Geofísica Matemática y Computacional
Examen Parcial 2° Diferencias finitas
García Barragán José Andrés 304136401

1. a) Calcule los coeficientes A, B, C de One-sided_D_{+2} y diga por qué es de orden $O(h^2)$.

One-sided - D_{+2} fórmula $= Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i$

sustituyendo en $f'_i = Af_{i+2} + Bf_{i+1} + Cf_i$

Para encontrar los coeficientes A, B y C, usamos la expansión en series de Taylor alrededor de x_0 y la evaluamos en $x_0 + 2h = x_{i+2}$ y $x_0 + h = x_{i+1}$:

Fórmula Series de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$$

$$f_{i+2} = f_i + (2h)f'_i + \frac{(2h)^2}{2!}f''_i + \frac{(2h)^3}{3!}f'''_i + O(h^3) \quad \ldots (1)$$

$$f_{i+1} = f_i + (h)f'_i + \frac{(h)^2}{2!}f''_i + \frac{(h)^3}{3!}f'''_i + O(h^3) \quad \ldots (2)$$

Sustituyendo las ecuaciones 1 y 2 en la fórmula

$$f'_i = Af_{i+2} + Bf_{i+1} + Cf_i$$

Tenemos:

$$f'_i = A\left[f_i + (2h)f'_i + \frac{(2h)^2}{2!}f''_i + \frac{(2h)^3}{3!}f'''_i + \ldots\right] + B\left[f_i + (h)f'_i + \frac{(h)^2}{2!}f''_i + \frac{(h)^3}{3!}f'''_i + \ldots\right]$$
$$+ Cf_i$$

$$f'_i = A\left[f_i + 2hf'_i + 2h^2f''_i + \frac{8h^3}{6}f'''_i\right] + B\left[f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i\right] + Cf_i$$

$$f'_i = (A+B+C)f_i + (2A + B)hf'_i + (2A + \tfrac{1}{2}B)h^2f''_i + O(h^2)$$

Para que ambos lados de la ecuación anterior sean iguales se debe cumplir lo siguiente:

$$A+B+C=0 \quad \ldots 1$$
$$2A+B=\frac{1}{h} \quad \ldots 2$$
$$2A+\frac{1}{2}B=0 \quad \ldots 3$$

Resolviendo el sistema

$$\frac{1}{2}B=-2A$$
$$\underline{B=-4A}$$

sustituyendo B en ecuación ②

$$2A+(-4A)=\frac{1}{h}$$
$$2A-4A=\frac{1}{h}$$
$$-2A=\frac{1}{h} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2h}}$$

Sust. A en B

$$B=-4\left(-\frac{1}{2h}\right) \Rightarrow \boxed{B=\frac{2}{h}}$$

Sust. A y B en 1

$$-\frac{1}{2h}+\frac{2}{h}+C=0$$
$$C=\frac{1}{2h}-\frac{2}{h}=\frac{1-4}{2h}=\boxed{-\frac{3}{2h}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{f'(x_i)=\frac{-f_{i+2}+4f_{i+1}-3f_i}{2h}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Con } A&=-\frac{1}{2h}\\ B&=\frac{2}{h}\\ C&=-\frac{3}{2h}\end{aligned}}$$

Comprobación

$$-\frac{1}{2h}+\frac{2}{h}-\frac{3}{2h}=\frac{-1+4-3}{2h}=0 \checkmark$$
$$2\left(-\frac{1}{2h}\right)+\frac{2}{h}=-\frac{1}{h}+\frac{2}{h}=\frac{1}{h} \checkmark$$
$$2\left(-\frac{1}{2h}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{h}\right)=-\frac{1}{h}+\frac{1}{h}=0 \checkmark$$

Es de orden $O(h^2)$ porque al restar las expansiones evaluadas y restando $f'(x_0)$ se obtiene el error absoluto de orden cuadrático.

$$\boxed{-D_{+2}f(x_0)-f'(x_0)=\underbrace{\frac{h^2}{3!}f'''(x_0)+O(h^3)}_{O(h^2)}}$$

②

b) Calcule los coeficientes A, B, C y D de One-sided D_{-3} y diga por qué es de orden $O(h^3)$.

