb. Aufl. –
Würzburg: Vogel, 1992
(Elektronik; 4)
(Vogel-Fachbuch: Elektronik)
ISBN 3-8023-1440-9

ISBN 3-8023-1440-9
9. Auflage. 1992
Unveränderter Nachdruck 1993

Printed in Germany

Herstellung:
Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg

Vorwort

Die Digitaltechnik ist ein faszinierendes Gebiet der modernen Elektronik. Sie hat in den letzten Jahren eine stürmische Entwicklung genommen. Viele Elektroniker, aber auch Fachleute anderer Disziplinen, stehen vor der Aufgabe, sich mit diesem neuen Gebiet eingehend vertraut zu machen. Im Band «Elektronik 3» (Grundschaltungen der Elektronik) wurde in die wichtigsten Gebiete der Digitaltechnik kurz eingeführt. Das vorliegende Buch «Elektronik 4» soll eine umfassende Einarbeitung in die Digitaltechnik ermöglichen.

Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse der Elektrotechnik und der Elektronik, die aber nur für einige Kapitel dieses Buches benötigt werden. Die meisten Kapitel können ohne besondere Vorkenntnisse erarbeitet und verstanden werden. An die in der Digitaltechnik übliche Gedankenführung muß sich der mit diesem Gebiet nicht Vertraute allerdings erst gewöhnen. Das vielleicht ungewohnte «digitale» Denken darf ihn keinesfalls abschrecken.

Auf eine klare, übersichtliche und leicht verständliche Darstellungsweise der Sachverhalte wurde großer Wert gelegt. Ausgehend von den Grundlagen werden die Strukturen schrittweise entwickelt, wesentliche Inhalte herausgestellt und die Zusammenhänge eingehend erläutert. Hierbei konnten die Erfahrungen langjähriger Lehrtätigkeit genutzt werden.

Das Buch ist sowohl als unterrichtsbegleitendes Lehrbuch als auch zum Selbststudium geeignet. Ein Lernziel-Test mit Fragen und Aufgaben am Ende eines jeden Kapitels gibt Auskunft über den Lernerfolg und den erreichten Grad des Verstehens. Die Lösungen der Lernziel-Test-Aufgaben sind auf den letzten Buchseiten angegeben.

Studierende elektrotechnischer und maschinenbautechnischer Fachrichtungen, in der Praxis stehende Ingenieure, Techniker und Meister sowie Angehörige anderer naturwissenschaftlicher Berufe dürften das Buch mit gutem Erfolg benutzen. Eine gründliche Schulung wird auch den vielen ernsthaften Elektronikern geboten, die die Digitaltechnik und die Computertechnik zu ihrem Hobby gewählt haben.

Allen, die am Zustandekommen dieses Buches mitgewirkt haben, danke ich herzlich; mein besonderer Dank gilt dem Vogel Buchverlag. Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge aus dem Leser- und Benutzerkreis bin ich stets dankbar.

Waldkirch/Breisgau — Klaus Beuth

Zur Fachbuchgruppe «Elektronik» gehören die Bände:

Klaus Beuth/Olaf Beuth: Elementare Elektronik

Heinz Meister: Elektrotechnische Grundlagen (Elektronik 1)

Klaus Beuth: Bauelemente (Elektronik 2)

Klaus Beuth/Wolfgang Schmusch: Grundschaltungen (Elektronik 3)

Klaus Beuth: Digitaltechnik (Elektronik 4)

Helmut Müller/Lothar Walz: Mikroprozessortechnik (Elektronik 5)

Wolfgang Schmusch: Elektronische Meßtechnik (Elektronik 6)

Beuth/Hanebuth/Kurz: Nachrichtentechnik (Elektronik 7)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundbegriffe

1.1 Analoge und digitale Größendarstellung

Die Begriffe «analog» und «digital» kommen aus der Rechentechnik und wurden dann für die gesamte Elektrotechnik einschließlich der Meßtechnik übernommen.

1.1.1 Analoge Größendarstellung

Für die Darstellung von Größen nach dem Analogprinzip benötigt man eine *Analogiegröße,* das heißt eine «entsprechende» Größe. Bei Analogrechnern ist die Analogiegröße die elektrische Spannung. Für die Zahlendarstellung gilt zum Beispiel:

> Der Zahl 1 wird der Wert 1 V zugeordnet.

$1 \triangleq 1\,V$ ($\triangleq$ bedeutet «entspricht»).

Dann entsprechen 2 V der Zahl 2 und 3,6 V der Zahl 3,6. Will man die Zahl 4,365 darstellen, benötigt man eine Spannung von 4,365 V. Zur Darstellung größerer Zahlen muß eine andere Zuordnung, also ein anderer Maßstab gewählt werden, z.B. $1 \triangleq 1\,mV$. Man käme sonst in Bereiche zu hoher Spannung.

> *Analoge Größen sind Werte der Analogiegröße, die innerhalb eines zulässigen Bereichs jeden beliebigen Wert annehmen dürfen.*

Die Genauigkeit der Darstellung analoger Größen hängt davon ab, mit welcher Genauigkeit die Analogiegröße gemessen werden kann. Man stößt hier schnell an physikalische Grenzen. Eine Spannung kann mit normalem Aufwand auf $\pm 1\%$ genau, mit hohem Aufwand auf $\pm 1‰$ genau gemessen werden. Will man die Genauigkeit weiter steigern, wird der Aufwand extrem groß. Als weitere physikalische Grenze kommt die Temperaturabhängigkeit hinzu.

> *Analoge Größen werden normalerweise nur auf 3 Dezimalstellen genau dargestellt.*

Ein einfacher Analogrechner ist der altbewährte Rechenschieber. Als Analogiegröße verwendet man die Länge. Die Länge ist den Zahlenwerten in logarithmischem Maßstab

zugeordnet. Die Zuordnung muß also nicht linear sein. Die Genauigkeit des Rechenschiebers hängt von der Möglichkeit der genauen Ablesung ab.
In der Meßtechnik nimmt die analoge Darstellung von Größen einen besonders großen Platz ein. Zeigermeßgeräte stellen Meßgrößen analog dar (Bild 1.1). Analogiegröße ist der Winkel, den der Zeiger mit seiner Null-Linie bildet oder der entsprechende Skalenbogen. Der Zeiger kann jeden beliebigen Wert auf dem Skalenbogen anzeigen.
Mit Zeigern ausgestattete Uhren (Bild 1.2) zeigen die Zeit analog an. Analogiegröße ist auch hier der Winkel bzw. der zugehörige Bogen. Zulässiger Bereich ist der Vollkreis von 360°.
Schaubilder nach Bild 1.3 sind ebenfalls analoge Darstellungen. Analogiegröße ist hier die Balkenlänge.
Die übliche Darstellung von Spannungsverläufen im rechtwinkligen Koordinatensystem (Bild 1.4) ist ebenfalls eine analoge Darstellung. Die Spannung kann alle Werte innerhalb eines zulässigen Bereiches annehmen.

Die analoge Größendarstellung hat den Vorteil großer Anschaulichkeit.

Bei der analogen Größendarstellung sind Aussagen über den Trend der Größenentwicklung möglich.

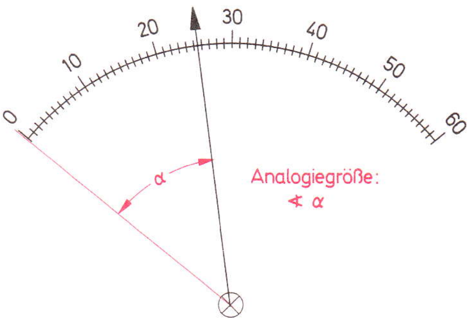


Bild 1.1 Analoge Darstellung von Meßgrößen

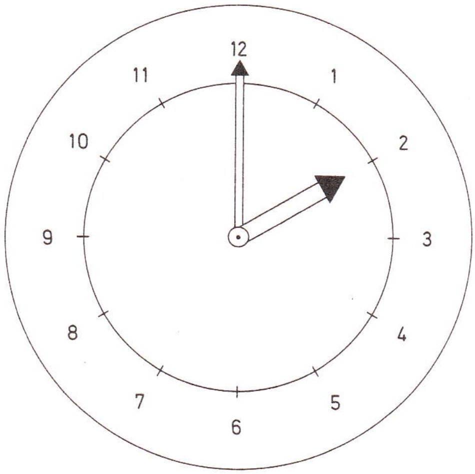


Bild 1.2 Analog anzeigende Uhr

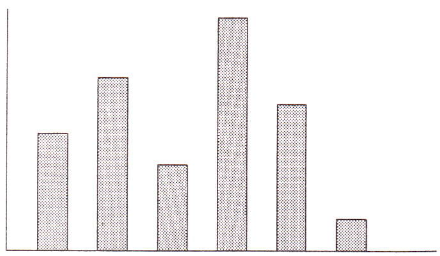


Bild 1.3 Analoge Darstellung, z.B. Einkommen verschiedener Berufe

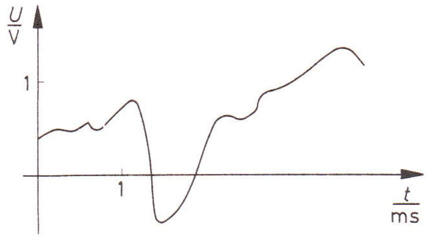


Bild 1.4 Analoge Darstellung eines Spannungsverlaufs

1.1.2 Digitale Größendarstellung

Bei der digitalen Größendarstellung verwendet man abzählbare Elemente. «Digital» kommt von digitus (lat.: der Finger). Eine Zahl kann z.B. durch eine Anzahl von Fingern dargestellt werden. Ein einfacher Digitalrechner ist der altbekannte Rechenrahmen (Bild 1.5). Eine Zahl wird durch die Anzahl der Kugeln dargestellt.

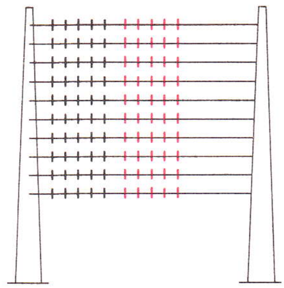


Bild 1.5 Rechenrahmen als einfacher «Digitalrechner»

Digitale Größen bestehen aus abzählbaren Elementen.

Ein Vorteil des Digitalprinzips wird hier bereits sichtbar. Der Genauigkeit der Darstellung von Zahlen und Größen ist keine physikalische Grenze gesetzt. Wenn man die Anzahl der Kugeln nur entsprechend erhöht, ist jede gewünschte Genauigkeit erreichbar.

Digitale Größen können mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden.

Bei elektronischen Digitalrechnern verwendet man statt der Kugeln elektrische Impulse. Man könnte die Zahl 3 z.B. durch 3 Impulse darstellen und entsprechend die Zahl 37 durch 37 Impulse. Diese Darstellung ist aber sehr unwirtschaftlich und daher nicht üblich. Zur Darstellung der Zahl 100 000 würde man 100 000 Impulse benötigen.
Will man Zahlen mit digitalen Signalen darstellen, verwendet man bestimmte Verabredungen, sogenannte Kodes. Bild 1.6 zeigt den zeitlichen Verlauf eines digitalen Signals.

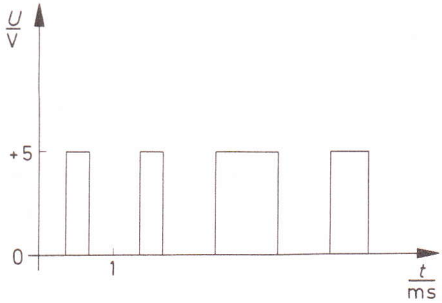


Bild 1.6 Zeitlicher Verlauf eines digitalen Signals

Da digitale Größen aus abzählbaren Elementen bestehen, verwendet man zur Veranschaulichung die Zahlendarstellung durch Ziffern.

Eine ziffernmäßige Anzeige wird «digitale Anzeige» genannt.

Meßgeräte mit Ziffernanzeige heißen «digital anzeigende Meßgeräte» (Bild 1.7). Uhren mit Ziffernanzeige werden als «Digitaluhren» bezeichnet.

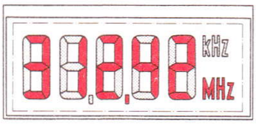


Bild 1.7 Digitalanzeige eines Meßgeräts

Digitale Anzeigen sind eindeutig.

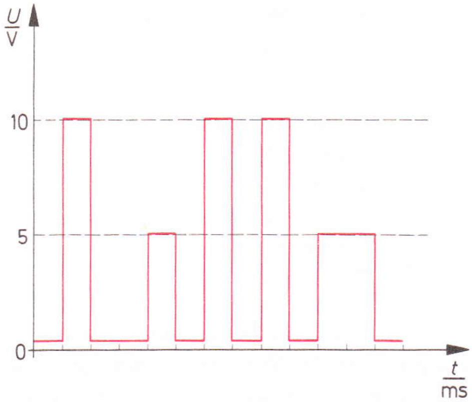
Der Ablesende braucht nicht die letzte Stelle, wie bei der analogen Anzeige, abzuschätzen.

1.2 Binäre und logische Zustände

Eine digitale Größe besteht, wie wir im vorhergehenden Abschnitt gesehen haben, aus abzählbaren Elementen. Diese Elemente können zwei, drei oder auch mehr Zustände haben. In Bild 1.8 ist ein digitales Signal mit 3 möglichen Zuständen dargestellt. Diese Zustände entsprechen 10 V, 5 V und 0 V.

Digitale Signale können zwei-, drei- oder auch mehrwertig sein; das heißt, sie können zwei, drei oder mehr vereinbarte Zustände haben.

Bild 1.8 Digitales Signal mit drei möglichen Zuständen



Man verwendet aber in der Digitaltechnik fast immer digitale Elemente mit nur zwei Zuständen. Eine Kugel im Rechenrahmen ist an bestimmter Stelle vorhanden oder nicht vorhanden. Es gibt nur diese beiden Möglichkeiten. Ein elektrischer Impuls ist vorhanden oder nicht vorhanden. Eine Spannung hat den vereinbarten oberen Wert oder den vereinbarten unteren Wert (mit einer gewissen Toleranz).

> *Die üblichen digitalen Elemente sind «zweiwertig», d.h., sie haben zwei mögliche Zustände.*

Für die Eigenschaft der Zweiwertigkeit ist die Bezeichnung «binär» (von lateinisch: bis = zweimal) üblich. Die in der Digitaltechnik verwendeten Elemente sind also *binäre Elemente.*

> *Da die Digitaltechnik nur binäre Elemente verwendet, müßte sie genauer «Binäre Digitaltechnik» genannt werden.*

Entsprechend müßte für Digitalschaltungen auch die Bezeichnung «Binäre Digitalschaltungen» verwendet werden. Da es jedoch zur Zeit – zumindest im technischen Bereich – keine andere Digitaltechnik gibt, kann die Zusatzbezeichnung «binär» entfallen.
In neuester Zeit hat man herausgefunden, daß es eine vierwertige Digital-«Technik» im Bereich der Lebewesen gibt. Diese wird vor allem für die Verschlüsselung, Speicherung, Auswahl und Weitergabe von Erbanlagen verwendet. Die zu erwartenden Forschungsergebnisse werden zeigen, ob die Digitaltechnik der Natur der von Menschen erdachten Digitaltechnik überlegen ist oder nicht.
Die in der Digitaltechnik üblichen beiden binären Zustände werden auch digitale Zustände genannt.
Beispiele für binäre Zustände:

Erster binärer Zustand	Zweiter binärer Zustand
Schalter geschlossen	Schalter geöffnet
Impuls vorhanden	Impuls nicht vorhanden
Transistor leitend	Transistor gesperrt
Diode leitend	Diode gesperrt
Spannung hoch	Spannung niedrig
Strom hoch	Strom niedrig
Werkstoff magnetisch	Werkstoff nicht magnetisch

Da man in der Digitaltechnik elektronisch arbeitet, werden vor allem Spannungszustände als binäre Zustände verwendet. Die Hersteller geben für ihre Digitalschaltungen die binären Spannungszustände in den Datenbüchern an.
Übliche binäre Spannungszustände:

+ 2 V	0 V (Masse)
+ 5 V	0 V (Masse)
+ 5 V	− 5 V
+12 V	0 V
0 V	−12 V

Für die binären Spannungszustände gibt es bestimmte Toleranzen (Bild 1.9). Der eine binäre Zustand kann z.B. eine Spannung von 4 bis 5,5 V haben. Die Spannung des anderen binären Zustands kann zwischen 0 V und +0,8 V liegen. Der niedrigere Spannungspegel wird mit L (von engl.: low = niedrig), der höhere Spannungspegel mit H (von engl.: high = hoch) bezeichnet.

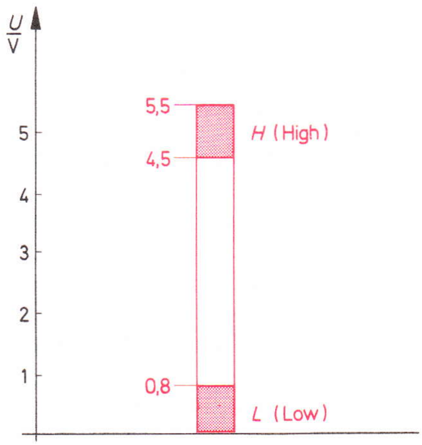


Bild 1.9 Toleranzfeld für binäre Spannungszustände

L = Low = niedriger Pegel

Pegel, der näher bei minus Unendlich ($-\infty$) liegt

H = High = hoher Pegel

Pegel, der näher bei plus Unendlich ($+\infty$) liegt.

Die binären Zustände haben für sich genommen noch keine Aussagekraft. Ihnen müssen sogenannte *logische Zustände* zugeordnet werden.
Der logische Zustand 1 (1-Zustand) bedeutet in der mathematischen Logik «wahr» bzw. «zutreffend». Der logische Zustand 0 (0-Zustand) bedeutet «unwahr» bzw. «nicht zutreffend».

Die Zuordnung der benären Zustände zu den Logik-Zuständen ist beliebig.

Ist die Zuordnung einmal getroffen worden, muß sie konsequent beibehalten werden. Eine übliche Zuordnung ist:

$$\begin{aligned} 0 &\mathrel{\hat{=}} L = 0\,V\ (Masse) \\ 1 &\mathrel{\hat{=}} H = +5\,V \end{aligned}$$

Es ist darauf zu achten, daß die binären Zustände (z.B. die Pegelangaben L und H) und die logischen Zustände nicht miteinander verwechselt werden. Die logischen Zustände werden auch «Werte» genannt. In diesem Zusammenhang wird auf DIN 40900 Teil 12 verwiesen.

Eine andere mögliche Zuordnung ist:

$$\begin{aligned} 0 &\mathrel{\hat{=}} \mathrm{H} = +5\,\mathrm{V} \\ 1 &\mathrel{\hat{=}} \mathrm{L} = 0\,\mathrm{V}\ \text{(Masse)} \end{aligned}$$

In Systemen, in denen die Logik-Zustände anderen Eigenschaften einer physikalischen Größe zugeordnet werden – z.B. positiv oder negativ gepolten magnetischen Zuständen, positiven oder negativen Impulsen, dem Vorhandensein oder dem Nichtvorhandensein von Impulsen, zwei unterschiedlichen Frequenzen usw. – dürfen H und L zum Darstellen dieser Eigenschaften verwendet werden. Selbstverständlich ist eine vorherige eindeutige Zuordnung erforderlich.

1.3 Lernziel-Test

1. Wie unterscheidet sich eine digitale Größe von einer analogen Größe?
2. Nennen Sie Vor- und Nachteile der analogen Größendarstellung.
3. Was versteht man unter binären Größen?
4. Welche Genauigkeit ist bei der digitalen Größendarstellung erreichbar?
5. In den Datenbüchern der Hersteller digitaler Schaltungen werden oft die Bezeichnungen L und H angegeben. Welche Bedeutung haben diese Bezeichnungen?
6. Was sind logische Zustände, und durch welche Zeichen werden sie ausgedrückt?
7. Geben Sie an, wie Meßgrößen
   a) bei einem analog anzeigenden Meßgerät,
   b) bei einem digital anzeigenden Meßgerät
   dargestellt werden.

2 Logische Verknüpfungen

2.1 Grundfunktionen und Grundglieder (Grundelemente)

2.1.1 UND-Verknüpfung (Konjunktion) und UND-Glied (UND-Element)

Der Satz «Wenn morgen schönes Wetter ist und mein Bruder Zeit hat, gehen wir segeln» enthält eine *UND-Verknüpfung*. Die Aussage A (schönes Wetter) *und* die Aussage B (mein Bruder hat Zeit) müssen zutreffen, also wahr sein, damit die Aussage X (segeln gehen) wahr wird. Dieser Zusammenhang kann in einer Wahrheitstabelle dargestellt werden (Bild 2.1). Der Zustand 1 bedeutet «wahr» bzw. «zutreffend». Der Zustand 0 bedeutet «unwahr» bzw. «nicht zutreffend». Vier Fälle (Kombinationen) sind möglich. Die Reihenfolge der Fälle ist im Prinzip beliebig, sollte aber – wie später noch erläutert wird – einem bestimmten Schema entsprechen.

Fall	B	A	X
1	0	0	0
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Bild 2.1 Wahrheitstabelle einer UND-Verknüpfung und eines UND-Glieds

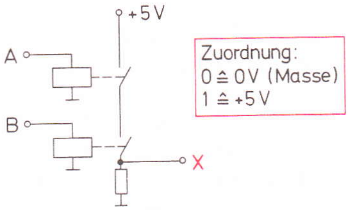


Bild 2.2 UND-Glied

Eine elektronische Schaltung, bei der am Ausgang X nur dann Zustand 1 anliegt, wenn am Eingang A *und* am Eingang B die Zustände 1 anliegen, wird *UND-Glied, UND-Element,* auch *UND-Gatter* genannt.
Ein UND-Glied kann durch eine Schaltung nach Bild 2.2 verwirklicht werden. Man verwendet heute jedoch fast ausschließlich integrierte Halbleiterschaltungen (siehe Abschnitt «Schaltkreisfamilien»).

> *Jede Schaltung, die die Wahrheitstabelle einer UND-Verknüpfung erfüllt, ist ein UND-Glied.*

Die UND-Verknüpfung kann mathematisch mit Hilfe der Schaltalgebra ausgedrückt werden:

$$\boxed{X = A \wedge B}$$

$\wedge$ Zeichen für die UND-Verknüpfung (genormt).

In der Literatur findet man noch andere Zeichen für die UND-Verknüpfung. Die vorstehende Gleichung wird dann wie folgt geschrieben:

$$X = A \cdot B \qquad X = A \,\&\, B$$

Die Schaltzeichen eines UND-Gliedes mit zwei Eingängen zeigt Bild 2.3. Die Bezeichnungen der Eingänge und des Ausgangs sind beliebig. Man verwendet für die Eingänge auch gern E_1, E_2 und für den Ausgang A.

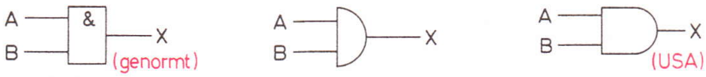


Bild 2.3 Schaltzeichen des UND-Gliedes mit 2 Eingängen

Am Ausgang eines UND-Gliedes liegt nur dann der Zustand 1, wenn an allen Eingängen der Zustand 1 liegt.

2.1.2 ODER-Verknüpfung (Disjunktion) und ODER-Glied (ODER-Element)

Der Satz «Wenn ich eine Erbschaft mache oder im Lotto gewinne, mache ich eine Weltreise» führt auf eine *ODER-Verknüpfung*. Die Weltreise wird gemacht, wenn die Aussage A (Erbschaft) *oder* die Aussage B (Lottogewinn) *oder* beide Aussagen wahr werden. Man könnte darüber streiten, ob die Weltreise auch gemacht wird, wenn beide Aussagen wahr werden. Die sprachliche Ausdrucksweise ist hier nicht exakt genug. Bei einer ODER-Verknüpfung müßte die Weltreise aber auch gemacht werden, wenn A und auch B wahr werden. Den Zusammenhang zeigt die Wahrheitstabelle Bild 2.4 (Zustand 1 ≙ «wahr», Zustand 0 ≙ «unwahr»).
Eine elektronische Schaltung, bei der am Ausgang X immer dann 1 anliegt, wenn am Eingang A oder am Eingang B oder an beiden Eingängen 1 anliegt, wird ODER-Glied genannt.
Ein ODER-Glied kann durch eine Schaltung nach Bild 2.5 hergestellt werden.

Fall	B	A	X
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	1

Bild 2.4 Wahrheitstabelle einer ODER-Verknüpfung und eines ODER-Gliedes

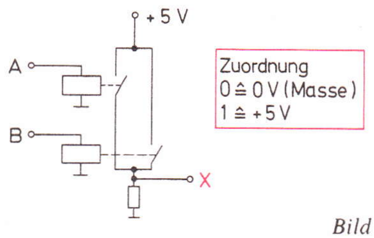


Bild 2.5 ODER-Glied

Die Relaisschaltung dient nur zur besseren Anschaulichkeit. ODER-Glieder werden heute fast ausschließlich als integrierte Halbleiterschaltungen aufgebaut.

Jede Schaltung, die die Wahrheitstabelle einer ODER-Verknüpfung erfüllt, ist ein ODER-Glied.

Die ODER-Verknüpfung kann mathematisch ebenfalls mit Hilfe der Schaltalgebra ausgedrückt werden:

$$\boxed{X = A \vee B}$$

$\vee$ Zeichen für die ODER-Verknüpfung (genormt).

Außer dem genormten Zeichen für die ODER-Verknüpfung wird vor allem in der älteren Literatur das Pluszeichen verwendet. Die Gleichung lautet dann:

$$X = A + B.$$

Die Schaltzeichen eines ODER-Gliedes mit zwei Eingängen zeigt Bild 2.6. Die Angabe im genormten Schaltzeichen $\geqq 1$ bedeutet, daß die Anzahl der 1-Zustände an den Eingängen $\geqq 1$ sein muß, wenn am Ausgang 1 anliegen soll.

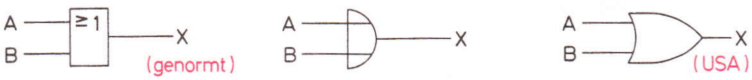


Bild 2.6 Schaltzeichen des ODER-Gliedes mit 2 Eingängen

Am Ausgang eines ODER-Gliedes liegt immer dann der Zustand 1, wenn wenigstens an einem Eingang der Zustand 1 anliegt.

2.1.3 Verneinung (Negation) und NICHT-Glied (NICHT-Element)

Der Satz «Wenn meine Schwiegermutter zu Besuch kommt, gehe ich heute abend nicht ins Theater» bedeutet eine *Verneinung*. Wenn die Aussage A (Schwiegermutter kommt zu Besuch) wahr ist, kann die Aussage X (ins Theater gehen) nicht wahr sein. Ist die Aussage A nicht wahr, wird die Aussage X wahr, und ich gehe ins Theater. Die zugehörige Wahrheitstabelle (Bild 2.7) hat nur 2 Fälle.
Eine elektronische Schaltung, bei der am Ausgang X immer der entgegengesetzte Zustand wie am Eingang A anliegt, heißt NICHT-Glied, Negationsglied oder Inverter (Umkehrer).

Fall	A	X
1	0	1
2	1	0

Bild 2.7 Wahrheitstabelle einer Verneinung bzw. eines NICHT-Gliedes

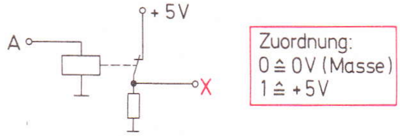


Bild 2.8 NICHT-Glied

Ein NICHT-Glied kann durch eine Schaltung nach Bild 2.8 aufgebaut werden. Auch hier muß wieder beachtet werden, daß übliche NICHT-Glieder in Halbleitertechnik aufgebaut werden.

> *Jede Schaltung, die die Wahrheitstabelle einer Verneinung erfüllt, ist ein NICHT-Glied.*

Auch die Verneinung kann mit Hilfe der Schaltalgebra ausgedrückt werden.

$\boxed{X = \overline{A}}$ Der übergesetzte Strich ist das Zeichen der Verneinung.

Die Schaltzeichen eines NICHT-Gliedes zeigt Bild 2.9.

> *Am Ausgang eines NICHT-Gliedes liegt stets der entgegengesetzte Zustand wie am Eingang.*

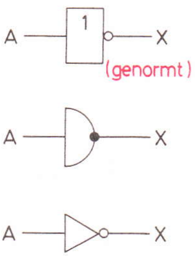


Bild 2.9 Schaltzeichen des NICHT-Gliedes (USA)

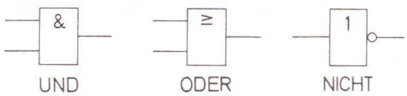


Bild 2.10 Genormte Schaltzeichen der Grundglieder

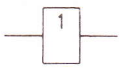


Bild 2.10a Pegelanhebeglied (Verstärkung ohne Negation), Buffer genannt.

