

# Péndulo con masa variable

Germán Hilgert y Jerónimo Valli

[gerdanhilgert@hotmail.com](mailto:gerdanhilgert@hotmail.com), [jeros\\_86@hotmail.com](mailto:jeros_86@hotmail.com)

Universidad Favaloro – Laboratorio de Física 1 - 2005

## RESUMEN

En este trabajo se estudia algunas características de flujos como el agua y la arena. Para luego elegir el más conveniente y hacer un estudio con un péndulo de masa variable donde se busca encontrar la relación entre el período en función del tiempo.

## I. INTRODUCCION

El estudio de sistemas de masa variable se remonta a los finales del siglo XVI. En ese momento Galileo ya había diseñado un ingenioso dispositivo y tal vez el haya sido el primer científico en estudiar esta clase de problemas.

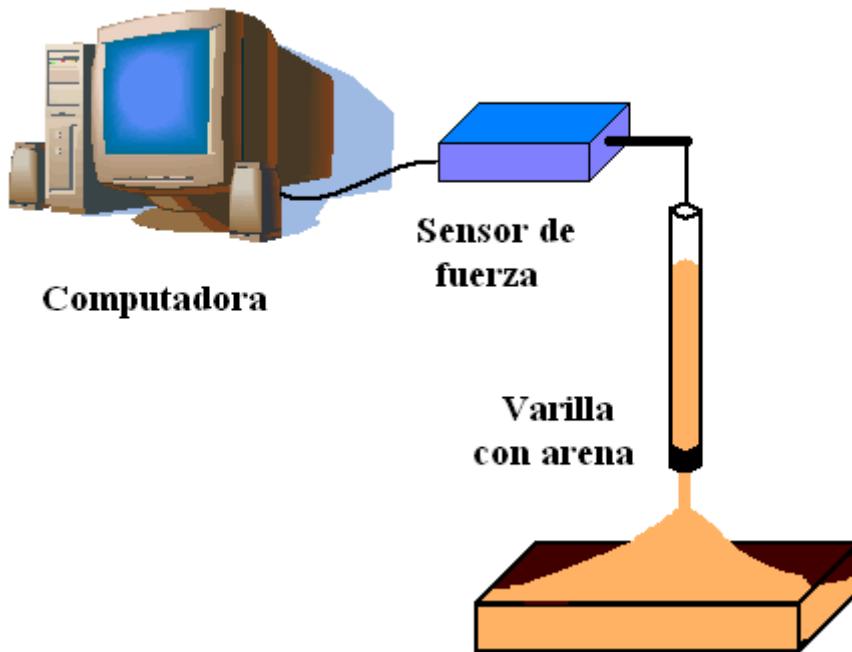
Los materiales granulares como la arena, se pueden definir como una larga conglomeración de partículas macroscópicas. Además poseen ciertas características que los diferencian de los líquidos y los sólidos. Gracias a este comportamiento especial que poseen son utilizados para los estudios de masa variable. Primero porque es más fácil manejarlos que a los líquidos, y segundo porque el flujo de arena a través de un orificio es constante en el tiempo. Esta última propiedad acerca del flujo se puede probar a través de una sencilla interpretación de los resultados de simples experimentos.

Para el caso de un tubo largo lleno de material granular la presión en la parte inferior es independiente de la altura de la columna. Esto se debe a la fricción que existe entre las partículas macroscópicas y las paredes del tubo es suficiente para soportar cierta proporción considerable de la masa del material granular.

## II. CARACTERISTICAS EXPERIMENTALES DE LOS FLUJOS

Existe una diferencia entre el flujo de agua y el flujo de arena que atraviesan el mismo orificio. Para los líquidos el flujo depende de la altura de la columna, ya que cuanto más alta es la columna de líquido mas presión se ejerce en su base. En cambio para los materiales granulares el flujo es constante en el tiempo.

