**Análisis Matemático II - Tarea 1**

**Fecha límite: domingo 26 de septiembre a las 23:59 horas**

**Andrés Casillas García de Presno**

1. Sea $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una medida de Haar. Sea $f$ una función continua. Prueba que $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $|f| \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, y que

$$|J(f)| \leq J(|f|) \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

En particular,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \qquad \forall f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n).$$

Soluci[o]n

Demostremos que con las hip[o]tesis dadas, $|f| \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Supongamos $f$ continua, y demostremos que $|f|$ tambi[e]n lo es. Sean $\epsilon > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios, y sea $\delta$ la que nos asegura la continuidad de $f$. Para evitar confusiones de notaci[o]n, sea $abs(f) = |f|$. Veamos primero que $|f(x) - f(x_0)| \geq |f(x)| - |f(x_0)|$, por lo que $abs(|f(x) - f(x_0)|) \geq abs(|f(x)| - |f(x_0)|)$, pero $abs(|f(x) - f(x_0)|) = |f(x) - f(x_0)|$, por lo que $|f(x) - f(x_0)| \geq abs(|f(x)| - |f(x_0)|)$. As[i], si $||x - x_0|| < \delta$ entonces $\epsilon > |f(x) - f(x_0)| \geq abs(|f(x)| - |f(x_0)|)$, en particular $abs(|f(x)| - |f(x_0)|) < \epsilon$, por lo que $|f|$ es continua.

Ahora bien, $f \neq 0$ si y solo si $|f| \neq 0$, por lo $\underline{\text{que } \{x \in \mathbb{R}^n | f(x)} \neq \underline{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n | abs(f(x))} \neq 0\}$, de forma que $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | abs(f(x)) \neq 0\}}$ i.e. $sop(f) = sop(|f|)$ lo cual implica que, dado que $f$ es continua, $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $|f| \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Demostremos ahora que $|J(f)| \leq J(|f|)$. Sea $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Sabemos que $f \leq |f|$, por lo que, por monotno[i]a de $J$, $J(f) \leq J(|f|)$.

Caso 1: $0 \leq J(f)$

Como $0 \leq J(f) \leq J(|f|)$ entonces $J(f) = |J(f)|$ y por lo tanto $|J(f)| \leq J(|f|)$.

Caso 2: $J(f) < 0$

Sean $A = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < 0\}, B = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) > 0\}$. Consideremos las funciones:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}, \; f_2(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in B \\ \\ 0 & si \quad x \notin B \end{cases}$$

Veamos primero que $f_1, f_2$ son continuas y tienen soporte compacto. Es claro que $A, B \subseteq sop(f)$, por lo que $\overline{A}, \overline{B} \subseteq \overline{sop(f)}$, pero $\overline{sop(f)} = sop(f)$, por lo que $\overline{A}, \overline{B} \subseteq sop(f)$ donde $sop(f_1) = \overline{A}$ y $sop(f_2) = \overline{B}$, de forma que tanto $sop(f_1)$ como $sop(f_2)$ son compactos, pues son subconjuntos cerrados de un compacto.

Veamos ahora que ambas son continuas. Veremos el caso de $f_1$, pues el de $f_2$ es totalmente an[a]logo. Supongamos por reducci[o]n al absurdo que $f_1$ no es continua. Si $f_1$ no fuera continua en alg[u]n $x \in A$ , como para toda $x \in A, f_1 = f$, entonces $f$ ser[i]a discontinua. Podemos pensar entonces que $f_1$ es discontinua en algun $x \in (\mathbb{R}^n \setminus A)$. Entonces existe una sucesi[o]n $(x_k)$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ tales que $(x_k) \to x$, mas $(f_1(x_k)) \not\to f_1(x) = 0$. Esta sucesi[o]n necesariamente tiene una infinidad de terminos que son elementos de $A$ (pues de lo contrario no se cumplir[i]a que $(f_1(x_k)) \not\to f(x) = 0$).As[i], podemos extraer la subsucesi[o]n $(x_{k_n})$ de $(x_k)$ que consta exclusivamente de elementos de $A$. Pero como $f_1 = f$ en $A$, entonces $(f_1(x_{k_n})) = f(x_{k_n})$, por lo que existe una sucesi[o]n de elementos de $A$ tales que $(x_{k_n}) \to x$, pero $f(x_{k_n}) \not\to f(x) = 0$, lo cual contradice la continuidad de $f$. (La demostraci[o]n para $f_2$ es totalmente an[a]loga).

