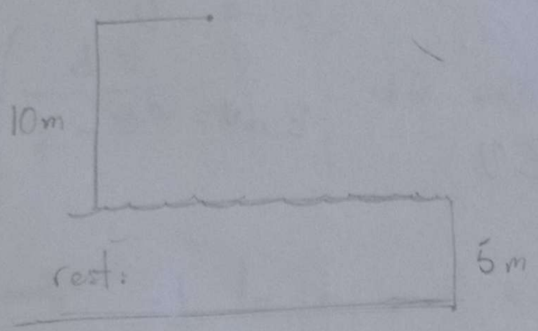
Mecánica Clásica. Andrés Hernández -Donovan Seijas

1. Las fosas para competencias de clavados, desde 10 m, tiene una profundidad de 5 m

a. Justifique porque es la profundidad segura.



Supongamos que no hay resistencia del aire.

- Desde la plataforma a la superficie del agua.

$V_0 = 0\,m/s$

$r_0 = 10\,m$

masa: m [Kg]

$r(t) = 10 - \frac{1}{2} g t^2$ $\quad F = -mg$

$v(t) = -gt$

$a(t) = -g$

Fuerza en el agua: con resistencia K.

$F = -mg + Kv^2 = m\frac{dv}{dt}$

$mg + Kv^2 = m\frac{dv}{dt}$

$g + \frac{K}{m} v^2 = \frac{dv}{dt} = a$

Velocidad con que llega a la piscina: (T)

$0 = 10 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} g T^2 \Rightarrow \frac{20}{g} = T^2$

$\longrightarrow 1{,}43\,s = T$

$v(T) = -gT \Rightarrow v(T) = -g(1{,}43\,s) = -14\,m/s.$

Powered by CamScanner

$V_0 = 14 \ m/s$

Esfera de 0,25 m de r

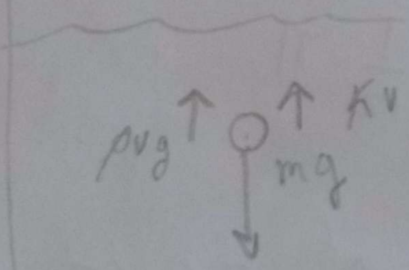
235

$A = \frac{1}{4}\pi$

$Cd = \frac{2 Fd}{\rho v^2 A}$

m = 70 kg.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho^{Vol} g - Fd$$



Usamos la fuerza de arrastre característica de una esfera, con coeficiente de 0,47.
Ademas de la fuerza de empuje.
Ambas fuerzas se oponen al mov del cuerpo hasta frenarlo.
Se tomo como diametro el largo del femur y se simplifico el atleta a una esfera.

$Fd = \frac{1}{2} Cd \rho v^2 A$

$Fd = 184,57 \ v^2$

dt

$$\longrightarrow V^{?} - 9{,}799 + 2{,}64V^2 = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho\, Vol}{m} g - \frac{1}{2} C_d \rho V^2 A$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\rho\, Vol}{m}\right) - \frac{1}{2} C_d \rho v^2 A$$

$$\frac{dv}{dt} = 0{,}63 - \frac{235}{14} \pi V^2$$

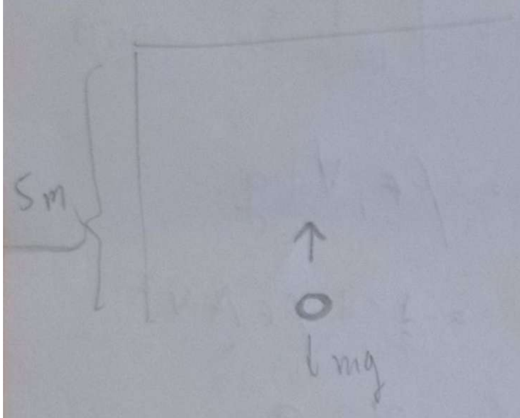
$A = \frac{1}{16}\pi$ $\quad \rho = 1000$

$Vol = \frac{1}{48}\pi$ $\quad C_d = 0{,}47$

$\frac{47}{56}\pi = 2{,}64$

b) Suponga un corcho esferico de 5 cm d diametro en el fondo de la fosa. Calcule la velocidad que llega a la superficie

$$F = -mg + \rho\, Vol\, g - Fd$$



$$\frac{dv}{dt} m = -mg + \rho\, Vol\, g - Fd$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\rho \frac{Vol}{m} - 1\right) - \frac{Fd}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\rho_F \cdot \frac{\cancel{Vol}}{\cancel{Vol}\, \rho_c} - 1\right) - \frac{Fd}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{\rho_F}{\rho_c} - 1\right) - \frac{Fd}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g(2,89) - Fd/\rho_c Vol$$

