Taller Interpolación

Karen Celis
David López
Camilo Muñoz

Marzo 2019

1. Primer punto

1.1. Problema

Dados n+1 nodos distintos, demuestre que el polinomio interpolante es único.

1.2. Solución

Sean x1, x2, . . ., xn algunos números diferentes por pares y sean y1, y2. . ., yn algunos números. Entonces existe un único polinomio P de grado (Grado n1) tal que: P(xj) = yj (j=1, . . . , n).

Las incognitas del problema son los coeficientesc0, . . . , cn1del polinomioP:
(x) =c0+c1x+. . .+cn1xn1=n1j=0cjxj.

2. Segundo punto

2.1. Problema

Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado. los siguientes datos para el nitrógeno :
Donde:

T	100	200	300	400	450	500	600
B(cm3/mol)	-160	-35	-4.2	9.0	?	16.9	21.3

a. Determine un polinomio interpolante para este caso(escriba el polinomio)
b. Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente virial a 450K
c. Grafique los puntos y el polinomio que ajusta
d. Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante

El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la *ecuación virial de estado*

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + \ldots,$$

donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal. Los coeficientes B $C(T)$,... son el segundo y tercer coeficiente virial, respectivamente. En la práctica se usa la serie truncada

$$\frac{PV}{RT} \approx 1 + \frac{B}{V}$$

Figura 1: Comportamiento virial

e. Grafique los puntos y el polinomio interpolante de Lagrange
f. ¿Cuál es el segundo y tercer coeficiente virial a 450K?. con el método de Lagrange
g. Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), cuál de las tres aproximaciones es mejor por qué?

2.2. Solución

2.2.1. Solución a

Polinomio obtenido al utilizar la función "poly.calc"de la librería "PolynomF". No se utilizo el primero punto (100,-160) ya que se considero un punto atipico, causando que no se genere el polinomio de manera correcta

$$y = (-4{,}9375E-08)x^4 + (8{,}0175E-05)x^3 - (4{,}6781E-02)x^2 + 11{,}67475x - 1061{,}1 \quad (1)$$

2.2.2. Solución b

Al evaluar el polinomio con x = 450 dio como resultado 0.59765625

2.2.3. Solución c

Se gráfico tanto datos reales (cuadrados rojos) como los datos interpolados (puntos azules)

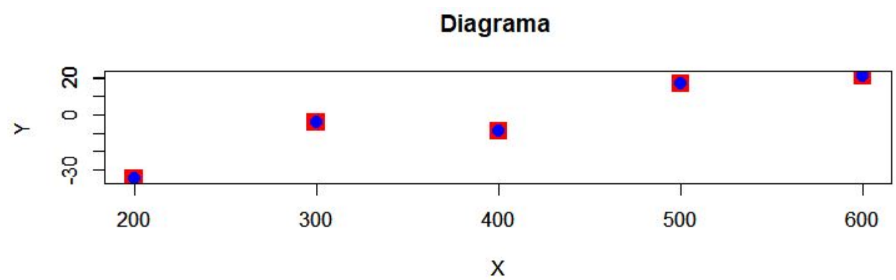

Figura 2: Datos reales vs interpolados

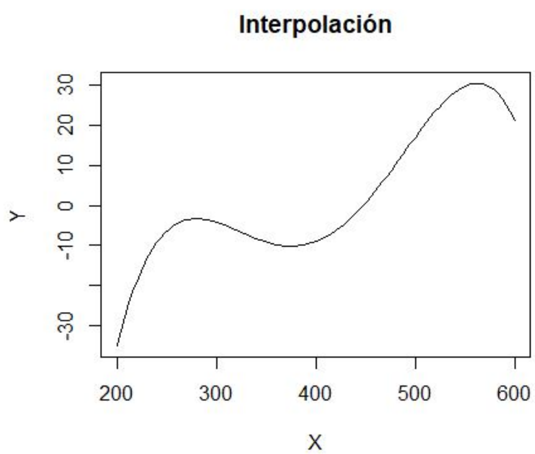

Figura 3: Interpolación

2.2.4. Solución d

Utilizando la interpolación de lagrange se obtiene la siguiente tabla de datos

$$L_0 = \frac{(x-300)(x-400)(x-500)(x-600)}{(200-300)(200-400)(200-500)(200-600)} \tag{2}$$

$$L_1 = \frac{(x-200)(x-400)(x-500)(x-600)}{(300-200)(300-400)(300-500)(300-600)} \tag{3}$$

$$L_2 = \frac{(x-200)(x-300)(x-500)(x-600)}{(400-200)(400-300)(400-500)(400-600)} \tag{4}$$

$$L_3 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-600)}{(500-200)(500-300)(500-400)(500-600)} \tag{5}$$

$$L_4 = \frac{(x-200)(x-300)(x-400)(x-500)}{(600-200)(600-300)(600-400)(600-500)} \quad (6)$$

