Apuntes: Riesgo

Profesor: Manuel Andrés Martínez Patiño

Universidad de La Salle

Índice

1. Introducción

En este curso se abordarán dos conceptos centrales, el primero, es la medición de riesgos financieros y se relaciona directamente con el proceso cuantitativo, en el cuál a través de métodos de cáluclo estadístico se obtienen índices para interpretar el nivel de exposición al riesgo. El segundo, tiene que ver con la administración y gestión de los riesgos, ys relacionan directamente con la implementación de los índices pata minimizar el nivel de exposición al riesgo. En este curso se abordarán los libros de [Hull, 2012] y [Jorion, 2000] como ejes centrales para entender los conceptos alrededor de la gestión y medición de los riesgos financieros.

El significado del riesgo dentro en un contexto financiero se relaciona principalmente al proceso de medición de variables que no se pueden determinar en un horizonte de tiempo, la razón se centra en las variaciones que no se pueden predecir y que dificultan entender la naturaleza los movimientos temporales en donde los cambios de volatilidad pueden ser estables o irregulares. Por lo tanto, el riesgo es todo aquello que está expuesto a un siniestro (un evento que genera pérdida).

El riesgo financiero se relaciona principalmente con la posición de una compañia o inversionista cuando compromete parte de su capital con el objetivo de generar una rentabilidad mayor de un rendimiento libre de riesgo, su objetivo es aumentar los excesos de retorno asumiendo una prima de riesgo a partir de los retornos esperados de los activos.

Sin embargo, limitar el análisis de riesgo al comportamiento de las series financieras y sus factores de riesgo, limita el proceso de la gestión de riesgos, pues este abarca todo el proceso financiero de una empresa en donde se incluye el comportamiento de los índices financieros así como el flujo de caja esperado e incluso los errores humanos que se pueden cometer en una labor. Adicional a los mencionados anteriormente, también se puede medir la procedencia de los recursos de capital buscando que no se generen en economía ilegales.

Las etapas del sistema de administración del riesgo son las siguientes:

- Identificación de riesgo
    - Percibir peligros, identificar fallas, reconocer consecuencias adversas
    - Preparación y planificación de seguridad.
- Evaluación de riesgos (estimación) y evaluación
    - Descripción y cuantificación del riesgo, estimación de probabilidades
    - Estimación de la importancia del riesgo, aceptación del riesgo, costo / beneficio
- Selección de la estrategia adecuada de gestión de riesgos.
- Implementación
- Monitoreo / mitigación de riesgos

La identificación implica entender los factores de riesgo externos e internos que pueden afectar a la entidad también se debe entender los factores de riesgo de los productos financieros, los procesos y los negocios.

1.1. Medición del Riesgo Financero

El proceso de medición se puede dividir se divide en dos partes la primera se centra en encontrar los parámetros de acuerdo a las variables que se tienen al momento de hacer la medición, y la segunda es hallar la generalización a través de un modelo de riesgo para encontrar una medida coherente que permita identificar el nivel de exposición al riesgo.

El tipo de riesgo que enfrenta una orgnización se puede diferenciar de acuerdo a los procesos financieros o productivos que esté realizando, es así que una entidad financiera prestará mayor atención a los riesgos asociados al mercado de capitales, mientras que una empresa del sector real prestará más atención a los riesgos asociados a los procesos operativos de la empresa.

Los tipos de riesgo más relevantes son:

- Riesgo de mercado: Perdida en la posición por cambios en los precios de activos financieros.
- Riesgo de crédito: Riesgo de contraparte, la posibilidad de que un deudor entre en deafult.
- Riesgo operacional: Perdida por un error en un proceso interno, (personas, sistemas) o agentes externos (Corrupción, desastres).
- Riesgo de liquidez: Es la que se exponen los agentes de mercado cuando no hay capital disponible para las transacciones.
- Riesgo de Lavado de Activos: Muy importante en países como Colombia, establece los parámetros para distinguir el dinero proveniente de economías ilegales.

1.2. Administración del Riesgo Financiero

En el sistema financiero internacional, la administración del riesgo financiero es uno de los pilares principales para mantener la confianza de las instituciones financieras. En la medida en que aparecen las crisis sociales, económicas o financieras crece la necesidad de establecer unas reglas de juego claras con respecto a la creación de instrumentos financieros y las buenas practicas por parte de los emisores, incentivando la necesidad de establecer un marco regulatorio que permita ser una carta de navegación para tener claros los conceptos que giran alrededor del nivel de exposición al riesgo y su efecto en los actores del mercado financiero.

Aunque estas explicaciones muestran que la gestión de riesgos es de gran beneficio, muchas empresas aún responden "No.ª la pregunta de si ya han establecido un sistema de gestión de riesgos. Esto no es sorprendente por varias razones, la primera es que no existe una división en las empresas para realizar estas actividades, la segunda se relaciona directamente con las decisiones estratégicas de las empresas que siempre se toman en base a experiencias y la medición de las oportunidades se realiza de forma subjetiva, por último en mercados en desarrollo las dificultades de tener un mercado competitivo puede hacer irrelevante el proceso de medición dado que se conocen los resultados de antemano eliminado un factor escencial como es la incertidumbre.

Desde principios de siglo y a causa de una crsisi financiera genera por la quiebra de la empresa ENRON la empresa de energía de Estados Unidos más importante en ese momento, se estableció que las empresas que emitian valores debían ejercer una práctica que se cono ce como gobierno corporativo que estipula que el consejo de administración de una sociedad anónima debe tomar medidas pertinentes para establecer un sistema de monitoreo que permita reconocer en una etapa temprana los eventos que pongan en peligro la existencia continua de la empresa. Sin embargo, es obviamente en la naturaleza del asunto que el simple reconocimiento de los riesgos esenciales no es suficiente, sino que también deben medirse, monitorearse y manejarse en consecuencia.

Tiene sentido entonces interpretar las ”medidas adecuadasrequeridas por la ley de manera bastante integral como gestión de riesgos y no solo como un sistema de detección temprana de riesgos.

La gestión de riesgos no es nada nueva, pero siempre ha sido una parte natural del desarrollo de cada empresa que se opera con la atención comercial necesaria. Todo empresario o gerente debe centrarse en temas como tratar con la prevención de daños o las perdidas sujetas a una mala desición estratégica. Tales enfoques han dominado durante mucho tiempo el área de gestión de riesgos, se han tomado medidas para optimizar la protección del rendimiento de la empresa desde una perspectiva de costos, se han elaborado planes de emergencia en caso de incendio o se han diseñado sistemas de control interno para proteger contra el abuso de confianza. Sin embargo, cuanto más actuaba una empresa con visión de futuro, más lidiaba con posibles interrupciones futuras que podrían conducir a desviaciones de los pronósticos de planificación corporativa.

El enfoque de la gestión moderna de riesgos ha cambiado claramente hacia un enfoque que integre las etapas del sistema de administración, y con buena razón, porque esto conlleva un considerable valor agregado económico para la propia empresa y también para su propietario.

La gestión de riesgos es una herramienta esencial con la cual la gerencia de la empresa puede sopesar los rendimientos esperados y los riesgos asociados con ellos al tomar decisiones clave. Esto es necesario, por ejemplo, al tomar decisiones de inversión o cambiar la estrategia corporativa, ya que diferentes estrategias implican diferentes riesgos.

Es un proceso que además crea transparencia sobre el alcance general del riesgo de una empresa y los riesgos individuales más importantes que lo determinan. Crea los requisitos previos para identificar, preparar e iniciar medidas adecuadas de gestión de riesgos que ayuden a estabilizar las ganancias de la empresa (flujos de efectivo) y reducir la probabilidad de crisis corporativas. Por lo tanto, hace una contribución decisiva para asegurar la existencia de una empresa y permite desarrollar medidas desde el principio. Por lo tanto, garantiza la capacidad empresarial para actuar.

El curso girará en torno a la medición de los tipos de riesgos, revisando de forma transversal las demás etapas que permiten tener una visión general de la gestión y administración del riesgo financiero, por lo tanto, los apuntes se distribuyen de la siguiente forma, primero se hace un repaso del marco regulatorio nacional e internacional, segundo se abordan los conceptos de probabilidad más importantes, tercero se trabaja el riesgo de mercado desde el enfoque del valor en riesgo, cuarto se aborda el riesgo de crédito y sus modelos más importantes y por último se trabaja el riesgo operacional.

2. Marco Regulatorio

EL primer paso de la gestión del riesgo financiero, parte de establecer unas reglas generales que permitan dar funcionamiento a las entidades especializadas garantizando la idoneidad en sus operaciones, esta primera sección menciona algunas de las entidades que se encargan de ofrecer esa carta de navegación en el proceso regulatorio, la segunda parte aborda el proceso de Basilea, y la tercera sus repercusiones en las leyes colombianas.

El objetivo principal de la regulación bancaria es garantizar que un banco tenga suficiente capital para los riesgos que asume. No es posible eliminar por completo la posibilidad de una quiebra bancaria, pero los gobiernos quieren que la probabilidad de incumplimiento de cualquier banco sea muy pequeña. Al hacer esto, esperan crear un entorno económico estable donde los particulares y las empresas confíen en el sistema bancario.

Es tentador argumentar que la regulación bancaria es innecesaria. Incluso si no hubiera regulaciones, los bancos manejarían sus riesgos con prudencia y se esforzarían por mantener un nivel de capital acorde con los riesgos que están tomando. Desafortunadamente, la historia no respalda esta opinión. No cabe duda de que la regulación ha jugado un papel importante en el aumento del capital bancario y en hacer que los bancos sean más conscientes de los riesgos que corren.

2.1. Entidades Reguladoras

La creación de sistemas de financiación que ayudará al sector privado a encontrar recursos de capital se convierte en un tema central de un país que espera generar crecimiento económico a través del aumento de la producción real. Debido a que los canales de financiación provienen del sistema intermedidado (Bancario) o del sistema no intermediado (mercado de capitales) y que su fuente puede ser ahorro privado o publico, es importante generar un escenario de credibilidad que permita a los actores de este ambiente financiero generar los movimientos de capital.

Para gestionar estos procesos regualtorios, existen entidades independientes o adscritas al gobierno que dan transparencia a todos los procesos operativos, en Estados Unidos la entidad gubernamental que vigila las operaciones se denomina la SEC, esta entidad regula todas las operaciones del mercado financiero en Estados Unidos y garantiza la transparencia en las operaciones, todas las compañias que tengan alguna relación con el sistema financiero le deben reportar a esta entidad sus operaciones con el fin de garantizar la legalidad de las mismas. El FINRA es una entidad que se encarga de vigilar las buenas practias de los brookers en Estados Unidos, se encarga de velar porque los trabajadores de esta entidades cumplan con los requisitios profesionales para el manejo de productos financieros, por útlimo existen entidades privadas que permiten llevar un registro de la veracidad de las empresas que se encuentran dentro del mercado financiero estas pueden ser del sector real también pues para los inversionistas requieren tener información de todos los emisores de títulos de renta variable y renta fija. Algunas de estas empresas son S&P, Moodys o Fitch. Cada una de estas empresas genera una calificación crediticia que permite estandarizar el desempeño de la empresa en terminos de su capacidad de pago. Una calificación se encuentra en el rango de AAA a D donde D significa default y AAA es la mejor calificación que puede obtener un emisor de valores.

Agencias Calificadoras			
Descripción Rating	**S&P**	**Ficth**	**Moody´s**
Prime	AAA	AAA	Aaa
Grado Inversionista	$AA+$ AA $AA-$ $A+$ A $A-$ $BBB+$ BBB $BBB-$	$AA+$ AA $AA-$ $A+$ A $A-$ $BBB+$ BBB $BBB-$	$Aa1$ $Aa2$ $Aa3$ $A1$ $A2$ $A3$ $Baa1$ $Baa2$ $Baa3$
Grado No Inversionista	$BB+$ BB $BB-$ $B+$ B $B-$	$BB+$ BB $BB-$ $B+$ B $B-$	$Ba1$ $Ba2$ $Ba3$ $B1$ $B2$ $B3$
Riesgo sustancial	$CCC+$	CCC	$Caa1$
Extremadamente especulativo	CCC	CCC	$Caa2$
Default Inminente	$CCC-$ CC C	CCC CCC CCC	$Caa3$ Ca Ca
Default	D	DDD	C

Son seis las categorias de las calificadoras y estas representan la capacidad de pago de los emisores de deuda, a mayor demora en el cumplimiento de sus obligaciones, la probabilidad de no pago aumentara, cada cierto período estas calificadoras evaluan a los emisores que pueden ser empresas o países, y de auerdo a factores financieros, políticos y económicos se genera una resultado de acuerdo al nivel de confianza que se tenga sobre el emisor. La ventaja de tener una buena calificación está relacionada directamente con la tasa de interés que se debe pagar por un título de deuda. Por lo tanto, en una escala de 2 % a 10 % por ejemplo, se puede decir que un emisor que obtiene una calificación de AAA que desee emitir deuda pagará una tasa del 2 %, mientras que un emisor con calificación CCC que no ha entrado en deafult pagará una tasa del 10 %. El 8 % que resulta de la resta entre la dos tasas, equivale a la prima de riesgo que un inversionista asume cuando desea obtener una tasa mayor que la tasa libre de riesgo.

El sistema financiero colombiano tiene dos entidades que regulan las operaciones y los participantes. El primero es la Superintendencia Financiera que se encarga de regular todas las operaciones y vigilar a las entidades financiera legalmente organizadas, toda entidad que no está vigilada se encuentra por fuera del sistema financiero y por lo tanto no puede ejercer funciones. Toda la documentación legal (Decretos, reglamentos, circulares) que está relacionada con los procesos financieros, es administrada por esta entidad y en ella se encuentra resguardada todas las acciones que se deben hacer para garantizar la transparencia en las operaciones.

La segunda entidad que se encarga de regular las actuaciones de los profesionales del sistema financiero se llama la AMV Autoregualdor del sistema financiero, esta entidad a través de procesos de seguimiento a operaciones y cerftificaciones, garantiza que los trabajadores del sistema financiero cumplen con los requisitos necesarios, también revisa las operaciones de las entidades financieras en busca de irregularidades.

2.2. Proceso de Basilea

Antes de 1988, las entidades de vigilanca bancarias dentro de un país tendían a regular el capital bancario estableciendo niveles mínimos para la relación entre capital y activos totales. Sin embargo, las definiciones de capital y las razones consideradas aceptables variaron de un país a otro. Algunos países aplicaron sus regulaciones con mayor diligencia que otros países. Cada vez más, los bancos competían a nivel mundial y se consideraba que un banco que operaba en un país donde las regulaciones de capital eran más flexibles, tenía una ventaja competitiva sobre uno que operaba en un país con regulaciones de capital más estrictas. Además, las enormes exposiciones creadas por los préstamos de los principales bancos internacionales a países menos desarrollados como México, Brasil y Argentina, así como los juegos de contabilidad que a veces se utilizan para esas exposiciones estaban comenzando a aumentar preguntas sobre la adecuación de los niveles de capital.

Otro problema era que los tipos de transacciones realizadas por los bancos se estaban volviendo más complicados. Si la contraparte en la transacción no paga cuando tiene un valor positivo para el banco y un valor negativo para la contraparte, el banco puede perder dinero. La posible exposición futura a transacciones financieras no se reflejó en los activos reportados por el banco. Como resultado, no tuvo ningún efecto en el nivel de activos reportados por un banco y, por lo tanto, no tuvo ningún efecto en la cantidad de capital que el banco debía mantener. Se hizo evidente para los reguladores que el valor de los activos totales ya no era un buen indicador de los riesgos totales asumidos. Se necesitaba un enfoque más sofisticado que el de establecer niveles mínimos para la relación entre el capital y los activos totales del balance.

El debate sobre el alcance de la regulación en el sistema financiero es bastante complejo, debido a la responsabilidad tanto del gobierno como de las entidades financieras con el público general. A pesar de los esfuerzos en la autorregulación por parte de las entidades financieras, los ciclos económicos y las diversas crisis financieras han mostrado que la creación de un reglamento y la intervención del estado en procura de la vigilancia de los recursos que los ahorradores depositan en las entidades financieras, hacen que sea necesario establecer unos estándares para garantizar la confianza en el sistema financiero.

Por lo tanto las entidades financieras se han visto en la obligación de generar las herramientas necesarias para mantener la credibilidad de sus funciones mediante la autorregulación que al no ser suficiente debe estar apoyada por una reglamentación que garantice el cumplimiento de estos procesos para encontrar síntomas que permitan análizar la situación en la que se encuentran las entidades financieras y que eviten situaciones que puedan desencadenar una crisis.

Dando respuesta a cada a las crisis de los últimos treinta años, se ha establecido un marco regulatorio internacional con el fin de estandarizar la vigilancia sobre el sistema financiero. Basilea es la sede donde se encuentra el Bank for International Settlements BIS en esta entidad se reunen cuatro veces al año los presidentes de los bancos centrales del G10 y discuten los procesos que se deben seguir en materia de regulación por parte de las entidades financieras, se adoptan las medidas mas convenientes para garantizar que las entidades financieras puedan responder por sus obligaciones y se evaluan los modelos matemáticos y financieros que se pueden implementar con el fin de medir el riesgo financiero en cada uno de sus áreas. No obstante aunque el comité de Basilea no tiene fundamento legal para intervenir en los procesos financeros de los países, tratar de formular las mejores prácticas.

2.3. Basilea I: Definición de Capital y el nacimiento del VaR

El Acuerdo BIS de 1988 fue el primer intento de establecer estándares internacionales basados en el riesgo para la adecuación del capital. Ha sido objeto de muchas críticas por ser demasiado simple y algo arbitrario. De hecho, el acuerdo fue un gran logro. Fue firmado por los 12 miembros del Comité de Basilea y preparó el camino para aumentos significativos en los recursos que los bancos dedican a medir, comprender y gestionar los riesgos. La innovación clave en el Acuerdo de 1988 fue la relación de Cooke.

El coeficiente Cooke considera las exposiciones al riesgo de crédito que están tanto en el balance como fuera del balance. Se basa en lo que se conoce como los activos ponderados por riesgo total del banco (a veces también se lo denomina monto ponderado por riesgo). Esta es una medida de la exposición crediticia total del banco.

En 1993, el G-30 (un organismo internacional formado por representantes de alto nivel de los sectores público y privado y la academia) publicó la historia de la gestión del riesgo un informe seminal que aborda por primera vez los llamados productos fuera de balance, como los derivados de manera sistemática. Casi al mismo tiempo, la industria bancaria vio claramente la necesidad de una gestión adecuada del riesgo de estos nuevos productos. El Value-at-Risk (VaR) nace como medida de riesgo de mercado.

En un mundo altamente dinámico con actividad de mercado las 24 horas, la necesidad de una valoración instantánea del mercado de las posiciones comerciales (conocida como mark to market) se convirtió en una necesidad.

En 1996, la importante Enmienda a Basilea I escribió un llamado modelo estandarizado para el riesgo de mercado, pero al mismo tiempo permitió que los bancos más grandes optaran por un modelo interno basado en VaR (es decir, un modelo desarrollado internamente) . El problema de la aspereza del riesgo de crédito seguía sin resolverse y los bancos continuaron afirmando que no se les dieron suficientes incentivos para diversificar las carteras de crédito y que las reglas de capital regulatorio vigentes eran demasiado insensibles al riesgo.

2.4. Basilea II y Solvencia II: Institución de los 3 pilares

La reestructuración del acuerdo de Basilea fue producto de dos eventos que se caracterizaron por dejar en evidencia la falta de control de las instituciones de vigilancia sobre la relación entre las empresas y las entidades financieras. Aunque es uno de los debates más importantes por los argumentos a favor y en contra de la regulación, esta etapa demostró que una alta desregulación puede llevar a las empresas a prácticas poco éticas y delictivas como lo que sucedio con Enron o incluso al incremento de la especulación con empresas innovadoras que son valoradas de acuerdo operaciones especulativas y no como resultado de una operación productiva de la empresa como sucedió con las empresas dotcom.

Para mejorar el proceso de vigilancia de las instituciones financieras y de las empresas , se evaluaron nuevos procesos de medición de riesgo de crédito y se implementaron nuevas medidas conocidas como códigos de buen gobierno para eliminar el desconocimiento por parte de los inversionistas en las empresas que cotizan en bolsa con títulos de participación o a través de instrumentos de deuda.

Estas medidas complementaron los acuerdos de Basilea I formando lo que se conoce desde ese momento como los pilares de Basilea, presentadas a continuación:

- *Riesgo de Capital*
    - Son los requerimientos de capital que se determinan a través del cálculo de la solvencia y el patrimonio mínimo que debe tener una entidad financiera para su funcionamiento.
- *Administración del Riesgo*
    - Estimación interna del Riesgo.
    - Gestión del Riesgo de Contraparte.
    - Liquidez para mantener los procesos en funcionamiento.
- *Código del buen Gobierno*
    - Desarrollo de políticas que den cuenta de la transparencia de los procesos de las compañias emisoras de títulos valores.