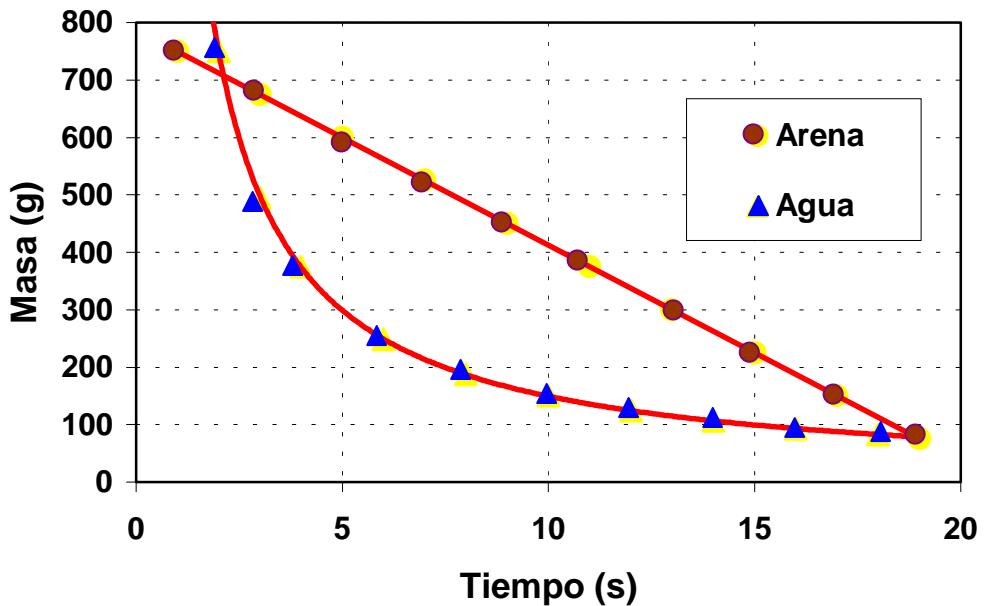
Para caracterizar el flujo de arena realizamos un experimento en el cual utilizamos un tubo de plástico lleno de arena y varias tapas para variar la abertura del orificio en la base del mismo. El tubo estaba conectado a un sensor de fuerza el cual a su vez estaba conectado a una computadora, y mediante estos dos dispositivos podíamos recolectar los datos de la masa en función del tiempo. A medida que pasaba el tiempo el recipiente se vaciaba y el peso que medía el sensor de fuerza iba disminuyendo linealmente (Figura 1).



**Figura 1.-** Esquema del experimento del flujo de arena a través de diferentes aberturas. El tubo de plástico esta conectado a un sensor de fuerza que a su vez esta conectado con una computadora, y a través de esta se toman las mediciones del peso.

De la misma manera tomamos los datos para un flujo de un líquido, en este otro caso la varilla estaba llena de agua. Para comparar estos dos experimentos graficamos ambas series de datos que obtuvimos de la masa en función del tiempo. Al analizar las graficas vemos

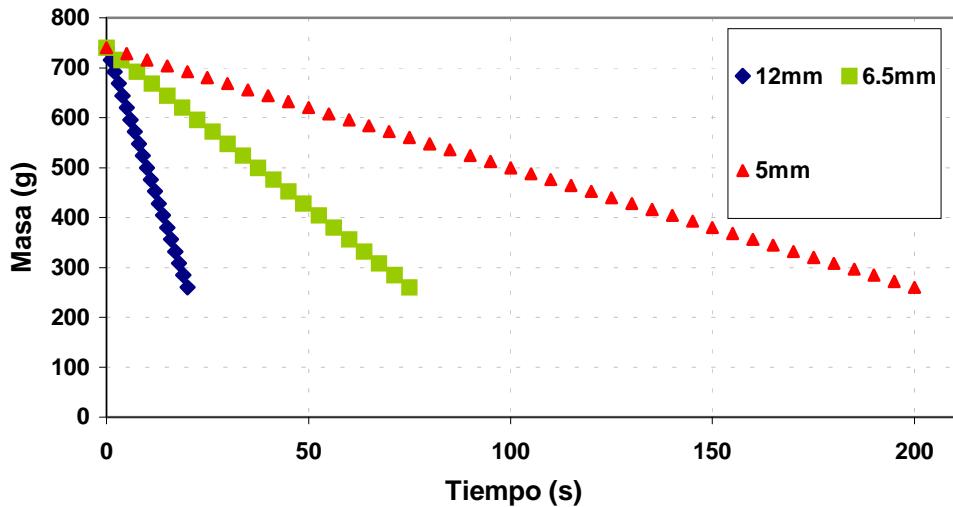
que el flujo de agua depende, como esperábamos, de la diferencia de presión en la base del tubo, en cambio el flujo de arena es constante (Figura 2).



