

Práctica No. 3

Mat 136 - Álgebra Lineal

Espacios Vectoriales

1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

- ❶ El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en \mathbb{R}^2 con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.
- ❷ El conjunto de matrices invertibles 5×5 forma un espacio vectorial con la adición y multiplicación por un escalar usuales para matrices.
- ❸ El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ es un espacio vectorial con las operaciones usuales para matrices.
- ❹ El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en \mathbb{R}^3 con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

2. Se da un conjunto de objetos, junto con operaciones de adición y multiplicación por un escalar. Determinar cuáles conjuntos son espacios vectoriales bajo las operaciones dadas. Para aquellos que no sean espacios vectoriales, enumerar los axiomas que no se cumplen.

- ❶ El conjunto de todas las ternas de números reales (x, y, z) con las operaciones: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ y $k(x, y, z) = (kx, y, z)$
- ❷ El conjunto de todas las ternas de números reales (x, y, z) con las operaciones: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ y $k(x, y, z) = (0, 0, 0)$

- ❸ El conjunto de todas las parejas de números reales (x, y) con las operaciones: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ y $k(x, y) = (2kx, 2ky)$

- ❹ El conjunto de todos los números reales x con las operaciones estándar de adición y multiplicación.

- ❺ El conjunto de todas las parejas de números reales de la forma $(x, 0)$ con las operaciones estándar sobre \mathbb{R}^2

- ❻ El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

con la adición y multiplicación escalar de matrices.

- ❼ El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

con la adición y multiplicación escalar de matrices.

- ❽ El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{pmatrix}$$

con la adición y multiplicación escalar de matrices.

3. Determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. De no ser así proporcione una lista de los axiomas que no se cumplen.

-
- ❶ El conjunto de las matrices diagonales $n \times n$ con las operaciones usuales de matrices.
- ❷ El conjunto de las matrices diagonales $n \times n$ bajo la multiplicación. (es decir $A \oplus B = AB$)
- ❸ El conjunto de vectores en \mathbb{R}^3 de la forma (x, x, x)
- ❹ El conjunto de todas las matrices simétricas $n \times n$ con las operaciones usuales.
- ❺ El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.
- ❻ El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 positivo.
- ❼ \mathbb{R}^2 con la suma definida por:
- $$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$$
- y la multiplicación por un escalar ordinaria.
- ❽ El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.
4. Demuestre que en un espacio vectorial el neutro aditivo es único.
5. Demuestre que en un espacio vectorial todo vector tiene un inverso aditivo único.
6. Si x y y son vectores en un espacio vectorial V , demuestre que existe un vector único $z \in V$ tal que $x + z = y$
7. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones $x + y = xy$ y $cx = x^c$
- ### 1. Subespacios
8. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de \mathbb{R}^3
- ❶ Todos los vectores de la forma $(a, 1, 1)$
- ❷ Todos los vectores de la forma (a, b, c) , donde $b = a + c$
- ❸ Todos los vectores de la forma (a, b, c) , donde $b = a + c + 1$
9. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de M_{22}
- ❶ Todas las matrices
- $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
- donde $a + b + c + d = 0$
- ❷ Todas las matrices A , 2×2 tales que $\det(A) = 0$
10. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de P_3
- ❶ Todos los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que $a_0 = 0$
- ❷ Todos los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para los que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$
11. Determine cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de M_{nn}
- ❶ Las matrices A , $n \times n$ tales que $\text{tr}(A) = 0$.
- ❷ Las matrices A , $n \times n$ tales que $A^t = A$.
- ❸ Las matrices A , $n \times n$ tales que el sistema lineal $Ax = 0$ solo tiene la solución trivial.
12. Determine si el subconjunto H del espacio vectorial V es un subespacio de V .
- ❶ $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$
- ❷ $V = M_{mn}$;
 $H = \{D \in M_{mn} / D \text{ es diagonal}\}$
- ❸ $V = M_{mn}$;
 $H = \{T \in M_{mn} / T \text{ es triangular superior}\}$
- ❹ $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22} / A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \right\}$
-

$$\textcircled{5} \quad V = C[a, b]; \\ H = \{f \in C[a, b] / \int_a^b f(x)dx = 1\}$$

13. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V . Sea $H_1 + H_2 = \{v / v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in H_1 \text{ y } v_2 \in H_2\}$. Demuestre que $H_1 + H_2$ es un subespacio de V .