fórmula $Au_{i+2} + Bu_{i+1} + Cu_i + Du_{i-1}$

Sustituyendo: $f'_i = Af_{i+2} + Bf_{i+1} + Cf_i + Df_{i-1}$

Usando la expansión en series de Taylor y evaluando en $x_0 + 2h = x_{i+2}$, $x_0 + h = x_{i+1}$ y $x_0 - h = x_{i-1}$:

$$f_{i+2} = f_i + (2h)f'_i + \frac{(2h)^2}{2!}f''_i + \frac{(2h)^3}{3!}f'''_i + O(h^4) + \dots$$

$$f_{i+1} = f_i + (h)f'_i + \frac{(h)^2}{2!}f''_i + \frac{(h)^3}{3!}f'''_i + O(h^4) + \dots$$

$$f_{i-1} = f_i + (-h)f'_i + \frac{(-h)^2}{2!}f''_i + \frac{(-h)^3}{3!}f'''_i + O(h^4) + \dots$$

Sustituyendo las ecuaciones en la fórmula

$$f'_i = Af_{i+2} + Bf_{i+1} + Cf_i + Df_{i-1}$$

$$f'_i = A\left[f_i + (2h)f'_i + \frac{(2h)^2}{2!}f''_i + \frac{(2h)^3}{3!}f'''_i + \dots\right] + B\left[f_i + (h)f'_i + \frac{(h)^2}{2!}f''_i + \frac{(h)^3}{3!}f'''_i + \dots\right]$$
$$+ Cf_i + D\left[f_i + (-h)f'_i + \frac{(-h)^2}{2!}f''_i + \frac{(-h)^3}{3!}f'''_i + \dots\right]$$

$$f'_i = A\left[f_i + 2hf'_i + 2h^2f''_i + \frac{8}{6}h^3f'''_i\right] + B\left[f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i + \frac{h^3}{6}f'''_i\right] + Cf_i +$$
$$D\left[f_i - hf'_i + \frac{h^2}{2}f''_i - \frac{h^3}{6}f'''_i\right]$$

$$f'_i = (A+B+C+D)f_i + (2A+B-D)hf'_i + \left(2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2}\right)h^2f''_i + \left(\frac{4}{3}A + \frac{B}{6} - \frac{D}{6}\right)h^3f'''_i$$

• Se plantea el sistema de ecuaciones

$$A+B+C+D=0 \quad \ldots 1$$
$$2A+B \quad -D=\frac{1}{h} \quad \ldots 2$$
$$2A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}D=0 \quad \ldots 3$$
$$\frac{4}{3}A+\frac{1}{6}B-\frac{1}{6}D=0 \quad \ldots 4$$

De (3) despejo B

$$B=2\left(-2A-\frac{1}{2}D\right)$$
$$\underline{B=-4A-D} \quad \ldots (5)$$

De (4) despejo B

$$B=6\left(-\frac{4}{3}A+\frac{1}{6}D\right)=-8A+D$$
$$\underline{B=-8A+D} \quad \ldots (6)$$

igualando 5 y 6

$$-4A-D=-8A+D$$
$$\underline{4A-2D=0} \quad \ldots (7)$$

Despejando B de (2)

$$B=\frac{1}{h}-2A+D \quad \ldots (8)$$

igualando 8 y 6

$$-8A+D=\frac{1}{h}-2A+D$$
$$-6A=\frac{1}{h} \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{6h}}$$

Sustituyendo (A) en (7)

$$4\left(-\frac{1}{6h}\right)-2D=0 \Rightarrow D=\frac{\frac{2}{\cancel{3h}}}{-2} \Rightarrow D=-\frac{2}{6h} \Rightarrow \boxed{D=-\frac{1}{3h}}$$

Sust. (A) y (D) en (5)

$$B=-4\left(-\frac{1}{6n}\right)+\frac{1}{3h}=\frac{2}{3h}+\frac{1}{3h} \Rightarrow B=\frac{3}{3h} \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{h}}$$

Sust. (A) (B) y (D) en (1)

$$-\frac{1}{6h}+\frac{1}{h}+C-\frac{1}{3h}=0$$
$$C=\frac{1}{6n}-\frac{1}{h}+\frac{1}{3h}=\frac{1-6+2}{6h}$$
$$C=-\frac{3}{6n} \Rightarrow \boxed{C=-\frac{1}{2h}}$$

