Ejercicios

La cantidad de líquido dosificado por una máquina embotelladora está distri- buida normalmente con $\sigma = 1$ onza. Si $n = 9$ botellas se seleccionan aleatoriamente de la producción de la máquina, encontramos que la probabilidad de que la media muestral se encuentre a no más de 0.3 onza de la verdadera media es 0.6318. Suponga que Y se ha de calcular usando una muestra de tamaño n.

1. Si $n = 16$, ¿cuál es $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$?
2. Encuentre $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$ cuando Y se ha de calcular usando muestras de tamaños $n = 25$, $n = 36$, $n = 49$ y $n = 64$.
3. ¿Qué patrón observa usted entre los valores para $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$ que haya contemplado para diversos valores de n?

Suponga ahora que la cantidad de líquido dosificado por la máquina embotelladora está distribuida normalmente con $\sigma = 2$ onzas.

1. **a** Si $n = 9$ botellas se seleccionan aleatoriamente de la producción de la máquina, ¿cuál es $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$?
2. **b** Encuentre $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$? cuando Y se ha de determinar usando muestras de tamaños $n = 25$, $n = 36$, $n = 49$ y $n = 64$.
3. **c** ¿Qué patrón observa usted entre los valores para $P(\bar{Y} - \mu \leq 0.3)$? que contempló para los diversos valores de n?

Un guardabosque, que estudia los efectos de la fertilización en ciertos bosques de pinos en el sureste, está interesado en estimar el promedio de área de la base de los pinos. Al estudiar áreas basales de pinos similares durante muchos años, descubrió que estas mediciones (en pulgadas cuadradas) están distribuidas normalmente con desviación estándar aproxima de 4 pulgadas cuadradas. Si el guardabosque muestrea $n = 9$ árboles, encuentre la probabilidad de que la media muestral se encuentre a no más de 2 pulgadas cuadradas de la media poblacional.

Suponga que al guardabosque le gustaría que la media muestral estuviera a no más de 1 pulgada cuadrada de la media poblacional, con probabilidad .90. ¿Cuántos árboles debe medir para asegurar este grado de precisión?

La Environmental Protection Agency se ocupa del problema de establecer criterios para las cantidades de sustancias químicas tóxicas permitidas en lagos y ríos de agua dulce. Una medida común de toxicidad para cualquier contaminante es la concentración de éste que mataría a la mitad de la especie de prueba en un tiempo determinado (por lo general 96 horas para especies de peces). Esta medida se denomina CL50 (concentración letal que mata 50% de la especie de prueba). En muchos estudios, los valores contenidos en el logaritmo natural de mediciones del CL50 están distribuidos normalmente y, en consecuencia, el análisis está basado en datos del ln(CL50).

Estudios de los efectos del cobre en cierta especie de peces (por ejemplo la especie A) muestran que la varianza de mediciones de ln(CL50) es alrededor de 0.4 con mediciones de concentración en miligra- mos por litro. Si han de completarse $n = 10$ estudios sobre el CL50 para cobre, encuentre la probabili- dad de que la media muestral de ln(CL50) difiera de la verdadera media poblacional en no más de 0.5.

Si deseamos que la media muestral difiera de la media poblacional en no más de .5 con probabilidad .95, ¿cuántas pruebas deben realizarse?

Los amperímetros producidos por un fabricante se venden con la especificación de que la desviación estándar de las lecturas de la aguja no sea mayor que 0.2 amperes. Uno de estos amperímetros se utilizó para hacer diez lecturas independientes en un circuito de prueba con corriente constante. Si la varianza muestral de estas diez mediciones es 0.065 y es razonable suponer que las lecturas están distribuidas nor- malmente, ¿los resultados sugieren que el amperímetro empleado no satisface las especificaciones del mercado? [*Sugerencia:* encuentre la probabilidad aproximada de que la varianza muestral será mayor que 0.065 si la verdadera varianza poblacional es 0.04.]

Suponga que $n = 20$ observaciones se han de tomar a mediciones ln(CL50) y que $\sigma^2 = 1.4$. Denote con S^2 la varianza muestral de las 20 mediciones.

1. Encuentre un número b tal que $P(S^2 \leq b) = .975$.
2. Encuentre un número a tal que $P(a \leq S^2) = .975$.
3. Si a y b son como en los incisos a y b, ¿cuál es $P(a \leq S^2 \leq b)$?

