# Tarea - 03: Integración en el plano complejo.

**Problem 1**

For the functions $f$ and contours $C$ use parametric representations for $C$, or legs of $C$, to evaluate

$$\int_C f(z)dz$$

- $f(z) = z - 1$ and $C$ is the arc from $z = 0$ to $z = 2$ consisting of

  $(i)$. the semicircle $z = 1 + e^{i\theta}$ with $\pi \le \theta \le 2\pi$

  $(ii)$. the segment $z = x$ with $0 \le x \le 2$ of the real axis

- $f(z)$ is defined by means of the equations

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{when } \; y < 0 \\ 4y & \text{when } \; y > 0 \end{cases}$$

  and $C$ is the arc from $z = -1 - i$ to $z = 1 + i$ along the curve $y = x^3$.

## Solución

- Para $z = 1$ y $C$ es un arco de $z = 0$ a $z = 2$

  $(i)$. El semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$
  La integral de contorno esta dada por

$$\int_C f(z)dz = \int_C f[z(\theta)]z'(\theta)d\theta$$

  Donde $f[z(\theta)] = (1 + e^{i\theta}) - 1$ y $z'(\theta) = ie^{i\theta}$, remplazando estos valores

$$\int_C f(z)dz = \int_C [(1 + e^{i\theta}) - 1]ie^{i\theta}d\theta$$

$$\int_C f(z)dz = i\int_{\pi}^{2\pi} e^{2i\theta}d\theta$$

  Finalmente

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \frac{i}{2i}\left[e^{2i\theta}\right]_{\pi}^{2\pi} = 0 \qquad (1)}$$

$(ii)$. Para este caso $f[z(x)] = (x) - 1$ y $z'(x) = 1$, remplazando estos valores

$$\int_C f(z)dz = \int_C 1(x-1)dx$$
$$\int_C f(z)dz = \int_0^2 xdx - \int_0^2 dx$$

Solucionando la integral

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 = 0 \qquad (2)}$$

- Para este caso el contorno $C$ está compuesto por dos contornos $C_1$ y $C_2$ según la definición de $f(z)$. Entonces en este caso particular

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$
$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f[z(x)]z'(x)dx + \int_{C_2} f[z(x)]z'(x)dz$$

En coordenadas cartesianas $z$ esta definido como $z = x + iy$, por tanto, para $C_1$ la parametrización será $z = x + ix^3$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 0$. En $C_2$ la parametrización es $z = x + ix^3$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Ahora como ambas tienen la misma parametrización pero en diferentes intervalos, la derivada paramétrica será la misma $z' = 1 + 3ix^2$ pero en sus respectivos intervalos.

$$\int_C f(z)dz = \int_{-1}^0 1(1+3ix^2)dx + \int_0^1 (4x^3)(1+3ix^2)dx$$
$$\int_C f(z)dz = \int_{-1}^0 dx + 3i\int_{-1}^0 x^2dx + 4\int_0^1 x^3dx + 12i\int_0^1 x^5dx$$

$$\boxed{\int_C f(z)dz = [x]_{-1}^0 + 3i\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + 12i\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 2 + 3i \qquad (3)}$$

**Problem 2**

Let $C_0$ denote the circle centered at $z_0$ with radius $R$, and use the parametrization

$$z = z_0 + Re^{i\theta}$$

to show that

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{when } \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots \\ 2\pi i & \text{when } \; n = 0 \end{cases}$$

# Solución

La integral sobre una función compleja esta definida como

$$\int_C f(z)dz = \int_C f[z(\theta)]z'(\theta)d\theta$$

Para este caso la parametrización es $z(\theta) = z_0 + Re^{i\theta}$ y su derivada $z'(\theta) = iRe^{i\theta}$, donde $\theta$ esta en el intervalo $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Remplazando estos valores se obtiene

$$\int_C (z - z_0)^{n-1} = \int_{-\pi}^{\pi} [z_0 + Re^{i\theta} - z_0]^{n-1} iRe^{i\theta} d\theta$$
$$\int_C (z - z_0)^{n-1} = iR^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ni\theta} d\theta$$

En el caso en que $n = 0$

$$\boxed{\int_C (z - z_0)^{n-1} = i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2i\pi \qquad (4)}$$

Ahora para el caso en que $n \neq 0$

$$\int_C (z - z_0)^{n-1} = iR^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{ni\theta} d\theta$$
$$\int_C (z - z_0)^{n-1} = iR^n \frac{1}{in} [e^{ni\pi} - e^{-ni\pi}]$$

$$\boxed{\int_C (z - z_0)^{n-1} = \frac{2iR^n \sin(n\pi)}{n} = 0 \qquad (5)}$$

**Problem 3**

Show that the integral

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)dz$$

has the same value on the two paths:

$(i)$. the straight line connecting the integration limits

$(ii)$. an arc on the circle $|z| = 5$

# Solución

$(i)$. Si se quiere parametrizar con la linea que une los limites de integración, primero es necesario establecer la función $f(z)$ en términos de $x$ y $y$.

$$f(z) = 4z^2 - 3iz = 4(x+iy)^2 - 3i(x+iy)$$
$$f(z) = 4(x^2 - y^2) + 3y + i(8xy - 3x)$$

Ahora, la linea que parametriza debe pasar por los puntos $(3,4)$ y $(4,-3)$, entonces debe tener una pendiente $m = (4-(-3))/(3-4) = -7$ y un punto de corte tal que satisfaga la ecuación $y_1 = -7(x_1) + b$, es decir, $b = 25$. Esto quiere decir que la linea que parametriza la integral es $y = -7x + 25$. Remplazando el valor de $y$ se obtiene.

$$f[z(x)] = 4(x^2 - (-7x+25)^2) + 3(-7x+25) + i(8x(-7x+25) - 3x)$$
$$f[z(x)] = -192x^2 + 1379x - 2425 + i(-56x^2 + 197x)$$

de forma similar para $y$ se obtiene

$$f[z(y)] = 4\left(x^2 - \left(\frac{25-y}{7}\right)^2\right) + 3\left(\frac{25-y}{7}\right) + i\left(8x\left(\frac{25-y}{7}\right) - 3x\right)$$
$$f[z(y)] = \frac{-192y^2 - 53y + 2500}{49} + i\frac{-8y^2 + 203y - 75}{7}$$

Por tanto, la integral queda expresada como

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)dz = \int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)(dx + idy)$$
$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)dz = \int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)dx + \int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)idy$$

Aplicando las parametrizaciones propuestas, primero para $x$

$$\int_3^4 (4z^2 - 3iz)dx = \int_3^4 (-192x^2 + 1379x - 2425 + i(-56x^2 + 197x))dx$$
$$\int_3^4 (4z^2 - 3iz)dx = \left[-192\frac{x^3}{3} + 1379\frac{x^2}{2} - 2425x + i\left(-56\frac{x^3}{3} + 197\frac{x^2}{2}\right)\right]_3^4$$
$$\int_3^4 (4z^2 - 3iz)dx = \frac{67}{2} - i\frac{7}{6}$$

Ahora para $y$

$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)idy = \int_4^{-3} \left(\frac{-192y^2 - 53y + 2500}{49} + i\frac{-8y^2 + 203y - 75}{7}\right) idy$$
$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)idy = \frac{i}{49}\left[-192\frac{y^3}{3} - 53\frac{y^2}{2} + 2500y\right]_4^3 - \frac{1}{7}\left[-8\frac{y^3}{3} + 203\frac{y^2}{2} - 75y\right]$$
$$\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)idy = -\frac{49}{6} - i\frac{469}{2}$$

Por tanto, la solución será

$$\boxed{\int_{3+4i}^{4-3i} (4z^2 - 3iz)dz = \frac{67}{2} - i\frac{7}{6} - \frac{49}{6} - i\frac{469}{2} = \frac{76 - 707i}{3}} \tag{6}$$

$(ii)$. Parametrizando con un circulo de radio $|z| = 5$, usando la representación polar, esta parametrización esta dada por $z(\theta) = 5e^{i\theta}$, remplazando se obtiene $f[z(\theta)] = 4(25e^{2i\theta}) - 15ie^{i\theta}$, y $z'(\theta) = 5ie^{i\theta}$. Remplazando en la integral se obtiene que

$$\int_C f(z)dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (100e^{2i\theta} - 15ie^{i\theta})5ie^{i\theta}d\theta$$
$$\int_C f(z)dz = 500i\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{3i\theta}d\theta + 75\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{2i\theta}d\theta$$
$$\int_C f(z)dz = \left[\frac{500e^{3i\theta}}{3} + \frac{75e^{2i\theta}}{2i}\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Ahora, los limites de la integral están dados por $\theta_1 = \arctan(4/3)$ y $\theta_2 = \arctan(-3/4)$

$$\int_C f(z)dz = \frac{500}{3}\left[e^{3i\theta_2} - e^{3i\theta_1}\right] - \frac{75i}{2}\left[e^{2i\theta_2} - e^{2i\theta_1}\right]$$
$$\int_C f(z)dz = \frac{500}{3}\left[\frac{-44 - 117i}{125} - \frac{-117 + 44i}{125}\right] - \frac{75i}{2}\left[\frac{7 - 24i}{25} - \frac{-7 + 24i}{25}\right]$$
$$\int_C f(z)dz = \frac{76 - 707i}{3}$$