Seguido de tener los L, se procede a multiplicar con su respectivo y. Para terminar se suma todas las L, dando como resultado el polinomio:

$$y = (-4{,}3750E-09)x^4 + (8{,}175E-06)x^3 - 0{,}00583x^2 + 1{,}95475x - 251{,}1 \quad (7)$$

2.2.5. Solución e

Al graficar los puntos obtenidos por Lagrange se obtiene la imagen 7

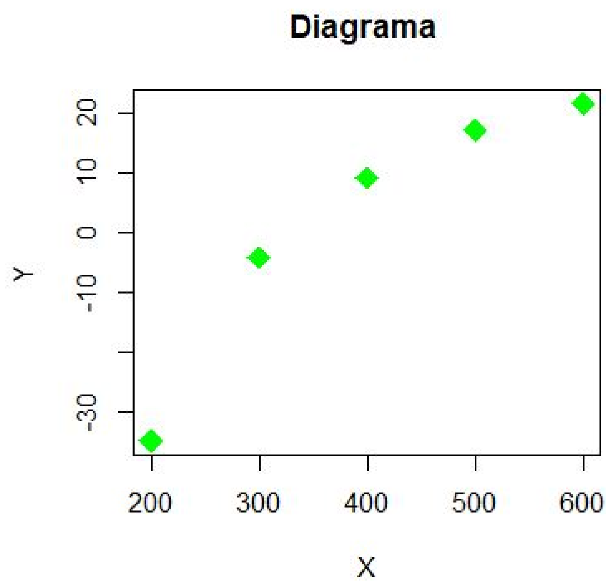

Figura 4: Interpolación Lagrange

2.2.6. Solución f

Al evaluar el polinomio obtenido por Lagrange con x = 450 dio como resultado 13.5

2.2.7. Solución g

Al realizar la interpolación por diferentes métodos se puede mirar los cambios que tienen estos métodos y cual de ellos es mas cercano a los datos reales.

	DatosReales	Interpolados	Lagrange
200	-35.0	-35.0	-35.0
300	-4.2	-4.2	-4.1
400	-9.0	-9.0	9.2
450	?	0.6	13.5
500	16.9	16.9	17.2
600	21.3	21.3	21.7

Al ver la tabla comparativa de los datos obtenidos por los interpolaciones anteriores, podemos notar como la interpolación común representa correctamente el comportamiento de los datos reales. Por otro lado, por medio de la interpolación de lagrange se puede notar que si bien llega a tener unos puntos muy cercanos a los reales (problemas dados por errores de redondeo de valores), existen otros puntos los cuales se alejan bastante de los datos verdaderos.

Se puede apreciar mejor esto al graficar todos los métodos.

Con esto podemos decir que el mejor método de interpolación es por el método común de interpolación.

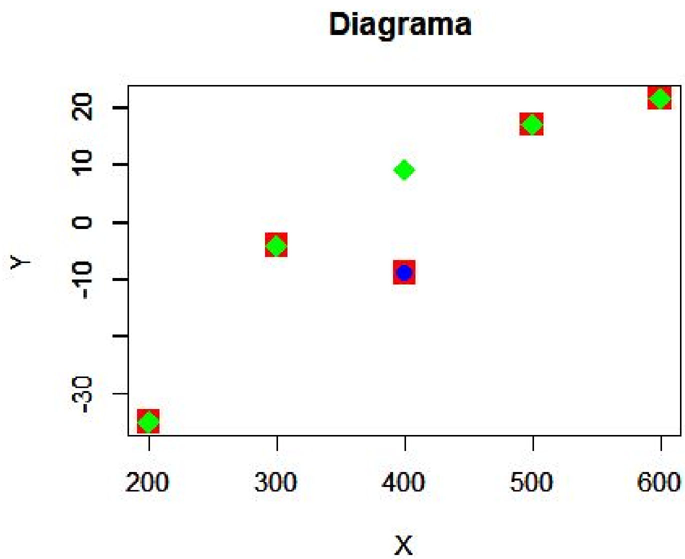

Figura 5: Comparación entre diferentes métodos de interpolación. Lagrange(verde), azul datos obtenidos por interpolación y los datos reales(rojos)

