Tall

Øveoppgaver

Forklare hva et posisjonssystem er

Grunnleggende

Forklare hva et posisjonssystem er, og regne med tall uttrykt i posisjonssystem med ulike baser.

1. Forklar hvordan et posisjonssystem er bygd opp. Gi eksempler med ulike baser.
2. Hvilke siffer trengs i et posisjonssystem med base syv? Forklar.
3. Hvilke siffer treng i et posisjonssystem med base tolv? Forklar.
4. Skriv de første tjuefem tallene (eller mer) i base ...
   a. To
   b. Tre
   c. Fem
   d. Tolv
5. Vis hva tallene «betyr» ved å skrive dem på utvidet form.
   a. 234_{fem}
   b. $307_{åtte}$
   c. $93A_{elleve}$

Løsningsforslag

1. Ideen med posisjonssystem er å gruppere (i for eksempel tiere), og indikere ved hjelp av posisjon hvilken verdi et gitt siffer står for. Når basen, eller grunntallet, er ti, grupperer vi i tiere. På den måten trenger vi bare ti unike siffer, 0–9. I stedet for et eget symbol for ti, skriver vi 10, som betyr én tier, ingen enere. Vi kan la et hvilket som helst tall danne basen. I base seks, for eksempel, grupperer vi i seksere. Vi trenger da seks unike siffer: 0–5. Fra høyre mot venstre har vi posisjonene 1, 6, 36, 216 og så videre, altså potenser av seks: $6^0, 6^1, 6^2, 6^3$ og så videre.
2. Vi trenger like mange siffer som basens verdi. Når basen, eller grunntallet, er syv, trenger vi syv siffer: 0, 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Vi trenger ikke et eget symbol for syv, for det er én syver og ingen enere, altså 10.

3. Som over. Siden basen er høyere enn ti, må vi «finne opp» nye symboler for ti og elleve. Enkleste løsning er A og B. Vi har da 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7, 8, 9, A, B. Tolv er 10.
4. \

Ti	To	Tre	Fem	Tolv
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	4	4
5	101	12	10	5
6	110	20	11	6
7	111	21	12	7
8	1 000	22	13	8
9	1 001	100	14	9
10	1 010	101	20	A
11	1 011	102	21	B
12	1 100	110	22	10
13	1 101	111	23	11
14	1 110	112	24	12
15	1 111	120	30	13
16	10 000	121	31	14
17	10 001	122	32	15
18	10 010	200	33	16
19	10 011	201	34	17
20	10 100	202	40	18
21	10 101	210	41	19
22	10 110	211	42	1A

Ti	To	Tre	Fem	Tolv
23	10 111	212	43	1B
24	11 000	220	44	20
25	11 001	221	100	21

5. \
   1. $234_{\text{fem}} = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 4$
   2. $307_{\text{åtte}} = 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 = 3 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 7$
   3. $93A_{\text{elleve}} = 9 \cdot 11^2 + 3 \cdot 11^1 + A \cdot 11^0 = 2 \cdot 12 + 3 \cdot 1110$

Middels: Forklare hva et posisjonssystem er, og gjøre om tall mellom ulike baser

1. Gjør om til base ti.
   a. 4321_{fem}
   b. 666_{syv}
   c. $305_{åtte}$
   d. $A0B3_{tolv}$
2. Gjør om ...
   a. 224_{ti} til base tre
   b. 144_{ti} til base tolv
   c. 777_{ti} til base syv
3. Gjør om til base to.
   a. 17_{ti}
   b. 17_{tolv}
   c. $72_{åtte}$
4. Gjør om ...
   a. 224_{fem} til base tre
   b. 10010_{to} til base fire
   c. $20B_{tolv}$ til base fem

Løsningsforslag

1. Gjør om til base ti.
   a. $4321_{\text{fem}} = 4 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 4 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 = 586_{ti}$
   b. $666_{\text{syv}} = 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0 = 6 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 6 = 192_{ti}$
   c. $305_{\text{åtte}} = 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 = 3 \cdot 64 + 0 \cdot 8 + 5 = 197_{ti}$

d. $A0B3_{\text{tolv}} = A \cdot 12^3 + 0 \cdot 12^2 + B \cdot 12^1 + 3 \cdot 12^0 = 10 \cdot 1\,728 + 0 \cdot 144 + 11 \cdot 12 + 3 = 17\,415_{ti}$

2. Gjør om ...

a. 224_{ti} til base tre: Posisjonene i base tre: 243 (3^5), 81 (3^4), 27 (3^3), 9 (3^2), 3 (3^1), 1 (3^0). 243 er høyere enn 224, så høyeste aktuelle posisjon er 81. Det går **[to]{.underline}** 81-ere på 224, med 62 i rest. Det går **[to]{.underline}** 27-ere på 62, med 8 i rest. 8 er **[ingen]{.underline}** 9-ere, **[to]{.underline}** 3-ere og **[to]{.underline}** 1-ere. $224_{ti} = 22022_{tre}$

b. 144_{ti} til base tolv 100_{tolv}

c. 777_{ti} til base syv 2160_{syv}

3. Gjør om til base to.

a. $17_{ti} = 16 + 1,$\ så\ 10001_{to}

b. $17_{tolv} = 12 + 7 = 16 + 2 + 1,$\ så\ 10011_{to}

c. $72_{åtte} = 56 + 2 = 32 + 24 + 2 = 32 + 16 + 8 + 2,$\ så\ 111010_{to}

4. Gjør om ...

a. 224_{fem} til base tre: $224_{fem} = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 4 = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 1 = 2101_{tre}$

b. 10010_{to} til base fire: $10010_{to} = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 4 = 110_{fire}$

c. $20B_{tolv}$ til base fem: $20B_{tolv} = 2 \cdot 144 + 11 = 2 \cdot 125 + 38 + 10 + 1 = 2 \cdot 125 + 49 = 2 \cdot 125 + 1 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 2144_{fem}$

Avansert: Utføre beregninger med tall uttrykt i andre baser enn ti

1. Gjør beregningene i den aktuelle basen (uten å oversette til base ti, altså).

a. $123_{fem} + 321_{fem}$

b. $321_{fire} - 123_{fire}$

c. $32_{åtte} \cdot 24_{åtte}$

d. $4A3_{tolv}\ : 3_{tolv}$

e. Lag egne regnestykker.

2. Finn basen b uten gjett og sjekk.

a. $143_b = 48_{ti}$

b. $153_b = 69_{ti}$

c. $313_b = 55_{ti}$

3. Forklar hvordan man enkelt kan finne basen b til tall på formen 121_b dersom man kjenner tallets verdi i base ti.

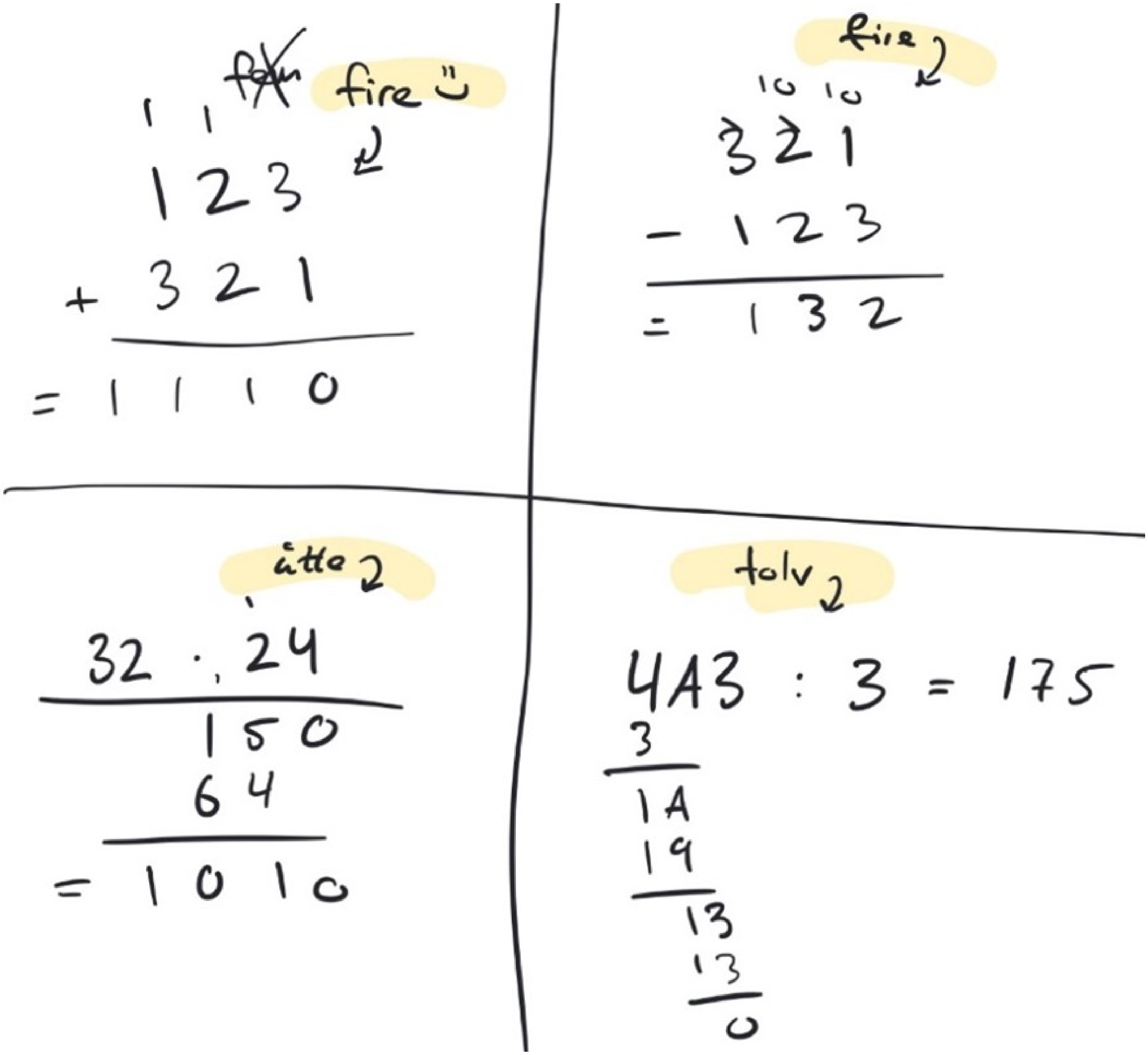
4. Finn sifrene A og B når $AB_{fem} = 17_{ti}$ og $AB_{syv} = 23_{ti}$.

5. Når vi uttrykker tall i titallsystemet er et tall delelig med to bare dersom siste siffer er delelig med to. Uttrykt i

femtallsystemet, derimot, er et tall delelig med to bare dersom tverrsummen er delelig med to. Begrunn dette. Forsøk også å generalisere: I hvilke baser gjelder siste-siffer-regelen, og i hvilke gjelder tverrsum-regelen?

Løsningsforslag

1. Gjør beregningene i den aktuelle basen (uten å oversette til base ti, altså).
   a. $123_{fem} + 321_{fem}$
   b. $321_{fire} - 123_{fire}$
   c. $32_{åtte} \cdot 24_{åtte}$
   d. $4A3_{tolv}\ : 3_{tolv}$
   e. Lag egne regnestykker.



