Reto 2 - Análisis Numérico

Andrés Giraldo Gil
a_giraldo@javeriana.edu.co

Erika Alejandra González
gonzalez_erika@javeriana.edu.co

Leonel Steven Londoño
leonel-londono@javeiana.edu.co

20 de abril de 2020

1. Reto de Interpolación

En este reto se desarrolla un programa que permita recrear una figura en el espacio con la menor cantidad de puntos, para efectos de la practica se recreara un mortero valenciano. La solución se lleva a cabo usando curvas y superficies de Bezier.

Descripción del problema: El problema consiste en que mediante métodos de interpolación se logre modelar un objeto 3D dado unos puntos de control, para este problema se usará el método de Bézier y se iniciará graficando una curva con dichos puntos que posteriormente será proyectada en el eje Z y replicada en cada uno de los otros cuadrantes.

1.1. Metodología y métodos utilizados

Método de Bézier: Es un método de interpolación que permite mediante unos puntos de control dados la modelizacion de curvas y superficies sin necesidad de tener inicialmente la totalidad de puntos que componen dicha curva.

Interpolación por Splines: Para el ajuste de curvas los splines se utilizan para aproximar formas complicadas. Debido a su facilidad de computo, es muy utilizado en informática para la representación de curvas.

1.2. Marco Teórico

Curvas de Bézier: Es un sistema que se desarrolló hacia los años 1960, fue pensado para el trazado de dibujos técnicos, se usa especialmente en el diseño aeronáutico y de carros [1]. Fue propuesto por Pierre Etienne Bézier, quien fue jefe de diseño y producción de automóviles Renault durante la mayor parte de su vida profesional. Su investigación comenzó sobre el diseño y la fabricación asistidos por computadora en 1960, desarrollando así herramientas interactivas para el diseño de curvas y superficies, e inició el fresado generado por computadora para el modelado de automóviles [2]. Actualmente en el diseño computacional, las curvas de Bézier son de gran importancia. Al trazar una línea que conecte todos los puntos de control, se obtiene el polígono de control, tiene el nombre de polígono debido a que es una versión poligonal de la curva deseada.

Propiedades de la curva de Bézier:

- La curva de Bézier se encuentra en el interior de la envolvente convexa de los puntos de control.
- La curva de Bézier es infinitamente derivable.
- El control de la curva es global. Modificar un punto de control implica modificar completamente la curva.
- Para efectuar una transformación afín de la curva es suficiente efectuar la transformación sobre todos los puntos de control.
- La curva comienza en el punto P_0 y termina en el P_n. Esta peculiaridad es llamada interpolación del punto final.
- La curva es un segmento recto si, y solo si, todos los puntos de control están alineados.

Casos de curvas de Bézier: Existen tres grados para las curvas de Bézier, los cuales se encuentran a continuación:

- **Curvas líneales de Bézier:** Dados los puntos P_0 y P_1 la curva de Bézier es una línea recta entre los dos puntos:
  $\mathrm{B(t)} = \mathrm{P}_0 + (\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})t = (1-t)\mathbf{P_0} + t\mathbf{P_1}$, $t \in [0,1]$.
- **Curvas cuadráticas de Bézier:** Es el camino trazado por la función $B(t)$, dados los puntos: P_0, P_1, y P_2:
  $\mathrm{B(t)} = (1-t)^2\ \mathrm{P}_0 + 2t(1-t)\mathbf{P_1} + \mathrm{t}^2\ \mathrm{P}_2$, $t \in [0,1]$.
- **Curvas cúbicas de Bézier:** Cuatro puntos del plano o del espacio tridimensional, P_0, P_1, P_2 y P_3 definen una curva cúbica de Bézier. La curva comienza en el punto P_0 y se dirige hacia P_1 y llega a P_3 viniendo de la dirección del punto P_2. La forma paramétrica de la curva es:
  $\mathrm{B(t)} = \mathrm{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1 t(1-t)^2} + \mathbf{3P_2 t^2(1-t)} + \mathbf{P_3 t^3}$, $t \in [0,1]$.

