Andrés Hernández
AcostaDonovan Seijas

Solución 1

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a(\dot{x}^2 \operatorname{sen}^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} b(\dot{x} \cdot \cos(y) + \dot{z})^2$$

$a, b = cte.$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\operatorname{sen}^2 y + b(\dot{x}\cos(y) + \dot{z})(\cos(y)) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + a\dot{x}\, 2 \operatorname{sen} y \cos y\, \dot{y} + b(-\sin y)\dot{y}(\dot{x}\cos(y) + \dot{z})$$
$$+ b\cos(y)\left[\ddot{x}\cos(y) - \dot{x}\sin y\, \dot{y} + \ddot{z}\right]$$

$$= a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen} y\cos y - b\dot{y}\dot{x}\cos y\sin y$$
$$- b\sin y\,\dot{y}\dot{z} + b\cos^2 y\,\ddot{x} - b\dot{x}\dot{y}\cos y\sin y$$
$$+ b\ddot{z}\cos(y)$$

$$= a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\sin y\cos y$$
$$- b2\dot{x}\dot{y}\sin y\cos y + b\cos^2 y\,\ddot{x}$$
$$- b\sin y\,\dot{y}\dot{z} + b\ddot{z}\cos y$$

$$= \ddot{x}(a\sin^2 y + b\cos^2 y) + 2\dot{x}\dot{y}\sin y\cos y(a-b)$$
$$+ b\ddot{z}\cos y - b\sin y\,\dot{y}\dot{z}$$

ahora bien $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$.

$\Rightarrow \ddot{x}(a\sin^2 y + b\cos^2 y) + 2\dot{x}\dot{y}\sin y\cos y\,(a-b)$
$+ b\ddot{z}\cos y - b\dot{y}\dot{z}\sin y = 0 \quad (6)$

- ecuación para y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a\dot{x}^2 \operatorname{sen} y \cdot \cos y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})(\dot{x}(-\sin y))$$

$$\Rightarrow a\ddot{y} - \left[a\dot{x}^2 \operatorname{sen} y\cos y + b\dot{x}^2 \cos y\sin y - b\dot{x}\dot{z}\sin y\right] = 0$$

$$a\ddot{y} + \dot{x}^2 \operatorname{sen} y\cos y\,[b-a] - b\dot{z}\sin y\,\dot{x} = 0 \quad (2)$$

- ecuación para z

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \quad y \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = b(\ddot{x}\cos y - \sin y\,\dot{x} + \ddot{z})$$

$$\Rightarrow b(\ddot{x}\cos y - \sin y\,\dot{x} + \ddot{z}) = 0 \quad (7)$$

Pero ya que $\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = cte$

$$\Rightarrow \quad b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) = cte = C_1 \qquad (3)$$

La misma situacion tenemos en (1) ya que

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = cte.$

$$\Rightarrow \quad a\dot{x}\,sen^2 y + \underbrace{b(\dot{x}\cos y + \dot{z})}_{C_1}\cos(y) = cte = C_2$$

$$\Rightarrow \quad a\dot{x}\,sen^2 y + C_1\cos y = C_2$$

$$a\dot{x}\,sen^2 y = C_2 - C_1\cos y$$

$$a\dot{x} = \frac{C_2 - C_1\cos y}{a\,sen^2 y} \qquad (4)$$

$$\cancel{a\,x(t) = \frac{C_2 - C_1\cos y}{a\,sen^2 y}\,t + x_0 \quad (5)}$$

reemplazando (4) en (3)

$$\Rightarrow \quad b\left[\left(\frac{C_2 - C_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right)\cos y + \dot{z}\right] = C_1$$

$$\dot{z} = \frac{C_1}{b} - \left(\frac{C_2 - C_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right)\cos y \quad (5)$$

Calculando la derivada de (4) y (5) tenemos

$$\ddot{x} = \frac{1}{a\,sen^3 x}\left(c_1 - 2c_2\cos y\right)\dot{y}$$

$$y \quad \ddot{z} = -\left[\left(-\sin y\left(\frac{c_2}{a\sin^2 y} - \frac{c_1\cos y}{a\sin^2 y}\right) + \frac{\cos y}{a\sin^3 y}(c_1 - 2c_2\cos y)\right]\dot{y}$$

reemplazando $\ddot{x}$ y $\dot{x}$, $\ddot{z}$ y $\dot{z}$ en (7).

$$b\left[\frac{1}{a\,sen^3 x}\left(c_1 - 2c_2\cos y\right)\dot{y}\cos y - \sin y\left(\frac{c_2 - c_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right]\right.$$

$$+\dot{y}\left[\left(-\sin y\left(\frac{c_2 - c_1\cos y}{a\sin^2 y}\right) + \frac{\cos y}{a\sin^3 y}(c_1 - 2c_2\cos y)\right]$$

$$= 0$$

y finalmente reemplazando en (2) se tiene

$$a\ddot{y} + \left[\frac{c_2 - c_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right]^2 sen y\cos y\,[b-a]$$

$$-b\left[\frac{c_1}{b} - \left(\frac{c_2 - c_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right)\cos y\right)\sin y\left[\frac{c_2 - c_1\cos y}{a\,sen^2 y}\right] = 0.$$

solucion b

anteriormente se observo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \Rightarrow P_z \text{ se conserva con}$$

$$P_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) = cte$$

tambien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \Rightarrow P_x \text{ se conserva y}$$

