28.04

Bruke begrepene faktor (divisor), felles faktor og største felles faktor, multiplum, felles multiplum og minste felles multiplum

Grunnleggende: Gjengi og forklare, gi eksempler og illustrasjoner til begrepene

1. Gi en grunnskoletilpasset forklaring med eksempel på begrepene faktor og divisor.
2. Forklar og gi eksempler på hva som menes med felles multiplum og minste felles multiplum for to tall. Besvarelsen må inneholde både formelle definisjoner og grunnskoletilpassete forklaringer.

Middels: Argumentere for enkle sammenhenger knyttet til begrepene

Se 10.02.23

Avansert: Løse (også ukjente) problemer knyttet til begrepene

Se 17.02.23

Bruke begrepene naturlig tall, partall og oddetall, primtall og sammensatt tall

Grunnleggende: Gjengi og forklare, gi eksempler og illustrasjoner til begrepene

Forklar og gi eksempler på hva partall og oddetall er.
Forklar og gi eksempler på hva primtall og sammensatt tall er.
Besvarelsen må inneholde både algebraiske definisjoner, ordforklaringer og illustrasjoner.

Middels: Argumentere for enkle sammenhenger knyttet til begrepene

1. Gi et grunnskoletilpasset argument for at sum av oddetall og oddetall er partall.
2. Gi et formelt argument for at oddetall multiplisert med oddetall gir oddetall.

Vurderingskriterier

Se tidligere oppgaver

Avansert: Løse (også ukjente) problemer knyttet til begrepene

Alle naturlige tall kan beskrives relativ til et tall i tre-gangen. Noen tall er i tre-gangen ($3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots$), noen er én mer enn et tall i tre-gangen ($1, 4, 7, \ldots, 3n+1, \ldots$), resten er to mer enn tall i tre-gangen ($2, 5, 8, \ldots, 3n+2, \ldots$). Forklar hvorfor alle kvadrattall enten er i tre-gangen eller én mer enn et tall i tre-gangen. (Merk: Kvadrattallene er alle tallene på formen n^2)

Vurderingskriterier

Studenten må i besvarelsen få fram tydelig hvorfor dette alltid
gjelder.

En naturlig løsning kan være å splitte i tre tilfeller:

i. Alle tall som er i tre er på formen $3n$.
Kvadratttallene som har opphav fra disse tallene er derfor $(3n)^2 = 9n^2 = 3 \cdot (3n^2)$, noe i tregangen

ii. Alle tall som er én over tregangen er på formen $3n+1$.
Kvadrattallene som har opphav fra disse tallene er derfor $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1 = 3\left(3n^2 + 2n\right) + 1$,
altså noe én over noe i tregangen.

iii. Alle tall som er to over noe i tregangen er på formen $3n+2$. Kvadrattallene som har oppgav fra disse tallene er derfor
$(3n+2)^2 = 9n^2 + 12n + 4 = 3\left(3n^2 + 4n + 1\right) + 1$,
altså noe én over noe i tregangen.

Da dette dekker alle mulige kvadrattall har vi nå vist at de enten er i tregangen eller er én over noe i tregangen.

Begrunne delelighetsreglene for tall som er delelig med 2, 3, 4, 5, 6 og 9

Middels: Argumentere for enkle sammenhenger knyttet til begrepene

Gi en formell begrunnelse for delelighetsregelen for tall som er delelig med 5.
Gi en grunnskoletilpasset begrunnelse for delelighetsregelen for tall som er delelig med 9.

Vurderingskriterier

Studenten må besvare begge oppgavene.

Formelt: For eksempel kan de ta utgangspunkt i tre eller firesifra tall $(1000a + 100b + 10c + d)$ og gjøre argumentene. Deretter *må* de
peke på hvorfor dette også fungerer for tall med flere siffer. Alternativt kan de skrive et tall som $10n + b$, der b er et siffer og n er et vilkårlig positivt tall. For tallet 2343403 vil $n = 234340$ og $b = 3$. Dermed kan de nå peke direkte på at siden $10n$ inneholder faktoren 5, så vil det være b, altås siste siffer, som avgjør om tallet er delelig på 5 eller ikke.

