

Asignación Momentos de Inercia y Autovalores

Andrés Hernández Acosta - 2191077
Donovan Paul Seijas Polo - 2230667
Estudiantes de Física

Luis Alberto Nuñez de Villavicencio Martínez
Profesor a cargo

Escuela de Física
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Colombia

23 de mayo de 2025

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
3. El experimento y los resultados	4
3.1. Caso 2D	4
3.2. Caso 3D	7
4. Conclusiones y Recomendaciones	10
5. Referencias	11

Resumen

Este trabajo presenta un estudio sistemático del cálculo y análisis de los momentos de inercia de una distribución discreta de masa en espacios bidimensional y tridimensional. A partir de un conjunto de datos y mediante herramientas computacionales implementadas en Python, se determinaron los momentos de orden cero, uno y dos, junto con los ejes principales de inercia obtenidos por diagonalización del tensor correspondiente. El procedimiento permitió evidenciar la estructura rotacional intrínseca del sistema, resaltando la utilidad del análisis espectral para transformar representaciones cartesianas acopladas en sistemas ortogonales simplificados. Los resultados obtenidos confirman la consistencia teórica del enfoque y demuestran la importancia de utilizar bases propias del tensor de inercia para interpretar y resolver problemas dinámicos con mayor claridad y eficiencia.

1. Introducción

La rotación de sistemas materiales compuestos exige una descripción precisa de cómo la masa se distribuye respecto a distintos ejes. Esta información queda condensada en el tensor de inercia, una matriz simétrica que generaliza el momento de inercia a múltiples dimensiones y permite identificar, mediante su diagonalización, los ejes principales de rotación. Tales ejes corresponden a los autovectores del tensor, y los autovalores asociados cuantifican la resistencia del sistema a cambiar su estado rotacional respecto a esas direcciones privilegiadas.

Este trabajo se orienta al análisis de distribuciones discretas de masa en dos y tres dimensiones, mediante el cálculo explícito de los momentos de inercia, la identificación de los ejes principales y la construcción de la matriz de cambio de base correspondiente. A partir de una base dedatos, se explora cómo la transformación de una base cartesiana a una base propia del tensor permite simplificar la representación dinámica del sistema. Al final del recorrido, se busca ofrecer una interpretación clara y rigurosa del papel que juegan los autovalores y autovectores del tensor de inercia en la descripción precisa de la dinámica rotacional. En la Sección 2 se detalla el procedimiento seguido, en la Sección 3 se exponen los principales hallazgos y, finalmente, en la Sección 4 se presentan las implicaciones de los resultados obtenidos.

2. Metodología

Si se considera un sistema compuesto por N partículas puntuales con masas m_i localizadas en posiciones $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^n$, donde $n = 2$ o 3 [1]. El análisis de su distribución de masa inicia con el cálculo del centro de masa que está dado por:

$$\vec{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i, \quad \text{donde} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

El tensor de inercia respecto al origen, en notación matricial, se define como:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{x}_i \cdot \vec{x}_i) \mathbf{I}_n - \vec{x}_i \otimes \vec{x}_i],$$

donde \mathbf{I}_n es la matriz identidad de orden n y \otimes denota el producto tensorial (dyádico). Este tensor es simétrico y real, por lo que admite una descomposición espectral de la forma [2]:

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}^{-1},$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y las columnas de \mathbf{P} corresponden a los autovectores ortonormales asociados.

De forma equivalente, el segundo momento respecto al centro de masa puede escribirse como [3]:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i - \vec{x})(\vec{x}_i - \vec{x})^T,$$

expresión que generaliza la noción de varianza multivariada y es formalmente análoga a la matriz de covarianza ponderada [4].

En 2D, el tensor de inercia adopta la forma explícita:

$$\mathbf{I}_{2D} = \begin{pmatrix} \sum m_i y_i^2 & -\sum m_i x_i y_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i x_i^2 \end{pmatrix},$$

y en 3D:

$$\mathbf{I}_{3D} = \begin{pmatrix} \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}.$$

Adicionalmente, se definen distintos momentos como:

- El momento de orden cero es la masa total del sistema:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i.$$

- El momento de orden uno define el centro de masa:

$$\vec{x} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i.$$

- El momento de orden dos, relativo al centro de masa, es una matriz simétrica que describe la dispersión de las masas respecto a dicho punto. Es análogo a la matriz dada por:

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i - \vec{x})(\vec{x}_i - \vec{x})^T.$$

Ahora bien, el cálculo de los autovalores λ_j se obtiene resolviendo el polinomio característico:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0,$$

cuyas raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los momentos principales de inercia. Los vectores propios se hallan resolviendo:

$$(\mathbf{I} - \lambda_j \mathbf{I}_n) \vec{v}_j = \vec{0}.$$

Estos autovectores definen los ejes principales de inercia, ortogonales entre sí, y permiten construir la matriz de transformación \mathbf{T} que relaciona la base cartesiana con la base principal del sistema [5].