$$\frac{dv}{dt} = 28,37 - 0,00011\, v^2$$

$A = \frac{1}{400}\pi$

$Vol = \frac{125}{6}\pi$

$\rho = \frac{m}{Vol} = 256,77$

$Vol\, \rho$

$Cd = \frac{Fd\, 2}{A \rho v^2}$

$Fd = \frac{Cd}{2} A \rho v^2$

$$v(t) = 160,1 \tanh(0,177t)$$

$$x(t) = 904,52 \ln(\cosh(0,177t))$$

$x(0,6) = 5m$

$V(0,6) = 16,939\ m/s$

c) Velocidad de la Burbuja

Llego a la superficie donde tiene $v=0$, y las F_{neta} es cero

$$0 = -F_W + F_{arrastre} + F_{empuje}$$

$$F_{empuje} = \rho_F \, Vol \, g$$

$$F_W = F_{arrastre} + F_{empuje}$$

$$F_{arrastre} = \frac{1}{2} C_d \, \rho_F \, A \, V^2$$

$$F_W = \rho_{gas} \, Vol \, g.$$

$$\rho_F \, Vol \, g = \rho_F \, Vol \, g + \frac{1}{2} C_d \, \rho_F \, A V^2$$

$r = 0,1$ m

$Vol = 1/750\pi$

$A = 1/100\pi$

$\rho_{gas} = 1,225$ Kg/m3

$$\frac{2}{C_d} \frac{(\rho_F \, Vol \, g - \rho_g \, Vol \, g)}{\rho_F \, A} = V^2$$

$$\frac{2}{C_d \, \rho_F A} (Vol \, g)(\rho_F - \rho_g) = V^2$$

$$0,135 \, (0,41)(998,775) = v^2 \Longrightarrow v = 2,35$$

Solución 2

a)

$$(1)\ F = eE + \frac{e}{c} v \times B \qquad F = ma_c$$

si $E = 0 \Rightarrow$ $$ma_c = e\cdot\cancel{0}^{0} + \frac{e}{c} v \times B \qquad a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e}{c}|v||B| \sin\cancel{90°}^{1}$$

$$\frac{c}{e}\frac{m|v|}{|B|} = r$$

b) $$B = B_z \hat{e}_z \qquad E = E_y e_y + E_z e_z$$

como se tiene (1) $\Rightarrow$

$$v = \dot{x}_x e_x \quad \dot{y} e_y \quad \dot{z} e_z \Rightarrow v \times B$$

$$v \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = \dot{y} B_z \hat{i} - \dot{x} B_z \hat{j}$$

$$\Rightarrow F = e\left(E_y e_y + E_z e_z\right) + \frac{e}{c}\left(\dot{y} B_z e_x - \dot{x} B_z e_y\right)$$

$$m\left(\ddot{x}e_x + \ddot{y}e_y + \ddot{z}e_z\right) = \text{''} \qquad \text{''}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}e_x = \frac{e}{c}\dot{y}B_z e_x$$

$$m\ddot{y}e_y = eE_y e_y - \frac{e}{c}\dot{x}B_z e_y$$

Para z se tiene.

$$m\ddot{z}e_z = \frac{eE_z}{} \Rightarrow \int \ddot{z} = \int \frac{eE_z}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{eE_z}{m}t + c \qquad c = \dot{z}_0$$

$$\int \dot{z} = \int \frac{eE_z}{m}t + \dot{z}_0$$

$$c = z_0$$

$$\boxed{z(t) = \frac{eE_z}{m}t^2 + \dot{z}_0 t + z_0}$$

Para (x)

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y}B_z$$

Para (y)

$$m\ddot{y} = -\frac{e}{c}\dot{x}B_z + eE_y \quad (2)$$

Para z se tiene.

$$m\ddot{z}e_z = e E_z \quad \Rightarrow \int \ddot{z} = \int \frac{eE_z}{m}$$

$$\dot{z} = \frac{eE_z}{m} t + C \qquad C = \dot{z}_0$$

$$\int \dot{z} = \int \frac{eE_z}{m} t + \dot{z}_0$$

$$C = z_0$$

$$\boxed{z(t) = \frac{eE_z}{m} t^2 + \dot{z}_0 t + z_0}$$

Para (x)

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c}\dot{y} B_z$$

Para (y)

$$m\ddot{y} = -\frac{e}{c}\dot{x} B_z + eE_y \qquad (2)$$

solución c,

c) $m\ddot{x} = \frac{e B_z}{cm} \dot{y}$ $\qquad$ $m\ddot{y} = -\frac{e B_z}{c} \dot{x} + eE_y$

$$\omega_c = \frac{eB}{cm}$$

$\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$ $\qquad$ $\ddot{y} = -\omega_c \dot{x} + \frac{e}{m} E_y$

$$\dddot{x} = \omega_c \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \frac{\dddot{x}}{\cancel{\omega_c}} + \omega_c^2 \dot{x} = \frac{e}{m} E_y \omega_c$$

Solución general

$$\dot{x}(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$$

ya que

$$\dot{x} = e^{\lambda t} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_c^2 e^{\lambda t} = 0 \quad (\lambda + \omega_c i)(\lambda - \omega_c i)$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \omega_c^2) = 0$$

si: $r = a + bi \Rightarrow y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \operatorname{sen} bx)$