El primer punto refuerza lo acordadado en el primer acuerdo y habla sobre los requerimientos mínimos de capital que debe tener una entidad financiera si desea ofrecer los servicios de tipo comercial, estos son basicamente el patrimonio ténico y el nivel de solvencia mínimo para evitar ser intervenido por la entidad supervisora.

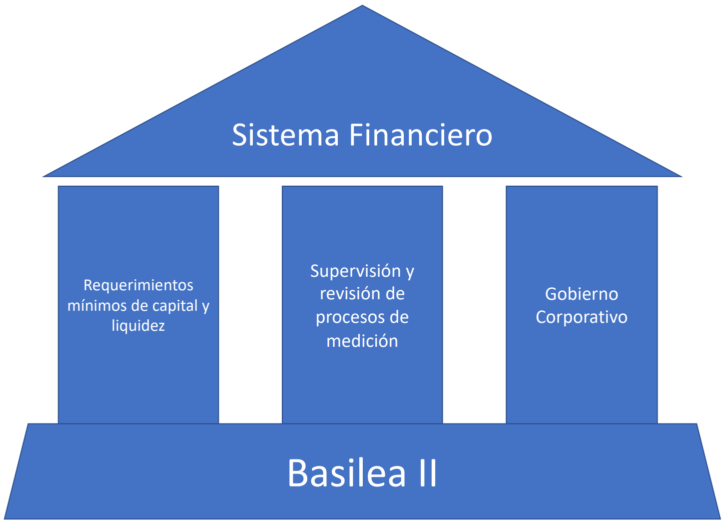


Figura 1: Pilares de Basilea

El segundo punto hace referencia a la entrega de los reportes que debe hacer cualquier entidad financiera a los entes de control a través de los procesos de medición y control de riesgo en todos sus niveles (mercado, crédito, operacional, liquidez y lavado de activos)

Como alternativa a esta perdida de confianza, nacio el nuevo pilar del marco regulatorio de Basilea conocido como código de buen gobierno, encargado de generar buenas practicas por parte de las compañias para incrementar la confianza en el mercado, estableciendo parámetros como la transparencia en los estados financieros, hacer publica cualquier información de interés y por último gestionar el desarrollo de sus estados financieros y la vigilancia de los mismos con diferentes organismos para mantener la independencia de la información.

El desarrollo del código fortaleció la estructura corporativa generando mayor eficacia en la emisión de los intrumentos financieros que provienen de las compañias, mientras que las actividades de control fortalecian los criterios de selección de los bancos que se encargaban de respaldar la emisión.

El riesgo de crédito de Basilea II en un contexto bancario,mejoró en torno al proceso de gestión. Según Basilea I y II, el riesgo crediticio de una cartera se evalúa como la suma de los activos ponderados por riesgo, es decir, la suma de las exposiciones nocionales ponderadas por un coeficiente que refleja la calidad crediticia de la contraparte (la ponderación del riesgo). En Basilea I, la solvencia se divide en tres categorías: gobiernos, bancos regulados y otros.

Por ejemplo, bajo Basilea I, el cargo de capital de riesgo para un préstamo a un prestatario corporativo es cinco veces mayor que para un préstamo a un banco de la OCDE. Además, la ponderación del riesgo para todos los prestatarios corporativos es idéntica, independientemente de su calificación crediticia categoría.

Debido a su bajo nivel de cálculo, la implementación de Basilea I es extremadamente simple. Pero con el establecimiento de bases de datos de riesgo de crédito más detalladas, la mejora de modelos analíticos y el rápido crecimiento en el mercado de derivados de crédito ha generado que los bancos presionen a los reguladores para que elaboren pautas de adecuación de capital más específicas de riesgo.

Las reglas sobre adecuación de capital para bancos y compañías de seguros conocidas bajo las palabras clave Basilea II y Solvencia II se han adoptado en la legislación colombiana y se implementan con ayuda de la Superintendencia Financiera.

La circular básica contable y financiera conocida como la circular externa 100 de 1995 encierrra toda la legislación que gira alrededor de los acuerdos de Basilea. Son en total treinta capítulos en donde se revisar todo alrededor de la gestión y medición de los diferentes riesgos. No obstante vale la pena resaltar los siguientes capítulos.

Cuadro 1: Circular Básica Contable

Capítulos de la Circular	
Capítulo 1	Evaluación de Inversiones
Capítulo 2	Gestión del Riesgo de Crédito
Capítulo 9	Valoración de carteras Colectivas
Capítulo 13-1	Relación de activos ponderados por su nivel de riesgo
Capítulo 13-14	Patrimonio Técnico y Relaciones Mínimas de Solvencia
Capítulo 18	Instrumentos financieros derivados y productos estructurados
Capítulo 21	Gestión del riesgo de mercado

La relación mínima de solvencia para los bancos en Colombia se encuentra en el capítulo XIII definido de la siguiente forma:

Las entidades de las que trata el presente Capítulo deben cumplir con los siguientes niveles mínimos de solvencia:

Relación de Solvencia Básica: Se define como el valor del Patrimonio Básico Ordinario dividido por el valor de los activos ponderados por nivel de riesgo crediticio y de mercado. Esta relación no puede ser inferior a cuatro punto cinco por ciento (4.5 %).

$$solvencia - basica = \frac{Patrimonio - Basico - Ordinario}{APNR + \frac{100}{9}VeRM} \geq 4{,}5\,\% \tag{1}$$

Relación de Solvencia Total: Se define como el valor del Patrimonio Técnico dividido por el valor de los activos ponderados por nivel de riesgo crediticio y de mercado. Esta relación no puede ser inferior a nueve por ciento (9 %).

$$solvencia = \frac{Patrimonio - Tecnico}{APNR + \frac{100}{9}VeRM} \geq 9\,\% \tag{2}$$

PT= Patrimonio Técnico calculado de acuerdo con las instrucciones impartidas en el Capítulo XIII.

APNR= Activos Ponderados por Nivel de riesgo crediticio calculado de acuerdo con las instrucciones impartidas en el Capítulo. XIII,

VeR_{RM}= Valor de la exposición por riesgo de mercado calculado de acuerdo con las instrucciones establecidas en el Capítulo XXI "Reglas relativas al sistema de administración de riesgo de mercado" de la CBCF

Con este capítulo la regulación financiera colombiana se adapta a los estándares internacionales, la diferencia entre cada uno de los acuerdos se encuentra en cómo se mide el valor en riesgo (VeR) en español, VaR en ingles y como se calculan los activos ponderados por el nivel de riesgo.

Este es el contenido principal de las nuevas propuestas de Basilea II, donde los bancos podrán elegir entre enfoques estandarizados o enfoques más avanzados basados en calificaciones internas (IRB) para manejar el riesgo de crédito. Sin embargo, la elección final también dependerá del tamaño y la complejidad del banco, ya que los bancos internacionales más grandes tendrán que optar por los modelos más avanzados.

2.5. Basilea III

Durante la crisis crediticia, se reconoció que algunos cambios eran necesarios para el cálculo del capital por riesgo de mercado. Estos cambios se denominan Basilea II.5. Además, Estados Unidos estaban detrás otros países en la implementación de Basilea II. Si Basilea II se hubiera implementado completamente al comienzo de la crisis, los niveles de capital de los bancos en Estados Unidos probablemente habrían sido más bajos Como ya se mencionó, la fecha de implementación para ellos fue el 31 de diciembre de 2011.

Hay tres cambios que involucran el acuerdo:

1. El cálculo de un VaR estresado
2. Un nuevo cargo por riesgo incremental
3. Una medida de riesgo integral para instrumentos que dependen de la correlación crediticia.

En Basilea I se requería capital por primera vez para el riesgo de mercado, esto permitió a los bancos basar el capital en una medida de VaR del 99 % a 10 días. La mayoría de los bancos utilizan la simulación histórica para calcular el VaR. Cuando los bancos calcularon el capital de riesgo de mercado antes de usar las reglas introducidas en 1996, la suposición subyacente en la simulación histórica era que los cambios porcentuales en las variables del mercado durante el día siguiente serían una muestra aleatoria de sus cambios diarios porcentuales observados durante el anterior a los cuatro años.

El período 2003-2006 fue uno donde la volatilidad de la mayoría de las variables del mercado fue baja. Como resultado, los VaR de riesgo de mercado calculados durante este período para fines de capital regulatorio también fueron bajos. Además, los VaR continuaron siendo demasiado bajos durante un período posterior al inicio de la crisis, porque gran parte de los datos utilizados para calcularlos continuaron viniendo de un período de baja volatilidad.

Esto llevó al Comité de Basilea a introducir lo que se conoce como una medida de "VaR estresado". El VaR estresado se determina basando los cálculos en cómo se movieron las variables del mercado durante un período de 250 días (12 meses) de condiciones de mercado estresadas, en lugar de cómo se movieron durante los últimos uno o cuatro años.

Los cálculos de simulación histórica para llegar a una medida de VaR estresada suponen que los cambios porcentuales en las variables del mercado durante el día siguiente son una muestra aleatoria de sus cambios porcentuales diarios observados durante el período de 250 días de condiciones de mercado estresadas.

Las medidas tienen el efecto de aumentar considerablemente el capital de riesgo de mercado que los grandes bancos deben mantener.

Las propuestas de Basilea III se publicaron por primera vez en diciembre de 2009. Luego de los comentarios de los bancos, un estudio de impacto cuantitativo y una serie de cumbres internacionales, la versión final de las regulaciones se publicó en diciembre de 2010.

Las regulaciones tienen seis partes:

1. Definición de capital y requisitos
2. Capital de conservación
3. Medidas anticiclicas
4. Ratio de apalancamiento
5. Riesgo de liquidez
6. Riesgo de crédito de contraparte

Las regulaciones se están implementando gradualmente entre 2013 y 2019.

3. Fundamentos de Probabilidad

Dado que el riesgo se asocia a la medición de los procesos de **Incertidumbre**, el concepto de variable aleatoria cobra importancia porque representa la forma en que se miden los factores de riesgo a través de la teoría de probabilidad con la que cada suceso ocurre y no se puede determina. Aunque su exactitud es inexistente, se puede estimar un valor esperado, así como la volatilidad(desviacón estandar) de un instrumento, con el fin de saber sus movimientos promedios y sus variaciones pósibles. Esta sección se basa en lo trabajado por [McNeil et al., 2015] y los ejercicios se pueden desarrollar usando el libro de [Jorion et al., 2007], capítulos uno, dos y tres. Para poder repasar los conceptos estadísticos y de probabilidad se recomienda el libro de [Wackerly et al., 2010].

Los factores de riesgo permiten construir un modelo para identificar el nivel de exposición al riesgo financiero que se está evaluando. Por ejemplo, el factor de riesgo de los precios de las acciones son sus rendimientos, mientras que en los bonos son las variaciones de las tasas de interés, si por otra parte se está revisando un flujo de caja, el logaritmo de las suma de los flujos descontados y rezagados es el factor de riesgo.

Al generar un número de escenarios probables, se espera obtener el promedio posible de los eventos futuros (Valor esperado) y la varianza para revisar que tanto puede variar ese valor esoerado, para obtener estas medidas, se asume independencia en las observaciones y por lo general una distribución normal (Aunque puede variar de acuerdo al comportamiento de las variables aleatorias), por lo tanto, a pesar del uso de datos históricos para la estimación de un valor futuro, se establece como condición principal que los sucesos de cada variable no tienen memoria.

Para calcular el valor esperado y la varianza, se debe establecer un experimento en un espacio de probabilidad, estos están compuestos por conjuntos que describen cada uno de los eventos conocidos como procesos aleatorios. Todos los resultados de los experimentos se generan en un conjunto Ω y luego estos a través de funciones de distribución se análisan en el espacio de los números reales $\mathbb{R}$. Por ejemplo $\omega \in A$ es un resultado de un experimento que está compuesto por un punto muestral ω y pertenece a un evento o conjunto A.

Los resultados de un experimento se representan a través de los conjuntos o diagramas de venn

Conjuntos	Resultado
$A \cup B$	A o B Unión (suma)
$A \cap B$	A y B Intersección (producto)
$A \setminus B$	En A pero no en B

El resultado complementario es $\overline{A} = \Omega \setminus A$ Significa que $\overline{A}$ es complemento de A y cuando los conjuntos son disyuntos $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

3.1. Definición de un espacio de probabilidad

Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es aquel que tiene un par de conjuntos, donde Ω es un conjunto finito con una función de probabilidad $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ que está dividido en subconjuntos en Ω donde cada uno es un número en el intervalo $[0, 1]$. Cada subconjunto tiene las siguientes condiciones:

i $P(\emptyset) = 0$

ii $P(\Omega) = 1$

iii $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Para dos conjuntos disyuntos $A, B \subseteq \Omega$

El espacio Ω puede establecerse como el conjunto de los resultados de todos los experimentos aleatorios. No obstante Ω es un subconjunto de $\mathcal{F}$ que se define como:

Siendo Ω un conjunto no vacío con una colección de subconjuntos $\mathcal{F}$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una σ álgebra con las siguientes propiedades [Shreve, 2004] :

- El conjunto vacío $\emptyset$ pertenece a $\mathcal{F}$
- Como sea que un conjunto $\mathcal{A}$ pertenece a $\mathcal{F}$, $\mathcal{A}^c$ también pertenece a $\mathcal{F}$.
- Como sea que unos conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ...\mathcal{A}_n$ pertenecen a $\mathcal{F}$, la unión $\cup$ de $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ...\mathcal{A}_n$ también pertenece a $\mathcal{F}$.

3.2. Propiedades

i $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii $P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$

iii $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

iv $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

v $A \subset B = P(A) \leq P(B)$

3.3. Experimento de Laplace

El experimento de laplace está compuesto por la probabilidad del conjunto A que es igual a los elementos de A dividido en los elementos de Ω.

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid}$$

3.4. Probabilidad condicionada

Para $P(A) \neq 0$ existe una probabilidad condicionada de dos subconjuntos en Ω por lo tanto la probabilidad condicionada de B con respecto a A es igual:

$$P_A(B) \equiv P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} para P(A) > 0$$

3.5. Independencia de Resultados

Dos conjuntos A y B son independientes siempre que:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

3.6. Probabilidad Total

Si no hay independencia en los resultados se dice que el evento la probabilidad del evento B $P(B)$ es la suma de todos los eventos que sueceden en $A_1, ..., A_n$ de esta forma:

$$P(B) = \sum_{i}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

3.7. Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_i^n P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

3.8. Valor esperado y varianza

Como se mencionó al inicio de esta sección el proceso de medición del riesgo se hace través de la teoría de probabilidad, que tiene como objetivo establecer unas funciones de distribución discretas y continuas y usar las medidas más relevantes para explicar los sucesos que se encuentran sujetos a procesos de incertidumbre.

3.8.1. Valor esperado

$$E[X] = \begin{cases} \Sigma_j x_j p_j^X & \text{para X discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx & \text{para X continua} \end{cases}$$

3.8.2. Varianza

Es definida como el valor esperado de la función que contiene la variable aleatoria X menos el valor esperado al cuadrado.

$$V[X] \equiv \sigma_X^2 = E[(X - E[X])^2]$$

Desviación estándar

$$STD[X] = \sqrt{V[X]} \equiv \sigma_X$$

$$V[X] = \begin{cases} \Sigma_j (x_j - E[X])^2 p_j^X & \text{para X discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f_x(x) dx & \text{para X continua} \end{cases}$$

4. Distribuciones de Probabilidad

Dado que existen variables dicretas y continuas, se debe establecer el experimento de acuerdo a lo que se desea medir, en riesgo financiero, pueden existir diferentes escenarios algunos de ellos son discretos como la probabilidad de caer en default y algunos continuos como por ejemplo la máxima perdida esperada si se realiza una inversión en un título de renta variable. Para esto existen **distribuciones discretas** y **distribuciones continuas** que facilitan los procesos de medición que hay en los modelos financieros.

4.1. Distribución Binomial

La distribución binomial es util al momento de medir experimentos como el incremento o decrecimiento de un flujo de caja en un intervalo de tiempo, dado que estos cambian cada mes, trimestre o año, se puede medir como una proceso discreto en donde el experimento puede ser si el flujo de caja aumenta o disminuye y obtener la probabilidad de que eso suceda.

$$\Omega = 0, 1, ..., n \; X \sim B(n; p)$$

(X tienen una distribución binomial con parámetros n y p).

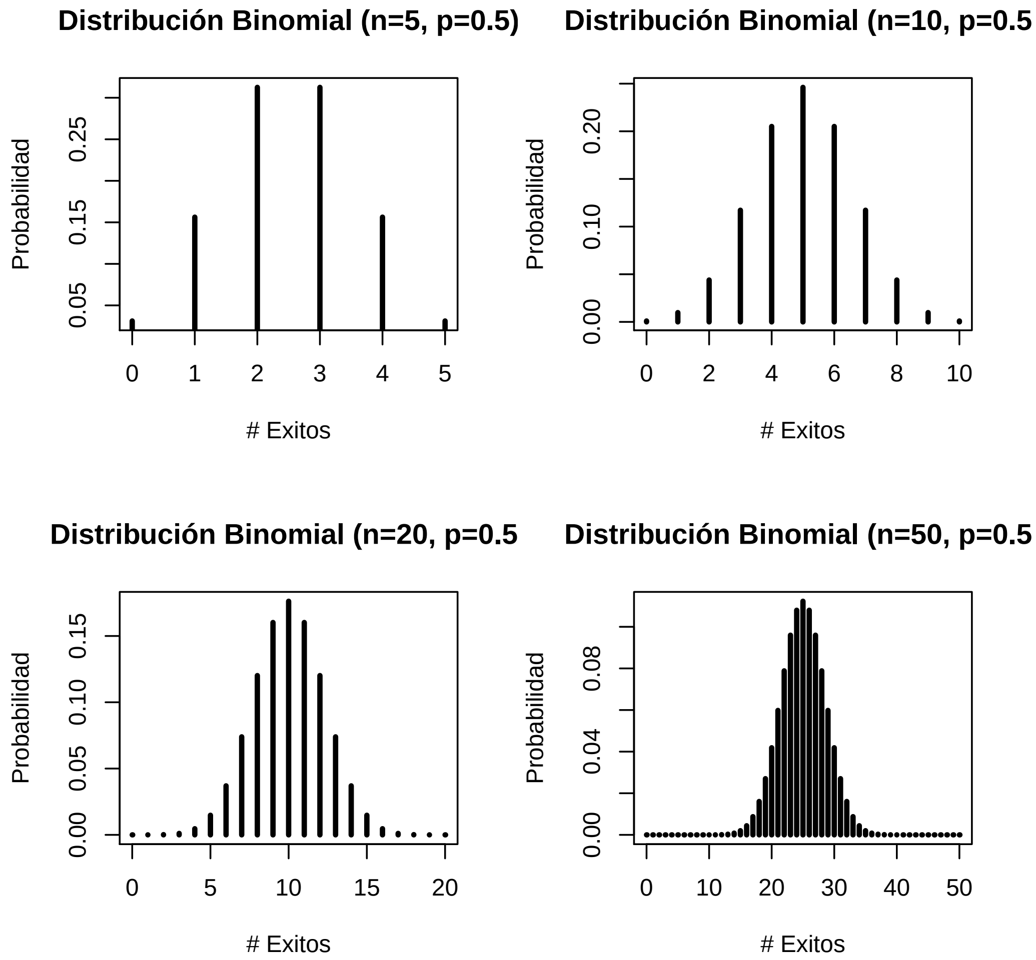
$$P(X = x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} p^x (1-p)^{n-x} \; (x \in W, p \in (0,1)) \tag{3}$$

La distribución binomial tiene como característica principal una probabilidad p y un número de elementos n. Quiere decir que los sucesos pueden ser p o $1 - p$ es decir solo hay dos posibilidades.

El valor esperado y la varianza son:

$$\mathbf{E}(X) = np$$

$$\mathbf{V}(X) = np(1-p)$$



4.2. Distribución Poisson

La función de distribución de probabilidad poisson, es una función de distribución discreta y tiene un parámetro conocido como lambda λ que indica el número promedio de eventos en un intervalo de tiempo. En términos de riesgo operativo se puede relacionar directamente con la probabilidad de cometer un error al generar un proceso en período de tiempo específico.