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\,\mathrm{sen}^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y = cte.$$

finalmente el lagrangeano no depende explícitamente del tiempo por tanto E se conserva

ya que tenemos 3 cantidades que se conservan en un sistema con 3 variables que lo describen

$\therefore$ el sistema es integrable

Solución I

la energía viene dada por:

$$E = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow E = \dot{x}\left(a\dot{x}\,sen^2 y + b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\cos y\right) + a\dot{y}^2$$

$$+ \dot{z}\left(b(\dot{x}\cos y + \dot{z})\right) - \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 sen^2 y + \dot{y}^2)$$

$$+ \frac{1}{2}(b\,\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$= \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 sen^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

Solución d.

Si $y(t) = cte = y_0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0$ se tendría que:

Por (4)

$$\int \dot{x} = \int \frac{c_2 - c_1 \cos y_0}{a \operatorname{sen}^2 y_0}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{c_2 - c_1 \cos y_0}{a \operatorname{sen}^2 y_0} t + x_0}$$

y por (5)

$$\int \dot{z} = \int \left(\frac{c_1}{b} - \frac{c_2 - c_1 \cos y_0}{a \operatorname{sen}^2 y_0} \right)$$

$$\boxed{z(t) = z_0 + \left(\frac{c_1}{b} - \frac{c_2 - c_1 \cos y_0}{a \sin^2 y_0} \cos y_0 \right) t.}$$

Podemos concluir varias cosas

(1) El momentum no se conserva, no existe simetría de traslación

(2) La energía se puede decir que se conserva, ya que el Potencial no depende del tiempo.

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + 2\alpha V_0 \cdot \frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} = 0$

$E < 0 \qquad E \geq 0$

$$E = T + V(x) \Rightarrow E - V(x) = T$$

T solo puede ser positiva o cero, si la $E=0$ implica que cuando $E<0$, la energía potencial tenderá a $-\infty$ mientras que T tiende a 0

Sabemos que $T \geq 0$ entonces

$$T = E + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} \geq 0 \Rightarrow E \geq -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

El potencial tiene un mínimo en $x=0$ y es asintótico en 0, y como $E>0$, el valor de x no tiene un límite y sigue al infinito.

2. Una partícula de masa m se mueve en el potencial uni

$$V(x) = \frac{-V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$x = r\cos\theta$

$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r$

a) Encuentre el Lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} = L(\dot{x}, x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-V_0 2}{\cosh^3 \alpha x} \cdot \operatorname{senh}(\alpha x) \cdot \alpha = \frac{-2V_0 \alpha \tanh(\alpha x)}{\cosh^2 \alpha x}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(2m\dot{x}) = 2m\ddot{x}$$

$$0 = 2m\ddot{x} + 2V_0 \alpha \frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)}$$

b) ¿Existen ctds conservadas?

Partimos de la conservación del momentum

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -2V_0\alpha \frac{\tanh \alpha x}{\cosh^2 \alpha x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(P) = -2V_0\alpha$$

2. Una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$x = r\cos\theta$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

a) Encuentre el Lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} = L(\dot{x}, x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{-V_0\, 2}{\cosh^3 \alpha x} \cdot \mathrm{senh}\,(\alpha x)\cdot\alpha = \frac{-2V_0\alpha\tanh(\alpha x)}{\cosh^2 \alpha x}.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(2m\dot{x}) = 2m\ddot{x}$$

$$0 = 2m\ddot{x} + 2V_0\alpha\frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)}$$

b) ¿Existen ctds conservadas?
Partimos de la conservación del momentum

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -2V_0\alpha\frac{\tanh \alpha x}{\cosh^2 \alpha x} \Rightarrow \frac{d}{dt}(P) = -2V_0\alpha\frac{\tanh \alpha x}{\cosh^2 \alpha x}$$

Podemos concluir varias cosas

① El momentum no se conserva, no existe simetría de traslación

② La energía se puede decir que se conserva, ya que el Potencial no depende del tiempo.

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + 2\alpha V_0 \cdot \frac{\tanh(\alpha x)}{\cosh^2(\alpha x)} =$

$E < 0 \quad E \geq 0$

$E = T + V(x) \Rightarrow E - V(x) = T$

T solo puede ser positivo o cero, si la $E=0$ implica que cuando $E<0$, la energía potencial tenderá a $-\infty$ mientras que T tiende a 0

Sabemos que $T \geq 0$ entonces

$$T = E + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} \geq 0 \Rightarrow E \geq -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

El potencial tiene un mínimo en $x=0$ y es asintótico en 0, y como $E>0$, el valor de x no tiene un límite y sigue al infinito.