2.1.4 Grundglieder (Grundelemente)

Die Verknüpfungen UND, ODER und NICHT stellen die drei Grundfunktionen der digitalen Logik dar. Mit genügend viel Gliedern UND, ODER und NICHT lassen sich alle nur denkbaren logischen Verknüpfungen aufbauen. Daher werden diese Glieder Grundglieder, oder auch Grundgatter, genannt (Bild 2.10). Zu den Grundgliedern gehört auch das Pegelanhebeglied (Bild 2.10a), das allgemein Buffer genannt wird. Liegt an seinem Eingang 1, so liegt auch an seinem Ausgang 1, sonst 0.

2.2 Zusammengesetzte Glieder (Elemente)

2.2.1 NAND-Glied (NAND-Element)

Schaltet man ein UND-Glied mit einem NICHT-Glied gemäß Bild 2.11 zusammen, werden alle Ausgangszustände X des UND-Gliedes negiert, wie die Wahrheitstabelle Bild 2.12 zeigt. Die Spalte X gibt die UND-Verknüpfung an. X ist nur dann 1, wenn A = 1 und B = 1 ist (Fall 4). X ist aber auch der Eingang des NICHT-Gliedes. Wenn am Eingang X des NICHT-Gliedes 0 liegt, ist der Ausgang Z = 1. Liegt am Eingang X des NICHT-Gliedes 1, ist der Ausgang Z = 0.
Die Spalte Z zeigt eine negierte UND-Verknüpfung. Aus dem englischen Ausdruck NOT-AND (NICHT-UND) wurde durch Zusammenziehen die Bezeichnung NAND gebildet. Eine deutsche Bezeichnung hat sich bisher nicht durchgesetzt.

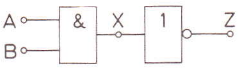


Bild 2.11 Entstehung einer NAND-Verknüpfung

Fall	B	A	X	Z
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Bild 2.12 Wahrheitstabelle der Schaltung Bild 2.11

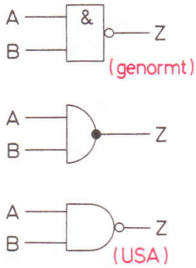


Bild 2.13 Schaltzeichen des NAND-Gliedes mit 2 Eingängen

Fall	B	A	Z
1	0	0	1
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

Bild 2.14 Wahrheitstabelle eines NAND-Gliedes

NAND-Glieder werden sehr häufig verwendet. Man hat für sie eigene Schaltzeichen entwickelt (Bild 2.13). Diese Schaltzeichen ergeben sich aus dem Schaltzeichen des UND-Gliedes mit am Ausgang nachgesetztem Kreis. Dieser Kreis kennzeichnet die Negation des Ausgangs.
Für die Verknüpfungswirkung des NAND-Gliedes gilt der Satz:

> *Am Ausgang eines NAND-Gliedes liegt dann Zustand 1, wenn nicht an allen Eingängen Zustand 1 liegt.*

Mit Hilfe der Schaltalgebra läßt sich die NAND-Verknüpfung wie folgt darstellen:

$$\boxed{Z = \overline{A \wedge B}}$$

Der lange Strich über der UND-Verknüpfung von A mit B gibt an, daß die *gesamte* UND-Verknüpfung negiert wird. Bild 2.14 zeigt die Wahrheitstabelle eines NAND-Gliedes.

2.2.2 NOR-Glied (NOR-Element)

Für die Zusammenschaltung eines ODER-Gliedes mit einem NICHT-Glied nach Bild 2.15 gilt die Wahrheitstabelle Bild 2.16. Aus den Eingangsgrößen A und B wird zunächst eine ODER-Verknüpfung gebildet:

$$X = A \vee B$$

X ist gleichzeitig der Eingang des NICHT-Gliedes. Alle Zustände von X erscheinen negiert in Spalte Z (Aus X = 0 wird Z = 1, aus X = 1 wird Z = 0).

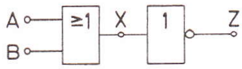


Bild 2.15 Enstehung eines NOR-Gliedes

Fall	B	A	X	Z
1	0	0	0	1
2	0	1	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	1	0

Bild 2.16 Wahrheitstabelle der Schaltung Bild 2.15

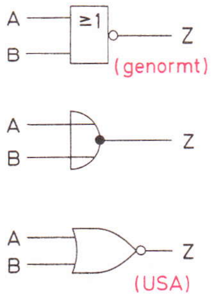


Bild 2.17 Schaltzeichen des NOR-Gliedes mit zwei Eingängen und zugehöriger Wahrheitstabelle

Z gibt die negierte ODER-Verknüpfung an. Aus dem englischen Ausdruck NOT-OR (NICHT-ODER) wurde durch Zusammenziehen die Bezeichnung NOR gebildet. Für NOR ist keine deutsche Bezeichnung üblich.

NOR-Glieder werden ebenso wie NAND-Glieder häufig eingesetzt. Für NOR-Glieder gibt es daher eigene Schaltzeichen (Bild 2.17). Die Schaltzeichen ergeben sich aus den Schaltzeichen des ODER-Gliedes. Die Negation wird durch den Negationskreis am Ausgang dargestellt.

Für die Verknüpfungswirkung des NOR-Gliedes gilt der Satz:

> *Am Ausgang eines NOR-Gliedes liegt nur dann der Zustand 1, wenn an keinem der Eingänge der Zustand 1 anliegt.*

Für die NOR-Verknüpfung gilt folgende schaltalgebraische Gleichung:

$$\boxed{Z = \overline{A \vee B}}$$

2.2.3 ÄQUIVALENZ-Glied (ÄQUIVALENZ-Element)

Häufig wird eine Verknüpfungsschaltung benötigt, bei der am Ausgang immer dann 1 anliegt, wenn die beiden Eingangszustände gleich sind – also entweder beide 0 oder beide 1 haben. Eine solche Schaltung wird ÄQUIVALENZ-Glied genannt (Äquivalenz = Gleichwertigkeit). Sie wird aus Grundgliedern entsprechend Bild 2.18 aufgebaut.

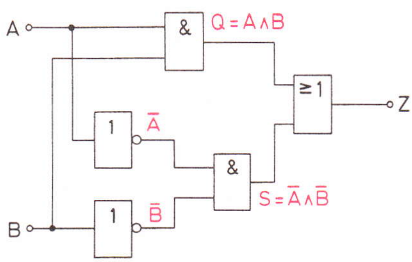


Bild 2.18 Aufbau eines ÄQUIVALENZ-Gliedes aus Grundgliedern

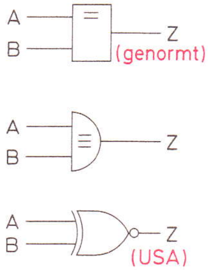
Bild 2.19 Entwicklung der Wahrheitstabelle eines ÄQUIVALENZ-Gliedes

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
Fall	B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$Q = A \wedge B$	$S = \overline{A} \wedge \overline{B}$	$Z = Q \vee S$
1	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	1

Die Wahrheitstabelle des ÄQUIVALENZ-Gliedes wird schrittweise entwickelt. Zunächst werden die Eingangszustände für die vier Fälle nach dem bisher verwendeten Schema eingetragen (Bild 2.19, Spalte ① und ②). Dann werden die Ausgangszustände der NICHT-Glieder, also $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eingetragen. Wenn, wie z.B. im Fall 1, A = 0 ist, so ist $\overline{A}$ = 1. Wenn, wie z.B. im Fall 4, A = 1 ist, so ist $\overline{A}$ = 0. Entsprechendes gilt für B und $\overline{B}$. So ergeben sich die Inhalte der Spalten ③ und ④ in Bild 2.19. Die Zustände von Q ergeben sich durch die UND-Verknüpfung von A mit B. Im Fall 1 sind A = 0, B = 0. Q muß also auch 0 sein (Spalte 5). In den Fällen 2 und 3 ist Q ebenfalls 0, da nicht beide Eingänge 1 sind. Nur im Fall 4 mit A = 1, B = 1 ist Q ebenfalls 1.

Für S in Spalte 6 erhält man die Zustände durch die UND-Verknüpfung von $\overline{A}$ mit $\overline{B}$. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind die Eingänge des UND-Gliedes mit dem Ausgang S (Bild 2.18). Im Fall 1 sind $\overline{A}$ = 1 und $\overline{B}$ = 1. Somit wird auch S = 1. In den Fällen 2 und 3 der Wahrheitstabelle muß S = 0 sein, da jeweils nur ein Eingang den Zustand 1 hat. Im Fall 4 sind beide Eingänge 0 und damit auch S = 0.

S und Q sind die Ausgänge der beiden UND-Glieder und gleichzeitig die Eingänge des ODER-Gliedes. Das ODER-Glied erzeugt eine ODER-Verknüpfung der Zustände von S und Q. Im Fall 1 ist Q = 0 und S = 1. Der Ausgang Z (Spalte 7) ist somit ebenfalls 1. In den Fällen 2 und 3 sind beide Eingänge 0 und somit auch der Ausgang 0. Im Fall 4 ist Q = 1 und S = 0, was bei der ODER-Verknüpfung den Ausgangszustand 1 ergibt.



Fall	B	A	Z
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	1

Bild 2.20 Schaltzeichen des ÄQUIVALENZ-Gliedes mit Wahrheitstabelle

Für ÄQUIVALENZ-Glieder sind ebenfalls eigene Schaltzeichen üblich. Die Schaltzeichen und die Wahrheitstabelle zeigt Bild 2.20.

> *Am Ausgang eines ÄQUIVALENZ-Gliedes liegt immer dann der Zustand 1, wenn die Eingänge gleiche Zustände haben.*

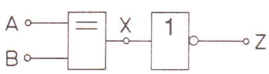
Die schaltalgebraische Gleichung der ÄQUIVALENZ-Verknüpfung hat folgende Form:

$$\boxed{Z = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}$$

Da in unserem Beispiel $Q = A \wedge B$ und $S = \overline{A} \wedge \overline{B}$ sind, könnte man auch $Z = Q \vee S$ schreiben. Man kann das ÄQUIVALENZ-Glied auch durch eine andere aus Grundgliedern gebildete Schaltung aufbauen. (Siehe Aufgaben am Ende des Kapitels 2.)

2.2.4 ANTIVALENZ-Glied (EXKLUSIV-ODER-Glied, XOR-Glied)

Wird der Ausgang des ÄQUIVALENZ-Gliedes durch Nachschalten eines NICHT-Gliedes negiert, so entsteht ein Glied, das am Ausgang immer dann 1 hat, wenn die Eingangszustände verschieden sind (Bild 2.21).
Ein solches Glied wird ANTIVALENZ-Glied (Antivalenz = Verschiedenwertigkeit) oder EXKLUSIV-ODER-Glied genannt. Der letztgenannte Name besagt, daß es sich bei

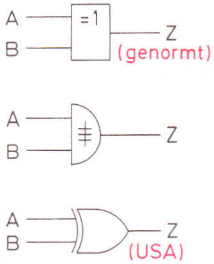


Fall	B	A	X	Z
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Bild 2.21 Aufbau eines ANTIVALENZ-Gliedes und zugehörige Wahrheitstabelle

diesem Glied um ein ODER-Glied handelt, bei dem der Fall ausgeschlossen ist, daß 1 dann am Ausgang liegt, wenn beide Eingänge 1 haben (also Fall 4). Aus EXKLUSIV-ODER bzw. EXCLUSIVE-OR wurde für den englischen Sprachraum die Bezeichnung XOR gebildet, die auch im deutschen Sprachraum gelegentlich verwendet wird.
ANTIVALENZ-Glieder werden ebenfalls häufig verwendet. Die Schaltzeichen und die Wahrheitstabelle sind in Bild 2.22 dargestellt.

Bild 2.22 Schaltzeichen des ANTIVALENZ-Gliedes mit Wahrheitstabelle



Fall	B	A	Z
1	0	0	0
2	0	1	1
3	1	0	1
4	1	1	0

> *Am Ausgang eines ANTIVALENZ-Gliedes liegt immer dann der Zustand 1, wenn die beiden Eingänge ungleiche Zustände haben.*

Aus der Schaltung Bild 2.21 kann eine schaltalgebraische Gleichung folgender Form für die ÄQUIVALENZ entnommen werden:

$$X = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

Dieser Ausdruck ist wegen des nachgeschalteten NICHT-Gliedes insgesamt zu negieren, so daß sich für die ANTIVALENZ die Gleichung ergibt:

$$\boxed{Z = \overline{(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Regeln der Schaltalgebra umgeformt werden:

$$\boxed{Z = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)}$$

Die Umformung wird in Kapitel 4 näher erläutert.

2.2.5 Verknüpfungsmöglichkeiten bei Gliedern mit zwei Eingängen

Nachdem die Verknüpfungsglieder UND, ODER, NICHT, NAND, NOR, ÄQUIVALENZ und ANTIVALENZ betrachtet wurden, erhebt sich die Frage nach weiteren möglichen Verknüpfungen und den zugehörigen Gliedern. Es gibt weitere mögliche Verknüpfungen, doch diese haben technisch keine große Bedeutung.
Bei Gliedern mit zwei Eingängen (z.B. A, B) sind 4 verschiedene Fälle der Kombination der Eingangszustände möglich, wie wir bei den bisher betrachteten Wahrheitstabellen gesehen haben (Bild 2.22). Zu den 4 Fällen gehören 4 mögliche Ausgangszustände, z.B. für einen Ausgang Z nach Bild 2.23. In jedes der roten Kästchen kann ein Ausgangszustand 0 oder 1 eingetragen werden.

Fall	B	A	Z
1	0	0	□
2	0	1	□
3	1	0	□
4	1	1	□

Bild 2.23 Wahrheitstabelle für Glieder mit 2 Eingängen. Die roten Kästchen sind Platzhalter für mögliche Ausgangszustände

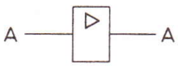


Bild 2.25 Schaltzeichen eines nicht negierenden Verstärkers

Fall	B	A	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	Z_{14}	Z_{15}	Z_{16}
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
3	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
			Konstante 0	NOR	Inhibition B	NEGATION B	Inhibition A	NEGATION A	ANTIVALENZ	NAND	UND	ÄQUIVALENZ	Identität A	Implikation B	Identität B	Implikation A	ODER	Konstante 1

Bild 2.24 Zusammenstellung der 16 verschiedenen Verknüpfungsmöglichkeiten von Gliedern mit zwei Eingängen

Man kann 16 verschiedene Kombinationen von Ausgangszuständen zusammenstellen. Diese Zusammenstellung zeigt Bild 2.24. Es gibt also 16 verschiedene Verknüpfungsmöglichkeiten, die in Bild 2.24 mit Z_1 bis Z_{16} bezeichnet sind.
Bei der Betrachtung von Bild 2.24 stellt man zunächst fest, daß einige der möglichen Verknüpfungen ohne besondere Bedeutung sind. Für «Konstante 0» und «Konstante 1» benötigt man keine Glieder. «Konstante 0» bedeutet, daß der Ausgang stets 0 ist, völlig unabhängig davon, welche Eingangszustände vorliegen. Bei «Konstante 1» liegt am Ausgang stets 1, ebenfalls unabhängig von den Eingangszuständen.
«Negation A» und «Negation B» können jeweils mit einem NICHT-Glied verwirklicht werden. Für «Identität A» und «Identität B» kann man nicht negierende Verstärker verwenden (Bild 2.25).

> *Am Ausgang eines nicht negierenden Verstärkers liegt immer dann 1, wenn auch am Eingang 1 liegt.*

Verstärker dieser Art haben die Aufgabe, schwache Signale wieder aufzufrischen.
Die Inhibition ist eine besondere Art der UND-Verknüpfung. Ein Eingangszustand wird vor der UND-Verknüpfung negiert. Negiert man den Eingang A, so erhält die Verknüpfung «Inhibition A» (Bild 2.26). Negiert man den Eingang B, so erhält man die Verknüpfung «Inhibition B» (Bild 2.27).

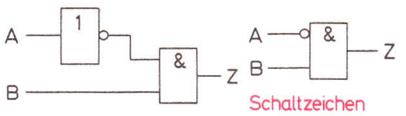


Bild 2.26 Entstehung der Verknüpfung «Inhibition A» und Schaltzeichen

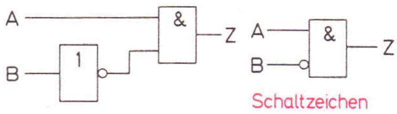


Bild 2.27 Entstehung der Verknüpfung «Inhibition B» und Schaltzeichen

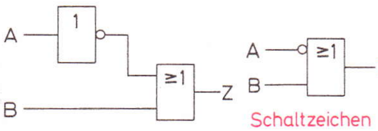


Bild 2.28 Entstehung der Verknüpfung «Implikation A» und Schaltzeichen

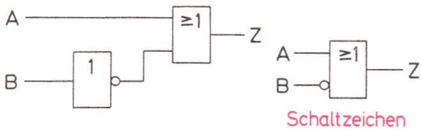


Bild 2.29 Entstehung der Verknüpfung «Implikation B» und Schaltzeichen

Die Implikation ist eine besondere Art der ODER-Verknüpfung. Ein Eingangszustand wird vor der ODER-Verknüpfung negiert. Negiert man den Eingang A, erhält man die Verknüpfung «Implikation A» (Bild 2.28). Negiert man den Eingang B, erhält man die Verknüpfung «Implikation B» (Bild 2.29).
Die Verknüpfungen Inhibition und Implikation haben nur geringe praktische Bedeutung. Inhibitions- und Implikationsglieder kann man kaum käuflich erwerben. Benötigt man sie, muß man sie aus Grundgliedern zusammenschalten.

2.3 Glieder mit drei und mehr Eingängen

Benötigt man drei oder mehr Eingänge, so kann man Glieder mit zwei Eingängen zusammenschalten (Bild 2.30).
Jedes Glied mit 2 Eingängen hat bekanntlich 4 Fälle. Für die Eingänge A und B ergibt sich die übliche Wahrheitstabelle. Kommt ein weiterer Eingang, z.B. C, hinzu, kann dieser entweder 0 oder 1 sein.
Die bisherigen 4 Fälle von A und B werden einmal mit C = 0 und ein weiteres Mal mit C = 1 kombiniert (Bild 2.31). Somit ergeben sich 8 Fälle.
Wenn jetzt zu den drei Eingängen, die z.B. A, B, C heißen sollen, ein vierter Eingang, z.B. D, hinzu kommt (Bild 2.32), ist D während der 8 Fälle der Wahrheitstabelle Bild 2.30 einmal 0. Da D aber auch 1 sein kann, sind die 8 Fälle von Bild 2.31 noch ein zweites Mal aufzuführen für D = 1. Ein Glied mit 4 Eingängen hat also 16 Fälle (Bild 2.33).

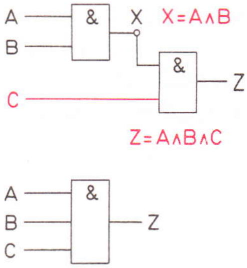


Bild 2.30 Zusammenschaltung von zwei UND-Gliedern mit je zwei Eingängen zu einer UND-Schaltung mit 3 Eingängen

Fall	C	B	A	Z
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Bild 2.31 Wahrheitstabelle einer UND-Schaltung und eines UND-Gliedes mit 3 Eingängen

Fall	D	C	B	A
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Bild 2.33 Wahrheitstabelle für ein UND-Glied mit 4 Eingängen

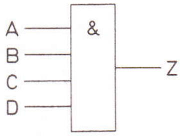


Bild 2.32 UND-Glied mit 4 Eingängen

Durch jeden hinzukommenden Eingang verdoppelt sich die Zahl der Fälle in der Wahrheitstabelle.

Bei 2 Eingängen ergeben sich 4 Fälle, bei 3 Eingängen 8 Fälle, bei 4 Eingängen 16 Fälle und bei 5 Eingängen 32 Fälle. Bei der Aufstellung von Wahrheitstabellen ist die Reihenfolge, in der die Fälle aufgeführt werden, grundsätzlich frei wählbar. Man muß aber alle Fälle berücksichtigen und darf keinen Fall doppelt haben. Damit man sich die Arbeit nicht unnötig schwer macht, empfiehlt sich folgendes Schema:
Der erste Eingang (z.B. A) wechselt von Fall zu Fall den Zustand. Der zweite Eingang (z.B. B) wechselt nach jeweils 2 Fällen den Zustand. Der dritte Eingang (z.B. C) wechselt nach jeweils 4 Fällen den Zustand. Wenn man in diesem Schema fortfährt, wechselt der 4. Eingang (z.B. D) nach jeweils 8 Fällen den Zustand und so fort. Dieses Schema hat sich in der Praxis bewährt. Die hier angegebenen Wahrheitstabellen werden stets nach diesem Schema geschrieben.
UND-Glieder und auch ODER-Glieder werden überwiegend mit 2 bis 4 Eingängen gebaut. Dies gilt ebenfalls für NAND- und NOR-Glieder. Gelegentlich stößt man jedoch auf Glieder mit 8 und mehr Eingängen.

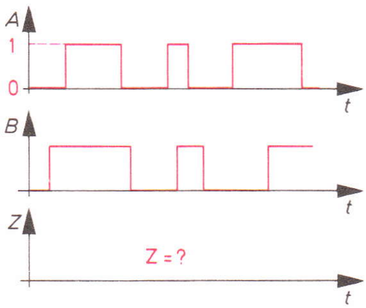
2.4 Lernziel-Test

1. Stellen Sie die genormten Schaltzeichen für die Glieder UND, ODER, NICHT, NAND und NOR dar. Alle Glieder bis auf das NICHT-Glied sollen zwei Eingänge haben.
2. Gesucht ist die Wahrheitstabelle eines ODER-Gliedes mit drei Eingängen. Die Eingänge haben die Bezeichnungen A, B, C. Der Ausgang hat die Bezeichnung Z.
3. Ein NAND-Glied soll aus Grundgliedern aufgebaut werden. Geben Sie eine mögliche Zusammenschaltung von Grundgliedern an.
4. Skizzieren Sie die Wahrheitstabelle eines NICHT-Gliedes mit dem Eingang A und dem Ausgang Y.
5. Für ein ANTIVALENZ-Glied wird die Gleichung $Z = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$ angegeben. Es soll aus Gliedern UND, ODER und NICHT gemäß der Gleichung aufgebaut werden. Zeichnen Sie das Schaltbild.
6. Beschreiben Sie mit Worten die Funktionen eines UND-Gliedes und eines ODER-Gliedes.
7. Wie viele Fälle hat die Wahrheitstabelle eines ODER-Gliedes mit sechs Eingängen?
8. Was versteht man unter einem EXKLUSIV-ODER-Glied? Geben Sie für dieses Glied die Wahrheitstabelle an.
9. Wie heißt das Verknüpfungsglied, das eine Verknüpfung gemäß der Wahrheitstabelle Bild 2.34 erzeugt?

Fall	B	A	Z
1	0	0	1
2	0	1	0
3	1	0	0
4	1	1	0

Bild 2.34 Wahrheitstabelle

10. Welche Bedeutung hat die Verknüpfung INHIBITION? Wie kann ein INHIBITIONS-Glied aus Grundgliedern aufgebaut werden? Skizzieren Sie eine mögliche Schaltung.
11. Der zeitliche Verlauf der Eingangszustände A und B ist in Bild 2.35 dargestellt. Wie sieht der zeitliche Verlauf des Ausgangszustandes Z aus, wenn A und B
    a) durch ein UND-Glied,
    b) durch ein ODER-Glied verknüpft werden?



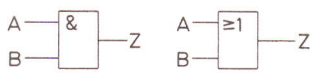


Bild 2.35 Verknüpfung von zwei Eingangssignalen A und B

12. Welche Verknüpfung erzeugt die Schaltung Bild 2.36?

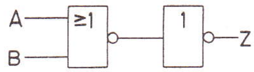


Bild 2.36 Verknüpfungsschaltung

13. Stellen Sie die Wahrheitstabelle eines NOR-Gliedes mit fünf Eingängen dar. Die Eingänge heißen E_1, E_2, E_3, E_4 und E_5. Der Ausgang heißt X.
14. In Bild 2.37 sind die Eingangssignale A und B und das Ausgangssignal Z eines Verknüpfungsgliedes dargestellt. Welche Verknüpfung erzeugt dieses Glied?

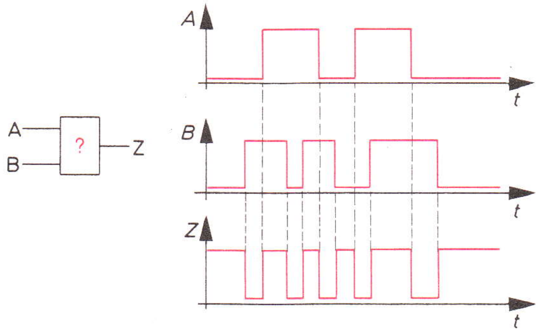


Bild 2.37 Verknüpfung von zwei Eingangssignalen A und B zu einem Ausgangssignal Z

3 Schaltungsanalyse

Verknüpfungsglieder – auch logische Glieder genannt – werden selten einzeln eingesetzt. Meist besteht eine Digitalschaltung aus recht vielen logischen Gliedern, die gemeinsam die gewünschte Verknüpfung erzeugen. Es ist also für die Praxis außerordentlich wichtig, Zusammenschaltungen von logischen Gliedern analysieren zu können. Das heißt, man muß feststellen können, welche Verknüpfungen erzeugen einzelne Schaltungsteile, und welche Verknüpfung erzeugt die Gesamtschaltung. Das Feststellen dieser Verknüpfungen bezeichnet man als *Schaltungsanalyse.*

Der Begriff «Digitalschaltung» ist hier als digitale Verknüpfungsschaltung zu verstehen, also als eine Digitalschaltung ohne irgendwelche Zeitabhängigkeiten. Digitalschaltungen mit Zeitabhängigkeiten werden in späteren Abschnitten behandelt.

3.1 Wahrheitstabelle und Digitalschaltung

Im Abschnitt 2.2 wurden die Verknüpfungen der aus mehreren Grundgliedern zusammengesetzten Glieder mit Hilfe von Wahrheitstabellen gefunden. Da man für mehrere zusammengeschaltete Glieder eine Wahrheitstabelle aufstellen kann, ist es auch möglich, eine Wahrheitstabelle für eine aus vielen Gliedern bestehende vollständige Digitalschaltung zu erstellen.

Für jede Digitalschaltung kann eine Wahrheitstabelle angegeben werden.

3.1.1 Wahrheitstabelle einer Digitalschaltung mit 2 Eingängen

Für die Digitalschaltung nach Bild 3.1 soll eine Wahrheitstabelle aufgestellt werden. Die Wahrheitstabelle gibt Auskunft darüber, welche Verknüpfung die Schaltung insgesamt erzeugt.

Da die Schaltung zwei Eingänge hat (A, B), kommen nur 4 Fälle in Frage. Die Fallnummern und die Kombinationen der Eingangszustände für A und B können nach dem vorstehend näher besprochenen Schema geschrieben werden (Bild 3.2).

Das Glied I ist ein NICHT-Glied. Wenn man die Eingangszustände mit A bezeichnet, werden die Ausgangszustände mit $\overline{A}$ bezeichnet. Eine weitere Spalte der Wahrheitstabelle erhält die Überschrift $\overline{A}$ (rote Darstellung in Bild 3.3). In den Fällen, in denen $A = 0$ ist, wird $\overline{A} = 1$. Dies sind die Fälle 1 und 3. In den Fällen, in denen $A = 1$ ist, wird $\overline{A} = 0$. Dies sind die Fälle 2 und 4.

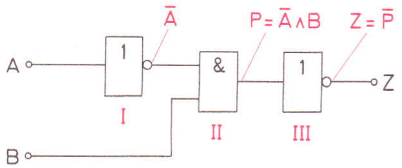


Bild 3.1 Digitalschaltung

Fall	B	A
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1

Bild 3.2 Erster Schritt beim Aufstellen einer Wahrheitstabelle

Fall	B	A	$\overline{A}$	$P = \overline{A} \wedge B$	$Z = \overline{P}$
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0
4	1	1	0	0	1

Bild 3.3 Weitere Schritte beim Aufstellen einer Wahrheitstabelle

Der eine Eingang des UND-Gliedes (Glied II) hat die Bezeichnung $\overline{A}$, der andere Eingang hat die Bezeichnung B. Die UND-Verknüpfung erfolgt also zwischen den Zuständen von $\overline{A}$ und den Zuständen von B. Die zugehörigen Spalten in der Wahrheitstabelle Bild 3.3 sind durch rote Striche gekennzeichnet. Der Ausgang des UND-Gliedes heißt P. Für P gilt die Gleichung:

$$P = \overline{A} \wedge B$$

P ist nur dann 1, wenn sowohl $\overline{A} = 1$ als auch $B = 1$ ist. Dies trifft nur für den Fall 3 zu. P ist also nur im 3. Fall 1, in allen anderen Fällen 0 (Bild 3.3).
Der Eingang des Gliedes III (NICHT-Glied) heißt P, der Ausgang heißt Z. Da das NICHT-Glied die Zustände von P negiert, ist $Z = \overline{P}$. Aus einer 0 in der P-Spalte wird eine 1 in der Z-Spalte. Die Z-Spalte ist die Ergebnisspalte. Sie gibt die Gesamtverknüpfung der Schaltung an.
Für Z kann man folgende Gleichungen angeben:

$$Z = \overline{P}$$

$$Z = \overline{\overline{A} \wedge B} \quad (\text{da } P = \overline{A} \wedge B)$$

Die Gleichungen beschreiben die Wirkungsweise der Schaltung, das heißt ihre Verknüpfungseigenschaft.

