Mercado de Capitales
Segundo Corte
Finanzas y Comercio Internacional

Andrés Martínez
MSc Stochastic Engineering
2020

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Contenido

Introducción

Nivel de Aversión al Riesgo [Bodie et al., 2009].

$$U = E(\mu) - 0{,}5A\sigma^2 \tag{1}$$

Donde A es considerado el factor de aversión al riesgo y 0.5 hace referencia la distribución simétrica de los retornos

El nivel de aversión al riesgo define que a mayor rentabilidad mayor riesgo, y por lo tanto el valor esperado de un activo $E[A]$ debería ser mayor a $E[B]$ si $V[A] > V[B]$

Distribución de Activos

La distribución de los activos se genera para disminuir el riesgo buscando a través de la diversificación del portafolio. [Sharpe, 1964]

La distribución básica se hace entre un activo libre de riesgo y un activo de riesgo.

$$E[\mu_c] = E[\mu_p]w_p + r_f w_f \tag{2}$$

Donde μ_p es el rendimiento del portafolio, μ_p el rendimiento del activo p, w_p el peso de la inversión en el activo, r_f la tasa libre de riesgo y w_f el peso de la inversión en la tasa libre de riesgo. Se puede ver $w_p + w_f = 1$ y por lo tano $1 - w_f = w_p$.

Distribución de Activos

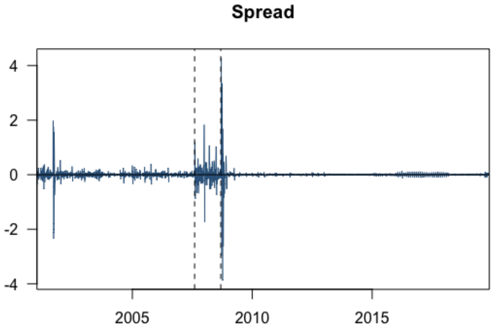
Se puede ver $w_p + w_f = 1$ y por lo tano $1 - w_f = w_p$, re escribiendo el peso como w y despejando 2.

$$E[\mu_c] = E[\mu_p]w + r_f(1 - w) \quad (3)$$
$$E[\mu_c] = r_f + w(E[\mu_p] - r_f) \quad (4)$$

Si se hace el mismo proceso con la volatilidad se puede ver que $\sigma_c = \sigma_p w$ y despejando, $w = \frac{\sigma_c}{\sigma_p}$(La volatilidad de r_f es cero).

Distribución de Activos

Las tasas de Interés



Distribución de Activos

Remplazando el resultado anterior en 4 el resultado es:

$$E[\mu_c] = r_f + \frac{\sigma_c}{\sigma_p}(E[\mu_p] - r_f) \tag{5}$$

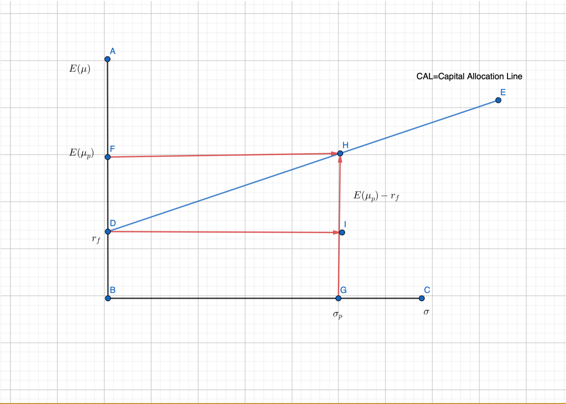
Donde $\frac{\sigma_c}{\sigma_p}$ es la proporción del riesgo del portafolio con respecto al activo. En conclusión mide la magnitud del riesgo de este portafolio en relación con el activo.

$$SR = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\sigma_c}{\sigma_p} \tag{6}$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

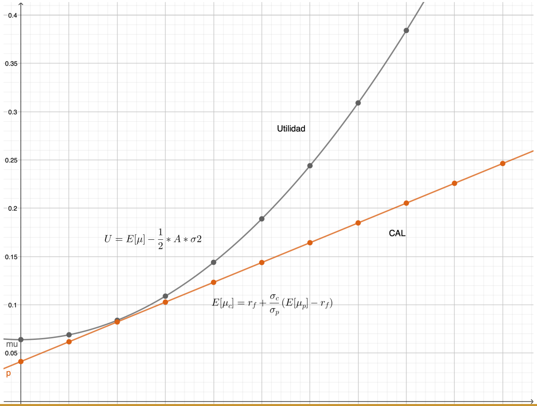
Distribución de Activos

Linea de distribución de capital CAL



Distribución de Activos

Linea de distribución de capital CAL



Optimización de Portafolios

Para un inversionista que desea armar una cartera, es decir, poseer acciones en diferentes instrumentos financieros, surge el siguiente problema: quiere invertir en los instrumentos financieros dados de tal manera que la cartera dada por esta inversión tenga el mayor rendimiento posible, por un lado, pero por otro lado Tiene el menor riesgo posible de pérdida.