Grunnskoletilpasset: Ta utgangspunkt i et konkret eksempel og forklare strukturen. Igjen må det komme tydelig fram hvordan resultatet gjelder for et hvilket som helst antall sifre.

Finne eksplisitt uttrykk for figurtall

Grunnleggende: Ved hjelp av Gauss-trikset/doble summen for trekanttall, og ved hjelp av sum av tillegg for kvadrat- og rektangeltall

Utled det eksplisitte uttrykket for summen av de n første naturlige tallene, det vil si trekanttall nummer n, ved hjelp av Gauss-trikset (doble summen) geometrisk.
Utled det eksplisitte uttrykket for kvadrattallene ved hjelp av sum av tillegg.

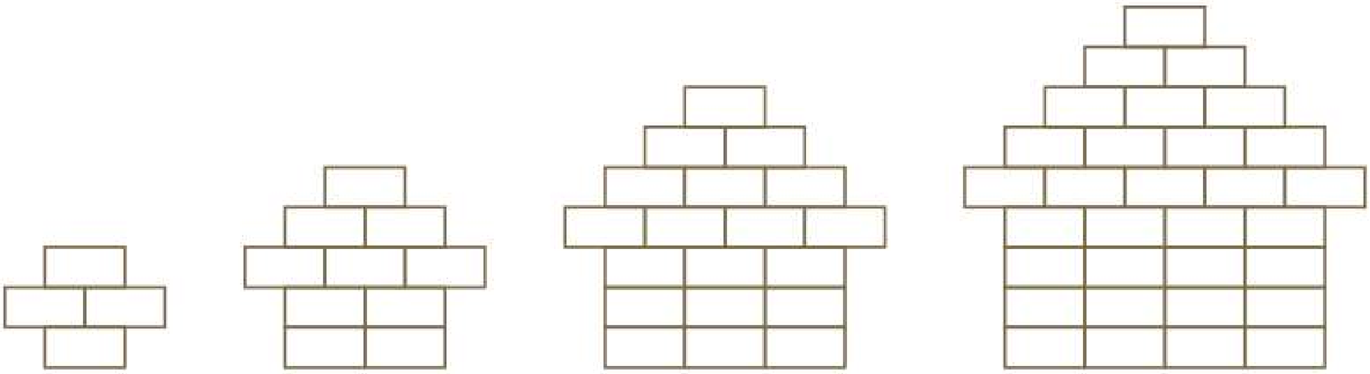
Middels: Ved hjelp av sum av tillegg for andre polygontall

Se 17.04

Avansert: Ved hjelp av geometrisk betraktning/stirre hardt og sum av tillegg for sammensatte figurtall

På figuren under ser du de fire første figurene i en sammensatt figur, der $F_1 = 4$, $F_2 = 10$ og $F_3 = 19$.

1. Finn en eksplsitt formel for F_n ved å betrakte figuren geometrisk.
2. Finn en eksplisitt formel ved hjelp av sum av tillegg.



H_1 H_2 H_3 H_4

Vurderingskriterier

1. Studenten må betrakte figuren og finne en eksplisitt formel ved å referere til figuren. For eksempel kan man ved å betrakte figuren figuren geometrisk kan en se at det er en trekant og et kvadrat. Kvadratet har størrelse som figurtallsnummeret (figurtall 3 har bredde 3, figurtall 4 har bredde 4, figurtall n må da ha bredde n). Trekanten har alltid lengde én mer enn figurtallsnummeret, for figur n er trekanten trekanttall $n+1$. Dermed får vi $n^2 + T_{n+1} = n^2 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
2. Studenten kan bruke tolkningen fra 1. til å peke på at trekanten øker med $n+1$ og at kvadratet øker med det n'te oddetallet $2n-1$. Dermed er formen på tillegget $n+1+2n-1 = 3n$. Dermed kan vi nå bruke teknikken sum av tilleg ved å skrive ut figurtallene som en sum av tillegg:

$$
\begin{aligned}
F_n &= 4 + (3\backslash\text{codt}2) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + \ldots + 3n \\
&= (1 + 3 \cdot 1) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + \ldots + 3n \\
&= 1 + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\
&1 + 3\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Her har vi et eksplisitt uttrykk for figurtall nummer n og studenten trenger ikke omforme dette til å passe med 1.
La oss bare gjøre det slik at vi kan se at det gjør det ved å gange ut begge uttrykkene (studenten trenger ikke gjøre dette):

$$\begin{aligned} 1+3\frac{n(n+1)}{2} &= \frac{2+3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2+3n^2+3n}{2}, \end{aligned}$$