3.1.2 Wahrheitstabelle einer Digitalschaltung mit 3 Eingängen

Stellen wir nun die Wahrheitstabelle für eine Digitalschaltung mit drei Eingängen nach Bild 3.4 auf.
Eine Digitalschaltung mit drei Eingängen hat 8 Fälle. Die Fallnummern und die Kombinationen der Eingangszustände für A, B, C werden nach dem bekannten Schema (siehe Abschnitt 2.3) dargestellt (Bild 3.5). Dann werden zwei Spalten für $\overline{A}$ und $\overline{B}$ vorgesehen.

Bild 3.4 Digitalschaltung

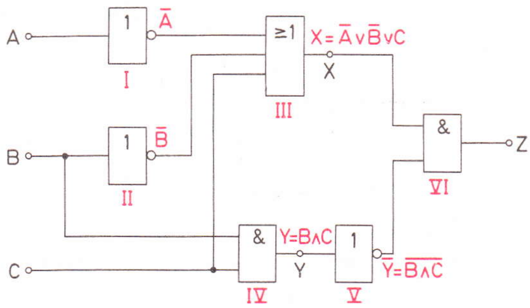


Bild 3.5 Wahrheitstabelle der Digitalschaltung Bild 3.4

Fall	C	B	A	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$X=\overline{A}\vee\overline{B}\vee C$	$Y=B\wedge C$	$\overline{Y}$	$Z=X\wedge\overline{Y}$
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1	1
4	0	1	1	0	0	0	0	1	0
5	1	0	0	1	1	1	0	1	1
6	1	0	1	0	1	1	0	1	1
7	1	1	0	1	0	1	1	0	0
8	1	1	1	0	0	1	1	0	0

In der Spalte $\overline{A}$ erscheinen die für die einzelnen Fälle gültigen Zustände von A negiert. (Aus 0 wird 1, aus 1 wird 0.)

Die Eingänge des ODER-Gliedes heißen $\overline{A}$, $\overline{B}$, C. Die Zustände dieser drei Spalten erfahren eine ODER-Verknüpfung. Am Ausgang X liegt immer dann 1, wenn mindestens ein Eingangszustand 1 ist.

Die drei zu betrachtenden Spalten sind in Bild 3.5 durch rote Balken gekennzeichnet. Für den Fall 1 ist X = 1, da sowohl $\overline{A}$ = 1 als auch $\overline{B}$ = 1 sind. Ebenfalls ist X = 1 im Fall 2, da hier $\overline{B}$ = 1 ist. Gehen wir alle Fälle durch, stellen wir fest, daß X nur im Fall 4 den Zustand 0 hat. In allen anderen Fällen ist X = 1.

Eine weitere Spalte ist in der Wahrheitstabelle für Y vorzusehen. Y ist die UND-Verknüpfung von B mit C. Die Spalten von B und C sind jetzt nur zu betrachten. Sie sind in Bild 3.5 mit schwarzen Balken gekennzeichnet. Nur in den Fällen wird Y = 1, in denen sowohl B als auch C den Zustand 1 haben. Es sind dies die Fälle 7 und 8.

Y ist jetzt der Eingang des Gliedes V, und dieses Glied ist ein NICHT-Glied. Die Zustände von Y sind also zu negieren. Der Ausgang des Gliedes V wird $\overline{Y}$ genannt. Für $\overline{Y}$ ist eine weitere Spalte in der Wahrheitstabelle vorzusehen und die sich ergebenden Zustände einzutragen.

Das Glied VI ist ein UND-Glied mit den Eingängen X und $\overline{Y}$. Die Zustände von X und $\overline{Y}$ müssen also einer UND-Verknüpfung unterworfen werden. Zu betrachten sind die Spalten in Bild 3.5, die mit gestrichelten Balken gekennzeichnet sind. Der Ausgang Z ist nur dann 1, wenn X = 1 und $\overline{Y}$ = 1 sind. Das ist in den Fällen 1, 2, 3, 5 und 6 gegeben.

Für Z kann eine schaltalgebraische Gleichung angegeben werden, die wie folgt gebildet wird:

$$Z = X \wedge \overline{Y} \qquad X = \overline{A} \vee \overline{B} \vee C$$
$$\overline{Y} = \overline{B \wedge C} \quad (\text{da } Y = B \wedge C)$$

$$Z = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C) \wedge \overline{B \wedge C}$$

Diese Gleichung drückt die Verknüpfungseigenschaft der Schaltung aus.
Es wird empfohlen, das Erstellen von Wahrheitstabellen mit Aufgaben aus Abschnitt 3.4 zu üben.

3.2 Funktionsgleichung und Digitalschaltung

3.2.1 Bestimmung der Funktionsgleichung einer gegebenen Digitalschaltung

Die Verknüpfungseigenschaft einer Digitalschaltung kann durch eine Wahrheitstabelle ausgedrückt werden. Die einzelnen Schritte beim Erstellen der Wahrheitstabelle führen zu einer Gleichung für den Ausgang der Schaltung, in der nur die Eingangsgrößen oder ihre Negationen vorkommen (siehe Abschnitt 2.1.2). Eine solche Gleichung drückt die Funktion der ganzen Schaltung aus. Sie wird daher *Funktionsgleichung* genannt.

> *Für jede Digitalschaltung kann eine Funktionsgleichung angegeben werden.*

Die Funktionsgleichung kann aus der Digitalschaltung entnommen werden. Der Umweg über die Wahrheitstabelle ist nicht erforderlich.

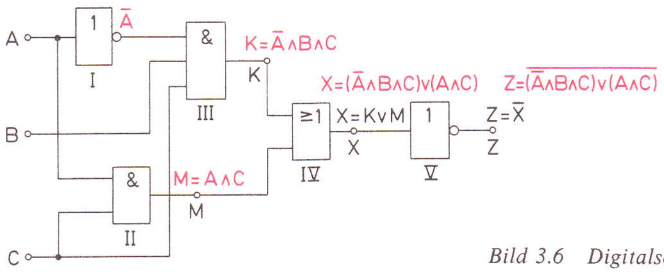


Bild 3.6 Digitalschaltung

Die Digitalschaltung Bild 3.6 besteht aus den Gliedern I bis V. Wenn der Eingang des Gliedes I A heißt, so ergibt sich für den Ausgang $\overline{A}$. Die Eingänge des Gliedes II heißen A und C. Der Ausgang bekommt die frei gewählte Bezeichnung M. Für M gilt:

$$M = A \wedge C$$

Die Eingänge des Gliedes III heißen $\overline{A}$, B, C. Der Ausgang bekommt den Namen K.

$$K = \overline{A} \wedge B \wedge C$$

M und K sind nun die Eingänge des Gliedes IV. Ihre Zustände erfahren eine ODER-Verknüpfung. Der Ausgang von Glied IV wird X genannt.

$$X = K \vee M$$

In diese Gleichung können die schon bekannten Verknüpfungen für K und M eingesetzt werden.

$$X = \overbrace{(\overline{A} \wedge B \wedge C)}^{K} \vee \overbrace{(A \wedge C)}^{M}$$

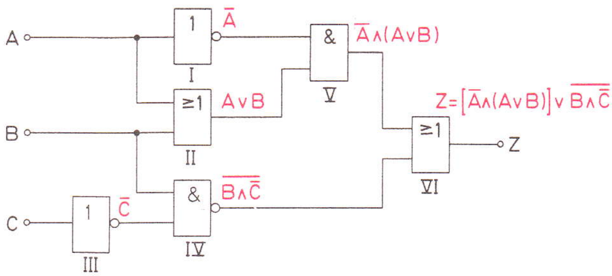
X ist auch der Eingang des Gliedes V. Da das Glied V die Zustände von X negiert, gilt:

$$Z = \overline{X} \quad \text{und}$$

$$\boxed{Z = \overline{(\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge C)}} \quad (\text{da } X = (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge C) \text{ ist}).$$

Die gerahmte Gleichung für Z ist die gesuchte Funktionsgleichung.
Wenn man die Zusammenhänge durchschaut, kann man sich die Bezeichnungen K, M und X im vorstehenden Beispiel sparen. Ein Eingang kann auch z.B. $(A \wedge C)$ heißen, also durch einen schaltalgebraischen Ausdruck bezeichnet werden.

Bild 3.7 Digitalschaltung



Suchen wir die Funktionsgleichung für die Schaltung nach Bild 3.7.
An die Ausgänge der Glieder werden die sich ergebenden Verknüpfungsausdrücke geschrieben, an den Ausgang von Glied I also $\overline{A}$, an den Ausgang von Glied II $A \vee B$ usw. Diese Ausdrücke sind gleichzeitig die Namen der Eingänge der folgenden Glieder. Glied IV hat die Eingänge $\overline{C}$ und B. Die UND-Verknüpfung führt auf $B \wedge \overline{C}$. Da das Glied IV aber ein NAND-Glied ist, muß der ganze Ausdruck nochmals negiert werden, so daß sich $\overline{B \wedge \overline{C}}$ am Ausgang ergibt.

Am Ausgang des Gliedes V muß dann $\overline{A} \wedge (A \vee B)$ stehen, da die Eingänge $\overline{A}$ und $A \vee B$ sind.
Zusammengehörige Ausdrücke sollten stets in Klammern gesetzt werden. In Kapitel 4 (Schaltalgebra) wird zwar gesagt, daß gemäß Verabredung das UND-Verknüpfungszeichen stärker bindet als das ODER-Verknüpfungszeichen. Sicherheitshalber sollte man jedoch – wenigstens in der Einarbeitungszeit – immer Klammern setzen. Durchgehende Negationsstriche wirken wie Klammern.
Ein Eingang des Gliedes VI ist mit dem Ausdruck $\overline{A} \wedge (A \vee B)$ bezeichnet. Dieser Ausdruck sollte insgesamt in Klammern gesetzt werden. Der zweite Eingang des Gliedes VI ist mit dem Ausdruck $\overline{B \wedge \overline{C}}$ bezeichnet. Hier ist keine Klammer erforderlich, da der Negationsstrich wie eine Klammer wirkt.
Für Z ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$Z = [\overline{A} \wedge (A \vee B)] \vee \overline{B \wedge \overline{C}}$$

Diese Gleichung ist die gesuchte Funktionsgleichung.
Angenommen das Glied VI in Bild 3.7 sei ein NOR-Glied. Wie würde dann die Funktionsgleichung aussehen? Die für Z gefundene Gleichung müßte insgesamt negiert werden. Dies wird durch einen über den ganzen Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen gehenden Negationsstrich angegeben.

$$Z = \overline{[\overline{A} \wedge (A \vee B)] \vee \overline{B \wedge \overline{C}}}$$

Die gefundene Gleichung sieht komplizierter aus, als sie tatsächlich ist.

3.2.2 Darstellung einer Digitalschaltung nach gegebener Funktionsgleichung

In der Praxis kommt es sehr häufig vor, daß eine schaltalgebraische Gleichung nach Berechnungen gefunden wurde. Die Gleichung gibt eine Verknüpfung an. Gesucht ist die Schaltung, die diese Verknüpfung verwirklicht. Die Gleichung wird also zur Funktionsgleichung für eine noch zu bestimmende Schaltung.
Für die Gleichung

$$Z = \overline{A \vee \overline{B} \vee \overline{C}} \wedge (A \vee \overline{C})$$

soll eine entsprechende Schaltung gefunden werden.
Zunächst ist aus der Gleichung die Zahl der Eingänge abzulesen. Eingänge sind A, B und C. Zur Erzeugung von $\overline{B}$ und $\overline{C}$ sind zwei NICHT-Glieder erforderlich (Bild 3.8). Den Ausdruck $A \vee \overline{B} \vee \overline{C}$ erhält man durch ein ODER-Glied mit drei Eingängen. Diesem Glied muß ein NICHT-Glied nachgeschaltet werden.
Für $(A \vee \overline{C})$ ist ein ODER-Glied mit zwei Eingängen erforderlich. Die Ausgänge mit den Bezeichnungen $\overline{A \vee \overline{B} \vee \overline{C}}$ und $(A \vee \overline{C})$ werden auf die Eingänge eines UND-Gliedes geführt.
Statt eines ODER-Gliedes mit 3 Eingängen und nachgeschaltetem NICHT-Glied kann auch ein NOR-Glied mit drei Eingängen Verwendung finden (Bild 3.9).

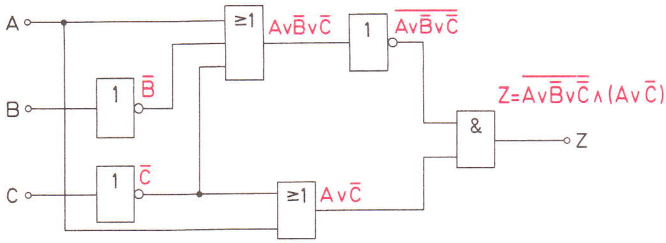


Bild 3.8 Schaltung zu gegebener Gleichung

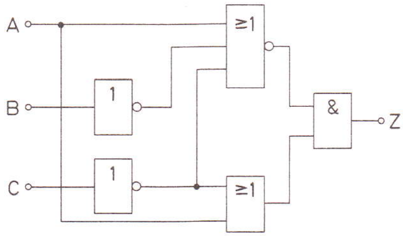


Bild 3.9 Schaltung zu gegebener Gleichung, Verwendung eines NOR-Gliedes

3.3 Soll-Verknüpfung und Ist-Verknüpfung

Unter der Soll-Verknüpfung versteht man die logische Verknüpfung, die eine Schaltung aufgrund ihres Aufbaus verwirklichen soll. Die Ist-Verknüpfung ist die Verknüpfung, die die Schaltung im praktischen Betrieb tatsächlich zeigt.

> *Bei einer einwandfrei funktionierenden Schaltung sind Soll-Verknüpfung und Ist-Verknüpfung gleich.*

Weicht die Ist-Verknüpfung von der Soll-Verknüpfung ab, so hat die Schaltung einen oder mehrere Fehler, die gefunden und behoben werden müssen.

3.3.1 Bestimmung der Ist-Verknüpfung

Die Soll-Verknüpfung ergibt sich aus der für die Schaltung aufzustellenden Wahrheitstabelle. Die Ist-Verknüpfung muß meßtechnisch bestimmt werden.

> *Vor Beginn der Messung ist die Zuordnung der Spannungspegel zu den logischen Zuständen 0 und 1 festzustellen.*

Zur Feststellung der 1- und 0-Zustände bzw. der zugehörigen Pegel benötigt man einen sogenannten Logiktester. Solche Geräte gibt es klein in Form eines Füllhalters. Sie enthalten einen kleinen Transistorverstärker und zur Anzeige eine oder zwei Leucht-

dioden. Geräte mit einer Leuchtdiode stellen nur die 1-Zustände, also die hohen Pegel (hier +5 V) fest. Wenn die Diode nicht leuchtet, heißt das 0. Mit einem solchen Gerät lassen sich Unterbrechungen von Leitungen, auf denen gerade der Zustand 0 liegt, nicht feststellen. Der Zustand 0 entspricht meist ja «Masse» und nicht einer offenen Leitung.
Besser sind Geräte mit zwei Leuchtdioden. Eine rote Diode zeigt z.B. den 1-Zustand an, eine grüne Leuchtdiode den 0-Zustand. Leuchtet keine Diode, liegt eine Leitungsunterbrechung vor. Man kann sich einen solchen Logiktester mit einem kleinen Transistorverstärker selbst bauen. Der Eingang sollte möglichst hochohmig sein.
Neben den kleinen Logiktestern gibt es auf dem Markt kompliziertere Geräte, die es gestatten, alle Eingänge und Ausgänge gleichzeitig zu testen. Die erforderliche Arbeitszeit wird dadurch wesentlich verringert. Der letzte Entwicklungsstand sind computergesteuerte Testgeräte, die eine ganze Platine vollautomatisch durchtesten und Art und Lage von Fehlern genau anzeigen.
Die Bestimmung der Ist-Verknüpfung soll an einem Beispiel gezeigt werden. Angenommen wird, daß die Schaltung nach Bild 3.10 praktisch aufgebaut vorhanden ist. Benötigt wird ein einfacher Logiktester, der 1- und 0-Signale bzw. hohe und niedrige Pegel anzeigt.

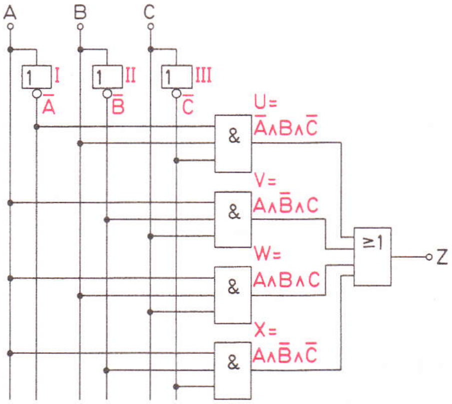


Bild 3.10
Digitalschaltung

Für die Zuordnung gilt:

$$0 \triangleq 0\ V\ (\text{Masse})$$
$$1 \triangleq +5\ V$$

Als Meßprotokoll verwendet man eine Tabelle, die wie eine Wahrheitstabelle aufgebaut ist (Bild 3.11).
Zunächst wird der Fall 1 gemessen. Alle drei Eingänge erhalten den Zustand 0, werden

Bild 3.11

Fall	C	B	A	$\overline{C}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	U= $\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}$	V= $A\wedge\overline{B}\wedge C$	W= $A\wedge B\wedge C$	X= $A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}$	Z
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
3	0	1	0								
4	0	1	1								
5	1	0	0								
6	1	0	1								
7	1	1	0								
8	1	1	1								

also an Masse gelegt. Jetzt werden an den Ausgängen der einzelnen Glieder – also $\overline{C}$, $\overline{B}$, $\overline{A}$, U, V, W, X, Z – die Zustände gemessen und eingetragen (rote Angaben in Bild 3.11).

Ist der Fall 1 gemessen, kommt der Fall 2 dran. An A wird 1 gelegt, an B und C wird 0 gelegt. Wieder werden die Ausgänge der einzelnen Glieder gemessen und die Zustände in die Tabelle eingetragen.

Diese Messung wird für alle 8 Fälle durchgeführt.

> *Die Meßtabelle zeigt die Ist-Verknüpfung.*

Ist zu erwarten, daß die Schaltung fehlerfrei ist, kann man sich auf das Feststellen der Zustände Z beschränken. Sind die Zustände Z verschieden von denen der Soll-Verknüpfung, so muß die Messung aller Ausgangszustände nachgeholt werden.

3.3.2 Fehlerbestimmung

Liegen Wahrheitstabelle und Meßtabelle vor, können die Fehler bestimmt werden.

> *Die Fehlerbestimmung erfolgt durch Vergleich von Soll- und Ist-Verknüpfung.*

Stimmen Soll- und Ist-Verknüpfung überein, liegt kein Fehler vor. Man vergleicht zunächst die Ausgangszustände der Gesamtschaltung. Stimmen hier die Zustände überein, braucht man nicht weiter zu vergleichen. Die Schaltung ist in Ordnung. Stimmen die Ausgangszustände nicht überein, muß schrittweise von den Eingängen her verglichen werden.

Bild 3.12 zeigt die Wahrheitstabelle der Schaltung nach Bild 3.10 und eine Meßtabelle. Welche Glieder arbeiten fehlerhaft?

Vergleicht man die Spalten von links her, so erkennt man bei $\overline{B}$ einen Fehler. Das NICHT-Glied, das $\overline{B}$ erzeugen soll (Glied Nr. II), hat immer den Ausgangszustand 1. Es ist also defekt.

Der Fehler von Glied II wirkt sich auf die Ausgänge V und X aus, denn nur diese Glieder

Fall	C	B	A	$\bar{C}$	$\bar{B}$	$\bar{A}$	U= $\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}$	V= $A\wedge\bar{B}\wedge C$	W= $A\wedge B\wedge C$	X= $A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}$	Z
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	**1**	**1**
3	0	1	0	1	0	1	**1**	0	0	0	**1**
4	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	0	0	**1**	0	0	**1**
7	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0	0	0	**1**	0	**1**

Wahrheitstabelle

Fall	C	B	A	$\bar{C}$	$\bar{B}$	$\bar{A}$	U= $\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}$	V= $A\wedge\bar{B}\wedge C$	W= $A\wedge B\wedge C$	X= $A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}$	Z
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	**1**	**1**
3	0	1	0	1	$\boxed{1}$	1	**1**	0	0	0	**1**
4	0	1	1	1	$\boxed{1}$	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1	0	0	**1**	0	0	**1**
7	1	1	0	0	$\boxed{1}$	1	0	0	0	0	0
8	1	1	1	0	$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$	**1**	0	**1**

Meßtabelle

Bild 3.12 Wahrheitstabelle und Meßtabelle einer Digitalschaltung

verknüpfen auch $\bar{B}$. Für V und X ergibt sich aus der Meßtabelle aber eine richtige Verknüpfung – unter der Berücksichtigung, daß $\bar{B}$ immer 1 ist. Die Glieder V und X sind also in Ordnung.

Ein weiterer Fehler zeigt sich bei W. Das Glied W ist ebenfalls defekt. Die fehlerhafte Verknüpfung ist nicht auf den Fehler von Glied II zurückzuführen, denn $W = A \wedge B \wedge C$ beinhaltet $\bar{B}$ nicht.

Die Glieder II und W müssen also ausgewechselt werden.

3.4 Lernziel-Test

1. Für die Schaltung Bild 3.13 ist die Wahrheitstabelle aufzustellen.

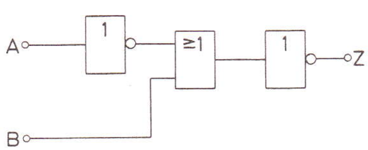


Bild 3.13 Digitalschaltung

2. Wie sieht die Wahrheitstabelle für die Schaltung Bild 3.14 aus?
3. In der Schaltung Bild 3.14 soll Glied II defekt sein. In allen Fällen liegt am Ausgang des Gliedes II 1-Signal. Welche Verknüpfung ergibt sich durch diesen Fehler? Stellen Sie die Ist-Verknüpfung in einer entsprechenden Tabelle dar.

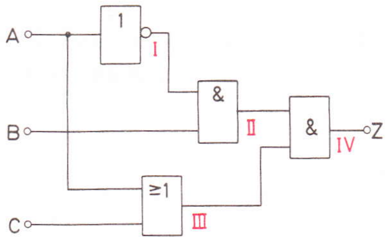


Bild 3.14
Digitalschaltung

4. Bestimmen Sie für die Schaltung Bild 3.15 die Funktionsgleichung, und stellen Sie die Wahrheitstabelle auf.

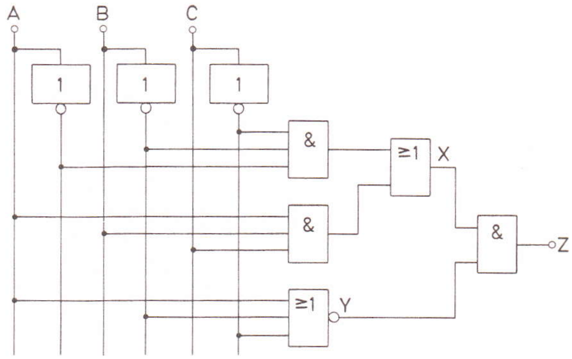


Bild 3.15
Digitalschaltung

5. Gesucht ist eine Digitalschaltung, die die folgende Funktionsgleichung erfüllt:

$$Z = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{\overline{\overline{A} \wedge B \wedge C}}$$

6. Für eine Digitalschaltung wird folgende Gleichung angegeben:

$$Z = \overline{\overline{A} \vee B \vee C} \wedge \overline{\overline{A \vee \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \vee \overline{A \wedge D}}}$$

Erstellen Sie das Schaltbild einer Schaltung, die die vorstehende Gleichung erfüllt, und geben Sie die zugehörige Wahrheitstabelle an.

7. Die Schaltung Bild 3.16 arbeitet fehlerhaft. Es wurde die Meßtabelle Bild 3.17 aufgenommen, die die Ist-Verknüpfung angibt. Bestimmen Sie die fehlerhaften Glieder.

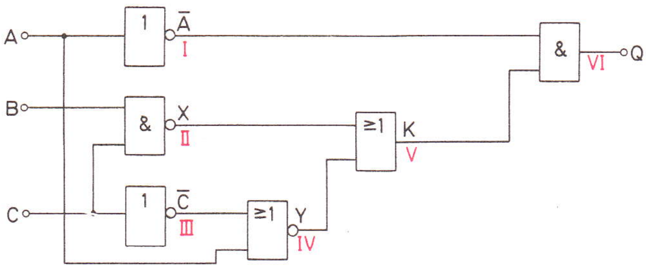


Bild 3.16 Fehlerhaft arbeitende Digitalschaltung

Fall	C	B	A	$\bar{A}$	$\bar{C}$	X	Y	K	Q
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	0	1	1	1	1	0
3	0	1	0	1	1	1	1	1	1
4	0	1	1	0	1	1	0	1	0
5	1	0	0	1	0	1	1	1	1
6	1	0	1	0	0	1	0	1	0
7	1	1	0	1	0	0	1	1	1
8	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Bild 3.17 Meßtabelle der IST-Verknüpfung

4 Schaltalgebra

Will man mit Digitalschaltungen bestimmte Steuerungsaufgaben oder Rechenvorgänge ausführen, muß man Schaltungen finden, die das Gewünschte «können». Schaltungen für einfache Aufgaben lassen sich durch Probieren finden (siehe auch Kapitel 5). Das Probieren wird jedoch immer mühsamer und die Aussicht auf Erfolg immer geringer, je komplizierter die Anforderungen an die Schaltungen werden.
Selbst wenn man nach langer Mühe eine Schaltung durch Probieren gefunden hat, ist diese vielleicht unnötig umfangreich und daher unwirtschaftlich. Man müßte die einfachste mögliche Schaltung finden. Durch Probieren ist diese Aufgabe nicht zu lösen.
Die von Boole (engl. Mathematiker, 1815 bis 1864) entwickelte Algebra ist eine Mengenalgebra, von der sich die heute in den Schulen vermittelte «Mengenlehre» ableitet. Eine Sonderform der Booleschen Algebra ist die Schaltalgebra. Mit ihrer Hilfe lassen sich Digitalschaltungen berechnen und weitgehend vereinfachen.

4.1 Variable und Konstante

Die Schaltalgebra kennt *Variable* und *Konstante* wie die normale Algebra auch. Es gibt jedoch nur zwei mögliche Konstante, nämlich 0 und 1. Eine beliebige Variable kann entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annehmen.

> *Die Schaltalgebra kennt nur zwei Konstante: 0 und 1*

Diese Konstanten entsprechen den logischen Zuständen 0 und 1.

Jede Größe, die entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annehmen kann, stellt eine Variable dar. Die Eingangsgrößen einer Schaltung, z.B. A, B, C, sind Variable, denn sie können 1 oder 0 sein. Ebenso sind die Ausgangsgrößen einer Schaltung Variable. Ausdrücke wie $(A \wedge B)$, die an sich aus zwei Variablen bestehen, können wie eine Variable behandelt werden, denn ihr Wert kann ebenfalls nur 0 oder 1 sein.

> *Variable der Schaltalgebra sind Größen, die die Werte oder Zustände 0 oder 1 annehmen können.*

Eine Variable der Schaltalgebra ist also eine binäre Größe. Sie kann durch einen Schalter (Bild 4.1) veranschaulicht werden. Folgende Verabredung soll gelten:

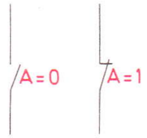


Bild 4.1 Veranschaulichung der Variablen A und ihrer möglichen Werte 0 und 1

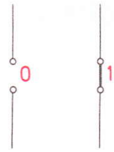


Bild 4.2 Veranschaulichung der Konstanten 0 und 1

Schalter offen:	*Variable 0*
Schalter geschlossen:	*Variable 1*

Diese Darstellung der Variablen ist sehr einfach zu verstehen. Kann man ähnlich einfach die Konstanten darstellen? Man könnte die Konstanten als «festgebundene Schalter» auffassen. Ist ein Schalter im geöffneten Zustand festgebunden, kann er nicht mehr schalten und hat stets den Wert 0. Bindet man den Schalter im geschlossenen Zustand fest, so kann er ebenfalls nicht mehr schalten und hat stets den Wert 1.
Ein dauernd geöffneter Schalter ist aber eine Leitungsunterbrechung. Ein dauernd geschlossener Schalter ist eine durchgeschaltete Leitung (Bild 4.2).

