1. Ángulo de preseción del perihelio de un potencial

$$V(r) = \frac{-GMm}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

$$\frac{\Delta\theta}{T} = \dot{\theta} \Rightarrow \Delta\theta = \dot{\theta}T = 2\pi \frac{\dot{\theta}}{\omega_r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r_0^2} \quad ; \quad \omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu} \left.\frac{\partial^2 V_{er}}{\partial r^2}\right|_{r_0}}$$

f oscilación radial

$$\left.\frac{\partial V_{er}}{\partial r}\right|_{r_0} = \frac{GMm}{r^2} - \frac{2\epsilon}{r^3} + \frac{l^2}{\mu r_0^3} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V_{er}}{\partial r^2}\right|_{r_0} = \frac{-2GMm}{r_0^3} + \frac{6\epsilon}{r_0^4} + \frac{3l^2}{\mu r_0^4}$$

Por la condición de equilibrio queda

$$= \frac{-G\mu m}{r_0^3}$$

$$\Delta\Theta = \frac{2\pi l}{\mu r_0^2}\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{GMm}} = 2\pi l \cdot \sqrt{\frac{\mu r_0^3}{\mu^2 r_0^4 GMm}}$$

$$\Delta\Theta = \frac{2\pi l}{\sqrt{Mm\mu G r_0}} = \frac{2\pi l}{\left(GMm\mu\left(\frac{2E + l^2/\mu}{GMm}\right)\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{2\pi}{\left(1 + \frac{2E\mu}{l^2}\right)^{1/2}}, \Rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{1+x}},$$

para pequeñas oscilaciones

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum \frac{(1+x)^{-1/2}}{n!}(x-0)^n$$

$$\approx 1 - x/2$$

$$\Rightarrow \Delta\Theta = 2\pi\left(1 - \frac{E\mu}{l^2}\right)$$

$$\Delta\Theta - 2\pi = -\frac{E\mu}{l^2}$$, como $E << \mu/l^2$

$$\Delta\Theta - 2\pi = \Delta\Theta = \frac{-2\pi E\mu}{l^2}$$

Solución 2.

tenemos que $F = -\frac{k}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3}$ con k y $\lambda > 0$

Por ecuación de binet se tiene:

$$u''(\theta) = -u(\theta) - \frac{\mu}{l^2 u^2(\theta)} F$$ reemplazando,

$$u'' = -u - \frac{\mu}{l^2 u^2}\left(-ku^2 - \lambda u^3\right)$$

$$= -u - \frac{\mu}{l^2}\left(-k - \lambda u\right)$$

$$= -u\left(\cancel{+1} - \frac{\lambda \mu}{l^2}\right) + \frac{\mu k}{l^2}$$

sea $\omega = \frac{\mu k}{l^2}$ y $\beta^2 = +1 - \frac{\lambda \mu}{l^2}$

$$\Rightarrow u'' = -\beta^2 u + \omega$$

sea $A = \frac{\omega}{\beta^2}$

$$\Rightarrow u'' = -\beta^2 (u - A)$$

y una solución para la anterio EDO está dado por:

$$u = A + D\cos(\beta\theta + \varphi)$$

si $\varepsilon = \frac{D}{A}$ se puede escribir como:

$$u = z\,(1 + \varepsilon \cos(\beta\theta + \varphi))$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} = z\,(1 + \varepsilon \cos(\beta\theta + \varphi))$$

que es la ecuación de una elipse con

$$q = z^{-1}$$

$$\therefore \quad \frac{q}{r} = (1 + \varepsilon \cos(\beta\theta + \varphi))$$

Ahora bien debemos mostrar que esta elipse tiene precesión esto es que:

$$\Delta\theta < 2\pi \quad \text{donde}$$

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{\ell}{Nr^2}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial^2 U_{efe}}{\partial r^2}\bigg|_{r_0}\right)^{-1/2}$$

ahora bien:

$$\frac{\partial U}{\partial r}\bigg|_{er} = \frac{K}{r^2} + \frac{\lambda}{r^3} - \frac{\ell^2}{2Nr^3}$$

para hallar r_0

$$\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{K}{1} + \frac{\lambda}{r_0} - \frac{\ell^2}{2Nr_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\mu k r_0 + 2\mu\lambda - \ell^2}{2\mu r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_0 = \frac{\ell^2 - 2\mu\lambda}{2\mu k}$$

