Análisis Matemático II - Tarea 9

Fecha límite: domingo 12 de diciembre a las 23:59 horas

Andrés Casillas

1. Sea Ω la bola abierta de radio 1 con centro en el origen en $\mathbb{R}^n$. Prueba que, $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$ para todo $p \in [1, \infty)$. (*Sugerencia:* Recuerda que, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, su extensión trivial $\overline{u}$ pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.)

   <u>Solución</u>

   Sea $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ la función dada por $u(x) = |x|$. Veamos que u es débilmente diferenciable y su derivada débil es

$$(Du)(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ -1 & x \in (-1, 0] \end{cases}$$

   Si $\varphi \in C_c^\infty((-1, 1))$ y $sop(\varphi) \subset [-a, a] \subset (-1, 1)$, tomando en cuenta que u es diferenciable en $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ y usando el teorema fundamental del cĺculo tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} [u\varphi' + (Du)\varphi] &= \int_{-a}^{0} [u\varphi' + (Du)\varphi] + \int_{0}^{a} [u\varphi' + (Du)\varphi] \\ &= \int_{-a}^{0} [u\varphi' - \varphi] + \int_{0}^{a} [u\varphi' + \varphi] = \int_{-a}^{0} [u\varphi]' + \int_{0}^{a} [u\varphi]' \\ &= -a\varphi(-a) + a\varphi(a) = 0 \end{aligned}$$

   pues $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$.

   Así, $(Du)(x)$ es la derivada débil de $u(x)$. Dicho lo anterior y dado que $u, (Du) \in L^p(-1, 1)$ para toda $p \in [1, \infty)$, entonces $u \in W^{1,p}(-1, 1)$ para toda $p \in [1, \infty)$.

   Veamos entonces quién es el candidato para derivada débil de $\overline{u}$. Recordemos que $\overline{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ -x & x \in (-1,0] \\ 0 & x \notin (1,1) \end{cases}$$

Sea $p \in [1, \infty)$ y supongamos que existe $v \in \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$$

en particular se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} 0 = -\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$$

de forma que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} v\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$$

La proposición 14.49 asegura que

$$v = 0 \qquad c.d. \quad en \quad \mathbb{R} \setminus (-1,1)$$

Por otro lado, también tenemos que

$$\int_{(-1,0]} x\varphi' = \int_{(-1,0]} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^{\infty}((-1,0])$$

Integrando por partes el lado izquierdo tenemos que

$$\int_{-1}^{0} x\varphi' = x\varphi|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{1} \varphi$$

y como φ tiene soporte compacto contenido en $(-1,0]$ entonces $x\varphi|_{-1}^{0} = 0\varphi(0) + \varphi(-1) = 0 + 0 = 0$ de forma que

$$\int_{-1}^{0} x\varphi' = -\int_{-1}^{1} \varphi$$

y así

$$\int_{-1}^{0} -\varphi = \int_{-1}^{0} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,0])$$

$$\int_{-1}^{0} \varphi(v+1) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((-1,0])$$

y como $v+1 \in \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, pues $v \in \mathbf{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, entonces la proposición 14.49 asegura que

$$v = -1 \qquad c.d. \quad en \quad (-1,0]$$

Análogamente

$$\int_{(0,1)} x\varphi' = -\int_{(0,1)} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

de forma que, calcando lo recién hecho, llegamos a que

$$\int_{0}^{1} \varphi = \int_{0}^{1} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

$$\int_{0}^{1} \varphi(v-1) = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty((0,1))$$

$$v = 1 \qquad c.d. \quad en \quad (0,1)$$

Así,

$$v(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ -1 & x \in (-1,0] \\ 0 & x \notin (-1,1) \end{cases}$$

es el candidato. Notemos que $v = \overline{Du}$.

Asi las cosas, supongamos por contradicción que $u \in W_0^{1,p}((-1,1))$. La proposición 16.21 asegura que $D\overline{u} = \overline{Du} = v$, de forma que

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} v\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

En particular se cumple para $\varphi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función en $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que para toda $x \in (-1,1), \varphi_0(x) = kx$ con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dicha función existe.