Leitung unterbrochen:	*0*
Leitung durchgeschaltet:	*1*

4.2 Grundgesetze der Schaltalgebra

Die Grundgesetze der Schaltalgebra, auch Postulate genannt, sind Regeln für die Verknüpfung von Konstanten.
Die Grundgesetze für die UND-Verknüpfung zeigt Bild 4.3. Schaltungsmäßig führt die UND-Verknüpfung auf eine Reihenschaltung. Zwei in Reihe geschaltete Leitungsunterbrechungen wirken nicht anders als eine Leitungsunterbrechung allein. Schaltet man eine Unterbrechung in Reihe mit einer Durchschaltung, bleibt die Wirkung der Unterbrechung erhalten. Zwei Durchschaltungen in Reihe ergeben eine Gesamtdurchschaltung (Bild 4.3).
Die ODER-Verknüpfung führt auf eine Parallelschaltung. Die Postulate der ODER-Verknüpfung zeigt Bild 4.4. Zwei Unterbrechungen parallel bedeuten eine Gesamtunterbrechung. Eine Unterbrechung parallel zu einer Durchschaltung bedeutet eine Gesamtdurchschaltung. Zwei Durchschaltungen parallel ergeben ebenfalls eine Gesamtdurchschaltung.
Bei einem NICHT-Glied führt eine 1 am Eingang zu einer 0 am Ausgang und eine 0 am Eingang zu einer 1 am Ausgang (Bild 4.5).

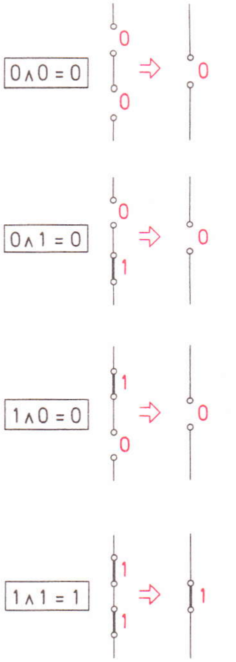


Bild 4.3 Postulate der UND-Verknüpfung

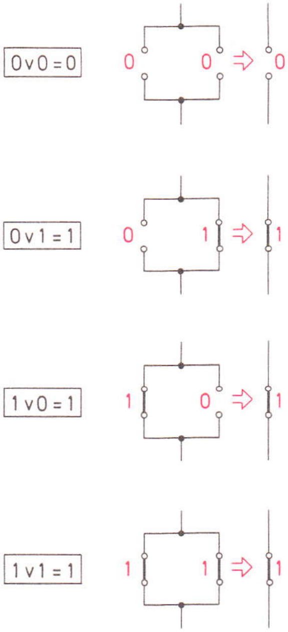


Bild 4.4 Postulate der ODER-Verknüpfung

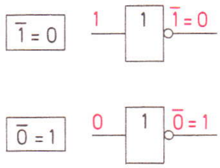


Bild 4.5 Postulate der NICHT-Verknüpfung

4.3 Rechenregeln der Schaltalgebra

4.3.1 Theoreme

Die Rechenregeln für die Verknüpfung einer Variablen mit einer Konstanten oder einer Variablen mit sich selbst oder ihrer Negation heißen *Theoreme.*

Für die Variable wird die Bezeichnung A gewählt. Was für A gilt, das gilt auch für jede andere Variable.

Bild 4.6 zeigt die vier möglichen Theoreme der UND-Verknüpfung. Zur Darstellung von $\overline{A}$ wird ein Ruhekontakt (Öffner) verwendet. Dieser ist immer geschlossen, wenn der Arbeitskontakt geöffnet ist. Er ist geöffnet, wenn der Ruhekontakt geschlossen ist. Somit ist bei $A \wedge \overline{A}$ immer ein Schalter offen, so daß sich eine Leitungsunterbrechung (0) ergeben muß.

Die Veranschaulichung der Theoreme durch die Kontaktschemata ist leicht verständlich. Die Gleichungen der Theoreme lassen sich jedoch auch mit Wahrheitstabellen finden (Bild 4.7).

Die Theoreme der ODER-Verknüpfung ergeben sich aus Bild 4.8. ODER-Verknüpfungen führen zu Parallelschaltungen von Kontakten.

① $\boxed{A \wedge 0 = 0}$

② $\boxed{A \wedge 1 = A}$

③ $\boxed{A \wedge A = A}$

④ $\boxed{A \wedge \bar{A} = 0}$

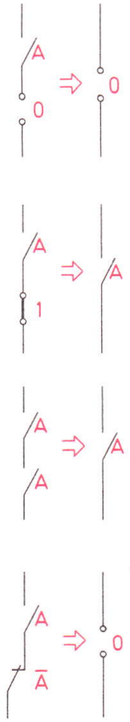
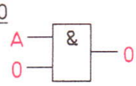
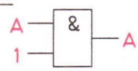


Bild 4.6 Theoreme der UND-Verknüpfung

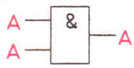
Fall	A	0	Z=A∧0=0
1	0	0	0
2	1	0	0



Fall	A	1	Z=A∧1=A
1	0	1	0
2	1	1	1



Fall	A	A	Z=A∧A=A
1	0	0	0
2	1	1	1



Fall	A	$\bar{A}$	Z=A∧$\bar{A}$=0
1	0	1	0
2	1	0	0

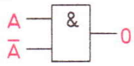


Bild 4.7 Ableitung der Theoreme der UND-Verknüpfung mit Wahrheitstabellen

⑤ $\boxed{A \vee 0 = A}$

⑥ $\boxed{A \vee 1 = 1}$

⑦ $\boxed{A \vee A = A}$

⑧ $\boxed{A \vee \bar{A} = 1}$

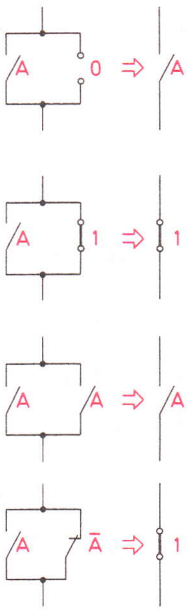
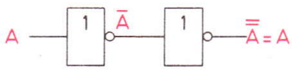


Bild 4.8 Theoreme der ODER-Verknüpfung



⑨ $\boxed{\bar{\bar{A}} = A}$

Fall	A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
	0	1	0
	1	0	1

Bild 4.9 Theoreme der NICHT-Verknüpfung

Wird eine Variable einmal negiert und dann noch einmal, so hat sie wieder ihren alten Wert (Bild 4.9). Zwei Negationsstriche heben sich gegenseitig auf.
Die 9 möglichen Theoreme wurden von 1 bis 9 numeriert. Mit diesen Nummern sind sie in der Formelzusammenstellung erneut aufgeführt.

4.3.2 Kommutativgesetz und Assoziativgesetz

Das Kommutativgesetz heißt auf deutsch Vertauschungsgesetz. Es drückt eine Selbstverständlichkeit aus, wenn man die Kontaktschemata Bild 4.10 und Bild 4.11 betrachtet. Das Kommutativgesetz wird einmal für die UND-Verknüpfung und einmal für die ODER-Verknüpfung angegeben.

Bild 4.10 Kommutativgesetz der UND-Verknüpfung

(10) $\boxed{Z = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B}$

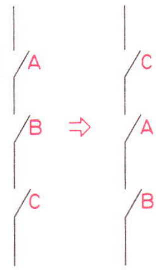
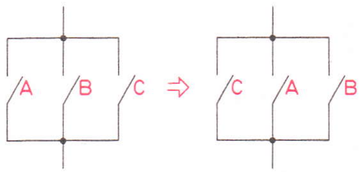


Bild 4.11 Kommutativgesetz der ODER-Verknüpfung



(11) $\boxed{Z = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B}$

> *Die Reihenfolge, in der Variable der UND-Verknüpfung unterzogen werden, ist beliebig. Sie hat keinen Einfluß auf das Ergebnis.*

> *Die Reihenfolge, in der Variable der ODER-Verknüpfung unterzogen werden, ist beliebig. Sie hat keinen Einfluß auf das Ergebnis.*

Das Assoziativgesetz heißt auch Verbindungsgesetz oder Zuordnungsgesetz. Es wird ebenfalls einmal für die UND-Verknüpfung (Bild 4.12) und einmal für die ODER-Verknüpfung (Bild 4.13) angegeben.

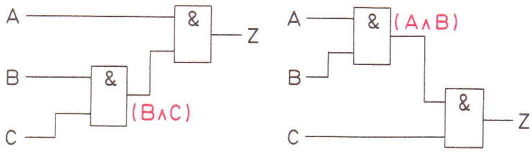


Bild 4.12 *Assoziativgesetz der UND-Verknüpfung*

(12) $\boxed{Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C}$

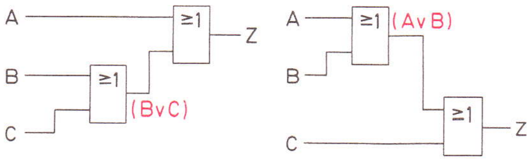


Bild 4.13 *Assoziativgesetz der ODER-Verknüpfung*

(13) $\boxed{Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C}$

Die Reihenfolge der Zuordnung der Variablen bei der UND-Verknüpfung ist beliebig. Sie hat keinen Einfluß auf das Ergebnis.

Die Reihenfolge der Zuordnung der Variablen bei der ODER-Verknüpfung ist beliebig. Sie hat keinen Einfluß auf das Ergebnis.

4.3.3 Distributivgesetz

Das Distributivgesetz heißt zu deutsch Verteilungsgesetz. Es hat eine große praktische Bedeutung bei der Umformung und Vereinfachung schaltalgebraischer Gleichungen. Das Distributivgesetz entspricht der Regel über das Ausmultiplizieren und Ausklammern eines Faktors in der normalen Algebra.
Man unterscheidet das *konjunktive Distributivgesetz* und das *disjunktive Distributivgesetz*. Das konjunktive Distributivgesetz lautet:

(14) $$\boxed{Z = A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}$$

Die Variable A wird durch UND-Verknüpfung «verteilt» auf die Variablen B und C. Die Kontaktschemata Bild 4.14 zeigen die Richtigkeit des Gesetzes. Da die Kontakte A beide stets gleichzeitig schließen und öffnen, kann eine Verbindung (1) nach (2) geschaltet werden, ohne daß sich die Verknüpfung ändert.
Um die Zusammenhänge noch klarer zu zeigen, wird die Richtigkeit des Gesetzes durch eine Wahrheitstabelle überprüft (Bild 4.15). Die Zustände in den beiden Spalten X und Y sind gleich. Das konjunktive Distributivgesetz ist somit richtig.

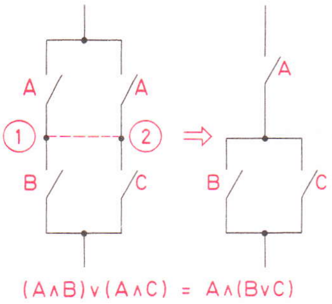


Bild 4.14 Konjunktives Distributivgesetz

Fall	C	B	A	A∧B	A∧C	(A∧B)∨(A∧C) ⓧ	B∨C	A∧(B∨C) ⓨ
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	1	0
4	0	1	1	1	0	**1**	1	**1**
5	1	0	0	0	0	0	1	0
6	1	0	1	0	1	**1**	1	**1**
7	1	1	0	0	0	0	1	0
8	1	1	1	1	1	**1**	1	**1**

(A∧B) ∨ (A∧C) = A∧(B∨C)

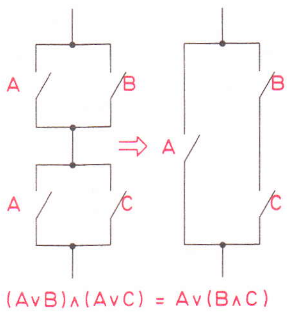
Bild 4.15 Überprüfung der Richtigkeit des konjunktiven Distributivgesetzes mit Wahrheitstabellen

Für das disjunktive Distributivgesetz gilt die Gleichung:

⑮ $$Z = A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Die Variable A wird hier durch ODER-Verknüpfung auf die Variablen B und C «verteilt». Das Kontaktschema Bild 4.16 zeigt die Richtigkeit des Gesetzes. Da die Kontakte A stets zu gleicher Zeit schalten, kann die Schaltung, wie in Bild 4.16 gezeigt, abgeändert werden.

Bild 4.16 Disjunktives Distributivgesetz



Es wird empfohlen, die Richtigkeit des Gesetzes mit einer Wahrheitstabelle entsprechend Bild 4.15 nachzuprüfen.
Die Anwendung des disjunktiven Distributivgesetzes soll an einem Beispiel gezeigt werden. Die Gleichung

$$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$$

soll vereinfacht werden. Entsprechend der Gleichung ⑮ wird umgeformt:

Gleichung 15:

$$
\begin{array}{l}
(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \vee (B \wedge C) \\
\downarrow \quad \downarrow \quad\; \downarrow \quad \downarrow \quad\; \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M) = K \vee (\overline{M} \wedge M)
\end{array}
$$

Der Ausdruck $\overline{M} \wedge M$ ist die UND-Verknüpfung einer Variablen und ihrer Negation. Dieser Ausdruck gibt nach Gleichung 4 Bild 4.6 den Wert 0.

Gleichung 4: $A \wedge \overline{A} = 0$

$$
\begin{array}{l}
A \wedge \overline{A} = 0 \\
\downarrow \quad \downarrow \\
M \wedge \overline{M} = 0
\end{array}
$$

Für Z gilt dann:

$$
\begin{array}{l}
Z = K \vee (\overline{M} \wedge M) \\
Z = K \vee 0 \\
\quad\;\; \uparrow \quad \uparrow
\end{array}
$$

Gleichung 5 $\quad A \vee 0 = A$

Nach Gleichung 5 Bild 4.8 ist eine Variable $\vee$ 0 gleich der Variablen:

$$\underline{\underline{Z = K}}$$

4.3.4 Morgansche Gesetze

Der englische Mathematiker De Morgan (1806 bis 1871) hat die Boolesche Algebra erweitert und die nach ihm benannten Gesetze gefunden. Die Morganschen Gesetze haben eine große praktische Bedeutung bei der Auflösung von Ausdrücken, die insgesamt negiert sind, die also einen langen Negationsstrich haben. Sie werden viel benötigt zur Umrechnung auf NAND- und auf NOR-Verknüpfungen. Es gibt zwei Morgansche Gesetze.

Erstes Morgansches Gesetz:

16 $\quad \boxed{Z = \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}}$

Mit Hilfe der Wahrheitstabelle in Bild 4.17 wird die Richtigkeit dieses Gesetzes nachgeprüft.

Zweites Morgansches Gesetz:

17 $\quad \boxed{Z = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}}$

Beim Vergleich mit dem 1. Morganschen Gesetz sieht man, daß beim 2. Morganschen Gesetz lediglich die Verknüpfungszeichen für UND und ODER ausgetauscht sind.

Fall	B	A	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	1
3	1	0	0	1	1	0	1
4	1	1	1	0	0	0	0

$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$

Bild 4.17 Wahrheitstabelle zum Nachweis der Richtigkeit des 1. Morganschen Gesetzes

Fall	B	A	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$
1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	1	0	0	1	0
3	1	0	1	0	1	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0

$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

Bild 4.18 Wahrheitstabelle zum Nachweis der Richtigkeit des 2. Morganschen Gesetzes

Die Richtigkeit des 2. Morganschen Gesetzes soll ebenfalls mit einer Wahrheitstabelle gezeigt werden (Bild 4.18).

Die Wichtigkeit der Morganschen Gesetze soll folgendes Beispiel zeigen. Die Gleichung

$$P = \overline{R \wedge S} \vee \overline{\bar{R} \wedge S}$$

kann stark vereinfacht werden. Der erste Ausdruck $\overline{R \wedge S}$ ergibt nach dem 1. Morganschen Gesetz $\bar{R} \vee \bar{S}$. Der zweite Ausdruck $\overline{\bar{R} \wedge S}$ ergibt nach dem gleichen Gesetz $\bar{\bar{R}} \vee \bar{S}$. $\bar{\bar{R}}$ ist nach Gleichung ⑨ gleich R.

$$P = \overline{R \wedge S} \vee \overline{\bar{R} \wedge S}$$

$$P = \bar{R} \vee \bar{S} \vee \bar{\bar{R}} \vee \bar{S}$$

$$P = \bar{R} \vee \bar{S} \vee R \vee \bar{S}$$

Die Reihenfolge der Variablen wird geändert. Nach den Gleichungen ⑧, ⑦ und ⑥ wird vereinfacht:

$$P = \underbrace{\bar{R} \vee R}_{} \quad \vee \quad \underbrace{\bar{S} \vee \bar{S}}_{}$$

⑧ $\boxed{\bar{A} \vee A = 1}$ ⑦ $\boxed{A \vee A = A}$

$$P = 1 \vee \bar{S}$$

⑥ $\boxed{1 \vee A = 1}$

$$P = 1$$

Die Morganschen Gesetze gelten auch für Verknüpfungen von mehr als zwei Variablen:

$Z = \overline{A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \cdots} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \cdots$
$Z = \overline{A \vee B \vee C \vee D \vee \cdots} = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D} \wedge \cdots$

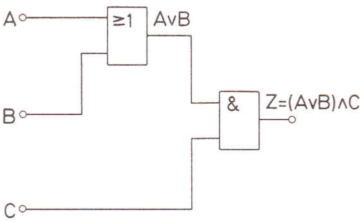
Aufgabe:
Prüfen Sie die Richtigkeit der Morganschen Gesetze für 3 Variable mit Wahrheitstabellen nach.

4.3.5 Bindungsregel

Die Verknüpfung mehrerer Variabler durch UND und ODER kann zu Mehrdeutigkeiten führen. Die Gleichung

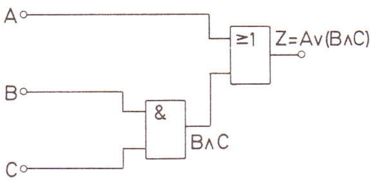
$$Z = A \vee B \wedge C$$

kann auf zwei verschiedene Weisen aufgefaßt werden. Einmal kann die Variable A mit der Variablen B durch ODER verknüpft sein. Das Ergebnis wird durch UND mit C verknüpft. Es ergibt sich eine Schaltung und die zugehörige Wahrheitstabelle nach Bild 4.19.



Fall	C	B	A	$A \vee B$	Z
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

Bild 4.19 Schaltung und Wahrheitstabelle zur Funktionsgleichung $Z = (A \vee B) \wedge C$



Fall	C	B	A	$B \wedge C$	Z
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	1
5	1	0	0	0	0
6	1	0	1	0	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

Bild 4.20 Schaltung und Wahrheitstabelle zur Funktionsgleichung $Z = A \vee (B \wedge C)$

Zum anderen kann aber auch die Variable B mit der Variablen C durch UND verknüpft sein. Das Ergebnis wird mit A durch ODER verknüpft. Für diese Interpretation der Gleichung ergibt sich die Schaltung mit zugehöriger Wahrheitstabelle nach Bild 4.20. Für Z ergeben sich in beiden Fällen völlig verschiedene Verknüpfungen. Die Mehrdeutigkeit kann mit Hilfe von Klammern beseitigt werden. Meint man den ersten Fall, so ist die Gleichung $Z = (A \vee B) \wedge C$ zu schreiben. Meint man den zweiten Fall, so lautet die Gleichung $Z = A \vee (B \wedge C)$.
Man kann auf Klammern verzichten, wenn man einer Verknüpfungsart eine Priorität

zuerkennt. Die Verknüpfungsart mit Priorität bindet dann stets stärker als die andere Verknüpfungsart. Solche Prioritäten kennt man in der normalen Algebra. Multiplikation und Division binden dort stärker als Addition und Subtraktion. Es gibt den Merksatz: «Punktrechnung geht vor Strichrechnung».
In der Schaltalgebra hat die UND-Verknüpfung Priorität. Man hat folgende Bindungsregel aufgestellt:

Eine UND-Verknüpfung bindet stets stärker als eine ODER-Verknüpfung.

Mit dieser Festlegung wird die vorstehend betrachtete Gleichung eindeutig.

$$Z = A \vee B \wedge C \Longrightarrow A \vee (B \wedge C)$$

Treten in einer schaltalgebraischen Gleichung UND- und ODER-Verknüpfungen gemeinsam auf, ohne daß Klammern vorhanden sind, muß man sich die durch UND verknüpften Glieder in Klammern gesetzt denken.

4.4 NAND- und NOR-Funktion

Die Schaltalgebra ist auf den drei Grundfunktionen UND, ODER und NICHT aufgebaut. Mit Gliedern, die diese drei Funktionen erzeugen, können alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen hergestellt werden. Die Glieder UND, ODER und NICHT werden daher Grundglieder genannt.
Eine genauere Betrachtung des 1. Morganschen Gesetzes zeigt jedoch, daß jede UND-Verknüpfung mit Hilfe einer ODER-Verknüpfung und mehreren NICHT-Funktionen gebildet werden kann:

$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ 1. Morgansches Gesetz

$$\overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

$$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

UND-Glieder sind also nicht unbedingt erforderlich. Hieraus ergibt sich:

Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit ODER-Gliedern und mit NICHT-Gliedern aufgebaut werden.

ODER-Schaltungen und NICHT-Schaltungen lassen sich mit NOR-Gliedern herstellen (Bild 4.21). Schaltet man die Eingänge eines NOR-Gliedes zusammen, so erhält man ein NICHT-Glied. Das ODER-Glied ergibt sich durch Negieren des Ausganges eines NOR-Gliedes. Dem NOR-Glied wird ein weiteres NOR-Glied nachgeschaltet, das als NICHT-Glied wirkt (Bild 4.21).

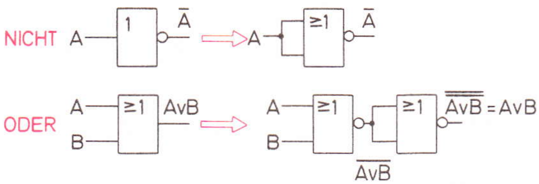


Bild 4.21 ODER-Schaltung und NICHT-Schaltung mit NOR-Gliedern aufgebaut

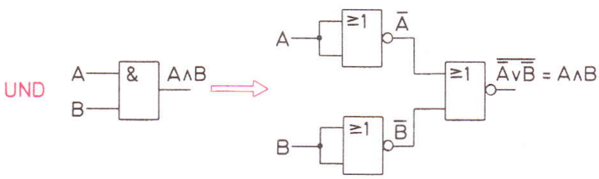


Bild 4.22 UND-Schaltung mit NOR-Gliedern aufgebaut

Die UND-Schaltung kann nach der aus dem 1. Morganschen Gesetz abgeleiteten Gleichung

$$A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

aufgebaut werden. Zu Herstellung von $\overline{A}$ und $\overline{B}$ werden zwei NOR-Glieder benötigt. Zur Verknüpfung wird ein weiteres NOR-Glied gebraucht (Bild 4.22).
Wenn also Schaltungen für die UND-Verknüpfung, Schaltungen für die ODER-Verknüpfung und NICHT-Schaltungen nur mit NOR-Gliedern hergestellt werden können, ist es auch möglich, alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen ausschließlich mit NOR-Gliedern aufzubauen.

Jede gewünschte Verknüpfungsschaltung läßt sich nur mit NOR-Gliedern aufbauen.

NOR-Glieder können also als Universalglieder verwendet werden.
Aus dem 2. Morganschen Gesetz ergibt sich, daß jede ODER-Verknüpfung mit Hilfe einer UND-Verknüpfung und mehreren NICHT-Funktionen gebildet werden kann:

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ 2. Morgansches Gesetz

$$\overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$$

$$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$$

ODER-Glieder sind also nicht unbedingt erforderlich. Hieraus ergibt sich:

> *Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit UND-Gliedern und mit NICHT-Gliedern aufgebaut werden.*

Eine NICHT-Schaltung läßt sich aus einem NAND-Glied herstellen. Die Eingänge werden zu einem Eingang zusammengefaßt (Bild 4.23). Eine UND-Schaltung ergibt sich durch Zusammenschalten eines NAND-Gliedes und eines weiteren NAND-Gliedes, das als NICHT-Glied arbeitet (Bild 4.23).

Bild 4.23 NICHT-Schaltung und UND-Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut

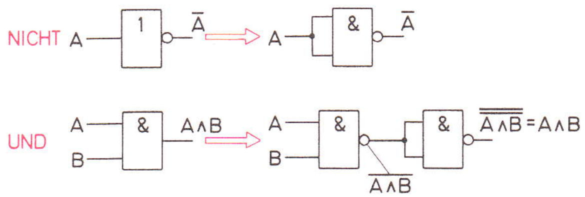
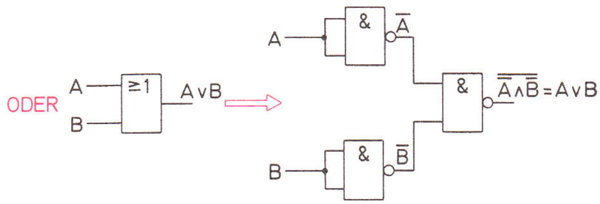


Bild 4.24 ODER-Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut



Eine ODER-Schaltung läßt sich ebenfalls mit NAND-Gliedern aufbauen. Sie kann nach der aus dem 2. Morganschen Gesetz abgeleiteten Gleichung gebildet werden:

$$A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$$

Für die Bildung einer ODER-Schaltung werden zwei NAND-Glieder benötigt, die als NICHT-Glieder geschaltet sind. Ein weiteres NAND-Glied benötigt man zur Verknüpfung (Bild 4.24).
Da sich also UND-Schaltungen, ODER-Schaltungen und NICHT-Schaltungen nur mit NAND-Gliedern verwirklichen lassen, ist es auch möglich, alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen ausschließlich mit NAND-Gliedern aufzubauen.

Jede gewünschte Verknüpfungsschaltung läßt sich nur mit NAND-Gliedern aufbauen.

NAND-Glieder können also ebenso wie NOR-Glieder als Universalglieder verwendet werden.
Will man Digitalschaltungen nur mit NAND-Gliedern oder nur mit NOR-Gliedern aufbauen, ist es in vielen Fällen erforderlich, vorliegende schaltalgebraische Gleichungen entsprechend umzuformen. Solche Umformungen können auf verschiedenen Wegen durchgeführt werden. Ein Weg, der meist zum Ziel führt, beginnt mit der Vornahme einer Doppel-Negation. Eine Doppel-Negation ändert den Inhalt der Gleichung nicht.

Beispiel:
Die Gleichung $Z = (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ soll so umgerechnet werden, daß die entsprechende Schaltung nur mit NAND-Gliedern aufgebaut werden kann.

$$Z = \overline{\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})}}$$

$$Z = \overline{\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)} \wedge \overline{(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})}}$$

Die sich aus der so umgeformten Gleichung ergebende Schaltung zeigt Bild 4.25.

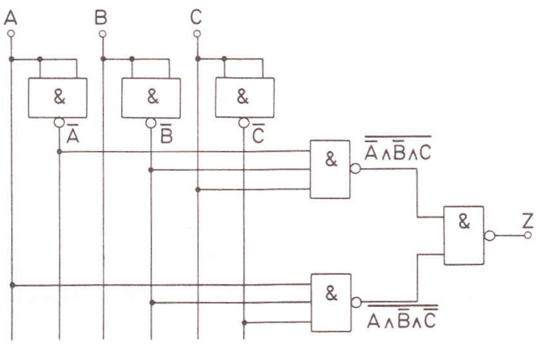


Bild 4.25 Digitalschaltung nur mit NAND-Gliedern aufgebaut

Beispiel:
Die Gleichung $Z = (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ soll so umgeformt werden, daß die entsprechende Schaltung nur mit NOR-Gliedern aufgebaut werden kann.

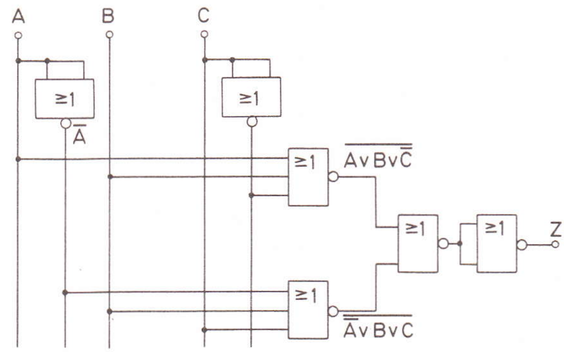
$$Z = \overline{\overline{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)}} \vee \overline{\overline{(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})}}$$

$$Z = \overline{(\overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}} \vee \overline{C})} \vee \overline{(\overline{A} \vee \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{C}})}$$

$$Z = \overline{\overline{\overline{(A \vee B \vee \overline{C})} \vee \overline{(\overline{A} \vee B \vee C)}}}$$

Die zu der Gleichung gehörende Schaltung ist in Bild 4.26 angegeben.
Praktiker haben oft Schwierigkeiten mit der Umrechnung von schaltalgebraischen Gleichungen auf NAND- und auf NOR-Verknüpfungen. Es gibt einen Weg, diese Umrechnungen zu vermeiden. In einer Schaltung, die mit Grundgliedern aufgebaut ist, kann man die einzelnen Grundglieder durch NAND- oder NOR-Schaltungen, wie sie in den Bildern 4.21, 4.22, 4.23 und 4.24 angegeben sind, ersetzen.