Generalizacion: Cuando se generalizan las curvas de Bézier pasan a ser curvas Spline, es decir, la curva de Bézier es una curva Spline de tercer grado, la curva de n grado de Bézier se generaliza de la siguiente manera: $\mathrm{B(t)}=\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\mathbf{P}_i(1-t)^{n-i}t^i = \mathbf{P}_0(1-t)^n + \binom{n}{1}\mathbf{P}_1(1-t)^{n-1}t + \cdots + \mathbf{P_n t^n}$, $t \in [0,1]$.

Interpolación de Splines: En el campo de análisis numérico, un spline es una curva diferenciable definida en funciones mediante polinomios, es decir, una función spline está formada por varios polinomios, cada uno definido sobre un subintervalo, que se unen entre sí obedeciendo a ciertas condiciones de continuidad [3]. En R utilizamos la función de Spline la cual usa bastantes métodos de interpolación, entre ellos están: FMM (*Forsythe, Malcolm and Moler*), Natural, Periódico, monoH.FC, entre otros. Para el desarrollo de este problema, se utilizó Spline para poder realizar una comparativa entre el método de Bézier y por medio de Splines. Meidante estos dos se calcula el error.

1.3. Análisis y desarrollo

Para las curvas de bezier, es necesario hacer uso de unos puntos de control que tendrán la finalidad de orientar la curva deseada, entre mayor sea el orden de la curva, mayor deberán de ser los puntos de control para tener una precisión acorde a la misma. En la figura 1 se puede observar una curva de orden 4 y la cantidad de puntos requerida para la misma.

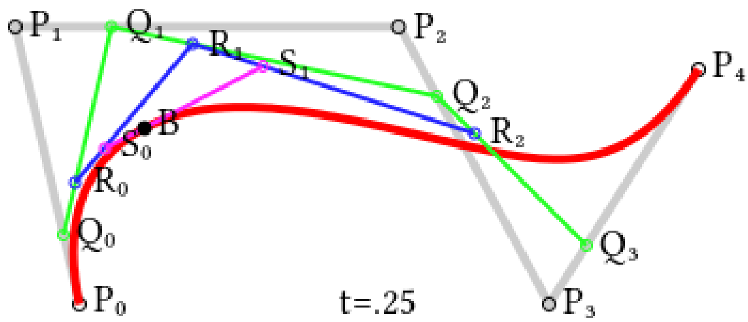

Figura 1: Curva de Bézier de orden 4

Librerías usadas

- Bezier
- GridBezier
- PolynomF
- rgl
- plot3D

Para el problema a solucionar en este caso no es necesario hacer uso de un grado muy alto de curvas de Bézier, debido a la simplicidad de la misma. Para esto se implementó un algoritmo en R que mediante determinadas coordenadas, haciendo uso de la librerias ya mencionadas, inicialmente se obtuvieran todos los puntos que serán usados para el modelamiento 3D, una vez obtenidos se procede a realizar la profundidad de la taza la cual se realiza disminuyendo las coordenadas en Z y a su vez las de X y de Y. Para así, lograr realizar un modelado 3D de una figura con forma de taza. Dicha taza debía tener un grosor el cual es también realizado mediante las coordenadas dadas inicialmente.

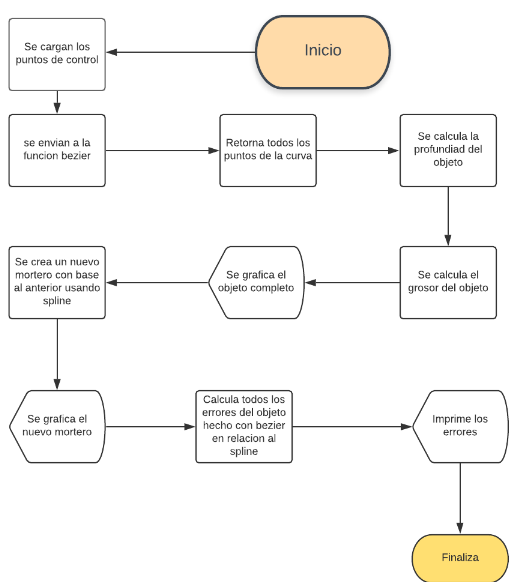

Figura 2: Diagrama de Flujo

1.4. Resultados

Datos de entrada

x	y	z
0	9	4
0.99	8.95	4
4.78	7.63	4
8.91	1.24	4
9	0	4

Tabla 1: Puntos de control Bézier

Como se puede observar en la tabla 1, se dan los puntos de control que serán usados para la solución de este problema y que permitirán el modelado 3D de la taza. Después de obtener esta curva y aplicar la funcion *bezier* se obtiene una matriz con los puntos que se usará para graficar uno de los cuadrantes del objeto y posteriormente duplicarlo en cada uno de los cuadrantes restantes.

Datos de salida
Con los puntos obtenidos de la tabla 1 se grafica en el eje x,y la posición de cada uno de ellos para poder observar de manera más grafica la ubicación de cada uno de ellos y la curva que será generada a partir del metodo de Bézier.

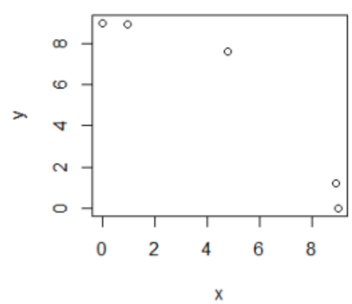

Figura 3: Grafico puntos de control

Como se observa en la figura 3 se grafica cuadrante a cuadrante con base al primero.

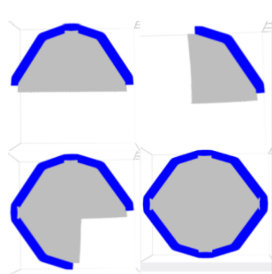

Figura 4: Modelado de taza. Cuadrante a Cuadrante

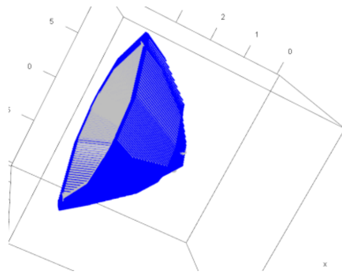

Figura 5: Modelado de taza

Por otro lado se realiza el modelamiento de un segundo mortero usando Splines, dichos splines estaran basados en los puntos del primer mortero calculado con bezier.

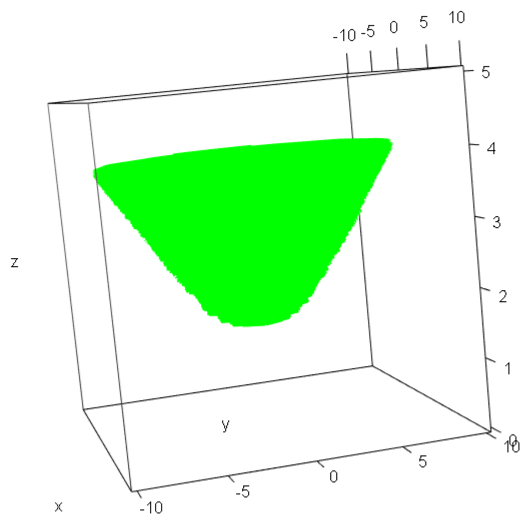

Figura 6: Segundo mortero hecho con splines del primero

Para mostrar mejor los resultados obtenidos en este reto, en la siguiente imagen se pueden observar ambos morteros en la misma grafica.

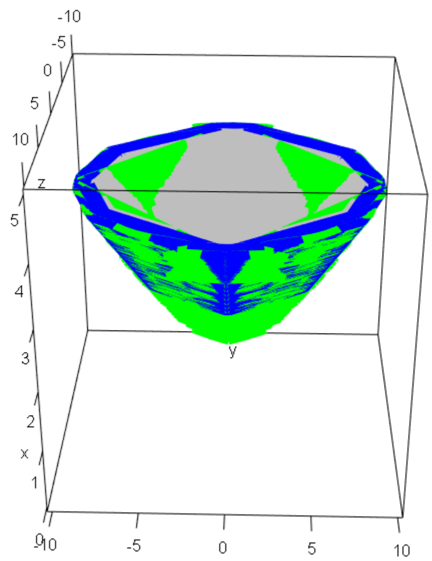

Figura 7: Morteros obtenidos en el Reto

Como se pudo observar en la grafica anterior, los dos morteros se encuentran uno encima del otro, el mortero azul representa al original y el mortero verde el generado por los splines del primero, tambien se observa que los splines alargan un poco mas el mortero verde, esto se debe a que los splines no tienen en cuenta la curvatura de la base que se le dio al mortero original.

1.5. Tabla de puntos Resultantes de los morteros

Distancia punto Original	Distancia punto Nuevo	Error Absoluto	Error Relativo
9.848858	9.848858	0	0
9.847093	9.838322	0.008770548	0.0008906739
9.845491	9.843035	0.002455736	0.0002494275
9.844051	9.839785	0.004266647	0.0004334238
9.842775	9.813732	0.02904256	0.002950648
9.841661	9.773207	0.06845392	0.006955526
9.84071	9.728734	0.1119752	0.01137878
9.839921	9.688846	0.1510753	0.0153533
9.839296	9.657431	0.1818651	0.01848355
9.838834	9.637575	0.2012587	0.02045555
9.838535	9.632211	0	0
9.838399	9.644093	0.008770548	0.0008906739
9.838426	9.674972	0.002455736	0.0002494275
9.838616	9.718836	0.004266647	0.0004334238
9.838969	9.765742	0.02904256	0.002950648
9.839485	9.806255	0.06845392	0.006955526
9.840164	9.831612	0.1119752	0.01137878
9.841006	9.833902	0.1510753	0.0153533
9.842011	9.805332	0.1818651	0.01848355
9.843179	9.738003	0.2012587	0.02045555
9.844509	9.626479	0	0
9.846002	9.46918	0.008770548	0.0008906739

Sigue en la página siguiente.

Distancia punto Original	Distancia punto Nuevo	Error Absoluto	Error Relativo
9.847658	9.270169	0.002455736	0.0002494275
9.849477	9.042421	0.004266647	0.0004334238
9.851458	8.836266	0.02904256	0.002950648
9.844865	8.72429	0.06845392	0.006955526
9.813733	8.739447	0.1119752	0.01137878
9.785188	8.878824	0.1510753	0.0153533
9.759255	9.135242	0.1818651	0.01848355
9.735954	9.539433	0.2012587	0.02045555
9.715303	9.978009	0	0
9.697321	10.03203	0.008770548	0.0008906739
9.682021	9.848858	0.002455736	0.0002494275
9.669416	9.815798	0.004266647	0.0004334238
9.659518	9.823227	0.02904256	0.002950648
9.652334	9.804609	0.06845392	0.006955526
9.64787	9.768502	0.1119752	0.01137878
9.64613	9.724146	0.1510753	0.0153533
9.647116	9.680438	0.1818651	0.01848355
9.650827	9.643369	0.2012587	0.02045555
9.657259	9.617153	0	0
9.666407	9.605792	0.008770548	0.0008906739
9.678264	9.613055	0.002455736	0.0002494275
9.69282	9.641988	0.004266647	0.0004334238
9.710062	9.687286	0.02904256	0.002950648
9.729976	9.736977	0.06845392	0.006955526
9.752546	9.779552	0.1119752	0.01137878
9.777754	9.804371	0.1510753	0.0153533
9.805578	9.801884	0.1818651	0.01848355
9.835997	9.762865	0.2012587	0.02045555
9.793704	9.678944	0	0
9.683029	9.545236	0.008770548	0.0008906739
9.580943	9.362167	0.002455736	0.0002494275
9.487724	9.138079	0.004266647	0.0004334238
9.403634	8.901169	0.02904256	0.002950648
9.328921	8.733394	0.06845392	0.006955526
9.263812	8.696534	0.1119752	0.01137878
9.208511	8.801288	0.1510753	0.0153533
9.163194	9.035966	0.1818651	0.01848355
9.128011	9.421797	0.2012587	0.02045555
9.10308	9.897077	0	0
9.088484	10.01162	0.008770548	0.0008906739
9.084273	9.823197	0.002455736	0.0002494275
9.090463	9.797533	0.004266647	0.0004334238
9.10703	9.79355	0.02904256	0.002950648
9.133921	9.792109	0.06845392	0.006955526
9.171042	9.792371	0.1119752	0.01137878
9.218271	9.795574	0.1510753	0.0153533
9.275454	9.802617	0.1818651	0.01848355
9.342407	9.798178	0.2012587	0.02045555
9.418922	9.777938	0	0
9.504769	9.747795	0.008770548	0.0008906739
9.599697	9.713793	0.002455736	0.0002494275
9.703439	9.681905	0.004266647	0.0004334238

