Análisis Matemático II - Tarea 7

Fecha límite: domingo 21 de noviembre a las 23:59 horas

Andrés Casillas García de Presno

1. **Desigualdad de interpolación.** Sean $1 \leq p < s < r \leq \infty$. Prueba que, si $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, entonces $f \in L^s(\Omega)$ y se cumple que

$$\|f\|_s \leq \|f\|_p^{1-\alpha} \|f\|_r^{\alpha},$$

donde $\alpha \in (0,1)$ satisface que $\frac{1}{s} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{r}$ si $r < \infty$ y $\alpha := 1 - \frac{p}{s}$ si $r = \infty$.

Solución

Caso 1: $r < \infty$

Veamos que

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\frac{p}{(1-\alpha)}} + \frac{1}{\frac{r}{\alpha}}$$

donde $s, \frac{p}{(1-\alpha)}, \frac{r}{\alpha} \in [1, \infty)$ pues $\alpha < 1 \leq r$ y $(1-\alpha) < 1 \leq p$.

Como $f \in L^p(\Omega)$ entonces $|f|^{(1-\alpha)} \in L^{\frac{p}{(1-\alpha)}}(\Omega)$ pues $||f|^{(1-\alpha)}|^{\frac{p}{(1-\alpha)}} = |f|^{(1-\alpha)\frac{p}{(1-\alpha)}} = |f|^p$ es integrable.

Análogamente, dado que $f \in L^r(\Omega)$ tenemos que $|f|^\alpha \in L^{\frac{r}{\alpha}}(\Omega)$.

Así, por el ejercicio 2, sabemos que $|f|^{(1-\alpha)}|f|^\alpha = |f| \in L^s(\Omega)$, es decir, $||f||^s$ es integrable en Ω, pero $||f||^s = |f|^s$, de forma que $f \in L^s(\Omega)$.

Dado que $\||f|\|_q = \|f\|_q$ para toda $q \in [1, \infty]$, tenemos, por el ejercicio 2, que

$$\|f\|_s \leq \||f|^{(1-\alpha)}\|_{\frac{p}{(1-\alpha)}} \||f|^\alpha\|_{\frac{r}{\alpha}} \tag{1}$$

donde

$$\||f|^{(1-\alpha)}\|_{\frac{p}{(1-\alpha)}} = \left[\int_\Omega ||f|^{(1-\alpha)}|^{\frac{p}{(1-\alpha)}} \right]^{\frac{(1-\alpha)}{p}} = \left[\int_\Omega |f|^p \right]^{\frac{(1-\alpha)}{p}} = \|f\|_p^{(1-\alpha)}$$

y análogamente

$$\||f|^\alpha\|_{\frac{r}{\alpha}} = \left[\int_\Omega ||f|^\alpha|^{\frac{r}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{r}} = \left[\int_\Omega |f|^r\right]^{\frac{\alpha}{r}} = \|f\|_r^\alpha$$

Sustituyendo en (1) tenemos que

$$\|f\|_s \leq \|f\|_p^{(1-\alpha)}\|f\|_r^\alpha$$

<u>Caso 2:</u> $r = \infty$

Como $f \in L^\infty(\Omega)$ y $(s-p) > 0$ entonces $|f|^{s-p} \in L^\infty(\Omega)$. Además, como $f \in L^p(\Omega)$ entonces $|f|^p$ es integrable en Ω, es decir, $|f|^p \in L^1(\Omega)$. Por la desigualdad de Holder (proposición 14.21) aplicada a $|f|^{s-p}$ y $|f|^p$ tenemos que

$$|f|^{s-p}|f|^p \in L^1(\Omega)$$

i.e.

$$|f|^s \in L^1(\Omega)$$

es decir es integrable en Ω, de forma que $f \in L^s(\Omega)$. Además, dicho resultado nos dice que

$$\||f|^s\|_1 \leq \||f|^{s-p}\|_\infty \||f|^p\|_1$$

donde

$$\||f|^s\|_1 = \int_\Omega |f|^s = \|f\|_s^s$$

$$\||f|^p\|_1 = \int_\Omega |f|^p = \|f\|_p^p$$

$$\||f|^{s-p}\|_\infty = \inf\{c \in \mathbb{R} : |f(x)|^{s-p} \leq c \quad p.c.t.x \in \Omega\}$$

Veamos que si $k = \|f\|_\infty$ entonces $k^{s-p} = \||f|^{s-p}\|_\infty$.