Una vez obtenidos los autovectores, se construye la matriz de transformación \mathbf{T} desde la base cartesiana a la base principal como:

$$\mathbf{T} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n],$$

donde cada \vec{v}_i es un autovector normalizado del tensor de inercia. Esta matriz es ortogonal, es decir, cumple $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, lo que permite transformar cualquier vector \vec{x} de la base original a la base principal mediante:

$$\vec{x}' = \mathbf{T}^T \vec{x}.$$

De este modo, el tensor de inercia expresado en la base de autovectores toma una forma diagonal:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T}^T \mathbf{I} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Esta transformación permite representar la distribución de masas en términos de sus direcciones intrínsecas de rotación, eliminando los términos de acoplamiento entre componentes, y simplificando así el análisis dinámico del sistema.

3. El experimento y los resultados

A partir del análisis de los datos, realizado con un código en Python incorporado en este documento, se obtuvieron los siguientes resultados:

3.1. Caso 2D

Aunque este análisis se realiza en dos dimensiones, el momento de orden cero, que corresponde a la masa total del sistema, permanece invariante independientemente de la dimensión considerada, ya que las partículas no modifican su masa en función de su ubicación en el espacio. En consecuencia, el momento de orden cero calculado fue de:

$$M = \sum_i m_i = 4627[Uni.Masas]$$

Ahora bien, el momento de orden uno, que permite determinar la posición del centro de masa en cada una de las coordenadas espaciales, estuvo dado por:

$$\begin{aligned} x_c m &= \frac{1}{M} \sum m_i x_i = 825,82[Uni.Espacio] \\ y_c m &= \frac{1}{M} \sum m_i y_i = 776,92[Uni.Espacio] \end{aligned}$$

La posición del centro de masas se ilustra con mayor precisión en la gráfica [1](#), donde se observa que dicho punto se encuentra aproximadamente en el centro del sistema de partículas. Esta ubicación se explica por la tendencia del centro de masas a coincidir con el centro geométrico de la distribución,

condición que se cumple debido a la casi homogeneidad en la distribución de masas y a la simetría inherente en la configuración general del sistema.

