# Modelos Univariados.
# Econometría Financiera
# Finanzas y Comercio Internacional

Andrés Martínez
MSc Stochastic Engineering
2019 - 2

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Contenido



UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Contenidos del Corte

- Modelos Estacionarios [Jonathan and Kung-Sik, 2008]
  - Modelos de promedio movil *MA*
  - Modelos Auotoregressivos *AR*
- Modelos no estacionarios y de Volatilidad
  - Modelos diferenciados *ARIMA*
  - Modelos ARCH
  - Modelos GARCH

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

## Definition

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $Y_t$ para $t \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Una serie de tiempo es discreta $I \subseteq \mathbb{Z}$.

## Definition

Momentos de una serie de tiempo: Asumiendo que existen, la media $\mu(t)$ y la función de covarianza $\gamma(t,s)$ de $Y_t$ para $t \in \mathbb{Z}$

$$\mu(t) = E(Y_t)$$
$$\gamma(t,s) = E((Y_t - \mu_t)(Y_s - \mu_s))$$

# Modelos Estacionarios

## Definition

(Debil/Estrictamente) Estacionaria:

1. $Y_t$ con $t \in Z$ es debilmente estacionaria si $E(Y_t^2) < \infty$, $\mu(t) = \mu \in \mathbb{R}$ y $\gamma(t+h, s+h)$ para todo $t, s, h \in \mathbb{Z}$
2. $Y_t$ con $t \in Z$ es estrictamente estacionaria si $(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}) = (Y_{t_{1+h}}, ..., Y_{t_{n+h}})$ para todo $t_1, ..., t_n$ con $h \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

Un proceso lineal $Y_t$, se puede representar como una combinación ponderada de términos presentes y pasados de ruido blanco.

$$Y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty \quad (2)$$

Donde $\psi$ cae de forma exponencial, resultando en

$$\psi_j = \phi^j \quad (3)$$

Donde $\phi$ se encuentre entre 1 y $-1$.

# Modelos Estacionarios

$$Y_t = \epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + ... \tag{4}$$

$$E[Y_t] = E(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + ...) = 0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned} V(Y_t) &= V(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + ...) \\ &= V(\epsilon_t) + \phi^2 V(\epsilon_{t-1}) + \phi^4 V(\epsilon_{t-2}) + ... \\ &= \sigma_\epsilon^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + ...) \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \end{aligned}$$

# Modelos Estacionarios

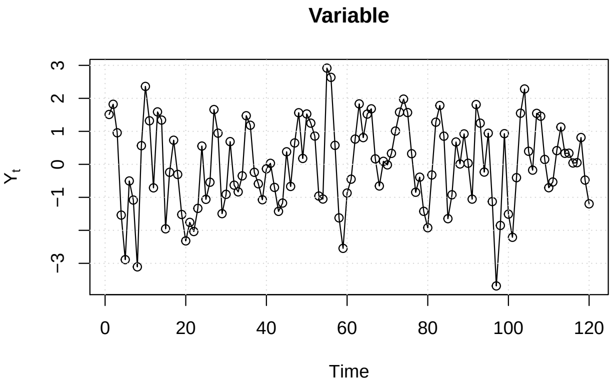
$$
\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t + \phi\epsilon_{t-1} + \phi^2\epsilon_{t-2} + \ldots \\
&\qquad , \epsilon_{t-1} + \phi\epsilon_{t-2} + \phi^2\epsilon_{t-3} + \ldots) \\
&= Cov(\epsilon_{t-1}, \phi\epsilon_{t-1}) + Cov(\phi^2\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) + \ldots \\
&= \phi\sigma_\epsilon^2 + \phi^3\sigma_\epsilon^2 + \phi^5\sigma_\epsilon^2 + \ldots \\
&= \phi\sigma_\epsilon^2(1 + \phi^2 + \phi 4 + \ldots) \\
&= \frac{\phi\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