2. Combinación Lineal y Espacio Generado

14. Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

- ① En \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$
 ② En \mathbb{R}^2 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 ③ En \mathbb{R}^3 : $(1, -1, 2), (1, 1, 2), (0, 0, 1)$

15. Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

- ① En M_{22} :
 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$
 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
 ② En P_2 : $1 - x, 3 - x^2$
 ③ En P_2 : $1 - x, 3 - x^2, x$

16. Encontrar la ecuación del plano generado por los vectores $u = (-1, 1, 1)$ y $v = (3, 4, 4)$
17. Sean $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en \mathbb{R}^3 . Demuestre que si $v_2 = cv_1$, entonces $\{v_1, v_2\}$ es una recta que pasa por el origen.
18. En el problema anterior suponga que v_1 y v_2 no son paralelos. Demuestre que $H = \text{gen}\{v_1, v_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [Sugerencia: Si $(x, y, z) \in H$, escriba $v = a_1v_1 + a_2v_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y

z tal que el sistema de 3×2 resultante tenga una solución.]

19. Demuestre que M_{22} se puede generar con matrices invertibles.

3. Dependencia e Independencia Lineal

20. Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente independiente o dependiente.

- ① $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$
 ② $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 ③ En P_2 : $1 - x, 1 + x, x^2$
 ④ En M_{22} : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$
 ⑤ En $C[0, 1]$: $\sin x, \cos x$

21. Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en \mathbb{R}^3 son linealmente dependientes?

- (a) $(4, -1, 2); (-4, 10, 2)$
 (b) $(-2, 0, 1); (3, 2, 5); (6, -1, 1); (7, 0, -2)$

22. Para que valores reales λ los siguientes vectores forman un conjunto linealmente dependiente en \mathbb{R}^3 ?

$$v_1 = (\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \quad v_2 = (-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}), \\ v_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

23. Demostrar que todo conjunto con más de tres vectores en P_2 es linealmente dependiente.

24. Demostrar: Para vectores cualesquiera u, v y w , los vectores $u - v, v - w$ y $w - u$ forman un conjunto linealmente dependiente.

25. demostrar que si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, entonces también todo subconjunto no vacío de S es linealmente independiente.

26. Demuestre que dos polinomios no pueden generar a P_2 .
27. Demuestre que cualesquiera $n + 2$ polinomios en P_n son linealmente dependientes.

4. Bases y Dimensión

28. Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

❶ En P_2 : $1 - x^2, x$

❷ En P_3 : $3, x^3 - 4x + 6, x^2$

❸ en M_{22} :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

❹ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}; (1, -1), (-3, 3)$

29. Encuentre una base en \mathbb{R}^3 para el conjunto de vectores en el plano $2x - y - z = 0$

30. En \mathbb{R}^4 ; $a, b, c, d \neq 0$.

Sea $H = \{(x, y, z, w) / ax + by + cz + dw = 0\}$

(a) Demuestre que H es un subespacio de \mathbb{R}^4 .

(b) Encuentre una base para H .

(c) ¿Cuánto vale $\dim H$?

31. Halle una base para el espacio solución del sistema homogéneo dado.

(a) $x - y - z = 0$

$2x - y + z = 0$

$2x + 3y - 4z = 0$

(b) $x - y + z = 0$

$2x + 8y - 10z = 0$

32. Encuentre una base para D_3 , el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3 . ¿Cuál es la dimensión de D_3 ?

33. Sea S_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que S_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que $\dim S_{nn} = [n(n + 1)]/2$

34. Sean H y K dos subespacios de V .

Defina $H + K = \{h + k / h \in H \text{ y } k \in K\}$

(a) Demuestre que $H + K$ es un subespacio de V .

(b) Si $H \cap K = \{0\}$, demuestre que $\dim(H + K) = \dim H + \dim K$.

5. Cambio de Base

35. Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

❶ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

❷ $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

36. Escriba los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2$ en P_2 en términos de la base dada.

❶ $1, x - 1, x^2 - 1$

❷ $1, x + 1, (x + 1)(x + 2)$

37. En M_{22} escriba la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ en términos de la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

38. En \mathbb{R}^2 suponga que $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \text{ Escriba } x \text{ en términos de la base } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

39. En P_2 , $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donde

$$B_1 = \{1 - x, 3x, x^2 - x - 1\}. \text{ Escriba } x \text{ en términos de la base } B_2 = \{3 - 2x, 1 + x, x + x^2\}$$

6. Bases Ortonormales

40. Construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

❶ En \mathbb{R}^2 , comenzando con los vectores básicos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

❷ En \mathbb{R}^2 , comenzando con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$.

❸ $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\}$

❹ $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}$

41. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det(Q) = \pm 1$

42. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$

43. Demuestre que para cualquier número real t , la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

44. Encuentre una condición sobre los números a y b tales que

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \right\}, \text{ y } \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\}$$

forman una base ortonormal en \mathbb{R}^2

45. Usando la desigualdad de Cauchy - Schwarz, pruebe que si $|u + v| = |u| + |v|$, entonces u y v son linealmente dependientes.

7. Espacios con Producto Interno

46. Sea D_n el conjunto de las matrices diagonales de $n \times n$ con componentes reales bajo las operaciones usuales de matrices. Si A y B están

en D_n , defina

$$(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{nn}b_{nn}$$

Pruebe que D_n es un espacio con producto interno.

47. Si $A \in D_n$, demuestre que $\|A\| = 1$ si y solo si $a_{11}^2 + a_{22}^2 + \dots + a_{nn}^2 = 1$

48. Encuentre una base ortonormal para D_2 comenzando con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

49. sean a, b y c tres números reales distintos. Sean p y q en P_2 y defina

$$(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$$

(a) Demuestre que (p, q) es un producto interno en P_2

(b) ¿Es $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ un producto interno?

50. En \mathbb{R}^2 , si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, sea $(x, y)_* = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Demuestre que (x, y) es un producto interno en \mathbb{R}^2 .

8. Fermat

El príncipe de los Aficionados

El más grande matemático del siglo XVII fue el contemporáneo de Descartes, Fermat (1601 – 1665). Puede afirmarse que Fermat fue al menos igual a Newton como matemático puro, pero, de todos modos, casi un tercio de la vida de Newton corresponde al siglo XVIII, mientras que toda la vida de Fermat se desarrolló en el siglo XVII. Newton parece haber considerado su Matemática como un instrumento para la exploración científica, y puso su mayor esfuerzo en esta última. Fermat, en cambio, era

más atraído por la Matemática pura, aunque también hizo notables trabajos en las aplicaciones de la Matemática a la ciencia, particularmente a la óptica. La Matemática entró en su fase moderna con la publicación de Descartes de la Geometría analítica en 1637 y fue aún durante muchos años de tan modesto desarrollo que un hombre de talento podía esperar hacer grandes cosas tanto en la forma pura como en la forma aplicada. Como matemático puro, Newton alcanzó su culminación con la invención del Cálculo infinitesimal, que también se debe, independientemente, a Leibniz. Fermat concibió y aplicó la idea directriz del Cálculo diferencial trece años antes de que naciera Newton y diecisiete años antes de que naciera Leibniz, aunque no llegó a reducir, como hizo Leibniz, su método a una serie de reglas comunes, que hasta un bobo puede aplicar a fáciles problemas. Del mismo modo, Descartes y Fermat inventaron la Geometría analítica independientemente uno de otro. La mayor parte del esfuerzo de Descartes corresponde a la investigación científica del Los Grandes Matemáticos E. T. Bell Preparado por Patricio Barros tipo más variado, a la elaboración de su filosofía y a su disparatada "teoría de los torbellinos" del sistema solar, que aun en Inglaterra fue durante largo tiempo una seria rival de la más bella, más sencilla y no metafísica teoría newtoniana de la gravitación universal. Parece que Fermat jamás fue tentado, como Descartes y Pascal, a filosofar, por una engañosa seducción acerca de Dios, del hombre y del Universo como un todo; así, después de haber realizado su labor en el Cálculo y la Geometría analítica y de haber vivido una vida serena, de arduo trabajo, con el que ganó lo necesario para su vida, tuvo tiempo para dedicar el resto de sus energías a su distracción favorita, la Matemática pura, y cumplir su más grande obra, la fundación de la teoría de números, sobre la cual reposa indiscutido y única su inmortalidad. Recordaremos también que Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad. Si todas estas adquisiciones de primera categoría no son suficiente para ponerle a la cabeza de sus contemporáneos en la Matemática pura, po-

