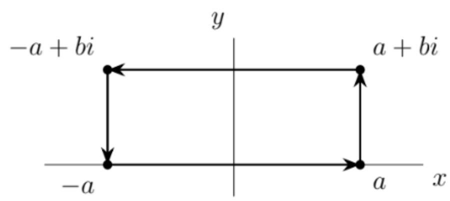
Tarea - 05: Integral de Cauchy.

Problem 1

Use the following method to derive the integration formula:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}e^{-b^2} \quad (b > 0) \tag{1}$$

(i). Show that the sum of the integrals of e^{-z^2} along the lower and upper horizontal legs of the rectangular path in the figure:



can be written as:

$$2\int_0^a e^{-x^2}dx - 2e^{b^2}\int_0^a e^{-x^2}\cos(2bx)dx \tag{2}$$

and that the sum of the integrals along the vertical legs on the right and left can be written as:

$$ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2 - i2ay}dy - ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2+i2ay}dy \tag{3}$$

Thus, with the aid of the Cauchy-Goursat theorem, show that:

$$\int_0^a e^{-x^2}\cos(2bx)dx = e^{-b^2}\int_0^a e^{-x^2}dx + e^{-(a+b^2)}\int_0^a e^{y^2}\sin(2ay)dy \tag{4}$$

(ii). By accepting the fact that:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{5}$$

and observing that:

$$\left|\int_0^a e^{y^2}\sin(2ay)dy\right| \le \int_0^a e^{y^2}dy \tag{6}$$

obtain the desired integration formula by letting a tend to infinity in the equation at the end of part (a).

Solución

El teorema de Cauchy-Goursat nos indica que la integral sobre la función f que es analítica para todos los puntos contenidos en C, será cero. Esto hace necesario comprobar que la función $f(z) = e^{-z^2}$ es analítica en este contorno, debido a que esta función no tiene ninguna singularidad dentro de C entonces se dice que es analítica en C.

$$\oint e^{z^2} dz = 0 \tag{7}$$

la parametrización indicada para esta función implica que para los caminos horizontales $z_1 = x + i0 \quad dz_1 = dx$ y $z_2 = x + ib \quad dz_2 = dx$, entonces, para estos caminos la integral será:

$$C_1 + C_2 = \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx + \int_{a}^{-a} e^{-(x+ib)^2} dx = 2\int_0^a e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} e^{-i2xb} dx$$

usando el teorema de De Moivre, para expresar exponenciales con potencias imaginarias en términos de senos y cosenos se obtiene.

$$C_1 + C_2 = 2\int_0^a e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \left(\cos(2xb) - i\sin(2xb)\right) dx$$

como la función seno tiene simetría impar, entonces en el intervalo de $(-a, a)$ su integral será cero.

$$C_1 + C_2 = 2\int_0^a e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2xb) dx \tag{8}$$

Ahora, para los caminos con orientación vertical, las parametrizaciones nos indican que $z_3 = a + iy, \quad dz_3 = idy$ y $z_4 = -a + iy \quad dz_4 = idy$, remplazando.

$$C_3 + C_4 = \int_0^b e^{-(a+iy)^2} idy + \int_b^0 e^{-(-a+iy)^2} idy = e^{-a^2} \int_0^b e^{y^2 - i2ay} idy - e^{-a^2} \int_0^b e^{y^2 + i2ay} idy \tag{9}$$

El teorema de Cauchy-Goursat nos dice que la suma de estas cuatro integrales debe ser cero

$$2\int_0^a e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2xb) dx + ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2 - i2ay} dy - ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2 + i2ay} dy = 0$$
$$2\int_0^a e^{-x^2} dx + ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} e^{-i2ay} dy = 2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2xb) dx + ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} e^{i2ay} dy$$

Expresando los términos exponenciales con potencias imaginarias en términos de funciones trigonométricas, sumando y cancelando términos semejantes se obtiene:

$$2e^{b^2} \int_0^a e^{-x^2} \cos(2xb) dx = 2\int_0^a e^{-x^2} dx + 2e^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} \sin(2ay) dy$$
$$\int_0^a e^{-x^2} \cos(2xb) dx = e^{-b^2} \int_0^a e^{-x^2} dx + e^{-(a^2+b^2)} \int_0^b e^{y^2} \sin(2ay) dy$$

cuando $a \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xb)dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx + \lim_{a\to\infty} e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\sin(2ay)dy$$

analizando el segundo término del lado derecho la expresión

$$\lim_{a\to\infty} e^{-(a^2+b^2)}\int_0^b e^{y^2}\sin(2ay)dy = \cancelto{0}{\lim_{a\to\infty} e^{-(a^2+b^2)}}\left(\lim_{a\to\infty}\int_0^b e^{y^2}\sin(2ay)dy\right) = 0$$

la integral del término del lado derecho esta dada por (5), esto implica

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xb)dx = e^{-b^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \tag{10}$$

Problem 2

Let C be the circle $|z| = 3$, described in the positive sense. Show that if:

$$g(z) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z}ds \tag{11}$$

then $g(2) = 8\pi i$. What is the value of $g(z)$ when $|z| > 3$?

