Supongamos que $f(x+p) > f(x) + c_1 \nabla f(x)^T p$

Definimos $g(t) = f(x+tp)$, $t \in [0,1]$

El único polinomio de grado menor o igual a 2 que interpola estos valores, satisface:

$d_0 = g(0)$, $d_1 = g'(0)$, $d_2 = g(1) - g(0) - g'(0)$

Probar que $d_2 > 0$

$d_2 = g(1) - g(0) - g'(0) = f(x+p) - f(x) - \nabla f(x)^T p$

Por otro lado $f(x+p) - f(x) - c_1 \nabla f(x)^T p > 0$

En particular, cuando $c_1 = 1$, $d_2 > 0$.

Probar que el único mínimo de $p(t)$ es $t^* = \frac{g'(0)}{2d_2}$ y satisface $t^* \in (0,1)$

Para encontrar el mínimo, derivamos

$$p'(t) = d_1 + 2d_2 t$$

$$p'(t) = 0 \iff d_1 + 2d_2 t = 0 \iff t = \frac{-d_1}{2d_2} = \frac{-g'(0)}{2d_2}$$

Para revisar si es mínimo utilizamos la segunda derivada

$p''(t) = 2d_2$, como $d_2 > 0$ t^* es el único mínimo de $p(t)$.

Falta ver que $t^* \in (0,1)$

Como p es una dirección de descenso, $g'(0) < 0$, así $-g'(0) > 0$ y como $d_2 > 0$ $t^* > 0$

Sabemos que $2d_2 = 2[f(x+p) - f(x) - \nabla f(x)^T p]$

$$\begin{aligned}
&= -2\nabla f(x)^T p - 2[f(x) - f(x+p)] \quad p \text{ es dirección de descenso} \\
&\geq -2\nabla f(x)^T p \\
&> -\nabla f(x)^T p \\
&= -g'(0)
\end{aligned}$$