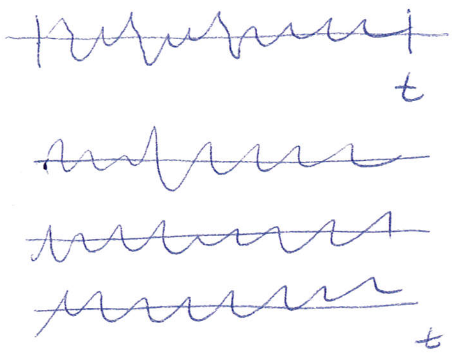
Rumore

1. Processi stocastici

$x(t)$



Segnale random non periodico

Ensemble copie identiche o intervalli successivi

Densità di probabilità $f(x,t)\,dx = \dfrac{n \text{ di sistemi tra } x \text{ e } x+dx}{n \text{ totale}}$

Stazionario: non dipende dal tempo $f(x,t) \to f(x)$

Normalizzazione: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Media sull'ensemble $\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$

$\bar{x} = 0$ (media nulla)

$Var(x) = \overline{(x-\bar{x})^2} = \overline{x^2}$

Ergodico se media temporale = media sull'ensemble

$$\langle g(x) \rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T g(x(t))\,dt = \overline{g(x)}$$

Più variabili $\to f(x_1, x_2)$

Correlazione $\overline{x_1 x_2} = \int x_1 x_2 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$

Autocorrelazione: correlazione del segnale con sé stesso a tempi diversi

$\to$ Dipende dalla distanza temporale

$x_1 = x(t) \qquad x_2 = x(t+\tau)$

$$\phi(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt = \right)$$

non dipende da t perché stazionario

- $\Phi(\tau)$ dà una indicazione della durata degli impulsi

Per $\tau=0$ $\quad \Phi(0) = \overline{x^2} = Var(x)$ (se finita)

$\Phi(\tau) = \Phi(-\tau)$

- Per rumore bianco, la correlazione tende a ∞ per $\tau=0$

$\Phi(\tau) = A\delta(\tau) \longrightarrow x(t) = \sum c_i\, \delta(t-t_i)$

$\longrightarrow$ serie di impulsi scorrelati temporalmente

$$\Phi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j} c_i c_j\, \delta(t-t_i)\,\delta(t-t_j+\tau)\,dt = \quad (\text{integro } \delta)$$

$$= \sum_i c_i^2\, \delta(\tau) + \boxed{\sum_{i\neq j} \delta(t_i-t_j+\tau)\cdot c_i c_j} = 0 \text{ se impulsi scorrelati.}$$

$$= A\delta(\tau)$$

2. Analisi in frequenza

$$x(t) \longrightarrow \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{x}(\omega)\, e^{j\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi}$$

con $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\,dt = 2\pi\,\delta(\omega)$

Impulsi ~~Rili~~ A. Energia e densità spettrale di energia

Per un impulso l'energia è $\propto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt$

se $x \sim$ tensione $\quad E = \dfrac{V^2}{R}$

$x \sim$ corrente $\quad E = I^2 \cdot R$

$$\overline{x^2} = E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{x}(\omega)\,\tilde{x}^*(\omega')\, e^{j(\omega-\omega')t} =$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{x}(\omega)\,\tilde{x}^*(\omega')\; 2\pi\,\delta(\omega-\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, |\tilde{x}(\omega)|^2$$

(Teorema di Parseval)

$$S_E(f) = 2|\tilde{X}(2\pi f)|^2 = \text{densità spettrale di energia}$$

$$E = \int_{0}^{+\infty} df\, S_E(f) \qquad df = \frac{d\omega}{2\pi}$$

Legame con la funzione di autocorrelazione (x reale)

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{x}(\omega)\, \tilde{x}^*(\omega')\, \underbrace{e^{-j\omega t}\, e^{+j\omega'(t+\tau)}}_{e^{+j\omega\tau}\, e^{j(\omega'-\omega)t}\,\to\, 2\pi\delta(\omega'-\omega)}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tilde{x}(\omega)|^2 e^{j\omega\tau}$$

$\to$ = trasformata di Fourier della densità spettrale di energia. $S_E(f)$

$$\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} df\, S_E(f) = \overline{x^2}$$

Densità spettrale di potenza.