3. Tercer punto

3.1. Problema

Sea

$$f(x) = (e)x^2 en[0,1] \tag{8}$$

a. Tabular varios puntos y graficuelos
b. Interpolar con el método de Lagrange
c. Utilizando 8 cifras decimales o más, en cada entrada, determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^-6

3.2. Solución

Puntos

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	1	1.2214028	1.4918247	1.8221188	2.2255409	2.7182818

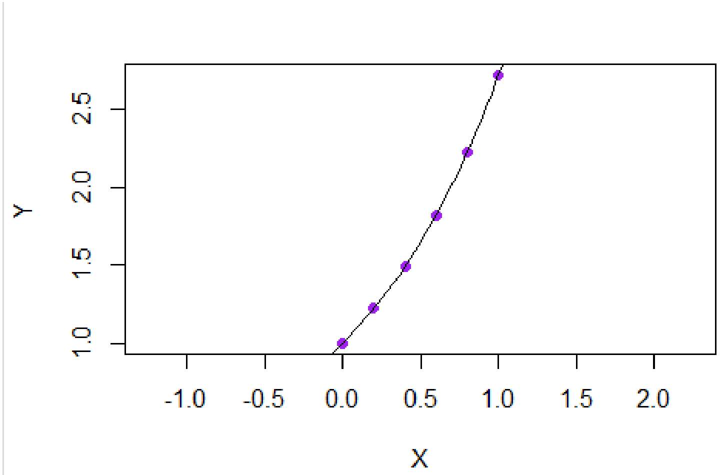

Figura 6: Grafica punto 3

4. Cuarto punto

4.1. Problema

En la tabla que sigue aparece las estadísticas de un curso con la cantidad de estudiantes en cada rango de notas.

Rango de notas:	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
N Estudiantes:	35	48	70	40	22

a. Estime la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55. Utilice ajuste polinómico
b. Estime la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55. Utilice ajuste de Lagrange

4.2. Solución

-Error con Ajuste Polinomial: 0.002
-Error con Lagrange: 0
-Valor teórico: 120
-Valor obtenido con ajuste polinomial: 119.998
-Valor obtenido con Lagrange:120

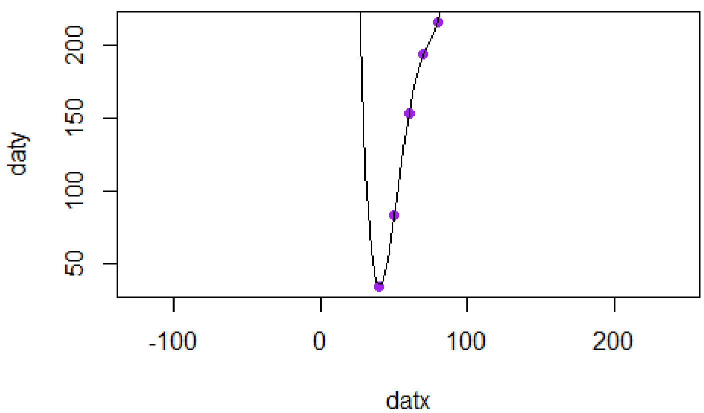

Figura 7: Gráfica punto 4

5. Sexto punto

5.1. Problema

Utilice el polinomio de Taylor para interpolar

$$f(x) = e^x \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{10}$$

a. Implemente un código en R para la solución del problema con 5 cifras
b. Escriba el polinomio resultante en cada caso
c. Considera que el polinomio es un buen interpolador, justifique su respuesta

5.2. Solución

5.2.1. Solución a

Ver punto6.R

5.2.2. Solución b

El polinomio obtenido para la función (9) es

$$p(x) = 0{,}04167x^4 + 0{,}16667x^3 + 0{,}5x^2 + x1 \tag{11}$$

Donde se puede ver el comportamiento en la gráfica 8
Se puede ver en la gráfica en color rojo el valor original dado por la función 9.

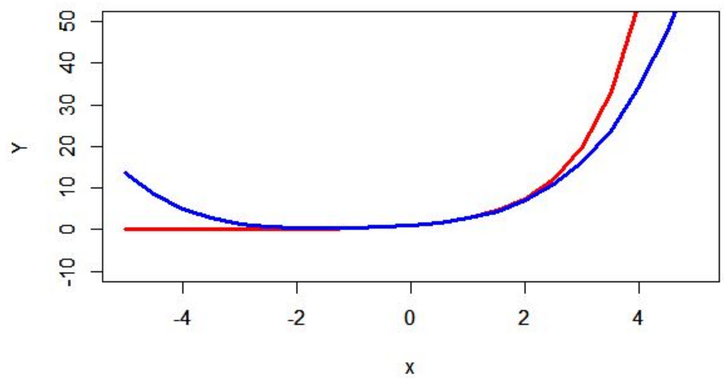

Figura 8: Gráfica de función (9)