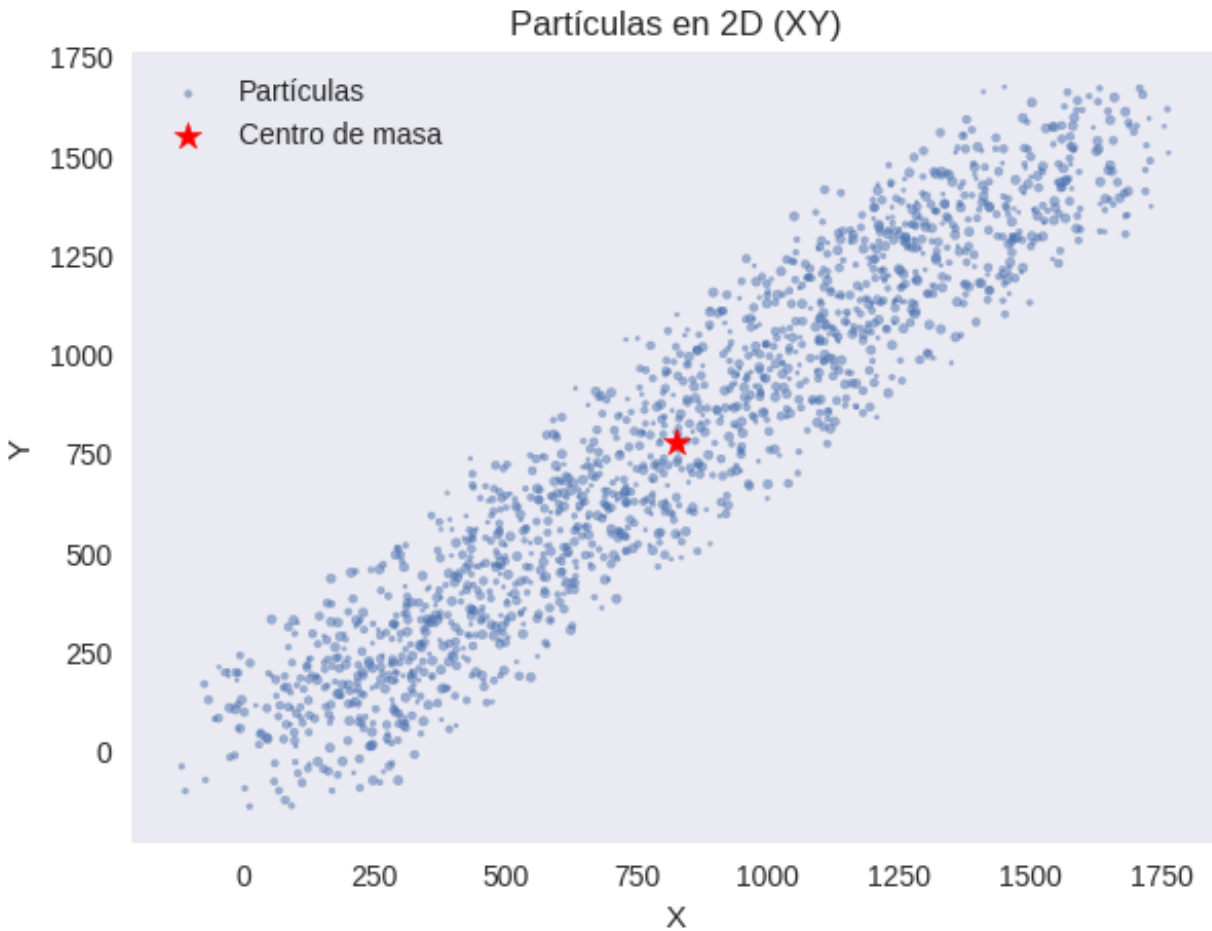


Figura 1: Posición del centro de masas en dos dimensiones

El momento de inercia de segundo orden, es decir, la matriz de inercia con respecto a los ejes cartesianos, Da como resultado:

$$\mathbf{I}_{2D} = \begin{pmatrix} 9,6366 \times 10^8 & -9,1174 \times 10^8 \\ -9,1174 \times 10^8 & 9,5853 \times 10^8 \end{pmatrix},$$

El análisis de esta matriz revela dos características importantes. En primer lugar, los elementos diagonales, $I_{xx} = 9,6366 \times 10^8$ e $I_{yy} = 9,5853 \times 10^8$, corresponden a los momentos de inercia respecto a los ejes x e y , respectivamente. Estas cantidades reflejan la distribución de masa en torno a cada eje y, al ser de magnitudes similares, indican una cierta simetría global en la dispersión de masa respecto a ambos ejes.

En segundo lugar, los términos extradiagonales o productos de inercia, $I_{xy} = I_{yx} = -9,1174 \times 10^8$, son significativamente grandes en valor absoluto, lo que evidencia un fuerte acoplamiento entre las componentes x e y . Este acoplamiento indica que los ejes cartesianos no están alineados con los ejes principales del sistema, y que existe una orientación preferente de la masa en el plano que no coincide con las direcciones x e y . Esta situación sugiere la necesidad de transformar la base de representación hacia una base propia del tensor de inercia, donde los productos de inercia se anulen y la matriz resultante adopte una forma diagonal. Tal transformación permitirá identificar los ejes principales de rotación y simplificar el análisis dinámico del sistema.

Ahora bien, en muchos casos, la base original en la que se expresa el tensor de inercia no constituye el marco más adecuado para su análisis, debido a la presencia de elementos no nulos fuera de la diagonal, conocidos como productos de inercia. Estos términos introducen acoplamientos entre los ejes coordenados que dificultan tanto la interpretación física del sistema como el tratamiento analítico de su dinámica rotacional. Para superar esta limitación, se recurre a la resolución del problema de autovalores y autovectores del tensor, lo cual permite identificar un sistema de coordenadas ortogonales —los ejes principales de inercia— en el que la matriz del tensor se diagonaliza. En esta nueva base, los autovalores obtenidos representan los momentos principales de inercia, es decir, los valores asociados a la rotación pura alrededor de cada eje principal, mientras que los autovectores correspondientes determinan la orientación espacial de dichos ejes. Bajo esta perspectiva, los vectores de la base cartesiana mostrados en la figura 1 no constituyen autovectores del tensor de inercia, ya que la matriz expresada en esa base presenta términos extradiagonales distintos de cero.