$$y \quad \ell = (k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)^{1/2}$$

ahora bien tambien tenemos

$$\Delta\theta = 2\pi\left(\frac{\dot\theta}{\omega_r}\right)$$

donde $\omega_r^2 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 U_{ef}}{\partial r^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -2\frac{k}{r^3} - \frac{3\lambda}{r^4} + \frac{3\ell}{2\mu r^4}$$

$$y \quad \dot\theta = \frac{\ell}{\mu r_0^2} = \left(\frac{(k r_0 2\mu + 2\mu\lambda)}{\mu r_0^2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = 2\pi\left(\frac{\dfrac{k r_0 2\mu + 2\mu\lambda}{\mu^2 r_0^4}}{\dfrac{1}{\mu}\left(-\dfrac{2k}{r_0^3} - \dfrac{3\lambda}{r_0^4} + \dfrac{3\ell^2}{2\mu r_0^4}\right)}\right)^{1/2}$$

$$\Delta\theta = \left(\frac{\dfrac{kr2N + 2N\lambda}{\cancel{N^2 r^4}}}{\cancel{\frac{1}{N}} \left(\dfrac{-4kNr - 6\lambda N + 3\ell^2}{\cancel{2 N r_0^4}} \right)} \right)^{1/2}$$

$$= 2\pi \left(\frac{2(kr2N + 2N\lambda)}{-4kNr - 6\lambda N + 3\ell^2} \right)^{1/2}$$

$$< 1 <$$

ahora bien para la preseción se necesitaria:

$$4krN + 2N\lambda < -4kNr - 6\lambda N + 3\ell^2$$

$$10N\lambda < 3\ell^2 - 8kNr$$

$$\lambda < \frac{3\ell^2}{10N} - \frac{8kr}{10}$$

ahora bien $-\frac{8}{10}kr < 0$ por tanto se cumple que

$$\lambda < \frac{3\ell^2}{10N} < \frac{\ell^2}{N}$$

y esto confirma que es un movimiento en precesión ya que por $\beta^2 = 1 + \frac{\lambda N}{\ell^2} \Rightarrow \lambda < \frac{\ell^2}{N}$

y es el caso a considerar porque [illegible] λ

si $\lambda = \frac{e^2}{\mu}$ se tiene que $\beta^2 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = z(1 + \varepsilon \cos(\phi))$$

con $U''(\theta) = 0$ que es la función constante

$U = C$ o $U = \theta$ de primer orden.

Y si $\lambda > \frac{e^2}{\mu}$ $\beta^2 \in$ imaginarios

$\Rightarrow \therefore$ para que exista precesión y sea un movimiento elíptico $\lambda < \frac{e^2}{\mu}$.

3. Sonda se acerca a Júpiter.

a) Acercamiento máx:

Conservación del momentum

$L = m V_0 b \longrightarrow$ Distancia entre x_0 y el centro de Júpiter

$L = m V r_{min} \rightarrow$ r mínimo.

$$\cancel{m} V_0 b = \cancel{m} V r_{min} \Rightarrow V = \frac{V_0 b}{r_{min}}$$

$E = T + U \rightarrow$ Stma aislado con fuerza conservadora.

$E_0 = T_0$ si la sonda parte del ∞

$$\lim_{r \to \infty} U = \lim_{r \to \infty} \left(-\frac{GmM}{r} \right) = 0.$$

$E_f = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GMm}{r_{min}} \rightarrow$ Cuando es el acercamiento max.

$E_f = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2 b^2}{(r_{min})^2} - \frac{GMm}{r_{min}}$, Por conservación de E $E_0 = E_f$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} V_0^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} \frac{V_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GM\cancel{m}}{r_{min}}$$

$$V_0^2 = \frac{V_0^2 b^2}{r_{im}^2} - \frac{2GM}{r_{im}}.$$

$$\Rightarrow V_0^2 r_{min}^2 = V_0^2 b^2 - 2 r_{min} GM$$

$$\Rightarrow (V_0 b)^2 - V_0^2 r_{min}^2 - 2 r_{min} GM = 0$$

$$(V_0 b)^2 - V_0^2 r_m^2 - 2 r_m GM = 0 = ax^2 + bx + c$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$a = V_0^2$
$b = 2GM$
$c = (V_0 b)^2$

$$r_{min} = \frac{-2GM \pm \sqrt{4(GM)^2 + 4V_0^4 b^2}}{2V_0^2}$$

$$r_{min} = \frac{-GM \pm 2\sqrt{(GM)^2 + V_0^4 b^2}}{V_0^2}$$

Se toma lo positivo.

b) Ángulo de dispersión.