# Modelos Estacionarios

## Autocorrelación

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \left[\frac{\phi\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] / \left[\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] = \phi$$

$$Corr(Y_t, Y_{t-1}) = \left[\frac{\phi^k\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] / \left[\frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2}\right] = \phi^k$$


Variable
$Y_t$
3
2
1
0
−1
−3
0
20
40
60
80
100
120
Time

# Modelos Estacionarios

## Moving Average MA(q)

$$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - \ldots - \Theta_q\epsilon_{t-q} \tag{6}$$

## Ecuación de Primer orden del MA(1)

$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1}$ con $E[Y_t] = 0$ y $V[Y_t] = \sigma_\epsilon^2(1 + \Theta^2)$

$$\begin{aligned} Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t - \Theta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1} - \Theta\epsilon_{t-2}) \\ &= Cov(-\Theta\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) \\ &= -\Theta\sigma_\epsilon^2 \end{aligned}$$

# Modelos Estacionarios

**Modelo MA(1)** $Y_t = \epsilon_t - \Theta_1 \epsilon_{t-1}$

$$
\begin{array}{ccccc}
E(Y_t) & = & 0 & & \\
\gamma_0 & = & V(Y_t) = \sigma_\epsilon^2(1+\Theta^2) & & \\
\gamma_1 & = & -\Theta\sigma_\epsilon^2 & & \\
\rho_1 & = & -\Theta/(1+\Theta^2)\gamma_0 & = & \rho_k = 0 \quad para \quad k \geq 2
\end{array}
$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

**Ecuación de Segundo Orden MA(2)** $Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 &= V(Y_t) = V(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}) = (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2)\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\
\gamma_1 &= Cov(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}, \\
& \quad \epsilon_{t-1} - \Theta_1\epsilon_{t-2} - \Theta_2\epsilon_{t-3}) \\
\gamma_1 &= Cov(-\Theta_1\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) + Cov(-\Theta_1\epsilon_{t-2}, \\
& \quad -\Theta_2\epsilon_{t-2}) \\
\gamma_1 &= [-\Theta_1 + (-\Theta_1)(-\Theta_2)]\sigma_\epsilon^2 \\
\gamma_1 &= (-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

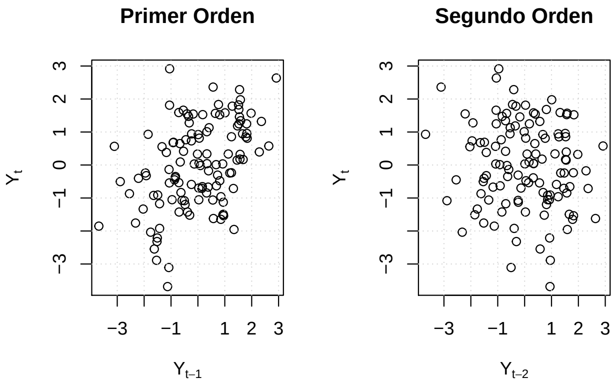
# Modelos Estacionarios

$$
\begin{aligned}
\gamma_2 &= Cov(Y_t, Y_{t-2}) \\
\gamma_2 &= Cov(\epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2}, \\
&\quad \epsilon_{t-2} - \Theta_1\epsilon_{t-3} - \Theta_2\epsilon_{t-4}) \\
\gamma_2 &= Cov(-\Theta_2\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) \\
\gamma_2 &= -\Theta_2\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}
$$

$$\rho_1 = \frac{-\Theta_1+\Theta_1\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$$

$$\rho_2 = \frac{-\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$$

Figura: Rezagos



# Modelos Estacionarios

**Proceso General** $MA(q)$

$$Y_t = \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - ... - \Theta_q\epsilon_{t-q} \tag{7}$$

$$\gamma_0 = (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + ... + \Theta_q^2)\sigma_\epsilon^2 \tag{8}$$

$$\rho_k = \frac{-\Theta_k + \Theta_1\Theta_{k+1} + \Theta_2\Theta_{k+2} + ... + \Theta_q\Theta_{q-k}}{(1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + ... + \Theta_q^2)} \tag{9}$$