Así,

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi_0' = -\int_{-1}^{0} kx + \int_{0}^{1} kx = 2\int_{0}^{1} kx = k$$

$$-\int_{\mathbb{R}} v\varphi_0 = -\Big(-\int_{-1}^{0} kx + \int_{0}^{1} kx\Big) = -k$$

Dado que $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $\int_{\mathbb{R}} \overline{u}\varphi_0' \neq -\int_{\mathbb{R}} v\varphi_0$ lo cual es una contradicción. En consecuencia $u \notin W_0^{1,p}((-1,1))$ y como habíamos probado que $u \in W^{1,p}((-1,1))$ entonces queda demostrado que $W^{1,p}(\Omega) \neq W_0^{1,p}(\Omega)$ para toda $p \in [1,\infty)$.

2. Dado un subconjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y funciones $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, considera el problema

$$(\mathscr{P}_g) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Demuestra las siguientes afirmaciones:

(a) Si $g \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$, el problema $(\mathscr{P}_g)$ tiene una única solución débil. (*Sugerencia:* Prueba que $u \in A_g$ y u satisface

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_{\Omega} u\varphi = \int_{\Omega} f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

si y sólo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ y v satisface

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_{\Omega} v\varphi = -\int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla\varphi - \int_{\Omega} g\varphi + \int_{\Omega} f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

y aplica el teorema de representación de Fréchet-Riesz.)

Solución

Veamos que, dadas $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $u \in A_g$ y $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ y f, g como en el enunciado, se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \iff \int_\Omega \nabla(v+g) \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega (v+g)\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

$$\iff \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi + \int_\Omega g\varphi = \int_\Omega f\varphi$$

$$\iff \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi$$

Para $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^1(\Omega)$ consideremos la función $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(w) := -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w - \int_\Omega gw + \int_\Omega fw$$

T es claramente lineal. Veamos que es continua

Por el teorema 16.29 sabemos que, para $f \in L^2(\Omega)$, la función $T_w : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $T_w := \int_\Omega fw$ es continua. Dado que $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, por la misma razón sabemos que $T_w := \int_\Omega gw$ es continua.

Veamos ahora que la función $w \mapsto \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w$ es continua.

Sabemos que

$$\langle g, \rangle : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\langle g, w \rangle_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w + \int_\Omega gw$$

es continua (proposición 15.18), y por lo dicho anteriormente ($w \mapsto \int_\Omega gw$ es continua) entonces $w \mapsto \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w$ es cotinua por ser diferencia de continuas.

Por lo tanto

$$T(w) := -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w - \int_\Omega gw + \int_\Omega fw$$

es lineal y continua.

Así, por el teorema de representación de Riesz, existe un único $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\langle v, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = T(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

donde

$$\langle v, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w + \int_\Omega vw$$

Por la observación 16.30 sabemos que

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

es equivalente a

$$\langle v, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = T(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

de forma que $(\mathscr{P}_g)$ tiene una única solución débil.

(b) $u \in A_g$ es una solución débil de $(\mathscr{P}_g)$ si y sólo si u es un mínimo del funcional $J : A_g \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(w) := \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fw.$$

<u>Solución</u>

Dado que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y

$$T(w) := -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w - \int_\Omega gw + \int_\Omega fw$$

es una función lineal y continua, sabemos por la proposición 15.20 que existe un único $v \in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\langle w, v\rangle = T(w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

si y solo si v es un mínimo del funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J(w) := \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} - T(w)$$

Por el inciso anterior sabemos que $(\mathscr{P}_g)$ tiene una única solución débil u y que ésta satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

si y sólo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \quad \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

Así, basta con probar que $v \in H_0^1(\Omega)$ minimiza el funcional $J_1 : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_1(w) := \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \int_\Omega \nabla g \cdot \nabla w + \int_\Omega gw - \int_\Omega fw$$

$$J_1(w) := \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fw$$

si y solo si u minimiza el funcional $J_2 : A_g \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_2(w) := \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fw$$

Sean $v, w \in H_0^1(\Omega)$. v minimiza J_1 si y solo si $J_1(v) \leq J_1(w)$ i.e.