As[i], tanto $f_1$ como $f_2$ son funciones continuas con soporte compacto.

Es claro que $f = f_1 + f_2$ y que $|f| = f_2 - f_1$, por lo que $J(f) = J(f_1) + J(f_2)$ y $J(|f|) = J(f_2) - J(f_1)$ por linealidad de $J$. Ahora bien, como $f_1 \leq 0$, entonces $J(f_1) \leq J(0)$ donde $J(0) = 0$, pues $J(f) = J(f+0) = J(f)+J(0)$ por linealidad de $J$. Por un argumento an[a]logo $J(f_2) \geq 0$. Veamos entonces que $|J(f)| = |J(f_1) + J(f_2)| \leq |J(f_1)| + |J(f_2)| = -J(f_1) + J(f_2) = J(|f|)$ que es lo que se quer[i]a demostrar.

En clase vimos que $J(f) = c \int_{\mathbb{R}^n} f$ para alguna constante $c > 0$, para toda funcion $f$ continua con soporte compacto. As[i], tenemos que

$$|J(f)| \leq J(|f|)$$

$$= |c\int_{\mathbb{R}^n} f| \leq c\int_{\mathbb{R}^n} |f|$$
$$= |c||\int_{\mathbb{R}^n} f| \leq c\int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

Si $c = 0$ se da la igualdad, y si $c > 0$ tenemos que $|c| = c$, de forma que

$$|\int_{\mathbb{R}^n} f| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|$$

2. Prueba que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ y $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\int_{\mathbb{R}^n} f > 0.$$

Soluci[o]n

Como $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, en particular es continua. As[i], sea $\delta > 0$ tal que si $||x - x_0|| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$.

Consideremos tambi[e]n $||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ y veamos que $\{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0|| < \delta\}$. Sabemos, por un reslutado de an[a]lisis 1, que $||x||_s \leq n^{\frac{1}{s}}||x||_\infty$ si $1 \leq s < \infty$, de forma que $||x||_2 \leq n^{\frac{1}{2}}||x||_\infty$, de forma que si $||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ entonces, por la desigualdad anterior, $||x - x_0||_2 \leq n^{\frac{1}{2}}||x - x_0||_\infty < n^{\frac{1}{2}}\frac{\delta}{\sqrt{n}} = \delta$ i.e. $||x - x_0||_2 < \delta$, lo cual prueba la contenci[o]n deseada.

Veamos ahora que $\{||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \in [a_1, b_1] \times .... \times [a_n, b_n]$ con $a_i = x_{0_i} - \frac{\delta}{\sqrt{n}}, b_i = x_{0_i} + \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}\}$ donde estoy pensando que $x_0 = (x_{0_1}, ..., x_{0_n})$.

$\rightarrow$) Sea $x \in \{||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}\}$ entonces $|x_i - x_{0_i}| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, de forma que $-\frac{\delta}{\sqrt{n}} < x_i - x_{0_i} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ i.e. $x_{0_i} - \frac{\delta}{\sqrt{n}} < x_i < x_{0_i} + \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ i.e. $x_i \in [a_i, b_i]$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, por lo que $x \in [a_1, b_1] \times .... \times [a_n, b_n]$.