Su función de probabilidad es:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

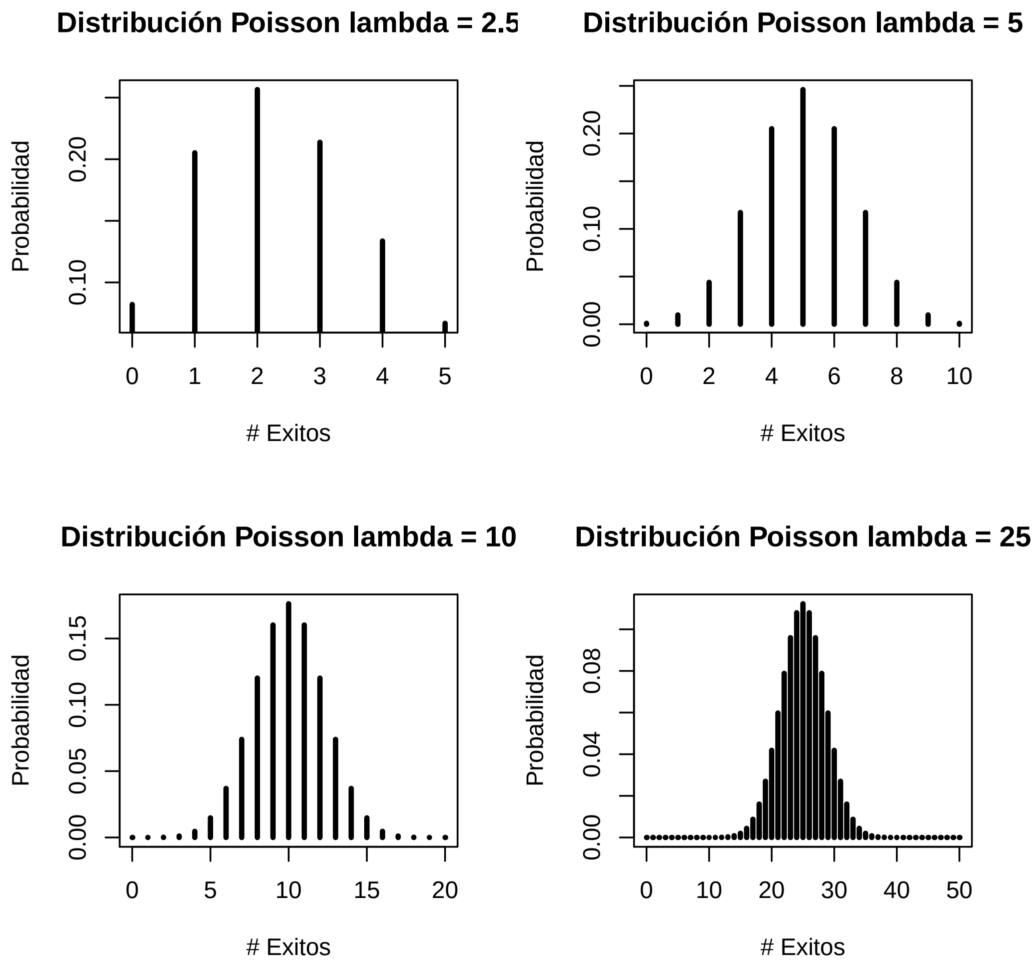
Mientras que la función de densidad se define como:

$$F(x) = \sum_{x=0}^{n} P(x) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x}{x!}$$

Con un valor esperado y una varianza de:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda$$

$$\mathbf{V}(X) = \lambda$$



4.3. Distribución Uniforme

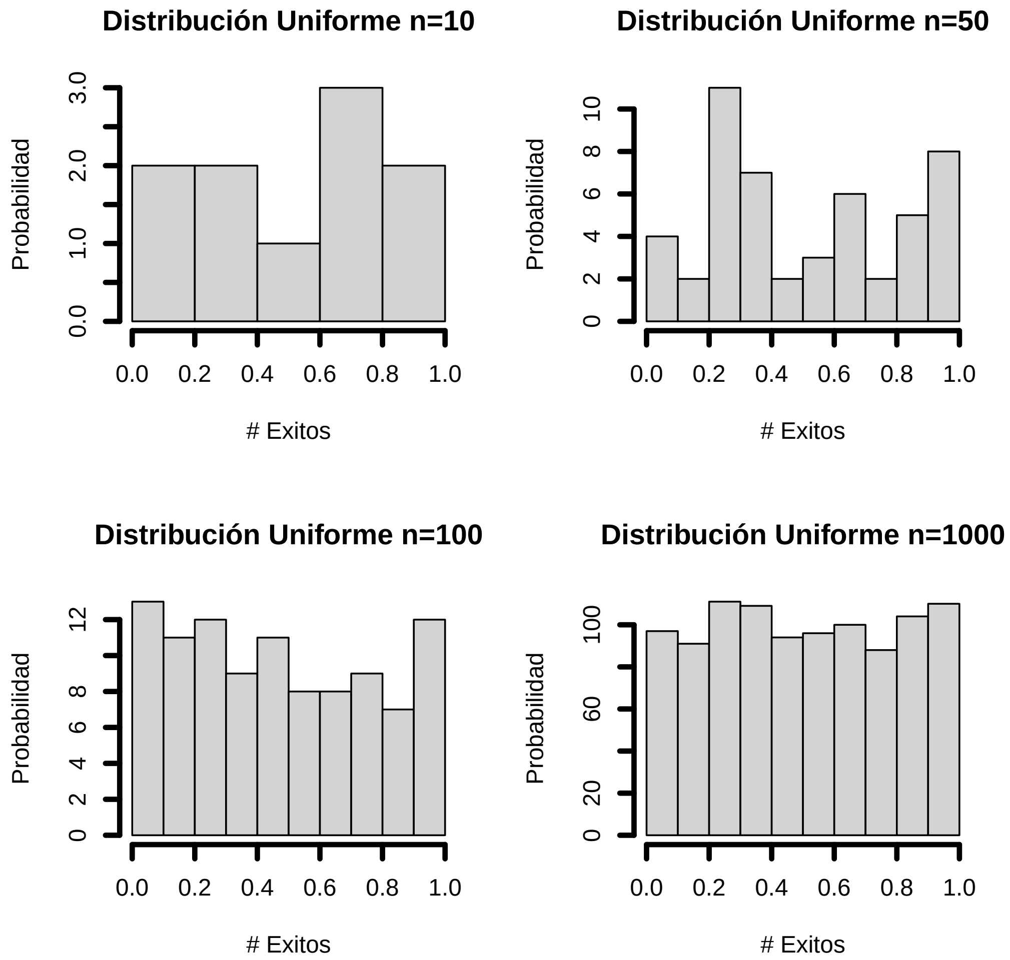
La distribución mas sencilla de la teoría de probabilidad, se encuentra entre dos intervalos $[a, b]$ y su distrubición igual se denota de la forma $X \sim \mathbb{U}(a, b)$ lo que quiere decir que esta función se distribuye de forma uniforme con parámetros a y b que son constantes en el espacio cartesiano.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{para} \quad a \leq x \leq b \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

El valor esperado y la varianza son:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$



4.4. Distribución Exponencial y Gamma

La distribución exponencial y la gamma permiten medir cambios temporales continuos como los que se presentan en una distribución poisson. Por lo tanto la función de densidad de una distribución exponencial se define como:

$$f(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x}$$

donde la función gamma es el area bajo la curva representada por la integral:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Resolviendo el valor esperado y la varianza se obtiene:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{k}{\lambda}$$

$$\mathbf{V}(X) = \frac{k}{(\lambda)^2}$$

4.5. Distribución Weibull

La distribución Weibull maneja dos parámetros y su función de densidad se describe como la distribución de una variable aleatoria $X \sim \mathbb{W}(k, \lambda)$ con $k > 0$ y $\lambda > 0$.

$$f(x) = k\lambda x^{k-1} e^{-\lambda x^k}$$

Su valor esperado y la varianza se expresan como:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda^{\frac{1}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

$$\mathbf{V}(X) = \lambda^{\frac{2}{k}} \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2,$$

4.6. Distribución Normal

La distribución normal es la más importante, dado que el factor de riesgo de casi cualquier instrumento se asume que se distribuye de forma normal, como se mencionó al inicio de esta sección, un ejemplo puede ser el rendimiento de la acción, en donde esta puede tener valores negativos o positivos, su media se encuentra alrededor de cero, y si se cumple su supuesto, su variaciones deberían distribuirse de forma simétrica entre 4 y -4. Sus parámetros son μ la media y σ^2 la varianza.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\mu \in (-\infty, \infty), \sigma > 0)$$

$$X \sim N(\mu; \sigma^2)$$

Función de distribución acumulada

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) du$$

4.7. Función de distribución estandar

$\mu = 0$, $\sigma = 1$: $X \sim N(0;1)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x)^2}{2}\right) \ (\mu \in (-\infty,\infty), \sigma > 0)$$

$$X \sim Z(0;1)$$

Función de distribución acumulada

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(\frac{-(x)^2}{2}\right) du$$

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

4.7.1. Propiedades de la distribución normal estándar

Siendo $X \sim N(0;1)$ con una densidad $\varphi(x)$ y una función de distribución $N(x)$ entonces:

i $\varphi(-x) = \varphi(x)$ la densidad es simétrica.

ii $N(-x) = 1 - N(x)$

- linearidad entre $F(x) \leftrightarrow N(x)$. Siendo $X \sim N(\mu;\sigma^2)$

  i $Y = aX + b : Y \sim N(a\mu + b; a^2\sigma^2) \ a \neq 0)$

  ii $F(x) \equiv P(X \leq x) = N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

El valor esperado y la varianza de la distribución normal se da como el promedio de las observaciones por lo tanto:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,$$

$$\mathbf{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2,$$

4.8. Distribución t de Student

Como alternativa de la distribución normal cuando esta tiene problemas de colas gordas está la distribución t de student que tiene v grados de libertad y que estima mejor los índices de riesgo cuando esto no cumplen con pruebas de normalidad. Un ejemplo de colas gordas o Fat tails, ocurre cuando los rendimientos presentan una alta volatilidad, haciendo que las acciones presenten altas variaciones en sus precios.

$$f(x) = \frac{\Gamma\frac{v+1}{2}}{\sqrt{\pi v}\Gamma\frac{v}{2}}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{\frac{-v+1}{2}}$$

Cuando la variable aleatoria tiene una distribución $Y \sim N(0;1)$ se puede decir que la función es igual a:

$$T = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{v}}}$$

4.9. Log Normal Distribución

Los precios de los instrumentos financieros tendrán este tipo de distribución, y esta es una de las razones por las cuales se trabaja mejor con rendimientos dado que este tipo de medición es más complejo.El resultado de la variable siempre es positivo como en los precios de los activos $x > 0$ y la variable aleatoria se distribuye $X \sim LN(0;1)$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}exp\left(-\frac{(ln(x)-\mu^2)}{2\sigma^2}\right)$$

Para toda variable aleatoria que se distribuye de forma normal, $X \sim LN(\mu;\sigma^2) \leftrightarrow exp(Y) = X \sim LN(\mu;\sigma^2)$.

Con un Valor esperado y una Varianza

$$\mathbf{E}(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}},$$

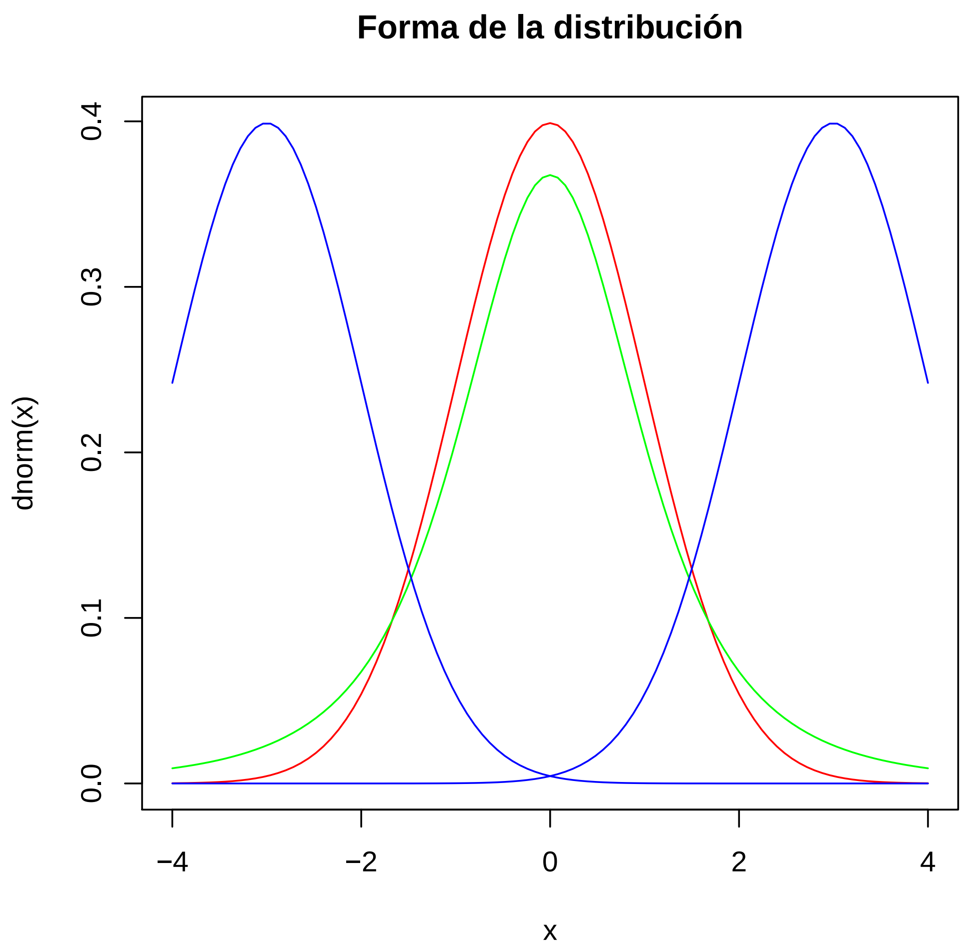
$$\mathbf{V}(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2-1}),$$

4.10. Proceso descriptivo

Esta sección se concluye con el análisis de la forma de una función de densidad, la mayoría de modelos que se van a abordar buscan que los factores de riesgo se distribuyan de forma normal, por lo tanto, entender las variaciones en la forma de distribución, ayuda a entender cuales son las complicaciones que se pueden tener al momento de calcular una medida de riesgo.

Las curvas son las formas que puede tomar una distribución continua, las medidas de riesgo se concentran en determinar el comportamiento de las variables, en la figura 4.10 las cuatro curvas explican las formas de la distribución de una serie financiera, la linea roja es la distribución normal, en cada uno de los modelos financieros, el primer supuesto es que los rendimientos se comportan de forma normal, es decir que el precio de un activo S que se comporta de forma log-normal, se evalua a través de sus rendimientos que se comportan de forma normal como en la linea roja. Cuando existen problemas de volatilidad, se puede tener una alta probabilidad de tener valores extremos, la linea verde representa este comportamiento, y como se puede leer en el código, una distribución t de Student es util para valorar este tipo de series, esto se da

```
> curve(dnorm(x), -4, 4, col = "red")
> curve(dt(x, df = 3), add = TRUE, col="green")
> curve(dnorm(x+3), -4, 4, add = TRUE, col="blue")
> curve(dnorm(x-3), -4, 4, add = TRUE, col="blue")
> title("Forma de la distribución")
```



cuando se tiene una baja curtosis $K < 3$ dado que una distribución normal tiene una curtosis $K = 3$ se puede decir que si la curtosis es baja, la posibilidad de tener eventos extremos es alta. Finalmente se puede observar dos lienas azules que representan el sesgo de una distribución, la distribución que concentra los datos a la izquierda y tiene valores extremos a la derecha, tiene un sesgo positivo $Sesgo > 0$, mientras que la que concentra los datos a la derecha y tiene valores extremos en la izquierda tiene un sesgo negativo $Sesgo < 0$.

La conclusión de esta gráfica, es que a través de las medidas de forma(Sesgo y Curtosis) se puede evaluar la simetria de una distribución y evaluar si se aproxima a una distribución normal. En el libro de [De Lara Haro, 2005] se aborda el estadístico de Jarque Bera, en donde se define el sesgo y la curtosis y luego a través de una prueba de hipótesis nula (Los datos se distribuyen de forma normal) con una distribución Chi cuadrado se establece si las observaciones siguen una distribución normal.

$$Sesgo = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^3}{(n-1)\sigma^3} \tag{4}$$

$$Kurtosis = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^4}{(n-1)\sigma^4} \tag{5}$$

El estadístico se obtiene con ayuda de la ecuación 4 y 5

$$LM = N\left[\frac{Sesgo^2}{6} + \frac{(Kurtosis-3)^2}{24}\right] \tag{6}$$

Si el estadístico es menor al teórico, se dice entonces que los datos se aproximan a una distribución normal, de lo contrario se puede rechazar la hipótesis nula y no asumir la normalidad de los datos. Dado que existe esta posibilidad, es importante determinar a través de otras pruebas como la de Kolmogorov- Smirnov la forma de la distribución y ajustar los modelos al comportamiento de las series.

4.11. Resumen

Esta sección se concentro en abordar los conceptos de probabilidad necesarios para entender los métodos de medición de riesgo más conocidos. En las secciones siguientes se buscará aplicar la teoría y relacionarlo directamente con los modelos financieros que se encargan de medir el nivel de riesgo. Entender los conceptos estadísticos básicos es el primer paso para entender la teoría de la medición y gestión del riesgo financiero.

5. Volatilidad

Un primer paso para entender la naturaleza del riesgo en las finanzas, es a través del estudio de la volatilidad; pues es la piesa inicial para entender como se generan las variaciones y los efectos sobre el valor esperado. Adicional a lo anterior, entender la volatilidad es entender como reaccionan esas variables financieras cuando se enfrentan a cambios económicos que pueden ser constantes o subitós. Esta sección se dsarrolla con ayuda del capítulo 5 de [Jorion et al., 2007] que trata sobre la modelación de factores de riesgo.

Una dificultad clave del modelado es que la volatilidad del mercado no es directamente observable; a diferencia de los precios del mercado, es una variable latente. Por lo tanto, la volatilidad debe inferirse al observar cuánto se mueven los precios del mercado. Si los precios fluctúan mucho, sabemos que la volatilidad es alta, pero no podemos determinar con precisión qué tan alto. Una razón es que no podemos distinguir si una gran conmoción en los precios es transitoria o permanente.

La naturaleza latente de la volatilidad significa que debe ser pronosticada por un modelo estadístico, un proceso que inevitablemente implica hacer suposiciones fuertes. De hecho, el modelado de volatilidad es bastante exigente y, a menudo, parece ser tanto un arte como una ciencia debido a los desafíos que plantea la presencia de problemas como las anormalidades, los grupos de volatilidad y las rupturas estructurales. La presencia de grupos de volatilidad sugiere que puede ser más eficiente usar solo las observaciones más recientes para pronosticar la volatilidad, o quizás asignar un mayor peso a las observaciones más recientes.

La volatilidad es el parámetro que registra las variaciones de los precios de cualquier activo financiero que está sujeto a incertidumbre. Definido de otra forma, es una medida que regisrta la intensidad con que los datos se alejan de un promedio durante un intervalo de tiempo y se registra como una amplitud que dependiendo de su altura refleja los fuertes cambios a los que puede estar sujeto un activo durante un período de tiempo. La metodología de la estimación varia según la necesidad del modelo y los datos o escenarios con los que se cuenta para poder encontrar ese valor.

El primer método de cálculo es la volatilidad histórica que es la mas común y facil de calcular, ya que se deriva directamente de la varianza de cualquier función de distribución y toma en cuenta todas las observaciones de los rendmientos de la serie de tiempo. Un segundo método de estimación se le conoce como suavizamiento dinámico o exponencial y busca calcular una volatilidad que no es constante en contraste con la hitórica que si asume una volatilidad constante, finalmente se encuentran los métodos de estimación ARCH y GARCH que toman en cuenta la dependencia de las observaciones y medidas no estacionarias y autocorrelacionadas entre si, pueden llegar a tener una mejor estimación en comparación con la volatilidad histórica que asume independencia total de las series. Por último se encuentra la volatilidad estocástica que se trabaja asumiendo procesos continuos y con supuestos de normalidad muy exigentes que pueden dificultar su implementación.