Aspectos a considerar

- Le decisión de inversión
- Optimización de un portafolio de riesgo
- Inversión a largo o corto plazo

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

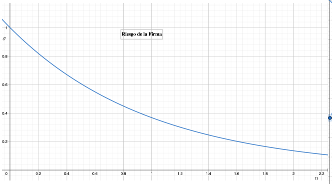
Optimización de Portafolios

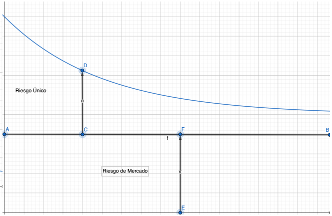
Diversificación y Riesgo

- Riesgo de Mercado
  - Se le atribuye a lo que no se puede minimizar
- Riesgo de Firma (especifico)
  - Se elimina con la diversificación
  - Se le conoce también como riesgo no sistemático

Optimización de Portafolios

Diversificación del Riesgo





Optimización de Portafolios

El enfoque de Markowitz [Markowitz, 1952], también denominado enfoque de expectativa de varianza , ofrece un compromiso entre las afirmaciones de maximizar los retornos y minimizar el riesgo.

1. Para $r \in R$ dada, se determina una cartera que tenga un rendimiento r mínimo esperado y minimice el riesgo entre todas las carteras que también tienen un rendimiento esperado de al menos r.
2. Para un nivel de riesgo dada $\sigma \geq 0$, se determina una cartera cuyo riesgo no exceda este límite y cuyo rendimiento esperado sea máximo entre todas las carteras que también cumplan con el límite de riesgo σ.

Optimización de Portafolios

Supuestos

1. Solo se considera un período de negociación único, $0 < t < 1$.
2. Los inversores pueden tener participaciones tanto positivas(largo) como negativas (corto)de inversiones de capital.
3. Tanto el préstamo como la inversión de un instrumento financiero se basan en la misma tasa de interés.
4. No hay costos de transacción.
5. Los precios de las acciones no están influenciados por órdenes individuales de los inversionistas.
6. Las mismas acciones tienen los mismos precios.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Optimización de Portafolios

Siendo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad calculado en un modelo financiero de un período, el precio de un activo financiero (S_0, S_1, P) depende de :

- Un vector $S_0 \in \mathbb{R}$ con $S_0 \neq 0$ para $i = 1, .., N$
- Un vector aleatorio $S_1 = (S_1^1, ..., S_1^N)$ con variables aletaorias cuadraticas $S_1^i \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Para $i \in \{1, ..., N\}$ es $S_i := (S_0^i, S_1^i)$ el instrumento financiero i del mercado (S_0, S_1, P).

Optimización de Portafolios

La variable aleatoria $R_i : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\omega \to \frac{S_1^i(\omega) - S_0^i}{S_0^i} \tag{7}$$

Es el rendimiento de un instrumento financiero

- El valor esperado del instrumento i es $\mu_i = E[R_i]$ que es el rendimiento esperado de S_i.
- El riesgo o la volatilidad σ es la desviación estandar.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Optimización de Portafolios

El rendimiento de un portafolio se obtiene con la suma de la multiplicación del valor ponderado con respecto a la media o el valor esperado de los rendimientos.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i \tag{8}$$

Donde w_i es la ponderación de acuerdo a cada uno de los activos dentro del portafolio.

Optimización de Portafolios

Retornos del portafolio

$$R_p = w_A * R_A + w_B * R_B \tag{9}$$

Donde A es una acción y B es un Bono mientras que w es el porcentaje de inversión en cada activo.

Optimización de Portafolios

Varianza del portafolio

$$\sigma^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2cov(R_A, R_B)w_A w_B \tag{10}$$

Donde σ_A^2 es la varianza de los retornos de la acción, σ_B^2 es la varianza de los retornos del bono y $cov(R_A, R_B)$ es la covarianza de los retornos entre la acción y el bono.

Covarianza del portafolio

$$cov(R_A, R_B) = \rho_{R_A,R_B}\sigma_A\sigma_B \tag{11}$$

Donde σ_A es la desviación estandar de los retornos de la acción, σ_B es desviación estandar de los retornos del bono y ρ_{R_A,R_B} es la correlación entre los retornos de la acción y el Bono.