Al resolver el problema de valores y vectores propios, se obtienen los valores propios junto con sus vectores propios asociados, los cuales son:

$$\lambda_1 = 4,93463569 \times 10^7 \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,7061125 \\ -0,70809967 \end{bmatrix}$$

y también

$$\lambda_2 = 1,87284938 \times 10^9 \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -0,70809967 \\ 0,7061125 \end{bmatrix}.$$

Y para transformar los vectores de la base cartesiana a la base de autovectores, se plantea una matriz de cambio de base definida a partir de la combinación de los anteriores autovectores, en este caso la matriz es

$$P = \begin{bmatrix} -0,7061125 & -0,70809967 \\ -0,70809967 & 0,7061125 \end{bmatrix}.$$

La forma de la matriz P sugiere que los ejes principales de inercia están orientados en direcciones que forman aproximadamente 45° con respecto a los ejes cartesianos. Esta rotación refleja la geometría interna de la distribución de masa, permitiendo representar el sistema de forma desacoplada y facilitando su análisis dinámico. La aplicación de esta transformación elimina los productos de inercia, reduciendo la matriz del tensor a una forma puramente diagonal que contiene únicamente los momentos principales de inercia.

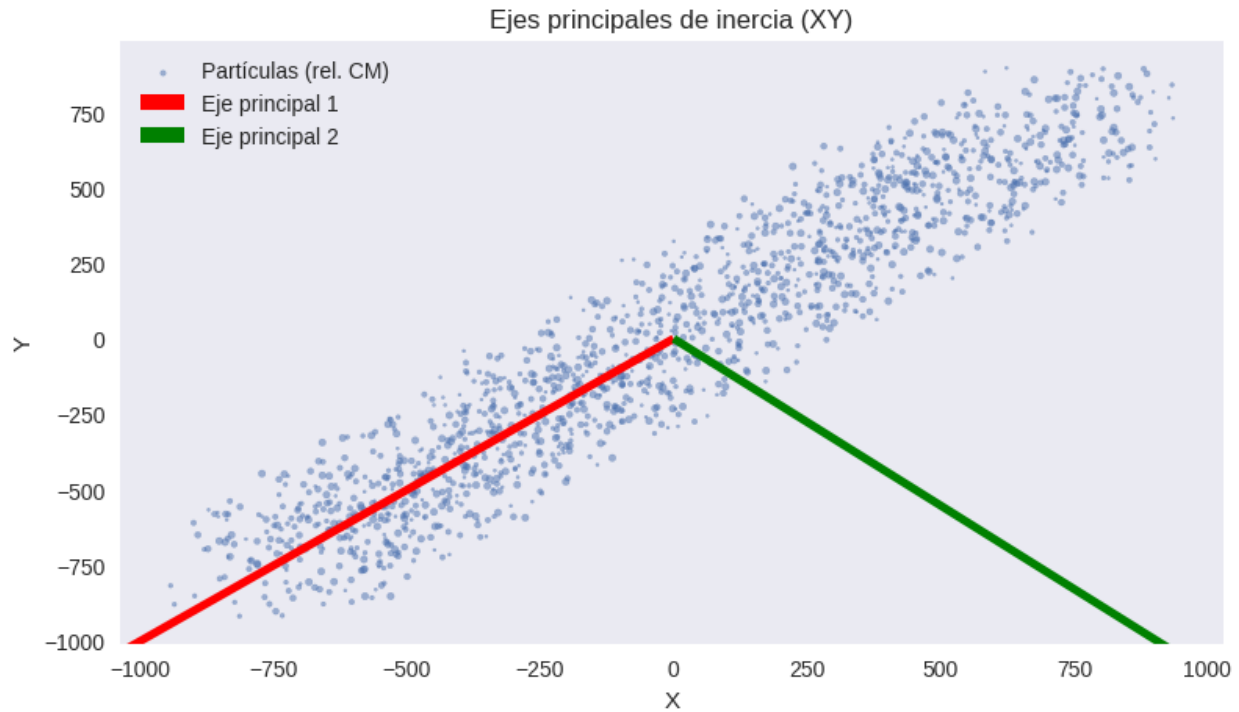


Figura 2: Caption

Adicionalmente, este nuevo eje de referencia se puede ver en la figura 2, donde las líneas negras sobre el centro de masas corresponden a la base del nuevo eje de referencia y en donde están los momentos principales de inercia, los cuales también forman la matriz de inercia,

$$I_{\text{principal}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,93463569 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 1,87284938 \times 10^9 \end{bmatrix}.$$

la cual solo tiene términos en la diagonal como se esperaba de este nuevo y mejor eje coordenado.