Para el caso de $E < 0$

$$E > -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)},$$ dado que $E < 0$ y la función potencial tiene un pozo en $x = 0$, la coordenada x solo se puede mover entre

$$-\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \leq E < 0 \;; \; x \text{ es finito.}$$

d) Puntos de retorno y el valor mínimo de E

Con el inciso c), sabemos que:

$$E > -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)},$$ la gráfica nos indica que el valor mínimo es en $x = 0$ el cual es

$E(0) = -V_0$.

los puntos de retorno son aquellos donde $\dot{x} = 0$, es decir la partícula pierde su energía cinética.

$$E = \frac{-V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \Rightarrow \cosh^2(\alpha x) = -\frac{V_0}{E}$$

como V_0 es siempre una ctd negativa, y además $\cosh^2 \alpha x \geq 1$ ignoramos el negativo

$$\cosh \alpha x = \pm\sqrt{\frac{V_0}{E}}$$

$$x = \frac{1}{\alpha}\cosh^{-1}\left[\pm\sqrt{\frac{V_0}{E}}\right]$$

Solución 3.

$b^2 - ac \neq 0$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = ma\dot{x} + mb\dot{y} = m(a\dot{x} + b\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m(a\ddot{x} + b\ddot{y})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kax - kby$$

$$\Rightarrow \quad m(a\ddot{x} + b\ddot{y}) + k(ax + by) = 0 \quad (*)$$

para y se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = mb\dot{x} + mc\dot{y} = m(b\dot{x} + c\dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m(b\ddot{x} + c\ddot{y})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -kbx - kcy = -k(bx + cy)$$

$$\Rightarrow \quad m(b\ddot{x} + c\ddot{y}) + k(bx + cy) = 0 \quad (**)$$

a) Ecuaciones de movimiento

resolvemos el sistema por metodo de valores propios

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + \frac{k}{m}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

sea $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{= M} \ddot{X} + \frac{k}{m}\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}}_{= M} X = 0$$

$$\Rightarrow M\ddot{X} + \frac{k}{m} M X = 0 \quad (***)$$

M tiene inversa ya que por hipotesis $b^2 - ac \neq 0$

$\Rightarrow$ multiplicando por M^{-1} en $(***)$ se tiene

$$\ddot{X} + \frac{k}{m} I X = 0$$

asumimos una solución de la forma $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$

reemplazando

$$\Rightarrow -\omega^2 M X + \frac{k}{m} \cdot M X = 0$$

$\dot{x} = i\omega x_0 e^{i\omega t}$

$\ddot{x} = -\omega^2 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow M\left(\frac{k}{m} - \omega^2 I\right) X = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(M\left(\frac{k}{m} - \omega^2 I\right)\right) = 0$$

ya que $\det M \neq 0 \quad \therefore \omega^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow$ la solución general sería

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$y(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Solución b y C.

los momentos conjugados P_x y P_y

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(a\dot{x} + b\dot{y}) \qquad P_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m(b\dot{x} + c\dot{y})$$

y lo anterior no se conserva necesariamente ya que x e y no son cíclicas.

ahora bien ya que el Lagrangeano no depende explícitamente del tiempo E se conserva

pero veremos $s = 2$ y $n = 1$ $\Rightarrow$ el sistema **NO** ~~es~~ es integrable

4. $F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right]$

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow V_1(r) = \frac{1}{r}$$

$$V(r,\dot{r}) = \frac{-1}{r} + V_2(r,\dot{r})$$

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(-\frac{1}{r} + V_2(r,\dot{r})\right)\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r} + V_2(r,\dot{r})\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}} V = \frac{\partial V_2}{\partial r}\frac{dr}{d\dot{r}} + \frac{\partial V_2}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial V}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial V_2}{\partial \dot{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r} + V_2(r,\dot{r})\right) = -\frac{1}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \dot{r}}\right) + \frac{1}{r^2} - \frac{\partial V_2}{\partial r} = \frac{1}{r^2} - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2 r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_2}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial V_2}{\partial r} = -\frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} + \frac{2\ddot{r}}{c^2 r}$$

$$V_2 = \frac{\dot{r}^2}{2c^2 r} \Rightarrow V(r,\dot{r}) = \frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{2c^2 r}$$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{r}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{r}} = \frac{2\dot{r}}{c^2 r} = \frac{2\dot{r}}{c^2 r}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{2}{c^2}\left[\frac{\ddot{r} r - \dot{r}^2}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{1}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{2c^2 r^2} + \frac{2}{c^2}\left[\frac{\ddot{r} r - \dot{r}^2}{r^2}\right]$$

$$F = -\frac{1}{r^2} - \left(\frac{-2\ddot{r} r}{c^2 r^2} + \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right]$$