solución 1 a

$$\Delta l_1 = -a + \sqrt{y^2 + (x+a)^2} \rightarrow l_1$$

$$\Delta l_2 = -a + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \rightarrow l_2$$

$$\Delta l_3 = -a + \sqrt{(a-y)^2 + x^2} \rightarrow l_3$$

$$\Delta l_4 = -a + \sqrt{(a+y)^2 + x^2} \rightarrow l_4$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

$\cancel{m\ddot{x} =}$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k_1\left(-a + \sqrt{y^2 + (x+a)^2}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}k_1\left(-a + \sqrt{(a-x)^2 + y^2}\right)^2 - \frac{1}{2}k_2\left(-a + \sqrt{(a-y)^2 + x^2}\right)^2$$

$$- \frac{1}{2}k_2\left(-a + \sqrt{(a+y)^2 + x^2}\right)^2$$

$$m\ddot{x} = -k_1\left(\sqrt{(a+x)^2 + y^2} - a\right) \cdot \left[(a+x)^2 + y^2\right]^{-1/2}$$

$$\cdot (a+x)$$

$$+ k_1\left(\sqrt{(a-x)^2 + y^2} - a\right)(a-x) \cdot \left[(a-x)^2 + y^2\right]^{-1/2}$$

$$- k_2\left(\sqrt{(a-y)^2 + x^2} - a\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\left[(a-y)^2 + x^2\right]^{-1/2}$$

$$\cdot \cancel{2}x$$

$$- k_2\left(\sqrt{(a+y)^2 + x^2} - a\right)\left[(a+y)^2 + x^2\right]^{-1/2}$$

$$\cdot x$$

$$m\ddot{y} = -k_2\left(\sqrt{(a+y)^2+x^2}-a\right)\cdot\left[(a+y)^2+x^2\right]^{-1/2}\cdot(a+y)$$

$$+k_2\left(\sqrt{(a-y)^2+x^2}-a\right)(a-y)\cdot\left[(a-y)^2+x^2\right]^{-1/2}$$

$$-k_1\left(\sqrt{(a-x)^2+y^2}-a\right)\left[(a-x)^2+y^2\right]^{-1/2}\cdot y$$

$$+k_1\left(\sqrt{(a+x)^2+y^2}-a\right)\left[(a+x)^2+y^2\right]^{-1/2}\cdot x$$

Solución b

Las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones estarían dadas por:

$$l_1 = \sqrt{(a+x)^2+y^2} = a\Big(1+\underbrace{\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}}_{e}\Big)^{1/2}$$

por serie de ~~tay~~ taylor-maclaurin:

$$l_1 \approx a\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{a}+\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2x}{a}\right)^2\right]$$

no se tienen en cuenta los terminos con ~~de~~ grado >2.

$$\approx a + x + \frac{y^2}{2a}$$

por tanto $\Delta l_1 = (l_1 - a) \approx \left(x+\frac{y^2}{2a}\right)$

$$U_1 = \frac{1}{2}k_1(\Delta l_1)^2 = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{\cancel{x+}y^2}{2a}\right)^2 = \frac{1}{2}k_1\left(x^2+\frac{2xy^2}{2a}+y^4\right)$$

despreciando terminos en la expanción ~~de mayor~~ de grado >2.

$$\approx \frac{1}{2}k_1\,\cancel{2}\,(x)^2$$

$$\approx \frac{1}{2}k_1x^2$$

ℓ_2 se comportará de la misma manera pero con $x = -x$

$\Rightarrow U_2 \approx \frac{1}{2} k_1 (-x)^2 \approx \frac{1}{2} k_1 x^2$

Para ℓ_3 y ℓ_4 quedan transformaciones similares intercambiando y por x y -y por x.