3.2. Caso 3D

A continuación, se extiende el análisis previo incorporando la dimensión z . En este contexto, el momento de orden cero permanece inalterado, dado que la masa no presenta variación respecto a la coordenada z . Por otro lado, los momentos de primer orden, correspondientes a las coordenadas del centro de masas, se expresan como

$$x_{\text{cm}} = 825,815 \text{ [cm]}, \quad y_{\text{cm}} = 776,919 \text{ [cm]}, \quad z_{\text{cm}} = 15,503 \text{ [cm]}, \quad (17)$$

los cuales se representan espacialmente en tres dimensiones en la figura 3.

La matriz de inercia obtenida al representar el sistema en el espacio tridimensional cartesiano es:

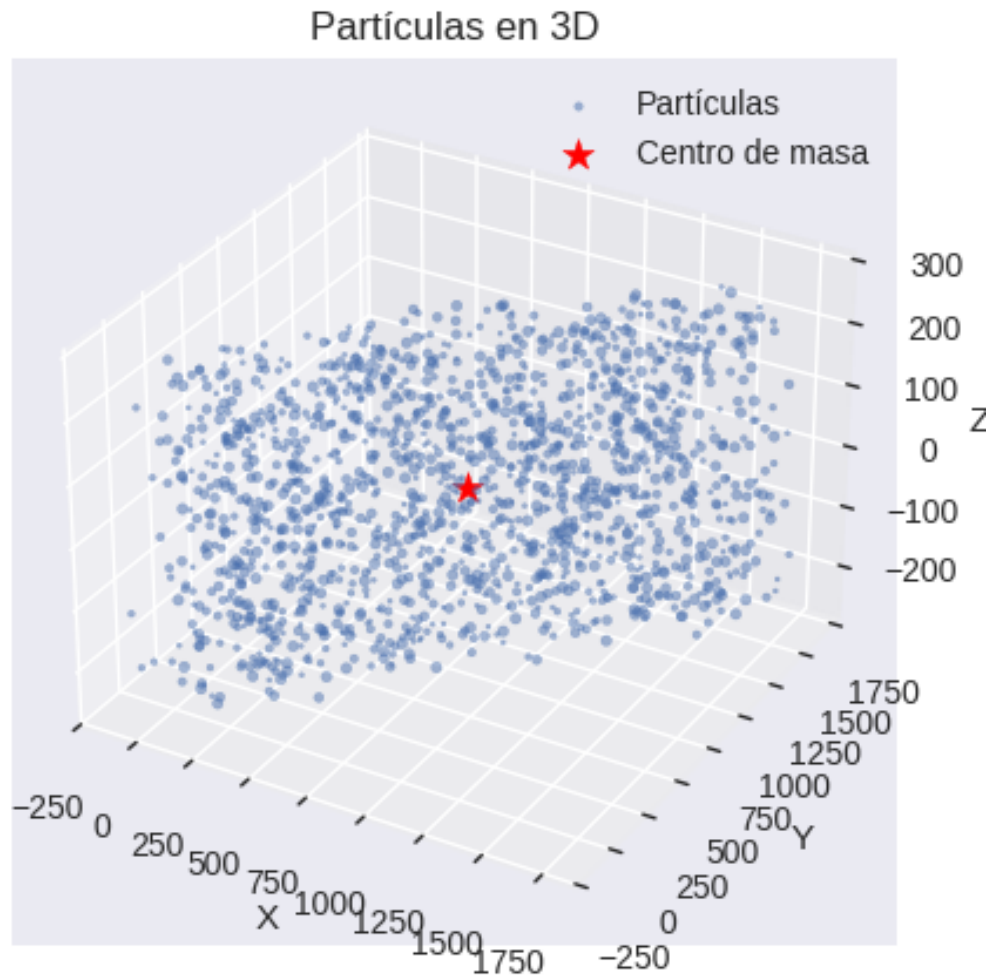


Figura 3: Centro de masas caso 3D

$$\mathbf{I}_{3D} = \begin{bmatrix} 1,06550347 \times 10^9 & -9,11747911 \times 10^8 & 7,14204864 \times 10^6 \\ -9,11747911 \times 10^8 & 1,06037891 \times 10^9 & 1,92959724 \times 10^6 \\ 7,14204864 \times 10^6 & 1,92959724 \times 10^6 & 1,92219574 \times 10^9 \end{bmatrix}.$$