**Figura 2.-** Gráficas de la masa en función del tiempo para un tubo lleno de un líquido (agua) y otro lleno de un material granular (arena).

Seguido a esta comparación buscamos averiguar como varía el flujo de arena a través de distintos agujeros. Para esto tomamos el tubo y realizamos las mediciones de masa con respecto al tiempo para tapas con distintos agujeros, en todos los casos la cantidad de arena es la misma (Figura 3). Esta figura muestra claramente que el flujo de arena es constante y que además aumenta con el diámetro de apertura.

Mediante un análisis dimensional se puede llegar a una expresión para la dependencia del flujo en función del diámetro del orificio  $D$ , de la densidad de la arena  $\rho$  y la gravedad  $g$ , y donde  $K$  es una constante a determinar con los experimentos, de la forma<sup>3</sup>:



**Figura 3.-** Gráfica de la masa en función del tiempo para un tubo lleno de un material granular (arena) al cual se le van cambiando las tapas para cambiar el área del flujo.

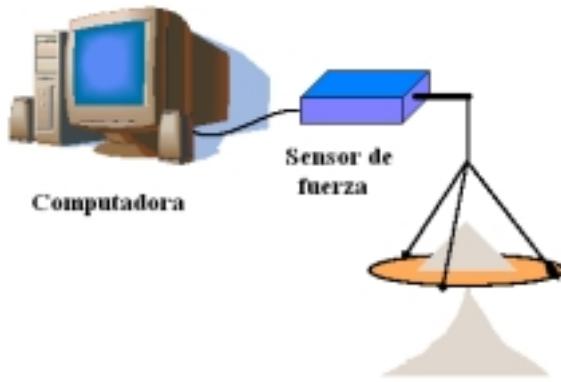
$$\frac{dM}{dt} = K \times \rho \times \sqrt{g} \times D^{5/2} \quad (1)$$

También a partir de la figura 3 podemos determinar una ecuación para la masa en función del tiempo en nuestro sistema:

$$M(t) = M_0 + \lambda \times t \quad (2)$$

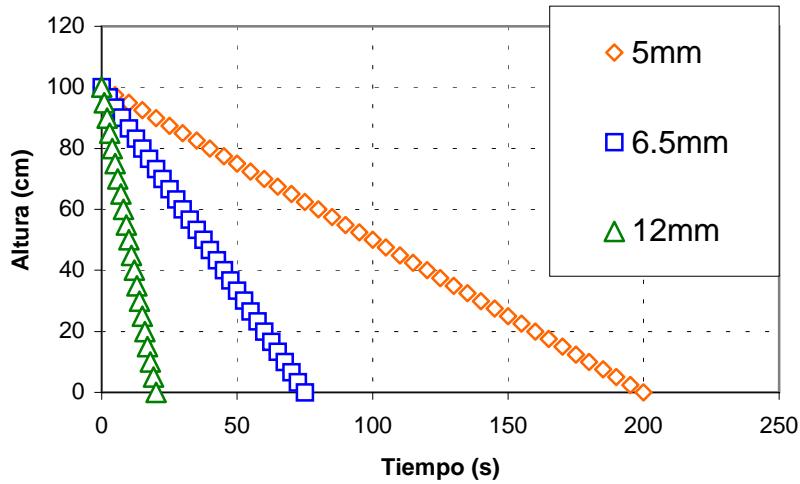
En esta última  $\lambda$  es la derivada de la masa en función del tiempo y  $M_0$  es la masa inicial del tubo vacío, es decir sin arena.