$U_3 \approx \frac{1}{2} k_2 y^2 \quad U_4 \approx \frac{1}{2} k_2 y^2$

$\Rightarrow U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \approx k_1 x^2 + k_2 y^2$

$\therefore \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (k_1 x^2 + k_2 y^2)$

$\Rightarrow$ aplicando las ecuaciones de euler-lagrage se tiene

$m\ddot{x} = 2 k_1 x \quad$ y $\quad m\ddot{y} = 2 k_2 y$

$x(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$ donde $\omega_1^2 = \frac{2k_1}{m}$

$y(t) = C \cos(\omega_2 t) + D \sin(\omega_2 t)$ donde $\omega_2^2 = \frac{2k_2}{m}$

Solución C

caso oscilaciones normales $k_1 = k_2$

$m\ddot{x} = -k_1 (\ell_1 - a) \frac{1}{\ell_1} (a + x) + k_1 (\ell_2 - a) \frac{1}{\ell_2} \cdot (a - x)$

$- k_1 (\ell_3 - a) (\ell_3)^{-1} \cdot x - k_1 (\ell_4 - a) \frac{1}{\ell_4} x$

*

$$m\ddot{y} = -k_1 (l_4 - a)\frac{1}{l_4}(a+y) + k_1 (l_3 - a)(a-y)\left(\frac{1}{l_3}\right)$$

$$-k_1 (l_2 - a)\frac{1}{l_2}(y) - k_1 (l_1 - a)\frac{1}{l_1} y$$

mientras para el caso de pequeñas oscilaciones se tendría que:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{y})^2 - (k_1 (x^2 + y^2))$$

$$m\ddot{x} = 2k_1 x \qquad m\ddot{y} = 2k_1 y$$

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \qquad \omega^2 = \frac{2k_1}{m}$$

$$y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$$

* en el caso isotropico si los condiciones iniciales en x y y son iguales se puede observar que: los fuerzas en todos direciones son iguales y que por tanto se moveria simetricamente

* en el caso $k_1 \neq k_2$ habrá una batalla entre constante resortes para regresar ala posición de equilibrio y estarán en pares.

solucion d.

- Como el lagrangeano no depende del tiempo se tiene que la energia se conserva.

$\Rightarrow$ se tiene que $p_x^2 = (m\dot{x})^2$

$$\Rightarrow E_x = T_x + V_x = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\cancel{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(m\dot{x})^2}{m} + kx^2 = \frac{p_x^2}{2m} + kx^2$$

para $E_y = T_y + V_y = \frac{1}{2}\frac{(m\dot{y})^2}{m} + ky^2$

- La cantidad de momento angular.

sea $\delta\varphi$ una rotación alrededor del eje z. $\Rightarrow \delta r = \delta\varphi \times r$ con

$\delta x = -y\,\delta\varphi \qquad \delta\dot{x} = -\dot{y}\,\delta\varphi$ si y solo si

$\delta y = x\,\delta\varphi \qquad \delta\dot{y} = \dot{x}\,\delta\varphi$ $k_1 = k_2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{L} = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}\delta x_i + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i$$

$$= kxy\,\delta\varphi - ky\,x\,\delta\varphi - m\dot{x}\dot{y}\,\delta\varphi + m\dot{y}\dot{x}\,\delta\varphi = 0$$

como tenemos que $\delta\mathcal{L} = \frac{df(q_i, t)}{dt} \Rightarrow f = \text{constante} = C.$

$\Rightarrow$ por teorema de noether

$$J = \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j}\delta x_j - f = m(-y\dot{x} + x\dot{y})\delta\varphi - C = cte.$$

$$\Rightarrow m(-y\dot{x} + x\dot{y}) = cte. = L_z \text{ . se conserva.}$$

$$= -y(p_x) + x\,p_y$$

Si $k_1 \neq k_2 \Rightarrow$

$$k_1 xy - k_2 xy - m\dot{x}\dot{y} + m\dot{x}\dot{y} = 0$$

$$\delta \mathcal{L} = k_1 xy - k_2 xy \neq 0$$

por lo tanto en general este momento no se conserva.

- ciruadora.

$$K = \omega_1 x \omega_2 y + p_x p_y \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$= \frac{\omega_1 m \dot{x} \, \omega_2 m \dot{y}}{m m} + p_x p_y$$

$$= \frac{\omega_1 \omega_2}{mm} p_x p_y + p_x p_y$$

$p_x p_y$ no se conserva en θ grandes y $\frac{\omega_1 \omega_2}{m^2} = cte$

$\therefore K$ no se conserva para oscilaciones generales

Si $p_x p_y$ se conserva $\Rightarrow K$ se conserva

es decir si $p_x p_y$ condicionan un sistema isotropico.