Bild 4.26 Digitalschaltung nur mit NOR-Gliedern aufgebaut



Es ergeben sich dann etwas kompliziertere Schaltungen, die sich jedoch vereinfachen lassen. Zwei aufeinanderfolgende NICHT-Schaltungen treten verhältnismäßig häufig auf. Diese NICHT-Schaltungen können weggestrichen werden, da sie sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben (negiert man eine Variable zweimal, so ändert sich ihr Wert nicht). Die Gesamtumschaltung wird dadurch wesentlich vereinfacht.
Wie das im einzelnen gemacht wird, zeigt Bild 4.27. Im oberen Teil des Bildes ist entsprechend der Gleichung $Z = (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ eine Schaltung mit Grundgliedern dargestellt. Diese Schaltung soll nur mit NAND-Gliedern verwirklicht werden. Jedes Grundglied wird durch die ihm entsprechende NAND-Schaltung ersetzt. Die aufeinanderfolgenden NICHT-Schaltungen können entfallen. Es ergibt sich die gleiche Schaltung, die auch rechnerisch gefunden wurde (siehe Bild 4.25). Dieses Verfahren läßt sich immer anwenden. Es erfordert jedoch etwas mehr Aufwand.

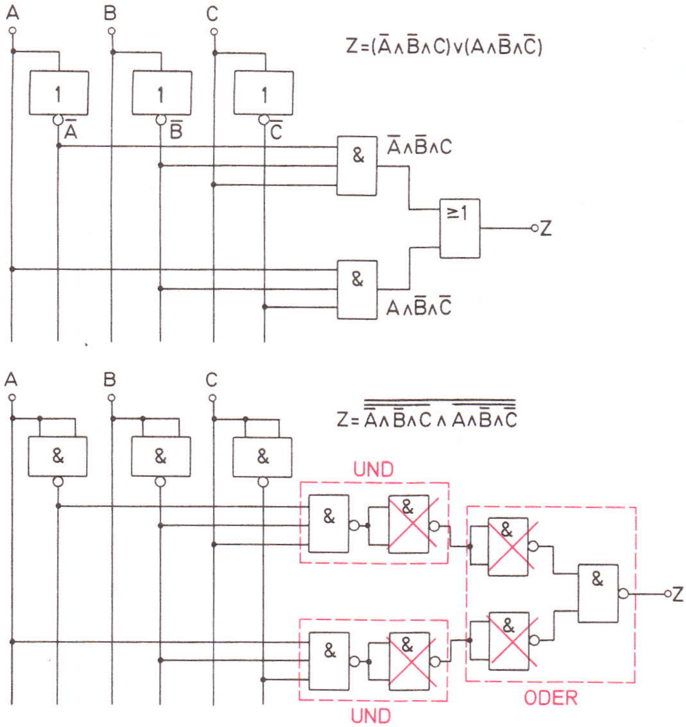


Bild 4.27 Digitalschaltung. Die Grundglieder werden durch entsprechende NAND-Schaltungen ersetzt

4.5 Rechenbeispiele

Zusammenstellung der Theoreme und der Gesetze der Schaltalgebra

Theoreme

(1) $A \wedge 0 = 0$
(2) $A \wedge 1 = A$
(3) $A \wedge A = A$
(4) $A \wedge \overline{A} = 0$

(5) $A \vee 0 = A$
(6) $A \vee 1 = 1$
(7) $A \vee A = A$
(8) $A \vee \overline{A} = 1$

(9) $\overline{\overline{A}} = A$

Kommutativgesetze

(10) $A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B$
(11) $A \vee B \vee C = C \vee A \vee B$

Assoziativgesetze

(12) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
(13) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

Distributivgesetze

(14) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(15) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(14a) $A \wedge (A \vee B) = A$

(15a) $A \vee (A \wedge B) = A$

Morgansche Gesetze

(16) $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

(17) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

(16a) $\overline{A \wedge B \wedge C \wedge D} \wedge \cdots = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D} \vee \cdots$

(17a) $\overline{A \vee B \vee C \vee D} \vee \cdots = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \cdots$

Die Gleichungen 14a und 15a sind Sonderfälle der Distributivgesetze. Sie ergeben sich wie folgt:

$$A \wedge (A \vee B) = (A \vee 0) \wedge (A \vee B) = A \vee (0 \wedge B) = A \vee 0 = A$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$A = A \vee 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \wedge B = 0$$

$$A \vee (A \wedge B) = (A \wedge 1) \vee (A \wedge B) = A \wedge (1 \vee B) = A \wedge 1 = A$$
$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$A = A \wedge 1 \qquad\qquad\qquad\qquad 1 \vee B = 1$$

Die Gleichungen 16a und 17a sind Erweiterungen der Morganschen Gesetze auf beliebig viele Variable.

In den vorstehenden Gleichungen stehen die Variablen A, B, C und D für beliebige Variable. Sie haben eine Platzhalterfunktion für alle anderen Variablen. Als Variable können auch Klammerausdrücke und Verknüpfungen mehrerer Variabler angesehen werden.

Beispiele:

$$Z = R \wedge 0 = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

$$Z = \overline{S \wedge K} = \overline{S} \vee \overline{K} \qquad \text{(Gl. 16)}$$

$$Z = (X \wedge Y) \vee \overline{X \wedge Y} = 1 \qquad \text{(Gl. 8)}$$

Bei der letzten Gleichung handelt es sich um die ODER-Verknüpfung einer Variablen mit ihrer Negation. Als Variable gilt $(X \wedge Y)$. Nach Gleichung 8 $(A \vee \overline{A} = 1)$ ergibt sich daher für Z der Wert 1.

Rechenbeispiele

Vereinfachung von Gleichungen

Beispiel 1:

$$Z = \overline{A} \vee B \vee \overline{B} \vee C$$

$$B \vee \overline{B} = 1 \qquad \text{(Gl. 8)}$$

$$Z = \overline{A} \vee 1 \vee C$$

$$Z = (\overline{A} \vee C) \vee 1$$

Eine Variable ODER 1 ergibt 1 (Gl. 1). Die Klammer $(\overline{A} \vee C)$ gilt als eine Variable.

$$\underline{Z = 1}$$

Beispiel 2:

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge N \wedge \overline{M})$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge \overline{M} \wedge N)$$

$$M \wedge \overline{M} = 0 \qquad \text{(Gl. 4)}$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (0 \wedge N)$$

$$0 \wedge N = 0 \qquad \text{(Gl. 1)}$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee 0$$

Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable (Gl. 5)

$$\underline{X = M \wedge \overline{N}}$$

Beispiel 3:

$$Z = B \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee \overline{B}$$

Die Reihenfolge der ODER-Verknüpfung ist beliebig. Der Ausdruck $B \vee \overline{B}$ ergibt 1 (Gl. 8).

$$Z = B \vee \overline{B} \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) = 1 \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$$

Der Klammerausdruck wird als eine Variable aufgefaßt. Eine Variable ODER 1 ergibt 1 (Gl. 6).

$$\underline{Z = 1}$$

Beispiel 4:

$$Z = X \wedge (\overline{X} \vee S)$$

Nach dem Distributivgesetz (Gl. 14) kann „ausmultipliziert" werden:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$Z = X \wedge (\overline{X} \vee S) = (X \wedge \overline{X}) \vee (X \wedge S)$$

Der Ausdruck $X \wedge \overline{X}$ ergibt 0 (Gl. 4).

$$Z = 0 \vee (X \wedge S)$$

Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable (Gl. 5). $(X \wedge S)$ gilt als eine Variable.

$$\underline{Z = X \wedge S}$$

Mit Hilfe einer Wahrheitstabelle kann die Richtigkeit der Rechnung nachgeprüft werden (Bild 4.28).

Bild 4.28 Wahrheitstabelle zur Ergebniskontrolle

Fall	C	B	$\overline{B}$	$\overline{B} \vee C$	$Z = B \wedge (\overline{B} \vee C)$	$B \wedge C$
1	0	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1

Beispiel 5:

$$Z = A \vee \overline{B} \wedge \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C}$$

Der durchgehende Negationsstrich ist zunächst nach dem 2. Morganschen Gesetz aufzulösen.

$$Z = A \vee (\overline{B} \wedge \overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}} \wedge \overline{C})$$

$$Z = A \vee (\overline{B} \wedge \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C})$$

Die Variablen werden anders sortiert:

$$Z = A \vee (\overline{B} \wedge B \wedge \overline{A} \wedge \overline{C})$$

$$\overline{B} \wedge B = 0 \qquad \text{(Gl. 4)}$$

$$Z = A \vee (0 \wedge \overline{A} \wedge \overline{C})$$

Eine Variable UND 0 ergibt 0. Der Ausdruck $\overline{A} \wedge \overline{C}$ gilt als eine Variable

$$Z = A \vee 0$$

$$\underline{\underline{Z = A}} \qquad \text{(Gl. 5)}$$

Beispiel 6:

$$Y = \overline{\overline{\overline{A \wedge X} \vee \overline{\bar{A} \wedge B \wedge X}} \vee \overline{\bar{B} \wedge X}}$$

Zunächst ist der obere Negationsstrich gemäß Gleichung 17 aufzulösen. Doppelte Negationsstriche gleicher Länge heben sich auf und können wegfallen (Gl. 9). Durchgehende Negationsstriche wirken wie Klammern. Wenn sie wegfallen, ist zu prüfen, ob Klammern gesetzt werden müssen oder nicht. Hier sind Klammern erforderlich.

$$Y = \overline{\overline{\overline{A \wedge X} \vee \overline{\bar{A} \wedge B \wedge X}} \vee \overline{\bar{B} \wedge X}}$$

$$Y = \overline{(A \wedge X} \vee \overline{\bar{A} \wedge B \wedge X)} \wedge \bar{B} \wedge X$$

Jetzt können die kleineren Negationsstriche aufgelöst und die Variablen sortiert werden.

$$Y = (\bar{A} \vee \bar{X} \vee \bar{\bar{A}} \vee \bar{B} \vee \bar{X}) \wedge \bar{B} \wedge X$$

$$Y = (\bar{A} \vee A \vee \bar{X} \vee \bar{X} \vee \bar{B}) \wedge \bar{B} \wedge X$$

$$\bar{A} \vee A = 1 \qquad \text{(Gl. 8)}$$

$$\bar{X} \vee \bar{X} = \bar{X} \qquad \text{(Gl. 7)}$$

$$Y = (1 \vee \bar{X} \vee \bar{B}) \wedge \bar{B} \wedge X$$

$$1 \vee (\bar{X} \vee \bar{B}) = 1 \qquad \text{(Gl. 6)}$$

$$Y = 1 \wedge \bar{B} \wedge X$$

$$\underline{Y = \bar{B} \wedge X}$$

Umrechnungen von Gleichungen

Beispiel 7:
Die nachstehende Gleichung soll so umgeformt werden, daß ein Schaltungsaufbau nur mit NAND-Gliedern möglich ist.

$$Z = [C \vee (N \wedge P \wedge S)] \wedge (\bar{A} \vee \bar{B})$$

$$Z = \overline{\overline{[C \vee (N \wedge P \wedge S)]}} \wedge \overline{\overline{(\bar{A} \vee \bar{B})}}$$

$$Z = \overline{\overline{C} \wedge \overline{N \wedge P \wedge S}} \wedge \overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}}$$

$$Z = \overline{\overline{C} \wedge \overline{N \wedge P \wedge S}} \wedge \overline{A \wedge B}$$

$$\underline{Z = \overline{\overline{\overline{\overline{C} \wedge \overline{N \wedge P \wedge S}} \wedge \overline{A \wedge B}}}}$$

Beispiel 8:
Folgende Gleichung ist auf NOR-Verknüpfungen umzurechnen.

$$X = \overline{A \wedge \overline{C}} \wedge \overline{\overline{B} \wedge \overline{R} \wedge \overline{S}}$$

$$X = (\overline{A} \vee \overline{\overline{C}}) \wedge (\overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{R}} \vee \overline{\overline{S}})$$

$$X = (\overline{A} \vee C) \wedge (B \vee R \vee S)$$

$$X = \overline{\overline{(\overline{A} \vee C) \wedge (B \vee R \vee S)}}$$

$$X = \overline{\overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{B \vee R \vee S}}$$

$$\underline{X = \overline{\overline{\overline{A} \vee C} \vee \overline{B \vee R \vee S}}}$$

4.6 Lernziel-Test

1. Nennen Sie die Anzahl der möglichen Konstanten in der Schaltalgebra.
2. Wie wird eine Variable in der Schaltalgebra dargestellt? Welche Beziehungen sind für Variable üblich?
3. Was sagt das Kommutationsgesetz aus?
4. Welche Bedeutung hat das Distributivgesetz?
5. Warum kann man alle möglichen Verknüpfungsschaltungen nur mit NAND-Gliedern aufbauen?
6. Welche der beiden Verknüpfungen UND oder ODER binden in einer Gleichung stärker?
7. Wie lauten die beiden Morganschen Gesetze?
8. Die Grundglieder UND, ODER und NICHT sollen
   a) nur mit NAND-Gliedern,
   b) nur mit NOR-Gliedern aufgebaut werden.
   Geben Sie die Schaltbilder an.

9. Folgende Gleichungen sind möglichst weitgehend zu vereinfachen.

a) $Z = \overline{A} \wedge B \wedge A \wedge A \wedge B \wedge \overline{C}$

b) $Y = \overline{A \wedge B} \vee \overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{A \wedge \overline{B} \wedge C}$

c) $X = (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C)$

d) $Q = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{C})$

e) $S = \overline{\overline{\overline{A \wedge B} \vee \overline{\overline{B} \wedge C}} \vee (A \wedge B)}$

10. Rechnen Sie die Gleichungen so um, daß die Schaltung a) nur mit NAND-Gliedern, b) nur mit NOR-Gliedern aufgebaut werden kann.

a) $Z = (A \wedge S \wedge R) \vee (Q \wedge \overline{C} \wedge \overline{B})$

b) $Y = \overline{A \vee B} \wedge \overline{C \vee D}$

c) $X = (A \vee B \vee C) \wedge (\overline{M} \vee \overline{N} \vee \overline{P}) \wedge (R \vee S)$

d) $Q = \overline{(\overline{A} \wedge B) \vee C \vee D} \wedge \overline{S \vee R}$

e) $Q = \overline{A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \vee P \wedge Q \wedge S}$

5 Schaltungssynthese

5.1 Aufbau von Verknüpfungsschaltungen nach vorgegebenen Bedingungen

Digitale Schaltungen werden als sogenannte logische Verknüpfungsschaltungen für die unterschiedlichsten Steuerungs- und Rechenzwecke benötigt. Der Entwurf solcher Schaltungen wird Schaltungssynthese genannt.
Vor Beginn der Schaltungssynthese muß die Aufgabe, die die Schaltung erfüllen soll, vollständig und widerspruchsfrei formuliert werden. Sprachliche Formulierungen geben oft Anlaß zu Mißverständnissen. Die Beschreibung muß daher sehr sorgfältig erfolgen.
Zunächst sind die Eingangsvariablen der benötigten Schaltung zu benennen. Man verwendet für die Eingangsvariablen große Buchstaben vom Anfang des Alphabets her mit oder ohne Indexzahlen.

> *Eingangsvariable: z.B.* $A, B, C, D, E, F, G, E_1, E_2, E_3$

Danach legt man die Ausgangsvariablen fest. Hier ist es üblich, große Buchstaben vom Ende des Alphabets her zu verwenden.

> *Ausgangsvariable: z.B.* Z, Y, X, V_1, V_2, V_3

Es muß dann unbedingt angegeben werden, unter welchen Bedingungen die Variablen 1 und 0 sein sollen.
Wenn die vorgenannten Festlegungen getroffen worden sind, kann mit dem Erstellen der Wahrheitstabelle begonnen werden. Jetzt zeigt es sich, ob die sprachliche Formulierung eindeutig war. Gibt es bei einigen der möglichen Fälle der Wahrheitstabelle Unklarheiten, müssen diese zunächst geklärt werden.

> *Die Wahrheitstabelle gibt eine eindeutige Aussage, wie die gesuchte Schaltung arbeiten soll.*

Nach dem Aufstellen der Wahrheitstabelle geht es darum, eine logische Verknüpfungsschaltung zu finden, die die Wahrheitstabelle erfüllt. Diese Schaltung sollte möglichst einfach und mit den zur Verfügung stehenden Verknüpfungsgliedern aufbaubar sein.

Man wird versuchen, die gefundene Schaltung möglichst weitgehend zu vereinfachen. Sollten z.B. nur NAND-Glieder zur Verfügung stehen, muß die Schaltung so umgeformt werden, daß sie mit NAND-Gliedern aufbaubar wird.

Man kann bei der Schaltungssynthese also fünf Schritte unterscheiden:

1. Beschreibung der Funktion der gesuchten Schaltung.
2. Festlegung der Eingangs- und Ausgangsvariablen und der Bedeutung von 0 und 1.
3. Erstellen der Wahrheitstabelle.
4. Bestimmen der logischen Verknüpfungsschaltung.
5. Vereinfachung und gegebenenfalls Umformung der Schaltung.

Diese Schritte sollen an einem Beispiel näher erläutert werden.

Beispiel:
Durch eine Sicherheitsschaltung soll das Abfahren eines Fahrstuhlkorbes unter bestimmten Bedingungen verhindert werden.

Schritt 1
Beschreibung der Funktion der gesuchten Schaltung.
Der Fahrstuhlkorb darf nicht abfahren, wenn die Tür noch geöffnet ist. Er darf ebenfalls nicht abfahren, wenn er überlastet ist. Zum Abfahren ist das Drücken des Fahrknopfes erforderlich.

Schritt 2
Festlegung der Eingangs- und Ausgangsvariablen.
Die Eingangsvariable A wird dem Türkontakt zugeordnet. A = 1 bedeutet Türkontakt geschlossen. A = 0 bedeutet Türkontakt offen.
Die Eingangsvariable B wird dem Überlastschalter zugeordnet (B = 1: Überlastung, B = 0: keine Überlastung).
Die Eingangsvariable C soll zum Fahrknopf gehören (C = 1: Fahrknopf gedrückt, C = 0: Fahrknopf nicht gedrückt).
Die Ausgangsvariable sei Z. Z = 1 bedeutet, daß der Fahrstuhlkorb fahren darf. Z = 0 bedeutet, daß der Fahrstuhlkorb nicht fahren darf.

Schritt 3
Erstellen der Wahrheitstabelle.

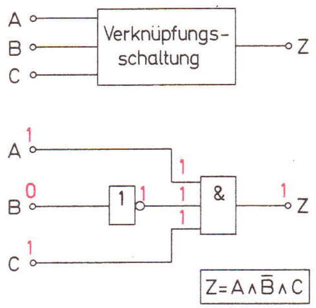
Fall	C	B	A	Z
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Bild 5.1 Wahrheitstabelle der Fahrstuhl-Sicherheitsschaltung

Wir haben drei Variable. Die Wahrheitstabelle hat also 8 mögliche Fälle (Bild 5.1). Der Fahrstuhl darf nur abfahren, wenn die Tür geschlossen ist (A = 1) und wenn keine Überlastung besteht (B = 0) und wenn der Fahrtknopf gedrückt ist (C = 1).
Diese Bedingungen erfüllt nur der Fall 6 der Wahrheitstabelle Bild 5.1. Für diesen Fall muß Z = 1 sein. Alle anderen Fälle haben Z = 0.

Schritt 4
Bestimmen der logischen Verknüpfungsschaltung.
Ist die Wahrheitstabelle bekannt, so kann die Schaltung berechnet werden. Dieses Berechnungsverfahren wird etwas später erläutert. Bei diesen noch recht einfachen Zusammenhängen kann man durch Überlegen und Probieren zum Ziel kommen.
Z ist nur dann 1, wenn A = 1, B = 0 und C = 1 ist. Führt man den Eingang B auf ein NICHT-Glied, so liegt am Ausgang dieses NICHT-Gliedes der Zustand 1. Mit A = 1, $\overline{B}$ = 1 und C = 1 hat man jetzt drei 1-Zustände. Diese werden auf ein UND-Glied mit drei Eingängen gegeben (Bild 5.2). Am Ausgang des UND-Gliedes liegt nur dann 1, wenn A = 1, B = 0 und C = 1 ist. Dieser Ausgang ist der Z-Ausgang. Bild 5.2 zeigt somit die gesuchte Fahrstuhl-Sicherheitsschaltung. Z = 1 bedeutet z.B., daß am Ausgang Z eine Spannung von +5 V anliegt. Mit dieser Spannung kann ein Relais geschaltet werden, das den Fahrstuhlmotor anlaufen läßt.

Bild 5.2 Fahrstuhl-Sicherheitsschaltung



Für das Finden einer Schaltung durch Überlegen und Probieren gilt:

> *Die Verknüpfungen von Eingangsvariablen und ihrer Negationen durch UND bzw., wenn nötig, weitere Verknüpfungen durch ODER führen in den meisten Fällen zu einer möglichen Form der gesuchten Schaltung.*

Schritt 5
Vereinfachung und gegebenenfalls Umformung der Schaltung.
Die in Bild 5.2 gefundene Schaltung läßt sich nicht weiter vereinfachen. Sie läßt sich aber

sehr wohl umformen. Nehmen wir an, es stehen nur NOR-Glieder zur Verfügung. Die Gleichung $Z = A \wedge \overline{B} \wedge C$ kann dann wie folgt umgerechnet werden:

$$Z = A \wedge \overline{B} \wedge C = \overline{\overline{A \wedge \overline{B} \wedge C}} = \overline{\overline{A} \vee B \vee \overline{C}}$$

Die mit NOR-Gliedern aufgebaute Schaltung zeigt Bild 5.3.

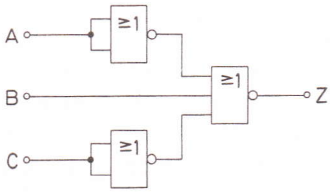


Bild 5.3 Fahrstuhl-Sicherheitsschaltung, mit NOR-Gliedern aufgebaut

5.2 Normalformen

Bestimmte vereinbarte Gleichungsformen werden in der Mathematik als Normalformen bezeichnet. Für bestimmte Zwecke sind Gleichungen in solche Normalformen zu überführen.

5.2.1 ODER-Normalform

Die ODER-Normalform, auch disjunktive Normalform genannt (von Disjunktion = ODER-Verknüpfung), ist die Form einer schaltalgebraischen Gleichung, in der sogenannte Vollkonjunktionen miteinander durch ODER verknüpft sind.

Unter einer Vollkonjunktion versteht man eine UND-Verknüpfung, in der alle vorhandenen Variablen einmal vorkommen – entweder negiert oder nicht negiert (Konjunktion = UND-Verknüpfung).

Sind die Variablen A und B vorhanden, so ergeben sich vier mögliche Vollkonjunktionen:

$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge B$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$

Eine ODER-Normalform besteht aus mehreren Vollkonjunktionen, die durch ODER verknüpft sind. Sie kann auch aus einer einzigen Vollkonjunktion bestehen.

Alle nur möglichen Verknüpfungsgleichungen lassen sich als ODER-Normalformen darstellen.
Jede ODER-Normalform hat eine enge Beziehung zu einer Wahrheitstabelle. Das soll an einigen Beispielen gezeigt werden. Gesucht ist die Wahrheitstabelle für $Z_1 = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$. Sie ist in Bild 5.4 dargestellt. Wir stellen fest, Z_1 hat zwei 1-Zustände, und zwar in den Fällen 1 und 4.
Nun betrachten wir die Wahrheitstabelle für Z_2 $(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ in Bild 5.5. Z_2 hat drei 1-Zustände.

Bild 5.4 Wahrheitstabelle für Z_1

Fall	B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$Z_1 = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
1	0	0	1	1	0	1	1
2	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	0	1

$\boxed{Z_1 = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}$

Bild 5.5 Wahrheitstabelle für Z_2

Fall	B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	$Z_2 = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	1	0	1
4	1	1	0	0	1	0	0	1

$\boxed{Z_2 = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})}$

Bild 5.6 Wahrheitstabelle für Z_3

Fall	B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$Z_3 = \overline{A} \wedge \overline{B}$
1	0	0	1	1	1 $\longrightarrow$ $\overline{A} \wedge \overline{B}$
2	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0

$\boxed{Z_3 = \overline{A} \wedge \overline{B}}$

Die Wahrheitstabelle für $Z_3 = \overline{A} \wedge \overline{B}$ zeigt Bild 5.6. Z_3 hat einen 1-Zustand.
Hieraus können wir schließen:

> *Die Anzahl der 1-Zustände in der Ausgangsspalte einer Wahrheitstabelle (hier Z-Spalte) ist gleich der Anzahl der Vollkonjunktionen der ODER-Normalform.*

Zu jeder 1 in der Z-Spalte gehört also vermutlich eine Vollkonjunktion. Bild 5.8 zeigt das deutlich. Wir haben vier mögliche 1-Zustände und vier Vollkonjunktionen. Welche Vollkonjunktion gehört nun zu welchem 1-Zustand?

Der 1-Zustand der Vollkonjunktion $\overline{A} \wedge \overline{B}$ ergibt sich aus Bild 5.6. Die Wahrheitstabelle der Vollkonjunktion $A \wedge B$ zeigt Bild 5.7. Wir können hieraus schließen:

> *Hat in einem betrachteten Fall der Wahrheitstabelle eine Variable den Wert 0, tritt sie in der zugehörigen Vollkonjunktion negiert auf. Hat eine Variable hier den Wert 1, tritt sie in der Vollkonjunktion nicht negiert auf.*

Fall	B	A	Z	
1	0	0	0	
2	0	1	0	
3	1	0	0	
4	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B$

Bild 5.7 Wahrheitstabelle der Vollkonjunktion $A \wedge B$

Fall	B	A	Z	
1	0	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$
2	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B}$
3	1	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge B$
4	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B$

Bild 5.8 Zuordnung der Vollkonjunktionen zu den möglichen 1-Zuständen

Die Zuordnung der Vollkonjunktionen zu den möglichen 1-Zuständen zeigt Bild 5.8.

> *Jeder 1-Zustand in der Ausgangsspalte (Z-Spalte) einer Wahrheitstabelle führt auf eine Vollkonjunktion.*

> *Bei mehreren Vollkonjunktionen ergibt sich die ODER-Normalform durch ODER-Verknüpfung der Vollkonjunktionen.*

Damit ist der Zusammenhang zwischen Wahrheitstabelle und ODER-Normalform geklärt. Mit diesen Kenntnissen kann man die zu einer beliebigen Wahrheitstabelle gehörende ODER-Normalform leicht aufstellen.

> *Die ODER-Normalform stellt den Informationsinhalt einer Wahrheitstabelle als schaltalgebraische Gleichung dar.*

Beispiel:
Gegeben ist die Wahrheitstabelle nach Bild 5.8a. Gesucht ist die zugehörige ODER-Normalform. Jeder 1-Zustand in der Z-Spalte führt auf eine Vollkonjunktion. Die 0-Zustände der Z-Spalte braucht man nicht zu beachten.
Betrachten wir den Fall 2 in Bild 5.8a. Die Variable A ist hier 1. Diese Variable erscheint

Bild 5.8a Wahrheitstabelle

Fall	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	
2	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$
3	0	1	0	0	
4	0	1	1	0	
5	1	0	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$
6	1	0	1	0	
7	1	1	0	0	
8	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C$

daher nicht negiert in der Vollkonjunktion. Die Variablen B und C haben den Wert 0. Sie erscheinen in der Vollkonjunktion in negierter Form. Die Vollkonjunktion für den Fall 2 lautet also:

$$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$$

Entsprechend ergibt sich für den Fall 5 die Vollkonjunktion $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$ und für den Fall 8 die Vollkonjunktion $A \wedge B \wedge C$.
Alle vorhandenen Vollkonjunktionen werden nun durch ODER verknüpft und ergeben die ODER-Normalform:

$$Z = (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Diese ODER-Normalform stellt den Informationsinhalt der Wahrheitstabelle Bild 5.8a dar. Man kann die ODER-Normalform wie eine beliebige schaltalgebraische Gleichung in eine Wahrheitstabelle zurückverwandeln. Für die oben angegebene ODER-Normalform muß sich die Wahrheitstabelle nach Bild 5.8a ergeben. Dies soll ausprobiert werden. Das Ergebnis zeigt Bild 5.9.