Comprobación

• $-\frac{1}{6h}+\frac{1}{h}-\frac{1}{2h}-\frac{1}{3h}=0$ ✓

$$\frac{-1+6-3-2}{6n}=0$$

• $-\frac{2}{6n}+\frac{1}{h}+\frac{1}{3h}=\frac{1}{h}$

$$\frac{-2+6+2}{6n}=\frac{1}{h}=\frac{6}{6n}=\frac{1}{h}$$ ✓

$\cdot\ 2\left(-\frac{1}{6h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3h}\right) = 0$

$-\frac{1}{3h} + \frac{1}{2h} - \frac{1}{6h} = 0 \Rightarrow \frac{-2+3-1}{6h} = 0$ ✓

$\cdot\ \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{6h}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{h}\right) - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3h}\right) =$

$-\frac{2}{9h} + \frac{1}{6h} + \frac{1}{18h} = \frac{-4+3+1}{18h} = 0$ ✓

Por lo tanto: $\boxed{f'(x_i) = \frac{-f_{i+2} + 6f_{i+1} - 3f_i - 2f_{i-1}}{6h}}$

Es decir $\boxed{A = -\frac{1}{6h},\ B = \frac{1}{h},\ C = -\frac{1}{2h}\ y\ D = -\frac{1}{3h}}$

Es de orden $O(h^3)$ porque al restar las expansiones evaluadas y restando $f'(x_0)$ se obtiene el error absoluto de orden cúbico:

$$\boxed{-D_3 f(x_0) - f'(x_0) = \underbrace{\frac{h^3}{4!} f_i''' + O(h^4)}_{O(h^3)}}$$

c) Explique como se obtiene la fórmula de Centered-D_0^2

• Se obtiene de forma muy similar a lo calculado en los incisos anteriores, la diferencia está en el sistema de ecuaciones que ahora la segunda derivada es diferente de cero. Todo lo demás es el mismo procedimiento.

Formula $Au_{i+1} - Bu_i + Cu_{i-1}$

se utilizaron un punto atras uno adelante y uno central

$f_i'' = Af_{i+1} - Bf_i + Cf_{i-1}$

Usando la expansión en series de Taylor en

$x_0+h = x_{i+1}, \quad x_0 - h = x_{i-1}$

$$f_{i+1} = f_i + hf_i' + \frac{(h)^2}{2!}f_i'' + \frac{h^3}{3!}f_i''' + O(h^4)$$

$$f_{i-1} = f_i + (-h)f_i' + \frac{(-h)^2}{2!}f_i'' + \frac{(-h)^3}{3!}f_i''' + O(h^4)$$

Sustituyendo en la fórmula

$$f_i'' = Af_{i+1} - Bf_i + Cf_{i-1}$$

$$f_i'' = A\left[f_i + hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' + \frac{h^3}{6}f_i''' + \dots\right] - Bf_i + C\left[f_i - hf_i' + \frac{h^2}{2}f_i'' - \frac{h^3}{6}f_i''' + \dots\right]$$

$$f_i'' = (A-B+C)f_i + (A-C)hf_i' + \left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)h^2 f_i''$$

Planteando el sistema de ecuaciones

$$A - B + C = 0 \dots (1)$$

$$A - C = 0 \dots (2)$$

$$\frac{A}{2} + \frac{C}{2} = \frac{1}{h^2} \dots (3)$$

Usando (2)

$$A = C$$

sustituyendo en (3)

$$\frac{A}{2} + \frac{A}{2} = \frac{1}{h^2}$$

$$\frac{2A}{2} = \frac{1}{h^2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{h^2}}, \boxed{C = \frac{1}{h^2}}$$

Sust. A y C en (1)

$$\frac{1}{h^2} - B + \frac{1}{h^2} = 0$$

$$\boxed{B = \frac{2}{h^2}}$$

Por lo tanto tenemos la fórmula Centrad $-D_0^2$

$$\boxed{f''(x_i) = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}}$$

Al restar las expansiones de Taylor y restando $f''(x_0)$ obtenemos un error absoluto de orden cuadrático:

$$D_0^2 f(x_0) - f''(x_0) = \underbrace{\frac{h^2}{3!}f'''(x_0) + O(h^3)}_{O(h^2)}$$