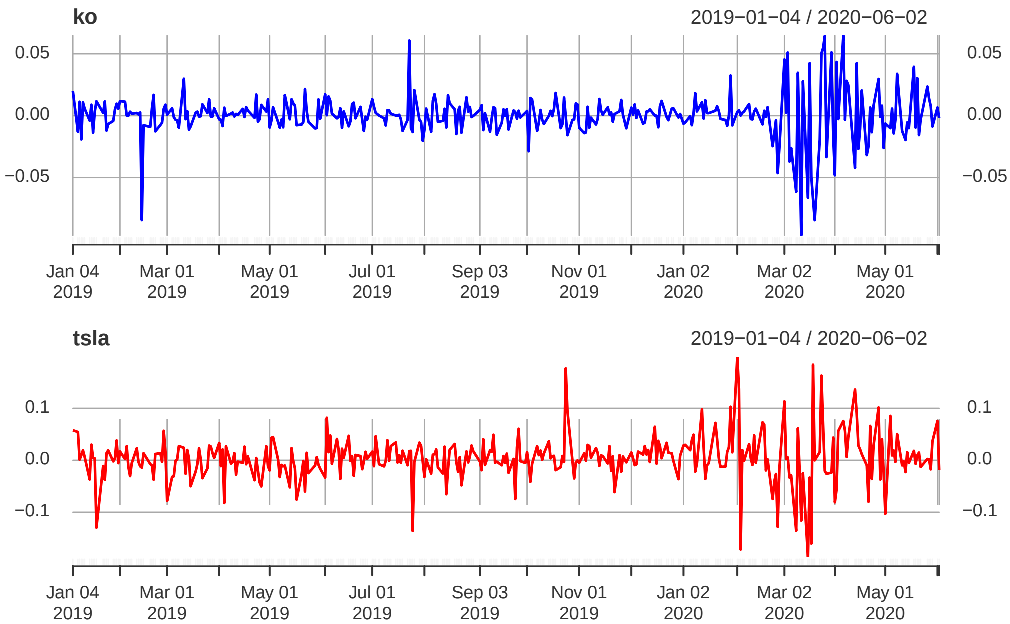
5.1. Volatilidad Histórica

La volatilidad histórica se cálcula con la desviación estandar de una función de distribución, la principal condición para que se pueda confiar en esta medida, es que la serie que se está evaluando debe ser estacionaría, dado que el promedio no discrimina entre valores grandes o pequeños cuando se está realizando el cálculo. Su forma numérica se obtiene gracias a la raíz de la sumatoria de las observaciones divido entre el número de obserciones que en este caso son los rendimientos.

Es la principal medida de riesgo en la mayoría de los análisis financieros. Es suficiente como medida de riesgo solo cuando los rendimientos financieros se distribuyen normalmente. La razón es que todas las propiedades estadísticas de la distribución normal son capturadas por la media y la varianza. Sin embargo, una presunción de normalidad para los retornos se viola para la mayoría, si no para todos, los retornos financieros. Por esa razón, el uso de la volatilidad como medida de riesgo puede llevar a conclusiones engañosas.

Figura 2: Rendimientos

```
[1] "KO"   "TSLA"
```



Esto se demuestra en la Figura 2. Si se usara la volatilidad para determinar el riesgo, seríamos indiferentes entre los dos activos, ya que la volatilidad y la media son las mismas en cada caso. Cada activo estaría en el mismo lugar en un diagrama de varianza media.

Sin embargo, de las cifras se desprende que los perfiles de riesgo de los dos activos son bastante distintos, y en la práctica diferentes inversores preferirían diferentes activos.

El nivel de inexactitud del uso de la volatilidad depende en la práctica de aplicaciones específicas. En muchos casos, los resultados extremos no son la preocupación y el uso de la volatilidad puede ser relativamente inocuo en tales casos. No se puede decir lo mismo de la mayoría de las aplicaciones en riesgo financiero donde la volatilidad probablemente subestime sistemáticamente el riesgo.

$$\sigma_{r_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(r_{t-i} - \mu_{r_i})^2} \tag{7}$$

En donde σ_{r_i} es la desviación estandar calculada de los rendimientos r del activo i, usando la media μ de los rendimientos del mismo activo.

Se puede ver por la división que se hace sobre el número de observaciones n, que este cálculo no puede distinguir períodos de alta y baja volatilidad así como coyunturas específicas que influyen directamente en los cambios de los precios de los activos lo que puede generar que a través de este proceso no se pueda estimar de forma efectiva la volatilidad.

5.2. Volatilidad con Suavizamiento Exponencial

Este método busca ponderar las observaciones desde las más antiguas a las más recientes, esté método usa un parámetro λ que le da mayor peso a un número de observaciones que se encuentran al final del período observado, su valor se encuentra en un intervalo entre $0 < \lambda < 1$, a medida que se acerca a uno le da mayor peso a las observaciones que se encuentran al final del período de observación.

$$\sigma_i = \sqrt{(1-\lambda)r_t^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2} \tag{8}$$

$$\sigma_i = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=0}^{\text{ínf}}\lambda^{i-1}r_{t-i}^2} \tag{9}$$

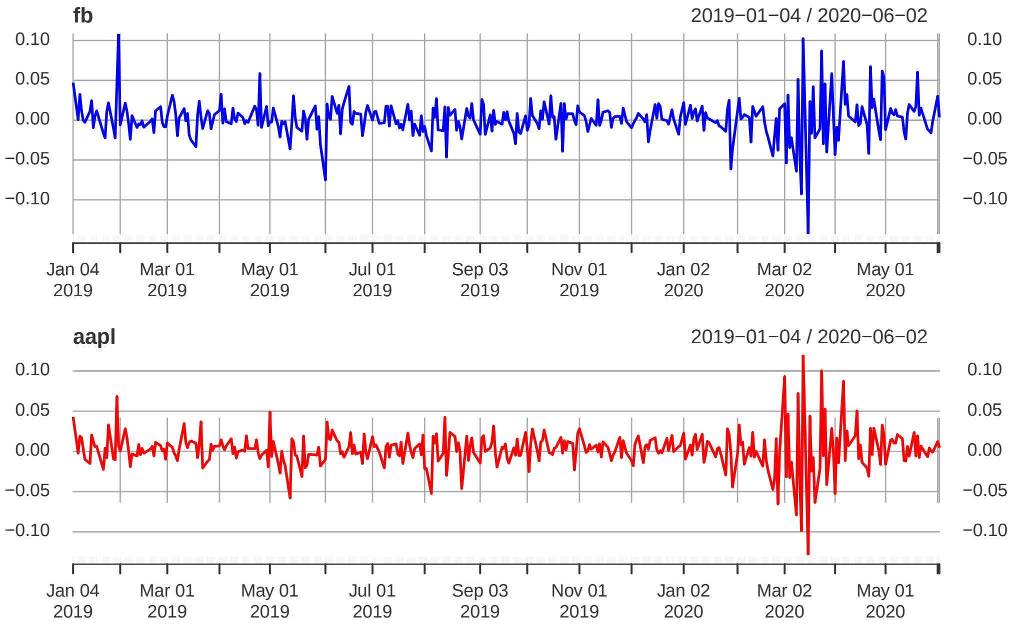
Las ecuaciones 8 y 9 muestran el calculo de la volatilidad para un período y para una serie entera, es decir que en la medida en que se tienen más observaciones la ponderación del calculo disminuye para valores más antiguos.

El único problema de este modelo es la elección del Lambda, puesto que generalmente se resuelve de forma arbitraria y su parametrización depende en algunas ocasiones de la subjetividad. Se puede llegar a estimar un Lambda que se ajuste al modelo pero generalmente no se realiza ningún cálculo para respaldar el valor de este parámetro.

La figura 3 muestra el problema que existe cuando se usa la volatilidad histórica, ya que como se puede observar en la ventana de tiempo, las variaciones con respecto a la media cambian a lo largo del tiempo, dejando claro que la volatilidad no es constante y que también puede tener períodos de fuertes movimientos, así como períodos de baja variación. Por lo tanto, la ventaja de este método es que estadísticamente usa un número de datos capaces de reconocer la naturaleza de la serie, pero al concentrarse en las últimas observaciones, toma en cuenta el comportamiento más reciente para evaluar la volatilidad.

Figura 3: Rendimientos no estacionarios

```
[1] "FB"   "AAPL"
```



5.3. Modelos ARCH y GARCH

La mayoría de los modelos de pronóstico de volatilidad que usan procesos discretos, pertenecen a la familia de modelos GARCH. El primer modelo de este tipo fue el modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH) propuesto por [Engle, 1982], pero el modelo ARCH generalizado (GARCH) de [Bollerslev, 1986] es el denominador común para la mayoría de los modelos de volatilidad. Posteriormente, ha surgido una rica familia de modelos GARCH, la mayoría de los cuales tienen un uso limitado.

La familia de modelos GARCH pertenece a la categoría de modelos de volatilidad condicional y se basa en el uso de una ponderación exponencial óptima de los rendimientos históricos para obtener un pronóstico de volatilidad. Los retornos del día t son una función de los retornos de días anteriores, donde los retornos más antiguos tienen un peso menor que los retornos más recientes. Los parámetros del modelo se estiman típicamente con la máxima probabilidad.

En ausencia de homocedasticidad, es factible pensar en pronósticar la varianza condicional de una serie.

Para observar en que medida una serie puede presentar problemas de heterocedasticidad, basta con observar los retornos, los retornor al cuadrado y los valores absolutos de los retornos.

ARCH(1): En un modelo $ARCH(1)$ se busca explicar el efecto de la varianza condicional con un período de resago. Los retornos son la variable que permiten generar la varianza y en la siguiente ecuación se puede apreciar que aunque los retornos son la base para explicar las varioaciones de una serie de tiempo no son precisamente la varianza que se desea pronósticar.

$$r_t = \sigma_{t|t-1}\epsilon_t \tag{10}$$

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha r^2_{t-1} \tag{11}$$

Donde α y ω son parámetros desconocidos

Proceso para construir un modelo ARCH: Para construir un modelo de volatilidad sobre el retorno de un activo se recomiendan estos cuatro pasos:

- Especificar la ecuación de media con una prueba de dependencia serial y si es necesario construir un modelo ARMA para los retornos de la series y remover cualquier dependencia lineal.
- Use los residuales de la ecuación de la media para probar efectos ARCH
- Especifique el modelo de volatilidad si el efecto ARCH es estadísticamente significativo y ajuste un modelo de media y volatilidad.
- Genere un proceso de prueba para el modelo ajustado,

Modelos GARCH: Uno de los principales problemas del modelo $ARCH$ es que si bien captura los efectos de los retornos para producir la varianza, no tiene en cuenta la varianza misma creada en el modelo. Para corregir este efecto, algunas vece se hace necesario observar si la varianza de los rezagos anteriores tiene un efecto sobre la varianza actual.

$$\sigma^2_{t|t-1} = \omega + \alpha r^2_{t-1} + \beta_1\sigma^2_{t-1} \tag{12}$$

La figura 4 es el resultado de estimar la volatilidad condicional con un modelo GARCH(1,1) para la acción de microsoft. La linea azul son los retornos, y la verde y roja son los límites de que pueden tener los retornos en caso de que la volatilidad aumente en una linea de tiempo. Se puede ver que cuando los retornos tienen una mayor variación estos límites también aumentan. El objetivo de estimar la volatilidad condicional con ayuda del modelo GARCH, es replicar el comportamiento de la serie azul y de esta manera medir la máxima distancia que puede haber cuando una serie se comporta de forma volatil.

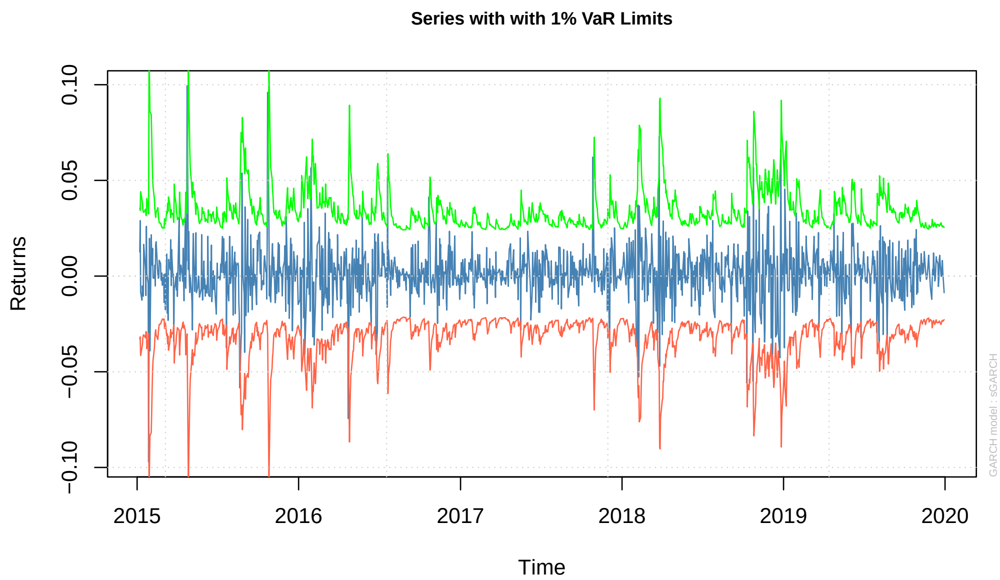
5.4. Modelo Binomial

Diversos autores han buscado representar los movimientos de los instrumentos financieros que están sujetos bajo incertidumbre. Muchos de ellos han optado por usar un modelo binomial, pues brinda las herramientas básicas a través de una tasa de interés y la volatilidad para mostrar los posibles cambios del precio de una acción, en un horizonte de tiempo determinado.

Figura 4: Rendimientos con varianza condicional

```
[1] "MSFT"

please wait...calculating quantiles...
```



En este espacio se usa el modelo que plantearon [Cox et al., 1979] en donde se establece una probabilidad de acuerdo a dos supuestos:

*La ausencia de arbitraje que es necesaria para mantener el escenario de incertidumbre.

*Los rendimientos tienen una distribución normal $ln\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right) \sim N(\mu n, \sigma^2 n)$ donde $log\left(\frac{S_n}{S_{n-1}}\right)$ son los rendimientos del precio de un instrumento financiero al momento S_n.

Se puede ver también que tanto μ como σ^2 se multiplican por n dado que son variables que miden el valor del dinero en el tiempo.

Recuerde que existe una medida probabilidad conocida como riesgo neutral Q ,que permite medir las variaciones delos precios bajo las condiciones de que hay arbitraje y los instrumentos se encuentran en un mercado completo.

Como se mencionó anteriormente es importante que no exista arbitraje en este modelo, ya que la no ausencia de arbitraje genera que la incertidumbre se pierda y el resultado sea seguro produciendo un evento determinista.

Para garantizar que el modelo se puede desarrollar se establece la siguiente desigualdad:

$$D < (1 + r) < U \tag{13}$$

Donde D es la magnitud cuando el precio cae y U es la magnitud cuando el precio sube, por otra parte r es la tasa libre de riesgo. Como se puede ver en la desigualdad 13 la tasa libre de riesgo que es la misma tasa de interés, debe ser menor a U y mayor que D cuando el precio de un instrumento financiero sube o baja.

El cálculo de U se obtiene con ayuda de la desviación estándar que en finanzas es la volatilidad, multiplicada por la raíz del tiempo(período), la raíz del tiempo parte de la suposición de que los rendimientos tienen una distribución normal y como ellos nos dan el valor del dinero en el número de períodos, siempre se deben multiplicar por n para obtener la equivalencia deseada (De igual forma que se plantea la equivalencia de tasas en Matemática Financiera). Dado que los parámetros de una distribución normal son media y varianza, cada una debe ser multiplicada por n entonces al obtener la raíz cuadrada de la varianza, se obtiene la desviación estándar multiplicada por la raíz de n.

Estos procesos se calculan a través de procesos continuos por lo tanto el valor al que sube un precio se obtiene con $U = e^{\sigma\sqrt{n}}$ mientras que el valor del precio cuando baja se obtiene con $D = e^{-\sigma\sqrt{n}}$.

Para calcular la probabilidad de este modelo, primero se define la magnitud del crecimiento y el decrecimiento del precio S de un activo de acuerdo al nivel de riesgo, que se conoce como la desviación estandar. De esta manera se representan los incrementos del precio con $U = e^{\sigma\sqrt{n}}$ y las caidas del precio como $D = e^{-\sigma\sqrt{n}}$. El ejemplo de la moneda sirve de introducción pata entender este proceso, en donde el resultado de una moneda que cae en cara $H = 1$ genera un incremento en los ingresos, mientras que un resultado contrario sello $T = -1$,disminuye los ingresos. Además, a mayor lanzamiento de monedas, mayor probabilidad de aumentar o disminuir las ganancias aunque siendo simétrico siempre existe el mismo valor esperado.

El número de lanzamientos de cada moneda se da por el literal n, de esta forma si se quiere conocer el valor del precio de una acción después de lanzar la moneda n veces, se está buscando el valor S_n

Antes de empezar se describe el conjunto Ω de todos los posibles resultados para el lanzamiento de una moneda.

$$\Omega = \{U, D\}^n = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}; \omega_i = U \quad o \quad \omega_i = D \tag{14}$$

En donde los resultados que se generan en Ω se ven reflejados en el espacio de los números reales $\mathbb{R}$.

$$X_n = \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega \rightarrow \omega_n \tag{15}$$

Por un lado se tienen los resultados cuando la moneda cae en cara

$$H_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega \rightarrow \#\{j \leq i : \omega_j = U\} \tag{16}$$

Y por otro lado se tienen los resultados cuando la moneda cae sello.

$$T_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega \rightarrow \#\{j \leq i : \omega_j = D\} \tag{17}$$

El precio de una acción al momento S_n se da por la multiplicación de los resultados de la variable aleatoria X_n que son los resultados de la moneda por S_0.

$$S_n = S_0 \Pi_{i=1}^n X_i = S_0 U^{H_n} D^{T_n} \tag{18}$$

El valor esperado del precio se calcula con ayuda de la función de distribución binomial y la definición de valor esperado:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{n} p_i X_i \tag{19}$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} labeleq : binom \tag{20}$$

Donde p y q son probabilidades, n el número de escenarios y x el valor que se desea obtener. Combinando **??** con 18 de acuerdo a los resultados de cara y sello se puede crear el valor esperado definido para una variable discreta y aplicandoló al precio de una acción usando la función de distribución binomial.

$$E_{\mathbb{Q}}[S_n|\mathcal{F}_n] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \widetilde{p}^x (1-\widetilde{p})^{n-x} S_0 U^x D^{n-x} \tag{21}$$

El valor esperado se obtiene con ayuda de **??** que es la combinación entre la definición de valor esperado de una variable discreta 19, la definición de probabilidad **??** y la ecuación para proyectar el precio 18, donde la variable aleatoria es el precio y la probabilidad $\widetilde{p}$ pertenece a la función de distribución binomial bajo una medida de riesgo neutral Q.

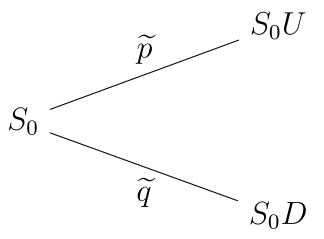
La varianza se calcula aplicando la propiedad $Var[x] = E[S_n^2] - E[S_n]^2$ junto con la ecuación **??**.

$$\widetilde{p} = \frac{(1+r) - D}{U - D} \tag{22}$$

Se puede ver en 13 $\widetilde{p}$ es el resultado de la combinación entre la tasa libre de riesgo y la posibilidad de que el precio suba o baje. Usando la propiedad de la probabilidad en donde $P(A^c) = 1 - P(A)$ se puede obtener $\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$.

En un período el modelo se presenta de la siguiente forma:

S_0 Precio del Activo

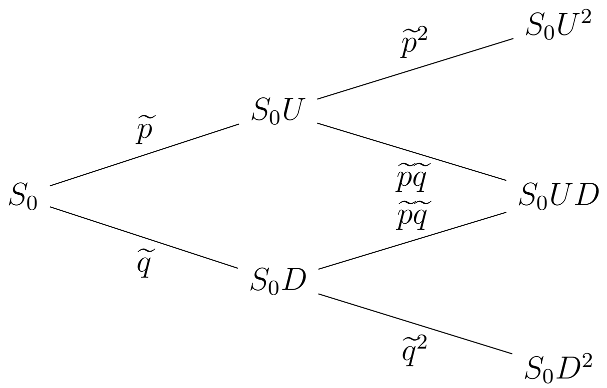


$\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$

$U = e^{\sigma\sqrt{t}}$

$D = e^{-\sigma\sqrt{t}}$

En dos períodos el modelo se presenta de la siguiente forma:



Para n períodos se recomienda seguir la ecuación 21 que generaliza el valor esperado del precio de una acción, con estas medidas se puede obtener la varianza y cualquier otro valor que se aleje de la media para tener diferentes escenarios en un período de tiempo discreto n.

5.5. Movimiento Geométrico Browniano

En esta sección se establece que una variable continua X se puede representar a través de un proceso estocástico conocido como Movimiento Browniano MB que sirve como proceso generado para el pronóstico de instrumentos financieros a través del Movimiento Geométrico Browinano, para entender mas acerca de estos procesos se recomienda leer [Shreve, 2004].

Movimiento Browniano Un Movimiento Browniano es una colección de caminatas aleatorias que se juntan para formar un proceso continuo. A medida que aumenta el número de caminatas aleatorias $n \to \infty$ el proceso se vuelve continuo y los intervalos pueden medirse de forma continua.

