Modelos Univariados. Econometría Financiera Finanzas y Comercio Internacional

Andrés Martínez
MSc Stochastic Engineering
2019 - 2

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Contenido

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Contenidos del Corte

- Modelos Estacionarios [Jonathan and Kung-Sik, 2008]
  - Modelos de promedio movil *MA*
  - Modelos Auotoregressivos *AR*
- Modelos no estacionarios y de Volatilidad
  - Modelos diferenciados *ARIMA*
  - Modelos ARCH
  - Modelos GARCH

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Modelos Estacionarios

Definition

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias Y_t para $t \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Una serie de tiempo es discreta $I \subseteq \mathbb{Z}$.

Definition

Momentos de una serie de tiempo: Asumiendo que existen, la media $\mu(t)$ y la función de covarianza $\gamma(t, s)$ de Y_t para $t \in \mathbb{Z}$

$$\mu(t) = E(Y_t)$$
$$\gamma(t, s) = E((Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s))$$

Modelos Estacionarios

Definition

(Debil/Estrictamente) Estacionaria:

1. Y_t con $t \in Z$ es debilmente estacionaria si $E(Y_t^2) < \infty$, $\mu(t) = \mu \in \mathbb{R}$ y $\gamma(t+h, s+h)$ para todo $t, s, h \in \mathbb{Z}$
2. Y_t con $t \in Z$ es estrictamente estacionaria si $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}) = (Y_{t_{1+h}}, ..., Y_{t_{n+h}})$ para todo $t_1, ..., t_n$ con $h \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

Modelos Estacionarios

Un proceso lineal Y_t, se puede representar como una combinación ponderada de términos presentes y pasados de ruido blanco.

$$Y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \ldots \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty \tag{2}$$

Donde ψ cae de forma exponencial, resultando en

$$\psi_j = \phi^j \tag{3}$$

Donde ϕ se encuentre entre 1 y -1.

Modelos Estacionarios

$$Y_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \ldots \tag{4}$$

$$E[Y_t] = E(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \ldots) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= V(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \ldots) \\ &= V(\epsilon_t) + \phi^2 V(\epsilon_{t-1}) + \phi^4 V(\epsilon_{t-2}) + \ldots \\ &= \sigma_\epsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \ldots) \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

Modelos Estacionarios

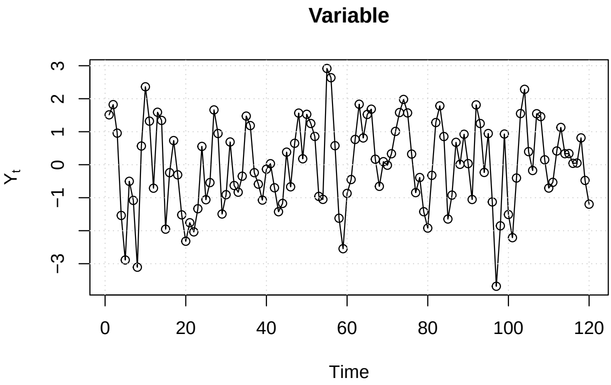
$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \ldots \\
&\quad , \epsilon_{t-1} + \phi\epsilon_{t-2} + \phi^2\epsilon_{t-3} + \ldots) \\
&= Cov(\epsilon_{t-1}, \phi\epsilon_{t-1}) + Cov(\phi^2\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) + \ldots \\
&= \phi\sigma_\epsilon^2 + \phi^3\sigma_\epsilon^2 + \phi^5\sigma_\epsilon^2 + \ldots \\
&= \phi\sigma_\epsilon^2(1 + \phi^2 + \phi4 + \ldots) \\
&= \frac{\phi\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

Modelos Estacionarios

Autocorrelación

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \left[\frac{\phi\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] / \left[\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] = \phi$$

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \left[\frac{\phi^k\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] / \left[\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] = \phi^k$$


Variable
Y_t
3
2
1
0
−1
−3
0
20
40
60
80
100
120
Time

Modelos Estacionarios

Moving Average MA(q)

$$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - \ldots - \Theta_q\epsilon_{t-q} \tag{6}$$

Ecuación de Primer orden del MA(1)

$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1}$ con $E[Y_t] = 0$ y $V[Y_t] = \sigma_\epsilon^2(1+\Theta^2)$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t - \Theta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1} - \Theta\epsilon_{t-2}) \\ &= Cov(-\Theta\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) \\ &= -\Theta\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Modelos Estacionarios

Modelo MA(1) $Y_t = \epsilon_t - \Theta_1 \epsilon_{t-1}$

$$
\begin{array}{ccccc}
E(Y_t) & = & 0 & & \\
\gamma_0 & = & V(Y_t) = \sigma_\epsilon^2(1+\Theta^2) & & \\
\gamma_1 & = & -\Theta\sigma_\epsilon^2 & & \\
\rho_1 & = & -\Theta/(1+\Theta^2)\gamma_0 & = & \rho_k = 0 \quad para \quad k \geq 2
\end{array}
$$

Modelos Estacionarios

Ecuación de Segundo Orden MA(2) $Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}$

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= V(Y_t) = V(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}) = (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2)\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\
\gamma_1 &= Cov(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}, \\
& \quad \epsilon_{t-1} - \Theta_1\epsilon_{t-2} - \Theta_2\epsilon_{t-3}) \\
\gamma_1 &= Cov(-\Theta_1\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) + Cov(-\Theta_1\epsilon_{t-2}, \\
& \quad -\Theta_2\epsilon_{t-2}) \\
\gamma_1 &= [-\Theta_1 + (-\Theta_1)(-\Theta_2)]\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 &= (-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma_2^2
\end{aligned}$$

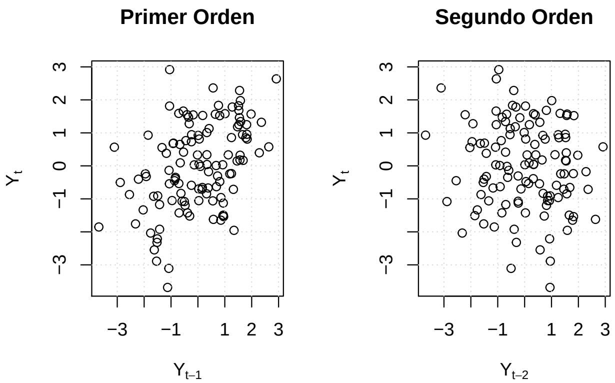
Modelos Estacionarios

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) \\
\gamma_2 &= Cov(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}, \\
&\quad \epsilon_{t-2} - \Theta_1\epsilon_{t-3} - \Theta_2\epsilon_{t-4}) \\
\gamma_2 &= Cov(-\Theta_2\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) \\
\gamma_2 &= -\Theta_2\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

$$\rho_1 = \frac{-\Theta_1+\Theta_1\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$$

Figura: Rezagos



Modelos Estacionarios

Proceso General $MA(q)$

$$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1 \epsilon_{t-1} - \Theta_2 \epsilon_{t-2} - ... - \Theta_q \epsilon_{t-q} \tag{7}$$

$$\gamma_0 = (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + ... + \Theta_q^2)\sigma_\epsilon^2 \tag{8}$$

$$\rho_k = \frac{-\Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \Theta_2 \Theta_{k+2} + ... + \Theta_q \Theta_{q-k}}{(1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + ... + \Theta_q^2)} \tag{9}$$

Modelos Estacionarios

Ejemplo: Use los principios para encontrar la función de autocorrelación para el proceso estacionario definido por $Y_t = 5 + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \frac{1}{4}\epsilon_{t-2}$

Solución

$$
\begin{aligned}
V[Y_t] &= V(5 + \epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}) \\
&= [1 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{4})^2]\sigma_\epsilon^2 \\
V[Y_t] &= \tfrac{28}{16}\sigma_\epsilon^2 \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-1} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-3}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-1} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) + Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2}; \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= [-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{2}]\sigma_\epsilon^2 \\
&= -\tfrac{9}{8}\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Modelos Estacionarios

Solución

$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= Cov(\epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-3} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-4}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= Cov(\tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) = \tfrac{1}{4}\sigma_\epsilon^2 \\
Cov(Y_t, Y_{t-3}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-3}) + Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-4}, \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-5}) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\rho_k = \begin{cases} 1 & (k = 0\ ) \\ \dfrac{-\frac{9}{8}\sigma_\epsilon^2}{\frac{28}{16}\sigma_\epsilon^2} & (k = 1) \\ \dfrac{-\frac{1}{4}\sigma_\epsilon^2}{\frac{28}{16}\sigma_\epsilon^2} & (k = 1) \\ 0 & k > 2 \end{cases}
$$

Modelos Estacionarios

Modelo Autoregressivo Un proceso autoregressivo Y_t, se puede representar como una combinación ponderada de términos presentes y pasados de la variable observada.

$$Y_t = Y_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \tag{10}$$

Ecuación de Primer orden del AR(1)

$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + \epsilon_t$

Resolviendo la varianza

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_\epsilon^2 \quad \rightarrow \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \tag{11}$$

Modelos Estacionarios

El valor Esperado se obtiene multiplicando Y_{t-k} en ambos lados. Siendo el $E(\epsilon_t) = 0$.

$$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + \epsilon_t \tag{12}$$

$$\begin{aligned} E(Y_{t-k}Y_t) &= \phi E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + E(\epsilon_t Y_{t-k}) \\ \gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} + E(\epsilon_t Y_{t-k}) \\ \gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} \end{aligned}$$

Usando la varianza γ_0 se puede despejar la covarianza para cualquier nivel.

Modelos Estacionarios

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \tag{13}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \tag{14}$$

Condición de estacionariedad El modelo permanecera estacionario y estable, en la medida en que $|\phi| < 1$.

Modelos Estacionarios

Ecuación de segundo orden del AR(2)

$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + \epsilon_t$

Condiciones de estacionariedad:
Ecuación característica AR es un polinomio $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$
Ecuación característica $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$
Para cumplir con la condición, se requiere que las raices excedan en 1 en valor absoluto.

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \tag{15}$$

Modelos Estacionarios

Función Yule Walker y Función de Autocorrelación

Multiplicando $Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + \epsilon_t$ por Y_{t-k} en ambos lados se puede obtener la función Yule Walker.

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} \tag{16}$$

Dividiendo por γ_0

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} \tag{17}$$

Modelos Estacionarios

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \tag{18}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_2(1-\phi_2)+\phi_1^2}{1-\phi_2} \tag{19}$$

Finalmente la varianza de este proceso

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_\epsilon^2}{(1-\phi_2)(1-\phi_1^2-\phi_2^2)-2\phi_2\phi_1^2} \tag{20}$$

Modelos Estacionarios

Modelo Autoregressivo Proceso General

$$Y_t = Y_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \tag{21}$$

Ecuación de Primer orden del AR(p)
AR polinomial

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p \tag{22}$$

AR ecuación característica

$$0 = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p \tag{23}$$

Implementando la ecuación Yule Walker se puede obtener la función de correlación para cualquier período.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \tag{24}$$

La varianza se calcula usando la correlación en k $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \ldots - \phi_p x^p} \tag{25}$$

Modelos Estacionarios

Ejemplo Use la formula recursiva para calcula la función de autocorrelación para un proceso $AR(2)$ con parámetros especificados. En cada caso especifique si las raices características son reales o complejas.

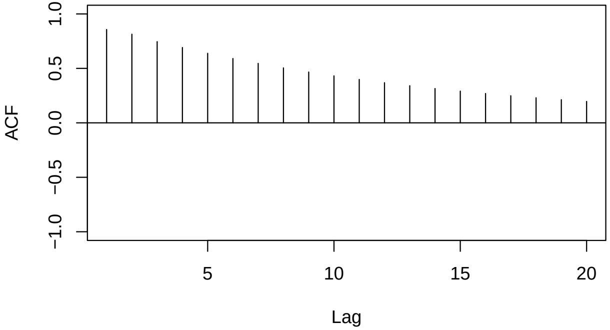
a $\phi_1 = 0{,}6 \quad \phi_2 = 0{,}3$

b $\phi_1 = -0{,}4 \quad \phi_2 = 0{,}5$

c $\phi_1 = 1{,}2 \quad \phi_2 = -0{,}7$

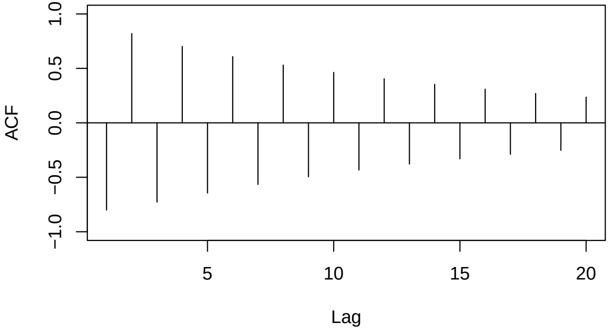
Solución Punto a

```
[1]  1.081666-0i -3.081666+0i
```



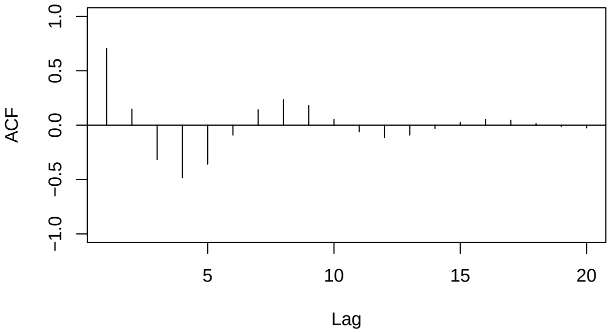
Solución punto b

```
[1] -1.069694+0i  1.869694-0i
```



Solución punto c

```
[1] 0.8571429+0.8329931i 0.8571429-0.8329931i
```



Modelos no Estacionarios

Modelos ARMA Combinando los dos modelos se puede obtener una predicción de Y_t usando sos valores y los errores rezagados. La forma general $ARMA(p, q)$ de este proceso es:

$$\begin{aligned} Y_t \quad = \quad & Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + ... + Y_{t-p}\phi_p + \\ & \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - ... - \Theta_q\epsilon_{t-q} \end{aligned}$$

Modelos Estacionarios

Invertibilidad:La función de autocorrelación para el proceso *MA* es la misma si $\Theta = 1/\Theta$, dado que este a través de un proceso de recursión se puede obeservar como $Y_t = \Theta Y_{t-1} + \epsilon_t$ se puede decir que un proceso *AR* es *MA* pero infinito.
Por tal razón , si las raices de los coeficientes de un modelo *MA* superan a 1, se puede decir que existe estacionariedad en el proceso *MA*.

Función de Autocorrelación Parcial ϕ_{kk} Dado que la función de autocorrelación no se convierte en cero después de un número determinado de rezagos para un modelos $AR(p)$ mientras que para un modelo $MA(q)$ esto sucede después de q, se necesita una función de autocorrelación que permita ver en que momento termina el efecto de la variable rezadagada Y_{t-k} sobre Y_t.

Como en la función de autocorrelación se ve el efecto conjunto de cada uno de los rezagos sobre Y_t, es importante eliminar el efecto de los rezagos intermedios para poder ver el efecto directo de Y_{t-k} sobre Y_t.

Cálculo de la Función: Extrayendo la media de la serie de cada observación, se obtiene el primer orden de autoregresión. Para $Y_t^* = Y_t - \mu$.

$$Y_t^* = \phi_{11} Y_{t-1}^* + e_t \tag{26}$$

Para el período uno,

$$Y_t^* = \phi_{21} Y_{t-1}^* + \phi_{22} Y_{t-1}^* + e_t \tag{27}$$

Para el período 2. Luego generalizando la función:

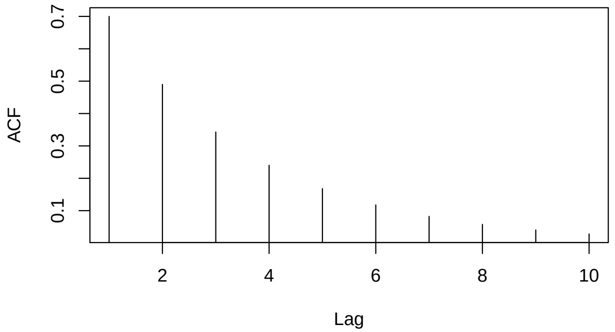
$$\phi_{ss} = \frac{\rho_s - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho_{s-j}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho_j} \tag{28}$$

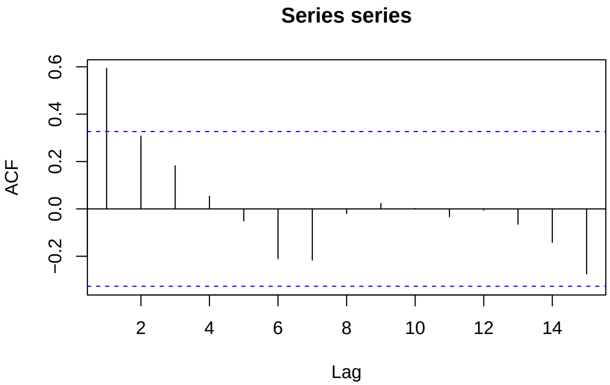
UNIVERSIDAD DE LA SALLE

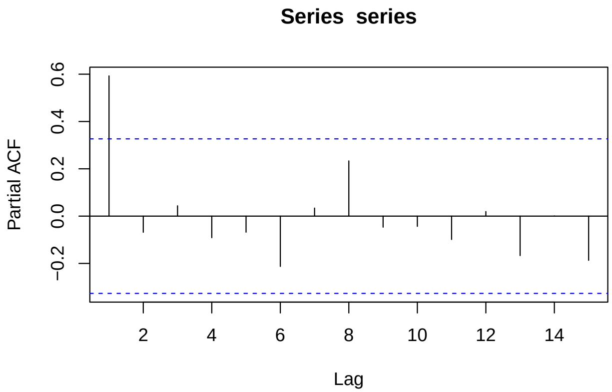
Ejemplo:Obtenga un $AR(1)$ con $n = 36$ y $\phi = 0{,}7$

- Calcule el ACF teórico
- Calcule el ACF simulado
- Calcule el PACF simulado

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.000	0.700	0.490	0.343	0.240	0.168	0.118	0.082	0.058	0.040




Series series
ACF
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
2
4
6
8
10
12
14
Lag


Series series
Partial ACF
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
2
4
6
8
10
12
14
Lag

Diagnóstico del Modelo

Análisis de los residuales

Un modelo *ARIMA* que tiene una buena especificación, tiende a tener unos residuales que se aproximan a un ruido blanco con una distribución de observaciones independientes y que se comportan de forma normal.

Los residuales se pueden definir asi:

$$\hat{\epsilon} = Y_t - \hat{\pi}_1 Y_{t-1} - \hat{\pi}_2 Y_{t-2} - \hat{\pi}_3 Y_{t-3} - \dots \quad (29)$$

Renombrandose como: $residual = actual - predicted$

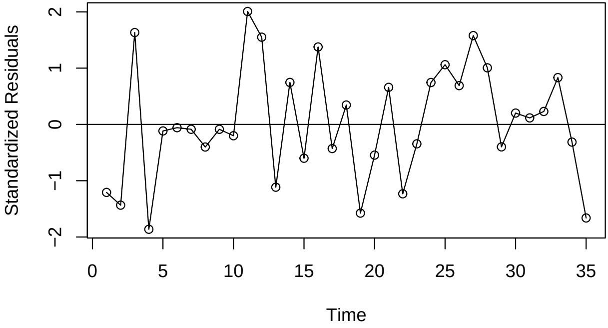
El primer diagnóstico es inspeccionar los residuales en el tiempo. Si es el adeacuado, se espera un comportamiento rectangular.

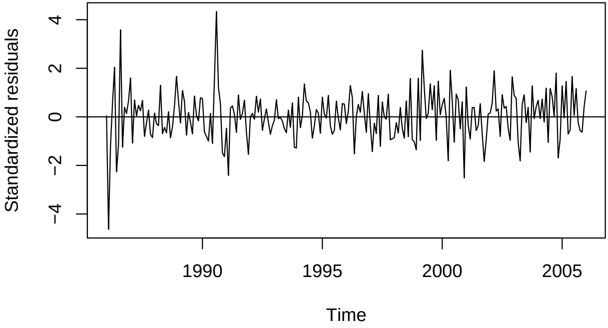
El segundo diagnóstico es encontrar la normalidad en los residuales, una forma facil de revisar este proceso, es a través del QQplot, haciendo la prueba de Jarque Bera o el test de Shapiro Wilk.

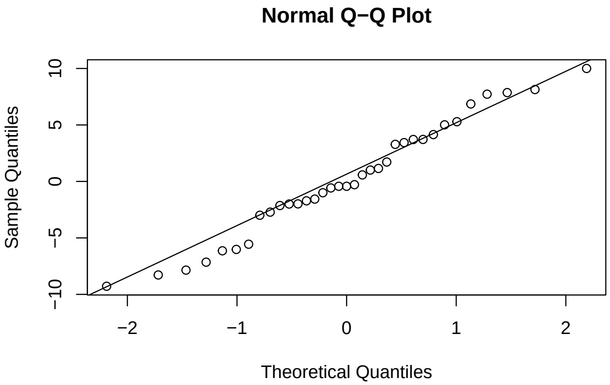
Por último en el análisis de residuales, se prueba la autocorrelación entre los residuales, buscando probar que no existe dado que ellos son independientes. La primera forma de saber esto es haciendo una grafica ACF, en tanto no exista autocorrelación, hay un indicio de que los residuales son independientes cumpliendo con el supuesto requerido.

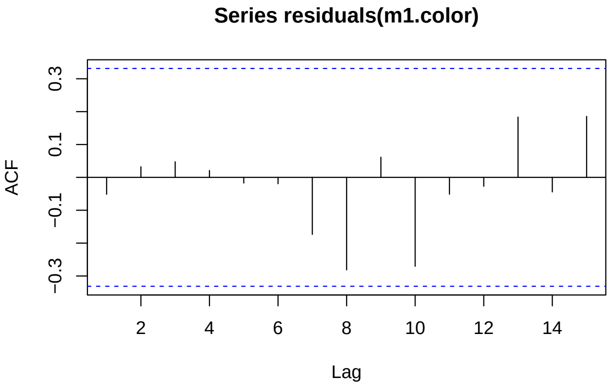
El segundo método es usar el test de Portmanteau también conocido como el test de Ljung Box, en donde la hipótesis nula es

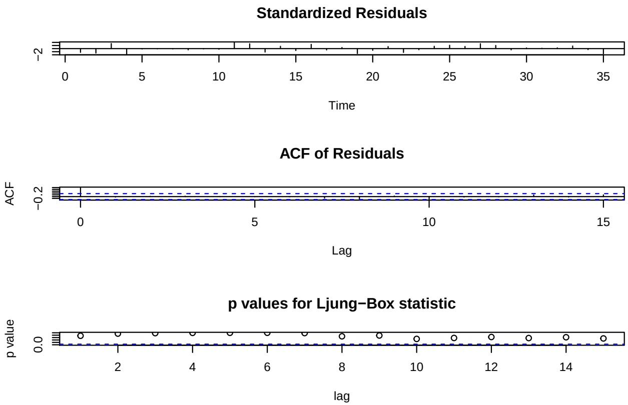
```
Call:
arima(x = color, order = c(1, 0, 0))

Coefficients:
         ar1  intercept
      0.5705    74.3293
s.e.  0.1435     1.9151

sigma^2 estimated as 24.83:  log likelihood = -106.07,  aic
```


Standardized Residuals
2
1
0
−1
−2
0
5
10
15
20
25
30
35
Time


Standardized residuals
4
2
0
−2
−4
1990
1995
2000
2005
Time


Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
−10
−5
0
5
10
−2
−1
0
1
2


Series residuals(m1.color)
ACF
0.3
0.1
−0.1
−0.3
2
4
6
8
10
12
14
Lag



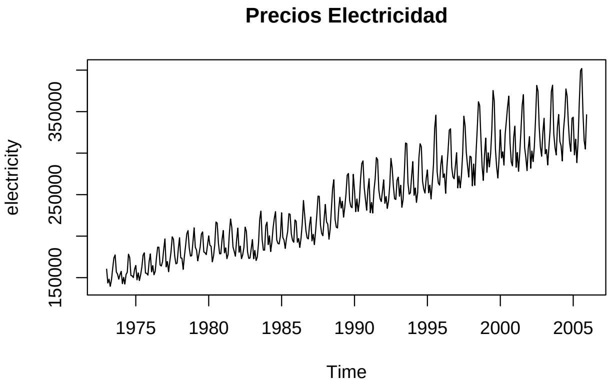
Modelos no Estacionarios

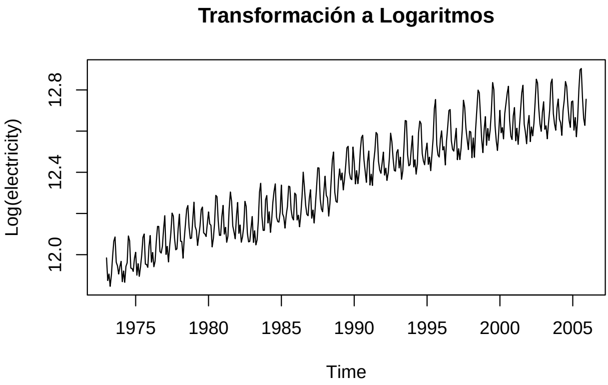
Modelos no Estacionarios

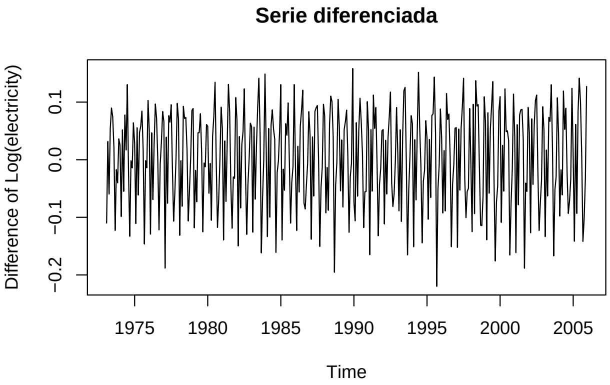
Un proceso $ARIMA(p,1,q)$ se define de la siguiente forma: con $W_t = Y_t - Y_{t-1}$.

$$\begin{aligned} W_t &= W_{t-1}\phi_{t-1} + W_{t-2}\phi_{t-2} + \ldots + W_{t-p}\phi_p + \\ &\quad \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - \ldots - \Theta_q\epsilon_{t-q} \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE


Precios Electricidad
electricity
150000
250000
350000
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
Time


Transformación a Logaritmos
Log(electricity)
12.0
12.4
12.8
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
Time



Jonathan, D. C. and Kung-Sik, C. (2008).
Time series analysis with applications in r.

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

SpringerLink, Springer eBooks.