# Riesgos y Coberturas

Andrés Martínez
Finanzas y Comercio Internacional

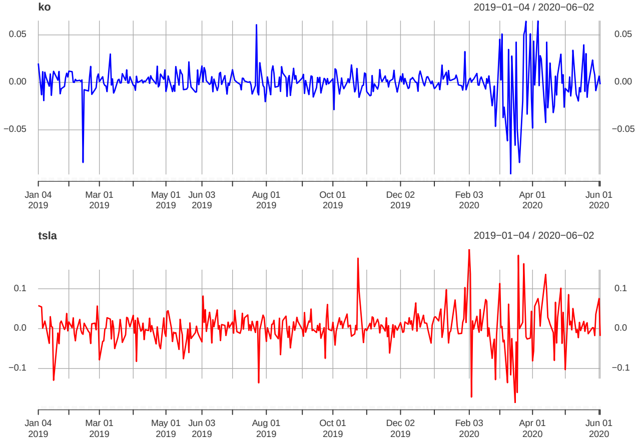
# Contenido

# Volatilidad

El riesgo en las finanzas se percibe a través del estudio de la volatilidad; pues es la piesa inicial para entender como se generan las variaciones y los efectos sobre el valor esperado.

Adicional a lo anterior, entender la volatilidad es entender como reaccionan esas variables financieras cuando se enfrentan a cambios económicos que pueden ser constantes o subitós. Esta sección se dsarrolla con ayuda del capítulo 5 de [Jorion et al., 2007] que trata sobre la modelación de factores de riesgo.

# Figura: Rendimientos



La volatilidad histórica se cálcula con la desviación estandar de una función de distribución, la principal condición para que se pueda confiar en esta medida, es que la serie que se está evaluando debe ser estacionaría, dado que el promedio no discrimina entre valores grandes o pequeños cuando se está realizando el cálculo.

$$\sigma_{r_i} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(r_{t-i} - \mu_{r_i})^2} \tag{1}$$

Pondera las observaciones desde las más antiguas a las más recientes, a través de un parámetro $\lambda$, su valor se encuentra en un intervalo entre $0 < \lambda < 1$, a medida que se acerca a uno le da mayor peso a las observaciones que se encuentran al final del período de observación.

$$\sigma_i = \sqrt{(1-\lambda) r_t^2 + \lambda \sigma_{t-1}^2} \tag{2}$$

$$\sigma_i = \sqrt{(1-\lambda) \sum_{i=0}^{\text{ínf}} \lambda^{i-1} r_{t-i}^2} \tag{3}$$

Las ecuaciones 2 y 3 muestran el calculo de la volatilidad para un período y para una serie entera, es decir que en la medida en que se tienen más observaciones la ponderación del calculo disminuye para valores más antiguos.

Usando las definiciones de probabilidad se tiene que:

$$\Omega = \{U, D\}^n = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}; \omega_i = U \quad o \quad \omega_i = D$$

$$X_i = \Omega \to \mathbb{R} \quad \omega \to \omega_i$$

$$H_i : \Omega \to \mathbb{R} \quad \omega \to \#\{j \leq i : \omega_j = U\}$$

$$T_i : \Omega \to \mathbb{R} \quad \omega \to \#\{j \leq i : \omega_j = D\}$$

[Shreve, 2004]:

El precio de una acción al momento $S_i$ se da entonces por la multiplicación de los resultados de la variable aleatoria $X_j$ con $S_0$.

$$S_i = S_0 \Pi_{j=1}^{i} X_j = S_0\, U^{H_i} D^{T_i} \tag{4}$$

El valor esperado del precio se obtiene con la sumatoria de cada uno de los resultados del precio por su probabilidad.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left( \frac{1}{(1+R)^j} S_j | \mathcal{F}_i \right) = \frac{1}{(1+R)^i} S_i \quad para \quad i < j$$

Donde la filtración $\mathcal{F}_i$ $i \geq 0$ es una martinagala para $0 \leq i \leq j \leq n$ por tanto,

$$S_j = S_i \Pi_{k=i+1}^{j} X_k$$

Siendo $\mathcal{F}_i$ medible, $\Pi_{k=i+1}^{j} X_k$ es independiente de $\mathcal{F}_i$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_j|\mathcal{F}_i) = S_i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Pi_{k=i+1}^{j} X_k|\mathcal{F}_i)$$

$$= S_i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Pi_{k=i+1}^{j} X_k) = S_i[U\widetilde{p} + D\widetilde{q}]^{j-i}$$

$$= S_i(1+R)^{j-i}$$

Usando las ecuaciones 4 y **??** se puede obtener el valor esperado del precio de un instrumento financiero $S_n$. Esto surge gracias a la derivación de un portafolio que tiene un bono y un instrumento de renta variable, como se explica en [Cox et al., 1979], logrando obtener una solución de la siguiente forma:

$$E_{\mathbb{Q}}[S_n|\mathcal{F}_n] = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \widetilde{p}^{x} (1-\widetilde{p})^{n-x} S_0 U^x D^{n-x} \tag{5}$$

La probabilidad es una medida de riesgo neutral que se abordará en la siguiente sección.

El riesgo neutral (mundo $\mathbb{Q}$) existe como un intervalo entre 0 y 1 dado que es una medida de probabilidad que se obtiene a partir de una distribución de frecuencias $\mathbb{P}$, pero con el capturarando los efectos de las variables aleatorias financieras que pertenecen a un mercado completo.

Su objetivo es implementar los elementos racionales de un inversionista tales como la aversión al riesgo garantizando que bajo condiciones de incertidumbre, los instrumentos financieros cumplen con la ley del valor del dinero en el tiempo dentro de un intervalo entre 0 y $t$.

La probabilidad de que un activo suba o baje de precio depende de la volatilidad de los rendimientos del activo y del horizonte de tiempo. La posibilidad de que un activo suba de precio está dada por $U = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ y la posibilidad de que un activo baje de precio está dada por $D = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$ al combinar estas posibilidades junto con la tasa libre de riesgo $r$ se puede obtener una medida de riesgo neutral $\widetilde{p}$.

$$\widetilde{p} = \frac{(1+r) - D}{U - D} \tag{6}$$

Sin embargo, esta medida debe cumplir la siguiente condición:

$$D < (1+r) < U \tag{7}$$

Que garantiza que no hay arbitraje, y por lo tanto,hay una medida de riesgo neutral.

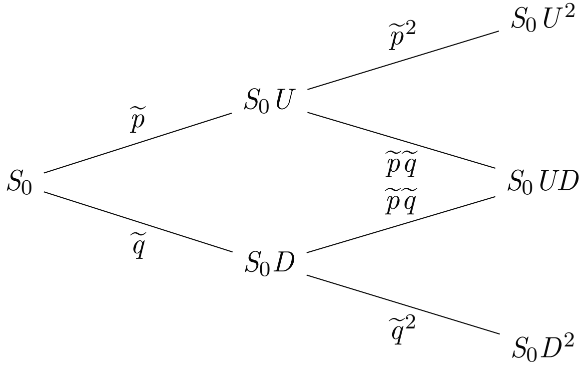
$$\begin{tikzcd} & S_0\,U \\ S_0 \arrow[ur, dash, "\widetilde{p}"] \arrow[dr, dash, "\widetilde{q}"'] & \\ & S_0\,D \end{tikzcd}$$

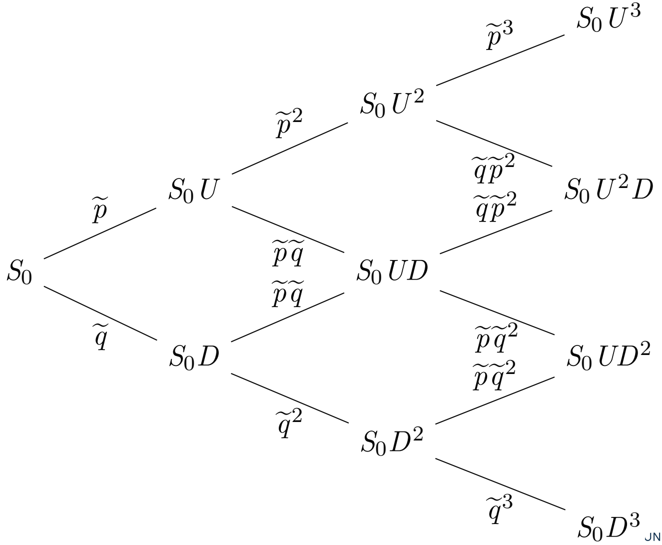
$S_0$ Precio del Activo

$$\widetilde{q} = 1 - \widetilde{p}$$

$$U = e^{\sigma\sqrt{dt}}$$

$$D = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$$


$S_0 U^2$
$\widetilde{p}^2$
$S_0 U$
$\widetilde{p}$
$\widetilde{p}\widetilde{q}$
$S_0$
$S_0 UD$
$\widetilde{p}\widetilde{q}$
$\widetilde{q}$
$S_0 D$
$\widetilde{q}^2$
$S_0 D^2$


$S_0 U^3$
$\widetilde{p}^3$
$S_0 U^2$
$\widetilde{p}^2$
$\widetilde{q}\widetilde{p}^2$
$S_0 U^2 D$
$\widetilde{q}\widetilde{p}^2$
$S_0 U$
$\widetilde{p}$
$\widetilde{p}\widetilde{q}$
$S_0$
$S_0 UD$
$\widetilde{p}\widetilde{q}$
$\widetilde{q}$
$\widetilde{p}\widetilde{q}^2$
$S_0 D$
$S_0 UD^2$
$\widetilde{p}\widetilde{q}^2$
$\widetilde{q}^2$
$S_0 D^2$
$\widetilde{q}^3$
$S_0 D^3$

Una caminata aleatoria simétrica, es un movimiento que surge del ejercicio de lanzar una moneda con una probabilidad de $\frac{1}{2}$, $n$ veces. Sus resultados pueden ser:

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{Si} \quad \omega_j = H \\ -1 & \text{Si} \quad \omega_j = T \end{cases}$$

La distancia entre cada resultado es la diferencia de una variable aleatoria $X_n - X_{n-1} = \Delta X_n$ en donde la filtración $\mathcal{F}_{n\geq 0}$ permite obtener los parámetros de la distribución que deben ser i.i.d (independent, and identically distributed) por lo que la distancia de una variable aleatoria en una caminata se define como $\Delta X_n \sim i.i.d.$

Con un valor inicial $M_0 = 0$ y como la suma de muchas variables aleatorias $X_n$, $M_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, n = 1, 2...$ La creación de una caminata aleatoria es un paso a paso en donde el valor futuro $M_n$, depende del valor anterior $M_{n-1}$ mas la distancia $\Delta M_n$

$$M_n = M_{n-1} + \Delta M_n = M_n - M_{n-1} = \Delta M_n$$
$$M_{n+1} = M_n + \Delta M_n \tag{8}$$

$$E[M_{k_{i+1}} - M_{k_i}] = 0 \tag{9}$$

Mientras que la varianza es la suma de todas las varianzas de $X$ que en este caso da como resultado $n$

$$Var[M_{k_{i+1}} - M_{k_i}] = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} = Var(X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} 1 = k_{i+1} - k_i$$

La aproximación a un movimiento browniano se obtienen con ayuda de una caminata aleatoria simétrica donde la probabilidad de $p = \frac{1}{2}$.

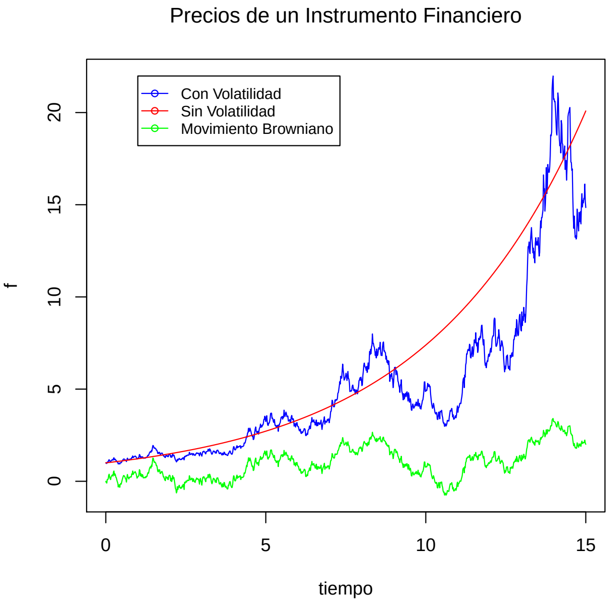
$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} M_{nt} \tag{11}$$

Donde el valor esperado de los incrementos es:

$$\mathbb{E}[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = 0 \tag{12}$$

Mientras que la varianza es igual a:

$$Var[W^{(n)}(t) - W^{(n)}(s)] = t - s \tag{13}$$




UNIVERSIDAD DE LA SALLE

**Definición** [Shreve, 2004] Teniendo un conjunto $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como un conjunto de probabilidad, para cada $\omega \in \Omega$ existe una función continua $W(t)$ que satisface $W(0) = 0$ y depende de $\omega$. Por lo tanto, los incrementos de $W(t)$ se miden de la siguiente forma:

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), ..., W(t_n) = W(t_n) - W(t_{n-1})$$

El valor esperado de los incrementos y la varianza se definen de la siguiente forma:

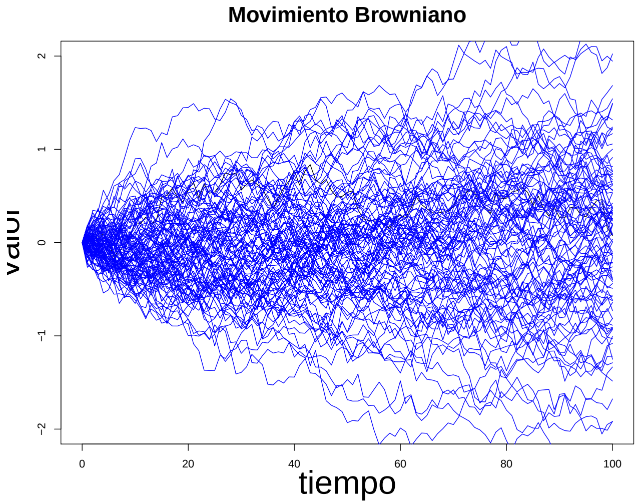
$$\mathbb{E}[W(t_1) - W(t_0)] = 0 \tag{14}$$

$$Var[W(t_1) - W(t_0)] = t_1 - t_0 \tag{15}$$

**Estandarización del Movimiento Browniano**
Usando el supuesto de que un movimiento Browniano se distribuye de forma normal $W(t) \sim (0, t)$ se puede estandarizar el proceso con el fin de obtener un valor $Z$ y así ofrecer un valor para $W(t)$.

$$W(t) = Z\sqrt{t} = \frac{W(t) - 0}{\sqrt{t}} \tag{16}$$

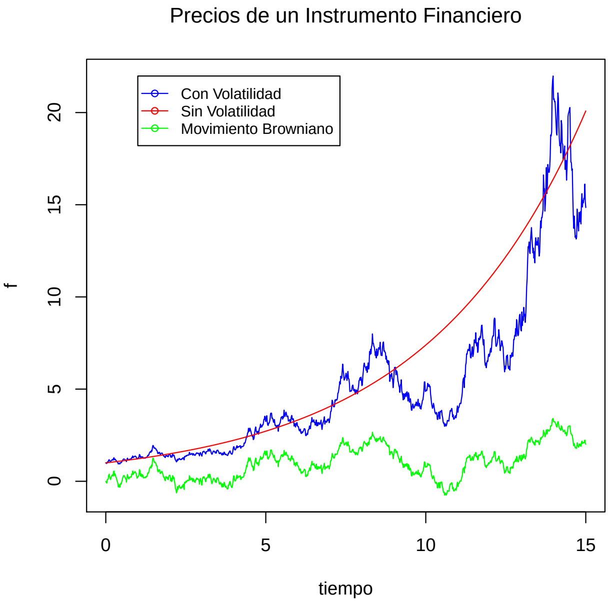
Donde $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ que es la definición de para la estandarización de una variable que se distribuye de forma normal.

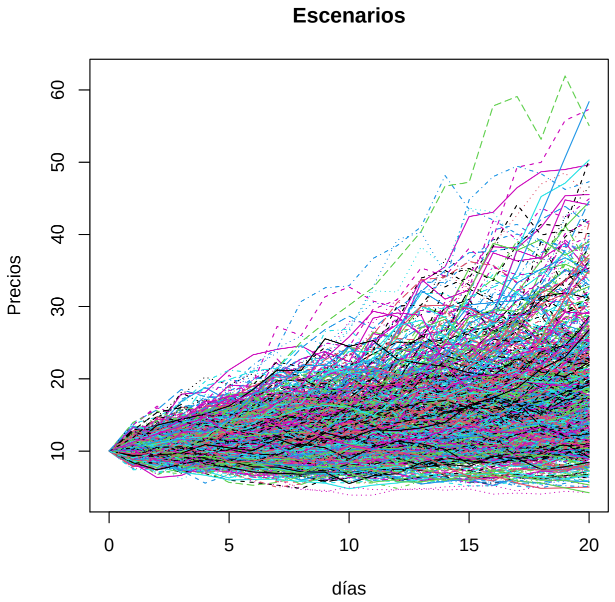

Movimiento Browniano
2
1
0
−1
−2
0
20
40
60
80
100
tiempo

Un proceso geométrico en el contexto financiero se puede explicar a partir de la ecuación de valor futuro continua $S_t = S_0 e^{rt}$ donde $S_t$ es el valor futuro, $S_0$ es el valor actual, $r$ es la tasa libre de riesgo y $t$ el tiempo o período en el cual se está evaluando la ecuación.

**Definición GBM:** Siendo $\mu$ y $\sigma$ constantes, se define el movimiento geométrico de la siguiente forma [Shreve, 2004]:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \tag{17}$$


Precios de un Instrumento Financiero
Con Volatilidad
Sin Volatilidad
Movimiento Browniano
f
0
5
10
15
20
tiempo
0
5
10
15


Escenarios
Precios
10
20
30
40
50
60
0
5
10
15
20
días

Cox, J. C., Ross, S. A., and Rubinstein, M. (1979).
Option pricing: A simplified approach.
*Journal of financial Economics*, 7(3):229–263.

Jorion, P. et al. (2007).
*Financial risk manager handbook*, volume 406.
John Wiley & Sons.

Shreve, S. E. (2004).
*Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models.*
Springer Science.