Andrés F. Cerón M.
December 3, 2024

Tarea - 06: Series de Laurent.

Problem 1

Demonstrate that when f is analytic throughout the disk $|z - z_0| < R_2$, expansion of the Laurent series reduces to a Taylor series about z_0.

Problem 2

Prove Laurent's theorem when $z_0 = 0$.

Problem 3

Find a representation for the function:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+(1/z)} \tag{1}$$

in negative powers of z that is valid when $1 < |z| < \infty$.

Solución

En el intervalo donde la serie es valida implica que $1/|z| < 1$, entonces, expresando esta función en la forma de potencias negativas y recordando

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(-1/z)}$$

recordando la expresión para series negativas

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

remplazando se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^2}{z^{n+1}}$$

remplazando $n \to n-1$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}$$

Problem 4

Give two Laurent series expansions in powers of z for the function

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} \tag{2}$$

and specify the regions in which those expansions are valid.

Solución

Para esta función existen dos singularidades, en $z = 0$ y en $z = 1$. Esto genera dos regiones donde esta función es analítica

$$0 < |z| < 1 \quad \text{y} \quad 1 < |z| < \infty$$

en la primera región $(0 < |z|)$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2}$$

remplazando $n \to n+2$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-2}^{\infty} z^n = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (0 < |z| < 1)} \tag{3}$$

en la segunda región se $(1/|z| < 1)$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\frac{1}{1/z - 1} = -\frac{1}{z^3}\frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$$

remplazando $n \to n-3$

$$\boxed{f(z) = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \qquad (1 < |z| < \infty)} \tag{4}$$

Problem 5

Show that when $0 < |z-1| < 2$,

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} - \frac{1}{2(z-1)} \tag{5}$$

Solución

Descomponiendo $f(x)$ en fracciones parciales

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-3)}$$
$$z = A(z-3) + B(z-1) = Az - 3A + Bz - B$$

esto implica el siguiente sistema de ecuaciones

$$-3A - B = 0 \quad \rightarrow \quad B = -3A$$
$$A + B = 1 \quad \rightarrow \quad A = -1/2 \quad B = 3/2$$

entonces

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{3}{2(z-3)} \tag{6}$$

como estamos en el intervalo $0 < |z-1| < 2$, la cota inferior indica que $z > 1$, por lo tanto, la singularidad en $z = 1$ no se puede aproximar en series de potencia. La cota superior indica que $|z-1|/2 < 1$.

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{2}\frac{1}{2+(1-z)} = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{4}\frac{1}{1-(z-1)/2}$$

finalmente

$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - \frac{3}{2^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n \tag{7}$$
$$f(z) = -\frac{1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}} \tag{8}$$