Como $s-p>0$, entonces

$$|f(x)| \leq k \iff |f(x)|^{s-p} \leq k^{s-p} \quad p.c.t. x \in \Omega$$

Ahora bien, supongamos que k^{s-p} no es el ínfimo de $|f|^{(s-p)}$ p.c.t. $x \in \Omega$. Entonces existe un k' tal que

$$|f(x)|^{(s-p)} \leq k' < k^{s-p} \qquad pctx \in \Omega$$

entonces, como $\frac{1}{(s-p)} > 0$,

$$|f(x)| \leq k'^{\frac{1}{(s-p)}} < k \qquad pctx \in \Omega$$

de forma que $k'^{\frac{1}{(s-p)}} = \|f\|_\infty$, lo cual es una contradicción.
Así, $k^{s-p} = \||f|^{s-p}\|_\infty$ de forma que

$$\||f|^{s-p}\|_\infty = \|f\|_\infty^{s-p}$$

y así

$$\|f\|_s^s \leq \|f\|_\infty^{s-p} \|f\|_p^p$$

y como $1 \leq s$

$$\|f\|_s \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{s}} \|f\|_p^{\frac{p}{s}}$$

2. **Desigualdad de Hölder generalizada.** Sean $r, p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}$. Prueba que, para cualesquiera $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$, $1 \leq j \leq m$, se cumple que $\prod_{j=1}^m f_j \in L^r(\Omega)$ y

$$\left\| \prod_{j=1}^m f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}.$$

Solución

Demostrémoslo por inducción sobre m.

Caso base: $m = 2$

Sean $r, p, q \in [1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ y $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$.

Como f, g son medibles, entonces $|fg|$ es medible (proposiciones 14.11, 14.13). La afrimación es trivial si $f = 0$ o $g = 0$, de forma que supomggamos que ambas son distintas de cero. Por el Lema 14.20 tenemos que $\|f\|_p \neq 0$, $\|g\|_q \neq 0$. Veamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ es equivalente a $\frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1$ i.e. $\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = 1$. Notemos además que, como $p, q \in [1, \infty)$ y por hipótesis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, entonces $r < p$ y $r < q$ de forma que $\frac{p}{r} \in (1, \infty)$, $\frac{q}{r} \in (1, \infty)$. Así, para cada $x \in \Omega$ aplicamos la desigualdad de Young a la pareja de números

$$a_x := \Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\Big)^r \quad b_x := \Big(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\Big)^r$$

Notemos que $a_x, b_x \geq 0$ pues $|f(x)| \geq 0$ y $\|f\|_p > 0$ y análogamente para g.

Así, tenemos que

$$a_x b_x \leq \frac{r}{p} a_x^{\frac{p}{r}} + \frac{r}{q} b_x^{\frac{q}{r}}$$

$$\Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\Big)^r \Big(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\Big)^r \leq \frac{r}{p}\Big(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\Big)^p + \frac{r}{q}\Big(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\Big)^q$$

$$|f(x)g(x)|^r \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r \Big(\frac{r|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{r|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q}\Big)$$

Como $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$ entonces el lado derecho de la desigualdad es integrable. El teorema 14.15 implica que $|fg|^r$ es integrable i.e. $fg \in L^r(\Omega)$.

Integrando la desigualdad obtenida llegamos a que

$$\int_\Omega |fg|^r \leq \|f\|_p^r \|g\|_q^r \Big(\frac{r}{p\|f\|_p^p} \int_\Omega |f|^p + \frac{r}{q\|g\|_q^q} \int_\Omega |g|^q\Big)$$

$$\|fg\|_r^r \leq \|f\|_p^r\|g\|_q^r\Big(\frac{r}{p}+\frac{r}{q}\Big) = \|f\|_p^r\|g\|_q^r\Big(\frac{1}{\frac{p}{r}}+\frac{1}{\frac{q}{r}}\Big) = \|f\|_p^r\|g\|_q^r$$

como $r \geq 1$

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

Hipótesis de inducción

Supongamso que dados $r, p_1, \ldots, p_m \in [1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} = \frac{1}{r}$ se tiene que para cualesquiera $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$, $1 \leq j \leq m$, se cumple que $\prod_{j=1}^m f_j \in L^r(\Omega)$ y

$$\left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_r \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}$$

Paso Inductivo

Sean $r, p_1, \ldots, p_m, p_{m+1} \in [1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_{m+1}} = \frac{1}{r}$ y sean $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$, $1 \leq j \leq (m+1)$.