$$\frac{1}{2}\|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \langle g, v\rangle_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fv \leq \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\Omega)} + \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fw$$

$$\iff \frac{1}{2}(\langle v, v\rangle_{H^1(\Omega)} - \langle w, w\rangle_{H^1(\Omega)}) + \langle g, v\rangle_{H^1(\Omega)} - \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)} \leq \int_\Omega fv - \int_\Omega fw$$

y como $v := u - g$ entonces

$$\iff \frac{1}{2}(\langle u-g, u-g\rangle_{H^1(\Omega)} - \langle w, w\rangle_{H^1(\Omega)}) + \langle g, u-g\rangle_{H^1(\Omega)} - \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \int_\Omega f(u-g) - \int_\Omega fw$$

$$\iff \frac{1}{2}(\|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2_{H^1(\Omega)} - \|w\|^2_{H^1(\Omega)}) - \|g\|^2_{H^1(\Omega)} - \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq \int_\Omega f(u-g) - \int_\Omega fw$$

$$\iff \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fu \leq \frac{1}{2}(\|g\|^2_{H^1(\Omega)} + \|w\|^2_{H^1(\Omega)}) + \langle g, w\rangle_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fg - \int_\Omega fw$$

$$\iff \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fu \leq \frac{1}{2}\langle g+w, g+w\rangle_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega f(g+w)$$

Con $g, w \in H^1$ y dado que H^1 es un espacio de Hilbert entonces $g + w := z \in H^1$ y tenemos que

$$\iff \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fu \leq \frac{1}{2}\|z\|^2_{H^1(\Omega)} - \int_\Omega fz$$

$$\iff J_2(u) \leq J_2(z)$$

y como w fue arbitrario entonces z también lo es, de forma que ésta última implicación es lo mismo que decir

$$J_2(u) \leq J_2(z) \qquad \forall z \in H^1(\Omega)$$

lo cual demuestra el ejercicio.

(c) Si $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$ si y sólo si $v := u - g$ es solución clásica de

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \Delta g - g + f & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Solución

Sea u una solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$, $g \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ y $v := u - g$.

Veamos que

$$-\Delta v + v = \Delta g - g + f \iff -\Delta(u-g) + (u-g) = \Delta g - g + f$$

$$\iff -\Delta u + \Delta g + u - g = \Delta g - g + f \iff -\Delta u + u = f$$

y

$$v = 0 \iff u - g = 0 \iff u = g$$

de forma que
u es solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$ si y sólo si $v := u - g$ es solución clásica de

$$\begin{cases} -\Delta v + v = \Delta g - g + f & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(d) Si Ω es un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^{m+2}$, $g \in \mathcal{C}^{m+2}(\overline{\Omega})$ y $f \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ con $m > \frac{n}{2}$, entonces la solución débil $u \in A_g(\Omega)$ de $(\mathscr{P}_g)$ satisface $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$. En consecuencia, u es solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$.

Solución

Veamos primero que si $u \in A_g(\Omega)$ es solución débil de $(\mathscr{P}_g)$, entonces $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de

$$(\mathscr{P}_0) \begin{cases} -\Delta v + v = \Delta g - g + f & \text{en } \Omega, \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sea $u \in A_g(\Omega)$ solución débil de $(\mathscr{P}_g)$ y $v \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de $(\mathscr{P}_0)$. Por definición, u satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

y v satisface

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = \int_\Omega (\Delta g - g + f)\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = \int_\Omega (\Delta g)\varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

y por la fórmula de Green (proposición 16.27)

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

El inciso 2(a) afirma que $u \in A_g(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

si y solo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega v\varphi = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega g\varphi + \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

Es decir, $u \in A_g(\Omega)$ es solución débil de $(\mathscr{P}_g)$ si y solo si $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de $(\mathscr{P}_0)$

Ahora bien, dado que $g \in \mathcal{C}^{m+2}(\overline{\Omega})$ y $f \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ con $m > \frac{n}{2}$ entonces $\Delta g \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ y en consecuencia $\Delta g - g + f \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$. Así, dado el resto de las hipótesis y aplicando el teorema de regularidad para $(\mathscr{P}_0)$ (diapositiva 42/44), tenemos que la solución débil $v := u - g \in H_0^1(\Omega)$ de $(\mathscr{P}_0)$ satisface $v \in C^2(\overline{\Omega})$ y v es solución clásica de $(\mathscr{P}_0)$.

Así, $v, g \in C^2(\overline{\Omega})$ y $v = u - g$ de forma que $u = v + g \in C^2(\overline{\Omega})$. Dado que v es solución clásica de $(\mathscr{P}_0)$ y el ejericicio 2(c) asegura que esto sucede si y solo si u es solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$ entonces u es solución clásica de $(\mathscr{P}_g)$, lo cual concluye la prueba.