Aunque esta matriz describe adecuadamente la distribución de masa en el espacio tridimensional, no constituye una forma óptima para el análisis dinámico, ya que contiene elementos extradiagonales significativamente distintos de cero. Estos términos, conocidos como productos de inercia, reflejan interacciones entre las componentes x , y y z , indicando que la masa no se encuentra distribuida de forma simétrica respecto a los ejes cartesianos.

La presencia de estos acoplamientos implica que los vectores de la base cartesiana no son autovectores del tensor de inercia. En otras palabras, el sistema de referencia definido por los ejes x ,

y y z no coincide con los ejes principales de inercia, en los cuales la matriz asociada se expresaría en forma diagonal. Esto refuerza la necesidad de resolver el problema espectral asociado al tensor, de manera que se puedan identificar las direcciones ortogonales —definidas por los autovectores— que eliminan los acoplamientos rotacionales y conducen a una representación simplificada y físicamente más interpretativa del sistema.

Para determinar el sistema de referencia que mejor describe la distribución tridimensional de partículas, se procede a resolver el problema de autovalores y autovectores asociado al tensor de inercia. Esta operación permite identificar los ejes principales de inercia, es decir, las direcciones ortogonales respecto a las cuales el sistema presenta un comportamiento rotacional desacoplado. Los resultados obtenidos para los autovalores, que corresponden a los momentos principales de inercia, y sus respectivos autovectores, son los siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1,51166481 \times 10^8, & \vec{v}_1 &= \begin{bmatrix} -0,70611307 \\ -0,70808985 \\ 0,00361904 \end{bmatrix}, \\ \lambda_2 &= 1,92196006 \times 10^9, & \vec{v}_2 &= \begin{bmatrix} 0,04694255 \\ -0,05190995 \\ -0,99754787 \end{bmatrix}, \\ \lambda_3 &= 1,97495158 \times 10^9, & \vec{v}_3 &= \begin{bmatrix} 0,70654139 \\ -0,7042117 \\ 0,06989384 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A partir de estos vectores propios, se construye la matriz de transformación P , cuya estructura contiene como columnas a los autovectores normalizados:

$$P = \begin{bmatrix} -0,70611307 & 0,04694255 & 0,70654139 \\ -0,70808985 & -0,05190995 & -0,7042117 \\ 0,00361904 & -0,99754787 & 0,06989384 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz permite transformar cualquier vector expresado en la base cartesiana tridimensional a la base definida por los ejes principales de inercia. En este nuevo sistema de coordenadas, el tensor de inercia adopta su forma diagonal, donde los únicos elementos no nulos corresponden a los momentos principales:

$$\mathbf{I}_{\text{principal}} = \begin{bmatrix} 1,51166481 \times 10^8 & 0 & 0 \\ 0 & 1,92196006 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1,97495158 \times 10^9 \end{bmatrix}.$$

Esta diagonalización confirma que la transformación elimina los productos de inercia y revela las direcciones de rotación pura del sistema, facilitando así la interpretación física del comportamiento dinámico de la distribución de masas.

Finalmente, en la figura 4 se ilustra la diferencia entre los ejes correspondientes a los momentos principales de inercia y el sistema de coordenadas cartesianas tridimensional. Es decir, el eje representado en dicha figura constituye la base óptima para el planteamiento y resolución del problema matemático.