Diferencia entre Θ_0 y Θ_f (cerca del planeta).

e ⇒ exentricidad

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$$

$$\Theta = 2\,\text{Sen}^{-1}(1/e)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_{min}} = \frac{1}{2}mV_0^2$$

$$L = mV_0 b = mv\,r_{min}$$

$$\rightarrow \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3} = \frac{m^3V_0^4b^2}{G^2M^2m^3} = \frac{V_0^4b^2}{G^2M^2}$$

$$x = 2\,\text{Sen}^{-1}\left[\left(1 + \frac{V_0^4b^2}{G^2M^2}\right)^{-1/2}\right] = 2\,\text{Sen}^{-1}\left[\left(1 + \left(\frac{V_0^2b}{GM}\right)^2\right)^{-1/2}\right]$$

$$x = 2\,tg^{-1}\left[1 \Big/ \frac{V_0^2b}{GM}\right] = 2\,tg^{-1}\left[\frac{GM}{V_0^2b}\right]$$

$$T = 2\int_R \frac{dr}{v_r} = 2\int_R \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{r_{min}}{r^2}\right)}\, dr$$

Solución 4

$$\Rightarrow \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{r_{min}}{r^2}\right)} = \sqrt{\frac{2GM(r - r_{min})}{r^2}}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{2GM}\sqrt{r - r_{min}} \quad ; \quad t = \sqrt{r - r_{min}} \Rightarrow t^2 - r_{min} = r$$

$$dt = 2t\,dr$$

$$4\int \frac{\sqrt{2GM}\; t^2}{t^2 - r_{min}}\, dr = 4\sqrt{2GM}\int \frac{t^2}{t^2 - r_{min}}\, dr$$

$$4\sqrt{2GM}\int\left(1 - \frac{r_{min}}{t^2 + r_{min}}\right) dr = 4\sqrt{2GM}\left[t - \sqrt{r_{min}}\, tg^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{r_{min}}}\right)\right]$$

$$\sqrt{2GM}\left[\sqrt{r - r_{min}} - \sqrt{r_{min}}\, tg^{-1}\left[\sqrt{\frac{r - r_{min}}{r_{min}}}\right]\right]\Bigg|_R^{r_{min}}$$

xAño

5. Una partícula con momento angular L describe la orbita $r = a(1+\cos\theta)$.

a) Encuentre la fuerza central.

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} \quad , \text{ si } r = \frac{1}{U} \Rightarrow U = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{l^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + U\right) \qquad \frac{r}{a} - 1 = \cos\theta.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{a(1+\cos\theta)}\right)\right] \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\sin\theta}{a(1+\cos\theta)^2}\right] \qquad \sin^2 = 1-\cos^2\theta.$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{\cos\theta(\cos\theta+1) + 2\sin^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial U} = \frac{l^2}{\mu}\left[\frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^2} + \frac{2\sin^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3} + \frac{1}{a(1+\cos\theta)}\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial U} = \frac{l^2}{\mu}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\frac{1}{r} + \frac{2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r}r^2 = \frac{l^2}{\mu}\frac{1}{r}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} + 1\right]$$

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = F(r) = \frac{l^2}{\mu}\frac{1}{r^3}\left[\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} + 1\right]$$

$$F(r) = \frac{l^2}{\mu}\cdot\frac{1}{r^3}\left[\frac{r-a}{a(r/a)} + \frac{2\left(1-\left(\frac{r-a}{a}\right)^2\right)}{(r/a)^2} + 1\right]$$

$$F(r) = \frac{l^2}{\mu r^3}\left[\frac{r-a}{r} + \frac{(r-a)^2}{r^2} + 1\right]$$

Powered by CamScanner

b) Calcular el periodo:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} \; ; \quad A = 6\pi a^2 \Rightarrow A = \frac{3}{2}\pi a^2$$

$$\tau = \frac{A}{dA/dt} = \frac{3}{2}\pi a^2 \cdot \frac{2\mu}{l} = \frac{3\pi a^2 \mu}{l}$$

c) Determine la energía mínima de la partícula para escapar de la orbita.