Además aseguramos que la fuerza de fricción que existe entre el tubo y los granos de arena, no causa ningún efecto sobre lo que hemos afirmado. Para probar esto hemos colgado de un sensor de fuerza un plato con un agujero central de diámetro similar al del recipiente cilíndrico (Figura 4). Sobre el plato se colocó la misma cantidad de arena y una vez destapado el agujero se midió el flujo. Nuevamente, dio lineal, y de pendiente casi idéntica a la del recipiente cilíndrico para una abertura del mismo diámetro.



**Figura 4.-** Esquema del experimento del flujo de arena a través del agujero en un plato.

Al analizar la relación entre la columna de arena y el tiempo (Figura 5) vemos que tiene el mismo comportamiento que la relación entre la masa y el tiempo, es decir que las dos son relaciones lineales. Esto se debe a la característica de que flujo de arena es constante en el tiempo.



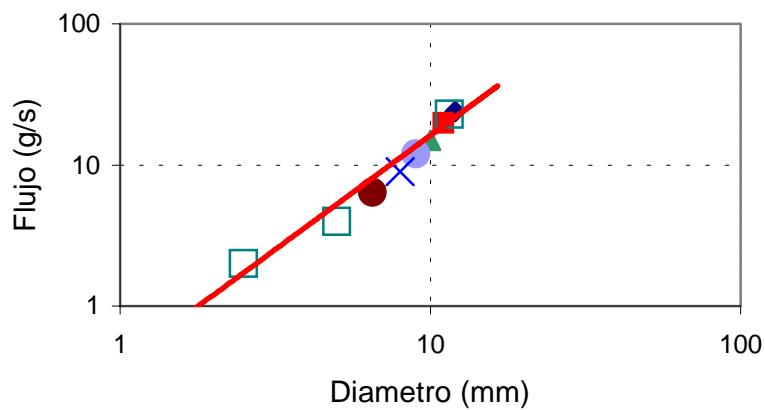
**Figura 5.-** Gráfica de la altura en función del tiempo para un tubo lleno de un material granular (arena) al cual se le van cambiando las tapas para cambiar el área del flujo.

Se puede apreciar que los resultados experimentales presentan una similitud cualitativa con los que fueron calculados teóricamente. Entonces a partir de los datos obtenidos podemos determinar una función para la altura de la columna de arena en función del tiempo:

$$h(t) = h_0 + \mu \cdot t \quad (3)$$

Donde  $h_0$  es la altura inicial de la columna cuando el tiempo es cero, es decir cuando el tubo esta tapado, y  $\mu$  es la pendiente de la altura, que se deduce que es negativa igual que sucedía para el caso de la masa a medida que pasa el tiempo.

De los gráficos de la masa y de la altura en función del tiempo, podemos deducir otra relación muy importante: La de cómo varía el flujo a medida que cambiamos el diámetro de la tapa. Entonces graficamos  $-dM / dt$ , la constante del flujo, para el diámetro de la tapa que corresponde en escala logarítmica para ambas variables (Figura 6). Lo hicimos para varias tapas.



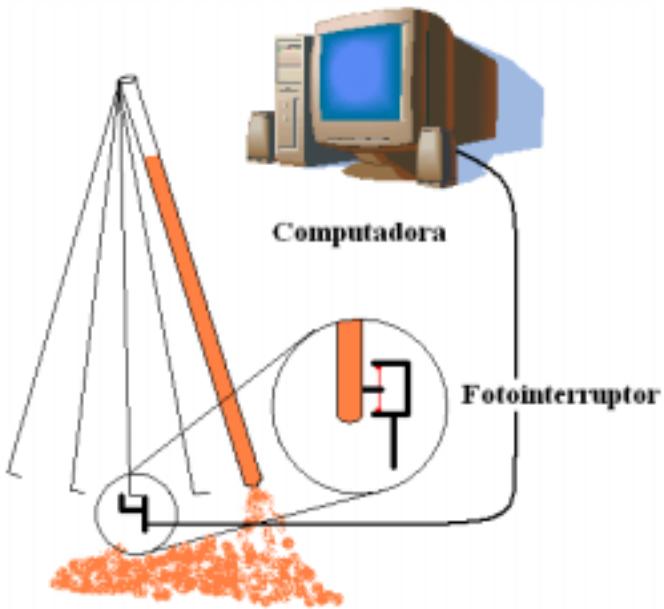
**Figura 6.-** Gráfica de las distintas constantes de flujos que le corresponden los diferentes diámetros.  
Los datos están representados en escala logarítmica para ambas variables.