Solución

La Integral de Cauchy nos dice que para una función f analítica en y sobre todo contorno cerrado simple C se cumple

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)}{s - z}ds \tag{12}$$

siempre que z sea un punto contenido en C. Para este caso entonces $f(s) = 2s^2 - s - 2$, y cuando la función g es evaluada en 2, entonces el punto z está contenido dentro del circulo de C.

$$g(2) = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - 2}ds = 2\pi i f(2) \tag{13}$$

$$g(2) = 2\pi(2(2)^2 - 2 - 2) = 8\pi i \tag{14}$$

Cuando $z > 3$ la singularidad se encuentra fuera de C, esto implica que la función

$$h(z) = \frac{2s^2 - s - 2}{s - z}$$

será analítica para todos los puntos dentro de C, entonce, según el teorema de Cauchy - Goursat

$$\boxed{\int_C h(z)dz = \int_C \frac{2s^2 - s - 2}{s - z} = 0 \quad (z > 3) \qquad (15)}$$

Problem 3

Show that if f is analytic within and on a simple closed contour C and z_0 is not on C, then:

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \tag{16}$$

Solución

El teorema de Cauchy-Goursat indica que si una función f es analítica en todos los puntos contenidos en un contorno cerrado simple C, entonces la integral de f sobre el contorno C será cero. Sea $g(z)$ la función dada por

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}$$

donde f es una función analítica para cualquier valor dentro y en C, debido a que z_0 no está contenida en C, entonces $g(z)$ también será analítica dentro de C. Usando el teorema de Cauchy-Goursat

$$\int_C g(z) = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} = 0 \tag{17}$$

debido a que $f(z)$ es analítica para cualquier punto en y sobre C, entonces su derivada también será analítica. Extendiendo este argumento a la función $h(z)$

$$h(z) = \frac{f'(z)}{z - z_0}$$

debido a que z_0 no está en C entonces $h(z)$ será analítica para todo C, por tanto, su integral sobre el contorno C también será cero

$$\int_C h(z) = \int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} = 0 \tag{18}$$

debido que $g(z)$ y $h(z)$ son analíticas para cualquier valor dentro de C entonces se demuestra

$$\boxed{\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} = \int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} = 0 \qquad (19)}$$

Problem 4

Let C be the unit circle $z = e^{i\theta} \quad (-\pi \le \theta \le \pi)$. First show that for any real constant a,

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = 2\pi i \tag{20}$$

Then write this integral in terms of θ to derive the integration formula:

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(\sin(\theta)) d\theta = \pi \tag{21}$$

Solución

La integral dada en la ecuación (20) se puede expresar como

$$\int_C \frac{e^{az}}{z+0} dz$$

entonces dado un $z_0 = 0$ que esta contenido en el circulo unitario descrito por C, se cumplirá la integral de Cauchy.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z+z_0} dz$$

donde $f(z) = e^{az}$ y $z_0 = 0$, remplazando el valor de $f(z)$ y evaluando en el punto z_0 se obtiene

$$\boxed{2\pi i = \int_C \frac{ae^{az}}{z+0} dz} \tag{22}$$

Parametrizando la función con $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta), z' = ire^{i\theta} d\theta$ donde $r = 1$ y $(-\pi \le \theta \le \pi)$

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{a(\cos\theta - i\sin\theta)}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = i \int_{-\pi}^{+\pi} e^{a\cos\theta} e^{-i\sin\theta} d\theta$$

expresando el exponencial con potencia imaginaria en términos de funciones trigonométricas, e igualando con (22)

$$\int_C \frac{e^{az}}{z} dz = i \int_{-\pi}^{+\pi} e^{a\cos\theta} (\cos(\sin\theta) - i\sin(\sin\theta)) d\theta = 2\pi i$$

igualando la parte real e imaginaria se obtiene

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi \qquad \int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\sin(\sin\theta)d\theta = 0 \tag{23}$$

Problem 5

How do circles centered on the origin in the z-plane transform for

(i).

$$w_1(z) = z + \frac{1}{z}$$

(ii).

$$w_2(z) = z - \frac{1}{z}$$

What happens when $|z| \to 1$?

Solución

Expresando $z = x + iy$, donde $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$.

