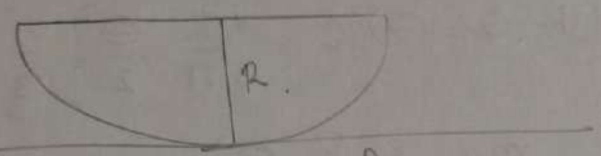
a)



→ Sabemos que solo rota en un eje fijo, así que su energía cinética solo depende de la rotación.

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{r}'^{2}_\alpha \,, \quad r'_\alpha = \text{posición relativa a CM.}$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 I_{cm}$$

La energía potencial la calculamos alrededor de CM, por ende.

$$\Delta y = y_{cm} - y_1$$

$$U = mg\,\Delta y \qquad y_1 = y_{cm} \cos\theta .$$

$$\Delta y = y_{cm}(1 - \cos\theta).$$

Como es un semicirculo el centro de masa esta en $\frac{4R}{3\pi}$, $I_{cm} = \frac{1}{2} m R^2$.

Analizamos el mov alrededor de valores pequeños de θ, por ende, gracias a Taylor tenemos

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}.$$

$$\Delta y = \frac{4R}{3\pi}(1-\cos\theta) \approx \frac{4R}{3\pi}\frac{\theta^2}{2} = \frac{2}{3}\frac{R}{\pi}\theta^2$$

$$U = mg\,\Delta y = mg\frac{2}{3}\frac{R}{\pi}\theta^2, \quad U \propto \theta^2.$$

llamemos $K = \frac{4R}{3\pi}$, entonces $U = \frac{1}{2}K\theta^2$.

Bajamos I_{cm} por medio del teorema de ejes paralelos a punto de apoyo

$$I_p = I_{cm} + md^2, \quad d = R - \frac{4R}{3\pi}$$

$$I_p = \frac{1}{2}mR^2 + m\left[R - \frac{4R}{3\pi}\right]^2.$$

$$= m\left[\frac{1}{2}R^2 + \left(\frac{R(3-3\pi)}{3\pi}\right)^2\right] = mR^2\left(\frac{1}{2} + \frac{41{,}28}{9\pi^2}\right).$$

$$\approx mR^2(0{,}965)$$

Recogiendo los valores de T y U en un Lagrangiano tenemos.

$$L = T - U = I_p \dot{\theta}^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} K \theta^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = K\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left[I_p \dot{\theta}\right] = I_p \ddot{\theta}$$

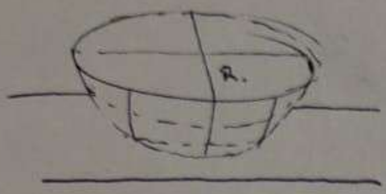
$$\Rightarrow I_p \ddot{\theta} = K\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{K}{I_p}\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{I_p}}$$

Donde $K = \frac{4R}{3\pi}$, $I_p = mR^2(0{,}965)$.

$$\omega^2 = \frac{4R}{3\pi}\frac{1}{mR^2} = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{1}{mR} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{1}{3\pi mR}}$$

2. Frecuencia de una semiesfera.



$$y_{cm} = \frac{3}{8} R.$$

$$I_{cm} = \frac{83}{320} m R^2$$

se repite el mismo proceso de la cuenca ahora con los nuevos valores

$$I_P = I_{cm} + md^2 = I_{cm} + m\left(R - \frac{3}{8} R\right)^2$$

$$\Rightarrow I_{cm} + mR^2 - m\frac{3}{4} R^2 + m\frac{9}{64} R^2$$

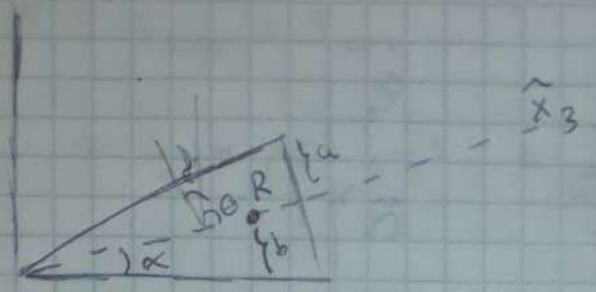
$$\Rightarrow \frac{83}{320} mR^2 + mR^2 - m\frac{3}{4} R^2 + m\frac{9}{64} R^2$$

$$= 0{,}644\, mR^2.$$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta} = -\frac{K}{I_P}\Theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{8}\cancel{R} \cdot \frac{1}{0{,}644\, mR^{\cancel{2}}}$$

$$\omega^2 = \frac{3}{8} \frac{1}{mR\, 0{,}644}$$

Solución 2



De lo anterior tenemos seis grados de libertad $(x, y, z, \phi, \varphi, \theta)$ con cinco ligaduras.