Solución e.

tendremos que si las cantidades anteriores se conservan

$$\Rightarrow \quad l^2 + k^2 = 4 E_x E_y \quad \text{esto es que:}$$

$$l^2 = y^2 p_x^2 - 2xy p_x p_y + x^2 p_y^2$$

$$k^2 = \left(\omega_1 \omega_2 x y + \frac{p_x p_y}{m_2} \right)^2 = x^2 y^2 \omega_1^2 \omega_2^2 + \frac{2\omega_1 \omega_2 x y p_x p_y}{m^2}$$

$$+ \frac{p_x^2 p_y^2}{m^4}$$

Por otro lado

$$4E_x E_y = 4 \left(\frac{m^2 \dot{x}^2 \dot{y}^2}{4} + \frac{m K_2 \dot{x}^2 y^2}{2} + \frac{m K_1 \dot{y}^2 x^2}{2} + \cancel{x}^2 y^2 K_1 K_2 \right)$$

$$= m^2 \dot{x}^2 \dot{y}^2 + 2m K_2 \dot{x} y^2 + 2m K_1 \dot{y} x^2 + 4x^2 y^2 K_1 K_2$$

$$\therefore \; y^2 p_x^2 - 2xy p_x p_y + x^2 p_y^2 + x^2 y^2 \omega_1^2 \omega_2^2 + \frac{2\omega_1 \omega_2 x y p_x p_y}{m^2}$$

$$+ \frac{p_x^2 p_y^2}{m^4} = m^2 \dot{x}^2 y^2 + 2m K_2 \dot{x}^2 y^2 + 2m K_1 \dot{y}^2 x^2 +$$

$$4x^2 y^2 K_1 K_2$$

en general no se cumple a no ser que $m=1$

ya que $\omega_1^2 \omega_2^2 = K_1 K_2$

Solución f.

En el caso isótropo las cantidades se conservan mientras en el anisótropo no.

Solución 2.

Dos masas m_1 y m_2 $m_1 + m_2 = M$

$$v_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

$$v_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

v_1 y v_2 por demostrar.

Inicialmente se tiene que:

$$E_{inicial} = \frac{1}{2} m \cancel{v_{1_{inicial}}^{2}}^{0} + \frac{1}{2} m \cancel{v_{2_{inicial}}^{2}}^{0} + \left(-\frac{G m_1 m_2}{r_0}\right)$$

pero son soltados del reposo $v_{1_{inicial}} = v_{2_{inicial}} = 0$

el lagrangeano estaria dado por

$$L = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{G M m_2}{r}$$

Como L no depende del tiempo la función energia se conserva por tanto

$$E_{inicial} = E_{final} \rightarrow \text{una posición } r \text{ cualquiera}$$

ahora bien

$$E_{final} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$\Rightarrow E_{final} - E_{inicial} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{Gm_1m_2}{r_0} + \frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2Gm_1m_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = m_1v_1^2 + m_2v_2^2$$

ahora bien el momento se conserva

$$\Rightarrow m_1v_1 = m_2v_2 \qquad \Rightarrow v_1 = \frac{m_2}{m_1}v_2$$

$$\Rightarrow$$

$$2Gm_1\cancel{m_2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)\cancel{m_2}v_2^2$$

$$\Rightarrow 2Gm_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{M}{m_1}v_2^2$$

$$\Rightarrow v_2 = m_1\sqrt{2\frac{G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

como $v_1 = \frac{m_2}{m_1}v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{m_1}}{m_2}v_1 = \cancel{m_1}\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

$$v_1 = m_2\sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Solución 3.

se tiene el siguiente esquema

donde si hacemos

$R = R_{Cm}$

θ_r = ángulo entre ambas masas

y θ_c ángulo entre perpendicular y el centro de masa.