Analizando el grafico vemos que la relación entre la constante del flujo y el diámetro es del tipo potencial, en escala log-log resulta una recta. Todo esto nos muestra la dependencia que la constante de flujo tiene con el diámetro del orificio y que nuestros resultados son consistentes con la ecuación (1).<sup>3</sup>

### III. EXPERIMENTO DEL PENDULO DE MASA VARIABLE

Una vez determinado el flujo en función del diámetro se pensó en posibles aplicaciones donde se podía variar la masa de manera controlada. Entonces surgió una idea simple: la de un péndulo de masa variable. Para realizar el estudio de este sistema de masa variable utilizamos una computadora, a la cual le conectamos un fotointerruptor. Por el fotointerruptor pasa un péndulo físico que consiste en tubo largo y hueco, lleno de arena y

con un orificio en la parte inferior que permitía la caída del material granular (Figura 7). El tubo estaba montado sobre un soporte que puede girar libremente por medio de un rulemán. A través del fotointerruptor tomamos los períodos del péndulo para los distintos tiempos, a medida que caía la arena.



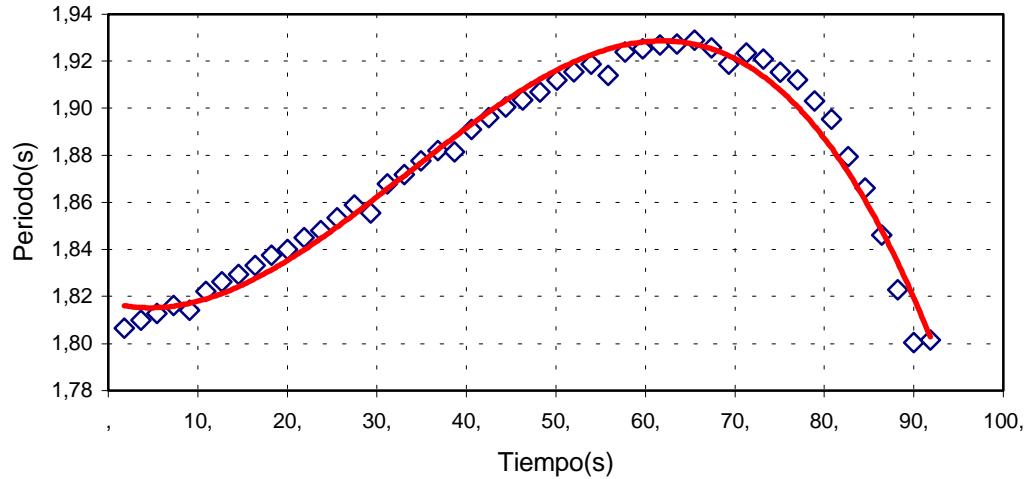
**Figura 7.-** Esquema de un péndulo de masa variable. El tubo de plástico pasa por un fotointerruptor que toma los datos de los distintos períodos en función del tiempo.

En nuestro caso la variable independiente es el tiempo y no la altura de la columna de arena. Aquí es donde se utiliza la propiedad de linealidad de flujo del medio granular. Se realiza una medición de este flujo con la cual se puede trazar la relación entre la altura de la columna de arena y el tiempo; con esto se obtiene entonces la expresión del período en función del tiempo.

Al realizar esta última parte del experimento descubrimos cuál es el comportamiento del período a medida que cae la arena (Figura 8).