Optimización de Portafolios

Eficiencia del Portfaolio

Un portafolio es eficiente cuando la rentabilidad $\mu_p \geq R_p$ que es el promedio de rentabilidad de portafolio de la ecuación ref(eq:pond) es mayor a la rentabilidad esperada por algún otro portafolio que no logre disminuir el riesgo σ en el mismo punto.

$$\sigma_p = min\{\sigma_p| \quad p \quad es \quad un \quad portafolio \quad con \quad \mu_p \geq R_p\} \tag{12}$$

Dado que existen diferentes perfiles de riesgo, también existen diferentes portafolio para cada perfil de riesgo formando lo que se conoce como la frontera de curva eficiente.

Optimización de Portafolios

Optimización del riesgo

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2cov(R_A, R_B)w_A w_B \\ &= (1-w_B)^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2cov(R_A, R_B)(1-w_B)w_B \\ &= (1-2w_B+w_B^2)\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2cov(R_A, R_B)w_B - 2cov(R_A, R_B)w_B^2\end{aligned} \tag{13}$$

Optimización de Portafolios

Se deriva σ_p^2 con respecto a w_B

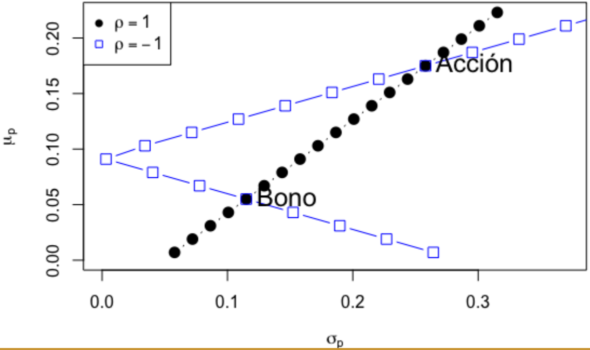
$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial w_B} = 2w_B\sigma_B^2 - 2\sigma_A^2 + 2w_B\sigma_A^2 + 2cov(R_A, R_B) - 4w_B cov(R_A, R_B) = 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} w_B(\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2w_B cov(R_A, R_B) &= \sigma_A^2 + cov(R_A, R_B) \\ w_B[(\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2cov(R_A, R_B)] &= \sigma_A^2 + cov(R_A, R_B) \end{aligned} \tag{15}$$

$$w_B = \frac{\sigma_A^2 - cov(R_A, R_B)}{(\sigma_A^2 + \sigma_B^2) - 2cov(R_A, R_B)} \tag{16}$$

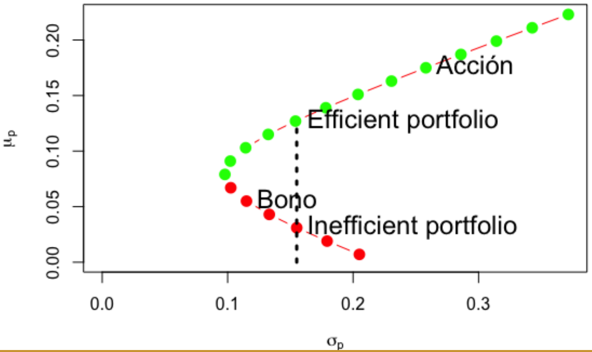
Optimización de Portafolios

Correlación



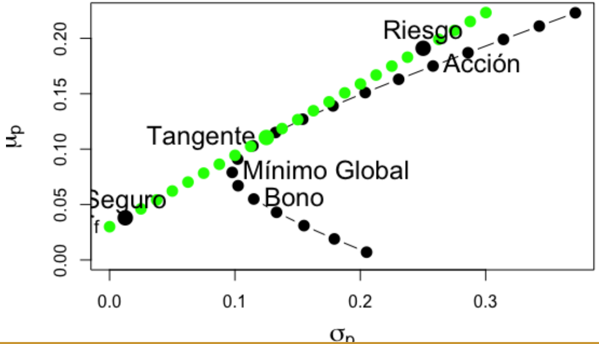
Optimización de Portafolios

Correlación



Optimización de Portafolios

Incluyendo acciones, bonos y CDTS



Optimización de Portafolios

Incluyendo acciones, bonos y CDTS: Al incluir un activo del money market, se puede optimizar el proceso a través de Índice de Sharp, que no es el de mínima varianza pero es el de mayor beneficio en términos de volatilidad.

La función objetivo es:

$$\max_{w_i} RS_p = \frac{E(\mu_p) - r_f}{\sigma_p} \tag{17}$$

Sujeto a $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Optimización de Portafolios

Solución en términos de los excesos de retorno es:

$$w_B = \frac{E(R_B - r_f)\sigma_A^2 - E(R_A - r_f)cov(R_A, R_B)}{E(R_B - r_f)\sigma_A^2 + E(R_A - r_f)\sigma_A^2 - [E(R_B - r_f) + E(R_A - r_f)]cov(R} \tag{18}$$

Una vez se obtiene este resultado se calcula el rendimiento del portafolio dado el nivel de riesgo y por último se calcula el índice de sharp para ese portafolio.