Las ligaduras del sistema están dados por:

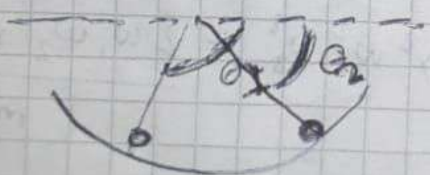
$$g_1 = x_1^2 + y_1^2 = R^2$$
$$g_2 = x_2^2 + y_2^2 = R^2$$

ya que ambas partículas siempre se encuentran sobre el círculo

Por tanto la cantidad de grados de libertad será:

$$\boxed{s = 2(2) - 2 = 2.}$$

ahora bien si analizamos el sistema de la siguiente forma



con respecto a la horizontal habrán dos cordenadas que describan el sistema

$$\theta_1 \text{ y } \theta_2$$

ahora bien la ~~distancia~~ longitud entre partículas está dada por:

$$|s|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = R^2 (\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))^2$$
$$+ R^2 (\sin(\theta_2) - \sin\theta_1)^2$$

$$|\xi| = 2R^2\left(1-\cos(\theta_2)\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1\right)^2$$

$$= 2R^2\left(1-\cos(\theta_2-\theta_1)\right)$$

$$= 2R\sin\left(\frac{\overbrace{\theta_2-\theta_1}}{2}\right) \to \theta_r$$

$$= 2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)$$

ahora bien $V = -(m_1+m_2)gR\cos(\theta_c)$

$\therefore$ las coordenadas generalizadas son

θ_r y θ_c

---

solución b.

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)R^2\dot{\theta}_c + \frac{1}{2}\mu R^2\dot{\theta}_r$$

$$- (m_1+m_2)gR\cos\theta_c + \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)-\ell\right)^2$$

las ecuaciones de movimiento serán:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_r} = -k\left(2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)-\ell\right)R\cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right)$$

$$= -kR\left(2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)-\ell\right)\cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_r}\right) = \mu R^2\ddot{\theta}_r$$

$$\therefore \ddot{\theta}_r + \frac{k}{R\mu}\left(2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)-\ell\right)\cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = 0 \quad (1)$$

y también:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_c} = -(m_1+m_2) R \sin\theta_c \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_c}\right) = (m_1+m_2) R^2 \ddot{\theta}_c$$

$$\therefore \ddot{\theta}_c = -\frac{g}{R} \sin\theta_c \quad (2)$$

---

solución c

Las masas empezarán a balancearse alrededor del punto de equilibrio si se dejan caer desde el punto A. Pues al caer la energía cinética que se va guardando en ambas masas impulsará a las masas a querer volver a un estado de reposo entonces oscilan mientras caen con un punto de equilibrio variable

---

solución d

para pequeños oscilaciones se cumple que

$$\sin\theta_c \approx \theta_c \quad y \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$\Rightarrow$ por la ecuación (2) queda que:

$$\ddot{\theta}_c + \frac{g}{R}\theta = 0$$ un sistema armónico que cumple

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}$$

por otro lado por (1) tenemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{RN}\left(2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right) - l\right)\cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\left(2R\frac{\theta_r}{2} - l\right)\left(1 - \frac{\theta_r^2}{4}\right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\left(2\theta_r R - l - \frac{2\theta_r^3 R}{4} - \frac{l\theta^2}{4}\right)$$

donde los terminos $\theta_r^3 \to 0$ ya que se consideran muy pequeños

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\left(2\theta_r R - l - \frac{l\theta_r^2}{4}\right) = 0.$$

para que sea armonico se tiene que cumplir

$$2\theta_r\left(R - \frac{l}{\theta_r} - \frac{l\theta_r}{4}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \cancel{+\frac{l\theta}{4} \quad \frac{(-l+R)4}{l}}$$

lo cual no es siempre cierto pero si se cumple

$$\ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN} 2R\theta_r = 0$$

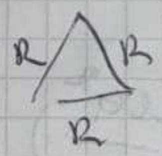
$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{N}}$$

solución e.

si $\ell = R$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\left(2R\sin\frac{\theta_r}{2} - R\right)\cos\left(\frac{\theta_r}{2}\right) = 0$$

formaría un triangulo equilatero



haciendo que $\theta_r = 60$

$\sin\frac{\theta_r}{2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\left(\cancel{2R\frac{1}{2} - R}\right)\cos(30) = 0$$

$$\ddot{\theta}_r + \frac{k}{RN}\, 0 = 0$$

$\ddot{\theta}_r = 0$ $\quad \dot{\theta}_r =$ cte, lineal o 0_o

si $\ell = 2R$

$\cos 90 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} =$ cte lineal o 0.

---

solución f.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{2R\sin\left(\frac{\theta_r}{2}\right)}$$

donde $\mathcal{L}$ es el lagrangeano anterior.