Per segnali stazionari E diverge $\to$ potenza $P = \frac{E}{T}$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} |x^2(t)|\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{x}(\omega)\, \tilde{x}^*(\omega')\, \underbrace{e^{j(\omega-\omega')t}}_{2\pi\delta}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{x}(\omega)|^2}{T} \frac{d\omega}{2\pi} \to \text{Si deve fare la trasformata di Fourier troncata}$$

perché $\tilde{x}(\omega)$ è pari in ω

$$S_p(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{2|\tilde{X}(2\pi f)|^2}{T} \qquad P = \int_0^{\infty} S_p(f)\, df$$

Più precisamente: Definita $\tilde{X}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t)\, e^{-j\omega t} dt$

$$S_p(f) = \lim_{T\to\infty} 2|\tilde{X}_T(2\pi f)|^2$$

Effetto di un amplificatore (noiseless)

$$\tilde{w} = g\,\tilde{v}$$

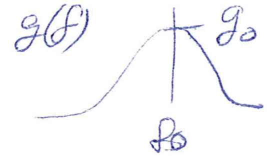
$$|\tilde{w}|^2 = |g|^2 |\tilde{v}|^2 \qquad S_w(f) = |g|^2 S_v(f)$$

$$\overline{w^2} = \int_0^\infty S_w(f)\,df = \int_0^\infty S_v(f)\,|g(f)|^2\,df$$

se $S_v(f)$ non varia nel campo in cui $g(f) \neq 0$

cioè: banda stretta oppure rumore bianco

si ha



$$\overline{w^2} = \underbrace{S_v(f_0)}_{\text{Rumore in ingresso}} \cdot \underbrace{|g_0|^2}_{\text{guadagno a metà banda}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|g_0|^2}\int_0^\infty |g(f)|^2\,df}_{B_N}$$

B_N = banda equivalente di rumore (Hz)

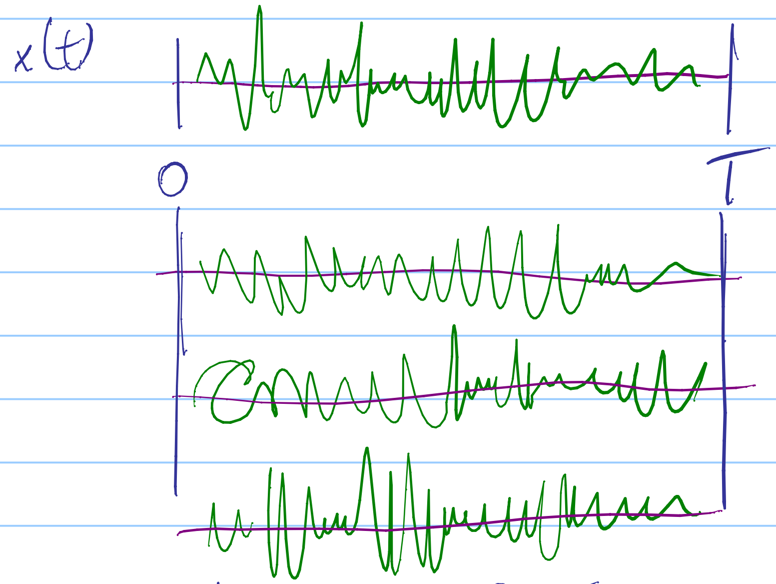
Se l'amplificatore introduce rumore serie (inviando un segnale preciso su f_0

$$S_w = F \cdot S_v(f_0) \cdot |g_0|^2$$

↳ F: cifra di rumore, sempre > 1

20 Cenni al rumore nei circuiti elettronici

1. Processi stocastici



Segnale random non periodico

Copie identiche del sistema iniziale (oppure intervalli successivi)

Ensemble

Densità di probabilità

$$f(x,t)\,dx = \frac{N \text{ sistemi tra } x \text{ e } x+dx}{N_{totale}}$$

Stazionario $\to$ f non dipende da t $\to f(x)$

Media sull'ensemble $\overline{g(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, f(x)\, dx$

(con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$)

Per noi $\overline{x} = 0$ (semmai $x \to (x-\overline{x})$)

Varianza $Var(x) = \overline{(x-\overline{x})^2} = \overline{x^2} - \overline{x}^2$

Ergodico se $\overline{g(x)} = \frac{1}{T}\int_0^T g(x(t))\,dt = \langle g(x) \rangle$

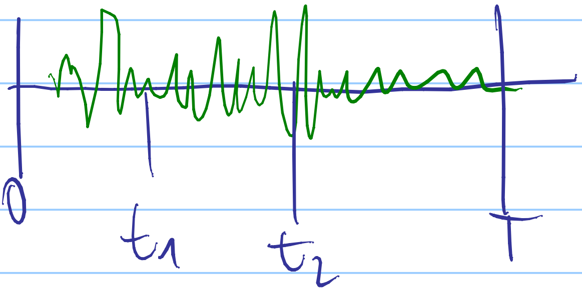
Per più variabili: $f(x_1, x_2)$

$$\overline{x_1 x_2} = \iint x_1 x_2 f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 \quad \text{correlazione}$$