En color azul esta aquellos valores obtenidos al utilizarse el polinomio interpolante.
La gráfica anterior, corresponde a los valores expresados en la tabla visible en la figura 9:
Donde la primera columna representa un rango en x, la segunda columna los

x	round.yfuncion..digits...5.	round.ypolinomio..digits...5.
-5.0	0.00674	13.70827
-4.5	0.01111	8.52339
-4.0	0.01832	4.99997
-3.5	0.03020	2.73175
-3.0	0.04979	1.37499
-2.5	0.08208	0.64843
-2.0	0.13534	0.33333
-1.5	0.22313	0.27344
-1.0	0.36788	0.37500
-0.5	0.60653	0.60677
0.0	1.00000	1.00000
0.5	1.64872	1.64844
1.0	2.71828	2.70833
1.5	4.48169	4.39844
2.0	7.38906	7.00000
2.5	12.18249	10.85677
3.0	20.08554	16.37499
3.5	33.11545	24.02343
4.0	54.59815	34.33331
4.5	90.01713	47.89840
5.0	148.41316	65.37495

Figura 9: Tabla de función (9)

valores que se logran obtener al reemplazar la x en la función (en este caso la función 9) y la ultima columna corresponde el valor del polinomio obtenido gracias al polinomio de Taylor.

En cuanto al polinomio para la función (10) no se logra obtener por medio de este método, esto debido a que al ejecutar la función de taylor esta retorna valores indeterminados con lo cual no se puede obtener el polinomio interpolador.
Se puede ver en la gráfica en color rojo el valor original dado por la función 10.

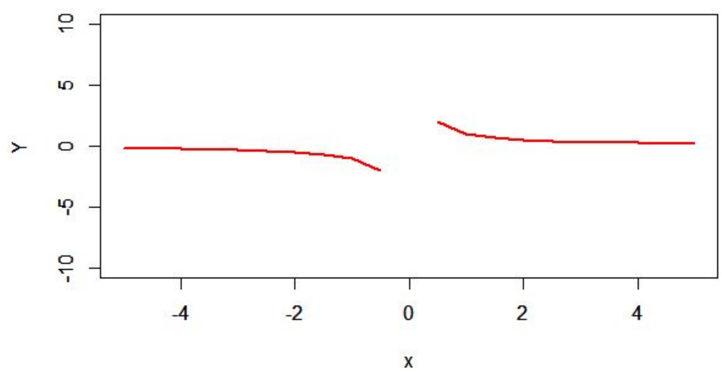

Figura 10: Gráfica de función (10)

La gráfica anterior, corresponde a los valores expresados en la tabla visible en la grafica 9:

x	round.yfuncion..digits...5.	round.ypolinomio..digits...5.
-5.0	-0.20000	NaN
-4.5	-0.22222	NaN
-4.0	-0.25000	NaN
-3.5	-0.28571	NaN
-3.0	-0.33333	NaN
-2.5	-0.40000	NaN
-2.0	-0.50000	NaN
-1.5	-0.66667	NaN
-1.0	-1.00000	NaN
-0.5	-2.00000	NaN
0.0	Inf	NaN
0.5	2.00000	NaN
1.0	1.00000	NaN
1.5	0.66667	NaN
2.0	0.50000	NaN
2.5	0.40000	NaN
3.0	0.33333	NaN
3.5	0.28571	NaN
4.0	0.25000	NaN
4.5	0.22222	NaN
5.0	0.20000	NaN

Figura 11: Tabla de función (10)

5.2.3. Solución c

Al ver las gráficas podemos decir que el polinomio no es un buen interpolador, esto debido a que no se logra representar el comportamiento de la función original por medio del polinomio.
Si bien se logran ver algunas regiones (puntos) donde se llega a ser el polinomio bastante cercano a la función original, en otras regiones se aleja bastante los valores originales. Se puede ver esto en la función (9) evaluado en x= - 5, donde el error relativo entre ambos datos es 2032.86, siendo este el máximo en ese intervalo; por otro lado en x=0 se tiene un error relativo de 0.
En cuanto a la función (10), al ser una función con una asíntota en el punto x= 0 esta no llega a ser representada por el polinomio, de manera que no el polinomio interpolante no llega a expresar correctamente la función.
En conclusión, se puede considerar usar un polinomio al interpolar en los casos de que no tenga una asíntota. Aun así, esto no asegura que se llega a expresar el comportamiento de la función con el polinomio.