# Modelos Estacionarios

**Ejemplo:**Use los principios para encontrar la función de autocorrelación para el proceso estacionario definido por $Y_t = 5 + \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \frac{1}{4}\epsilon_{t-2}$

**Solución**

$$
\begin{aligned}
V[Y_t] &= V(5 + \epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}) \\
&= [1 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{4})^2]\sigma_\epsilon^2 \\
V[Y_t] &= \tfrac{28}{16}\sigma_\epsilon^2 \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(\epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-1} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-3}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-1} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) + Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-2}, \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-1}) &= [-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{2}]\sigma_\epsilon^2 \\
&= -\tfrac{9}{8}\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}
$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

**Solución**

$$\begin{aligned}
Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= Cov(\epsilon_t - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2} - \tfrac{1}{2}\epsilon_{t-3} + \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-4}) \\
Cov(Y_t, Y_{t-2}) &= Cov(\tfrac{1}{4}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-2}) = \tfrac{1}{4}\sigma_\epsilon^2 \\
Cov(Y_t, Y_{t-3}) &= Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-3}) + Cov(-\tfrac{1}{2}\epsilon_{t-4}, \tfrac{1}{4}\epsilon_{t-5}) = 0
\end{aligned}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & (k = 0\ ) \\ \dfrac{-\frac{9}{8}\sigma_\epsilon^2}{\frac{28}{16}\sigma_\epsilon^2} & (k = 1) \\ \dfrac{-\frac{1}{4}\sigma_\epsilon^2}{\frac{28}{16}\sigma_\epsilon^2} & (k = 1) \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

# Modelos Estacionarios

**Modelo Autoregressivo** Un proceso autoregressivo $Y_t$, se puede representar como una combinación ponderada de términos presentes y pasados de la variable observada.

$$Y_t = Y_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \tag{10}$$

**Ecuación de Primer orden del AR(1)**

$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + \epsilon_t$

Resolviendo la varianza

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_\epsilon^2 \quad \rightarrow \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \tag{11}$$

# Modelos Estacionarios

El valor Esperado se obtiene multiplicando $Y_{t-k}$ en ambos lados. Siendo el $E(\epsilon_t) = 0$.

$$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + \epsilon_t \tag{12}$$

$$\begin{aligned} E(Y_{t-k}Y_t) &= \phi E(Y_{t-k}Y_{t-1}) + E(\epsilon_t Y_{t-k}) \\ \gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} + E(\epsilon_t Y_{t-k}) \\ \gamma_k &= \phi\gamma_{k-1} \end{aligned}$$

Usando la varianza $\gamma_0$ se puede despejar la covarianza para cualquier nivel.

# Modelos Estacionarios

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_\epsilon^2}{1-\phi^2} \tag{13}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \tag{14}$$

**Condición de estacionariedad** El modelo permanecera estacionario y estable, en la medida en que $|\phi| < 1$.

# Modelos Estacionarios

**Ecuación de segundo orden del AR(2)**

$Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + \epsilon_t$

Condiciones de estacionariedad:
Ecuación característica $AR$ es un polinomio $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2$
Ecuación característica $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$
Para cumplir con la condición, se requiere que las raices excedan en 1 en valor absoluto.

$$\frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2} \tag{15}$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

**Función Yule Walker y Función de Autocorrelación**

Multiplicando $Y_t = Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + \epsilon_t$ por $Y_{t-k}$ en ambos lados se puede obtener la función Yule Walker.

