Tarea - 01: Funciones analíticas.

Problemas

1. Prove algebraically that for complex numbers.

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

2. Show that:

   (a)
$$\cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \sin^4 - \ldots$$

   (b)
$$\sin n\theta = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \theta \sin \theta - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \sin^3 + \ldots$$

   Note. The quantities $\binom{n}{m}$ are binomial coefficents: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

3. Prove that:

   (a)
$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos nx = \frac{\sin (Nx/2)}{\sin x/2} \cos (N-1)\frac{x}{2}$$

   (b)
$$\sum_{n=0}^{N-1} \sin nx = \frac{\sin (Nx/2)}{\sin x/2} \sin (N-1)\frac{x}{2}$$

   Note. Parts (a) and (b) may be combined to form a geometric series.

4. Assume that the trigonometric functions ($\sin z$ and $\cos z$) and the hyperbolic functions ($\sinh z$ and $\cosh z$) are defined for complex argument by the appropriate power series. Show that

   (a) $i \sin z = \sinh iz$
   (b) $\sin iz = i \sinh z$
   (c) $\cos z = \cosh iz$
   (d) $\cos iz = \cosh z$

Soluciones

1. Suponemos que los valores de z_1 y z_2 están dados por

$$z_1 = a + ib \wedge z_2 = c + id \tag{1}$$

Con $a, b, c, d > 0$. Mediante la definición de los números complejos establecemos entonces la norma de cada uno mediante su complejo conjugado. Entonces, para z_1 se obtiene:

$$\begin{aligned}
|z_1|^2 &= z_1 z_1^* \\
|z_1|^2 &= (a + ib)(a - ib) \\
|z_1|^2 &= a^2 - aib + iba - (ib)^2 \\
|z_1|^2 &= a^2 - (ib)^2 \\
|z_1|^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

de forma similar para z_2

$$\begin{aligned}
|z_2|^2 &= z_2 z_2^* \\
|z_1|^2 &= (c + id)(c - id) \\
|z_1|^2 &= c^2 + d^2
\end{aligned}$$

Por otro lado, podemos también calcular $|z_1 + z_2|$ de manera similar, pero realizando unas primeras consideraciones

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \\
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) \\
|z_1 + z_2|^2 &= z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\
|z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + z_2 z_1^*
\end{aligned}$$

Ahora si para las operaciones $z_1 z_2^*$ y $z_2 z_1^*$ remplazamos los valores correspondientes en Eq.1,

$$\begin{aligned}
z_1 z_2^* &= (a + ib)(c - id) \\
z_1 z_2^* &= ac - aid + ibc - i^2 bd \\
z_1 z_2^* &= ac - aid + ibc + bd
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z_2 z_1^* &= (c+id)(a-ib) \\ z_1 z_2^* &= ac - ibc + ida - i^2 bd \\ z_1 z_2^* &= ac - ibc + ida + bd \end{aligned}$$

Sumando ambos valores se obtiene

$$\begin{aligned} z_1 z_2^* + z_2 z_1^* &= ac - aid + ibc + bd + ac - ibc + ida + bd \\ z_1 z_2^* + z_2 z_1^* &= ac + bd + ac + bd \\ z_1 z_2^* + z_2 z_1^* &= 2(ac + bd) \\ z_1 z_2^* + z_2 z_1^* &= 2Re(z_1 z_2^*) \end{aligned}$$

Si remplazamos obtenemos que

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 z_2^*) \tag{2}$$

Ahora, por otro lado calculando el valor de $|z_1 z_2^*|$, el cual se puede expresar como $|z_1||z_2^*|$ que es igual a $|z_1||z_2|$, de aquí se puede deducir que

$$Re(z_1 z_2^*) \leq |z_1||z_2| \tag{3}$$

Ahora si de Eq.2 se despeja el valor de $Re(z_1 z_2^*)$ y se remplaza en Eq.3,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 &\leq 2|z_1||z_2| \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ |z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

y finalmente se demuestran los dos últimos términos del problema

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \tag{4}$$

Ahora, para terminar la demostración se escribe $|z_1|$ como $|(z_1 + z_2) - z_2|$ y aplicando la Eq.4 se obtiene,

$$|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |(-z_2)|$$
$$|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |-1||z_2|$$
$$|(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |(z_1 + z_2)| + |z_2|$$
$$|z_1| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$$

Por tanto,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \tag{5}$$

Por último usando Eq.4 y Eq.5 se demuestra finalmente

$$\boxed{|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

2. Partiendo de la Ecuación de De Moivre

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Realizando la expansión del exponente en términos del seno y coseno

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \tag{6}$$

La expansión binomial esta dada por:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{7}$$

Ahora, si realizamos la expansión del binomial (Eq.7) en la parte derecha de la ecuación.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k$$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} i^k \sin\theta^k$$