2. Finn basen b uten gjett og sjekk.
   a. $143_b = 48_{ti}$
   Dette gir likninga $b^2 + 4b + 3 = 48$. Får da $b^2 + 2 \cdot 2b + 4 = 49 \to (b+2)^2 = 7^2 \to b = 5$
   .
   b. $153_b = 69_{ti}$

Gir likninga

$$
\begin{aligned}
b^2+5b+3&=69\\
b^2+2\cdot\frac{5}{2}b+\left(\frac{5}{2}\right)^2&=\frac{4\cdot 66}{4}+\frac{25}{4}\\
\left(b+\frac{5}{2}\right)^2&=\frac{289}{4}\\
b&=\frac{17-5}{2}
\end{aligned}
$$

Basen er seks.

c. $313_b = 55_{ti}$

$$
\begin{aligned}
3b^2+b+3&=55\\
b^2+\frac{1}{3}b&=\frac{52}{3}\\
b^2+2\cdot\frac{1}{6}b+\left(\frac{1}{6}\right)^2&=\frac{1}{36}+\frac{52\cdot 12}{36}\\
\left(b+\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2&=\frac{625}{36}\\
b&=4
\end{aligned}
$$

1. Forklar hvordan man enkelt kan finne basen b til tall på formen 121_b dersom man kjenner tallets verdi i base ti.

$121_b = b^2+2b+1=(b+1)^2$. Kjenner man verdien n i base ti, er det bare å løse likningen $(b+1)^2=n$. Med andre ord, basen er roten av verdien i base ti minus én.

4. Finn sifrene A og B når $AB_{fem} = 17_{ti}$ og $AB_{syv} = 23_{ti}$.

Første info gir $5A+B=17$. Andre info gir $7A+B=23$. Nå er det bare å løse likningssettet. Trekker siste fra første: $2A=6 \to A=3$. Da er $B=2$.

5. Når vi uttrykker tall i titallsystemet er et tall delelig med to bare dersom siste siffer er delelig med to. Uttrykt i femtallsystemet, derimot, er et tall delelig med to bare dersom tverrsummen er delelig med to. Begrunn dette. Forsøk også å

generalisere: I hvilke baser gjelder siste-siffer-regelen, og i hvilke gjelder tverrsum-regelen?

Hint: I partallsbaser er det bare enerposisjonen som kan være oddetall. Når basen b er et oddetall, er også b^n et oddetall. Da er $b^n - 1$ alltid par.

Beskrive situasjoner med hensyn til additive strukturer

Grunnleggende: Gjengi med eksempler de ulike additive strukturene for både addisjon og subtraksjon

1. Gi et eksempel på hver av strukturene med *addisjon* som modell: *økning, forening, additiv sammenlikning, komplettering* og *oppheving av minskning*.
2. Gi et eksempel på hver av strukturene med *subtraksjon* som modell: *minskning, oppdeling, additiv sammenlikning, mangel* og *oppheving av økning*.

Løsningsforslag

1. Gi et eksempel på hver av strukturene med *addisjon* som modell: *økning, forening, additiv sammenlikning, komplettering* og *oppheving av minskning*. Alfa.
2. Gi et eksempel på hver av strukturene med *subtraksjon* som modell: *minskning, oppdeling, additiv sammenlikning, mangel* og *oppheving av økning*. Alfa.

Middels: Avgjøre og begrunne hvilken struktur en gitt situasjon svarer til

1. Avgjør hvilken additiv struktur situasjonene svarer til. Spesifiser også hva som er ukjent der det er relevant. Merk at én og samme situasjon kan tolkes både som addisjon og subtraksjon.
   a. Arne hadde litt penger i lommeboka. Han samler og panter flasker for 167 kroner. Nå har han 527 kroner. Hvor mye hadde han fra før?
   b. I bilen på vei til butikken for å pante, satte Arne opp farta med 12 km/t til 73 km/t. Hvor høy fart holdt han før fartsøkninga?
   c. Forrige gang Arne pantet, fikk han 234 kroner. Hvor mye mer var det enn denne gang?

d. For å få råd til egen pantemaskin, mangler Arne 12 364 kroner. Hvor mye koster en pantemaskin?
e. Arne innser at prosjekt «egen pantemaskin» ikke lar seg gjennomføre uten hjelp. Han slår seg sammen med Anne. De har til sammen 9 530. Hvor mange penger har Anne?
f. Etter en tids hardt innsamlingsarbeid, kjøper Arne og Anne omsider en pantemaskin. De sitter da igjen med 421 kroner. Hvor mye penger hadde før de kjøpte maskinen?

Løsningsforslag

1. Avgjør hvilken additiv struktur situasjonene svarer til. Spesifiser også hva som er ukjent der det er relevant. Merk at én og samme situasjon kan tolkes både som addisjon og subtraksjon.
   a. Arne hadde litt penger i lommeboka. Han samler og panter flasker for 167 kroner. Nå har han 527 kroner. Hvor mye hadde han fra før? Økning, ukjent utgangspunkt. $\_\_ + 167 = 527$ eller $527 - 167 = \_\_$. **Eller** forening, total kjent: slår sammen mengde 1: penger i lommeboka med mengde 2: pantepenger.
   b. I bilen på vei til butikken for å pante, satte Arne opp farta med 12 km/t til 73 km/t. Hvor høy fart holdt han før fartsøkninga? Samme som over.
   c. Forrige gang Arne pantet, fikk han 234 kroner. Hvor mye mer var det enn denne gang? Sammenlikning, ukjent differanse. $167 + \_\_ = 234$ eller $234 - 167 = \_\_$.
   d. For å få råd til egen pantemaskin, mangler Arne 12 364 kroner. Hvor mye koster en pantemaskin? Komplettering/mangel, ukjent total: $har + mangler = ?$ eller $? - mangler = har$, eller $? - har = mangler$.
   e. Arne innser at prosjekt «egen pantemaskin» ikke lar seg gjennomføre uten hjelp. Han slår seg sammen med Anne. De har til sammen 9 530. Hvor mange penger har Anne? Sammenslåing, total kjent.
   f. Etter en tids hardt innsamlingsarbeid, kjøper Arne og Anne omsider en pantemaskin. De sitter da igjen med 421 kroner. Hvor mye penger hadde før de kjøpte maskinen? Oppheving av minskning.

Beskrive situasjoner med hensyn til multiplikative strukturer

Grunnleggende: Gjengi med eksempler de ulike multiplikative strukturene for både multiplikasjon og divisjon

1. Gi et eksempel på hver av strukturene med *multiplikasjon* som modell: *like grupper, multiplikativ sammenlikning, rate, kombinatorisk situasjon* og *rektangulært arrangement*.
2. Gi et eksempel på hver av strukturene med *divisjon* som modell, både målings- og delingsdivisjon i de tre første: *like grupper, multiplikativ sammenlikning, rate, kombinatorisk situasjon* og *rektangulært arrangement*.

Middels: Avgjøre og begrunne hvilken struktur en gitt situasjon svarer til

1. Avgjør hvilken multiplikativ struktur situasjonene svarer til.
   Spesifiser også hva som er ukjent der det er relevant. Merk at én og samme situasjon kan tolkes både som multiplikasjon og divisjon.
   a. Arne rydder i flaskesamlinga si for lettere å kunne telle over hvor mange panteflasker han har. Han fyller 12 bæreposer, alle med 13 flasker. Hvor mange flasker har Arne?
   b. Anne, som konsekvent bidrar betydelig mer enn Arne i deres felles prosjekter, har 624 flasker. Hvor mange flere har hun i forhold til Arne?
   c. Med 3 kroner i pant per flaske, hvor mye hanker de inn når de panter flaskene sine?
   d. Hensikten med pantingen denne gangen, er å kjøpe garn for å strikke et rektangulært teppe. (Teppet skal ligge foran den nye panteautomaten deres for å hindre søl på gulvet.) Teppet skal ha et areal på 3,2 m^2 og være to meter den ene veien. Hvor langt skal det være den andre veien?
   e. Arne og Anne er estetisk bevisste og ønsker å lage et dekorativt, stripet teppe i to farger. I garnbutikken selger de garn i fem ulike farger. Hvor mange tepper kan de velge å strikke?
   f. Etter å ha betalt for garnet, hadde Arne og Anne 164 kroner igjen som de fordeler likt mellom seg. Hvor mye får hver?
   g. Hver fargestripe måler fem centimeter nedover den lengste sida. Hvor mange striper har teppet?

Løsningsforslag

1. Avgjør hvilken multiplikativ struktur situasjonene svarer til.
   Spesifiser også hva som er ukjent der det er relevant. Merk at én og samme situasjon kan tolkes både som multiplikasjon og divisjon.
   a. Like grupper.
   b. Sammenlikning.
   c. Rate.
   d. Rektangulært arrangement.
   e. Kombinatorisk situasjon.
   f. Like grupper: delingsdivisjon.
   g. Like grupper: målingsdivisjon.

Bruke regnestrategier og egenskaper ved regneoperasjonene

Grunnleggende: Gjengi kommutativ, assosiativ og distributiv egenskap for addisjon og multiplikasjon

1. Forklart kort med eksempler de tre egenskapene.

Middels: Bruke regnestrategier, også ved hjelp av egenskapene over

1. Gjør beregningene ved hjelp av strategier (som ikke er oppstilt regning).
   a. $126 - 31$
   b. $126 + 37$
   c. $136\ : 8$
   d. $461\ : 20$
   e. $\frac{3}{4} \cdot 160$
   f. $17 \cdot 19$
2. Vis hvordan én eller flere av de tre egenskapene kan brukes som regnestrategier.
   a. $13 \cdot 26$
   b. $376 + 39$
   c. $14 \cdot 7$
   d. $113 \cdot 6$
   e. $15 \cdot 8 + 30$
   f. $\frac{5}{4} \cdot 120$

Løsningsforslag

1. Gjør beregningene ved hjelp av strategier (som ikke er oppstilt regning).
   a. $126-31$ Eks fast differanse: $125-30$
   b. $126+37$ Eks opp/ned: $123+40$
   c. $136\ :8$ Eks forkorte: $68\ :4=34\ :2$
   d. $461\ :20$ Eks dele på ti, dele på to: $46,1\ :2$
   e. $\frac{3}{4}\cdot 160$ Eks: $\frac{1}{4}\cdot 16=4$,
   $3\cdot 4=12$, $10\cdot 12=120$
   f. $17\cdot 19$ Eks distributiv og assosiativ:
   $17\cdot 2\cdot 10=340$, $340-17=323$
2. Vis hvordan én eller flere av de tre egenskapene kan brukes som regnestrategier.
   a. $13\cdot 26=(10+3)\cdot 26$
   b. $376+39=(375+1)+39=375+(1+39)$
   c. $14\cdot 7=(2\cdot 7)\cdot 7=2\cdot(7\cdot 7)$
   d. $113\cdot 6=6\cdot 113=6\cdot(110+6)$
   e. $15\cdot 8+30=8\cdot 15+2\cdot 15=(8+2)\cdot 15$
   f. $\frac{5}{4}\cdot 120=5\cdot(\frac{1}{4}\cdot 120)$

Avansert: Bruke, illustrere og begrunne regnestrategier og egenskapene

1. Gjør oppgavene fra middels. Begrunn, og dersom hensiktsmessig, illustrer strategien slik at det går tydelig frem at den alltid funker.
2. Fra Nasjonal deleksamen 30.11.22.

Oppgave 6

I hoderegning med multiplikasjon av naturlige tall bruker vi ulike strategier.
En strategi er *doble og halvere*, og et eksempel på strategien er slik:

$$32\cdot 5=\left(\frac{32}{2}\right)\cdot(5\cdot 2)=16\cdot 10$$

a) Vis algebraisk at strategien doble og halvere alltid gir riktig svar.

En annen strategi er *symmetri om tiere*, og et eksempel på den er slik:

$$53\cdot 47=(50+3)\cdot(50-3)=50^2-3^2$$

b) Vis algebraisk at strategien symmetri om tiere alltid gir riktig svar.

Løsningsforslag

1. Gjør oppgavene fra middels. Begrunn, og dersom hensiktsmessig, illustrer strategien slik at det går tydelig frem at den alltid funker.

1 c) Se for deg en illustrasjon av 136 fordelt i 8 like bunker. Da vil *halvparten* av 136 ligge i *halvparten* av de 8 bunkene. Tilsvarende om vi for eksempel deler på 6 og forkorter med 3. Av det som er fordelt likt på seks bunker, finner vi en tredel i en tredel av bunkene (i to bunker, altså).

Ellers: Heftet.

2. Fra Nasjonal deleksamen 30.11.22.

a) er strategien «doble/halvere», illustrert i Heftet. Algebraisk:
$\frac{1}{2}a \cdot 2b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot ab = 1 \cdot ab = ab.$
b) er et spesialtilfelle av tredje kvadratsetning. Algebraisk:
$(10a + b)(10a - b) = (10a)^2 - b^2$ ved tredje kvadratsetning.
Eventuelt kan man vise mellomregning.

Forklare og gi eksempler på de ulike betydningene av brøk: del av hel/enhet, del av antall, tall og forhold

Grunnleggende: Forklare og gi eksempler på de ulike betydningene av brøk

1. Forklar og gi eksempler på hva som menes med brøk som
   a. del av en hel eller del av en enhet
   b. del av et antall
   c. tall
   d. forhold

Middels: Lage oppgaver og identifisere situasjoner med de ulike betydningene av brøk

1. Lag oppgaver der brøk opptrer i betydningen
   a. del av en hel eller del av en enhet
   b. del av et antall
   c. tall
   d. forhold

2. Under ser du noen situasjoner som involverer brøkbegrepet. Avgjør og begrunn i hvert tilfelle hvilke(n) betydning av brøk det er snakk om.
   a. To femdeler av Norges befolkning spiser taco hver fredag.
   b. Prisen på en vare har gått ned med én tredel.
   c. To femdeler av Norges landareal er beiteområder for rein.
   d. En gressklipper bruker $0,3$ liter bensin på 20 minutter. Hvor lenge kan man klippe gress på en halv liter?
   e. Fem personer deler syv boller likt mellom seg.
   f. Hvor mange glass på én tredels liter kan man fylle med $2\frac{1}{2}$ liter vann?

Løsningsforslag

2.
   a. Del av antall. (Bak brøkene er det antall, nemlig (deler av) Norges befolkning.)
   bTall. (Opprinnelig pris er p. Da er ny pris $\frac{2}{3}p$ og avslaget $\frac{1}{3}p$.) (Man kan selvsagt krangle og si dette er del av antall, der prisen er et antall kroner, men det er en litt rar tolkning.)
   c. Del av helhet. (Landareal som helhet.) Kan også tenke at arealet er tallfestet; da er vi samme situasjon som over.
   d. Forhold. ($0.3 = \frac{3}{20} = \frac{?}{30}$. Altså 0,3 liter per 20 min angir et forhold; og forhold er brøk.)
   e. Tall (7:5) eller del av hel (syv boller som hel, eller hver bolle som helhet – har syv slike).
   f. Tall. (2 1/2 :1/3.)

Forklare hvordan de reelle tallene er bygd opp

Grunnleggende: Forklare hva hele, rasjonale og irrasjonale tall er

1. Forklar hva hele, rasjonale og irrasjonale tall er. (Husk at målet med forklaringsoppgaver er 1) at *du* skal forstå, og 2) at du skal forstå slik at du kan *hjelpe andre å forstå*.)

Middels: Forklare hvordan de reelle tallene er bygd opp av naturlige, hele, rasjonale og irrasjonale tall

1. Forklar hva naturlige, hele, rasjonale og irrasjonale tall er. Forklar og illustrer deretter hvordan disse til sammen utgjør de reelle tallene.

Løsningsforslag

Naturlige tall: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.
Telletallene.

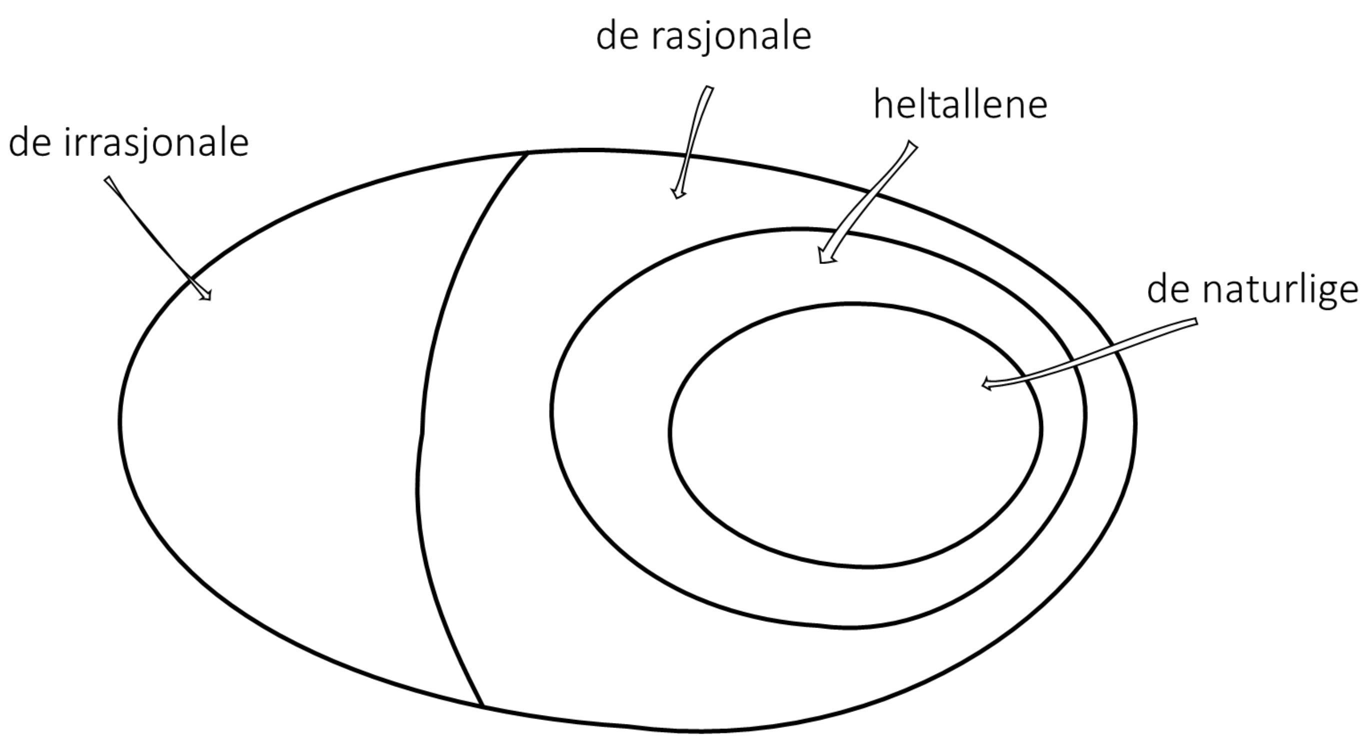
Hele tall (eller heltall):
$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$.
Telletallene, null og de negative telletallene.

Rasjonale tall: $\mathbb{Q} =$ alle $\frac{a}{b}$, der a og b er i $\mathbb{Z}$. Brøkene, som inkluderer heltallene.

Irrasjonale tall: Tallene som *ikke* er brøker.

Reelle tall: Hele tallinja. Det vil si samlinga av alle mengdene over.

Figuren viser hvordan de reelle tallene (hele figuren) er satt sammen de øvrige tallmengdene.



Utvide og forkorte brøker

Grunnleggende: Utvide og forkorte brøker

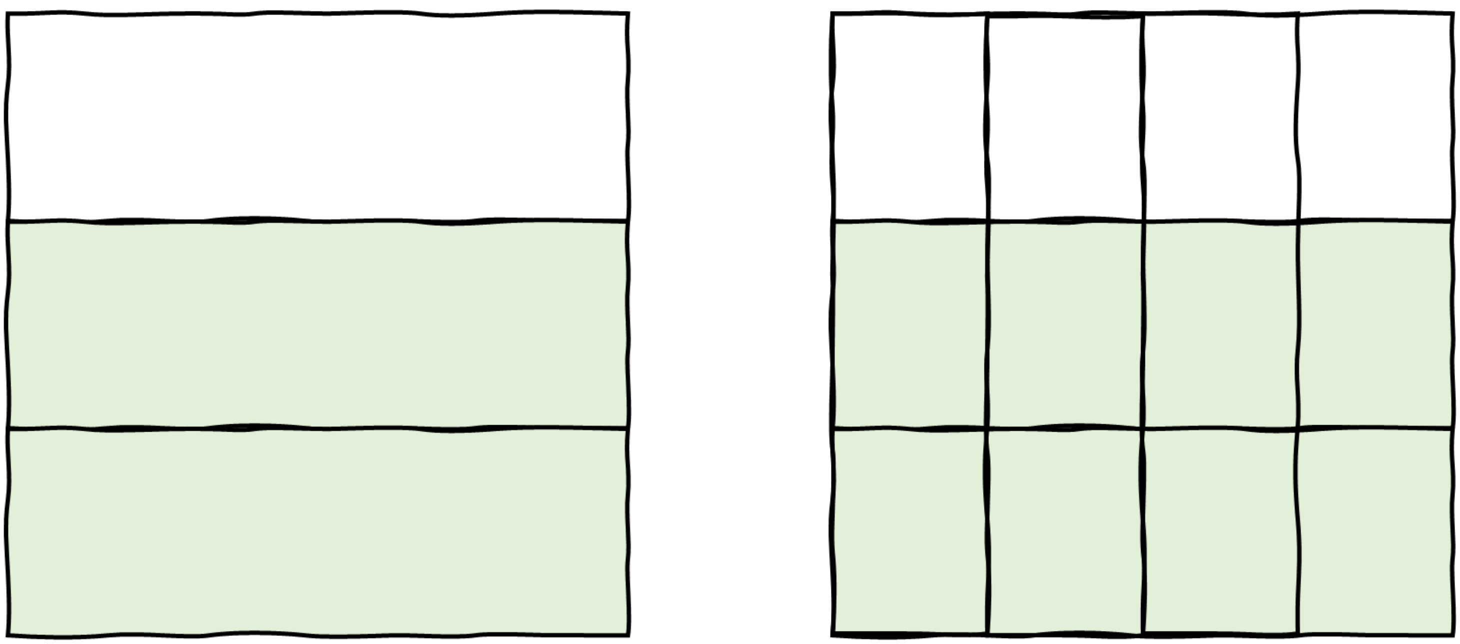
1. Alfa s. 105

Middels: Utvide og forkorte brøker, og forklare og illustrere hvorfor dette gir brøker av lik verdi

1. Alfa s. 105
2. Vis ved hjelp av illustrasjon og ordforklaring hvorfor utviding og forkorting gir likeverdige brøker.

Løsningsforslag

Figuren til venstre viser $\frac{2}{3}$ (kvadratet er 1). Ved å dele hver tredel i fire, får vi $3 \cdot 4$ små deler. De to skraverte tredelene utgjør da $2 \cdot 4$ tolvdeler. Altså: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$. Det samme gjelder opplagt andre vei, altså forkorting. At teller og nevner har felles faktor, betyr bare at det finnes et mindre antall kakestykker kvadratkaka kan deles i, som fortsatt gir akkurat like stor dele av hele kaka.