$\theta = cte$ con $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{CP}{OC}$ $\quad \theta = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{CP}{OC}$.

R será la posicion del centro de masa y en un cono esta dado a $\frac{3}{4}h$ del cono, con referencia en $\hat{x}_3$

$$\Rightarrow R = \frac{3h}{4}\hat{x}_3$$ ahora bien

$\hat{x}_3$ en terminos de $\hat{x}, \hat{y}$ y $\hat{z}$ está dado por:

$$\cos\phi\cos\alpha\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi\cos\alpha\,\hat{y} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{4}h\left\{\cos\phi\cos\theta\,\hat{x} + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\right\}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3h}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\theta \qquad y = \frac{3h}{4}\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \qquad z = \frac{3h}{4}\cos\theta$$

Por tanto con $\theta = cte$ se tiene:

$$\dot{x} = -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \qquad \dot{y} = \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \qquad \dot{z} = 0.$$

ahora bien por la ligadura de rodar sin deslizar implica $\dot{r}_{cp} = 0 = \dot{R} + \tilde{\Omega} \times r_{cp}$

ahora bien

$$\tilde{\Omega} \times r_{cp} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \tilde{\Omega}^1 & \tilde{\Omega}^2 & \tilde{\Omega}^3 \\ 0 & -b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= b\left(\tilde{\Omega}^3 \hat{x}_1 - \tilde{\Omega}^1 \hat{x}_3\right)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} + b\tilde{\Omega}^3 \hat{x}_1 - b\tilde{\Omega}^1 \hat{x}_3 = 0$$

haciendo la proyección sobre las Componentes $\hat{x}$ $\hat{y}$ y $\hat{z}$ se tiene

para $\hat{x}$

$$\dot{x} + b\tilde{\Omega}^3 \hat{x}\cdot\hat{x}_1 - b\tilde{\Omega}^1 \hat{x}\cdot\hat{x}_3 = 0$$

para $\hat{y}$

$$\dot{y} + b\tilde{\Omega}^3 \hat{y}\cdot\hat{x}_1 - b\tilde{\Omega}^1 \hat{y}\cdot\hat{x}_3 = 0$$

para $\hat{z}$

$$\dot{z} + b\tilde{\Omega}^3 \hat{z}\cdot\hat{x}_1 - b\tilde{\Omega}^1 \hat{z}\cdot\hat{x}_3 = 0$$

recordemos

$\dot{R} + \tilde{\Omega} \times r_{\varphi} =$

$-\frac{3h}{4}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\sin\theta\,\hat{x} + \frac{3h}{4}\dot{\phi}\cos\phi\,\sin\theta\,\hat{y}$

$+ b(\tilde{\Omega}^3\hat{x}_1 - \tilde{\Omega}^1\hat{x}_3) = 0$

Proyección sobre $\hat{x}$

$\Rightarrow \quad -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\phi\,\sin\theta + b(\tilde{\Omega}^3\hat{x}_1\cdot\hat{x} - \tilde{\Omega}^1\hat{x}\cdot\hat{x}_3) = 0$

$\Rightarrow -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + b(\tilde{\Omega}^3(\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi)$

$-\tilde{\Omega}^1(\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi))$

Pero $\tilde{\Omega}^3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta$ y $\tilde{\Omega}^1 = \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\sin\psi$

$\Rightarrow (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) - \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi(\sin\theta\sin\phi$

$\Rightarrow \dot{\psi}\cos\psi\cos\phi - \dot{\psi}\sin\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\psi\cos\phi$

$-\dot{\phi}\cancel{\cos^2\theta}\sin\psi\sin\phi - \dot{\phi}\cancel{\sin^2\theta}\sin\psi\sin\phi$

$= \dot{\psi}\cos\psi\cos\phi - \dot{\psi}\sin\psi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\cos\theta\cos\psi\cos\phi$