En los modelos financieros, se implementa como proceso generador de los movimientos aleatorios para mostrar los caminos que puede tomar el precio de una acción.

Definición [Shreve, 2004] Siendo un conjunto $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como un conjunto de probabilidad, para cada $\omega \in \Omega$ existe una función continua $W(t)$ que satisface $W(0) = 0$ y depende de ω. Por lo tanto, los incrementos de $W(t)$ se miden de la siguiente forma:

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), ..., W(t_n) = W(t_n) - W(t_{n-1})$$

El valor esperado de los incrementos y la varianza se definen de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}[W(t_1) - W(t_0)] = 0 \tag{23}$$

$$Var[W(t_1) - W(t_0)] = t_1 - t_0 \tag{24}$$

Para entender mejor la aplicación del Movimiento Geométrico Browniano (MGB) se puede ver primero la relación entre las funciones de distribución binomial y normala través del teorema del límite central obteniendo el precio de un instrumento financiero con ayuda de caminatas aleatorias que permitirán, con ayuda de la volatilidad (desviación estandar) y el rendimiento promedio del activo calcular el valor esperado, la varianza y otras medidas de riesgo que se abordarán más adelante.

Como se sabe, la distribución normal es aquella que trabaja con variables continuas y que tiene parámetros de media μ y varianza σ^2, por lo tanto, se dice que una variable aleatoria continua se distribuye $X \sim (\mu, \sigma^2)$, dado que estas variables obtienen sus parámetros derivados de su comportamiento en el tiempo, entonces se puede decir que $X_t \sim (\mu t, \sigma^2 t)$ donde t hace referencia al tiempo en el cuál se está valorando la variable.

La función de densidad de la distribución normal se define así:

$$f(x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{25}$$

Donde μ es la media y σ^2 la varianza.

Aproximación de la distribución binomial a la distribución normal

Para poder ver el precio de un instrumento financiero como una variable continua primerp se debe definir que es una caminata aletario discreta y una escalada.

Una caminata aleatoria simétrica, es un movimiento que surge del ejercicio de lanzar una moneda con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, n veces. Sus resultados pueden ser:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad \omega_j = H \\ -1 & \text{Si} \quad \omega_j = T \end{cases}$$

La distancia entre cada resultado es la diferencia de una variable aleatoria $X_n - X_{n-1} = \Delta X_n$ en donde la filtración $\mathcal{F}_{n \geq 0}$ permite obtener los parámetros de la distribución que deben ser i.i.d (independent, and identically distributed) por lo que la distancia de una variable aleatoria en una caminata se define como $\Delta X_n \sim i.i.d.$

Caminata Aleatoria re-escalada simétrica[Shreve, 2004] es una aproximación a un movimiento browniano (proceso estocástico continuo) se obtiene con ayuda de una caminata aleatoria simétrica donde la probabilidad de $p = \frac{1}{2}$.

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt} \tag{26}$$

Donde el valor esperado de los incrementos es:

$$\mathbb{E}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = 0 \tag{27}$$

Mientras que la varianza es igual a:

$$Var[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = t - s \tag{28}$$

Que es la suma de $n(t - s)$

El valor $W^n(t) = (W^n(t) - W^n(s)) + W^n(s)$ que es lo mismo que usar un valor inicial $W^n(s)$ mas una variación que se mide entre la distancia entre $W^n(t)$ y $W^n(s)$ en el tiempo.

Para $t \geq 0$, si $n \to \infty$ la distribución de una caminata aleatoria escalada $W^n(t)$ evaluada en t converge hacia una distribución normal con media 0 y varianza t. [Shreve, 2004]

El precio de una acción está distribuida de forma Log-Normal, usando las propiedades del modelo binomial, se puede obtener el límite mostrando que tiene el precio tiene desde una distribución binomial a una distribución Log Normal.

Siendo nt como entero para escalar el proceso, reformulando $U_n = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y $D_n = 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se puede obtener una nueva probabilidad de riesgo neutral.

$$\widetilde{p} = \frac{(1 + r) - D_n}{U_n - D_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{q} = \frac{U_n - (1 + r)}{U_n - D_n} = \frac{\sigma/\sqrt{n}}{2\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

Esta nueva probabilidad presenta un proceso simétrico, donde el precio de la acción al momento t es determinado por el precio inicial S_0 y el resultado de los primeros nt lanzamientos de moneda.

$$nt = H_{nt} + T_{nt}$$

La caminata aleatoria M_{nt} es el número de caras menos el número de sellos.

$$M_{nt} = H_{nt} - T_{nt}$$

el valor de H_{nt} y T_{nt} se obtiene juntando esas dos ecuaciones usando una caminata aleatoria.

$$H_{nt} = \frac{1}{2}(nt + M_{nt}) \quad T_{nt} = \frac{1}{2}(nt - M_{nt})$$

Cambiando un poco la ecuación 21

$$S_n(t) = S(0)U_n^{H_{nt}}D_n^{T_{nt}} = S(0)\left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt+M_{nt})}\left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{2}(nt-M_{nt})}$$

Teorema Para $n \to \infty$ la distribución de $S_n(t)$ converge hacia la distribución de:

$$S(t) = S(0)exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \tag{29}$$

Donde $W(t)$ tiene media 0 y varianza t.

$$\begin{aligned} logS_n(t) &= logS(0) + \tfrac{1}{2}(nt + M_{nt})log\left(1 + \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(nt - M_{nt})log\left(1 - \tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ logS(t) &= logS(0) + \sigma W(t) - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t \end{aligned}$$

$$logS(t) - logS(0) = \sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t \tag{30}$$

Esto establece que a mayor cantidad de ensayos, es más probable que estos se puedan leer a través de los parámetros de la distribución normal. Este modelo no tiene tendencia por lo tanto μ no se encuentra dentro del modelo por lo que la tasa de crecimiento del activo es cero.

Incluyendo la tendencia μ

La representación de los precios se puede presentar con los conceptos básicos de matemática financiera, en donde el valor futuro de un activo se calcula con ayuda del valor actual y un promedio geométrico en el tiempo que determina a que velocidad está creciendo el dinero.

Sin embargo, si la inversión se hace sobre instrumentos financieros que tiene una exposición al riesgo y son un proceso estocástico, además de la tasa libre de riesgo se espera obtener una mayor renatbilidad que generalmente se asocia a la volatilidad de los rendimientos.

Siendo r la tasa libre de riesgo, el rendimiento promedio de un activo debería ser igual a $\mu = r + \frac{1}{2}\sigma^2$ donde σ es la desviación estándar de los rendimientos, también conocida como la volatilidad.

El concepto de valor del dinero en el tiempo en términos continuos sirve como antesala de la ecuación MGB que calcula el precio de un activo a través de un proceso estocástico conocido como movimiento browniano MB

$$VF = VAe^{rt} \tag{31}$$

Donde VF es el valor futuro, VA el valor actual, r la tasa libre de riesgo y t el tiempo. Esta ecuación es perfecta para un proceso determinista o un activo libre de riesgo que solo crece a una tasa r.

Una acción por otra parte podría valorarse de la siguiente forma:

$$S_t = S_0 e^{rt} \tag{32}$$

Donde S_t es el precio futuro de la acción, S_0 el valor presente, μ la media de los rendimientos de la acción y t el tiempo.

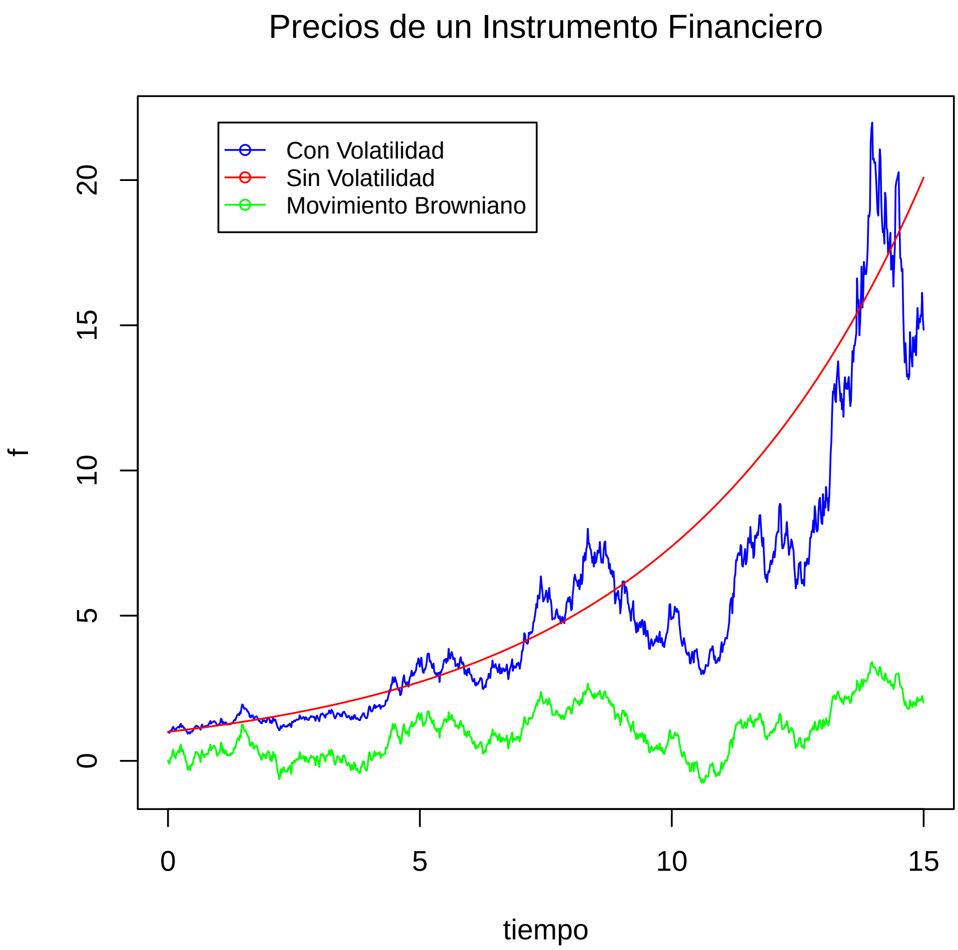
Si se gráfica esta ecuación se podrá ver que el resultado no refleja realmente el comportamiento de una acción, ya que crece a una tasa constante. Por lo tanto, es necesario agregarle el proceso estocástico generador $W(t) = \sqrt{t}Z$.

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z} \tag{33}$$

Esta ecuación se encuentra desarrollada en diferentes modelos aplicados a finanzas y se puede encontrar en el libro de @hull2013fundamentals. Esta ecuación representa de forma aproximada los movimientos del precio de una acción incluyendo el proceso de incertidumbre generado por la distribución normal. Se puede ver además que a diferencia de la ecuación ref(eq:VFS), la ecuación ref(eq:BSC) tiene la desviación estándar σ que es la raíz de la varianza, la raíz del tiempo $\sqrt{t}$ y Z que es la distribución normal estándar y es la que se encarga de generar el proceso aleatorio.

La representación gráfica del proceso se hace con ayuda de tres lineas en donde se representa un proceso determinista como los que se abordan en matemática financiera, un proceso aleatorio que se mueve con ayuda del tiempo y una variación estandar reflejando los procesos que se presentan en estadística y por último un proceso que refleja la unión de las dos asignaturas y que da como reslutado la representación de un instrumento financiero.

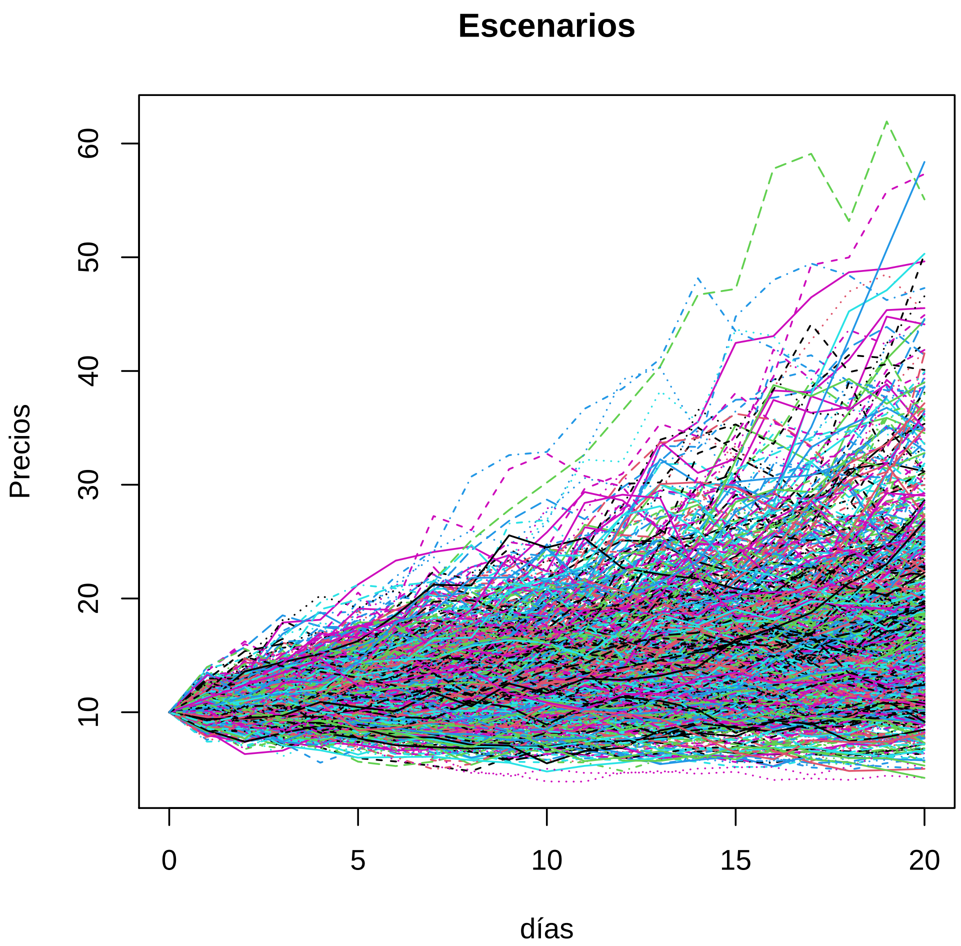
La figura de precios de un instrumento financiero 5.5 muestra el precio de una acción en rojo cuando solo crece a una tasa μ a lo largo del tiempo como lo muestra la ecuación 32 que es un proceso determinista, en este caso el efecto de la volatilidad y la distribución normal no genera un efecto directo sobre el precio de la acción y por esa razón solo se aprecia una linea roja sin variaciones y con un crecimiento constante.



Precios de un Instrumento Financiero
Con Volatilidad
Sin Volatilidad
Movimiento Browniano
f
0
5
10
15
20
0
5
10
15
tiempo

La linea verde es una caminata aleatoria construida con la ayuda de una distribución normal a través de una linea de tiempo, las observaciones se forman de manera aleatoria generando un proceso estocástico con ayuda de una distribución normal. Por último se encuentra el MGB representado en la linea azul como se plantea en la ecuación 33 que tiene en cuenta la tendencia μ y el proceso de volatilidad σ multiplicada por el proceso estocásstico MB $W(t) = \sqrt{t}Z$.

Sin embargo, para implementar el concepto de valor esperado y varianza, es importante entender que se debe generar una cantidad considerable de escenarios que garantice que se está teniendo en cuenta absolutamente la mayoría de las posibilidades que puede llegar a tener el precio de una acción en el futuro no solo uno,por lo tanto, el siguiente paso consiste en generar los posibles eventos para poder calcular el valor esperado y la varianza del precio de una acción.



5.6. Resumen

En esta sección se abordó el concepto de la volatilidad, cuales son sus características, y algunos métodos de medición. Comprender este capítulo ayudará a reforzar porque el riesgo se mide a partir de la distancia que hay entre el valor medio y la máxima distancia que este puede tomar en un horizonte de tiempo.

6. Riesgo de mercado

El riesgo de mercado se ocupa de valorar los instrumentos financieros que dependen del tiempo buscando la máxima perdida esperada en una inversión, se mide a través de los cambios en las posiciones del mercado, para medirlo existen dos formas, la primera es en terminos absolutos que es la cantidad en términos monetarios, por ejemplo cuantos dólares se perderán si existe una bancarrota, y la segunda en términos relativos que hace referencia a el rendimiento negativo que representa la perdida. La legislación colombiana define el riesgo de mercado en el capítulo 21 de la circular 100 de la tabla 4 que se mencionó en la primera sección.

Riesgo de Mercado *Para los efectos del presente capítulo se entiende por riesgo de mercado la posibilidad de que las entidades incurran en pérdidas asociadas a la disminución del valor de sus portafolios, las caídas del valor de las carteras colectivas o fondos que administran, por efecto de cambios en el precio de los instrumentos financieros en los cuales se mantienen posiciones dentro o fuera del balance.*

Los instrumentos financieros principales en los cuales se hace la medición del riesgo de mercado son:(Para entender mejor cada uno de los productos se recomienda leer [Jorion, 2000])

- Acciones
- Bonos
- Divisas
- Derivados
    - Futuros/ Forwards
    - Opciones
    - Swaps

Por lo tanto, cualquier entidad vigilada por la Superfinanciera que tenga portafolios de inversión constituidos por algunos de estos activos y otros que se encuentran en la circular, deben medir y gestionar el riesgo de mercado.

Para poder medir cada uno de estos instrumentos, se debe conocer primero su factor de riesgo, que es el instrumento que permite medir las variaciones y determinar la sensibilidad de cada uno de estos instrumentos.

Cada uno de los activos nombrados en la tabla 2 tiene su propio factor de riesgo que no es el único, pero sirve para generar las medidas básicas de riesgo.

Cuadro 2: Factores de Riesgo

Activo	textbfFactor de Riesgo
Acciones	Logaritmo de los Precios $ln\frac{S_t}{S_{t-1}}$
Bonos	Tasa de interés, Curva cero cupón, Spreads de tasas
Divisas	Tasa de cambio $ln\frac{FX_t}{FX_{t-1}}$
Derivados	Logaritmo de la superficie de volatilidad
Crédito	Número de Defaults
Trading alta frecuencia	Tiempo de actividad de volumenes de negociación
Estrategias	Ganancias acumuladas

6.0.1. Acciones

Las acciones se pueden analizar a través de sus rendimientos, de esta forma, el precio de una acción S_t se evalua con respecto al precio pasado de la misma S_{t-1} con ayuda del logaritmo para obtener el rendimiento R.

$$R = ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \tag{34}$$

El rendimiento de un activo se puede aproximar a una distribución normal facilitando la parametrización del modelo.

6.0.2. Bonos

A pesar de que los bonos son títulos de renta fija, estos están expuestos al riesgo a través del cambio de tasas y una vez el inversionista asume una posición (largo o corto), la tasa de interés de mercado genera cambios en el precio actual de bono.

Un bono se analisa con ayuda de diferentes herramientas, debido a que este depende de dos factores, el primero es la tasa de interés y el segundo es el tiempo, por lo que a diferencia de las acciones, en los bonos no basta solo con obtener el rendimiento a partir de la variación de los precios.

Partes de un Bono

- Precio Limpio
- Precio Sucio
- Cupón
- Tasa de mercado
- Valor facial
- Valor Nominal

- Tiempo de maduración

El cálculo del precio sucio varia de acuerdo al tipo de bono con el que se está trabajando.

Bonos sin Cupón para $0 < t < T$

- $B(0,T) = e^{-r(T-0)}$
- $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$
- $B(T,T) = 1$

Bonos con Cupón para $0 < t < T$

- $B(t,T) = c\left[\frac{(1+r)^{(T-t)}-1}{(1+r)^{(T-t)}r}\right] + \frac{100}{(1+r)^{(T-t)}}$

Donde r es la tasa de mercado a la que se negocia el bono, c es el valor del cupón equivalente a la tasa de emisión y 100 corresponde al valor facial del bono que es el mismo 1

Medidas de sensibilidad: Para entender mejor como cambia el precio de un bono, se debe tener claro el efecto que genera la tasa de interés. Por esta razón existen dos medidas de sensibilidad que permiten determinar cuanto cambia el precio del bono cuando cambia la tasa de interés. La primera medida de sensibilidad es la duración, es la primera derivada del precio del bono con respecto a la tasa de interés, y además de ayudar a determinar los cambios en el precio del bono, también busca determinar en cuanto tiempo se tiene punto de equilibrio con el bono, lo que quiere decir que a mayor duración, mayor riesgo. La segunda medida de sensibilidad conocida como la convexidad es la segunda derivada del precio del bono cuando cambia la tasa de interés, se calcula debido a que la relación precio del bono tasa de interés es una relación convexa y no lineal lo que implica que con una sola derivada no es suficiente para poder determinar las variaciones del precio del bono cuando cambia la tasa de interés.