Solución particular

$$\dot{x}_p = K \Rightarrow \ddot{x} = 0 \quad \dddot{x} = 0$$

$$\Rightarrow K\omega_c^2 + 0 = \frac{e}{m} E_y \omega_c$$

$$K = \frac{e}{m}\frac{E_y}{\omega_c} = \frac{cE_y}{B}$$

$$\dot{x}(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B}$$

$$\dot{y} = \ddot{x} \qquad \ddot{x} = -A\omega_c \sin(\omega_c t) + B\omega_c \cos(\omega_c t)$$

$$= C\sin(\omega_c t) + D\cos(\omega_c t)$$

$$\dot{y} = \frac{C\sin(\omega_c t) + D\cos(\omega_c t)}{\omega_c}$$

d) $Y = \frac{A}{\omega_c} (\cos \omega_c t - 1)$

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + \frac{c E_y}{B} t$$

$$\dot{x} = \frac{A}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \frac{c E_y}{B}$$

$$\Rightarrow \quad X = \int A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) + \frac{c}{B} E_y$$

$$= A \sin(\omega_c t) + B \cos(\omega_c t) + \frac{c}{B} E_y t + C_1$$

$$x(0) = B + \cancel{\frac{c}{B} E_y t} + C_1 = \frac{A}{\omega_c} + \cancel{\frac{c E_y}{B} t}$$

$$\boxed{B + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = C_1 \qquad B = 0}$$

$$\dot{x}(0) = A + \cancel{\frac{c E_y}{B}} = \frac{A}{\omega_c} \cos \cancel{(\omega_c 0)}^{1} + \frac{c E_y}{B}$$

$$\boxed{A = \frac{A}{\omega_c}}$$

$$\dot{y}(0) = \frac{D \cos(\omega_c t)}{\omega_c} = -\frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

$$\boxed{D = 0}$$

$$y(0) = \frac{1}{\omega_c}(-C + 0 + C_2) = \frac{A}{\omega_c}(1 - 1) = 0$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{C}{\omega_c}}$$

$\cancel{A} \rightarrow C E_y$

$\cancel{\omega_c} = e B$

Formando las ecuaciones con las condiciones iniciales anteriores para A, C_2, D, B y C_1 se tendría

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + \frac{c E_y}{B} t$$

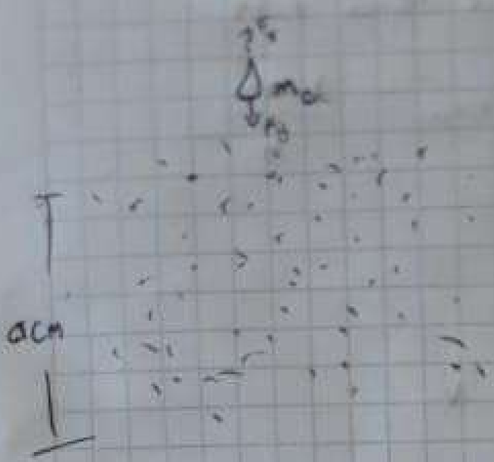
y

$$y(t) = \frac{c}{\omega_c} \cos(\omega_c t) - \frac{c}{\omega_c}$$

$$= \frac{c}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1)$$

Para las graficas tener en cuenta el código:
https://colab.research.google.com/drive/1CJsHTRd3g5g-3x0yN8OcxN4EPwK4Caee?usp=sharing

Solución 3.



$$\frac{dm}{dt} = b \ g/s.$$

$$m = m_0 + bt$$

Solución a.

por segunda ley de newton se tiene

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}((m_0 + bt)v) = F_g - F_{ra}$$

$$\left(\frac{d}{dt}(m_0 + bt)\right)v + (m_0 + bt)\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$bv + (m_0 + bt)\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

la EDO sería:

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} = mg - (k + b)v$$

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} = (m_0 + bt)g - (k + b)v \quad (1)$$

Solución b.

la gota duplica su masa al salir de la nube

$\Rightarrow \quad m_0 + b\, t_{final} = 2 m_0 \quad \Rightarrow \quad t_{final} = \frac{1 m_0}{b}$

volviendo a (1)

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k + b}{m_0 + bt} v$$

supongamos que

$k = 0.2 \qquad b = 0.002 \qquad m\_0 = 0.001$

aplicando el metodo rungen kutta se tendría que la velocidad es de

$v_f = 0.96$ m/s en 0.5 segundos

La solución a la EDO se realizó en el código:
https://colab.research.google.com/drive/1CJsHTRd3g5g-3x0yN8OcxN4EPwK4Caee?usp=sharing

$v_f = 0{,}96\ m/s$ en 0.5 segundos

Solución C.

ya que la masa deja de aumentar se tiene que:

$$m_f \frac{dv}{dt} = m_f g - kv$$

Como $m_f = 2m_0$

$$2m_0 \frac{dv}{dt} = 2m_0 g - kv$$

ya que queremos la velocidad limite $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2m_0} \left(\frac{dv}{dt}\right)^{0} = 2m_0 g - kv$$

$$2m_0 g = k v_{lim}$$

$$v_{lim} = \frac{2m_0 g}{k}$$

$$= \frac{2 \cdot (0.001) \cdot 9.8}{0.2} = 0.098 \ m/s$$