UNIVERSIDAD DEL QUINDÍO
Facultad de Ingeniería
Programa de Ingeniería de Sistemas y Computación

PREPARCIAL

TEORIA DEL ERROR Y MÉTODOS CERRADOS PARA CALCULO DE RAICES DE ECUACIONES

1. Convierta los números que se presentan base 2 a base 10: a) 101101; b) 110.011 y c) 0.01101.
2. La serie infinita:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4}$$

converge a un valor de $f(n) = \pi^4/90$ conforme n se tiende a infinito. Escriba un programa de precisión sencilla para calcular $f\ (n)$ para $n = 10\ 000$ por medio de calcular la suma desde $i = 1$ hasta $10\ 000$.
Después repita el cálculo, pero en sentido inverso, es decir, desde $i = 10\ 000$ a 1, con incrementos de -1. En cada caso, calcule el error relativo porcentual verdadero. Explique los resultados.

3. Evalúe e^{-5} con el uso de dos métodos:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

y compárelo con el valor verdadero de 6.737947×10^{-3}. Utilice 20 términos para evaluar cada serie y calcule los errores relativos aproximado y verdadero como términos que se agregaran.

4. La expansión en serie de Maclaurin para $\cos x$ es:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

Iniciando con el primer término $\cos x = 1$, agregue los términos uno a uno para estimar $\cos(\pi/3)$. Después de que agregue cada uno de los términos, calcule los errores relativos porcentuales verdaderos y aproximados. Use una calculadora para determinar el valor exacto. Agregue términos hasta que el valor absoluto del error aproximado se encuentre dentro de cierto criterio de error, considerando dos cifras significativas.

5. La expansión de la serie de Maclaurin para la arcotangente de x se define para $|x| \leq 1$ como:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

a) Escriba los primeros cuatro términos (n = 0…3).
b) Comenzando con la versión más simple, $\arctan x = x$, agregue términos, uno a la vez, para estimar $\arctan(\pi/6)$. Después de agregar cada nuevo término, calcule los errores porcentuales relativos verdaderos y aproximados. Use su calculadora para determinar el valor exacto. Agregue términos hasta que el valor absoluto del estimado de error aproximado caiga por debajo de un criterio de error ajustado a dos cifras significativas.

6. Emplee la expansión de la serie de Taylor de cero hasta tercer orden para predecir f (3) si
$$f\ (x) = 25x^3 - 6x^2 + 7x - 88$$
usando como punto base $x = 1$. Calcule el error relativo porcentual verdadero e_t para cada aproximación.

7. Use la expansión de la serie de Taylor de cero al cuarto orden para estimar $f(2.5)$ si $f(x) = \ln x$ utilizando $x = 1$ como punto base. Calcule el error relativo porcentual verdadero e_t para cada aproximación. Analice los resultados.

8. Para calcular las coordenadas espaciales de un planeta tenemos que resolver la función

$$f(x) = x - 1 - 0.5senx$$

Sea $a = x_i = \pi/2$ el punto base. Determine la expansión de la serie de Taylor que da un error máximo de 0.015 en el intervalo dado. El error es igual al valor absoluto de la diferencia entre la función dada y la expansión de la serie de Taylor especificada. (Sugerencia: Resuelva gráficamente.)

9. Determine las raíces reales de $f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 6x - 2$:
a. Gráficamente
b. Utilizando el método de bisección para localizar la raíz. Use los valores iniciales $x_1 = 0$ y $x_a = 1$ iterando hasta que el error estimado $\mathcal{E}_a$ se encuentre por debajo del 0.1%.
c. Utilizando el método de falsa posición para localizar la raíz. Use los valores iniciales $x_1 = 0$ y $x_a = 1$ iterando hasta que el error estimado $\mathcal{E}_a$ se encuentre por debajo del 0.1%.

10. Determine la raíz real de $\ln(x^2) = 0.7$:
a) Gráficamente
b) Empleando tres iteraciones en el método de bisección con los valores iniciales en el método de bisección con los valores iniciales $x_1 = 0.5$ y $x_a = 2$
a) Usando tres iteraciones del m todo de la falsa posición, con los mismos valores iniciales de b).

11. La velocidad v de un paracaidista que cae está dada por

$$v = \frac{gm}{c}(1 - e^{-\left(\frac{c}{m}\right)t}$$

donde $g = 9.81\, m/s^2$. Para un paracaidista con coeficiente de resistencia de $c = 15\, kg/s$, calcule la masa m de modo que la velocidad sea $v = 36\, m/s$ en $t = 10\, s$. Utilice el m todo de la falsa posición para determinar m a un nivel de $\varepsilon_s = 0.1\%$.

12. Encuentre la raíz positiva más pequeña de la función (x está en radianes) $x^2\left|Cos\sqrt{x}\right| = 5$ usando el método de la falsa posición. Para localizar el intervalo en donde se encuentra la raíz, grafique primero esta función para valores de x entre 0 y 5. Realice el cálculo hasta que ε_a sea menor que $\varepsilon_s = 1\%$. Compruebe su respuesta final sustituyéndola en la función original.