Duration para $0 < t < T$.

$$D = \sum_{t=1}^{T} (t * VAFCB)/B(t,T) \tag{35}$$

Donde $VAFCB$ es el valor actual del flujo de caja del bonor, valorados a una tasa de mercado.

Duración Modificada para $0 < t < T$

$$DM = D/(1+r)^{(T-t)} \tag{36}$$

Convexidad para $0 < t < T$

$$Conv = \sum_{t=1}^{T} (t * (t * VAFCB)) / \sum_{t=1}^{T} (t * VAFCB)/B(t,T) \tag{37}$$

Una vez que se obtienen las medidas de sensibilidad, se implementa la serie de Taylor para representar el cambio del precio del bono. Con ayuda de las ecuaciones 35 y 37 y los cambios en los puntos básicos se calcula el cambio porcentual del precio del bono.

Cambio en el precio del Bono para $0 < t < T$

$$\Delta B(t,T) = -D * PB + \frac{1}{2} * Conv * PB^2 \tag{38}$$

Donde $\Delta B(t,T)$ es el cambio en el precio del bono, y PB son los puntos básicos.

Las medidas de sensibilidad de los bonos se usan también para obtener medidas de riesgo básicas, por lo tanto se deben aclarar antes de avanzar con el tema, para entender mejor su implementación se recomienda leer [De Lara Haro, 2005] y [Jorion, 2000].

6.1. Valor en Riesgo VaR

El método de medición implementado desde el acuerdo de Basilea I para estimar el riesgo de mercado es el Valor en Riesgo VaR, la respuesta que busca dar este índice se relaciona con la máxima perdida que se puede obtener si el mercado no tiene un buen desempeño y por lo tanto se intenta cuantificar la perdida posible. Por lo tanto, se busca responder la siguiente pregunta **¿Qué es lo máximo que puedo perder con esta inversión?** casi todos los inversores que han invertido o están considerando invertir en un activo riesgoso se hacen esta pregunta en algún momento.

El Value at Risk intenta proporcionar una respuesta, al menos dentro de un límite razonable. De hecho, es engañoso considerar que el VaR es una alternativa al valor ajustado al riesgo y a los enfoques probabilísticos. Sin embargo, el amplio uso del VaR como herramienta para la evaluación de riesgos, especialmente en las empresas de servicios financieros, y la extensa literatura que se ha desarrollado en torno a él, nos empujan a dedicar esta sección a su examen.

En su forma más general, el Valor en Riesgo mide la pérdida potencial en el valor de un activo o cartera riesgoso durante un período definido para un intervalo de confianza dado. Por lo tanto, si el VaR de un activo es de \$ 100 millones en un nivel de confianza del 95 % en una semana, solo hay un 5 % de posibilidades de que el valor del activo caiga más de \$ 100 millones en una semana determinada. En su forma adaptada, la medida a veces se define más estrechamente como la posible pérdida de valor del riesgo de mercado normal.$^{\text{en}}$ lugar de todo riesgo, lo que requiere que establezcamos distinciones entre riesgo normal y anormal, así como entre riesgo de mercado y de no mercado. .

Si bien cualquier entidad puede utilizar Value at Risk para medir su exposición al riesgo, los bancos comerciales y de inversión lo utilizan con mayor frecuencia para capturar la pérdida potencial de valor de sus carteras negociadas por movimientos adversos del mercado durante un período específico.

6.1.1. Propiedades de una medida de riesgo

Debido a que el VaR es una medida de riesgo, es importante definir las condiciones que debe cumplir para ser medible dentro de un espacio real, que se representa a través de una función donde el riesgo V pertenece a una función de distribución F_V ordenando en números reales. Esto quiere decir que estas medidas deben cumplir algunas reglas para que sean medibles en el mundo real.

- **Monotonía**: Una medida de riesgo ρ es monótona cuando:

$$\rho(V_1) \leq \rho(V_2) \qquad \text{para} \qquad V_1 \leq V_2$$

- **Homogeneidad**: Una medida de riesgo ρ es homogenea cuando:

$$\rho(\lambda V) = \lambda\rho(V) \qquad \text{para} \qquad \lambda > 0$$

- **Translación simétrica**: Para cada riesgo es válido que:

$$\rho(V + c) = \rho(V) + c \qquad \text{para} \qquad c \in \mathbb{R}$$

- **Subaditividad**: Cuando dos riesgos V_1 y V_2 son trabajados estos son subaditivos cuando:

$$\rho(V_1 + V_2) \leq \rho(V_1) + \rho(V_2)$$

- **Coomonotonía aditiva**: Un riesgo ρ cumple esta condición cuando la suma de dos riesgos son iguales:

$$\rho(V_1 + V_2) = \rho(V_1) + \rho(V_2)$$

- **Positividad**: Una medida de riesgo es positiva:

$$\rho(V) \geq 0 \qquad \text{para} \qquad V \geq 0$$

6.1.2. El intervalo de confianza

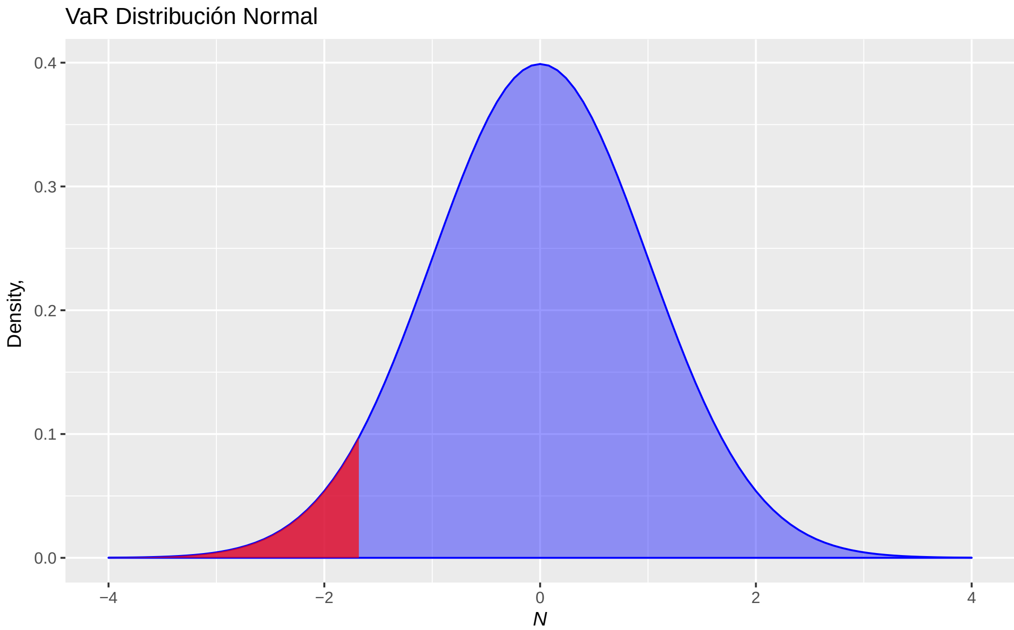
Para obtener una probabilidad de máxima de pérdida VaR, se debe usar la función de densidad que define el valor real de x:

$$PP_x(V) = P(V > x) = 1 - \alpha = \varepsilon$$

Por lo tanto la probabilidad ε, es la probabilidad de que V supere x.

Dado que las series de tiempo financieras tienen un comportamiento continuo, el VaR se calcula con ayuda de la función de densidad $f(x)$ en un intervalo de confianza que calcularse máximo hasta el 10 % puesesto significa que se evaluan las perdidas cuando un evento extremo (poco probable) aparece y genera perdidas.

Figura 5: VaR



$$P(x < VaR) = \int_{-\infty}^{VaR} f(x)dx \tag{39}$$

La ecuación 39 define el intervalo entre infinito y el valor crítico deseado para calcular del VaR. Esta definición concuerda con la que se dío en la sección que trata sobre la probabilida como la medición de variables continuas y se denota que para poder obtener la probabilidad de esta, se debe integrar el intervalo en el cuál se desea calcular la variable.

La figura 5 muestra el intervalo de probabilidad para una variable que se distribuye de forma normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$ y un nivel de confianza del $\alpha = 95\,\%$, lo cual da como resultado que con un nivel de significancia de $1 - \alpha = 1 - 0{,}95 = \varepsilon = 0{,}05$ el area sombreada roja es la zona en la cual se puede hallar la máxima perdida de una inversión cuya variable se distribuye de forma normal. La zona azul por otra parte es lo que no se considera máxima perdida y corresponde a las perdidas esperadas bajo condiciones normales y también a las ganancias en todas las formas posibles de la inversión. Por lo tanto, usando la ecuación 39, se puede remplazar el límite superior de la integral con el valor de $-1{,}645$ correspondiente a una probabildad del $5\,\%$ de que la máxima perdida se encuentre entre $-\infty$ y $-1{,}645$

6.1.3. VaR o Value at Risk

Una vez entendido la importancia del intervalo de confianza para calcular el VaR, se establece un nivel de confianza ε o $1 - \alpha = \varepsilon$ que es el cuantil para determinar el nivel de confianza del índice. Sin embargo α mantendrá valores altos por lo tanto el VaR se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{VaR}(V;\alpha) = F_V^{-1}(\alpha),$$

donde

$$F_V^{-1}(\alpha) = min\{x|F_V(x) \geq \alpha\}$$

Incluyendo el intervalo de tiempo en el VaR, la función inversa se describe como $\mathbf{VaR}(\alpha;V;T)$. Hay que tener en cuenta cuando el VaR sea designado con α o ε teniendo en cuenta que $\varepsilon = 1-\alpha$ y por definición de probabilidad el VaR es igual a:

$$P(V \leq x_\alpha) \geq \alpha \quad P(V > x_\alpha) = 1 - F(x_\alpha) \leq 1 - \alpha = \varepsilon,$$

Con intervalos de confianza al 90 %, 95 % y 99 %.

6.2. VaR Condicionado o Expected Shortfall

The Expected Shortfall es la información que se obtiene a partir de la estimación del VaR que se encuentra en la cola de la distribución y que sirve para determinar la media de la máxima perdida producida en un evento extremo. Es decir si el VaR me dice cuanto es la perdida que podria tener con una probabilidad del 5 % The expected Shortfall dice como se comportan esas perdidas en esos eventos extremos, debido a que la perdidad obtenida una vez que esto suceda afecta de forma inmediata el valor de un portafolio.

Definición The Expected Shortfall no condicionado: Es definido como el valor esperado de la perdida de un portafolio, dado un VaR.

$$ES = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\alpha}^{\infty} VaR(\alpha)ds \tag{40}$$

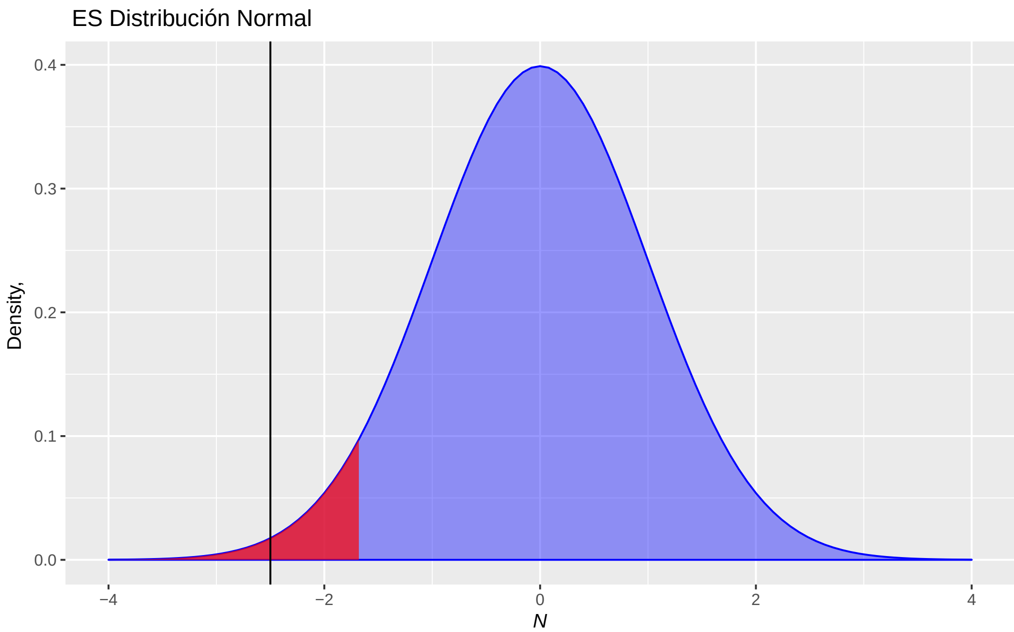
$$ES = -\frac{\phi(N^{-1}(p))}{p} \tag{41}$$

ES se mide con más incertidumbre que VaR. El primer paso en la estimación de ES es determinar el VaR y el segundo paso es obtener la expectativa de observaciones de cola. Esto significa que hay al menos dos fuentes de error en ES.

Más importante aún, el ES es mucho más difícil de probar que el VaR porque el procedimiento de ES requiere estimaciones de la expectativa de cola para comparar con el pronóstico de ES. Por lo tanto, en backtesting, ES solo se puede comparar con la salida de un modelo, mientras que VaR se puede comparar con observaciones reales

La figura 6 representa el VaR condicionadao o expected Shortfall, en donde se puede ver una linea que atravieza el VaR de la figura 5 en donde se marca el punto medio esperado, que se podría perder en promedio una vez superada la frontera del VaR, esta medida es de mayor utilidad, dado que una vez que se supera la máxima perdida, es importante saber el promedio de esas perdidas.

Figura 6: Expected Shortfall



6.2.1. VaR paramétrico

Un VaR paramétrico es el que usa los parámetros de una distribución para determinar la máxima perdidad en un horizonte de tiempo, en este caso usando una **Distribución Normal para el VaR** se obtiene con ayuda de la desviacón estandar y el intervalo de confianza 39 la máxima perdida en un periodo de tiempo definido como $\sqrt{t}$. Definiendo $u_\alpha := u_\alpha(0,1)$ como la función del VaR, así como $u_\alpha(\mu, \sigma^2)$ como su aplicación a la distribución normal se tiene:

$$u_\alpha(\mu, \sigma^2) = \mu + \sigma u_\alpha = \mu - \sigma u_{1-\alpha}$$

Por lo tanto si la distribución normal no es estándar, el VaR estará definido como $V \sim N(\mu; \sigma^2)$.

$$\mathbf{VaR}_\alpha(V) = \mu + \sigma u_\alpha$$

Las anteriores ecuaciones definen de forma generica como se calcula el VaR teniendo en cuenta la distribución normal, usando esa definición se puede extraer el intervalo en el que se encuentra y que la Superintendencia Financiera acepta de acuerdo a lo aprobado por Basilea en donde el VaR paramétrico para un activo se define en términos absolutos para un horizonte de tiempo de la siguiente forma:

$$\mathbf{VaR}_\alpha = I * INVN_\alpha(Z) * \sigma * \sqrt{t} \tag{42}$$

En donde I corresponde al monto de la inversión, $INVN_\alpha(Z)$ es la función inversa que encuentra el Z de acuerdo al α con el que se desea trabajar, σ es la desviación estandar y la

$\sqrt{t}$ es el tiempo ajustado de acuerdo a la distribución normal.

A pesar de la simplicidad del cálculo, no se debe desestimar la forma de la distribución y el método de cálculo que se implementó para obtener el la volatilidad, ya que como se apreció en la sección anterior la interpretación y el método de estimación, influyen en el resultado final.

Como alternativa al VaR para un solo activo, existe también el VaR de portafolio que además de encontrar la máxima perdida de un portafolio, toma en cuenta la correlación de los instrumentos financieros buscando a través de la distribución conjunta estimar el riesgo de todos los activos. Para poder calcular el VaR de portafolio, es necesario pensar en los vectores que componen la función para encontrar los parámetros. Identificando la variable aleatoria se puede generar un vector $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ que se pondera por el peso de esta en el portafolio, $Z = w_1X_1 + w_2X_2 + ... + w_dX_d$ Por lo que $X_1....X_d$ son las pérdidas de d acciones una a una.

El vector $\mathbf{X} = \{X_1....X_d\}$ es multivariado con una distribución normal con vector de valor esperado μ y una matriz de covarianza $\mathbf{\Sigma}$. Por lo tanto se distribuye de manera normal $\mathbf{X} \sim (\mu, \mathbf{\Sigma})$ con $w_1....w_d$ como los pesos de cada acción o los conjuntos desde donde se miden. Por lo tanto:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{w}^T\mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{w}^T = (w_1....w_d)$$

De esta manera la distribución del portafolio lineal es igual a $\mathbf{Z} \sim (\mathbf{w}^T\mu, \mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma})$ y es una distribución normal de una dimensión. Para encontrar la cola con esta información el VaR es:

$$\mathbf{VaR}_\alpha = \mathbf{w}^T\mu + \sqrt{\mathbf{w}^T\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}u_\alpha} \tag{43}$$

Usando lo anterior, la definición del VaR de portafolio usa la matriz de varianza-covarianza con ayuda de los pesos del portafolio para obtener la volatilidad del portafolio, después se puede aplicar la formula 42 en donde la volatilidad σ_p es la del portafolio.

$$\mathbf{VaR}_\alpha = I * INVN_\alpha(Z) * \sigma_p * \sqrt{t} \tag{44}$$

6.2.2. El VaR en instrumentos de renta fija

Para la implementación de bonos, el VaR adiciona las medidas de sensibilidad de las ecuaciones 35, 36 y 37 tanto para la ecuación que calcular el VaR de forma indvidual, como para la que obtiene la volatilidad del portafolio.

$$\mathbf{VaR}_\alpha = INVN_\alpha(Z) * B * D * \sigma_r * \sqrt{t} \tag{45}$$

La diferencia con la ecuación 42 es que B es el precio del bono, D es la duración y σ_r es la volatilidad de la tasa de interés de mercado.

Si se desea trabajar con un portafolio de renta fija, se debe hacer un ajuste a la volatilidad para incluir el efecto de la duración y la tasa de mercado en cada uno de los activos.

$$\sigma_r = D * \sigma * r \tag{46}$$

De esta forma se calcula la volatilidad de cada instrumento de renta fija, y se implementa la ecuación 44 para obtener el VaR de portafolio.

$$\mathbf{VaR}_\alpha = INVN_\alpha(Z) * B_T * \sigma_p * \sqrt{t} \tag{47}$$

La ecuación 47 elimina la duración que ya se incluye en la volatilidad del portafolio σ_p y como inversión inicial, suma el valor de todos los bonos que se encuentran dentro del activo B_T para obtener el VaR de portafolio de títulos de renta fija.

6.3. VaR Histórico en el riesgo de mercado

Como alternativa al VaR paramétrico, se encuentra el análisis a partir de datos que provienen de la historia y que se evaluan con ayuda de las tablas de frecuencias. El intervalo de tiempo que maneja puede ser de 250 días hasta 500 para tener dos años laborales.

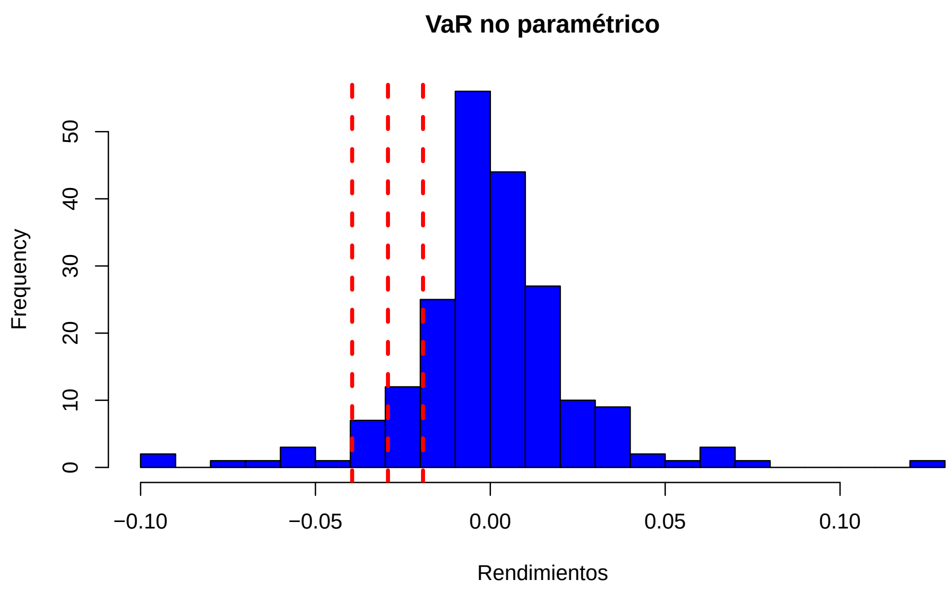
Cálculo: Usando los rendimientos de los logaritmos, se obtienen las variaciones de los precios de un instrumento financiero.

$$R = ln\frac{S_t}{S_{t-1}} \tag{48}$$

Luego usando el precio inicial S_0 se obtiene el valor futuro de forma diaria para 250 o 500 días

$$S_t = S_0(1 + R) \tag{49}$$

Una vez que se generan los datos suficientes, (250 o 500), se resta con respecto al precio observado en cada uno de los días. Luego se genera un histograma y se obtiene el percentil del VaR deseado.