{width="5.265972222222225in" height="2.2843307086614173in"}

Utføre addisjon og subtraksjon med brøk

Grunnleggende: Utføre addisjon og subtraksjon med brøk

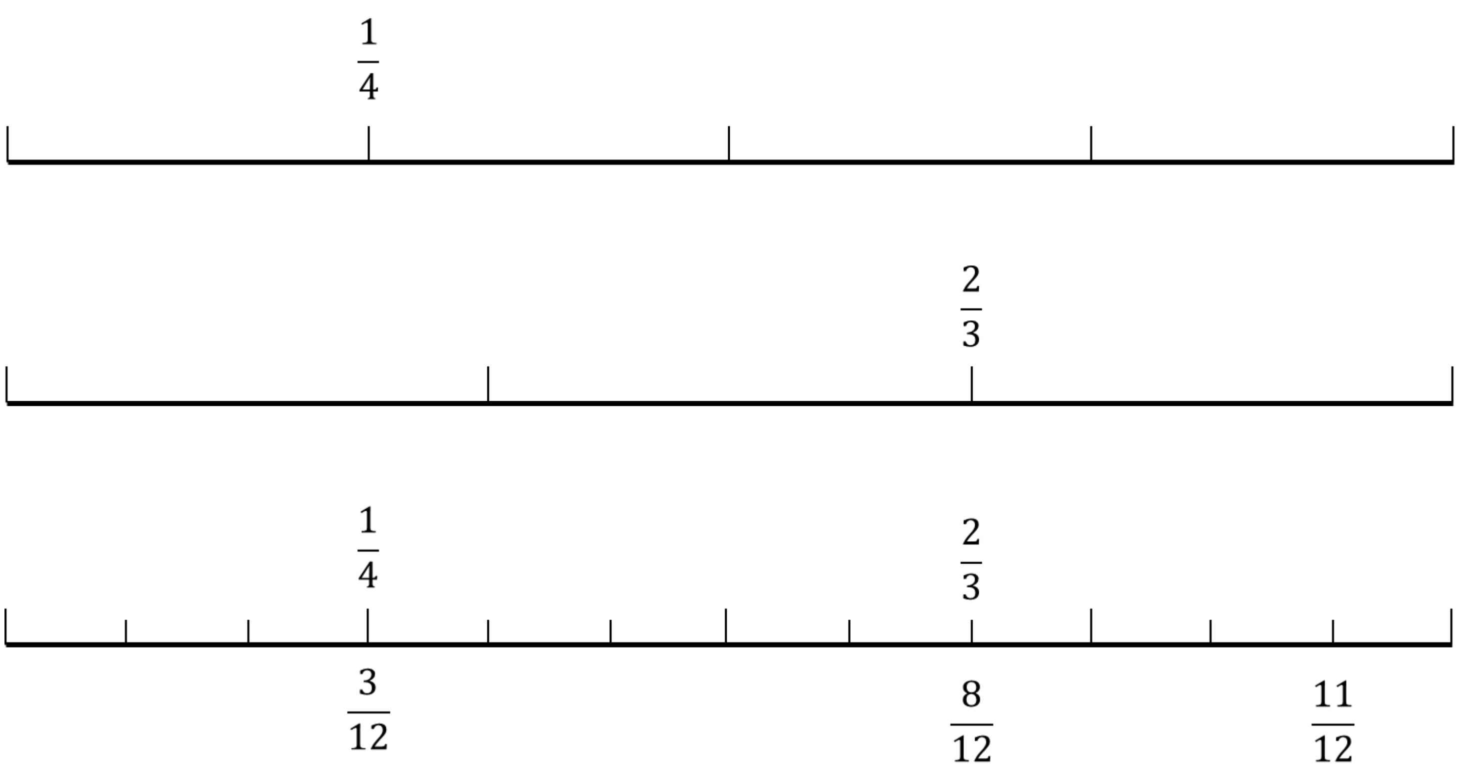
1. Alfa s. 108. Bare beregningene, ikke lage regnefortellinger og konkretiseringer.

Middels: Utføre addisjon og subtraksjon med brøk, og forklare og illustrere hvorfor regnereglene gir mening

1. Alfa s. 108.
2. Velg en addisjon og en subtraksjon av brøker med ulike nevnere. Forklar og illustrer løsningen. Pass på at forklaring og illustrasjon viser *hvorfor,* ikke bare *hva* du gjør.

Løsingsforslag

Problemet er at ulike deler ikke uten videre kan adderes, for eksempel for $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$. Vi må finne en mindre inndeling som lar oss telle *både* 4- og 3-deler. Hvis vi deler firedelene i tre (eller tredelene i fire), får vi til dette. Vi *utvider* altså til det som (av ganske åpenbare årsaker) heter *fellesnevner.* Vi kan da støtte oss i en figur som den over, med kvadratene, eller vi kan illustrere ved hjelp av tallinjer. Se under. Vi deler firedelene i tre, og ser at $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$, og $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$. Tolvdeler er glade i hverandre, så nå er det bare å dure i vei: $\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$.



Utføre multiplikasjon med brøk

Grunnleggende: Utføre multiplikasjon med brøk

1. Alfa s. 119. Kun beregningene på grunnleggende.
   a. 1.41 a, b, c og d
   b. 1.42
   c. 1.45

Middels: Utføre multiplikasjon med brøk, og forklare og illustrere hvorfor regnereglene gir mening

1. Alfa s. 119
   a. 1.41 a, b, c og d
   b. 1.42
2. Ta utgangspunkt i de tre multiplikasjonene $7 \cdot \frac{4}{5}$, $\frac{2}{3} \cdot 12$ og $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$.
   a. Forklar i hvert tilfelle hvordan vi kan forstå eller tolke multiplikasjonen.
   b. Gi en passende kontekst til hver multiplikasjon. (Lag gjerne flere kontekster slik at flere av betydningene av brøk dekkes.)
   c. Vis ved illustrasjon og ordforklaring *hvorfor* vi regner som vi gjør. Forsøk å knytte forklaringene til kontekstene.
3. Vis ved hjelp av ordforklaring og illustrasjon at brøkmultiplikasjon er kommutativ.

Løsningsforslag

2.
   a. Syv kopier av 4/5. to tredeler av tolv. To tredeler av 4/5.
   b. Syv flasker, hver med 4/5 liter vann i. 2/3 av en strekning på 12 meter. Drikker 2/3 av ei av flaskene med 4/5 liter vann i.
   c. Heftet.

Utføre divisjon med brøk

Grunnleggende: Utføre divisjon med brøk

1. Alfa s. 119. Kun beregningene på grunnleggende.
   a. 1.41 e, f og g
   b. 1.46

Middels: Vise ved hjelp av generisk eksempel hvorfor regneregelen for divisjon med brøk er som den er

1. Forklar ved hjelp av et generisk eksempel hvorfor divisjon med en brøk svarer til å gange med den omvendte brøken.

Løsningsforslag

Heftet.

Avansert: Forklare ved hjelp av kontekst (både målings- og delingsdivisjon) hvorfor regneregelen for divisjon med brøk gir mening

1. Velg en divisjon med brøk.
   a. Lag en passende kontekst som gir *målingsdivisjon*. Bruk konteksten til å forklare og illustrere hvorfor delingsregelen er som den er.
   b. Lag en passende kontekst som gir *delingsdivisjon*. Bruk konteksten til å forklare og illustrere hvorfor delingsregelen er som den er.

Løsningsforslag

Heftet.

Utføre formell omforming av brøk

Avansert: Utføre formell omforming av brøk

1. Regn ut.
   a. $\frac{3}{2}\left(7+\frac{3+\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}\right)-1$
   b. $\frac{\left(\frac{4}{7}\cdot 2\ \frac{3}{5}\right)-3}{\frac{2}{3}}+8$
   c. $\frac{\frac{4}{3}+5}{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}+\frac{7}{2}\left(1-\frac{8}{3}\right)$
   d. $\left(\frac{\left(2\ :\ \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right)$

Løsningsforslag

1.
   a.

$$\frac{3}{2}\left(7+\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{2}\right)-1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{35+24}{5}-1$$
$$= \frac{177}{10}-\frac{10}{10}$$
$$= \frac{167}{10}$$

b.

$$\frac{4\cdot 13-105}{7\cdot 5}\cdot\frac{3}{2}+8 = \frac{53}{7\cdot 5}\cdot\frac{3}{2}+8$$
$$= \frac{-159\cdot 3}{7\cdot 5\cdot 2}+\frac{560}{7\cdot 5\cdot 2}$$
$$= \frac{401}{70}$$

c.

$$\frac{19}{3}\cdot\frac{20}{27}+\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{380}{81}-\frac{35}{6}$$
$$= \frac{760}{162}-\frac{945}{162}$$
$$= -\frac{185}{162}$$

d.

$$\left(\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{9}{5}-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$= -\frac{6}{5}$$

Forklare begrepet og regne med desimaltall (desimalbrøk i Alfa)

Grunnleggende: Beskrive desimaltall med hensyn til posisjonssystemet og brøkbegrepet

1. Utdyp og forklar: *desimaltall er en skrivemåte for brøker der nevneren er en potens av ti.*

2. Forklar hva $257,1208$ betyr ved å vise til hvordan posisjonssystemet er bygd opp, og å skrive tallet på utvidet form.
3. Alfa s. 139
   a. 1.65
   b. 1.66
   c. 1.67

Løsningsforslag

3. s. 139
   a. 165: Tideler er (ti ganger) større enn hundredeler. 0,1 er én tidel. 0,17 er én tidel og syv hundredeler (altså mer enn én tidel). 0,2 er to tideler (altså mer enn det igjen).
   b. 1.66:
   1,20 | 2,05 | 1,008 | 0,65 | 3,204
   c. 1.67
      1. $1\frac{7}{10} = 1,7$
      2. $\frac{4}{10} = 0,4$
      3. $\frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 0,23$
      4. $5\frac{6}{100} = 5,06$
      5. $\frac{4}{100} = 0,04$
      6. $\frac{23}{10} = 1,3$
      7. $\frac{80}{10\,000} = 0,008$

