Tarea - 04: Series Complejas.

Problem 1

Obtain the Maclaurin series representation

$$z\cosh(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!} \tag{1}$$

En esta demostración se tomaran como valida las siguientes expresiones

$$\cosh(z) = \cos(iz) \tag{2}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3}$$

Derivando la expresión (3) se obtiene

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)(2n)!} z^{2n}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{4}$$

Con la serie del coseno (4) y con la relación entre el coseno hiperbólico se obtiene

$$\cosh(z) = \cos(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Finalmente con esta expresión se puede obtener la serie de Maclaurin de (1).

$$z\cosh(z^2) = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^{2n}}{(2n)!} = z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!} \tag{5}$$

Problem 2

Find the Maclaurin series expansion of the function:

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 4} = \frac{z}{4} \cdot \frac{1}{1 + (z^4/4)} \tag{6}$$

Primero es necesario establecer los valores de z para los cuales esta función es analítica. La función deja de ser cuando el denominador se hace cero.

$$z^4 = 4 \to |z| < \sqrt{2}$$

Entonces la expansion en series de Maclaurin solo se cumplirá en este intervalo. Recordando la siguiente expresión

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{7}$$

Remplazando $z = -z^4/4$ en (7)

$$\frac{1}{1 + (z^4/4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z^4}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^4}{4} \right)^n$$

Finalmente remplazamos en (6)

$$f(z) = \frac{z}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^4}{4} \right)^n \qquad |z| < \sqrt{2} \tag{8}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{2^{2n+2}} \qquad |z| < \sqrt{2} \tag{9}$$

Problem 3

Use the identity $\sinh(z + \pi i) = -sinhz$, and the fact that $\sinh z$ is periodic with period $2\pi i$ to find the Taylor series for $\sinh z$ about the point $z_0 = \pi i$.

Previamente se demostró la serie de Maclaurin para $\sin(z)$ y esta dada por.

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n + 1)!}$$

Aprovechando la relación con la función hiperbólica, $\sinh(z) = -\sin(iz)$ se obtiene

$$\sinh(z) = -i\sin(iz) = -i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{iz^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ahora, usando la identidad $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z$

$$\sinh(z+\pi i) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Debido a que esta función es periódica cada $2\pi i$ entonces

$$\sinh(z+\pi i - 2\pi i) = \sinh(z-\pi i) = -\sinh(z) \tag{10}$$

Realizando la sustitución $u = z - \pi i$ entonces

$$\sinh(z) = -\sinh(z-\pi i)$$
$$\sinh(u-\pi i) = -\sinh(u)$$

Realizando la expansión en series para $\sinh u$ y posteriormente remplazando z se obtiene.

$$\boxed{\sin(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{11}}$$

Problem 4

Rederive the Maclaurin series for the function $f(z) = \cos z$ by using th definition:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{12}$$

Recordando la definición de la serie de Maclaurin para la función $f(z) = e^z$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{13}$$

Remplazando en la función $\cos(z)$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{(iz)^n}{n!}$$

Entonces, para el termino entre paréntesis se obtienen dos valores; 0 cuando $n = 2n+1$ y 2 cuando $n = 2n$. Tomando los valores no nulos de la serie se obtienen

$$\cos z = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \tag{14}$$

Problem 5

Write the Maclaurin series for the function:

$$f(z) = \sin(z^2)$$

Tomando la definición del seno en función de funciones exponenciales

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Recordando la serie para la función exponencial

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Remplazando $z = iz$ y $z = -iz$ en la serie de Maclaurin para la función exponencial se obtiene

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(iz)^n}{n!} - \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{(iz)^n}{n!}$$

Tomando los valores de n para los cuales la serie es no nula, entonces se obtiene que $n = 2n+1$.