Optimización de Portafolios

Modelo de Markowitz

Usando un proceso matricial para el proceso de cálculo cuando se tienen más de dos activos, se pueden hacer los siguientes cálculos para obtener el valor esperado y la volatilidad.

El valor esperado del portafolio se obtiene de la siguiente forma:

$$r_p = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \cdots & \mu_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

Optimización de Portafolios

Modelo de Markowitz

Multiplicando la matriz de Varianza-covarianza con los pesos se obtiene la varianza del portafolio.

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & \cdots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \cdots & \cdots & cov_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & \cdots & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

Optimización de Portafolios

Modelo de Markowitz

Cuando se habla de un portafolio de mínima varianza, se busca minimizar el efecto del riesgo sobre el portafolio total y obtener una rentabilidad mucho mayor de la que se obtendría si solo se invierte en una sola acción.
Con ayuda del vector de valores esperados y la matriz de varianza y covarianza, se genera un proceso conjunto para obtener una inversión que garantice una eficiente distribución de los recursos.

Optimización de Portafolios

Modelo de Markowitz

Primero se obtienen los rendimientos partir de los datos generados en la simulación del valor esperado para cada uno de los días. Después se obtiene la media y la desviación estándar de esos rendimientos.
Una vez que se tienen los rendimientos se genera un proceso que permita a través de una matriz de varianza y covarianza, así como un vector de valores esperados generar un portafolio óptimo en donde se pueda minimizar el riesgo diversificando el capital en el portafolio.

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza

$w = (w_A, w_B, w_C)$

$$\begin{aligned}\min_{w_A, w_B, w_C} \sigma^2_{p,w} = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 \\ +2w_A w_B cov(R_A, R_B) + 2w_A w_C cov(R_A, R_C) \\ +2w_C w_B cov(R_B, R_C)\end{aligned}$$

$s.a \quad w_A + w_B + w_C = 1$

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza

$$
\begin{aligned}
L(w_A, w_B, w_C, \lambda) = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 \\
+2w_A w_B cov(R_A, R_B) + 2w_A w_C cov(R_A, R_C) \\
+2w_C w_B cov(R_B, R_C) \\
+\lambda(w_A, w_B, w_C - 1)
\end{aligned}
$$

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza

Condiciones de primer orden

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w_A} = 2w_A\sigma_A^2 + 2w_B cov(R_A, R_B) + 2w_C cov(R_A, R_C) + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w_A} = 2w_A\sigma_A^2 + 2w_B cov(R_A, R_B) + 2w_C cov(R_A, R_C) + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w_B} = 2w_B\sigma_B^2 + 2w_A cov(R_A, R_B) + 2w_C cov(R_B, R_C) + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial w_C} = 2w_C\sigma_C^2 + 2w_A cov(R_A, R_C) + 2w_B cov(R_B, R_C) + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = w_A, w_B, w_C - 1$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza

$$
\begin{bmatrix}
2\sigma_A^2 & 2cov(R_A, R_B) & 2cov(R_A, R_C) & 1 \\
2cov(R_A, R_B) & 2\sigma_B^2 & 2cov(R_B, R_C) & 1 \\
2cov(R_A, R_C) & 2cov(R_B, R_C) & 2\sigma_C^2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
w_A \\ w_B \\ w_C \\ \lambda
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
\tag{21}
$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza

$$\begin{bmatrix} 2\Sigma & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\mathbf{A}_w \mathbf{Z}_w = \mathbf{b} \tag{23}$$

$$\mathbf{Z}_w = \mathbf{A}_w^{-1} \mathbf{b} \tag{24}$$

Optimización de Portafolios

Portafolio de mínima varianza con un activo libre de riesgo

$$\max_{t} \frac{\mathbf{t}'\mu - r_f}{(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{1/2}} = \frac{\mu_{p,t} - r_f}{\sigma_{p,t}}$$

$s.a \quad \mathbf{t}'\mathbf{1} = 1$

$$l(\mathbf{t}, \lambda) = (\mathbf{t}'\mu - r_f)(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{-1/2}) + \lambda(\mathbf{t}'\mathbf{1} - 1)$$

Optimización de Portafolios

Condiciones de primer orden

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{t}} = \mu(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{-1/2} - (\mathbf{t}'\mu - r_f)(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})^{-3/2}\Sigma\mathbf{t} + \lambda\mathbf{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathbf{t}'\mathbf{1} - 1$$

$$\mathbf{t} = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}(\mu - r_f\mathbf{1})} \tag{25}$$

Bodie, Z. et al. (2009).
Investments.
Tata McGraw-Hill Education.

Markowitz, H. (1952).
Portfolio selection.
The journal of finance, 7(1):77–91.

Sharpe, W. F. (1964).
Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk.
The journal of finance, 19(3):425–442.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE