Métodos Computacionales

Taller 5 - Fourier, Integración, ODEs

Profesor: Sebastián Pérez Saaibi

Fecha de Publicación: *Marzo 24 de 2015*

Fecha de Entrega: **Abril 7 de 2015 antes de las 21:59 COT**

Instrucciones de Entrega

Todo el código fuente y los datos se debe encontrar en un repositorio público en github con un commit final hecho antes de la fecha de entrega. El nombre del repositorio debe ser `CM20151_HW5_Apellido1Apellido2`. El link al repositorio lo deben enviar a través de **sicuaplus** antes de la fecha/hora límite.

En cada parte del ejercicio se entrega 1/3 de los puntos si el código propuesto es razonable, 1/3 si se puede ejecutar y 1/3 si entrega resultados correctos.

1. $\boxed{\text{70 pt}}$ **Solucion de la ecuación de Poisson en el espacio de Fourier**

   La ecuación de Poisson (Ec.1) es una de las más comunes en física, debido a que permite relacionar una densidad con un potencial:

   $$\nabla^2\phi = \rho \tag{1}$$

   Dónde ϕ es el potencial y ρ la densidad. Haciendo la transformada rápida de Fourier de la Ec.1 el potencial gravitacional se puede expresar como:

   $$\hat{\phi} = -\hat{\rho} \tag{2}$$

   De esta manera, al hallar la densidad en el espacio de fourier, encontramos el potencial. Para encontrar la solución a la ecuación de Poisson, obtenemos la transformada inversa de este potencial $p\hat{h}i$.

   (a) $\boxed{\text{25 pt}}$ En el archivo `Serena-Venus.txt` se encuentra información acerca de un sistema de partículas. Cada observación representa una particula de masa $M = 1$, donde las columnas 2, 3, 4 corresponden a la posición en X, Y, Z de dicha partícula respectivamente. De esta manera, es posible construir la densidad en el espacio de fourier $\hat{\rho}$. Para esto, es posible construir una matriz de densidades de $1000\times1000\times1000$ en la cual se encuentre la densidad en cada punto, y por lo tanto se pueda hallar el potencial gravitacional en cada punto del espacio. El método para encontrar esta densidad es el siguiente:

   $$\rho_{i,j,k} = \frac{m}{\Delta x\Delta y\Delta z}\sum_{p=1}^{N_p} W(x_i - x_p)W(y_i - y_p)W(z_i - z_p) \tag{3}$$

   Donde $i, j, k = x, y, z$, m es la masa de las partículas en la celda, N_p es el número total de partículas y $W(x)$ está definido por:

   $$W(x) = \begin{cases} 1 + x/\Delta x & -\Delta x < x \\ 1 - x/\Delta x & x < \Delta x \\ 0 & dlc \end{cases}$$

(b) $\boxed{\text{15 pt}}$ Hacer la transformada inversa de Fourirer para el potencial gravitacional $\hat{\phi}$ para encontrar ϕ.

(c) $\boxed{\text{15 pt}}$ Derivar el potencial gravitacional y encontrar la fuerza gravitacional en todos los puntos del espacio.

(d) $\boxed{\text{10 pt}}$ Escribir un codigo en python que encuentre los mínimos y máximos de la fuerza gravitacional. El codigo debe realizar una gráfica en donde se representen los puntos donde están las partículas y en colores la fuerza gravitacional. Adicionalmente, en dicha gráfica debe haber contornos en donde se observe claramente las regiones donde la fuerza es máxima y mínima. A manera de guía, se presenta una ilustración de dicha figura sin contornos:

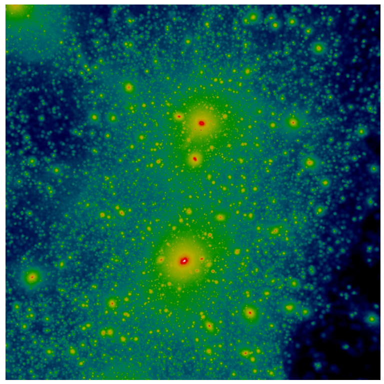

Figura 1: Campo de densidad de Serena-Venus

(e) $\boxed{\text{5 pt}}$ Haga un Makefile que genere todos los outputs descritos anteriormente en el órden adecuado.

2. $\boxed{\text{30 pt}}$ **Integración con el Método del Rechazo**

En un documento `.Rmd`,

(a) $\boxed{\text{12 pt}}$ Implemente una función que calcule una integral utilizando el método del rechazo [1]. La función debe generar una representación visual del cálculo de la integral (ver Fig.2). Para qué tipo de integrales funciona su solución?

(b) $\boxed{\text{8 pt}}$ Evalue la integral de la función $h(x) = [cos(50x) + sin(20x)]^2$ sobre $[0, 1]$ utilizando el método creado anteriormente. Compare su desempeño con algún método de la función `integrate`.

(c) $\boxed{\text{10 pt}}$ Evalue la integral de la función $p(y) = \int_2^{\infty} \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ utilizando el método creado anteriormente. Compare su desempeño con algún método de la función `integrate`.

A manera de ayuda, la siguiente figura es una representación gráfica del método del rechazo:

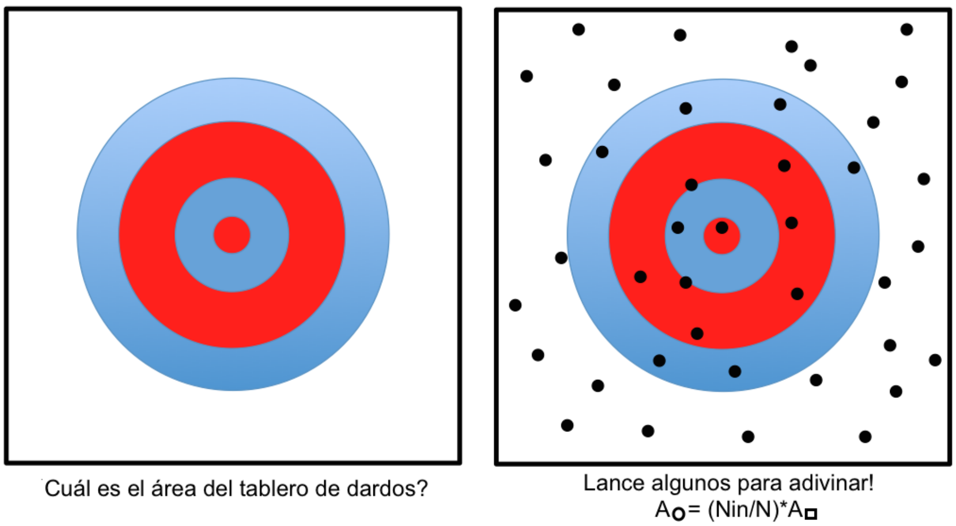

Figura 2: Método de rechazo

[1] Descrito acá: `http://en.wikipedia.org/wiki/Rejection_sampling`