Sigue en la página siguiente.

Distancia punto Original	Distancia punto Nuevo	Error Absoluto	Error Relativo
9.815716	9.656448	0.02904256	0.002950648
9.842892	9.637184	0.06845392	0.006955526
9.840193	9.623082	0.1119752	0.01137878
9.837748	9.613119	0.1510753	0.0153533
9.83556	9.606289	0.1818651	0.01848355
9.833628	9.601684	0.2012587	0.02045555
9.831952	9.598756	0	0
9.830533	9.597048	0.008770548	0.0008906739
9.82937	9.596118	0.002455736	0.0002494275
9.828464	9.595534	0.004266647	0.0004334238
9.827814	9.595264	0.02904256	0.002950648
9.827421	9.597405	0.06845392	0.006955526
9.827285	9.604728	0.1119752	0.01137878
9.827406	9.619913	0.1510753	0.0153533
9.827783	9.645548	0.1818651	0.01848355
9.828417	9.683113	0.2012587	0.02045555
9.829308	9.72597	0	0
9.830456	9.763837	0.008770548	0.0008906739
9.83186	9.786755	0.002455736	0.0002494275
9.83352	9.785208	0.004266647	0.0004334238
9.835436	9.751179	0.02904256	0.002950648
9.837609	9.68776	0.06845392	0.006955526
9.840038	9.604859	0.1119752	0.01137878
9.842722	9.512137	0.1510753	0.0153533
9.845662	9.418704	0.1818651	0.01848355
9.848858	9.332938	0.2012587	0.02045555

Tabla 2: Distancia de los 100 primeros puntos al origen y sus errores

La tabla anterior muestra los 100 primeros puntos tanto del mortero inicial hecho con las curvas de bezier, como el segundo mortero hecho con splines a partir del primero. Los valores de las dos primeras columnas representan la distancia que hay de ese punto al origen del espacio, esta distancia esta dada por la formula.

$$distancia = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \tag{1}$$

Donde x, y, z representan las coordenadas de ese punto en el espacio.

Una vez se calcula la distancia de ambos puntos se procede a calcular el error tanto absoluto como relativo que hay entre los dos puntos.

Finalmente despues de calcular las n-mil distancias de los puntos, se obtiene el error promedio de la solucion, dichos errores se obtuvieron de la siguiente manera:

$$errorAbsoluto = |distanciaDelPuntoOriginal - distanciaDelPuntoNuevo| \tag{2}$$

$$errorAbsoluto = |distanciaDelPuntoOriginal - distanciaDelPuntoNuevo|/distanciaDelPuntoOriginal \tag{3}$$

Los errores finales dieron como resultado:

Error Absoluto Promedio = 2.470385e-07
Error Relativo Promedio = 2.510734e-08

Referencias

[1] Bourke, P. Bézier curves. Disponible en: http://astronomy.swin.edu.au/ pbourke/curves/bezier/

[2] Richard, L. Douglas, J. Numerical Analysis 9th Edition. Youngstown State University. 2010

[3] James, C. Multi-variable curve interpolation, ACM, 1964.

[4] Dr Thomas Sederberg, BYU Bézier curves, Disponible en:
https://web.archive.org/web/20060221000535/http://www.tsplines.com/resources/class$_{n}otes/Bezier_{c}urves.pdf$