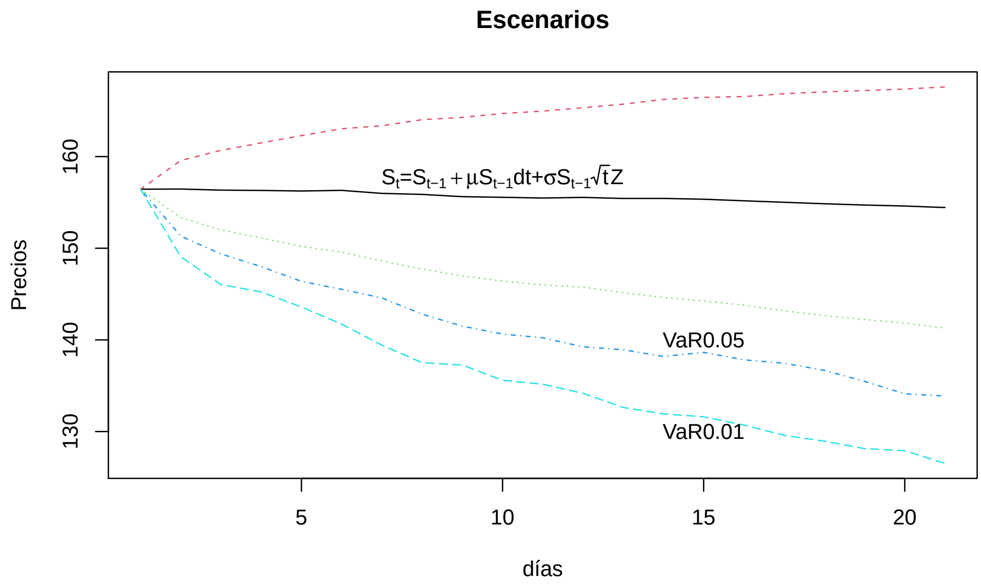


6.4. VaR por Simulación montecarlo

El VaR por simulación de montecarlos se obtiene con ayuda del movimiento geométrico browniano, la solución del modelo parte de la ecuación diferencial en donde la serie de Taylor. El precio se estima con ayuda de ambas constantes. Se encuentra diferenciando con respecto al tiempo y la variable aleatoria que corresponde al activo que se está usando como subyacente para generar el derivado con $S_0 = 0$.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW(t) \tag{50}$$

El VaR a través de esta metodología se obtiene calculando los percentiles de la simulación.



6.5. Falencias del VaR

El libro de [Jorion, 2000] y el de [De Lara Haro, 2005] se resumen las dificultades de la medición asociadas al VaR que son:

- Si existen problemas de estacionariedad, su resultado puede tener errores.
- Los datos deben ser confiables.
- En caso de haber colas gordas, las perdidas son más difíciles de calcular.

6.6. Back Testing

Para comprobar la validez de los resultados, se debe evaluar la eficiencia del VaR, estimando el número de veces que el VaR excede los intervalos de confianza. El test de Kupiec ayuda a determinar la eficiencia del modelo con ayuda de la distribución Chi Cuadrado como contraste de hipotesis y con ayuda de la distribución binomial para cálcular los parámetros para dichas hipotesis. De esta forma se determina cuantas veces el VaR acerto en su predición según el número de observaciones que se presente y así determinar si los errores son mayores o si por el contrario no se tiene ningún error que aunque no se toma en la prueba también es un indicio de que la medición de los parámetros no fue la mejor.

Por lo tanto la probabilidad de observar N excesos en un período T se determinar como:

$$(1-p)^{T-N}p^N$$

Donde la hipotessis nula dice que p es igual a la probabilidad utilizada en el cálculo del VaR mientras que la hipotesis alternativa dice que p no es igual a la probabilidad utilizada en el VaR de esta fomra se busca no rechazar la hipotesis nula, no obstante, el rechazo de la hipotesis nula daría como resultado que la estimación del VaR no es la mas eficiente.

Dada la siguiente expresión que usa el método de máxima verosimilitud como proceso de estimación, se obtiene que:

$$L = -2Ln((1-p)^{T-N}p^N) + 2Ln((1-(N/T))^{T-N}(N/T)^N) \tag{51}$$

Donde con un nivel de confianza, se tiene una probabilidad de error p en un lapso de tiempo T con un número de observaciones que excedio el VaR durante ese intervalo de tiempo. Si el resultado es mayor a 5 % no se rechaza la hipotesis nula.

Cuadro 3: Test de Kupiec

Nivel de probabilidad P	**T=255 días**	**T=510 días**	**T=1000 días**
0.01	$N < 7$	$1 < N < 11$	$4 < N < 17$
0.025	$2 < N < 12$	$6 < N < 21$	$15 < N < 36$
0.05	$6 < N < 21$	$16 < N < 36$	$37 < N < 65$
0.075	$11 < N < 28$	$27 < N < 51$	$59 < N < 92$
0.1	$16 < N < 36$	$38 < N < 65$	$81 < N < 120$

La tabla 3 muestra el número de veces que el VaR de sobrepasar sus valores de acuerdo al tiempo estimado y al nivel de probabilidad. En Colombia se establece que el horizonte de tiempo es de 255 días.

7. Riesgo de Crédito

A diferencia del riesgo de mercado, el riesgo de crédito merece especial atención por la complejidad del sistema financiero en el que se mueve, ya que es la columna vertebral de las economías de los países sujetos a un modelo de crecimiento basado en la manipualción de la política monetaria que incluye variables como el ahorro y el incremento de la masa monetaria financiado a través de las instituciones financieras que utilizan estos recursos para multiplicar el dinero dentro de la economía.

Es decir un sistema financiero apoyado en la eficiencia de los bancos y fondos de pensiones necesita un estricto control sobre el manejo de los recursos del público pues son estos los que garantizan los niveles de consumo que a su vez se traducen en los incrementos de la producción de un país, principal indicador financiero que mide la viavilidad económica. Por lo tanto un proceso eficiente de análisis de crédito que contega las variables necesarias para medir el riesgo de contraparte, es necesario para matener en funcionamiento la estructura financiera derivada del ahorro de los consumidores.

Para comprender el riesgo de crédito y cómo medirlo, se necesita un conjunto de herramientas analíticas y una comprensión de instituciones financieras como bancos y agencias de calificación. En este capítulo se define el riesgo de crédito y sus elementos, como la probabilidad de que una empresa quiebre o la cantidad que el inversor pierde si sucede.

Se realiza un gran esfuerzo para evaluar el riesgo de crédito que representan los prestatarios. Esta es, de hecho, una de las actividades más antiguas de los bancos. Veremos las diferentes formas en que esto se lleva a cabo, incluidas las técnicas relativamente no cuantitativas sancionadas por el tiempo y el modelado desarrollado más recientemente enfoques.

Al igual que con el riesgo de mercado, a veces queremos resumir el riesgo de crédito en uno número, como el valor crediticio en riesgo, por lo que también veremos enfoques cuantitativos para medir el riesgo crediticio.

El crédito es una obligación económica para un .$^{\text{ex}}$traño”, una entidad que no posee capital propio de la empresa. El riesgo de crédito es el riesgo de pérdida económica por incumplimiento o cambios en las calificaciones u otros eventos crediticios.

Los valores de riesgo crediticio incluyen:

- Los valores de deuda corporativa son el único tipo que puede incumplir en el sentido más estricto de la palabra. Los miembros más comunes de este grupo son los bonos de tasa fija y flotante, y los préstamos bancarios.

- La deuda soberana se denomina en la moneda local de la entidad soberana o en moneda extranjera. Puede ser emitido por el gobierno central o por una empresa estatal o controlada por el estado. Los gobiernos estatales o provinciales y locales también emiten deuda.

- Los derivados de crédito son contratos cuyos pagos son funciones de los pagos de valores con riesgo crediticio. Los más importantes y generalizados son los swaps de incumplimiento crediticio (CDS).

- Los productos de crédito estructurados son bonos respaldados por préstamos hipotecarios, de estudiantes y de tarjetas de crédito a particulares, por hipotecas comerciales y otros préstamos comerciales, y por otros tipos de garantías. A menudo no son impagables en el sentido estricto de que el emisor puede declararse en quiebra. Sin embargo, son riesgosos para el crédito en el sentido de que, cuando hay suficientes préstamos en mora del colateral, al menos algunas de las obligaciones emitidas contra el colateral deben anotarse, es decir, el acreedor sufre una pérdida.

Los contratos de crédito tienen una serie de problemas que pueden subsumirse bajo los conceptos de costos de transacción y fricciones. Los contratos de crédito están plagados de conflictos de intereses entre las partes contratantes. Muchos de estos conflictos surgen de problemas de información inherentes a las transacciones de crédito y son costosos.

La adquisición de información sobre la condición del prestatario es costosa, y la armonización de las acciones de los participantes del mercado implica una negociación, también costosa. Para comprender el riesgo de crédito, es útil estar familiarizado con los conceptos de la economía que ayudan a identificar y analizar estos conflictos:

- La información asimétrica: Describe una situación en la que una parte tiene información diferente que otra. En los contratos de crédito, el prestatario generalmente tiene más información que el prestamista sobre el proyecto al que se han aplicado los ingresos del préstamo y, por lo tanto, sobre su capacidad de reembolso. Las disparidades de información pueden mitigarse mediante el monitoreo por parte del prestamista y la presentación de informes por parte del prestatario, pero solo de manera incompleta ya algún costo.

- Principal-agente: Son problemas que surgen porque es costoso alinear los incentivos cuando un principal emplea a un agente, y este último tiene mejor información sobre la tarea en cuestión. Un ejemplo común es la gestión de inversiones; el gerente, aunque está empleado como agente del inversor, puede maximizar sus propios honorarios e ingresos comerciales en lugar de los rendimientos del inversor. Otro es el monitoreo delegado, que surge para los depositantes y otros acreedores de los bancos. Los gerentes de los bancos están encargados de supervisar, en nombre de los depositantes y otros acreedores del banco, cómo se utilizan los ingresos de los préstamos bancarios. Además de la banca, los problemas de agente principal son particularmente difíciles de abordar en productos de crédito estructurados, ya que los administradores de los préstamos subyacentes también pueden ser propietarios de los valores.

- Trasaldo de riesgo: Puede ocurrir cuando existe una asimetría entre los riesgos y las recompensas de los participantes del mercado que tienen diferentes posiciones en la estructura de capital de la empresa o diferentes contratos con los gerentes de una empresa. El ejemplo clásico es el conflicto entre inversores de capital y prestamistas. El aumento del riesgo para los activos de la empresa puede beneficiar al inversor de capital, ya que su pérdida potencial se limita a su inversión de capital, mientras que su rendimiento potencial es ilimitado. Los titulares de deuda no tienen ningún beneficio por el aumento del riesgo, ya que su rendimiento es fijo, solo el mayor riesgo de pérdida. Por lo tanto, el aumento del riesgo traslada el riesgo del patrimonio a los tenedores de bonos.

  Sin embargo, el problema también se produce en el contexto de la regulación de los intermediarios financieros, y en particular, el problema de "demasiado grande para quebrar". Si al menos algunas posiciones en la estructura de capital, como la deuda senior no garantizada estará protegida en caso de quiebra de la empresa, luego, aumentar el riesgo para los activos de la empresa puede trasladar el riesgo al público en lugar de a los tenedores de bonos. Los tenedores de bonos no necesitarán compensación por el mayor riesgo.

- Riesgo moral: Ocurre cuando una parte cuyas acciones no son observadas afecta la probabilidad o magnitud de un pago. Por ejemplo, si tengo una cobertura de seguro médico completa, puedo visitar al médico con más frecuencia que si mi cobertura fuera limitada.

7.0.1. Factores de Riesgo de Crédito

Default (Incumplimiento)PD π

El incumplimiento es la falta de pago de una obligación financiera. Los eventos predeterminados incluyen intercambios en dificultades, en los que el acreedor recibe valores con un valor inferior o una cantidad de efectivo inferior a la media a cambio de la deuda original. Una definición alternativa de incumplimiento se basa en el balance general de la empresa: el incumplimiento ocurre cuando el valor de los activos es menor que el de la deuda, es decir, el patrimonio se reduce a cero o una cantidad negativa. El deterioro es un concepto contable algo más débil, establecido desde el punto de vista del prestamista; un crédito puede verse afectado sin incumplimiento, en cuyo caso está permitido anotar su valor y reducir las ganancias reportadas en esa cantidad.

La bancarrota es un procedimiento legal en el que una persona o empresa ”busca alivio”de sus acreedores para reorganizar y reestructurar su balance y operaciones, o liquidar y cerrar el negocio de manera ordenada. Durante la primera mitad del siglo XIX, la responsabilidad limitada de las corporaciones en el Reino Unido y los Estados Unidos se reconoció en general, allanando el camino para el comercio público de sus valores. Los acreedores de corporaciones y sociedades de responsabilidad limitada no pueden recurrir a la propiedad de los accionistas o socios aparte del capital invertido de este último.

En la práctica, las empresas generalmente solicitan protección por bancarrota mucho antes de que su capital se reduzca a cero. Durante la quiebra, los acreedores no pueden demandar al deudor en quiebra para cobrar lo que se les debe, y el deudor puede continuar con sus negocios. Al final del proceso de quiebra, la deuda se extingue o se descarga. Hay muy pocas excepciones. Por ejemplo, muchos préstamos estudiantiles no se pueden cancelar mediante quiebra personal.

En los modelos formales, la probabilidad de incumplimiento se define en un horizonte temporal dado T, por ejemplo, un año. Cada crédito tiene un tiempo predeterminado aleatorio t. La probabilidad de incumplimiento π es la probabilidad del evento $t \leq T$.

Deben distinguirse tres puntos de tiempo al pensar en el modelado predeterminado, el tiempo predeterminado y las probabilidades predeterminadas. Incorporando estos tiempo las dimensiones de riesgo de crédito y de contraparte en la analítica predeterminada son una fuente potencial de confusión:

- El tiempo t desde el que estamos viendo el valor predeterminado: el punto de vista suele ser .ªhora”, es decir, t = 0, pero en algunos contextos debemos pensar en las probabilidades predeterminadas vistas desde una fecha futura. El tiempo de ”punto de vista.º ”perspectiva.ᵉˢ importante porque determina la cantidad de información que tenemos. En el lenguaje de la economía, el tiempo de perspectiva determina el conjunto de información; En el lenguaje de las finanzas, determina la filtración.
- El intervalo de tiempo sobre el cual se miden las probabilidades de incimplimiento: si el tiempo de perspectiva es $t = 0$, este intervalo comienza en el tiempo presente y termina en una fecha futura T, la duración del intervalo de tiempo . Pero también puede ser un

intervalo de tiempo futuro, con un tiempo de inicio t_1 y un tiempo de finalización t_2, entonces $\tau = t_2 - t_1$. La probabilidad de incumplimiento dependerá de la longitud del horizonte de tiempo, así como del tiempo de perspectiva.

- El tiempo t en que ocurre el valor predeterminado. En el modelado, esta es una variable aleatoria, en lugar de un parámetro que elegimos.

Exposición de Crédito CE

La exposición al incumplimiento es la cantidad de dinero que el prestamista puede perder potencialmente en un incumplimiento. Esto puede ser un monto directo, como el valor nominal o de mercado de un bono, o un monto más difícil de determinar, como el valor presente neto (VAN) de un contrato.

Perdida por Incumplimiento LGD

Si ocurre un incumplimiento, el acreedor no pierde en general el monto total de su exposición. Es probable que la empresa aún tenga activos que tengan algún valor. La empresa puede ser liquidada y los activos vendidos, o la empresa puede ser intervenida, para que sus activos continúen operando. De cualquier manera, es probable que el inversor recupere algo más de cero, pero menos del 100 por ciento de la exposición. La pérdida por incumplimiento (LGD) es la cantidad que pierde el acreedor en caso de incumplimiento. Los dos suman a la exposición:

$$exposicion = recuperacion + LGD \tag{52}$$

Por lo tanto, la exposición es medida a través de monto de recuperación, más la perdida generada por el incumplimiento LGD

La tasa de recuperación R_r se puede medir como:

$$R_r = \frac{recuperacion}{exposicion} \tag{53}$$

o

$$R_r = 1 - \frac{LGD}{exposicion} \tag{54}$$

LGD y la recuperación sonen principio cantidades aleatorias. No se conocen con certeza antes del incumplimiento. Esto plantea dos cuestiones muy importantes. Primero, la incertidumbre sobre LGD hace que sea más difícil estimar el riesgo de crédito. Segundo, debido a que es aleatorio, la LGD puede estar correlacionada con la probabilidad de incumplimiento, agregando una capa adicional de dificultad de modelado. Existe una gran cantidad de investigaciones, realizadas principalmente por las agencias de calificación, que se centran en la distribución de pérdidas en caso de incumplimiento. Sin embargo, en muchas aplicaciones, la LGD esperada se trata como un parámetro conocido.

Perdida Esperada EL

La pérdida esperada (EL) es el valor esperado de la pérdida crediticia. Desde el punto de vista del balance general, es la porción de la pérdida que el acreedor debería aprovisionar, es decir, tratar como una partida de gastos en el estado de resultados y acumular como una reserva contra pérdidas en el lado del pasivo del hoja de balance.

Si el único evento de crédito posible es el incumplimiento, es decir, no tenemos en cuenta el potencial de cambios en las calificaciones (denominado migración de crédito), entonces la pérdida esperada es igual a

$$EL = \pi * (1 - R_r) * exposicion = \pi * LGD \tag{55}$$

¿Por qué un inversor tendría un valor que tiene una pérdida esperada? Porque el inversor cree que el margen de crédito compensa más que la pérdida esperada. Suponga que un inversor compara un bono impagable de un año que paga un cupón anual de $r + z$ por ciento con un bono libre de riesgo que paga un cupón de r. La extensión del cupón z es la compensación por el riesgo de incumplimiento. Si z es lo suficientemente grande, el valor futuro esperado del bono impagable será mayor que el valor futuro esperado de un bono sin riesgo.

Para simplificar, suponga que el bono con riesgo de crédito solo puede incumplir exactamente en un año, justo antes de que esté programado para pagar el cupón, si el incumplimiento es el mismo. La probabilidad de incumplimiento es π, y si ocurre, el valor de recuperación es una fracción decimal R del valor nominal. Hay dos posibles pagos del bono de riesgo crediticio:

1. Con probabilidad $1 - \pi$ el inversionista recibe $1 + r + z$
2. Con probabilidad π el inversionista recibe R.

Con seguridad el valor del bono es $1 + r$, por lo tanto el valor esperado de un bono es:

$$(1 - \pi)(1 + r + z) + \pi R > 1 + r$$

En donde un bono con una valor de riesgo alto es más apetecido por el inversionista.

7.0.2. Matrices de transición de acuerdo a calificación creditica

Como se vió en la primera sección, una calificación crediticia es alfanumérica que resume la solvencia crediticia de una entidad de seguridad o corporativa. Las calificaciones crediticias generalmente son asignadas por agencias de calificación crediticia que se especializan en evaluación crediticia.

Las agencias de calificación evalúan la probabilidad de incumplimiento para las empresas en función de sus calificaciones por cartera. Estas probabilidades se pueden comparar con las tasas anuales a las que las empresas con diferentes calificaciones realmente incumplieron. Las agencias de calificación evalúan no solo la probabilidad de incumplimiento, sino también la migración de la calificación o el cambio en la calificación de la cartera, que ocurre cuando una o más de las calificaciones revisan la calificación de una empresa (o un gobierno) o sus títulos de deuda.

Estas estimaciones de probabilidad se resumen en matrices de transición, que muestran la probabilidad estimada de una empresa con una calificación inicial que finaliza un período, por ejemplo, un año, con una calificación diferente o en incumplimiento. Por lo general, los elementos diagonales en una matriz de transición, que muestran la probabilidad de terminar el año con una calificación sin cambios, son los elementos más grandes. También típicamente, la probabilidad de terminar en incumplimiento aumenta monotónicamente a medida que disminuye la calidad de la calificación de las letras. Finalmente, tenga en cuenta que no hay transición de incumplimiento a otra calificación; el valor predeterminado es un estado terminal.