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ entonces podemos realizar la expansión de la sumatoria y separar la parte real e imaginaria

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta)^n + \binom{n}{1}(\cos\theta)^{n-1} i\sin\theta^1 + \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2} i^2\sin\theta^2 + \dots$$
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta)^n + \binom{n}{1}(\cos\theta)^{n-1} i\sin\theta^1 - \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}\sin\theta^2 + \dots$$

Si se remplaza esto en Eq.6, se obtiene

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta)^n + \binom{n}{1}(\cos\theta)^{n-1} i\sin\theta - \binom{n}{2}(\cos\theta)^{n-2}\sin\theta^2 + \dots$$

Ahora como la parte real ($Re(z)$) y la parte imaginaria ($Im(z)$) son linealmente independientes, entonces se puede expresar la anterior ecuación como:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\sin^4\theta - \dots \\ \sin n\theta &= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\sin^5\theta - \dots \end{aligned}}$$

3. Partiendo del desarrollo de una serie geométrica

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Ahora, si se aplica este desarrollo para $r = e^{ix}$ se obtiene,

$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = \frac{1-(e^{ix})^N}{1-(e^{ix})}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = \frac{1-e^{iNx}}{1-e^{ix}}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{iNx/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{iNx/2}-e^{-iNx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = \frac{e^{iNx/2}}{e^{ix/2}}\frac{e^{iNx/2}-e^{-iNx/2}}{e^{ix/2}-e^{-ix/2}}$$

Ahora recordando que $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, remplazando se obtiene,

$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = \frac{e^{iNx/2}}{e^{ix/2}}\frac{\frac{\sin(Nx/2)}{2i}}{\frac{\sin(x/2)}{2i}}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}(e^{ix})^n = e^{i(N-1)x/2}\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Aplicamos la ecuación de De Moivre

$$\sum_{n=0}^{N-1}(\cos x - i\sin x)^n = \left(\cos(N-1)\frac{x}{2} - i\sin(N-1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}$$
$$\sum_{n=0}^{N-1}(\cos nx - i\sin nx) = \left(\cos(N-1)\frac{x}{2} - i\sin(N-1)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Ahora como las bases del espacio complejo son linealmente independientes entonces se puede escribir en termi3nos de las siguientes ecuaciones,

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1}\cos nx &= \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\cos(N-1)\frac{x}{2}\\ \sum_{n=0}^{N-1}\sin nx &= \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)}\sin(N-1)\frac{x}{2}\end{aligned}}$$

4. Recordando las definiciones trigonométricas en términos de series

$$\sin z = \sum_{n=1,odd}^{\infty}(-1)^{(n-1)/2}\frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$
$$\cos z = \sum_{n=0,even}^{\infty}(-1)^{n/2}\frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$
$$\sinh z = \sum_{n=1,odd}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$
$$\cosh z = \sum_{n=0,even}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

(a) $i\sin z = \sinh iz$

$$\sinh iz = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$$
$$\sinh iz = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{i^{2s+1} z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

Como $2s+1$ son siempre números impares entonces cada termino de la serie tendrá i, además los términos se encontrarán intercalados entre positivos y negativos,

$$\boxed{\begin{gathered}\sinh iz = i\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \\ \sinh iz = i\sin z\end{gathered}}$$

(b) $\sin iz = i\sinh z$

$$\sin iz = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(iz)^{2s+1}}{(2s+1)!}$$
$$\sin iz = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s i^{2s+1} \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!}$$

Para este caso se sigue cumpliendo que cada termino de la serie contendrá i y los valores estarán intercalados entre positivos y negativos.

$$\boxed{\begin{gathered}\sin iz = i\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s (-1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \\ \sin iz = i\sum_{s=0}^{\infty} (1)^s \frac{z^{2s+1}}{(2s+1)!} \\ \sin iz = i\sinh z\end{gathered}}$$

(c) $\cos z = \cosh iz$

$$\cosh iz = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(zi)^{2s}}{(2s)!}$$
$$\cosh iz = \sum_{s=0}^{\infty} i^{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

Parar este caso $2s$ siempre es par, por lo que i^{2s} siempre tendrá valor real, pero los términos de la serie serán intercalados entre valores positivos y negativos,

$$\boxed{\begin{gathered}\cosh iz = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \\ \cosh iz = \cos z\end{gathered}}$$

(d) $\cos iz = \cosh z$

$$\cos iz = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s \frac{(iz)^{2s}}{(2s)!}$$

$$\cos iz = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s i^{2s} \frac{z^{2s}}{(2s)!}$$

Al igual, que en el caso anterior i^{2s} siempre será real pero sus valores serán intercalados,

$$\boxed{\begin{gathered}\cos iz = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s(-1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \\ \cos iz = \sum_{s=0}^{\infty}(1)^s \frac{z^{2s}}{(2s)!} \\ \cos iz = \cosh z\end{gathered}}$$