Tarea - 02: Funciones analíticas

Problem 1

Find $(-8-8\sqrt{3}i)^{1/4}$, express the roots in rectangular coordinates, and exhibit them as the vertices of a certain square.

Solución

El número complejo z esta dado por

$$z = (-8-8\sqrt{3}i)$$

Donde $\Re = -8$ y $\Im = -8\sqrt{3}$. Expresando entonces en su forma polar, se debe calcular la norma

$$|z|^2 = zz^* = (-8-8\sqrt{3}i)(-8+8\sqrt{3}i)$$
$$|z|^2 = (-8)^2 - (8\sqrt{3}i)^2$$
$$|z|^2 = 64 + (64(3)) = 4(64)$$
$$|z| = 8\sqrt{4} = 16$$

y su argumento

$$\theta = \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right)$$
$$\theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Por tanto, expresando el número complejo en forma polar.

$$z = 16e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$z^{\frac{1}{4}} = \left(16e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

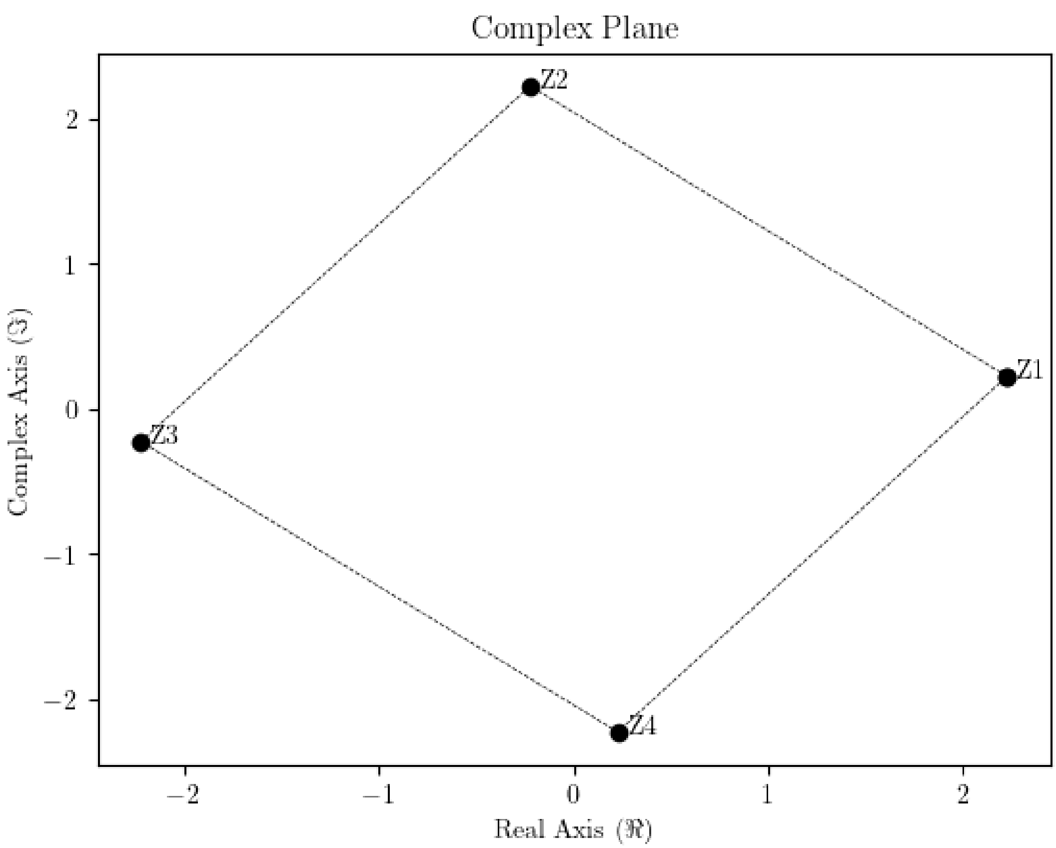
Implementando el teorema de De Moivre

$$r^n e^{in\theta} = r^n\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$z^{\frac{1}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}\frac{1}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi/3+2n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/3+2n\pi}{4}\right)\right]$$

Entonces las raíces del número complejo serán:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$$
$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = 2\left[\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$$
$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$$
$$z_4 = 2\left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$$

Y entonces se demuestra que son los vertices de un cuadrado en el plano complejo



Problem 2

In each case, write the function $f(z)$ in the form $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$:

(i). $f(z) = z^3 + z + 1$

(ii). $f(z) = \frac{z^*}{z}$

Solución

(i). $f(z) = z^3 + z + 1$

Teniendo en cuenta que $z = x + iy$ entonces

$$f(z) = (x + iy)^3 + (x + iy) + 1$$
$$f(z) = (x + iy)(x^2 + 2ixy + i^2y^2) + (x + iy) + 1$$
$$f(z) = (x^3 + 2ix^2y + i^2y^2x) + (iyx^2 + 2i^2xy^2 + y^3i^3) + (x + iy) + 1$$
$$f(z) = x^3 + 2ix^2y - y^2x + iyx^2 - 2xy^2 - y^3i + x + iy + 1$$

Finalmente agrupando los valores reales e imaginarios

$$f(z) = (x^3 - y^2x - 2xy^2 + x + 1) + (2x^2y + yx^2 - y^3 + y)i$$
$$f(z) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + (y + 3x^2y - y^3)i$$

Entonces se tiene que

$$u(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) \tag{1}$$
$$v(x, y) = (y + 3x^2y - y^3) \tag{2}$$

(ii). $f(z) = \frac{z^*}{z}$

Expresando en términos de x, y entonces

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{(x-iy)}{(x+iy)} \\
f(z) &= \frac{x}{(x+iy)} - \frac{iy}{(x+iy)} \\
f(z) &= \frac{x}{(x+iy)}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} - \frac{iy}{(x+iy)}\frac{(x-iy)}{(x-iy)} \\
f(z) &= \frac{x(x-iy)}{(x^2+y^2)} - \frac{iy(x-iy)}{(x^2+y^2)} \\
f(z) &= \frac{x^2-iyx}{(x^2+y^2)} - \frac{iyx+y^2}{(x^2+y^2)} \\
f(z) &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} - i\frac{2xy}{(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\boxed{
\begin{aligned}
u(x,y) &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)} \qquad (3) \\
v(x,y) &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)} \qquad (4)
\end{aligned}
}
$$

Problem 3

Suppose that $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, where $z = x + iy$. Write $f(z)$ in terms of z and simplify the result.

Recordando que la parte real de un número complejo puede ser expresada como

$$\Re = \frac{z + z^*}{2}$$

y la parte imaginaria

$$\Im = \frac{z - z^*}{2i}$$

Ahora, definiendo z como $z = x + iy$ entonces

$$x = \frac{z + z^*}{2} \qquad y = \frac{z - z^*}{2i}$$

Remplazando en $f(x)$

$$f(x) = \left(\frac{z + z^*}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - z^*}{2i}\right)^2 - 2(\frac{z - z^*}{2i}) + i\left(2\frac{z + z^*}{2} - 2\frac{z + z^*}{2}\frac{z - z^*}{2i}\right)$$

Expandiendo los productos notables y simplificando términos

$$f(x) = \left(\frac{z^2 + 2zz^* + (z^*)^2}{4}\right) + \left(\frac{z^2 - 2zz^* + (z^2)^*}{4}\right) - \left(\frac{z - z^*}{i}\right) + i\left(z + z^* + i\left(\frac{z^2 - (z^2)^*}{2}\right)\right)$$

Mediante racionalización se obtiene que $1/i = -i$

$$f(x) = \left(\frac{z^2 + (z^2)^*}{2}\right) + iz - iz^* + iz + iz^* - \left(\frac{z^2 - (z^2)^*}{2}\right)$$

Finalmente, eliminando términos semejantes se obtiene la expresión solo en términos de z

$$\boxed{f(x) = (z^2)^* + 2iz \qquad (5)}$$

Problem 4

Write the function

$$f(z) = z + \frac{1}{z}$$

in the form $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$

En la forma polar $z = re^{i\theta}$. Remplazando esto en $f(z)$

$$f(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}}$$
$$f(z) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Escribiendo los exponenciales en términos de funciones periódicas

$$f(z) = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Usando propiedad distributiva de la multiplicación

$$f(z) = r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - i\frac{1}{r}\sin\theta$$

Finalmente agrupando los valores rales e imaginarios

$$\boxed{f(z) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \qquad (6)}$$

Problem 5

Given $w = f(z) = u + iv$, suppose that the first-order partial derivatives of u and v with respect to x and y exist everywhere in some neighborhood of a given nonzero point z_0 and are continuous at z_0. Show that:

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r} \qquad u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$$

Solución

En primer lugar, se supone a $f(z)$ como uan función analítica, es decir, las condiciones de Cauchy-Riemann se cumplirán en su forma cartesiana.

La función compleja $f(z)$ tiene tanto su representación cartesiana como polar. Para ultima, se define u y v en función de las variables θ y r de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Esto permite expresar la función f como

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

Derivando parcialmente u respecto a r.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ u_r &= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \end{aligned}$$

De forma análoga para θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ u_\theta &= -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta \end{aligned}$$

Tomando estas dos expresiones se forma un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (Solucionando para u_x y u_y).

$$\begin{cases} u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \\ u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta \end{cases}$$

Para la primera ecuación se despeja u_x y se remplaza en la segunda ecuación

$$u_x = \frac{u_r}{\cos\theta} - \frac{u_y \sin\theta}{\cos\theta}$$
$$u_\theta = -\left(\frac{u_r}{\cos\theta} - \frac{u_y \sin\theta}{\cos\theta}\right) r\sin\theta + u_y r\cos\theta$$
$$u_\theta = -\frac{r u_r \sin\theta}{\cos\theta} + \frac{u_y r \sin^2\theta}{\cos\theta} + u_y r\cos\theta$$
$$u_\theta\cos\theta + r u_r \sin\theta = u_y r\sin^2\theta + u_y r\cos^2\theta$$
$$\frac{u_\theta\cos\theta}{r} + u_r\sin\theta = u_y(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

Entonces el valor de u_y será

$$\boxed{u_y = u_r\sin\theta + \frac{u_\theta\cos\theta}{r} \qquad (7)}$$

y remplazando en u_x

$$u_x = \frac{u_r}{\cos\theta} - \left(\frac{u_\theta\cos\theta}{r} + u_r\sin\theta\right)\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$u_x = \left(\frac{u_r}{\cos\theta} - \frac{u_r\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) - \frac{u_\theta\sin\theta}{r}$$
$$u_x = \frac{u_r(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta} - \frac{u_\theta\sin\theta}{r}$$
$$u_x = \frac{u_r(1-\sin^2\theta)}{\cos\theta} - \frac{u_\theta\sin\theta}{r}$$

Finalmente

$$\boxed{u_x = u_r\cos\theta - \frac{u_\theta\sin\theta}{r} \qquad (8)}$$

Problem 6

With the aid of the polar form of the Cauchy-Riemann equations, derive the alternative form:

$$f'(z_0) = -\frac{i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta)$$

Si realizamos el mismo proceso que el ejercicio anterior pero para v se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \\ v_\theta = -v_x r \sin\theta + v_y r \cos\theta \end{cases}$$

y las soluciones para este sistema de ecuaciones son análogas a u.

$$v_x = v_r \cos\theta - \frac{v_\theta \sin\theta}{r}$$
$$v_y = v_r \sin\theta + \frac{v_\theta \cos\theta}{r}$$

Remplazando estos valores en la definición de una derivada compleja.

$$\frac{df}{dz} = u_r \cos\theta - \frac{u_\theta \sin\theta}{r} + i\left(v_r \cos\theta - \frac{v_\theta \sin\theta}{r}\right)$$

Para que esta función sera derivable se tienen que cumplir las ecuaciones de Cauchy Riemann en su forma polar, esto nos permite expresar $ru_r = v_\theta$ y $-rv_r = u_\theta$. Remplazando

$$\frac{df}{dz} = u_r \cos\theta - \frac{(-rv_r)\sin\theta}{r} + i\left(v_r \cos\theta - \frac{ru_r \sin\theta}{r}\right)$$
$$\frac{df}{dz} = u_r \cos\theta + v_r \sin\theta + i\left(v_r \cos\theta - u_r \sin\theta\right)$$
$$\frac{df}{dz} = (u_r + iv_r)\cos\theta - i(u_r + iv_r)\sin\theta$$
$$\frac{df}{dz} = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$$

Este es la ecuación para la derivada de una función compleja en función de las derivadas sobre r. Ahora si aplicamos nuevamente las condiciones de Cauchy-Riemann se obtiene

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{e^{i\theta}}\left(\frac{v_\theta}{r} - i\frac{u_\theta}{r}\right) = -\frac{i}{re^{i\theta}}\left(u_\theta + iv_\theta\right) \tag{9}$$