Autocorrelazione

$x_1(t_1)$ $\quad$ $x_2(t_2)$

(lo stesso segnale)



$f(x_1, x_2, t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2 =$

prob che $x_1 < x(t_1) < x_1 + dx_1$

e $x_2 < x(t_2) < x_2 + dx_2$

Autocorrelazione

$$\Phi(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int x_1 x_2\, f(x_1, x_2, t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2$$

Stazionario $\rightarrow$ dipende solo da $t_2 - t_1 = \tau$

$$\phi(\tau) = \overline{x(t)\,x(t+\tau)} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$\rightarrow$ durata temporale del processo stoc.

Per $\tau = 0$ $\quad \phi(0) = \overline{x^2}$ $\quad$ (oppure $\phi(\tau) = A\delta(\tau)$)

$$\phi(\tau) = \phi(-\tau)$$

2. Analisi in frequenza (serie di Fourier)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \exp(j\omega_n t) \qquad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp(-j\omega_n t)\,dt$$

se $x(t)$ è reale (corrente, tensione)

$$a_n^* = a_{-n}$$

Consideriamo la componente a freq. ω_n $n>0$

$$x_n(t) = a_n \exp(j\omega_n t) + a_{-n}\exp(-j\omega_n t)$$

$$0 = \overline{x_n} = \overline{a_n}\exp(j\omega_n t) + \overline{a_n^*}\exp(-j\omega_n t) \to \overline{a_n} = 0$$

$$\overline{a_n^*} = 0$$

a_n numeri complessi con fase

$$\overline{x_n^2} = \underbrace{\overline{a_n^2}}_{0}\exp(2j\omega_n t) + \underbrace{\overline{a_n^{*2}}}_{0}\exp(-2j\omega_n t) + \overline{2a_n a_n^*}$$

indipendente da t

$$\overline{x_n^2} = 2|a_n|^2$$

3. Densità spettrale

nell'intervallo di frequenze tra $n \to n+1$ $\Delta f = \frac{1}{T}$

definiamo la densità spettrale

$$S_x(f_n) = \frac{\overline{x_n^2}}{\Delta f} = T\,\overline{x_n^2} = 2T\,\overline{|a_n|^2} \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{T}$$

Si dimostra che $S_x(f) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)\,x(t+\tau)}\, \exp(j\omega\tau)\,d\tau$

$$S_x(f) = 4\int_0^{+\infty} \phi(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \qquad \omega = 2\pi f$$

└ funzione di autocorrelazione

$$\phi(\tau) = \int_0^{+\infty} S_x(f)\cos\omega\tau\, df$$

Se x = tensione

$$S_v(f) \sim \frac{V^2}{Hz} \quad \text{spesso quotata} \quad \frac{V}{\sqrt{Hz}}$$

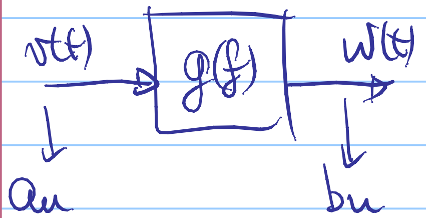
Se $S_v(f) = cost(f)$ → rumore bianco → $\phi(\tau) = A\delta(\tau)$

Potenza per unità di freq. in una resist. da 1Ω.

Potenza totale (divergente per rumore bianco)

$$P = \int_0^\infty S_v(f)\,df = \phi(0) = \overline{v^2}$$

Es. Effetto di un amplificatore



$$b_n = g(f_n)\, a_n$$

$$S_w(f) = 2T|b_n|^2 = 2T|g(f)|^2|a_n|^2 = S_v(f)|g(f)|^2$$

$$\overline{w^2} = \int_0^\infty S_w(f)\,df = \int_0^\infty S_v(f)|g(f)|^2 df = \boxed{S_v(f_0)} \cdot g_0^2 \boxed{\frac{1}{g_0^2}\int_0^\infty g(f)\,df}$$

Se amplificatore a banda stretta oppure rumore bianco

guadagno a metà banda

B_N = banda equiv. di rumore

Misuro $\overline{w^2}$ → $S_v = \dfrac{\overline{w^2}}{g_0^2 B_N}$

5. Sorgenti di rumore

- Rumore termico (Johnson)
- Rumore shot
- Rumore $1/f$
- Induzioni etc (non random)