6. Séptimo punto

6.1. Problema

Se desea aproximar la función tan(x) en el intervalo [-pi/2, pi/2].
a. Considerar como nodos de interpolación los puntos

$$x_k = k.\alpha \tag{12}$$

para k=0, +-1, +-2, +-3, precisamente en este orden. Utilice una interpolación polinómica y escriba el polinomio resultante.
b. Grafique por lo menos 10 puntos y el polinomio resultante
c. Utilice el método de Lagrange 150 intervalos. ¿Cuál es el error máximo apreciado en la tabla de valores?
d. Determine el alpha que minimice el error máximo. Explicar el procedimiento seguido en su determinación, y demuestre su resultado

6.2. Solución

6.2.1. Solución a

Se espera tener 7 puntos en el intervalo (-pi/2, pi/2), por lo que opto por sumar los valores absolutos con el fin de obtener el rango de esto, el cual es Pi. Al obtener este rango, se opta por dividirlo por 6, con el fin de encontrar el intervalo entre cada punto para realizarse la secuencia.

x	-pi/2	-pi/3	-pi/6	0	pi/6	pi/3	pi/2
Tan(x)	-1.633E+16	-1.732	-5.774E-01	0	5.774E-01	1.732	1.633E+16

Gracias a estos puntos se logro el siguiente polinomio:

$$y = -1{,}625x^6 + (3{,}458E{+}15)x^5 + 5{,}5x^4 - (4{,}7404E{+}15)x^3 - 1{,}5x^2 + (1{,}0397E{+}15)x \quad (13)$$

6.2.2. Solución b

En esta sección, se obtuvo los puntos de la misma manera que el anterior, solo que en este caso se dividió por 10. Dando como resultado lo visto en la gráfica 12

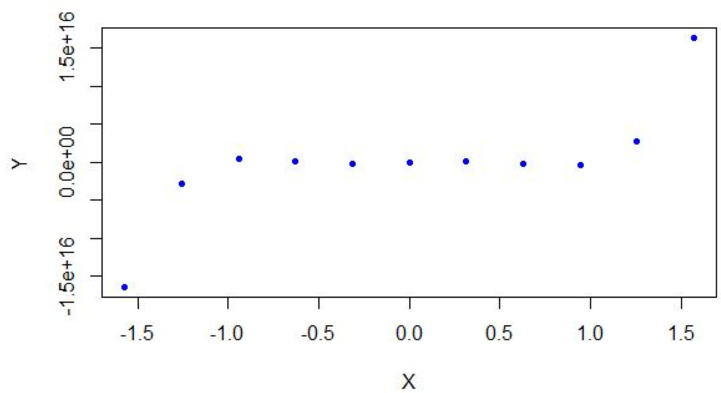

Figura 12: Gráfica puntos

Por otro lado, se realizo la interpolación con cada punto en el intervalo (-pi/2, pi/2), dando como resultado la gráfica 13

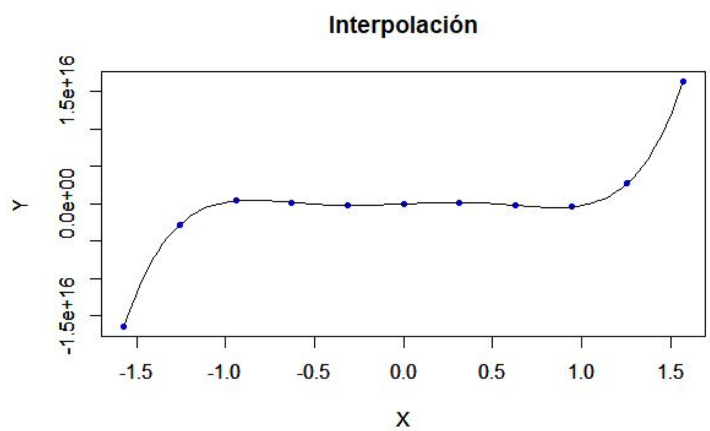

Figura 13: Gráfica interpolación

7. Referencias

[1] Álgebra lineal. Universidad Carlos III de Madrid [online]. Tomado de:
http://ocw.uc3m.es/matematicas/algebra-lineal/ampliacion/algebra$_a mpliacion_0 2.pdf$[2]$Existenciayunicidad$
$http : //esfm.egormaximenko.com/numerical_m ethods/polynomial_i nterpolation_t heorem_w ith_V andermonde_e$