Bild 5.9 Rückverwandlung einer ODER-Normalform in eine Wahrheitstabelle

Fall	C	B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	$\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	$A \wedge B \wedge C$	Z
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0	1	0	0	1
3	0	1	0	0	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	1	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0	0	1	1

Mit Hilfe der ODER-Normalform ist es also leicht möglich, für eine gegebene oder aus einer Problembeschreibung gefundene Wahrheitstabelle die zugehörige schaltalgebraische Gleichung zu erstellen. Ein Probieren ist nicht mehr nötig. Die Synthese auch recht komplizierter Verknüpfungsschaltungen ist nunmehr ohne größere Schwierigkeiten durchführbar.

5.2.2 UND-Normalform

Die UND-Normalform wird auch konjunktive Normalform genannt (von Konjunktion = UND-Verknüpfung). Sie ist eine schaltalgebraische Gleichung, in der sogenannte Volldisjunktionen durch UND verknüpft sind.

> *Unter einer Volldisjunktion versteht man eine ODER-Verknüpfung, in der alle vorhandenen Variablen einmal vorkommen – entweder negiert oder nicht negiert (Disjunktion = ODER-Verknüpfung).*

Bei zwei Variablen, z.B. A und B, sind vier Volldisjunktionen möglich:

$A \vee B$	$\overline{A} \vee B$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$

> *Eine UND-Normalform besteht aus mehreren Volldisjunktionen, die durch UND verknüpft sind. Sie kann auch aus einer einzigen Volldisjunktion bestehen.*

Wenn man das Arbeiten mit der ODER-Normalform beherrscht, benötigt man die UND-Normalform nicht. Eine UND-Normalform kann leicht in eine ODER-Normalform umgerechnet werden.

Beispiel:
Die UND-Normalform $Z = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$ soll in eine ODER-Normalform umgerechnet werden.

$$Z = (A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

$$Z = \overline{\overline{(A \vee \overline{B}) \wedge (\overline{A} \vee B)}}$$

$$Z = \overline{\overline{A \vee \overline{B}} \vee \overline{\overline{A} \vee B}}$$

$$Z = \overline{\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})}$$

$$\underline{\overline{Z} = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})}$$

5.3 Vereinfachung und Umformung der ODER-Normalform mit Hilfe der Schaltalgebra

5.3.1 Vereinfachung der ODER-Normalform

Die ODER-Normalform gibt den Informationsinhalt einer Wahrheitstabelle als schaltalgebraische Gleichung wieder. Nach dieser Gleichung kann die gesuchte Schaltung aufgebaut werden.

> *Aus der ODER-Normalform ergibt sich eine Schaltung, die die zugehörige Wahrheitstabelle erfüllt.*

Diese Schaltung ist aber oft nicht die einfachstmögliche Schaltung. In vielen Fällen läßt sich die ODER-Normalform weiter vereinfachen. Diese Vereinfachung kann mit Hilfe der Schaltalgebra vorgenommen werden.

Beispiel 1:
Die ODER-Normalform $Z = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ soll vereinfacht werden. Da beide Vollkonjunktionen die gemeinsame Variable A enthalten, kann A mit Hilfe des Distributivgesetzes ausgeklammert werden:

$$Z = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

$$Z = A \wedge (B \vee \overline{B})$$

Der Ausdruck $B \vee \overline{B}$ hat stets den Wert 1 (siehe Kapitel 4).

$$Z = A \wedge 1$$

Eine Variable durch UND verknüpft mit 1 ergibt die Variable. Das Ergebnis der Vereinfachung der ODER-Normalform ist:

$$\underline{\underline{Z = A}}$$

Beispiel 2:
Wie weit kann man die nachstehende ODER-Normalform vereinfachen?

$$Z = \underset{①}{(\overline{A} \wedge B \wedge C)} \vee \underset{②}{(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C})} \vee \underset{③}{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C)} \vee \underset{④}{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})}$$

Zunächst lassen sich die Vollkonjunktionen ① und ② vereinfachen. $\overline{A} \wedge B$ wird als eine Variable aufgefaßt und ausgeklammert.

$$\begin{aligned} &((\overline{A} \wedge B) \wedge C) \vee ((\overline{A} \wedge B) \wedge \overline{C}) \\ &= (\overline{A} \wedge B) \wedge (C \vee \overline{C}) \\ &= (\overline{A} \wedge B) \wedge 1 \\ &= (\overline{A} \wedge B) \end{aligned}$$

Ebenfalls lassen sich die Vollkonjunktionen ③ und ④ vereinfachen. $\overline{A} \wedge \overline{B}$ wird als eine Variable aufgefaßt und ausgeklammert.

$$\begin{aligned}
&((\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge C) \vee ((\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge \overline{C}) \\
&= (\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge (C \vee \overline{C}) \\
&= (\overline{A} \wedge \overline{B}) \wedge 1 \\
&= (\overline{A} \wedge \overline{B})
\end{aligned}$$

Für Z gilt dann:

$$Z = (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

Aus dieser Gleichung kann $\overline{A}$ als gemeinsam vorkommende Variable ausgeklammert werden.

$$Z = \overline{A} \wedge (B \vee \overline{B})$$

$$Z = \overline{A} \wedge 1$$

$$\underline{Z = \overline{A}}$$

Die recht umfangreiche ODER-Normalform konnte in diesem Fall sehr stark vereinfacht werden. Eine so starke Vereinfachung ist in vielen Fällen nicht möglich. Es gibt auch viele ODER-Normalformen, die sich nicht mehr vereinfachen lassen.

Beispiel 3:
Versuchen Sie, die ODER-Normalform $Z = (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$ zu vereinfachen.
Die Variable $\overline{C}$ kommt in beiden Vollkonjunktionen vor. Sie kann ausgeklammert werden.

$$Z = \overline{C} \wedge [(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})]$$

Man kann sich jetzt darüber streiten, ob die Gleichung durch das Ausklammern von $\overline{C}$ einfacher geworden ist. Eine Entscheidung darüber kann man erst treffen, wenn es um die Verwirklichung der Schaltung mit realen Bausteinen geht. Ein wesentlicher Vorteil ergibt sich jedenfalls nicht.

5.3.2 Umformung der ODER-Normalform

Eine Schaltung, die nach der ODER-Normalform aufgebaut wird, muß mit Grundgliedern aufgebaut werden. In vielen Fällen möchte man andere Glieder verwenden, z.B. NAND-Glieder oder auch NOR-Glieder. Die ODER-Normalform muß in diesen Fällen umgeformt werden.
Die Umformung einer ODER-Normalform auf NAND-Verknüpfungen ist sehr einfach. Die ODER-Normalform wird zunächst doppelt negiert. Die doppelte Negation ändert ja bekanntlich den Inhalt der Gleichung nicht. Dann wird der untere Negationsstrich nach dem 2. Morganschen Gesetz aufgespalten.

Beispiel 1:

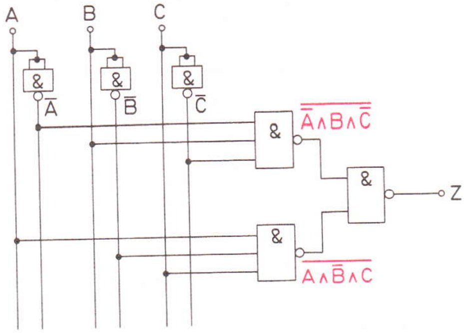
$$Z = (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C)$$

$$Z = \overline{\overline{(\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C)}}$$

$$Z = \overline{\overline{\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}} \wedge \overline{A \wedge \bar{B} \wedge C}}$$

Die sich aus der Gleichung ergebende Schaltung ist in Bild 5.10 dargestellt.

Bild 5.10 Schaltung, nur mit NAND-Gliedern aufgebaut



Soll die ODER-Normalform so umgeformt werden, daß ein Schaltungsaufbau nur mit NOR-Gliedern möglich ist, wird empfohlen, jede Vollkonjunktion für sich doppelt zu negieren und jeweils den unteren Negationsstrich nach dem 1. Morganschen Gesetz aufzulösen. Danach muß noch der gesamte Ausdruck doppelt negiert werden.

Beispiel 2:

$$Z = (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge C)$$

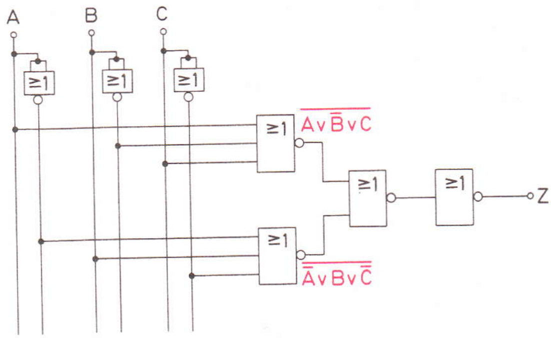
$$Z = \overline{\overline{(\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C})}} \vee \overline{\overline{(A \wedge \bar{B} \wedge C)}}$$

$$Z = \overline{A \vee \bar{B} \vee C} \vee \overline{\bar{A} \vee B \vee \bar{C}}$$

$$Z = \overline{\overline{\overline{A \vee \bar{B} \vee C} \vee \overline{\bar{A} \vee B \vee \bar{C}}}}$$

Die Schaltung zu dieser Gleichung zeigt Bild 5.11.

Bild 5.11 Schaltung, nur mit NOR-Gliedern aufgebaut



5.4 KV-Diagramme

KV-Diagramme dienen der übersichtlichen Darstellung und der Vereinfachung von ODER-Normalformen. Sie wurden von Karnaugh und Veitch entwickelt und werden auch als Karnaugh-Diagramme bezeichnet.

5.4.1 KV-Diagramme für 2 Variable

KV-Diagramme können auch als Wahrheitstabellen für Vollkonjunktionen aufgefaßt werden.

Ein KV-Diagramm hat stets so viele Plätze, wie Vollkonjunktionen möglich sind.

Bei 2 Variablen sind 4 verschiedene Vollkonjunktionen möglich. Ein KV-Diagramm für 2 Variable muß also 4 Plätze haben (siehe Bild 5.12). An die Ränder des KV-Diagrammes werden die Variablen geschrieben. Jede Variable muß in negierter und in nichtnegierter Form dargestellt sein (Bild 5.12).

	A	$\overline{A}$
B		
$\overline{B}$		

Bild 5.12 KV-Diagramm für 2 Variable (A, B)

	A	$\overline{A}$
B	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge B$
$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$

Bild 5.13 KV-Diagramm für 2 Variable (A, B) mit Eintrag der Vollkonjunktionen

Die an den Rändern eines KV-Diagrammes stehenden Variablen haben Koordinatencharakter. Sie bestimmen, welche Vollkonjunktion in welches Feld gehört. In Bild 5.13 sind die 4 Vollkonjunktionen in ihre Plätze eingetragen worden.
Der Platz für die Vollkonjunktion $A \wedge B$ ist durch die Koordinaten A und B gekennzeichnet (Bild 5.13). Entsprechend hat der Platz für die Vollkonjunktion $\overline{A} \wedge B$ die Koordinaten $\overline{A}$ und B. Da die Vollkonjunktionen durch die Koordinaten ihres Platzes festgelegt sind, ist es nicht erforderlich, sie, wie in Bild 5.13 geschehen, in vollständiger Schreibweise in ihre Plätze einzutragen. Das Vorhandensein einer Vollkonjunktion kann durch eine 1 auf dem entsprechenden Platz angegeben werden.

Eine 1 auf einem Platz eines KV-Diagrammes steht für eine Vollkonjunktion.

Im KV-Diagramm nach Bild 5.14 sind die Vollkonjunktionen $A \wedge \overline{B}$ und $\overline{A} \wedge \overline{B}$ eingetragen. Das KV-Diagramm enthält die ODER-Normalform.

$$Z = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

Daß die Vollkonjunktionen zu Z gehören, wird durch die Einzeichnung von Z links oben in Bild 5.14 angegeben.
Nicht vorhandene Vollkonjunktionen werden durch eine Null auf dem entsprechenden Feld oder durch ein leeres Feld angegeben.

> *Die Zuordnung der Variablen zu den Koordinaten eines KV-Diagramms kann beliebig erfolgen.*

Z	A	$\bar{A}$
B	0	0
$\bar{B}$	1	1

Bild 5.14 KV-Diagramm mit ODER-Normalform Z = $(A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$

	B	$\bar{B}$
A		
$\bar{A}$		

	E_1	$\bar{E}_1$
E_2		
$\bar{E}_2$		

Bild 5.15 KV-Diagramme mit geänderten Koordinatenangaben

Z	A	$\bar{A}$
B	1	1
$\bar{B}$		1

Bild 5.16 KV-Diagramm mit ODER-Normalform

Es ist also möglich, A und B im KV-Diagramm zu vertauschen (Bild 5.15). Selbstverständlich können die Variablen auch ganz andere Bezeichnungen haben, z.B. E_1 und E_2. Negierte und nicht negierte Form einer Variablen müssen jedoch an der gleichen Diagrammseite stehen.
Eine andere Zuordnung der Variablen zu den Koordinaten führt natürlich auch zu einer anderen Platzverteilung für die Vollkonjunktionen.
Es wird empfohlen, ein bestimmtes Zuordnungsschema beizubehalten und dieses nicht ohne Grund zu ändern. Man erleichtert sich die Arbeit, wenn man der ersten Variablen (z.B. A) und ihrer Negation stets die obere Diagrammseite zuweist. Die zweite Variable (z.B. B) und ihre Negation stehen dann an der linken Diagrammseite.
Das Eintragen einer ODER-Normalform in ein KV-Diagramm soll an einem Beispiel gezeigt werden, ebenfalls das Ablesen einer ODER-Normalform aus einem KV-Diagramm.

Beispiel 1:
Die ODER-Normalform Z = $(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$ ist in ein KV-Diagramm einzutragen.
Zunächst ist das KV-Diagramm mit den Koordinatenangaben zu zeichnen. Die Plätze der in der ODER-Normalform vorhandenen Vollkonjunktionen sind aufzusuchen und mit 1 zu kennzeichnen. Das Ergebnis zeigt Bild 5.16.

Beispiel 2:
Wie lautet die ODER-Normalform, die im KV-Diagramm Bild 5.17 dargestellt ist? Die ODER-Normalform hat 2 Vollkonjunktionen, die eine ist $\overline{A} \wedge B$, die andere $A \wedge \overline{B}$. Die ODER-Normalform lautet daher:

$$W = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

Die in einem KV-Diagramm dargestellte ODER-Normalform kann bei Vorliegen bestimmter Bedingungen vereinfacht werden.

> *Sind Vollkonjunktionen «benachbart», können sie in «Päckchen» zusammengefaßt werden.*

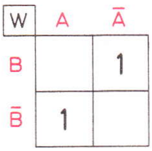


Bild 5.17 KV-Diagramm mit ODER-Normalform

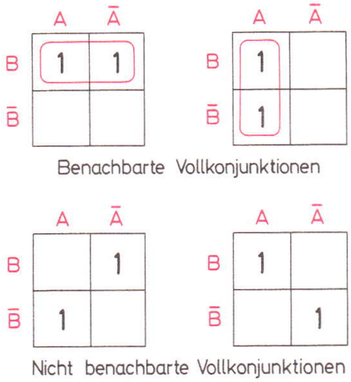


Bild 5.18 Benachbarte und nicht benachbarte Vollkonjunktionen

Als benachbart gelten Vollkonjunktionen, deren Plätze mit einer Seite aneinanderstoßen (Bild 5.18). Stoßen die Plätze nur mit einer Ecke aneinander, sind die zugehörigen Vollkonjunktionen nicht benachbart.

> *In einem Päckchen dürfen 2 oder 4 benachbarte Vollkonjunktionen zusammengefaßt werden.*

Jedes Päckchen hat bestimmte Koordinatenbezeichnungen. Das Päckchen im KV-Diagramm links oben in Bild 5.18 hat an einer Seite die Koordinatenbezeichnung B, an der anderen Seite die Koordinatenbezeichnungen A und $\overline{A}$.

> *Der Inhalt eines Päckchens ergibt sich aus seinen Koordinatenbezeichnungen. Variable, die als Koordinaten negiert und nichtnegiert auftreten, entfallen.*

Das in Bild 5.19 dargestellte Päckchen hat die Koordinaten A, B und $\overline{B}$. Die Variable B tritt negiert und nichtnegiert auf. Sie entfällt also. Der Inhalt des Päckchens ist A. Die ODER-Normalform $Y = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ wurde vereinfacht zu $Y = A$.
Diese Vereinfachung kann mit Hilfe der Schaltalgebra überprüft werden:

$$Y = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

$$Y = A \wedge (B \vee \overline{B})$$

$$Y = A \wedge 1$$

$$\underline{Y = A}$$

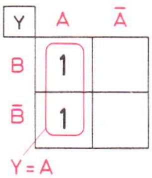


Bild 5.19 Päckchenbildung im KV-Diagramm

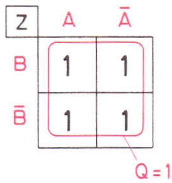


Bild 5.20 KV-Diagramm mit Viererpäckchen

Ein Sonderfall ist hier ein Päckchen mit 4 Vollkonjunktionen (Bild 5.20). Es hat die Koordinaten A, $\overline{A}$, B, $\overline{B}$. Das bedeutet, daß die Variablen A und B entfallen. Das Päckchen hat den Inhalt 1. Die Richtigkeit dieser Angabe läßt sich mit Hilfe der Wahrheitstabelle nachprüfen. Auch die Schaltalgebra führt zu diesem Ergebnis:

$$Z = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

$$Z = [A \wedge (B \vee \overline{B})] \vee [\overline{A} \wedge (B \vee \overline{B})]$$

$$Z = (A \wedge 1) \vee (\overline{A} \wedge 1)$$

$$Z = A \vee \overline{A}$$

$$\underline{Z = 1}$$

In einem KV-Diagramm können mehrere Päckchen gebildet werden (Bild 5.21). Eine Vollkonjunktion kann in mehreren Päckchen vorhanden sein.

Bei mehreren Päckchen ergibt sich die vereinfachte Gleichung als ODER-Verknüpfung der einzelnen Päckcheninhalte.

Für das KV-Diagramm in Bild 5.21 ergeben sich die Päckcheninhalte A und $\overline{B}$.
Die vereinfachte Gleichung lautet:

$$Z = A \vee \overline{B}$$

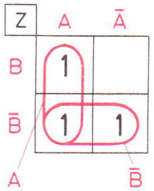


Bild 5.21 KV-Diagramm mit mehreren Päckchen

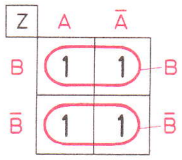


Bild 5.22 KV-Diagramm mit 2 Zweierpäckchen

In dem KV-Diagramm Bild 5.20 könnte man auch 2 Zweierpäckchen machen. Man bekäme dann eine vereinfachte Gleichung, die noch nicht die einfachste Form hat. Probieren wir es einmal. Bild 5.22 zeigt ein KV-Diagramm mit einer solchen Päckchenbildung. Die Päckchen haben die Inhalte B und $\overline{B}$. Die vereinfachte Gleichung lautet somit:

$$Z = B \vee \overline{B}$$

Verknüpft man eine Variable und ihre Negation durch ODER, so ergibt das nach den Regeln der Schaltalgebra 1. Die einfachste Form der Gleichung ist also $Z = 1$.

> *Um die größte Gleichungsvereinfachung zu erreichen, sind die Päckchen stets so groß wie möglich zu bilden.*

Zur Vertiefung der Kenntnisse soll folgendes Beispiel gelöst werden.

Beispiel 3:
Die ODER-Normalform $X = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ soll in ein KV-Diagramm eingetragen und möglichst weitgehend vereinfacht werden. Wie lautet die vereinfachte Gleichung?
Zuerst werden die Vollkonjunktionen in das KV-Diagramm eingetragen (Bild 5.23).

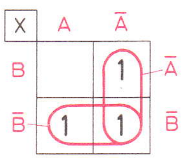


Bild 5.23 KV-Diagramm zu Beispiel 3

Danach werden 2 Zweierpäckchen gebildet. Diese haben die Inhalte $\overline{A}$ und $\overline{B}$. Die vereinfachte Gleichung lautet:

$$\underline{\underline{X = \overline{A} \vee \overline{B}}}$$

5.4.2 KV-Diagramme für 3 Variable

Bei 3 Variablen sind insgesamt 8 verschiedene Vollkonjunktionen möglich (Bild 5.24). Ein KV-Diagramm für 3 Variable muß also 8 Plätze haben.
Die Zuordnung der Variablen zu den Koordinaten kann wie beim KV-Diagramm für 2 Variable prinzipiell beliebig erfolgen. Es ist aber zweckmäßig, der ersten Variablen die obere Diagrammseite und der zweiten Variablen die linke Diagrammseite zuzuweisen. Die dritte Variable erhält die untere Diagrammseite. Für die Variablen A, B und C ergibt sich dann ein KV-Diagramm nach Bild 5.25.

Fall	C	B	A	Z		
1	0	0	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
2	0	0	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$
3	0	1	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$
4	0	1	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge B \wedge \bar{C}$
5	1	0	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$
6	1	0	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge \bar{B} \wedge C$
7	1	1	0	1	$\Rightarrow$	$\bar{A} \wedge B \wedge C$
8	1	1	1	1	$\Rightarrow$	$A \wedge B \wedge C$

Bild 5.24 Mögliche Vollkonjunktionen bei 3 Variablen

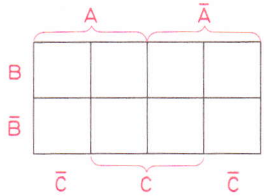


Bild 5.25 KV-Diagramm für 3 Variable

Die dritte Variable C muß so wie in Bild 5.25 angegeben eingetragen werden. Würde man die beiden linken Platzseiten mit C und die beiden rechten Platzseiten mit $\bar{C}$ beschriften, hätte man für einige Vollkonjunktionen doppelte Plätze und für andere gar keine. In Bild 5.26 sind die Vollkonjunktionen in ihre Plätze eingetragen.
Für KV-Diagramme mit 3 Variablen gelten die Regeln, die für KV-Diagramme mit 2 Variablen aufgestellt worden sind, mit folgenden Ergänzungen:

Ein Päckchen darf 2, 4 oder 8 benachbarte Vollkonjunktionen umfassen.

Das KV-Diagramm für 3 Variable hat genaugenommen eine zylindrische Form (Bild 5.27). Daher sind Plätze, die an gegenüberliegenden Enden derselben Zeile liegen, benachbart.

KV-Diagramme lassen sich zylindrisch sehr schlecht darstellen. Man wählt daher die Form von Bild 5.25, beachtet aber die erweiterten Nachbarschaftsbedingungen. In Bild 5.28 sind benachbarte Vollkonjunktionen dargestellt, die zu Päckchen zusammengefaßt werden können. Das Zweierpäckchen im oberen Diagramm ergibt $B \wedge \bar{C}$. Das Viererpäckchen im unteren Diagramm ergibt $\bar{C}$. Jedes Päckchen muß rechteckig oder quadratisch sein. Eine Päckchenbildung wie in Bild 5.28a ist nicht zulässig.

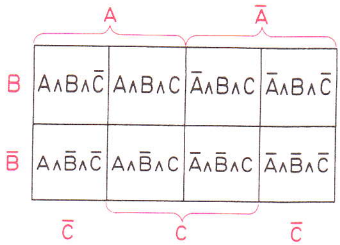


Bild 5.26 KV-Diagramm für 3 Variable mit eingetragenen Vollkonjunktionen

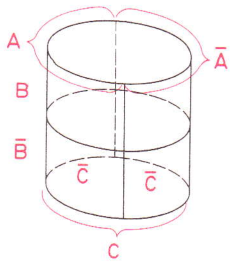


Bild 5.27 KV-Diagramm für 3 Variable, zylinderförmig gezeichnet

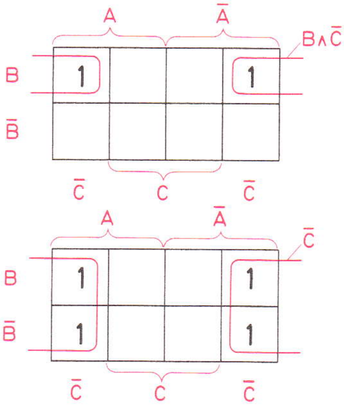


Bild 5.28 Bildung von Päckchen nach den erweiterten Nachbarschaftsbedingungen

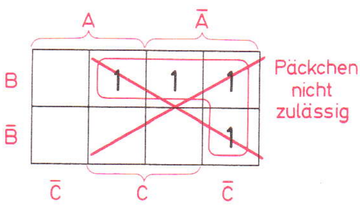


Bild 5.28a KV-Diagramm mit nicht zulässigem Päckchen

Der Umgang mit KV-Diagrammen für 3 Variable soll an einigen Beispielen erläutert werden.

Beispiel 1:
Die Vollkonjunktionen der Gleichung

$$Y = (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

sollen in ein KV-Diagramm eingetragen werden.
Zunächst sollen die Vollkonjunktionen mit ihrer schaltalgebraischen Bezeichnung auf die richtigen Plätze eingetragen werden. Man kann dann leicht kontrollieren, ob man tatsächlich die richtigen Plätze gefunden hat (Bild 5.29).

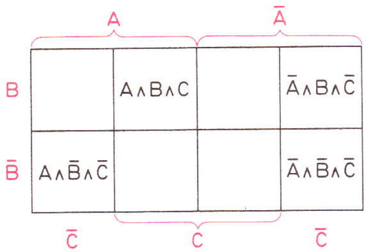


Bild 5.29 KV-Diagramm mit eingetragenen Vollkonjunktionen zu Beispiel 1

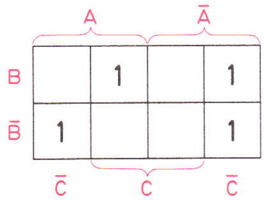


Bild 5.30 KV-Diagramm zu Beispiel 1

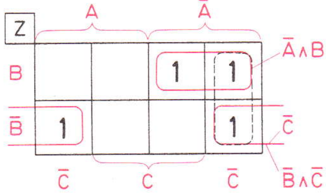
Jede Vollkonjunktion wird im üblichen KV-Diagramm durch eine 1 gekennzeichnet. Wer sicher ist, kann sofort das übliche KV-Diagramm (Bild 5.30) zeichnen.

Beispiel 2:
Die ODER-Normalform

$$Z = (\bar{A} \wedge B \wedge C) \vee (\bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}) \vee (A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C})$$

ist in ein KV-Diagramm einzutragen und möglichst weitgehend zu vereinfachen.
Die vorhandenen Vollkonjunktionen werden durch 1-Angaben gekennzeichnet (Bild 5.31). Dann erfolgt die Päckchenbildung. Ein Viererpäckchen kann nicht gebildet werden. Es lassen sich aber 3 Zweierpäckchen bilden. Das gestrichelte Päckchen ist nicht

Bild 5.31 KV-Diagramm zu Beispiel 2



erforderlich, da mit den beiden roten Päckchen schon alle «1» erfaßt sind. Würde man das gestrichelte Päckchen bilden, hätte die gefundene Gleichung nicht die einfachstmögliche Form.
Das obere rote Päckchen (Bild 5.31) hat den Inhalt $\overline{A} \wedge B$. Der Inhalt des unteren roten Päckchens ist $\overline{B} \wedge \overline{C}$. (Die Variable A entfällt, da sie bei den Koordinaten dieses Päckchens sowohl als A als auch als $\overline{A}$ auftritt.) Die Päckcheninhalte werden durch ODER verknüpft. Damit ergibt sich die vereinfachte Gleichung:

$$Z = (\overline{A} \wedge B) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})$$

Beispiel 3:
Wie lautet die ODER-Normalform, die im KV-Diagramm (Bild 5.32) eingezeichnet ist?
Diese ODER-Normalform soll möglichst weitgehend vereinfacht werden. Wie sieht die vereinfachte Gleichung aus?

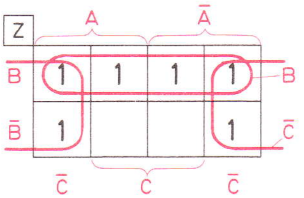


Bild 5.32 KV-Diagramm zu Beispiel

Die im KV-Diagramm eingetragene ODER-Normalform lautet:

$$Z = (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C})$$
$$\vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$$

Es können 2 Viererpäckchen gebildet werden. Das eine hat den Inhalt B, das andere hat den Inhalt $\overline{C}$. Damit ist die vereinfachte Gleichung:

$$Z = B \vee \overline{C}$$

Da 2 Viererpäckchen gebildet werden können, ergibt sich eine starke Vereinfachung der ODER-Normalform.