Sea p tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}$. Por hipótesis de inducción tenemos que $\prod_{j=1}^m f_j \in L^p(\Omega)$ y por hipótesis $f_{m+1} \in L^{m+1}(\Omega)$ de forma que, como $\frac{1}{p}+\frac{1}{p_{m+1}} = \frac{1}{r}$, por el caso base tenemos que $\prod_{j=1}^{m+1} f_j \in L^r(\Omega)$.

Denotemos por $f := f_{m+1}, g := \prod_{j=1}^m f_j$. Por hipótesis de inducción sabemos que

$$\left\|\prod_{j=1}^m f_j\right\|_p \leq \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}$$

y por el caso base sabemos que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_{p_{m+1}}\|g\|_p$$

i.e.

$$\left\|\prod_{j=1}^{m+1} f_j\right\|_r \leq \|f_{m+1}\|_{p_{m+1}} \left\|\prod_{j=1}^{m} f_j\right\|_p$$

de forma que, por transitividad, tenemos que

$$\left\|\prod_{j=1}^{m+1} f_j\right\|_r \leq \|f_{m+1}\|_{p_{m+1}} \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{p_j}$$

i.e.

$$\left\|\prod_{j=1}^{m+1} f_j\right\|_r \leq \prod_{j=1}^{m+1} \|f_j\|_{p_j}$$

3. Prueba que, si $|\Omega| < \infty$ y $f \in L^{\infty}(\Omega)$, entonces

$$\|f\|_{\infty} = \lim_{p\to\infty} |\Omega|^{-1/p}\|f\|_p.$$

<u>Solución</u>

<u>Caso 1:</u> $|\Omega| = 0$

En dado caso f estaría definida en un conjunto nulo, de forma que, por definición, $\|f\|_{\infty} = 0$. Así, dado que $\lim_{p\to\infty} |\Omega|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p = \lim_{p\to\infty} 0\|f\|_p = \lim_{p\to\infty} 0 = 0$ tenemos que

$\|f\|_{\infty} = \lim_{p\to\infty} |\Omega|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$

<u>Caso 2:</u> $|\Omega| > 0$

Sea $\epsilon > 0$ y consideremos el siguiente conjunto:

$$\Omega' := \{x \in \Omega : |f(x)| \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon\}$$

Por la proposición 14.12 sabemos que Ω' es medible.

Probemos que $0 < |\Omega| < \infty$.

$|\Omega'| < |\Omega| < \infty$ dado que $\Omega' \subset \Omega$.

Ahora bien, supongamos que $|\Omega'| = 0$, entonces $\{x \in \Omega : |f(x)| \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon\}$ es nulo, pero entonces $\|f\|_{\infty} - \epsilon \geq |f(x)|$ p.c.t. $x \in \Omega$, de forma que, por definición de $\|f\|_\infty$ tendríamos que $\|f\|_\infty - \epsilon \geq \|f\|_\infty$ lo cual es una contradiccón.

Así, $0 < |\Omega'| < \infty$.

Como $\Omega' \subset \Omega$ tenemos que

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \geq \Big(\int_{\Omega'} |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Ahora bien, dada $p \in [1, \infty)$, como en Ω' se cumple que $|f|^p \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)^p$ entonces

$$\Big(\int_{\Omega'} |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \geq \Big(\int_{\Omega'} (\|f\|_\infty - \epsilon)^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big((\|f\|_\infty - \epsilon)^p \int_{\Omega'} 1 \Big)^{\frac{1}{p}} = (\|f\|_\infty - \epsilon)|\Omega'|^{\frac{1}{p}}$$

Por transitividad tenemos que

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)|\Omega'|^{\frac{1}{p}}$$

Ahora bien, por la proposición 14.31 tenemos que

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$$

y así

$$|\Omega|^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty \geq \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)|\Omega'|^{\frac{1}{p}}$$

y como $0 < |\Omega| < \infty$

$$\|f\|_\infty \geq \|f\|_p |\Omega|^{-\frac{1}{p}} \geq (\|f\|_\infty - \epsilon)|\Omega'|^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}}$$

Notemos que esto se cumple para toda $\epsilon > 0$ y toda $p \in [1, \infty)$, así que

$$lim_{p \to \infty} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \qquad lim_{p \to \infty} (\|f\| - \epsilon)|\Omega'|^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{-\frac{1}{p}} = (\|f\|_\infty - \epsilon)$$

de forma que, para toda $\epsilon > 0$,

$$\|f\| \geq lim_{p\to\infty}\|f\|_p|\Omega|^{-\frac{1}{p}} \geq \|f\| - \epsilon$$

lo cual implica

$$\|f\|_\infty = lim_{p\to\infty}|\Omega|^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p$$