Johnson - termico

Ai capi di una resistenza dovuto dell'agitazione termica dei portatori
Dipende dalla temperatura

$$S_V(f) = 4KTR$$

bianco

$$S_i(f) = \frac{4KT}{R}$$

Esempio, a temp ambiente $KT = 25\,meV$
In una resistenza da $1\,\Omega$

$$S_V(f) = 4 \times 25 \times 10^{-3} \times 1.6 \times 10^{-19} \, \frac{V^2}{Hz}$$

$$= 1.6 \times 10^{-20} \, \frac{V^2}{Hz}$$

Se $R = 1M\Omega$ $\Delta f = 10MHz$

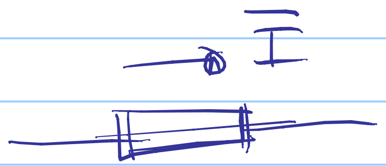
$$\overline{v^2} = 1.6 \times 10^{-20} \times 10^6 \times 10^7 \, V^2 = 1.6 \times 10^{-7} \, V^2 = 16 \times 10^{-8} \, V^2$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = 4 \times 10^{-4} \, V = 0.4 \, mV.$$

Shot noise

Dovuto alle fluttuazioni (poissoniane) nel numero di portatori di carica

Osservato ad esempio nella corrente nei tubi a vuoto, ma anche in diodi, FET, BJT, resistenze



$$\overline{i^2} = \overline{(I-\bar{I})^2}$$

In un tempo T arrivano N cariche $N = \frac{I}{e}T$

Poissoniana $\sigma = N$

$$I = \frac{eN}{T} \qquad \overline{i^2} = \overline{(I-\bar{I})^2} = \frac{e^2}{T^2}\bar{N} = \frac{\bar{I}e}{T} = \bar{I}e\Delta f$$

$$S_i(f) = 2\bar{I}e \qquad (A^2/Hz)$$

Poiché dipende dalle fluttuazioni può essere ridotto se ci sono dei meccanismi fisici che riducono le fluttuazioni (non poissoniana)

Ad esempio, resistenza percorsa da corrente I

$$\overline{i^2} = 2Ie\Delta f \qquad \overline{v^2} = \frac{2Ie}{R^2}\Delta f$$

$R = 1\ \Omega \quad I = 1\ A \quad \Delta f = 10\ MHz$

$$\overline{v^2} = 2\times 1.6\times 10^{-19}\times 10^{7}\ V^2 = 3.2\times 10^{-12}\ V^2$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = 1.7\times 10^{-6}\ V$$

Rumore 1/f (flicker)

Dovuto ad imperfezioni nelle giunzioni e negli ossidi (non capito)

$$S_v(f) = \frac{A_f}{f^\alpha} \qquad \alpha = 0.8 \div 1.5$$

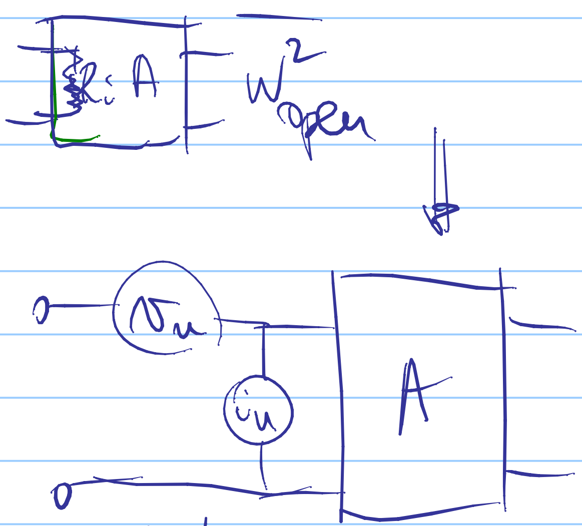
Somma di rumori

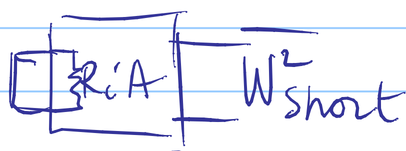
Text

Vanno sommati in quadratura (S_v o S_i)

$$S_v(f) = 4KTR + 2Ie + \frac{A_f}{f^\alpha}$$

Rumore di un amplificatore





$$v_u = \frac{\sqrt{\overline{W^2_{short}}}}{A}$$

$$i_u = \frac{\sqrt{\overline{W^2_{open}}}}{R_i\ A}$$

Rumori riferiti all'ingresso da sommare in quadratura al rumore della sorgente

Spettro tipico