Videre ser vi at svaret fra forrige oppgave kan skrives som

$$\begin{aligned} n^2+\frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \frac{2n^2+n^2+3n+2}{2} \\ &= \frac{3n^2+2n+2}{2}. \end{aligned}$$

Finne rekursiv uttrykk for figurtall

Grunnleggende: Ved hjelp av form på tillegg, og differanse mellom eksplisitte uttrykk for trekant-, kvadrat- og rektangeltall

Vis i en illustrasjon hvordan hver figur inneholder den forrige, og finn rekursivt uttrykk for trekanttall n:
ved hjelp av strategien form på tillegg.
ved hjelp av strategien differanse mellom eksplisitte uttrykk. Merk eksplisitt uttrykk for trekanttall er $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Vurderingskriterier

Studenten må besvare alle spørsmålene med riktig teknikk.

i. Her må de peke på formen på tillegget. Enten ved å peke på figuren og vise hvordan den utvikler seg generelt. Eller ved å peke på tilleggene i tallfølgen og forklare hvordan den utvikler seg.

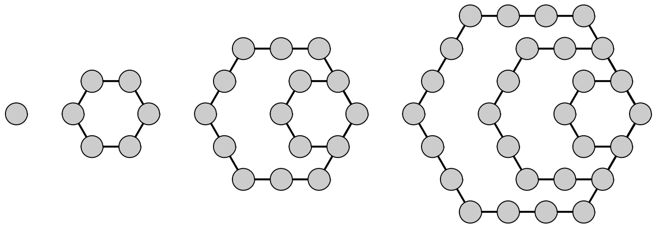
ii. Her *må* de ta differanse mellom T_n og T_{n-1} og gjøre regne seg fram til formen på tillegget

Middels: Ved hjelp av form på tillegg, og differanse mellom eksplisitte uttrykk for andre polygontall og sammensatte figurtall

Vis i en illustrasjon hvordan hver figur inneholder den forrige, og finn rekursivt uttrykk for sekskanttallene H_n, der $H_1=1$, $H_2=6$ og $H_3=15$:
ved hjelp av strategien form på tillegg.
ved hjelp av strategien differanse mellom eksplisitte uttrykk. Merk: Det eksplisitte uttrykket for sekskanttallene er $H_n=n(2n-1)$.

Vurderingskriterier

Studenten må besvare alle spørsmålene med riktig teknikk, samt illustrere sekskanttallene, se for eksempel



i. Ved å se på utviklingen ser vi at tillegget øker med fire hver gang, fra 5 til 9 til 13 osv. Dermed øker tillegget lineært med stigning fire. Fra 1 til 6 ser vi at økningen er $4 \cdot 2 - 3$, noe som også stemmer med figuren. Vi lekker til fire sider, og har tre hjørner vi teller to ganger, altså $4 \cdot 2 - 3$, eller generelt $4 \cdot n - 3$.

ii. Her *må* de ta differanse mellom H_n og H_{n-1} eller H_{n+1} og H_n. Førstnevnte gir

$$\begin{aligned} n(2n-1) - (n-1)(2(n-1)-1) &= 2n^2 - n - (n-1)(2(n-1)-1) \\ &= 2n^2 - n - (n-1)(2n-3) \\ &= 2n^2 - n - (n(2n-3) - (2n-3)) \\ &= 2n^2 - n - n(2n-3) + (2n-3) \\ &= 2n^2 - n - 2n^2 + 3n + 2n - 3 = 4n - 3 \end{aligned}$$

Beskrive oppbygningen av figurtall (alle typer)

Grunnleggende: Beskrive eksplisitt og rekursiv sammenheng verbalt og ved hjelp av illustrasjon

Øveoppgave oppgave 1 a. og b.

Middels: Finne flere algebraiske uttrykk til samme figur

Øveoppgave oppgave 1

Avansert: Lage figurer basert på algebraiske uttrykk og tallfølger

Se øveoppgave 1 a-c.