Cuadro 4: **Matriz de Transición**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	92	7	1	0	0	0	0	0
AA	0.60	90	8	0.2	0.1	0.05	0.05	0
A	0.05	2	90.0	6	0.5	0.2	0.05	0.02
BBB	0.02	0.17	4.08	89.94	4.55	0.79	0.18	0.27
BB	0.04	0.05	0.27	5.79	83.61	8.06	0.99	1.20
B	0.00	0.06	0.22	0.35	6.21	82.49	4.76	5.91
CCC	0.00	0.00	0.32	0.48	1.45	12.63	54.71	30.41

La tabla 4 es el resultado del historial de calificaciones crediticias de un número determinado de prestamos, que de acuerdo a su posición inicial y final se registran en una tabla de frecuencias para encontrar la probabilidad con la que estos pueden cambiar de calificación. Se puede apreciar que la probabilidad de que un prestamo calificado como AAA, baje de calificación a CCC es cero, sin embargo la probabilidad de que baje a AA es más alta. Si se observa la diagonal, se puede ver que siempre es más probable mantenerse en la calificación actual, esto quiere decir que el perfil crediticio de un deudor se mantiene durante un período de tiempo que se mide a través de la probabilidad que aparece en la tabla.

La última columna, es la peor calificación que puede tener un deudor y hace referencia a la probabilidad de impago, generando la perdida casi total de la deuda por parte de la entidad financiera que realizó el prestamo.

Retomando la ecuación del nivel de solvencia 1, se puede ver el efecto sobre los activos ponderados por el nivel de riesgo $APRNV$ en donde los pasivos de los deudores son los activos del banco y este debe medir la probabilidad de impago de cada uno de sus activos crediticios, a partir de este calculo se deben generar las ponderaciones que permiten calcular el nivel de solvencia de la entidad financiera.

El capítulo XIII de la circular financiera básica y contable tiene todas las ponderaciones de los activos bancarios así como la conformación del patrimonio técnico y el básico.

7.1. Modelos de riesgo de crédito

La clasificación de los activos de acuerdo a su nivel de riesgo se relaciona directamente con el método de medición que se encarga de diferenciar las observaciones entre los grupos a los que pertenecen. Por lo general una entidad financiera solo necesita saber si una persona natural puede acceder o no al crédito y para esto solo las personas con calificación AAA son aptas para el préstamo. Con las empresas el proceso puede variar, aunque lo más importante es determinar si esta tiene alguna posibilidad de quiebra en el corto o mediano plazo dependiendo de la duración del crédito, en donde los parámetros varian de acuerdo a la composición de la compañia.

Preguntas a resolver:

- En caso de incumplimiento,¿ Cual es el costo asociado de castigar la cartera?
- Si la contraparte tiene una baja calificación y por consiguiente pueda incumplir en un futuro,¿Cual es el estimado del costo de remplazar la transacción?

Dadas estas dos preguntas se establece que el riesgo de crédito es igual a:

$$RC = RA + RP$$

Sabiendo que RA es riesgo actual y RP es riesgo potencial.

Los factores son el monto de la exposición al riesgo de la contraparte, su probabilidad de incumplimineto y por último si el valor de las garantías es viable al ínicio de la transacción.

Con estos factores la medición del riesgo que se hace depende del individuo o el objeto de estudio, ya que algunos de estos modelos aplicados a la medición del riesgo crediticio se ajustan dependiendo del objeto de estudio.

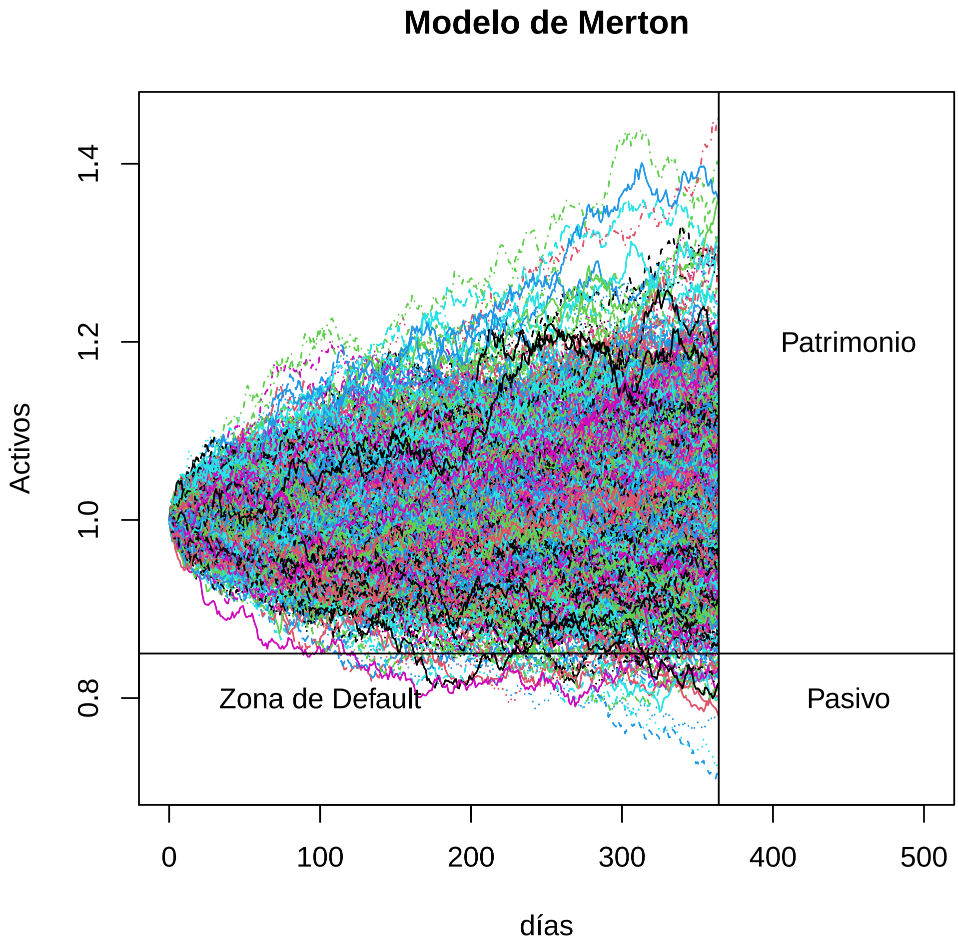
7.1.1. Modelo de Merton

[Merton, 1974]
El modelo de Merton es una presentación teórica de la composición de la deuda de las empresas, su objetivo es determinar el nivel de exposición al riesgo crediticio a través de la probabilidad de default o quiebra y la distancia a esa probabilidad.[Malz, 2011]

Se basa en el modelo de opciones propuesto por [Black and Scholes, 1973] en donde existe un tiempo de valoración y se determina la posibilidad de quiebra de acuerdo a la capacidad de la organización para responder por sus deudas de largo y corto plazo.

El modelo de Black and Scholes parte del supuesto de distribución normal de los rendimientos y se puede representar a través del movimiento geométrico browniano.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{56}$$



Aplicando el proceso estástico al modelo Black and Scholes, el precio de una opción europea call con un subyacente se valora a través de la probabilidad de que el precio spot supere el precio strike.

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{57}$$

Donde $V(S,t)$ es el precio de la prima de la opción, S es el precio spot del subyacente, K es el precio strike y r la tasa libre de riesgo. Mientras que d_1 y d_2 son la estandarización del proceso para obtener la probablidad a través de una función de distribución normal.

Por otra parte, una opción put se determina como:

$$V(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \tag{58}$$

Teniendo una tasa de interés μ y una volatilidad $\sigma > 0$ como constante. Existe un movimiento geométrico browniano con tasa media de retorno de r, donde el precio inicial de la acción es $S(0)$. Siendo K una constante positiva. Se debe demostrar que el valor esperado cumple con la siguiente condición.

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)}$$

Para $T \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[e^{-rT}(S(T) - K)^+\right] = S(0)N(d_1(T, S(0))) - Ke^{-rT}N(d_2(T, S(0))),$$

Donde

$$d_{1,2}(T, S(0)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\log\frac{S(0)}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right],$$

y N es la función de distribución normal estándar acumulada

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz.$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right] \\
= \; & e^{-rT}\int_{\frac{1}{\sigma}\left[\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right]}^{\infty} \left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma x} - K\right)\frac{e^{-\frac{x^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dx \\
= \; & e^{-rT}\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right]}^{\infty} \left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}y} - K\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\
= \; & S_0 e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T}\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right]}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2} + \sigma\sqrt{T}y}dy \\
& -Ke^{-rT}\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right]}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
= \; & S_0\int_{\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\frac{K}{S_0} - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right] - \sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi \\
& -Ke^{-rT}N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right)\right) \\
= \; & S_0 N(d_1(T, S_0)) - Ke^{-rT}N(d_2(T, S_0)).
\end{aligned}$$

El problema específico que abordan los modelos de crédito de cartera es el de la correlación entre eventos crediticios de diferentes deudores.En los modelos de riesgo de crédito estructural, la evolución del balance de la empresa impulsa el riesgo de crédito.

La configuración para una variedad simple del modelo estructural de Merton combina un conjunto de supuestos que necesitamos para que podamos aplicar el modelo de precios de opciones Black-Scholes, con un conjunto de supuestos adicionales que adaptan el modelo a nuestro contexto de valoración de riesgo de crédito. Expondremos los supuestos del modelo y luego usaremos el modelo para derivar la probabilidad predeterminada de la empresa:

Se supone que el valor de los activos de la empresa A_t sigue un movimiento geométrico browniano :

$$dA_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{59}$$

Dos de los parámetros, el valor de mercado de los activos A_t y el rendimiento esperado μ, están relacionados entre sí. En equilibrio, si r es la tasa de interés compuesta sin riesgo continuo para el mismo vencimiento que la deuda de la empresa, la evaluación del mercado del valor del activo será tal que, dados los apetitos de riesgo de los inversores y la distribución de los rendimientos que esperan, la prima de riesgo $\mu - r$ de los activos es un recompensa suficiente pero no demasiado generosa.

Dado el balance de una empresa

$$A_t = E_t + D_t \tag{60}$$

Se transforma la ecuación en un proceso de opciones:

$$E_t = A_t N(d_1) - D_t N(d_2) \tag{61}$$

Donde

$$d_{1/2} = \frac{ln(\frac{A_t}{D} + r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{62}$$

Bajo riesgo neutral Q se trabaja con la tasa libre de riesgo r, mientras que en un escenario físico P se debe trabajar con la prima de riesgo de mercado que se incluye en μ.

La deuda consiste completamente en una emisión, un bono de cupón cero con un pago nominal de D, con vencimiento en el momento T. La notación D, sin subíndice, es una constante que se refiere al valor nominal de la deuda.

La nota D_t, con un subíndice de tiempo, se refiere al valor de la deuda en ese momento. En realidad, la mayoría de las empresas con deuda negociable tienen diferentes tipos de problemas, con diferentes vencimientos y diferentes grados de antigüedad. En este modelo, la empresa solo puede incumplir en la fecha de vencimiento del bono. Del mismo modo, también asumimos que la totalidad del patrimonio consiste en acciones comunes.

El default ocurre cuando

$$A_t < D_t \tag{63}$$

La cantidad $A_t - D$ se llama distancia al incumplimiento. En esta configuración, podemos ver tanto los títulos de deuda como de renta variable como opciones europeas sobre el valor de los activos de la empresa, con vencimiento al mismo tiempo T que la deuda de cupón cero de la empresa.

El modelo nos ayudará a obtener estimaciones de la probabilidad de incumplimiento y otros parámetros de incumplimiento y recuperación. Sin embargo, en contraste con la forma en que los modelos de precios de opciones se aplican generalmente en las finanzas, estamos interesados, en el contexto del riesgo de crédito, tanto en cantidades neutrales como “físicas” o verdaderas, por lo que tendremos que tener cuidado de identificar claramente de cuál estamos hablando, y tenemos que usar las fórmulas correctas

Supuestos del Modelo:

- Equity value of the firm. $E_t = max\{A_t - D, 0\}$ Siendo este una opción europea call.
- Market value of the debt. El valor de mercado de la deuda se obtiene a través de el valor nominal de la deuda más una posición en corto de una opción PUT $D_T = D - max\{D - A_T, 0\}$ que ne valor presente es igual a $D_t = De^{r(T-t)} - max\{D - A_t, 0\}$
- Firm balance sheet. Se expresa como una función de la paridad put call para opciones europeas en donde se suma el valor del patrimonio proyectado más la deuda proyectada.

$$A_t = E_t + D_t$$

- Leverage. El apalancamiento de la empresa se obtiene a partir de la razón del patrimonio del precio de mercado, se puede deducir de el que tanto tiene la empresa en servicio de la deuda.

$$1 - \frac{D_t}{A_t}$$

- Default probabilities. Se debe diferenciar que tipo de probabilidad es (Riesgo Neutral Q o Física P) en donde la probabilidad de riesgo neutral se valora a partir de la tasa libre de riesgo r, mientras que la probabilidad física se obtiene con ayuda de μ

$$P(A_T < D) = N\Big(- \frac{log\frac{A_t}{D} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A(T-t)}\Big)$$

$$N(-d_2) = N\Big(- \frac{log\frac{A_t}{D} + (r - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A(T-t)}\Big)$$

- Lossgivendefault LGD. Depende de qué tan lejos del valor nominal de la deuda se encuentran los activos de la empresa en la fecha de vencimiento.

$$E[LGD] = DN\Big(-\frac{log\frac{A_t}{D} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A(T-t)}\Big) - A_t e^{-r(T-t)} N\Big(-\frac{log\frac{A_t}{D} + (\mu + \frac{1}{2}\sigma_A^2)(T-t)}{\sigma_A(T-t)}\Big)$$

$$expected \quad LGD = \frac{E[LGD]}{P(A_T < D)}$$

- Recovery rate: Tasa de recuperación en caso de quiebra

$$R = 1 - \frac{1}{D}\frac{E[LGD]}{P(A_T < D)}$$

7.1.2. Análisis Discriminante

El análisis discriminante se centra en clasificar una serie de variables en una zona de grupos con base en unos criterios que son conocidos como variables independiente. Por lo tanto para llevar a cabo la medición es importante saber cual sera la variable dependiente, ya que sera la que defina en que grupo quedara cada una de las variables a analizar.

Para entender mejor que se busca con el análisis discriminante se pueden generar ciertas preguntas:

- ¿Son mas rapidos los carros de Estados Unidos o los de Europa?
- ¿ Se puede predecir la bancarrota de una compañia?
- ¿Se puede establecer si un cliente de un crédito caera en mora?
- ¿Los puestos de trabajo están influenciados por el estrato de sus participantes?

Es así que para determinar el modelo con ayuda de una regresión se busca una variable categórica independiente de cada una de las variables que vienen de los grupos de discriminación para generar el modelo.

Supuestos:

- Se tiene una variable categórica independiente de las variables que utilizan para generar los intervalos de los subgrupos.
- Se necesitan al menos dos grupos y esos grupos deben contener la menos dos casos.
- El número de variables discriminantes debe ser menor al número de objetos menos 2.
- No debe haber combinanción lineal entre la variable categórica y otra variable discriminante.
- Las variables continuas deben seguir una distribución normal multivariable.

Un modelo discriminante supone una maximización de las variables entre los grupos con ayuda de una minimización de las variables entre los grupos. Por esta razoón se busca un número de variables p que puedan explicar un número de grupos q que se asignan a un número de objetos obteniendo una puntuación con ayuda de número de variales $(x_1, x_2, ..., x_p)$ para explicar una clasificación en una variable $(y_1, y_2, ..., y_m)$.

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_p = z_1$$

Se obtiene el Z que define si la empresa entra en el grupo de los que tienen probabilidad de entrar en Deault o no.

Análisis de la Covarianza: EL principal objetivo de del análisis discriminante es ampliar el rango entre la media de los grupos y minimizar la varianza de cada uno de ellos para garantizar el análisis entre dos grupos homogeneos.

Para análisar estas dos varianzas se descompone la covarianza y asi se obtiene la varianza dentro de los grupos y entre los grupos.

$$Cov(x_i, x_j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \overline{x})((x_{ij'} - \overline{x})$$

Esta Covarianza se obtiene para determinar uno de los estadíticos mas importantes para probar la estimación del modelo conocida como el *Lambda de Wilks* que se obtiene a partir de la división entre la suma de los cuadrados intragrupos con respecto a la suma de los cuadrados total y que esta entre un rango de cero y uno, donde los valores optimos tienden a cero pues la varianza dentro de los grupos debe ser menor a medidar que la varianza aumenta entre los grupos.

$$\Lambda = \frac{S}{T} \tag{64}$$

Donde S es la variación intragrupos y T es la variación total.

Una vez obtenido el *Lambda de Wilks* se procede a evaluar el resultado del modelo con ayuda de la distribución *Chi Quadrado* que se encarga de evaular cada una de las funciones obtenidas para el toral de los grupos y que determina la varianza que hay entre los grupos y hasta que puntos estos grupos son similares y por lo tanto se la discriminación entre ambos es o no significativa.

$$V = \mid N - 1 - \frac{p+g}{2} \mid ln\Lambda \tag{65}$$

Aproximada a una *Chi Quadrado* se tienen unos grados de libertad definidos como $(p - k)(g - k - 1)$, donde p es el número de variables, g el número de grupos que se desean clasificar, y k el número de funciones discriminantes obtenidas en la regresión cuando solo se obtiene una este valor es cero.

Al obtener un Lambda cercano a cero su logaritmo natural se acerca a uno generando un resultando para la *Chi Quadrado* alto y así rechazar la hipotesis nula que dice que los grupos tienen medias iguales en las variables discriminantes.

7.1.3. Modelo Z Score de Altman

Basados en el análisis discriminante, se desarrolló un modelo Score para definir los grupos de riesgo y los individuos que pertenencen a cada uno de estos grupos. Este proceso se usa para discriminar a las empresas por grupos entre las que estan la que no tienen posobilidad de quiebra y las que pueden estar en quiebra, bajo un número de variables específicas, que son estimadas a partir de razones financieras de los estados financieros de las compañias. Esto quiere decir que este modelo esta diseñado para discriminar a las empresas que buscan acceder a los sistemas de crédito que se ofrecen en el sistema financiero intermediado.

Teniendo en cuenta lo anterior es necesario encontrar los indicadores financieros necesarios obtener el Z Score y así clasificar las compañias entre las que pueden entrar en quiebra y las que no. Con una buena base de datos se puede así mismo obtener los coeficientes necesarios para el análisis del modelo. Estos deben ser positivos si se quiere que la calificación del Z ubique a las compañias dentro del conjunto de las que no están en la posibilidad de quiebra o que son solventes.

$$Z = 1{,}2X_1 + 1{,}4X_2 + 3{,}3X_3 + 0{,}6X_4 + 0{,}99X_5 \tag{66}$$

En donde X_1 es el capital de trabajo sobre activos totales, X_2 son las utilidades retenidas sobre activos totales, X_3 son las utilidades antes de impuestos sobre activos totales, X_4 el valor de mercado de la acción sobre el valor en libros de la deuda y X_5 ventas sobre activos toatles.

La situación emisora de la compañia se puede clasificar en tres intervalos, y con ayuda de percentiles se pueden emitir las calificaciones necesarias para ubicar las compañias en diferentes grupos.

- Si $Z > x$ la empresa se considera saludable
- Si $Z < x - m$ la empresa puede estar en bancarrota
- Si $x - m < Z < x$ la empresa se encuentra en una zona gris

7.1.4. Modelos Probit o Logic

Son modelos que se ajustan para determinar la capacidad crediticia de individuos que cumplen con ciertas cualidades y que se ubican en dos grupos entre los que son morosos o los que no son morosos. A diferencia de los otros modelos, estos evaluan cualidades por lo tanto las variables independientes que se usán para estimar la variable dependiente describen caracteristicas especiales de los individuos mas no mediciones concretas.

Referencias

[Black and Scholes, 1973] Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654.

[Bollerslev, 1986] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 31(3):307–327.

[Cox et al., 1979] Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263.

[De Lara Haro, 2005] De Lara Haro, A. (2005). *Medición y control de riesgos financieros.* Editorial Limusa.

[Engle, 1982] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1007.

[Hull, 2012] Hull, J. (2012). *Risk management and financial institutions,+ Web Site*, volume 733. John Wiley & Sons.

[Jorion, 2000] Jorion, P. (2000). Value at risk.

[Jorion et al., 2007] Jorion, P. et al. (2007). *Financial risk manager handbook*, volume 406. John Wiley & Sons.

[Malz, 2011] Malz, A. M. (2011). *Financial risk management: Models, history, and institutions*, volume 538. John Wiley & Sons.

[McNeil et al., 2015] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools-revised edition.* Princeton university press.

[Merton, 1974] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of finance*, 29(2):449–470.

[Shreve, 2004] Shreve, S. E. (2004). *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models.* Springer Science.

[Wackerly et al., 2010] Wackerly, D. D., Muñoz, R., Humbertotr, J., et al. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones.* Number 519.5 W3.