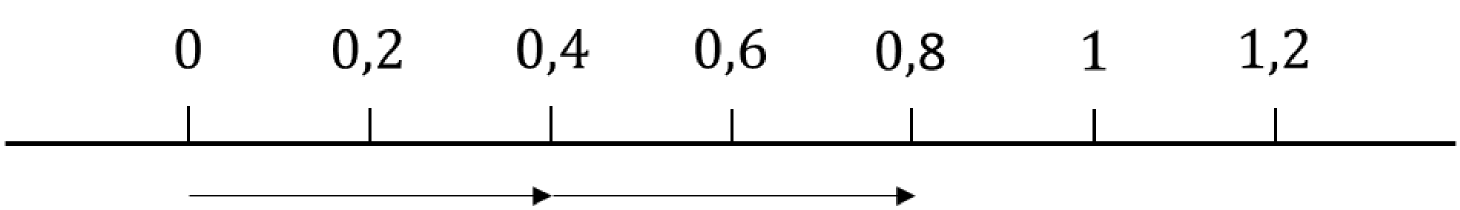
Middels: Forklare hvordan man kan regne med desimaltall med hensyn til posisjonssystemet og brøkbegrepet

1. Alfa s. 140
   a. 1.68
   b. 1.69
   c. 1.70

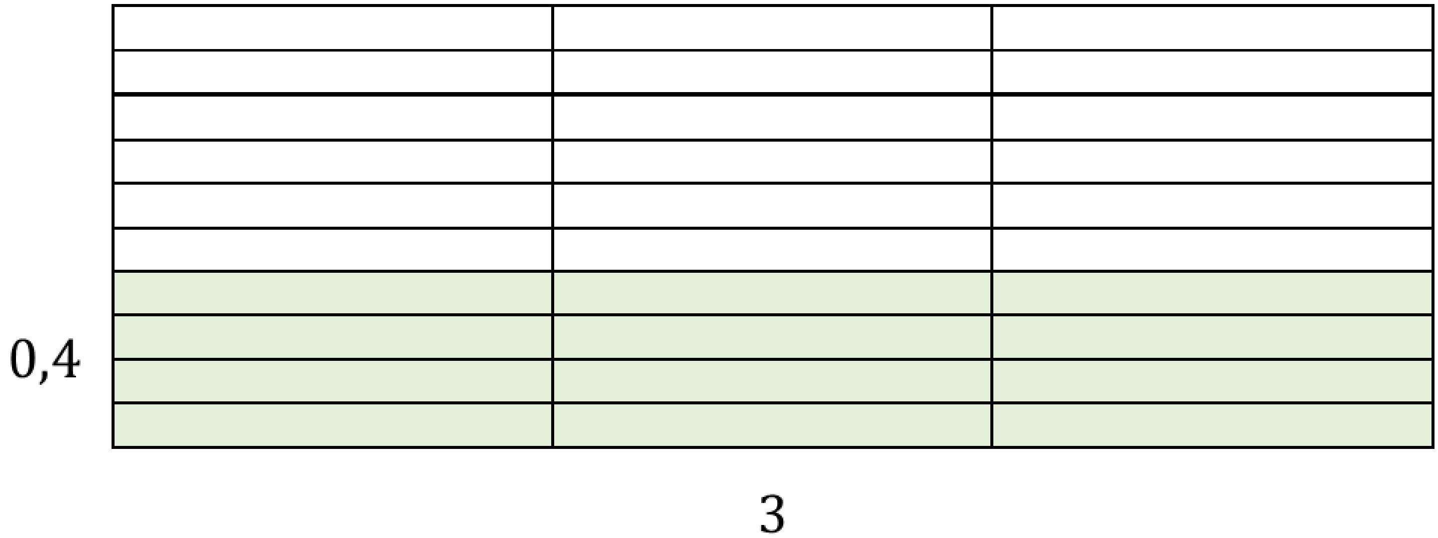
Løsningsforslag

1. Alfa s. 140
   a. 1.68

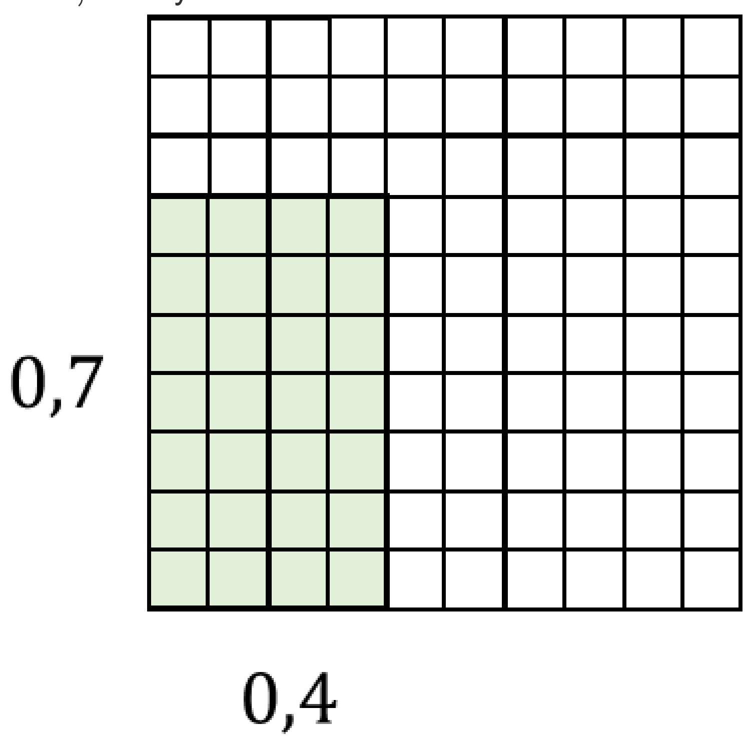
$2 \cdot 0,4$ er to kopier av $0,4$.



$0,4 \cdot 3$ er fire tideler av tre.



$0,7 \cdot 0,4$ er syv tideler av fire tideler.



b. 1.69

$$3 \cdot 0,2 = 3 \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$40 \cdot 0,006 = 40 \cdot \frac{6}{1000} = \frac{24 \cdot 10}{100 \cdot 10} = \frac{24}{100} = 0,24$$

$$21,72 \cdot 0,3 = \left(2172 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{10}\right) = (2172 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100}\right) = \frac{2172 \cdot 3}{1000}$$

$$0,000943 \ : 0,0023 = \frac{943 \cdot 10^6}{23 \cdot 10^4} = \frac{943}{23} \cdot \frac{1}{100} = \frac{41}{100} = 0,41$$

Gjøre om mellom brøk og desimaltall

Grunnleggende: Forklare og gi eksempler på de tre typene desimaltall, og gjengi hvilke brøker som svarer til endelige og hvilke som svarer til periodiske desimaltall

1. Forklar og gi eksempler på endelig, periodisk og uendelig ikke-periodisk desimaltall.
2. Hvilke brøker svarer til endelige og hvilke svarer til periodiske desimaltall?

Middels: Gjøre om mellom brøk og desimaltall med endelig desimalutvikling

1. Gjør om til desimaltall. Fremgangsmåte, strategi eller begrunnelse for omgjøringen må komme tydelig frem.

a. $\frac{6}{5}$	b. $\frac{4}{15}$	c. $\frac{7}{2}$
d. $\frac{12}{30}$	e. $\frac{14}{450}$	f. $\frac{3}{40}$

1. Gjør om til brøk maksimalt forkortet brøk. Fremgangsmåte, strategi eller begrunnelse for omgjøringen må komme tydelig frem.
   a. $0,21$
   b. $0,0202$
   c. $3,333$
   d. $0,8$

Avansert: Gjøre om mellom brøk og desimaltall med periodisk desimalutvikling

1. Alfa s. 140.
   a. 1.73
   b. 1.74
2. Gjør om til brøk.
   a. $0,\overline{45}$
   b. $0,0\overline{45}$
   c. $0,\overline{123}$
   d. $0,123\overline{45}$
   e. $1,001001001\ldots$
3. Gjør om til brøk.
   a. $0,111\ldots$
   b. $0,222\ldots$
   c. $0,333\ldots$
   d. Og så videre.

Løsningsforslag

2. Gjør om til brøk.
   a. $0,\overline{45}$

$$\begin{aligned} 100x &= 45,\overline{45} \\ -x &= -0,\overline{45} \\ \Rightarrow 99x &= 45 \\ x &= \frac{45}{99} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

b. $0,0\overline{45}$

$$\begin{aligned} 1000x &= 45,\overline{45} \\ 10x &= 0,\overline{45} \\ \Rightarrow 990x &= 45 \\ x &= \frac{45}{990} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

c. $0,\overline{123}$

$$1000x - x = 999x = 123 \Rightarrow x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

d. $0,123\overline{45}$

$$\begin{aligned} 100\ 000x &= 12\ 345,\overline{345} \\ 100x &= 12,\overline{345} \\ \Rightarrow 99\ 900x &= 12\ 333 \\ x &= \frac{12\ 333}{99\ 900} = \frac{4\ 111}{33\ 300} \end{aligned}$$

e. $1,001001001\ldots$

$$\begin{aligned} 100\ 000x &= 100\ 100,\overline{100} \\ 100x &= 100,\overline{100} \\ 99\ 900x &= 100\ 000 \\ x &= \frac{100\ 000}{99\ 900} = \frac{1000}{999} \end{aligned}$$

Alternativt kunne vi sett bort fra eneren, gjort trikset på $0,00\overline{100}$, og lagt til 1 etterpå.

3. Gjør om til brøk.
    a. $0,111\ldots = \frac{1}{9}$
    b. $0,222\ldots = \frac{2}{9}$
    c. $0,333\ldots = \frac{3}{9}$
    d. Og så videre. $0,aaa\ldots = \frac{a}{9}$ for $a \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ 9\}$. Det betyr spesielt at $0,999\ldots = \frac{9}{9} = 1$.

Begrunne hvilke brøker som svarer til endelige og hvilke som svarer til periodiske desimaltall

Middels: Avgjøre og begrunne (uten å utføre divisjon) om en gitt brøk er endelig eller periodisk

1. Alfa s. 140:
    a. 1.71
    b. 1.73 (avgjør uten å regne hva slags desimaltall brøken svarer til)
2. Hvis mulig, utvid eller forkort brøken slik at det klart fremgår at den svarer til et endelig desimaltall. Begrunn ellers hvorfor dette ikke lar seg gjøre.
    1. $\frac{14}{35}$

2. $\frac{12}{36}$
3. $\frac{12}{36}$
4. $\frac{3}{16}$
5. $\frac{18}{45}$
6. $\frac{6}{18}$

Løsningsforslag

2. \
    1. $\frac{14}{35} = \frac{2}{5} = \frac{4}{\mathbf{10}}$
    2. $\frac{12}{36} = \frac{1}{\mathbf{3}}$
    3. $\frac{7}{150} = \frac{7}{\mathbf{3} \cdot 50}$
    4. $\frac{3}{16} = \frac{3 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 5^4}{\mathbf{10\,000}}$
    5. $\frac{18}{45} = \frac{2}{5} = \frac{4}{\mathbf{10}}$
    6. $\frac{6}{18} = \frac{1}{\mathbf{3}}$

       Det er valgt litt dumme eksempler her, da 3 ser ut til å være eneste faktor i nevner som gjør at brøker ikke er endelige. Slik er det ikke: Det er hvis, og bare hvis, 2 og 5 er de eneste primfaktorene i den maksimalt forkorta nevneren, at brøken svarer til et endelig desimaltall. *Alle andre faktorer* i den maksimalt forkorta nevneren, gir *ikke* endelig desimaltall.

Avansert: Begrunne hvilke brøker som svarer til endelige og hvilke som svarer til periodiske desimaltall

1. Alle brøkene som svarer til endelige desimaltall, har en felles egenskap. Forklar hvilken det er, og gi en begrunnelse for at det er slik.
2. Brøkene som ikke svarer til endelige desimaltall, gir periodiske desimaltall. Begrunn hvorfor det er slik.

Løsningsforslag

1. Alle brøkene som svarer til endelige desimaltall, har en felles egenskap. Forklar hvilken det er, og gi en begrunnelse for at det er slik. De har til felles at når maksimalt forkorta, er 2 og 5 eneste primfaktorer i nevneren. For at en brøk skal være et endelig desimaltall, må den kunne utvides til 10-, 100- eller 1000- deler og så videre, altså til en brøk med tierpotens til nevner (fordi det er det desimaltall er). Siden 2 og 5 er de eneste primfaktorene i 10^n, kan vi ikke ha andre faktorer i nevner om brøken skal være endelig.

2. Brøkene som ikke svarer til endelige desimaltall, gir periodiske desimaltall. Begrunn hvorfor det er slik. Skal vi gjøre om brøker til desimaltall, kan vi dele. For eksempel finner vi 3/7 som desimaltall ved å dele 3 på 7. Når vi gjør dette ved hjelp av divisjonsalgoritmen, deler vi ut så mye vi kan, gjør om resten til neste posisjon (3 enere til 30 tideler for eksempel), og «trekker ned» sifferet som angir hvor mye vi har fra før av den posisjonen.

   Når vi deler på for eksempel syv, er det bare syv mulige rester vi kan få, nemlig 0, 1, 2, ... og 6. Det betyr at vi før eller siden (innen seks steg, for divisjonen vil jo ikke gå opp på noe tidspunkt) vil få en rest vi har hatt tidligere når vi utfører divisjonsalgoritmen. Og da vil vi nødvendigvis få en gjentakelse av stegene fra første gang vi fikk den resten; vi havner i en «periode-loop».

Utføre og begrunne prosentregning

Grunnleggende: Finne prosentdel av et tall, uttrykke tall som prosentdel av et hele, og finne det hele når del og prosentdel er gitt

1. Alfa s. 143
   a. 1.77
   b. 1.78
   c. 1.79
   d. 1.80
   e. 1.81
   f. 1.82
   g. 1.83
   h. 1.84
   i. 1.85
2. Alfa s. 144
   a. 1.87
   b. 1.88
   c. 1.89
   d. 1.90

Middels: Utføre og begrunne beregningene over

1. Alfa s. 143--144:
   a. 1.77
   b. 1.91

2. Velg egne tall. Finn, ved hjelp av flere strategier, og begrunn dem i hvert tilfelle
   a. en prosentdel av et tall (hva er x prosent av y?)
   b. en del av et tall uttrykt som prosent del (hvor stor prosentdel utgjør x av y?)
   c. det hele når del og prosentdel er kjent (hvis x utgjør y prosent, hva er da 100 %?)

Løse (ukjente) problemer knyttet til brøk, prosent (og desimaltall)

Avansert: Løse (ukjente) problemer knyttet til brøk, prosent (og desimaltall)

1. Alfa s. 143: 1.86
2. To butikker selger i utgangspunktet en vare til samme pris. Den ene butikken setter opp varen med 10 % for siden å sette den ned med 10 %. Den andre butikken gjør motsatt: først ned 10 %, siden opp 10 %.
   a. Hvor lønner det seg å handle?
   b. Generaliser problemstillingen og løs den.
3. Blant en gruppe mennesker er 60 % gutter. Når det kommer 5 nye jenter, andelen 50/50. Hvor mange var de i utgangspunktet?
4. To kraner står over ei bøtte. Den ene krana fyller halve bøtta på en time. Den andre fyller en firedel på samme tid. Hvor lang tid tar før bøtta er full om begge kranene åpnes på likt?
5. I testamentet gir tante Beate halvparten av formuen sin til Røde Kors. Hennes tre nevøer skal dele resten. Per skal bare få to tredeler av det hver av de to andre nevøene skal få, etter som han ikke besøkte henne den siste tiden. Hvor stor andel av formuen skal Per ha?
6. Her er et snedig triks for å finne en brøk som ligger mellom to andre brøker: Lag brøken der teller er summen av de to brøkenes tellere, og nevneren summen av de to brøkenes nevnere. Eksempel: Brøken $\frac{2+4}{3+5}$ ligger mellom $\frac{2}{3}$ og $\frac{4}{5}$. Vis at trikset alltid funker. (Hint: Det kan lønne seg å bruke at dersom $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$, så er $2 \cdot 5 < 3 \cdot 4$.)

Utføre addisjon og subtraksjon med negative tall

Grunnleggende: Utføre addisjon og subtraksjon med negative tall

1. Regn ut.
   a. $12 - (-3)$
   b. $-12 + (-3)$
   c. $-(-12 + (-3))$
   d. $1 - (-12 + (-3))$
   e. $(5 - 7) - (-3 + 2)$
   f. $-20 - (-13)$
   g. $-((-23) - (-3)) - ((-81) - (-19))$
   h. $((-23) - 3) - ((-81) + (-19))$

Middels: Vise hvorfor regnereglene for negative tall gir mening

1. Lag regnetabeller som med utgangspunkt i de naturlige tallene, viser hvordan addisjon og subtraksjon må oppføre seg for å gi en meningsfull utvidelse til negative tall.
2. Forklar med ord hvordan addisjon og subtraksjon av negative tall må oppføre seg med utgangspunkt i beskrivelsen av (hele) negative tall som *motsatte av de positive (hele) tallene*.
3. Illustrer forklaringa fra forrige oppgave på tallinjer.

Utføre multiplikasjon og divisjon med negative tall

Grunnleggende: Utføre multiplikasjon og divisjon med negative tall

1. Regn ut.
   a. $-3 \cdot 5$
   b. $-3 \cdot (5 - 1)$
   c. $-3 \cdot (-(5 - 1))$
   d. $2 \cdot \frac{12-15}{-2}$
   e. $-\frac{3}{2} \cdot \left(5 - \frac{4}{-9}\right)$
   f. $\left((-18) \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right) \ : (-12)$

Middels: Vise hvorfor regnereglene for multiplikasjon og divisjon med negative tall gir mening

1. Lag en multiplikasjonstabell for 0--10. Utvid tabellen til -10 i begge retninger, og forklar kort hvordan mønsteret må fortsette for å gi en meningsfull utvidelse.
2. Ta utgangspunkt i beskrivelse av negative tall som *motsatte av de positive tallene,* og tolkninga av multiplikasjonen $a \cdot b$ som b gjentatt (eller kopiert) a ganger. Beskriv med ord hva som da er fornuftige tolkninger av $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot b$ og $(-a) \cdot (-b)$. Du må gjerne bruke generiske talleksempler i stedet for bokstaver.
3. Illustrer forklaringa fra oppgaven over på tallinjer.
4. Siden et tall ganger null er null, og et tall minus seg selv er null, må for eksempel $3 \cdot (2-2)$ være 0. Bruk dette til å vise at
   a. $a \cdot (b-b)$ gir at produktet av et positivt og et negativt tall må være negativt, og at
   b. $-a \cdot (b-b)$ gir at produktet av to negative tall må være positivt. Du kan godt bruke generiske talleksempler.

Gjengi betydningen av potensuttrykk, og regne med potenser

Grunnleggende: Gjengi hva potensuttrykk betyr når eksponenten er et naturlig tall (tre tilfeller: ***eksponent*** > 1, ***eksponent*** $= 1$ og ***eksponent*** $= 0$), når den er et negativt tall og når den er en brøk

1. Hva betyr potensuttrykkene? Der det er nødvendig, angi også hvilke tall a, n og m betydningen gjelder for.

a. a^n	b. a^1	c. a^0
d. a^{-n}	e. $a^{\frac{n}{m}}$	

1. Alfa s. 239
   a. 3.24

Middels: Regne med potenser med heltallige (som inkluderer naturlige) eksponenter, og begrunne beregningene ved hjelp av potensreglene

1. Alfa s. 239--241 (Det er ikke meningen å gjøre alt! Øv på det du trenger å øve på.)
   a. 3.23
   b. 3.25
   c. 3.26
   d. 3.27
   e. 3.29
   f. 3.32
   g. 3.38
2. Begrunn avgjørelsene deres for *hvert* alternativ i oppgavene under. (Ikke for vår, men for din egen lærings skyld.)
   a. Hvilke(t) alternativ er $4^7 \cdot 2^4$ lik?

A	4^{11}
B	8^6
C	8^{11}
D	4^9
E	2^{18}

b. Hvilke(t) alternativ er $2^{16} + 2^{16} + 2^{16} + \ldots + 2^{16}$ (16 ledd) lik?

A	4^{10}
B	2^{19}
C	16^2
D	$2^5 \cdot 8^5$

E	2^{32}

c. Hvilke(t) alternativ er $10^{12} : 20^6$ lik?

A	$\frac{10^{12}}{2 \cdot 10^6}$
B	1
C	5^6
D	$10^{(12-6)} : 2^6$
E	25^3

d. Hvilke(t) alternativ er $9^{-6} \cdot 3^{12}$ lik?

A	9^4
B	1
C	$81^{-3} \cdot 81^3$
D	9^{-6+6}
E	$\frac{1}{6^9} \cdot 3^{12}$

Avansert: Regne med potenser med rasjonale (som inkluderer heltallige) eksponenter, og begrunne beregningene ved hjelp av potensreglene

1. Alfa s. 239--341
   a. 3.28
   b. 3.37
2. Regn ut ved hjelp av potensregler.
   a. $2 \cdot \sqrt{100} \cdot 5^{-1} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$

b. $\sqrt[13]{5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2}}}^{6}$

c. $\frac{\left(\frac{2}{5} \cdot 125^{\frac{2}{5}}\right)^{5}}{2}$

3. Begrunn ved hjelp av potensregler at $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a}^n$.
4. Gjør om til et rotuttrykk.

$\frac{a^{3+n} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{(ab)^{\frac{n}{3}}}$

5. Avgjør og begrunn om uttrykkene har lik verdi.

a. $\sqrt{3} \cdot 2^4$ og $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}^7$

b. $81^{\frac{2}{4}}$ og $\left(\frac{18}{4} \cdot 2\right)^{\frac{1}{2}}$

c. $2^3 \cdot 12^{-\frac{3}{2}}$ og $\left(\sqrt[3]{3}^2\right)^{-1}$

d. $\sqrt{3} \cdot 2^4$ og $\frac{3 \cdot \sqrt{2}^9}{\sqrt{6}}$

e. $\frac{4^{10} \cdot 10^2}{32^{\frac{10}{4}}}$ og $2^{10} \cdot 10^2$

Utlede potensreglene

Middels: Utlede potensreglene for heltallige eksponenter

1. Utled potenssammenhengene under med utgangspunkt i at $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ for n a-er. Det er ok å gjøre utledningene ved hjelp av talleksempler, så lenge disse fungerer som *generiske* eksempler. Du bør likevel tilstrebe fortrolighet med bokstaver (i matte 2 er det ingen bønn 😉).

A	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
B	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
C	$a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

D	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
E	$a^0 = 1$
F	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Avansert: Utlede potensreglene for rasjonale (som inkluderer heltallige) eksponenter

1. Utled potenssammenhengene under med utgangspunkt i at $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ for n a-er. Det er ok å gjøre utledningene ved hjelp av talleksempler, så lenge disse fungerer som *generiske* eksempler. Du bør likevel tilstrebe fortrolighet med bokstaver (i matte 2 er det ingen bønn 😉).

A	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
B	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
C	$a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
D	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
E	$a^0 = 1$
F	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
G	$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$
H	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
I	$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a}^{\,n}$

17.04.23

Forklare hva et posisjonssystem er

Grunnleggende

Forklar kort hva et posisjonssystem er. Gi eksempler fra base ti, tre, to og elleve.

Vurderingskriterier

Må få frem ideen om at sifrenes posisjon avgjør verdien de står for, og at denne verdien avhenger av hvilken gruppering vi velger -- hvilken base eller grunntall vi har. Må også ha med eksempler.

Middels

1. Forklar kort hva et posisjonssystem er.
2. Gjør om 121_{ti} til base tre, 101101_{to} til base ti, og 112_{fire} til base fem.

Vurderingskriterier

Som grunnleggende + omgjøringene. Det må gå frem hvordan omgjøringene er gjort.

Avansert

1. Gjør om 112_{tre} til base seks.
2. Regn ut i den aktuelle basen:
   a. $1101001_{to} - 110010_{to}$

b. $43_{seks} \cdot 23_{seks}$

Vurderingskriterier

Som middels + beregninger. Disse må være ført i den aktuelle basen.

Beskrive situasjoner med hensyn til additive strukturer

Grunnleggende

1. Beskriv tre situasjoner som har addisjon som modell med henholdsvis økning, forening og additiv sammenlikning som struktur.
2. Velg én av situasjonene over. Omformuler den slik at det er rimelig å si at den har samme struktur, men med subtraksjon som modell.

Vurderingskriterier

Additive strukturer s. 52 i Alfa.

Middels

Avgjør og begrunn hvilken additiv struktur situasjonene har. Angi både addisjons- og subtraksjonsstykket som passer i hvert tilfelle.

a. På en uke har en solsikke inntil husveggen vokst til 212 cm. Hvor mange centimeter må den vokse før den når husveggen på 240 cm?
b. André fant 12 kroner i bukselomma. I jakkelomma fant han 50. Hvor mye mer fant han i jakka?
c. Studentene må lese to pensumbøker med til sammen 643 sider. Den ene boka er på 425 sider. Hvor mange sider har den andre?

Vurderingskriterier

En struktur må angis med rimelig begrunnelse. Begge mulige regnestykker må med.
a. er komplettering: 212 + __ = 240 eller 240 -- 212 = __.
b. er sammenlikning: 12 + __ = 50 eller 50 -- 12 = __.
c. er forening/sammenslåing: 425 + __ = 643 eller 643 -- 425 = __.

Beskrive situasjoner med hensyn til multiplikative strukturer

Grunnleggende

1. Gjengi kort med et eksempel til hver, hva som menes med de to multiplikative strukturene rate og kombinatorisk situasjon.
2. Gjengi kort med et eksempel til hver, hva som menes med de to typene divisjon delingsdivisjon og målingsdivisjon.

Vurderingskriterier

Multiplikative strukturer s. 58 i Alfa.

Middels

1. Avgjør og begrunn hvilken multiplikativ struktur situasjonene svarer til.

a. En bils tilbakelagte strekning når den har kjørt 60 km/t i 20 minutter.
b. Antall tyggegummi i tre pakker med åtte i hver.
c. Antall seter i en kinosal med 23 rader, hver med 14 seter.

2. Ta utgangspunkt i situasjon b. Legg til nødvendig informasjon, og omformuler på to måter: slik at du lager én divisjonsoppgave med målingsdivisjon og én med delingsdivisjon. Begrunn hvilken som er hva.

Vurderingskriterier

Avgjørelsene må begrunnes kort.

1.
    a. er rate.
    b. er like grupper.
    c. er rektangulært arrangement (eller like grupper).
2. \

- Målingsdivisjon: 24 tyggegummi fordelt i pakker på 8, hvor mange pakker?
- Delingsdivisjon: 24 tyggegummi i tre pakker, hvor mange i hver?

Bruke regnestrategier og egenskaper ved regneoperasjonene

Grunnleggende

Gjengi kommutativ, assosiativ og distributiv egenskap for addisjon og multiplikasjon.

Vurderingskriterier

Gjengi egenskapene.

Middels

1. Bruk minst én av egenskapene (kommutativ, assosiativ, distributiv) til å regne $23 \cdot 11$. Vis tydelig hvordan du tenker.
2. Gjør beregningene under ved hjelp av regnestrategier som ikke innebærer oppstilt regning. Vis tydelig hvordan du tenker.

a. $352 - 61$
b. $240 : 20$
c. $160 \cdot \frac{3}{4}$

Vurderingskriterier

Trengs et par setninger som tydelig får frem hvordan man har tenkt.
i. Nærliggende å distribuere: $23 \cdot 11 = 23 \cdot (10 + 1)$
ii. Eks. dele opp: $352 - 61 = 352 - 60 - 1$

iii. Eks. dele på ti, så to: $240 \ : 20 = (240 \ : 10) : 2$
iv. Eks. finne firedel av 16, gange med 3, gange med 10.

Avansert

1. Bruk multiplikasjonen $5 \cdot 8$ til å illustrere og gi en kort forklaring av distributiv egenskap.
2. Gjør beregningene under ved hjelp av regnestrategier som ikke innebærer oppstilt regning. Vis tydelig hvordan du tenker.
3. Velg én av strategiene fra 2., og gi en illustrasjon og kort forklaring som viser at strategien alltid funker.
   a. $240 : 20$
   b. $160 \cdot \frac{3}{4}$

Vurderingskriterier

Få tydelig frem hva man har tenkt.
i. Må bruke gitt multiplikasjon, og få frem at egenskapen er generell (generisk eksempel)
ii. Som iii. og iv. fra middels
iii. Må få frem at strategien er generell (heller ikke her trengs nødvendigvis noe algebra)

Forklare og gi eksempler på de ulike betydningene av brøk: del av hel/enhet, del av antall, tall og forhold

Grunnleggende

Forklar og gi eksempler på hva som menes med brøk som
a. del av en hel eller del av en enhet
b. del av et antall
c. tall
d. forhold

Vurderingskriterier

Må gi en kort forklaring. Alfa s. 96-101 og s. 109.

Middels

1. Avgjør og begrunn kort hvilke(n) betydning av brøk det er naturlig å knytte til situasjonene.
   a. Etter en viss tid har du løpt $\frac{3}{4}$ av strekningen for dagens joggetur.
   b. André føler seg spenstig, og maler $\frac{2}{3}$ av stueveggen grønn, den siste tredelen rosa.
2. Lag to oppgaver, og begrunn kort hvorfor de involverer den aktuelle betydningen av brøk.
   a. Én oppgave med brøk som del av antall.

b. Én oppgave med brøk som forhold.

Vurderingskriterier

1. Må avgjøre med en kort, fornuftig begrunnelse.
   a. er rimelig å tolke som *tall* (en måling).
   b. er rimelig å tolke som *del av helhet* (vegg som helhet).
2. Oppgavene må rimelig kunne sies å involvere den aktuelle tolkningen, og besvarelsen må inneholde en kort begrunnelse.

Forklare hvordan de reelle tallene er bygd opp

Grunnleggende: Forklare hva hele, rasjonale og irrasjonale tall er

Gjengi kort hva som menes hele, rasjonale og irrasjonale tall.

Vurderingskriterier

Gjengi korrekt. Hele tall: ... -2, -1, 0, 1, 2,.... Rasjonale: brøk med heltallig teller og nevner. Irrasjonale: de som ikke er heltallige brøker.

Middels: Forklare hvordan de reelle tallene er bygd opp av naturlige, hele, rasjonale og irrasjonale tall

Forklar kort hva naturlige, hele, rasjonale og irrasjonale tall er, og vis med en illustrasjon hvordan disse til sammen utgjør de reelle tallene.

Vurderingskriterier

Som grunnleggende, men med presisering av naturlige også, samt et diagram eller liknende som får frem hvilke mengder som er delmengder av hvilke.

Utvide og forkorte brøker

Grunnleggende: Utvide og forkorte brøker

Finn i hvert tilfelle den likeverdige brøken med lavest mulig heltallig teller og nevner.
a. $\frac{12}{14}$
b. $\frac{1{,}5}{6}$
c. $\frac{\frac{2}{3}}{4}$

Vurderingskriterier

6/7, 1/4, 1/6

Middels: Utvide og forkorte brøker, og forklare og illustrere hvorfor dette gir brøker av lik verdi

1. Hvilke brøker er likeverdige med $\frac{2}{5}$?
    a. $\frac{4}{15}$
    b. $\frac{1}{2{,}5}$
    c. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}$
    d. $\frac{10}{25}$
2. Lag en illustrasjon som tydelig viser at $\frac{2}{3}$ og $\frac{8}{12}$ er likeverdige.

Vurderingskriterier

1. b, c og d
2. Eks. dele kvadrat i tredeler den ene veien, og firedeler den andre.

Utføre addisjon og subtraksjon med brøk

Grunnleggende: Utføre addisjon og subtraksjon med brøk

Regn ut.
a. $\frac{5}{2} + \frac{2}{3}$
b. $\frac{7}{3} - \frac{1}{2}$

Vurderingskriterier

19/6, 11/6

Middels: Utføre addisjon og subtraksjon med brøk, og forklare og illustrere hvorfor regnereglene gir mening

Regn ut, og gi en forklaring med illustrasjon som viser at beregningen må være riktig.

a. $\frac{5}{2} + \frac{2}{3}$
b. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

Vurderingskriterier

19/6, 1/6. Illustrasjonen må vise utviding til felles nevner på en forståelig måte.

Utføre multiplikasjon med brøk

Grunnleggende: Utføre multiplikasjon med brøk

Regn ut.
a. $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$
b. $2\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$

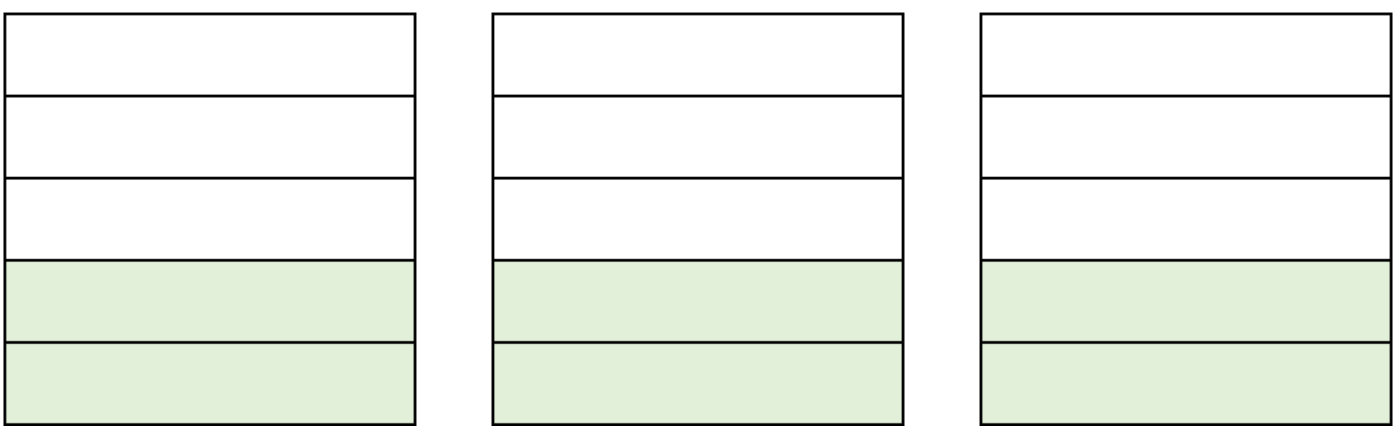
Vurderingskriterier

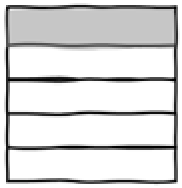
6/5, 8/5

Middels: Utføre multiplikasjon med brøk, og forklare og illustrere hvorfor regnereglene gir mening

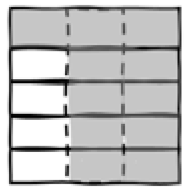
1. Forklar ved hjelp av en passende illustrasjon at $3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \cdot 3$.
2. Forklar kort ved hjelp av en passende illustrasjon hvorfor vi multipliserer teller med teller og nevner med nevner for å finne produktet av to brøker.

Vurderingskriterier

1. Må vise til struktur, ikke bare at «svarene» er like. Eks under.
   Kvadratene er 1, grønn del 2/5. Figuren kan leses som *2/5 gjentatt tre ganger,* altså 3 · 2/5. Den kan også leses som *2/5 av tre,* altså 2/5 · 3.
   
2. Må vise til en figur som for eksempel den under (2/3 · 4/5):

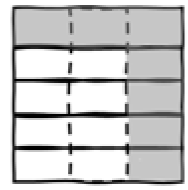


Fire femdeler.



Én tredel av fire femdeler
som er fire femten-deler, altså

$$\frac{4}{3 \cdot 5}.$$



To tredeler av fire femdeler
som da er

$$\frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}.$$

Utføre divisjon med brøk

Grunnleggende: Utføre divisjon med brøk

Regn ut.
a. $\frac{4}{5} : \frac{5}{4}$
b. $\frac{4}{3} : \frac{2}{5}$

Vurderingskriterier

16/25, 10/3

Middels: Vise ved hjelp av generisk eksempel hvorfor regneregelen for divisjon med brøk er som den er

Vis ved hjelp av et generisk eksempel hvorfor divisjon med en brøk svarer til multiplikasjon med den omvendte brøken.

Vurderingskriterier

Må tolke en brøkdivisjon som brøk over brøk, og utvide. Oppgaven ber om *generisk eksempel.* Poenget er at strukturen må komme frem (som i algebraen under). Å dele på en stambrøk er ikke godt nok. Velger noen algebra, er det ok.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot d/c}{\frac{c}{d} \cdot d/c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Avansert: Forklare ved hjelp av kontekst (både målings- og delingsdivisjon) hvorfor regneregelen for divisjon med brøk gir mening

Ta utgangspunkt i divisjonen $9 : \frac{3}{2}$. Lag to passende kontekster, og bruk dem til å vise at $9 : \frac{3}{2} = 9 \cdot \frac{2}{3}$.

a. Den ene konteksten skal gi delingsdivisjon.

b. Den andre konteksten skal gi målingsdivisjon.

Vurderingskriterier

a. Delingsdivisjon: 9 liter maling rekker til 3/2 vegg (like vegger), hvor mye maling trengs per vegg? Fordeler de 9 literne likt på de tre todelene, som gir 9/3 liter per todel. Ganger dette opp med to for å få en hel vegg, altså $9\ :\frac{3}{2}=\frac{9}{3}\cdot 2=9\cdot\frac{3}{2}$.
b. Målingsdivisjon: Hvor mange en-og-en-halv-litere går det på ni liter? Det går to halvlitere på én liter, så $9\cdot 2$ halvlitere på ni liter. 3/2 liter er tre ganger så mye, så det går en tredel så mange, altså $9\ :\frac{3}{2}=\frac{9\cdot 2}{3}=9\cdot\frac{3}{2}$.

Utføre formell omforming av brøk

Avansert: Utføre formell omforming av brøk

Regn ut.

a. $\frac{3}{2}(2+\frac{2}{3}-\frac{3+\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}})-1$
b. $\frac{(\frac{4}{7}\cdot(2+\frac{4}{5}))-\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$

Vurderingskriterier

-1/5 og 2.

31.03.23

Forklare hva et posisjonssystem er, og regne med tall uttrykt i posisjonssystem med ulike baser

Grunnleggende: Forklare hva et posisjonssystem er, og gi eksempler på tall uttrykt i posisjonssystem med ulike baser

Forklar kort hva et posisjonssystem er. Gi eksempler fra base ti, fem, to og tolv.

Vurderingskriterier

Må få frem ideen om at sifrenes posisjon avgjør verdien de står for, og at denne verdien avhenger av hvilken gruppering vi velger – hvilken base eller grunntall vi har. Må også ha med eksempler.

Middels: Forklare hva et posisjonssystem er, og gjøre om tall mellom ulike baser

1. Forklar kort hva et posisjonssystem er.
2. Gjør om 112_{ti} til base tre, 1001010_{to} til base ti, og 112_{tre} til base fem.

Vurderingskriterier

Som over + omgjøringene. Det må gå frem hvordan omgjøringene er gjort.

Avansert: Utføre beregninger med tall uttrykt i andre baser enn ti

1. Gjør om 112_{fire} til base fem.
2. Regn ut i den aktuelle basen:
   a. $2212_{tre} : 21_{tre}$
   b. $43_{fem} \cdot 23_{fem}$

Vurderingskriterier

Som over + beregninger. Disse må være ført i den aktuelle basen.

Beskrive situasjoner med hensyn til additive strukturer

Grunnleggende: Gjengi med eksempler de ulike additive strukturene for både addisjon og subtraksjon

Beskriv tre situasjoner som har addisjon som modell med henholdsvis økning, forening og additiv sammenlikning som struktur.
Velg én av situasjonene over. Omformuler den slik at det er rimelig å si at den har samme struktur, men med subtraksjon som modell.

Vurderingskriterier

Additive strukturer s. 52 i Alfa.

Middels: Avgjøre og begrunne hvilken struktur en gitt situasjon svarer til

Avgjør og begrunn hvilken additiv struktur situasjonene har. Tolk både med addisjon og subtraksjon som modell.

1. På en uke har en plante vokst seg 21 cm lengre til 93 cm. Hvor lang var den for en uke siden?
2. André hadde 12 kroner i lomma. Da han fant noen penger bakken, hadde han 19 kroner. Hvor mye fant han?

3. Henrik har to samlinger med Pokémon-kort, én med sjeldne og én med vanlige kort. Han har totalt 497 kort, hvorav de vanlige utgjør 354. Hvor mange sjeldne kort har Henrik?

Vurderingskriterier

Det er nok om bare navnet på strukturen for addisjon som modell er oppgitt, men begge mulige regnestykker må med. Avgjørelsene må begrunnes kort.

1. er sammenlikning, kjent differanse: $\_ + 21 = 93 eller 93 - 21 = \_$.
2. er økning/oppheving av økning, ukjent økning: $12 + \_ = 19 eller 19 - 12 = \_$.
3. er forening/oppdeling, totalen kjent: $354 + \_ = 497 eller 497 - 354 = \_$.

Beskrive situasjoner med hensyn til multiplikative strukturer

Grunnleggende: Gjengi med eksempler de ulike multiplikative strukturene for både multiplikasjon og divisjon

Forklart kort med et eksempel til hver av de to multiplikative strukturene multiplikativ sammenlikning og kombinatorisk situasjon.
Forklar kort med et eksempel til hver av de to typene divisjon delingsdivisjon og målingsdivisjon.

Vurderingskriterier

Multiplikative strukturer s. 58 i Alfa.

Middels: Avgjøre og begrunne hvilken struktur en gitt situasjon svarer til

1. Avgjør og begrunn hvilken multiplikativ struktur situasjonene svarer til.
   a. En flaske ligger opp ned i sekken og lekker 4 ml i minuttet.
   b. Antall gir på en sykkel med tre tannhjul fremme og åtte bak.
   c. Solas diameter er 109 ganger jordas.
2. Ta utgangspunkt i situasjon 1. Legg til nødvendig informasjon, og omformuler på to måter: slik at du lager én divisjonsoppgave med målingsdivisjon og én med delingsdivisjon. Begrunn hvilken som er hva.

Vurderingskriterier

Avgjørelsene må begrunnes kort.

1. \
   - er rate.
   - er kombinatorisk eller like grupper.
   - er sammenlikning.

2. Målingsdivisjon: 12 ml har lekket fra en flaske som lekker 4 ml i minuttet. Hvor lenge har den lekket?
   Delingsdivisjon: 12 ml har lekket jevnt ut av en flaske i tre minutter. Hvor mye lekker flaska per minutt?

Bruke regnestrategier og egenskaper ved regneoperasjonene

Grunnleggende: Gjengi kommutativ, assosiativ og distributiv egenskap for addisjon og multiplikasjon

Gjengi kommutativ, assosiativ og distributiv egenskap for addisjon og multiplikasjon.

Vurderingskriterier

Gjengi egenskapene.

Middels: Bruke regnestrategier, også ved hjelp av egenskapene over

Bruk minst én av egenskapene over (kommutativ, assosiativ, distributiv) til å regne $12 \cdot 17$. Vis tydelig hvordan du tenker.
Gjør beregningene under ved hjelp av regnestrategier som ikke innebærer oppstilt regning. Vis tydelig hvordan du tenker.

a. $127 - 38$

b. $125 : 15$

c. $160 \cdot \frac{3}{4}$

Vurderingskriterier

Trengs et par setninger som tydelig får frem hvordan man har tenkt.

1. Nærliggende å distribuere: 12·17=(10+2)·17
2. Eks. fast differanse: 127-38=129-40
3. Eks. forkorte: 125:15=25:3=8 1/3
4. Eks. finne firedel av 16, gange med 3, gange med 10.

Avansert: Bruke, illustrere og begrunne regnestrategier og egenskapene

Velg en multiplikasjon som passer til å illustrere distributiv egenskap sammen med en kort ordforklaring.

Gjør beregningene under ved hjelp av regnestrategier som ikke innebærer oppstilt regning. Vis tydelig hvordan du tenker.
Velg én av strategiene fra 2., og gi en illustrasjon og kort ordforklaring som viser at strategien alltid funker.

a. $127 - 38$

b. $125 : 15$

c. $160 \cdot \frac{3}{4}$

Vurderingskriterier

Få tydelig frem hva man har tenkt.

1. Må få frem at egenskapen er generell (men kan være gjort ved hjelp av talleksempel)
2. Som over
3. Må få frem at strategien er generell (heller ikke her trengs nødvendigvis noe algebra)