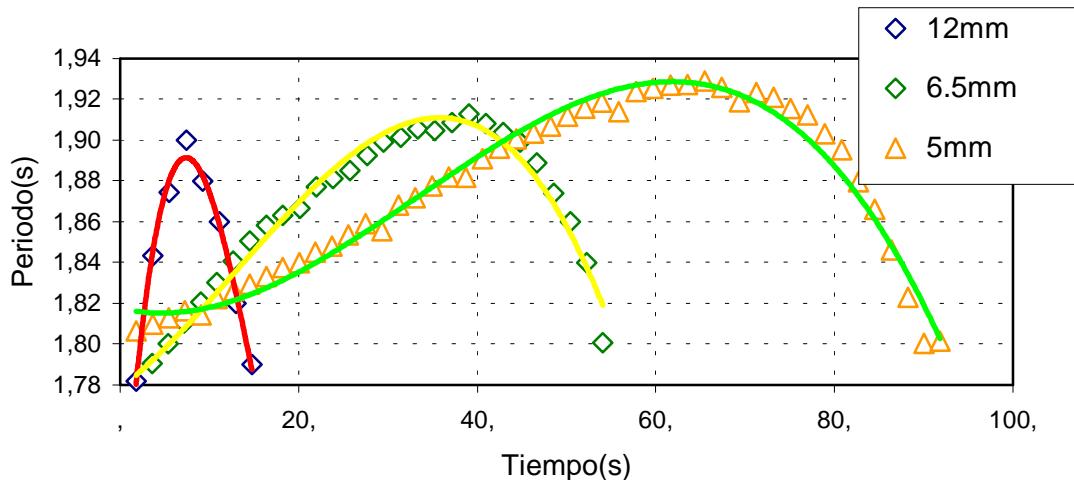
Se observó que el período de oscilación aumenta mientras comenzaba a vaciarse el tubo, llegando a un período máximo, para luego disminuir regresando así a un período muy parecido al original, el cual es el mismo para el tubo lleno de arena que para el tubo vacío.

Para entender los resultados experimentales un poco mejor tenemos que analizar como varia el periodo para los péndulos físicos, ya que el péndulo de masa variable pertenece a este grupo. El periodo de estos varía de la siguiente manera:<sup>1,2</sup>



**Figura 8.-** Gráfica de los períodos del péndulo para los distintos tiempos a medida que el material granular (arena) va cayendo.

Luego repetimos el experimento para diferentes diámetros (Figura 9) y aseguramos nuestros conocimientos.



**Figura 9 -** Gráfica de los períodos de varios péndulos (al cambiarle el diámetro los tomamos como péndulos diferentes) para los distintos tiempos a medida que el material granular (arena) va cayendo.

$$P = 2 \times \Pi \times \sqrt{\frac{I}{m \times g \times d_{cm}}} \quad (4)$$

Podemos entonces explicar porque el periodo aumenta y luego disminuye, esto se debe a que el centro de masa al principio esta en el centro del tubo luego comienza a alejarse del eje de rotación para al final volver al centro.

### III. CONCLUSIÓN

De la comparación entre el fuljo de agua y el flujo de arena podemos concluir que los flujos de los líquidos dependen de la diferencia de presión en la base del tubo, en cambio los flujos de los materiales granulares son constantes en el tiempo.

Comparando flujos de arena a través de orificios con distintos diámetros podemos determinar que la constante de flujo se comporta de manera potencial a medida que aumenta el diámetro del orificio.

Del experimento del péndulo de masa variable se puede apreciar que los resultados experimentales presentan una similitud cualitativa con los que fueron calculados teóricamente; esta similitud implica que la hipótesis relativa a la linealidad del flujo del medio granular para el estudio de este problema mecánico y el modelo del periodo de péndulo como función de la altura de arena<sup>3</sup> utilizado fueron adecuados. En tanto que ciertas otras propiedades de los medios granulares asociadas a su comportamiento no lineal no tienen incidencia en los resultados de la experiencia. Las diferencias cuantitativas (posición y valor de los máximos de período) podrían ser resueltas considerando que esta experiencia fue planificada como una aplicación de la propiedad mencionada de un medio granular.

### REFERENCIAS

1. Salvador Gil, Eduardo Rodríguez. “Física re-Creativa. Experimentos de Física usando nuevas tecnologías”. Editorial Prentice Hall. Buenos Aires, Argentina, 2001.
2. Sears, Zemansky, Young y Freedman, “Física Universitaria”, Volumen 1. Editorial Pearson Educación, México (1999).
3. S. Gil, J. Flores, G. Solovey, “Flow of Sand and a variable mass Atwood machine,” American Journal Physics, 71 (7) p 715-720, (2003)