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}2i^{2n}i\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En esta expresión podemos sustituir $z = z^2$ y se obtiene que

$$\sin(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!} \tag{15}$$

Problem 6

Derive the expansions:

(i).

$$f(z) = \frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!}$$

(ii).

$$f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots$$

(i). Recordando la expresión para la serie de Maclaurin de la función $\sinh z$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Si se multiplica esta función por $1/z^2$ es necesario definir el dominio sobre el cual esta nueva función será analítica. Dado que la singularidad se encuentra en $z = 0$ entonces la función será analítica para el intervalo $0 < |z| < \infty$

$$\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

Sacando el valor cuando $n = 0$

$$\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

Para que la sumatoria vuelva a iniciar en 0 entonces definimos a $n = n + 1$

$$\boxed{\frac{\sinh z}{z^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n+1=1}^{\infty} \frac{z^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)+1)!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+3)!} \qquad (16)}$$

(ii). Recordando la serie de Maclaurin para la función del $\sin(z)$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remplazando $z = z^2$ en esta función se obtiene

$$\sin(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Finalmente multiplicamos por la función $f(z) = 1/z^4$ la cual es analítica en el intervalo $0 < |z| < \infty$, entonces la serie se cumple solo para este dominio.

$$\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n-2}}{(2n+1)!}$$

Si se expande esta sumatoria se obtiene

$$\boxed{\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n-2}}{(2n+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots \qquad (17)}$$

Problem 7

Show that when $0 < |z| < 4$:

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}} \tag{18}$$

La expresión (18) se puede simplificar se forma que se obtiene una serie geométrica

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} \cdot \frac{1}{1 - (z/4)} \tag{19}$$

Recordando la expresión de de la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Remplazando $z = z/4$ en la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - (z/4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$$

Remplazando en (19)

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

Sacando el primer termino de la sumatoria ($n = 0$) y remplazando $n = n + 1$ se obtiene

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}} \tag{20}$$

Problem 8

Prove Taylor's theorem for the case $z_0 = 0$ (See Sec. 63, Churchill, Complex variables and applications, 9th ed.).

Partiendo de la formula de integración de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{z - z_0} \tag{21}$$

Suponemos una circunferencia orientada positivamente C_0 con radio $|z| = r_0$, donde $r < r_0 < R$. Ahora, definimos f como una función que es analítica dentro de la circunferencia C_0, de tal forma que se puede expresar la integración de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)ds}{s - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)ds}{s} \frac{1}{1 - (z/s)}$$

Se puede expresar entonces el último termino como una suma más su resto, es decir,

$$\frac{1}{1 - (z/s)} = \sum_{N-1}^{n=0} \left(\frac{z}{s}\right)^n + \frac{(z/s)^N}{1 - (z/s)} = \sum_{N-1}^{n=0} \frac{z^n}{s^n} + \frac{z^N}{(1 - (z/s))s^N}$$

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} \left(\sum_{N-1}^{n=0} \frac{z^n}{s^n} + \frac{(z/s)^N}{1 - (z/s)} \right) = \sum_{N-1}^{n=0} \frac{z^n}{s^{n+1}} + \frac{z^N}{(s - z)s^N}$$

Remplazando en la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{N-1}^{n=0} \int_c \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} z^n + \frac{z^N}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)ds}{(s - z)s^N} \tag{22}$$

Recordando la extensión de la integración de Cauchy

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)ds}{(s - z)^{n+1}} = f^{(n)}(z)$$

Esta expresión se tiene la misma forma que la primera integral de la ecuación (22), para el valor de $z = 0$. Tomando el primer término y remplazando

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{N-1}^{n=0} \int_c \frac{f(s)ds}{s^{n+1}} z^n = \sum_{N-1}^{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Remplazando en (22)

$$f(z) = \sum_{N-1}^{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \frac{z^N}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)s^N}$$

Ahora en el limite en que $N \to \infty$, entonces el segundo termino tiende a cero, esto es debido a que la suma sobre z^n es estable y su resto tiene a cero en el infinito.

$$\boxed{f(z) = \sum_{N-1}^{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n} \tag{23}$$