5.4.3 KV-Diagramme für 4 Variable

KV-Diagramme für 4 Variable müssen 16 Plätze haben, denn 16 verschiedene Vollkonjunktionen sind möglich. Die möglichen Vollkonjunktionen zeigt Bild 5.33.
Das KV-Diagramm für 4 Variable ist in Bild 5.34 dargestellt. Die Variablen sind wie bisher mit A, B und C bezeichnet. Hinzu kommt die Variable D. Selbstverständlich können die Variablen auch anders bezeichnet werden – z.B. als E_1, E_2, E_3 und E_4. Die Plätze der 16 Vollkonjunktionen zeigt Bild 5.35.

Fall	D	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$
2	0	0	0	1	1	$\Rightarrow A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$
3	0	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$
4	0	0	1	1	1	$\Rightarrow A\wedge B\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$
5	0	1	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C\wedge\bar{D}$
6	0	1	0	1	1	$\Rightarrow A\wedge\bar{B}\wedge C\wedge\bar{D}$
7	0	1	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge B\wedge C\wedge\bar{D}$
8	0	1	1	1	1	$\Rightarrow A\wedge B\wedge C\wedge\bar{D}$
9	1	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge D$
10	1	0	0	1	1	$\Rightarrow A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge D$
11	1	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}\wedge D$
12	1	0	1	1	1	$\Rightarrow A\wedge B\wedge\bar{C}\wedge D$
13	1	1	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C\wedge D$
14	1	1	0	1	1	$\Rightarrow A\wedge\bar{B}\wedge C\wedge D$
15	1	1	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A}\wedge B\wedge C\wedge D$
16	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A\wedge B\wedge C\wedge D$

Bild 5.33 Mögliche Vollkonjunktionen bei 4 Variablen

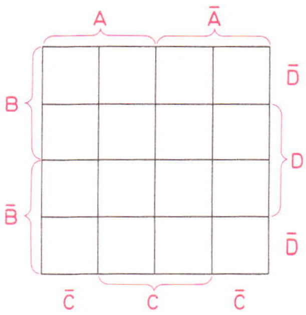


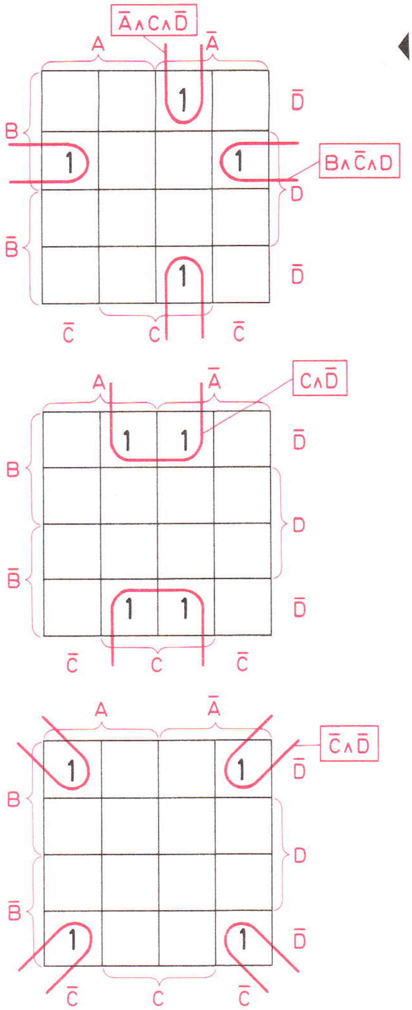
Bild 5.34 KV-Diagramm für 4 Variable

	A	A	Ā	Ā	
B	$A\wedge B\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$	$A\wedge B\wedge C\wedge\bar{D}$	$\bar{A}\wedge B\wedge C\wedge\bar{D}$	$\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$	$\bar{D}$
B	$A\wedge B\wedge\bar{C}\wedge D$	$A\wedge B\wedge C\wedge D$	$\bar{A}\wedge B\wedge C\wedge D$	$\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C}\wedge D$	D
$\bar{B}$	$A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge D$	$A\wedge\bar{B}\wedge C\wedge D$	$\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C\wedge D$	$\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge D$	D
$\bar{B}$	$A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$	$A\wedge\bar{B}\wedge C\wedge\bar{D}$	$\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C\wedge\bar{D}$	$\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge\bar{D}$	$\bar{D}$
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$	

Bild 5.35 KV-Diagramm für 4 Variable mit eingetragenen Vollkonjunktionen

Die bisher erarbeiteten Regeln für KV-Diagramme gelten auch für KV-Diagramme mit 4 Variablen, allerdings mit folgenden Ergänzungen:

> *Ein Päckchen darf 2, 4, 8 oder 16 benachbarte Vollkonjunktionen umfassen.*



◀ *Bild 5.36 Bildung von Päckchen nach den erweiterten Nachbarschaftsbedingungen*

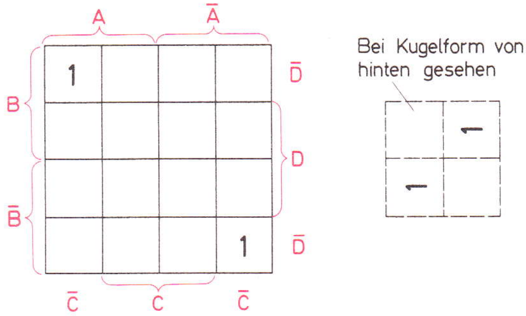


Bild 5.37 KV-Diagramm mit nicht benachbarten Vollkonjunktionen

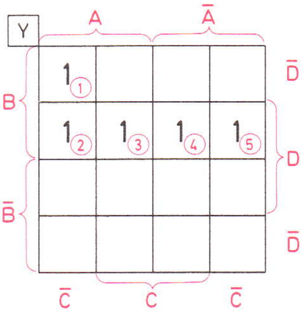


Bild 5.38 KV-Diagramm für Beispiel 1

Das KV-Diagramm für 4 Variable hat genaugenommen eine Kugelform. Daher sind Plätze, die sich an allen Außenseiten des Diagramms gegenüberliegen, einander benachbart.

Die Erweiterung der Nachbarschaftsbedingungen soll näher erklärt werden. Betrachten wir Bild 5.36. Das obere KV-Diagramm zeigt, daß Zweierpäckchen nicht nur mit Vollkonjunktionen gebildet werden können, die sich am rechten und am linken Diagrammrand gegenüberliegen. Man kann auch zwei Vollkonjunktionen zusammenfassen, die sich am oberen und am unteren Diagrammrand gegenüberliegen.

Das mittlere KV-Diagramm zeigt die Bildung eines Viererpäckchens.
Im unteren KV-Diagramm ist ebenfalls die Bildung eines Viererpäckchens gezeigt. Die Einsen in den Ecken können zu einem Viererpäckchen zusammengefaßt werden, denn bei Kugelform der Diagrammfläche treffen die Felder hinten zusammen und sind einander benachbart.
Vorsicht ist bei dem in Bild 5.37 dargestellten KV-Diagramm geboten. Nur 2 Einsen an den Ecken können nicht zu einem Zweierpäckchen zusammengefaßt werden, denn sie sind nicht benachbart – wie ein «Blick» von hinten zeigt.
Das Arbeiten mit KV-Diagrammen für 4 Variable soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

Beispiel 1:
Die folgende schaltalgebraische Gleichung in ODER-Normalform ist in ein KV-Diagramm einzutragen.

$$Y = \underset{1}{(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \vee \underset{2}{(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D)} \vee \underset{3}{(A \wedge B \wedge C \wedge D)}$$
$$\vee \underset{4}{(\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge D)} \vee \underset{5}{(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D)}$$

Zur besseren Übersicht werden die Vollkonjunktionen mit roten Nummern versehen. Diese kennzeichnen auch die zugehörigen Diagrammfelder. Bild 5.38 zeigt das KV-Diagramm.

Beispiel 2:
Für eine Steuerungsaufgabe wird eine Schaltung gesucht, die die Wahrheitstabelle 5.39 erfüllt. Diese Schaltung soll möglichst einfach aufgebaut sein.
Aus der Wahrheitstabelle kann die ODER-Normalform entnommen werden. Sie lautet:

$$Z = \overset{1}{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \vee \overset{2}{(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \vee \overset{3}{(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})}$$
$$\vee \underset{4}{(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \vee \underset{10}{(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D)} \vee \underset{12}{(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D)}$$

Die einzelnen Vollkonjunktionen wurden mit den Nummern der Fälle der Wahrheitstabelle gekennzeichnet. Die Vollkonjunktionen werden jetzt in ein KV-Diagramm eingetragen (Bild 5.40).
Der nächste Schritt ist die Vereinfachung der ODER-Normalform durch Päckchenbildung. Es können 2 Viererpäckchen gebildet werden, die die Inhalte $\overline{C} \wedge \overline{D}$ und $A \wedge \overline{C}$ haben. Die vereinfachte Gleichung lautet also:

$$Z = (\overline{C} \wedge \overline{D}) \vee (A \wedge \overline{C})$$

Fall	D	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
2	0	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
3	0	0	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
4	0	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge \bar{D}$
5	0	1	0	0	0	
6	0	1	0	1	0	
7	0	1	1	0	0	
8	0	1	1	1	0	
9	1	0	0	0	0	
10	1	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C} \wedge D$
11	1	0	1	0	0	
12	1	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D$
13	1	1	0	0	0	
14	1	1	0	1	0	
15	1	1	1	0	0	
16	1	1	1	1	0	

Bild 5.39 Wahrheitstabelle zu Beispiel 2

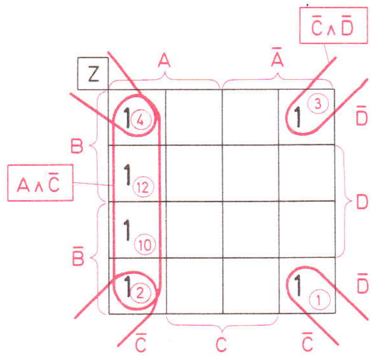


Bild 5.40 KV-Diagramm zu Beispiel 2

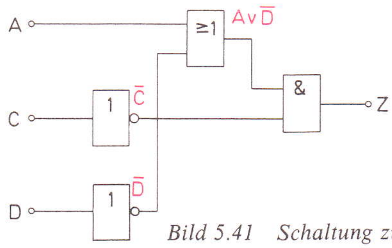


Bild 5.41 Schaltung zu Beispiel 2

Die Variable $\bar{C}$ kann ausgeklammert werden:

$$Z = (\bar{C} \wedge \bar{D}) \vee (A \wedge \bar{C}) = \bar{C} \wedge (A \vee \bar{D})$$

Die sich hieraus ergebende Schaltung ist in Bild 5.41 dargestellt.

5.4.4 KV-Diagramme für 5 Variable

Ein KV-Diagramm für 5 Variable benötigt 32 Plätze für die 32 möglichen Vollkonjunktionen. In der Ebene lassen sich an das KV-Diagramm für 4 Variable keine Plätze mehr «anbauen».

Es muß aufgestockt werden. Bild 5.42 zeigt, wie das gemeint ist. Die Variablen werden wie bisher mit A, B, C und D bezeichnet. Die Variable E kommt hinzu.

Dem unteren Stockwerk des KV-Diagramms wird die Koordinate E zugeordnet, dem oberen Stockwerk die Koordinate $\bar{E}$. Das Zeichnen eines solchen «zweistöckigen» Diagramms ist schwierig. Man hat daher vereinbart, das obere Stockwerk abzuheben und es

Bild 5.42 KV-Diagramm für 5 Variable

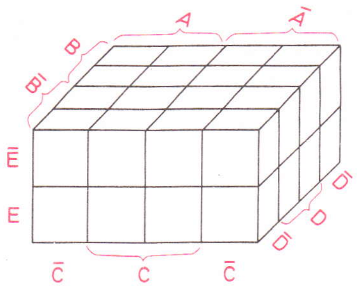
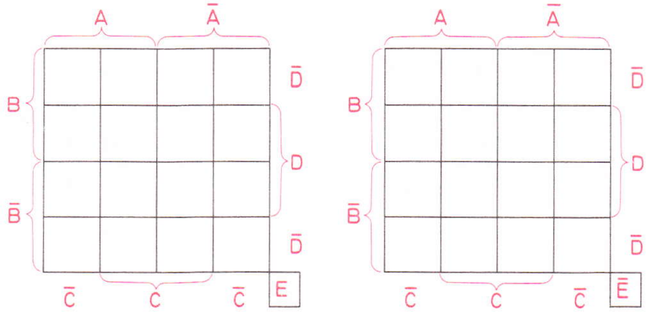


Bild 5.42a KV-Diagramm für 5 Variable, bestehend aus 2 Tafeln



rechts neben das untere Stockwerk zu setzen. Ein KV-Diagramm für 5 Variable besteht also aus zwei Tafeln, die man sich übereinanderliegend vorstellen muß (Bild 5.42a). Ein solches KV-Diagramm hat somit Plätze für 32 Vollkonjunktionen.
Die für die anderen KV-Diagramme gültigen Regeln gelten auch für KV-Diagramme mit 5 Variablen, mit folgenden Ergänzungen:

Ein Päckchen darf 2, 4, 8, 16 oder 32 benachbarte Vollkonjunktionen umfassen.

Benachbart sind auch Vollkonjunktionen, deren Felder man sich gemäß Bild 5.42 übereinanderliegend vorstellen muß.

An einigen Beispielen sollen die Regeln näher erläutert werden.

Beispiel 1:
Die folgende ODER-Normalform soll in ein KV-Diagramm eingetragen und möglichst weitgehend vereinfacht werden.

$$Z = \underbrace{(\bar{A} \wedge B \wedge C \wedge \bar{D} \wedge E)}^{①} \vee \underbrace{(\bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E)}^{②} \vee \underbrace{(\bar{A} \wedge B \wedge C \wedge \bar{D} \wedge \bar{E})}^{③}$$
$$\vee \underbrace{(\bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \bar{E})}_{④} \vee \underbrace{(\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \wedge D \wedge \bar{E})}_{⑤} \vee \underbrace{(\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C \wedge \bar{D} \wedge \bar{E})}_{⑥}$$

Zur besseren Nachprüfbarkeit werden die Vollkonjunktionen numeriert. Die roten Nummern finden sich in den Feldern des KV-Diagramms wieder. Es können 2 Päckchen gebildet werden. Das rote Päckchen auf der rechten Tafel hat den Wert $\overline{A} \wedge C \wedge \overline{E}$. Die Variablen B und D fallen bei diesem Päckchen weg.

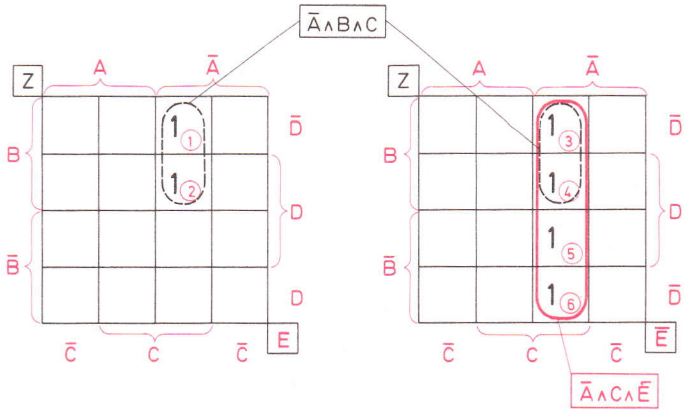


Bild 5.43 KV-Diagramm zu Beispiel 1

Das gestrichelt gezeichnete Päckchen ist ein Viererpäckchen, das über 2 «Stockwerke» geht. Man muß sich ja die beiden Tafeln des Diagramms Bild 5.43 als übereinanderliegend vorstellen. Der Inhalt dieses Päckchens ist $\overline{A} \wedge B \wedge C$. Da das Päckchen über 2 Stockwerke geht, fällt die Variable E heraus. Die Variable D entfällt ebenfalls. Die vereinfachte Gleichung lautet also:

$$Z = (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge C \wedge \overline{E})$$

Beispiel 2:

Im KV-Diagramm Bild 5.44 ist eine ODER-Normalform angegeben. Diese ist möglichst weitgehend zu vereinfachen.

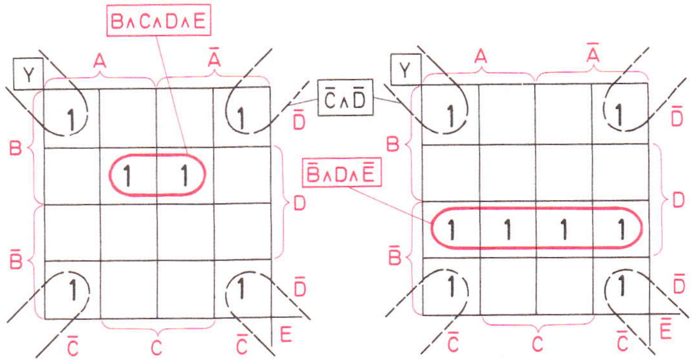
Die Einsen an den Ecken beider Tafeln können zu einem Achterpäckchen zusammengefaßt werden. Dieses Päckchen geht über 2 Stockwerke. Sein Inhalt ist $\overline{C} \wedge \overline{D}$.

Weiter können ein Viererpäckchen und ein Zweierpäckchen gebildet werden. Der Inhalt des Viererpäckchens ist $\overline{B} \wedge D \wedge \overline{E}$. Der Inhalt des Zweierpäckchens ist $B \wedge C \wedge D \wedge E$. Man erhält die vereinfachte Gleichung:

$$Y = (\overline{C} \wedge \overline{D}) \vee (\overline{B} \wedge D \wedge \overline{E}) \vee (B \wedge C \wedge D \wedge E)$$

Die Vereinfachung ist erheblich. Man kann das am besten beurteilen, wenn man die im KV-Diagramm Bild 5.44 enthaltene ODER-Normalform aufschreibt.

Bild 5.44 KV-Diagramm zu Beispiel 2



Beispiel 3:
Wie lautet die im KV-Diagramm Bild 5.44 enthaltene ODER-Normalform?
Die linke Tafel des KV-Diagramms enthält 6 Vollkonjunktionen, die rechte Tafel enthält 8. Somit ergibt sich eine ODER-Normalform mit 14 Vollkonjunktionen.

$$
\begin{aligned}
Y = {} & (A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge E) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge E) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E) \\
& \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge E) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge E) \\
& \vee (A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \overline{E}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \overline{E}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \wedge \overline{E}) \\
& \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D \wedge \overline{E}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D \wedge \overline{E}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \wedge \overline{E}) \\
& \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \overline{E}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D} \wedge \overline{E})
\end{aligned}
$$

5.4.5 KV-Diagramme für mehr als 5 Variable

In der Praxis treten ODER-Normalformen mit mehr als 5 Variablen selten auf. KV-Diagramme für mehr als 5 Variable werden daher auch selten benötigt. Man kann aber solche Diagramme aufstellen. KV-Diagramme für 6 Variable sind noch einigermaßen übersichtlich. Bei 7 und mehr Variablen geht die Übersichtlichkeit weitgehend verloren.
Bei einem KV-Diagramm für 6 Variable benötigt man für die dann möglichen Vollkonjunktionen 64 Plätze. Geht man vom KV-Diagramm für 5 Variable aus, so muß man erneut «aufstocken». Auf die zwei Stockwerke kommt ein drittes und ein viertes Stockwerk (Bild 5.45).
Die vier Stockwerke kann man in einer Ebene ausbreiten (Bild 5.46). Bei der Päckchenbildung muß man dann stets daran denken, daß die vier Tafeln eigentlich übereinanderliegen.
Bei ODER-Normalformen mit 6 und mehr Variablen ist es zweckmäßig, zwei oder auch drei Variable durch eine neue Variable zu ersetzen. Die Vereinfachung kann dann in mehreren Schritten erfolgen.

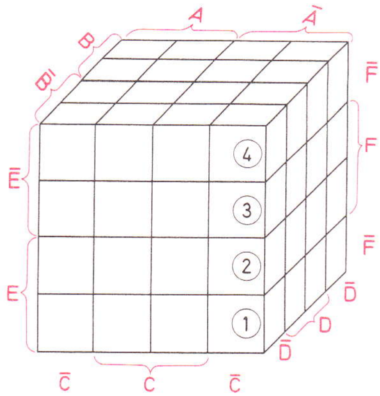


Bild 5.45 KV-Diagramm für 6 Variable

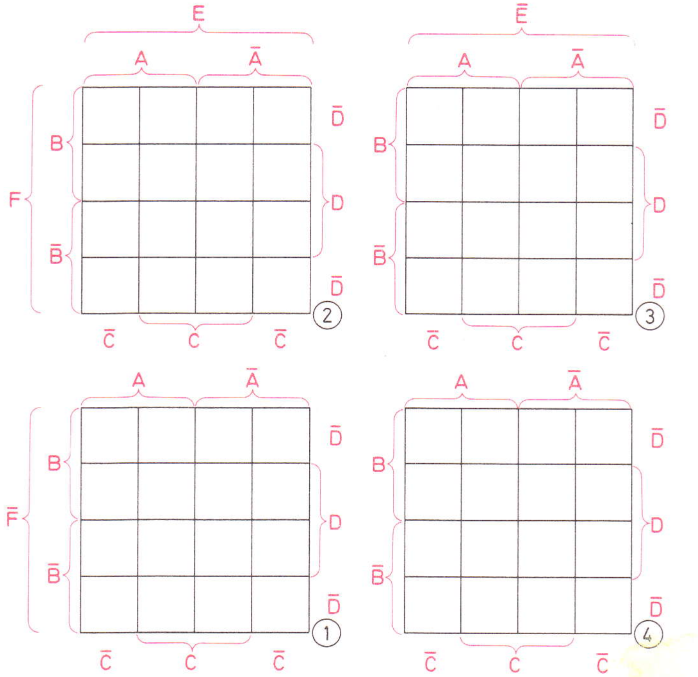


Bild 5.46 KV-Diagramm für 6 Variable, in einer Ebene gezeichnet

Beispiel:

$$Z = (A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D \wedge E \wedge \overline{F}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \wedge E \wedge \overline{F})$$
$$\vee (A \wedge B \wedge C \wedge \overline{D} \wedge E \wedge F) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E \wedge F)$$

Alle vier Vollkonjunktionen enthalten die Variablen A und E in gleicher, also hier in nicht negierter Form. Man kann nun $A \wedge E$ als eine Variable auffassen:

$$A \wedge E = P$$

Damit erhält man eine ODER-Normalform mit nur 5 Variablen:

$$Z = (P \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D \wedge \overline{F}) \vee (P \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D \wedge \overline{F})$$
$$\vee (P \wedge B \wedge C \wedge \overline{D} \wedge F) \vee (P \wedge B \wedge C \wedge D \wedge F)$$

Nach der Vereinfachung ist P wieder durch $A \wedge E$ zu ersetzen.

5.5 Berechnung von Verknüpfungsschaltungen

5.5.1 Allgemeine Hinweise

Für die Synthese von Schaltungen wurden in Abschnitt 5.1 folgende Schritte angeführt:

1. Beschreibung der Funktion der gesuchten Schaltung.
2. Festlegung der Eingangs- und Ausgangsvariablen und der Bedeutung von 0 und 1.
3. Erstellen der Wahrheitstabelle.
4. Bestimmen der logischen Verknüpfungsschaltung.
5. Vereinfachung und gegebenenfalls Umformung der Schaltung.

Ist die Wahrheitstabelle bekannt, beginnt man in Schritt 4 jetzt zweckmäßigerweise mit der Aufstellung der ODER-Normalform. Diese wird mit Hilfe eines KV-Diagramms soweit wie möglich vereinfacht. Am Ende des Schrittes 4 liegt die vereinfachte Gleichung vor, nach der die Verknüpfungsschaltung aufgebaut werden kann.
In Schritt 5 ist zu prüfen, ob eine weitere Vereinfachung der gefundenen Gleichung mit Hilfe der Schaltalgebra möglich und sinnvoll ist. Wenn ja, ist diese Vereinfachung durchzuführen.
Jetzt muß man wissen, welche Verknüpfungsglieder tatsächlich zur Verfügung stehen. Die Gleichung ist dann so umzuformen, daß die zur Verfügung stehenden Glieder für den Schaltungsaufbau verwendet werden können. Danach kann die Schaltung aufgebaut werden.

5.5.2 Digitale Wechselschaltung

Mit Hilfe von Verknüpfungsgliedern soll eine Digitalschaltung aufgebaut werden, die wie eine Wechselschaltung funktioniert. Der Ausgangszustand soll sich stets dann ändern, wenn sich einer der beiden Eingangszustände ändert. Ändern sich beide Eingangszustände, so soll sich der Ausgangszustand nicht ändern. Die Schaltung soll mit NAND-Gliedern aufgebaut werden.
Die gesuchte Schaltung hat zwei Eingänge und einen Ausgang. Die Eingangsvariablen werden A und B genannt. Die Ausgangsvariable erhält die Bezeichnung Z (Bild 5.47).
Die Wahrheitstabelle einer Schaltung mit zwei Eingangsvariablen hat 4 Fälle (Bild 5.48). Der Ausgangszustand Z für den ersten Fall kann beliebig festgelegt werden. Es wird gewählt $Z = 0$.

Von Fall 1 nach Fall 2 ändert die Variable A ihren Zustand. Die Variable B ändert ihren Zustand nicht. Wenn nur eine Variable ihren Zustand ändert, muß sich der Ausgangszustand ändern. Z muß also 1 werden.
Beim Übergang von Fall 2 auf Fall 3 ändern sich die Zustände von A und B. Z ändert also seinen Zustand nicht. Beim Übergang von Fall 3 auf Fall 4 geht A von 0 auf 1. B bleibt auf 1. Somit muß sich Z von 1 auf 0 ändern. Damit wäre die Wahrheitstabelle fertig. Die Wahrheitstabelle könnte auch anders aussehen, wenn wir im Fall 1 Z = 1 gewählt hätten.

Bild 5.47 Blockschaltbild der digitalen Wechselschaltung

Fall	B	A	Z	
1	0	0	0	
2	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B}$
3	1	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge B$
4	1	1	0	

Bild 5.48 Wahrheitstabelle der digitalen Wechselschaltung

	A	$\overline{A}$
B		1
$\overline{B}$	1	

Bild 5.49 KV-Diagramm der digitalen Wechselschaltung

Für die Wahrheitstabelle Bild 5.48 ist nun die ODER-Normalform aufzustellen. Sie lautet:

$$Z = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

Trägt man diese ODER-Normalform in ein KV-Diagramm ein, so zeigt sich, daß eine weitere Vereinfachung nicht möglich ist (Bild 5.49).
Da die Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut werden soll, ist eine Umformung der Gleichung erforderlich:

$$Z = (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$$

$$Z = \overline{\overline{(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})}}$$

$$Z = \overline{\overline{\overline{A} \wedge B} \wedge \overline{A \wedge \overline{B}}}$$

Die zu der umgeformten Gleichung gehörende Schaltung zeigt Bild 5.50.

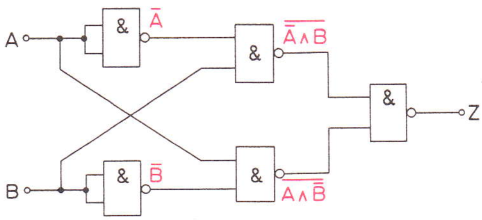


Bild 5.50 Digitalschaltung

5.5.3 Zwei-aus-Drei-Schaltung

Eine mit Risiken behaftete Anlage (z.B. ein Kernkraftwerk) soll im Gefahrenfall sofort abgeschaltet werden. Die Abschaltung soll automatisch erfolgen, und zwar mit Hilfe einer Digitalschaltung. In den Gefahrenmeldern, die die Abschaltung auslösen, können selbst Fehler auftreten. Man setzt daher an jeder kritischen Stelle drei gleichartige Gefahrenmelder ein (Bild 5.51).
Die Abschaltung soll nur dann erfolgen, wenn mindestens zwei der drei Gefahrenmelder die Gefahr anzeigen. Man verhindert so ein unnötiges Abschalten, das u.U. erhebliche Kosten verursachen kann. Die Gefahrenmelder geben bei Gefahr Zustand 1. Die Abschaltung der Anlage soll erfolgen, wenn am Ausgang der Digitalschaltung der Zustand 1 anliegt.
Gesucht wird also eine Schaltung, an deren Ausgang immer dann 1 auftritt, wenn an mindestens 2 der 3 Eingänge der Zustand 1 anliegt. Eine solche Schaltung heißt Zwei-aus-Drei-Schaltung.