Los tiempos de servicio para los clientes que pasan por la caja en una tienda de venta al me- nudeo son variables aleatorias independientes con media de 1.5 minutos y varianza de 1.0. Calcule la probabilidad de que 100 clientes puedan ser atendidos en menos de 2 horas de tiempo total de servicio.

Las calificaciones de exámenes para todos los estudiantes de último año de preparatoria en cierto estado tienen media de 60 y varianza de 64. Una muestra aleatoria de n = 100 estudiantes de una escuela preparatoria grande tuvo una calificación media de 58. ¿Hay evidencia para sugerir que el nivel de conocimientos de esta escuela sea inferior? (Calcule la probabilidad de que la media muestral sea a lo sumo 58 cuando n = 100.)

Suponga que Y tiene una distribución binominal con n = 25 y p = .4. Encuentre las probabilidades exactas de que $Y \leq 8$ y $Y = 8$ y compare éstas con los valores correspondientes determinados con el uso de la aproximación normal.

Una máquina se apaga para repararla si una muestra aleatoria de 100 piezas seleccionadas de la producción diaria de la máquina contiene al menos 15% de piezas defectuosas. (Suponga que la producción diaria es un número grande de piezas.) Si en un día determinado la máquina está produciendo sólo 10% de piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que sea apagada? [*Sugerencia:* use la corrección de continuidad .5.]

Una línea aérea encuentra que 5% de las personas que hacen reservaciones para cierto vuelo no se presentan para el mismo. Si la línea aérea vende 160 boletos para un vuelo con sólo 155 asientos, ¿cuál es la probabilidad de que se disponga de un asiento para cada persona que tiene una reservación y piense volar?

Un entrevistador piensa que 20% de los votantes de cierta zona están a favor de la emisión de bonos. Si 64 votantes se muestrean aleatoriamente de entre el gran número de electores de esta zona, calcule la probabilidad de que la fracción muestreada de votantes que están a favor de la emisión de bonos no difiera en más de .06 de la fracción real.

Resuelva

a Si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado para θ, ¿cuál es $B(\hat{\theta})$?

b Si es $B(\hat{\theta})$ = 5, ¿cuál es es $E(\hat{\theta})$??

Suponga que $E(\hat{\theta}_1) = E(\hat{\theta}_2) = \theta,\ V(\hat{\theta}_1) = \sigma_1^2 \ y\ V(\hat{\theta}_2) = \sigma_2^2$. Considere el estimador $\hat{\theta}_3 = a\,\hat{\theta}_1 + (1-2)\hat{\theta}_2$

a Demuestre que $\hat{\theta}_3$ es un estimador insesgado para θ.

b Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son independientes, ¿cómo debe escogerse la constante a para minimizar la varianza de $\hat{\theta}_3$?

El número de descomposturas por semana para un tipo de minicomputadora es una variable aleatoria Y con una distribución de Poisson y media l. Existe una muestra aleatoria $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ de observaciones del número semanal de descomposturas.

a Sugiera un estimador insesgado para λ.

b. El costo semanal de reparar estas descomposturas es C=3Y+Y^2. Demuestre que $E(C) = 4\lambda + \lambda^2$.

c. Encuentre una función de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ que sea un estimador insesgado de $E(C)$.

Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ que denotan una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes tres estimadores para m:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2), \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}Y_1 + \frac{Y_2 + \cdots + Y_{n-1}}{2(n-2)} + \frac{1}{4}Y_n, \qquad \hat{\mu}_3 = \bar{Y}$$

Demuestre que cada uno es insesgado

Encuentre la eficiencia de $\hat{\mu}_3$ con respecto a $\hat{\mu}_2$ y $\hat{\mu}_1$ respectivamente.

Suponga que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ denotan una muestra aleatoria $\theta = \hat{\theta}$ y varianza σ^2.. Sean

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{6}(Y_1^2 + Y_2 + 4)\ y\ \ \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2}(Y_3 + Y_5^2 + 3)$$

Revise si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son estimadores insesgados de θ

Encuentre la varianza de $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$

Se encuentran en el libro Estadística Matemática con Aplicaciones 7 edición Mendenhal Wackerly Scheafer 2008