demos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador ingénitamente. Era también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "Sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte. Los hechos esenciales de su pacífica carrera pueden ser rápidamente referidos. Hijo del comerciante en pieles Dominique Fermat, segundo cónsul de Beaumont, y Claire de Long, hija de una familia de juristas parlamentarios, el matemático Pierre Fermat nació en Beaumont de Lomagne, Francia, en el mes de agosto de 1601 (la fecha exacta es desconocida, el día del bautismo fue el 20 de agosto). Su primera educación la recibió en el hogar, en su ciudad nativa; sus estudios posteriores para la preparación a la magistratura fueron continuados en Toulouse. Como Fermat vivió tranquilo y reposadamente, evitando las disputas sin provecho, y como no tuvo una cariñosa hermana como Gilberte, la hermana de Pascal, que recordara sus prodigios de adolescente para la posteridad, poco es lo que se sabe de sus años de estudio. Deben haber sido brillantes, pues los descubrimientos de su madurez dan prueba de ello. Ningún hombre sin un sólido fundamento en sus estudios previos pudo haber sido el conocedor de los clásicos y el notable literato que Fermat fue. Su maravillosa obra en la teoría de números y en la Matemática en general no puede ser referida a la Instrucción que recibió, pues los campos donde hizo su máximo descubrimiento no estaban abiertos cuando era estudiante. Los únicos acontecimientos dignos de mención en su vida privada son su instalación en Toulouse, a la edad de 30 años (14 de mayo de 1631, como magistrado); su matrimonio el 1º de junio del mismo año, con Louise de Long, prima de su madre, que le dio tres hijos, uno de ellos, Clément Samuel, que llegó a ser el albacea científico de su padre, y dos hermanas que fueron monjas; su ascenso en 1648 a la Conserjería Real en el Parlamento local de Toulouse, cargo que desempeñó con dignidad y gran talento durante 17 años; toda la obra de su vida, durante

34 años, dedicada al fiel servicio del Estado, y, finalmente, su muerte en Castres, el 12 de enero de 1665, a los 65 años. ¿ Historia ? Fermat podía haber dicho: **Os bendigo señor, no tengo ninguna** . Y con esta tranquila, honesta y escrupulosa vida, a este hombre corresponde una de las más preclaras historias en la historia de la Matemática. Su historia es su obra, su recreo más bien, dado el gran amor que tuvo por ella, y lo mejor es su simplicidad, que permite a cualquier escolar de una inteligencia normal comprender su naturaleza y apreciar su belleza. La obra de este príncipe de los aficionados matemáticos ha ejercido una irresistible atracción para los aficionados a la Matemática en todos los países civilizados, durante los últimos tres siglos. Esta obra, la teoría de números, como se llama, es probablemente un campo de la Matemática donde cualquier aficionado de talento puede aún esperar el hallazgo de

algo interesante. Sus conocimientos de las principales lenguas europeas y de la literatura de la Europa continental eran muy grandes y completos, y la filología griega y latina le son deudoras de diversas e importantes correcciones. En la composición de versos latinos, franceses y españoles, una de las tareas galantes de su época, mostró gran habilidad y fino gusto. Podemos comprender su vida tranquila pensando que se trataba de un hombre afable sin crítica aguda ni violenta (como Newton en sus últimos días) y sin orgullo aunque con cierta vanidad. A diferencia de otros empleados públicos, los consejeros parlamentarios debían mantenerse apartados de sus conciudadanos y abstenerse de actividades sociales innecesarias que podían dar lugar a corrupciones y soborno en las actividades de su oficio. Así Fermat dispuso de gran cantidad de horas para dedicarse a sus trabajos.