Ya que $F(r) = \frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow -\int F(r)\, dr = V$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{r^3}\left(\frac{r-a}{r} + \frac{(r-a)^2}{r^2} + 1\right) dr$$

$$= \int \left(\frac{r-a}{r^4} + \frac{(r-a)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right) dr$$

$$= \int \left(\frac{1}{r^3} - \frac{a}{r^4} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a}{r^4} + \frac{a^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right) dr$$

$$-\frac{1}{2r^2} + \frac{a}{3r^3} - \frac{1}{2r^2} + \frac{2a}{3r^3} - \frac{a^2}{4r^4} - \frac{1}{2r^2}$$

$$= C + -\frac{3}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{3a}{3r^3} - \frac{a^2}{4r^4} = V.$$

La condición para que una partícula posea una orbita no acotada, su energía debe ser $E \geqslant 0$.

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} - \left(\frac{3}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{3a}{3r^3} - \frac{a^2}{4r^4} \right) \geq 0$$

$$\frac{l^2}{2\mu r^2} \geqslant \underbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{3a}{3r^3} - \frac{a^2}{4r^4}}_{\text{El potencial } V}$$

---

4. Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria

Solución 6. a.

existe conservación del momento por tanto:

$$M_T v_T + M_C v_C = (M_T + m_C) v_F$$

ahora bien $m_C = \frac{M_T}{8}$ y $v_C = -5 v_T$

$$\Rightarrow \quad M_T v_T + \frac{M_T}{8}(-5 v_T) = (M_T + \frac{1}{8} M_T) v_f$$

$$\frac{3}{8} \cancel{M_T} v_T = \frac{9}{8} \cancel{M_T} v_f$$

$$\boxed{v_f = \frac{1}{3} v_T}$$

ahora bien como será la nueva orbita? cual sería la ~~energía mim~~ velocidad del cometa para sacarlo de orbita y ponerlo en una hiperbola o parabola?

⇒ luego de colisionar es necesario que el cometa incremente la velocidad del planeta para sacarlo de orbita, pero $v_f = \frac{1}{3} v_T$ es decir que reduce su velocidad y por tanto su nueva orbita a lo mucho una elipse

b. El sistema tierra-elipse sigue ahora una obita eliptica

$$\Rightarrow E_f = \frac{1}{2}\overbrace{(M_T + m_c)}^{M_f} v_f^2 - \frac{k}{R}$$

$$= \frac{1}{2} M_f \frac{1}{9} v_T^2 - \frac{k}{R}$$ donde $k = G M_\odot M_f'$

ahora bien $v_T^2 = \frac{G M_\odot}{R}$

$$E_f = \frac{1}{18} M_f \frac{G M_\odot}{R} - \frac{G M_\odot M_f}{R}$$

$$= -\frac{17}{18} M_f \frac{G M_\odot}{R}$$

por otro lado sabemos que para una orbita eliptica

$$E_f = -\frac{G M_\odot M_f}{2a'}$$ igualando se tien

$$-\frac{17}{18} \frac{\cancel{G} \cancel{M_f} \cancel{M_\odot}}{R} = -\frac{\cancel{G} \cancel{M_\odot} \cancel{M_f}}{2a}$$

$$\Rightarrow a' = \frac{9}{17} R$$

por tanto

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}} = \left(1 + \frac{\cancel{2} \cdot - \cancel{G M_\odot M_f}\, \ell^2}{\cancel{2}\, \mu\, (G M_\odot M_f)^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 - \frac{\chi \ell^2}{G M_\odot M_f)\mu}\right)^{1/2}$$

$$r_{Perielio} = a'(1-e)$$

$$\boxed{= \frac{9}{17} R\left[1 - \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f \mu}\right)^{1/2}\right]}$$

$$r_{afelio} = a'(1+e)$$

$$\boxed{= \frac{9}{17} R\left[1 + \left(1 - \frac{\ell^2}{G M_\odot M_f \mu}\right)^{1/2}\right]}$$

solución b.

por tercera ley de keppler tenemos:

$$T^2 \propto a^3 \quad \vee \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{G M_\odot} a^3$$

Para dos orbitas distintas alrededor del sol se tiene

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a'^3}{a^3} \qquad a' =$$

antes del impacto

Donde T es el periodo antes del impacto. y $a = R$

$$T' = T\left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2}$$

$$= T \times \left(\frac{9}{17}\right)^{3/2}$$

$$\boxed{\approx 140.6 \text{ dias}}$$