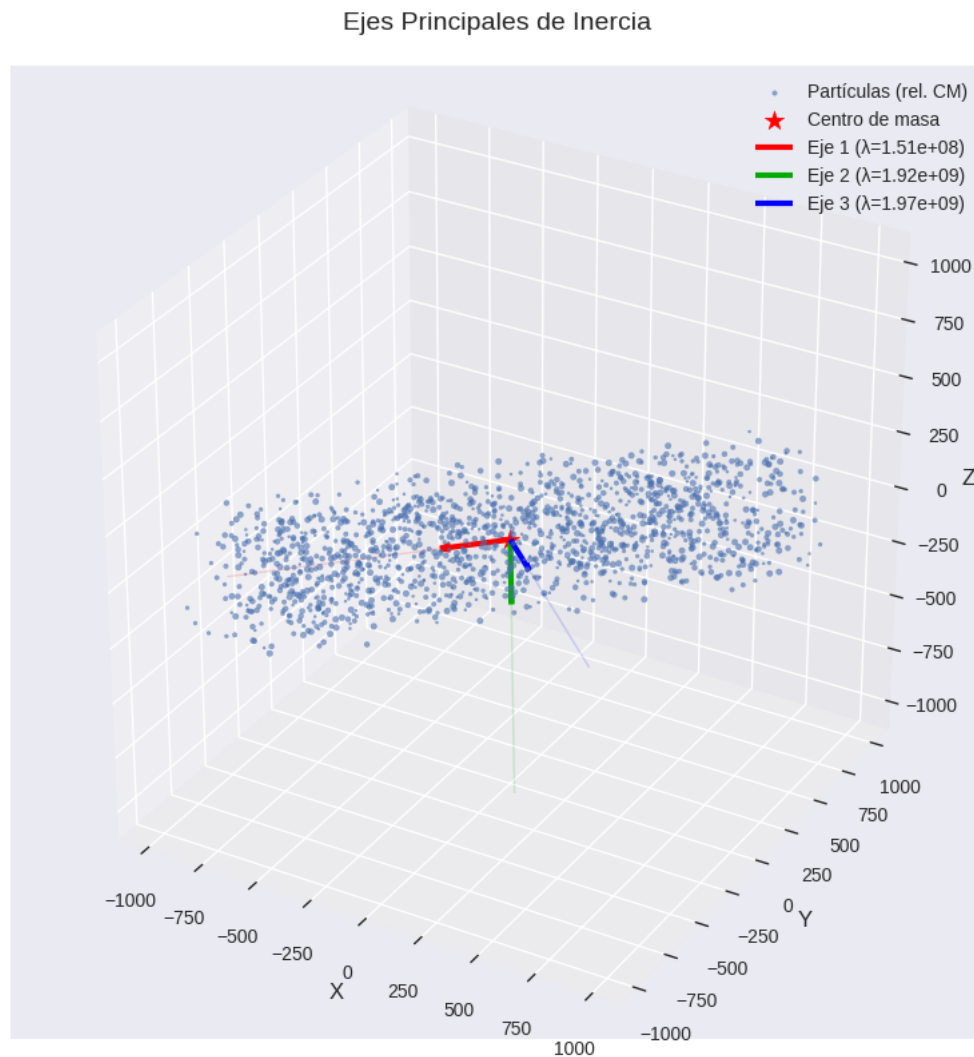


Figura 4: Ejes principales de inercia caso 3D

4. Conclusiones y Recomendaciones

A partir del análisis realizado, se concluye que el cálculo del tensor de inercia y su diagonalización constituyen herramientas fundamentales para comprender el comportamiento rotacional de sistemas con múltiples masas distribuidas. En ambos casos estudiados, 2D y 3D, se evidenció que la representación en la base cartesiana contiene acoplamientos entre componentes, manifestados en los productos de inercia. Estos acoplamientos dificultan la interpretación física del sistema y justifican la necesidad de aplicar una transformación ortogonal hacia los ejes principales de inercia.

La identificación de los autovalores permitió obtener los momentos principales, mientras que los autovectores definieron las orientaciones privilegiadas para un análisis desacoplado. En particular,

la matriz de transformación construida a partir de estos vectores reveló una rotación de la base cartesiana que simplifica sustancialmente el tratamiento del problema. La forma diagonal de la matriz resultante en la base propia confirma la validez del procedimiento.

Finalmente, el uso de herramientas computacionales resultó esencial para la implementación práctica del método y la visualización geométrica de los resultados, lo que reafirma la relevancia del análisis numérico como complemento a la teoría clásica. Este estudio establece un marco robusto para la aplicación de técnicas similares en contextos más complejos de la dinámica de sistemas físicos.

5. Referencias

Referencias

- [1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison Wesley, 2002.
- [2] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 4th ed., Brooks/Cole, 2006.
- [3] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Dover, 1994.
- [4] G. A. F. Seber, *A Matrix Handbook for Statisticians*, Wiley-Interscience, 2008.
- [5] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra with Applications*, 11th ed., Wiley, 2013.