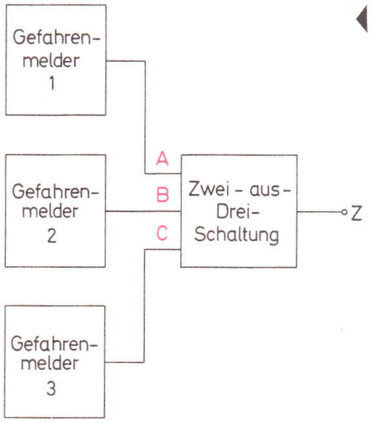


Bild 5.51 Gefahrenmelder und Zwei-aus-Drei-Schaltung

Fall	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	
2	0	0	1	0	
3	0	1	0	0	
4	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \overline{C}$
5	1	0	0	0	
6	1	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B} \wedge C$
7	1	1	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge B \wedge C$
8	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C$

Bild 5.52 Wahrheitstabelle der Zwei-aus-Drei-Schaltung

Die Eingangsvariablen erhalten die Namen A, B und C. Die Ausgangsvariable soll Z heißen. Nach den oben gemachten Angaben ist nun die Wahrheitstabelle aufzustellen. Immer, wenn zwei der Eingangsvariablen 1 sind, muß Z = 1 sein. Wenn alle drei Eingangsvariablen 1 sind, muß Z ebenfalls 1 sein. Die so gefundene Wahrheitstabelle zeigt Bild 5.52.
Nach der Wahrheitstabelle ist die ODER-Normalform aufzustellen. Sie lautet:

$$Z = (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

Die ODER-Normalform wird mit Hilfe eines KV-Diagramms vereinfacht (Bild 5.53). Es können drei Zweierpäckchen gebildet werden. Die vereinfachte Gleichung hat jetzt die Form:

$$Z = (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

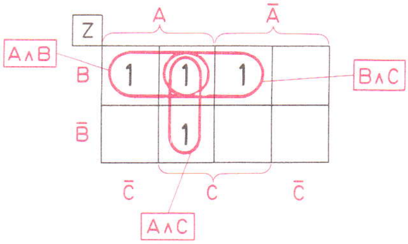


Bild 5.53 KV-Diagramm der Zwei-aus-Drei-Schaltung

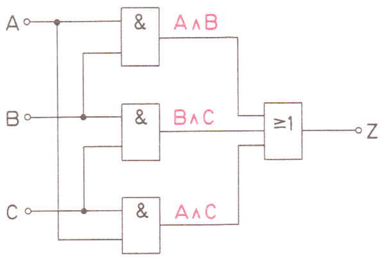


Bild 5.54 Zwei-aus-Drei-Schaltung

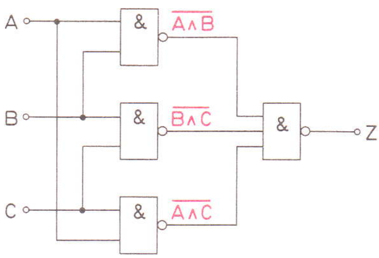


Bild 5.55 Zwei-aus-Drei-Schaltung, mit NAND-Gliedern aufgebaut

Nach dieser Gleichung kann die Schaltung aufgebaut werden (Bild 5.54).
Häufig sind nur NAND-Glieder vorhanden. Damit die Schaltung mit NAND-Gliedern aufgebaut werden kann, ist folgende Umrechnung erforderlich:

$$Z = (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)$$

$$Z = \overline{\overline{(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C)}}$$

$$Z = \overline{\overline{A \wedge B} \wedge \overline{B \wedge C} \wedge \overline{A \wedge C}}$$

Die zugehörige Schaltung zeigt Bild 5.55.

5.5.4 Geradeschaltung

Für die Fehlererkennung in Kodes (siehe Abschnitt 8.7 und 8.8) und für allgemeine Überwachungsaufgaben wird häufig eine Schaltung benötigt, an deren Ausgang immer dann 1 anliegt, wenn eine geradzahlige Anzahl von Eingangsvariablen den Wert 1 haben. Eine solche Schaltung heißt Geradeschaltung.
Gesucht ist eine Geradeschaltung mit 4 Eingängen. Die Eingangsvariablen werden A, B, C und D genannt. Die Ausgangsvariable sei Y.
Zuerst ist eine Wahrheitstabelle aufzustellen. Y muß immer 1 sein, wenn 0, 2 oder 4 Eingangsvariable 1 sind (5.56).
Aus der Wahrheitstabelle ergibt sich die ODER-Normalform:

$$\begin{aligned} Y = {} & \underset{(1)}{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \\ & \vee \underset{(4)}{(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D})} \vee \underset{(6)}{(A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D})} \\ & \vee \underset{(7)}{(\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge \overline{D})} \vee \underset{(10)}{(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D)} \\ & \vee \underset{(11)}{(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D)} \vee \underset{(13)}{(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D)} \\ & \vee \underset{(16)}{(A \wedge B \wedge C \wedge D)} \end{aligned}$$

Die einzelnen Vollkonjunktionen sind durch die Fallnummern gekennzeichnet.
Die ODER-Normalform soll mit einem KV-Diagramm vereinfacht werden (Bild 5.57).

Fall	D	C	B	A	Y	
1	0	0	0	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}$
2	0	0	0	1	0	
3	0	0	1	0	0	
4	0	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}$
5	0	1	0	0	0	
6	0	1	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D}$
7	0	1	1	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge B \wedge C \wedge \overline{D}$
8	0	1	1	1	0	
9	1	0	0	0	0	
10	1	0	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge D$
11	1	0	1	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D$
12	1	0	1	1	0	
13	1	1	0	0	1	$\Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D$
14	1	1	0	1	0	
15	1	1	1	0	0	
16	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D$

Bild 5.56 Wahrheitstabelle einer Geradeschaltung

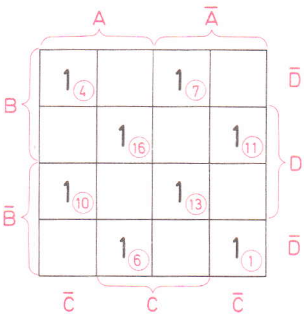


Bild 5.57 KV-Diagramm der Geradeschaltung

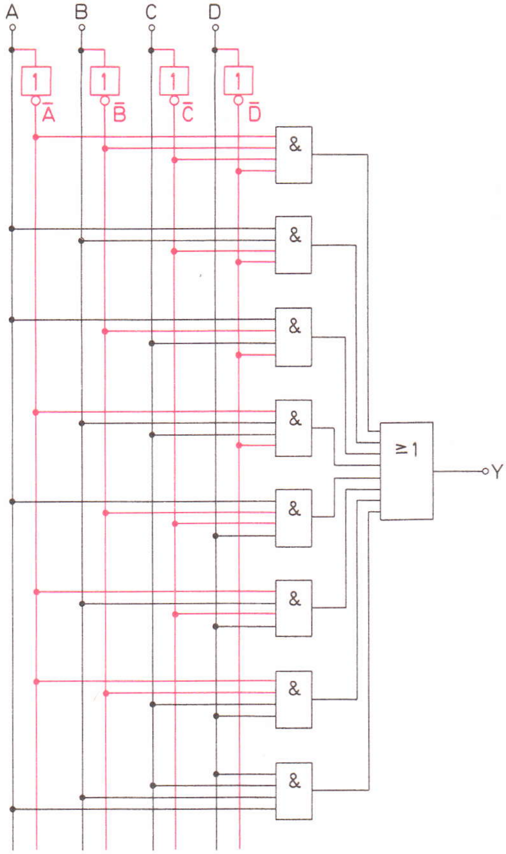


Bild 5.58 Geradeschaltung

Bild 5.59 Wahrheitstabelle einer Schwellwertschaltung

Fall	E	D	C	B	A	Z	
1	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	1	0	
3	0	0	0	1	0	0	
4	0	0	0	1	1	0	
5	0	0	1	0	0	0	
6	0	0	1	0	1	0	
7	0	0	1	1	0	0	
8	0	0	1	1	1	0	
9	0	1	0	0	0	0	
10	0	1	0	0	1	0	
11	0	1	0	1	0	0	
12	0	1	0	1	1	0	
13	0	1	1	0	0	0	
14	0	1	1	0	1	0	
15	0	1	1	1	0	0	
16	0	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \bar{E}$
17	1	0	0	0	0	0	
18	1	0	0	0	1	0	
19	1	0	0	1	0	0	
20	1	0	0	1	1	0	
21	1	0	1	0	0	0	
22	1	0	1	0	1	0	
23	1	0	1	1	0	0	
24	1	0	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge \bar{D} \wedge E$
25	1	1	0	0	0	0	
26	1	1	0	0	1	0	
27	1	1	0	1	0	0	
28	1	1	0	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge \bar{C} \wedge D \wedge E$
29	1	1	1	0	0	0	
30	1	1	1	0	1	1	$\Rightarrow A \wedge \bar{B} \wedge C \wedge D \wedge E$
31	1	1	1	1	0	1	$\Rightarrow \bar{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E$
32	1	1	1	1	1	1	$\Rightarrow A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E$

Es tritt hier der seltene Fall auf, daß eine Päckchenbildung nicht möglich ist. Die ODER-Normalform kann also nicht vereinfacht werden. Die Schaltung muß daher nach der ODER-Normalform aufgebaut werden (Bild 5.58).

5.5.5 Schwellwertschaltung

Eine Schwellwertschaltung ist eine Schaltung, bei der eine bestimmte Mindestanzahl von Eingangsvariablen den Wert 1 haben muß, damit der Ausgang den Wert 1 hat.
Zu berechnen ist eine Schaltung mit 5 Eingangsvariablen. Am Ausgang soll nur dann 1 liegen, wenn an mindestens 4 Eingängen 1 anliegt.
Die Eingangsvariablen erhalten die Namen A, B, C, D und E. Die Ausgangsvariable wird mit Z bezeichnet. Zunächst ist die Wahrheitstabelle aufzustellen. Bei 5 Variablen ergeben sich 32 Fälle (Bild 5.59).
Die ODER-Normalform besteht aus 6 Vollkonjunktionen:

$$\begin{aligned} Z = &(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \overline{E}) \\ \vee\, &(A \wedge B \wedge C \wedge \overline{D} \wedge E) \\ \vee\, &(A \wedge B \wedge \overline{C} \wedge D \wedge E) \\ \vee\, &(A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D \wedge E) \\ \vee\, &(\overline{A} \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E) \\ \vee\, &(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge E) \end{aligned}$$

Die ODER-Normalform wird mit Hilfe eines KV-Diagramms vereinfacht (Bild 5.60). Es lassen sich 5 Zweierpäckchen bilden. Damit ergibt sich folgende vereinfachte Gleichung:

$$\begin{aligned} Z = &(A \wedge B \wedge C \wedge E) \vee (A \wedge B \wedge D \wedge E) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge D) \\ \vee\, &(A \wedge C \wedge D \wedge E) \vee (B \wedge C \wedge D \wedge E) \end{aligned}$$

Die zu der vereinfachten Gleichung gehörende Schaltung ist in Bild 5.61 dargestellt. Man könnte überlegen, ob es sinnvoll ist, die Gleichung mit Hilfe der Schaltalgebra noch

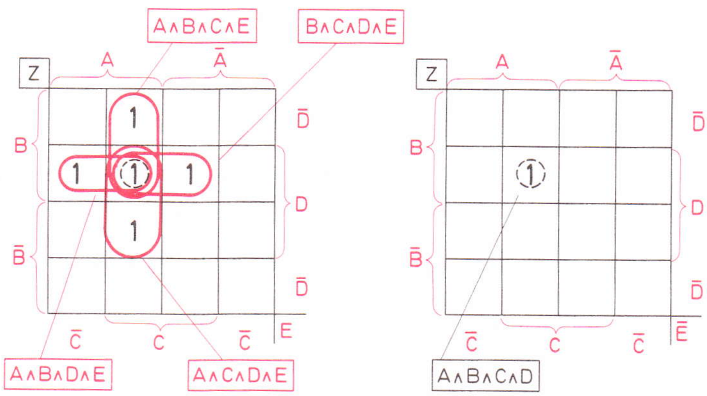


Bild 5.60 KV-Diagramm der Schwellwertschaltung

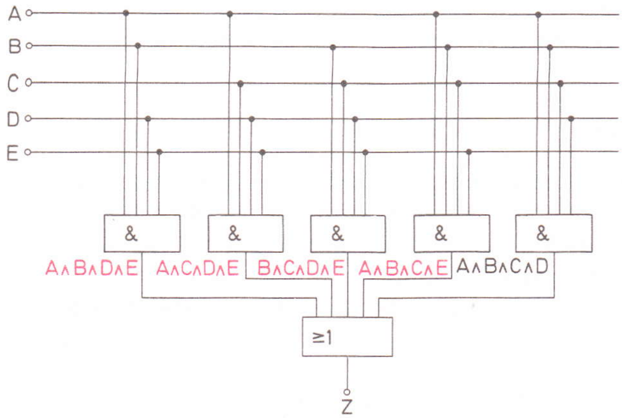


Bild 5.61 Schwellwertschaltung

etwas weiter zu vereinfachen. Es wäre möglich, aus den ersten 3 Vollkonjunktionen $(A \wedge B)$ auszuklammern. Aus den letzten beiden Vollkonjunktionen könnte $(C \wedge D)$ ausgeklammert werden. Damit ergäbe sich die Gleichung:

$$Z = [(A \wedge B) \wedge ((C \wedge E) \vee (D \wedge E) \wedge C \wedge D))] \\ \vee [(C \wedge D) \wedge ((A \wedge E) \vee (B \wedge E))]$$

Eine ins Gewicht fallende Vereinfachung ergibt sich aber nicht.

5.5.6 Vergleichsschaltung (Komparator)

In der Digitaltechnik sind häufig digitale Ausdrücke miteinander zu vergleichen. Die einfachste Vergleichsschaltung, der sogenannte Komparator, vergleicht die Zustände zweier Variabler miteinander.
Die beiden Variablen sollen A und B heißen. A und B können gleich sein. A kann größer als B sein und umgekehrt. Der Komparator hat für die drei Möglichkeiten drei Ausgänge. Sie sollen mit X, Y und Z bezeichnet und wie folgt zugeordnet werden:

$$A = B \quad \Rightarrow \quad X = 1$$
$$A > B \quad \Rightarrow \quad Y = 1$$
$$A < B \quad \Rightarrow \quad Z = 1$$

Gesucht wird also eine Schaltung mit den beiden Eingangsvariablen A und B und mit den Ausgangsvariablen X, Y und Z.
Bei der Aufstellung der Wahrheitstabelle ist zu beachten: A ist dann größer B, wenn $A = 1$ und $B = 0$ ist. Entsprechend ist B dann größer A, wenn $B = 1$ und $A = 0$ ist. Die Wahrheitstabelle zeigt Bild 5.62.
Aus der Wahrheitstabelle ergeben sich die Gleichungen:

$$X = (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$$
$$Y = A \wedge \overline{B}$$
$$Z = \overline{A} \wedge B$$

			A = B	A > B	A < B
Fall	B	A	X	Y	Z
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	1
4	1	1	1	0	0

Bild 5.62 Wahrheitstabelle eines Komparators

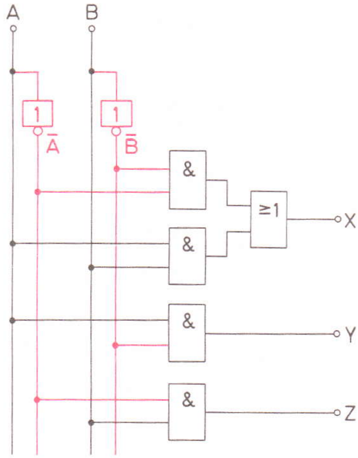


Bild 5.63 Schaltung eines Komparators

Diese Gleichungen lassen sich nicht weiter vereinfachen. Die gesuchte Schaltung zeigt Bild 5.63.

5.5.7 Transistor-Sortierschaltung

Transistoren sollen vor der Auslieferung daraufhin überprüft werden, ob die vier wichtigen Daten A, B, C, D innerhalb eines vorgeschriebenen Toleranzbereiches liegen. Zum Messen werden vier digitale Meßeinheiten verwendet. Jede Meßeinrichtung gibt dann 1, wenn der von ihr zu messende Wert innerhalb des Toleranzbereichs liegt. Liegt der Wert außerhalb des Toleranzbereichs, so gibt die Meßeinrichtung 0.

Das Sortieren der Transistoren soll mit Hilfe einer Digitalschaltung erfolgen. Liegen alle vier Daten innerhalb des Toleranzbereichs, soll ein Ausgang M der Schaltung 1 geben. Liegt nur B außerhalb des Toleranzbereichs, so soll ein Ausgang N den Zustand 1 geben. Liegen nur B und D außerhalb des Toleranzbereichs, so soll ein Ausgang U den Zustand 1 geben. In allen anderen Fällen muß ein Ausgang $Z = 1$ sein, was bedeutet, daß der Transistor Ausschuß ist.

Die gesuchte Schaltung soll berechnet und mit NAND-Gliedern aufgebaut werden.

Es sind vier Eingangsvariable vorhanden, nämlich A, B, C und D. Die Ausgangsvariablen heißen M, N, U und Z. M wird nur 1, wenn $A = 1, B = 1, C = 1$ und $D = 1$ sind. Das ist der Fall 16 in der Wahrheitstabelle Bild 5.64. N wird 1, wenn $A = 1, B = 0, C = 1$ und $D = 1$ sind (Fall 14). U wird 1, wenn $A = 1, B = 0, C = 1$ und $D = 0$ sind (Fall 6). In allen Fällen außer den Fällen 6, 14 und 16 wird $Z = 1$.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

$$M = A \wedge B \wedge C \wedge D$$
$$N = A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D$$
$$U = A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D}$$

Fall	D	C	B	A	M	N	U	Z	$\overline{Z}$
1	0	0	0	0				1	
2	0	0	0	1				1	
3	0	0	1	0				1	
4	0	0	1	1				1	
5	0	1	0	0				1	
6	0	1	0	1			1		1
7	0	1	1	0				1	
8	0	1	1	1				1	
9	1	0	0	0				1	
10	1	0	0	1				1	
11	1	0	1	0				1	
12	1	0	1	1				1	
13	1	1	0	0				1	
14	1	1	0	1		1			1
15	1	1	1	0				1	
16	1	1	1	1	1				1

Bild 5.64 Wahrheitstabelle einer Transistor-Sortierschaltung. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit wurden die 0-Zustände bei den Ausgangsvariablen nicht eingetragen

Die Gleichung für Z enthält 13 Vollkonjunktionen. Z ist immer dann 1, wenn weder M noch N noch U 1 ist. Es ist besser, die ODER-Normalform für $\overline{Z}$ aufzustellen (Bild 5.64).

$$\overline{Z} = (A \wedge B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D})$$

$$\overline{Z} = M \vee N \vee U$$

Damit ergibt sich für Z:

$$Z = \overline{M \vee N \vee U}$$

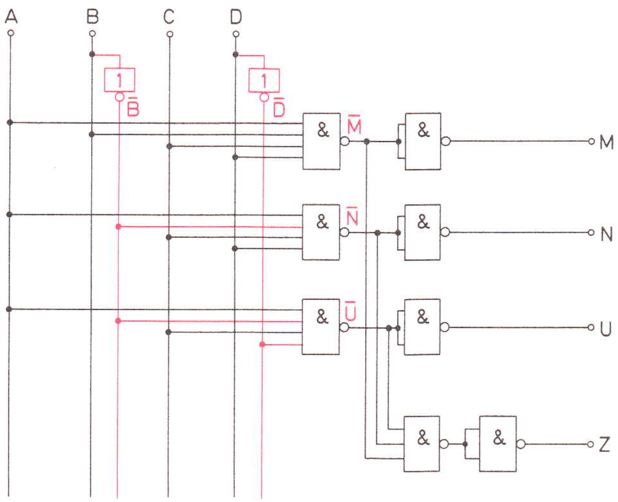


Bild 5.65 Transistor-Sortierschaltung

Die gefundenen Gleichungen für M, N und U lassen sich nicht mehr vereinfachen. Sie sollen zusammen mit der Gleichung für Z auf NAND umgerechnet werden:

$$M = \overline{\overline{A \wedge B \wedge C \wedge D}}$$

$$N = \overline{\overline{A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge D}}$$

$$U = \overline{\overline{A \wedge \overline{B} \wedge C \wedge \overline{D}}}$$

$$Z = \overline{M \vee N \vee U} = \overline{M} \wedge \overline{N} \wedge \overline{U}$$

$$Z = \overline{\overline{\overline{M} \wedge \overline{N} \wedge \overline{U}}}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich die in Bild 5.65 dargestellte Schaltung.
Durch die Ausgangszustände von M, N, U und Z kann eine mechanische Vorrichtung gesteuert werden, mit der die Transistoren in 4 verschiedene Behälter abgelegt werden.

5.6 Aufgaben zum Schaltungsentwurf

5.6.1 Steuerschaltung

Gesucht ist eine Steuerschaltung, die die Wahrheitstabelle Bild 5.66 erfüllt. Stellen Sie die ODER-Normalformen für X, Y und Z auf, und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich mit Hilfe von KV-Diagrammen. Die gefundenen Gleichungen für X, Y und Z sind so umzurechnen, daß ein Aufbau der Schaltung nur mit NOR-Gliedern möglich ist. Die gesuchte Schaltung ist zu zeichnen.

Bild 5.66 Wahrheitstabelle der gesuchten Steuerschaltung

Fall	D	C	B	A	X	Y	Z
1	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	1	1	0	0
5	0	1	0	0	0	1	1
6	0	1	0	1	0	1	1
7	0	1	1	0	1	0	0
8	0	1	1	1	0	1	1
9	1	0	0	0	0	0	1
10	1	0	0	1	0	0	1
11	1	0	1	0	1	0	0
12	1	0	1	1	0	0	1
13	1	1	0	0	0	1	1
14	1	1	0	1	0	1	1
15	1	1	1	0	1	0	0
16	1	1	1	1	0	1	1

5.6.2 Ungeradeschaltung

Eine Ungeradeschaltung ist eine Schaltung, an deren Ausgang nur dann 1 liegt, wenn eine ungerade Anzahl von Eingangsvariablen den Wert 1 hat. Die Schaltung soll 3 Eingänge haben.

Gesucht ist eine möglichst einfache Schaltung, die mit NAND-Gliedern aufgebaut werden kann.

5.6.3 Majoritätsschaltung

Am Ausgang einer Majoritätsschaltung liegt nur dann 1, wenn die Mehrheit der Eingänge den Zustand 1 hat.
Stellen Sie die Wahrheitstabelle für eine Majoritätsschaltung mit 5 Eingängen auf. Aus dieser Wahrheitstabelle ist die ODER-Normalform zu entnehmen. Versuchen Sie, die ODER-Normalform möglichst weitgehend zu vereinfachen. Geben Sie eine möglichst einfache Schaltung an, die mit Grundgliedern aufgebaut ist.
Für den Aufbau der Schaltung stehen nur NOR-Glieder zur Verfügung. Die gefundene Gleichung ist so umzuformen, daß ein Aufbau mit NOR-Gliedern möglich ist.

5.6.4 Verriegelungsschaltung

Eine Kunststoffspritzmaschine darf zum Produktionsvorgang nur anlaufen, wenn der Startschalter für den Produktionsvorgang eingeschaltet ist, ein Füllstandmelder angibt, daß genug Spritzmaterial im Behälter ist, eine Sicherheitslichtschranke nicht unterbrochen ist, ein Temperaturmeßgerät die erforderliche Temperatur der Spritzformen meldet und der sogenannte Reinigungslauf nicht eingeschaltet ist.
Zum Reinigungslauf darf die Maschine nur anlaufen, wenn der Startschalter für den Reinigungslauf eingeschaltet ist, wenn der Füllstandsmelder angibt, daß kein Spritzmaterial im Behälter ist, die Sicherheitslichtschranke nicht unterbrochen ist und der Startschalter zum Produktionsvorgang nicht eingeschaltet ist. Die Temperatur der Spritzformen kann beliebig sein.
Die Einschaltung der vorgenannten Bedingungen soll mit Hilfe einer Digitalschaltung erreicht werden.
Festlegung der Variablen und der Bedeutung von 0 und 1:

Startschalter Produktionsvorgang ein:	A = 1
Füllstandsmelder meldet Füllung:	F = 1
Lichtschranke unterbrochen:	L = 0
Temperaturmelder meldet richtige Temperatur:	B = 1
Startschalter Reinigungslauf ein:	C = 1
Maschine darf zum Produktionsvorgang anlaufen:	Z = 1
Maschine darf zum Reinigungsvorgang anlaufen:	R = 1

Die gesuchte Schaltung hat also die Eingangsvariablen A, F, L, B, C und die Ausgangsvariablen Z und R (Bild 5.67).

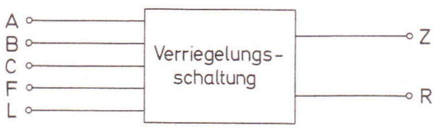


Bild 5.67 Eingänge und Ausgänge der gesuchten Digitalschaltung

Sie arbeitet als sogenannte Verriegelungsschaltung, d.h., bestimmte Arbeitsweisen werden nur freigegeben, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind.
Gesucht ist eine möglichst einfache Schaltung, die die beschriebenen Anforderungen erfüllt. Die Schaltung soll mit NAND-Gliedern aufgebaut sein.

5.6.5 Flugabwehr-Auslöseschaltung

Vier Radarmeßstellen liefern an eine digitale Verknüpfungsschaltung die Signale A, B, C und D, die 1 oder 0 sein können.
Das Signal A der Meßstelle 1 ist nur dann 1, wenn ein Flugkörper erfaßt ist. Bewegt sich der Flugkörper auf die Radarmeßstellen zu, gibt Meßstelle 2 das Signal B = 1, sofern der Flugkörper die Flughöhe von 2000 m nicht unterschreitet. Die Meßstelle 3 stellt die Kursänderung fest. Sie gibt nur dann C = 0, wenn sich der Kurs innerhalb einer Zeitdifferenz Δt ändert. Fliegt ein zweiter Flugkörper gleichzeitig in den Luftraum ein, gibt Meßstelle 4 D = 1.
Die Digitalschaltung soll nun so arbeiten, daß am Ausgang Z das Signal 1 erscheint, wenn ein Flugkörper erfaßt ist, der unter 2000 m Höhe fliegt, sich auf die Radarstellen zubewegt und seinen Kurs innerhalb Δt nicht ändert und ein zweiter Flugkörper nicht gleichzeitig einfliegt oder wenn ein Flugkörper über 2000 m auf die Meßstellen zu einfliegt, erfaßt ist und seinen Kurs innerhalb Δt nicht ändert und ein zweiter Flugkörper ebenfalls registriert wird.
Gesucht ist eine möglichst einfache Schaltung, die die beschriebenen Bedingungen erfüllt und mit NOR-Gliedern aufgebaut ist.

5.7 Lernziel-Test

1. Was versteht man unter einer Vollkonjunktion?
2. Wie sind ODER-Normalformen aufgebaut? Geben Sie ein Beispiel an.
3. Wie unterscheidet sich die UND-Normalform von der ODER-Normalform?
4. Die Wahrheitstabelle Bild 5.68 enthält die für eine Schaltung geforderten Verknüpfungseigenschaften. Stellen Sie die sich aus der Wahrheitstabelle ergebende ODER-Normalform auf.

Bild 5.68 Wahrheitstabelle

Fall	C	B	A	Z
1	0	0	0	0
2	0	0	1	**1**
3	0	1	0	0
4	0	1	1	**1**
5	1	0	0	**1**
6	1	0	1	0
7	1	1	0	**1**
8	1	1	1	0

5. Skizzieren Sie ein KV-Diagramm für die Variablen K, M, S und R.
6. Welche Nachbarschaftsbedingungen gelten für KV-Diagramme mit 4 Variablen?

7. Vereinfachen Sie mit Hilfe der Schaltalgebra die folgende ODER-Normalform und überprüfen Sie die erzielte Vereinfachung mit einem KV-Diagramm.

$$Z = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$$

8. Im KV-Diagramm Bild 5.69 ist eine ODER-Normalform dargestellt. Vereinfachen Sie diese ODER-Normalform möglichst weitgehend und geben Sie die vereinfachte Gleichung an.

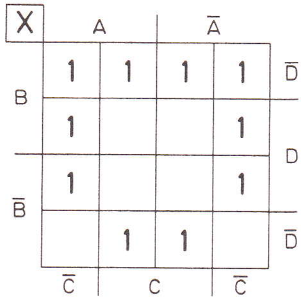


Bild 5.69 KV-Diagramm mit eingetragener ODER-Normalform

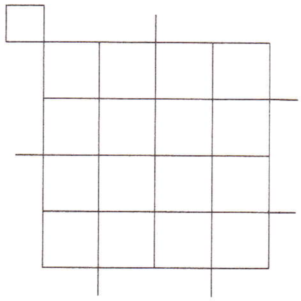


Bild 5.70 KV-Diagramm

9. Zeichnen Sie in das KV-Diagramm Bild 5.70 die Gleichung

$$Z = (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \wedge \overline{D}) \vee (A \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$$

ein. Die Ausdrücke $(A \wedge \overline{C})$ und $(\overline{A} \wedge \overline{B})$ sind als Päckchen darzustellen.

10. Wie ist ein KV-Diagramm für 6 Variable aufgebaut?