(i).

$$w_1(z) = x + iy + \frac{1}{x+iy} = x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

separando en su parte real, e imaginaria

$$w_1(z) = x\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right) + iy\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

remplazando los respectivos valores de x y y

$$w_1(z) = r\cos\theta\left(1 + \frac{1}{r}\right) + ir\sin\theta\left(1 - \frac{1}{r}\right) \tag{24}$$

ahora la función $w_1(z)$ debe tener la forma funcional $w_1(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$, igualando las partes linealmente independientes.

$$u(r,\theta) = r\cos\theta\left(1 + \frac{1}{r}\right) \qquad v(r,\theta) = r\sin\theta\left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

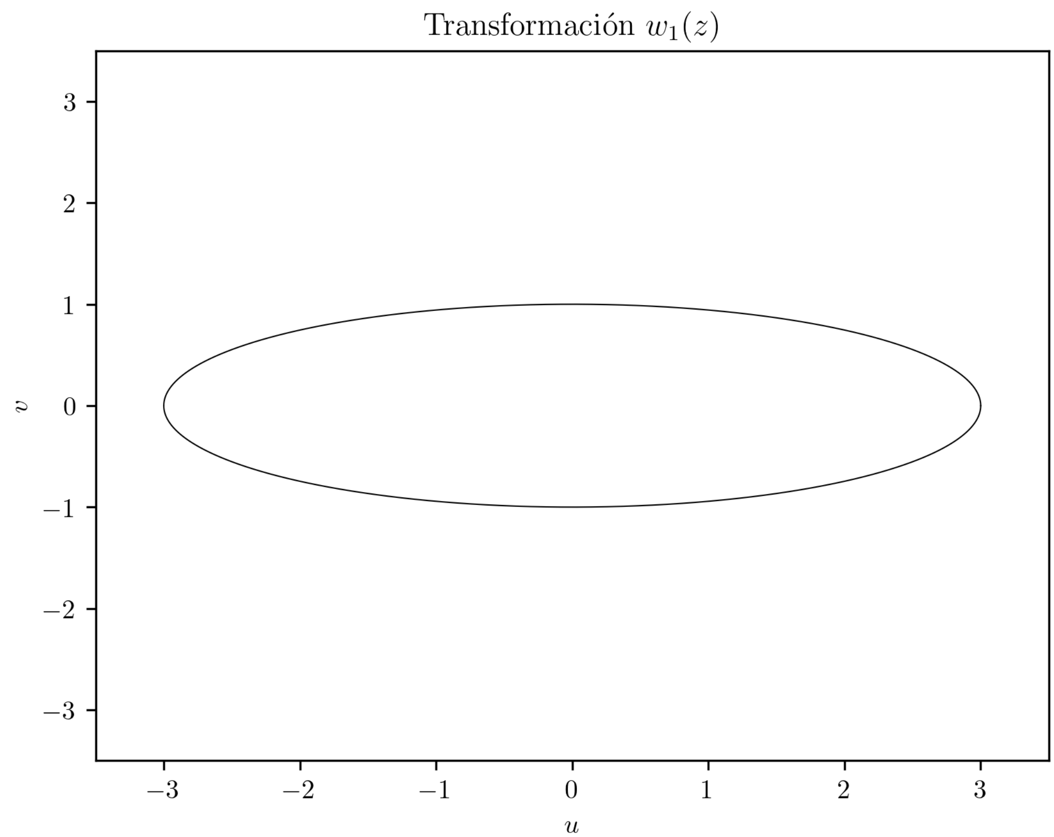
elevando cada término al cuadrado

$$u^2 = r^2\cos^2\theta\left(1 + \frac{1}{r}\right)^2 \qquad v(r,\theta) = r^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{1}{r}\right)^2$$

y recordando que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, se obtiene

$$\boxed{\frac{u^2}{r^2\left(1+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{r^2\left(1-\frac{1}{r}\right)^2}=1 \quad (r\neq 1)} \tag{25}$$

resulta se la ecuación de una elipse donde el semieje mayor está sobre u, realizando la gráfica.



(ii).

$$w_2(z)=x+iy-\frac{1}{x+iy}=x+iy-\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$
$$w_2(z)=x\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

remplazando los respectivos valores de x y y

$$w_1(z)=r\cos\theta\left(1-\frac{1}{r}\right)+ir\sin\theta\left(1+\frac{1}{r}\right) \tag{26}$$

igualando a la parte real e imaginaria de la forma funcional de $w_2(z)$

$$u(r,\theta)=r\cos\theta\left(1-\frac{1}{r}\right) \qquad v(r,\theta)=r\sin\theta\left(1+\frac{1}{r}\right)$$

parametrizando una función en términos de la otra se obtiene la trayectoria que traza $w_2(z)$ en el plano complejo.

$$\boxed{\frac{u^2}{r^2\left(1-\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{r^2\left(1+\frac{1}{r}\right)^2}=1 \quad (r\neq 1) \qquad (27)}$$

esta es la ecuación de una elipse, donde el semieje mayor esta en dirección de v