$-\dot{\phi}\sin\psi\sin\phi$

$\therefore -\frac{3h}{4}\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta + b(\dot{\psi}(\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\cos\theta\sin\phi)$

$+\dot{\phi}(\cos\theta\cos\psi\cos\phi - \sin\psi\sin\phi)) = 0$

por otro lado para $\hat{y}$ proyección

$$\frac{3}{4} h\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi + b\underbrace{\left(\tilde{\Omega}^3(\hat{y}\cdot\hat{x}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{y}\cdot\hat{x}_3)\right)} = 0$$

$\hat{y}\cdot\hat{x}_1 = \cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi$

$$= (\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)$$
$$- \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi(-\sin\theta\cos\phi)$$

$$= \dot{\psi}(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi) +$$
$$\dot{\phi}\cos\theta(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)$$
$$+ \dot{\phi}\sin^2\theta\sin\psi(+\cos\phi)$$

$$= \dot{\psi}(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi) +$$
$$\dot{\phi}(\cos\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} h\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi + b\left[\dot{\psi}(\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi)\right.$$
$$\left. + \dot{\phi}(\cos\theta\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\cos\phi)\right) = 0$$

Por otro lado finalmente la proyección de z será:

$$b(\tilde{\Omega}^3(\hat{z}\cdot\hat{x}_1) - \tilde{\Omega}^1(\hat{z}\cdot\hat{x}_3)) = 0$$

$$\Rightarrow b((\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)[\sin\psi\sin\theta] - \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi\cos\theta] = 0$$

$$\Rightarrow b(\dot{\psi}(\sin\psi\sin\theta) + \dot{\phi}(0)) = 0$$

$\dot{\psi} - c$

θ = constante

$\cancel{h\dot{\psi}\sin\psi\sin\theta} = 0$

$\cancel{\dot{\phi}\sin\phi} = 0$

$\dot{\psi}\sin\psi\sin\theta = 0$

$\dot{\psi}\sin\psi = 0$

Ahora bien la energía cinetica total será:

$$T = T_{tras} + T_{rot}$$

$$= \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I_{11}}{2}\left[(\tilde{\Omega}^1)^2 + (\tilde{\Omega}^2)^2\right] + \frac{I_{33}}{2}(\tilde{\Omega}^3)^2$$

$$T = \frac{1}{2} M \left(\left(-\frac{3h}{4} \dot{\phi} \operatorname{sen}\phi \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{3}{4} h \dot{\phi} \sin\theta \cos\phi\right)^2 \right)$$

$$+ \frac{I_{11}}{2}\left[(\tilde{\Omega}^1)^2 + (\tilde{\Omega}^2)^2\right] + \frac{I_{33}}{2}(\tilde{\Omega}^3)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \left(\frac{9}{16} h^2 \dot{\phi}^2 \cancel{\operatorname{sen}^2\phi} \sin^2\theta \right) + \frac{I_{11}}{2}\left[\dot{\phi}^2 \cos^2\alpha\right] + \frac{I_{33}}{2}\left[\dot{\phi} \operatorname{sen}\alpha + \dot{\psi}\right]^2}$$

ahora bien para calcular los momentos angulares se tienes encuenta que:

$$\vec{L} = I \tilde{\Omega}$$

como sabemos que estamos en un sistema diagonalizado

$$\Rightarrow \vec{L} = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1 \\ \tilde{\Omega}_2 \\ \tilde{\Omega}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} \tilde{\Omega}_1 \\ I_{22} \tilde{\Omega}_2 \\ I_{33} \tilde{\Omega}_3 \end{pmatrix}$$

ahora bien el tensor de inercia con respecto al centro de masa

$$I_{cm} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{6} mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{16} mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} mr^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{16} mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{16} mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} mr^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \cos\alpha \sin\psi \\ \dot{\phi} \cos\alpha \cos\psi \\ \dot{\psi} + \phi \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{16} mh^2\right) \dot{\phi} \cos\alpha \sin\psi \\ \dot{\phi} \cos\alpha \cos\psi \left(\frac{3}{20} mr^2 + \frac{9}{16} mh^2\right) \\ \left(\dot{\psi} + \phi \cos\phi\right) \left(\frac{3}{10} mr^2\right) \end{pmatrix}$$

Finalmente el periodo estará dado por el tiempo en que ϕ da una vuelta completa por unidad de tiempo $\Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi}{\dot{\phi}}$