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} \tag{16}$$

Dividiendo por $\gamma_0$

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} \tag{17}$$

# Modelos Estacionarios

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \tag{18}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_2(1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2} \tag{19}$$

Finalmente la varianza de este proceso

$$\gamma_0 = \frac{(1 - \phi_2)\sigma_\epsilon^2}{(1 - \phi_2)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) - 2\phi_2\phi_1^2} \tag{20}$$

# Modelos Estacionarios

**Modelo Autoregressivo Proceso General**

$$Y_t = Y_t + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + ... + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \tag{21}$$

**Ecuación de Primer orden del AR(p)**
**AR polinomial**

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p \tag{22}$$

**AR ecuación característica**

$$0 = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p \tag{23}$$

Implementando la ecuación Yule Walker se puede obtener la función de correlación para cualquier período.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p} \tag{24}$$

La varianza se calcula usando la correlación en $k$ $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - ... - \phi_p x^p} \tag{25}$$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

# Modelos Estacionarios

**Ejemplo** Use la formula recursiva para calcula la función de autocorrelación para un proceso $AR(2)$ con parámetros especificados. En cada caso especifique si las raices características son reales o complejas.

a $\phi_1 = 0{,}6 \quad \phi_2 = 0{,}3$

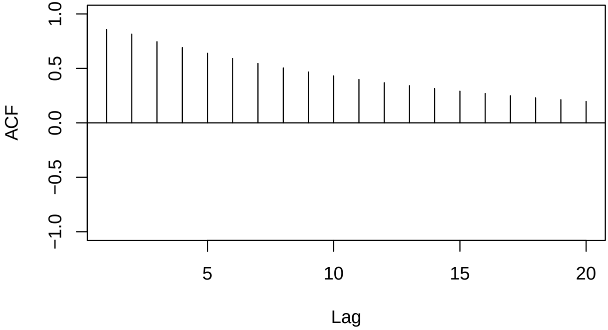
b $\phi_1 = -0{,}4 \quad \phi_2 = 0{,}5$

c $\phi_1 = 1{,}2 \quad \phi_2 = -0{,}7$

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

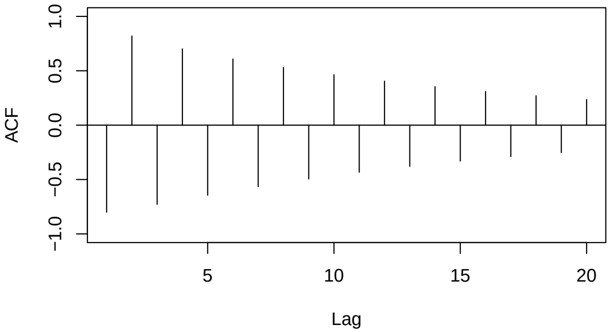
## Solución Punto a

```
[1]  1.081666-0i -3.081666+0i
```



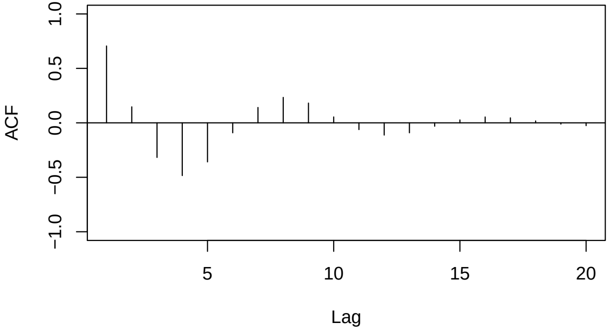
## Solución punto b

```
[1] -1.069694+0i  1.869694-0i
```



## Solución punto c

```
[1] 0.8571429+0.8329931i 0.8571429-0.8329931i
```



# Modelos no Estacionarios

**Modelos ARMA** Combinando los dos modelos se puede obtener una predicción de $Y_t$ usando sos valores y los errores rezagados. La forma general $ARMA(p, q)$ de este proceso es:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_{t-1}\phi_{t-1} + Y_{t-2}\phi_{t-2} + \ldots + Y_{t-p}\phi_p + \\ &\quad \epsilon_t - \Theta_1\epsilon_{t-1} - \Theta_2\epsilon_{t-2} - \ldots - \Theta_q\epsilon_{t-q} \end{aligned}$$

# Modelos no Estacionarios

UNIVERSIDAD DE LA SALLE

Jonathan, D. C. and Kung-Sik, C. (2008).
Time series analysis with applications in r.
*SpringerLink, Springer eBooks*.