$\leftarrow$) Sea $x \in [a_1, b_1] \times .... \times [a_n, b_n]$ entonces $x_i \in [a_i, b_i]$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$ i.e. $x_{0_i} - \frac{\delta}{\sqrt{n}} < x_i < x_{0_i} + \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ por lo que $-\frac{\delta}{\sqrt{n}} < x_i - x_{0_i} < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, es decir, $|x_i - x_{0_i}| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$, por lo que $x \in \{||x - x_0||_\infty < \frac{\delta}{\sqrt{n}}\}$.

Llam[e]mosle $Q'$ al conjunto $x \in \{||x - x_0||_\infty \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}\}$. Veamos el siguiente lema, que probaremos por inducci[o]n:

Lema $\int_{\mathbb{R}^n} f \geq \int_{Q'} f$.

Prueba del Lema: Por inducci[o]n sobre $n$.

Caso base: $n = 1$

El soporte de $f$ ser[i]a un intervalo $[a, b]$ y $Q' = [a', b'] \subseteq [a, b]$.

$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{[a,a']} f + \int_{[a',b']} f + \int_{[b',b]} f$ y como $f \geq 0$, entonces, por monoton[i]a de la integral, $\int_{[a,a']} f \geq \int 0 = 0$ y $\int_{[b',b]} f \geq \int 0 = 0$, lo cual prueba que $\int_{\mathbb{R}} f \geq \int_{[a',b']} f$.

Hip[o]tesis de inducci[o]n: Supongamos que si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-1}), f \geq 0$ y $f(x_0) > 0$ par alg[u]n $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, entonces $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \geq \int_{Q'} f$

Paso inductivo: Sea $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n), f \geq 0$ y tal que $f(x_0) > 0$ par alg[u]n $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Sea $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ un rect[a]ngulo que contenga a $sop(f)$. Por lo visto anteriormente, $Q' \subseteq Q$. Ahora bien, por definici[o]n,

$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_Q f = \int_{a_n}^{b_n}(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}(...(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, ..., x_n)dx_1)dx_2)...)dx_n$.

Pensemos en la funci[o]n $g := f(x_2, ..., x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, ..., x_n)dx_1$. Por un resultado probado en clase, sabemos que $g$ es continua. Ahora bien, como $f$ tiene soporte compacto, entonces $g$ tambi[e]n debe tenerlo, pues si no lo tuviera entonces $f$ tampoco lo tendr[i]a (por def. de $g$). As[i], $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-1})$. $g \geq 0$ pues la integral es mon[o]tona, $\int_{\mathbb{R}^n} 0 = 0$ (para cualquier $n \in \mathbb{N}$), y sabemos que $f \geq 0$, por lo que $g = \int_{a_1}^{b_1} f dx_1 \geq 0$. Ahora bien, sea $x_1 \in \{||x - x_0||_\infty \leq \frac{\delta}{\sqrt{n}}\}, x_1 = (x_{1_1}, ..., x_{1_n}])$. Veamos que $g(x_1) = f(x_{1_2}, ..., x_{1_n}) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_{1_1}, ..., x_{1_n})dx_{1_1} \geq (b_1 - a_1)(\frac{f(x_0)}{2}) > 0$, por elecci[o]n de $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$. As[i], $g$ cumple con las hip[o]tesis de inducci[o]n, por lo que $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_Q f = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g \geq \int_{Q'} f$, que es lo que se quer[i]a demostrar.

3. Sean $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^m)$ y $h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^{n-m})$ donde $1 \leq m < n$. Denotamos por $g \odot h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la función

$$(g \odot h)(x_1, x_2, \ldots, x_n) := g(x_1, \ldots, x_m)h(x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Prueba que $g \odot h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g \odot h) = \left( \int_{\mathbb{R}^m} g \right) \left( \int_{\mathbb{R}^{n-m}} h \right).$$

<u>Soluci[o]n</u>

Veamos primero que $g \odot h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Afirmo que $\{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\} \times \{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}$.

$\rightarrow$) Sea $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\}$, por definici[o]n tenemos que $g(x_1, ..., x_m)h(x_{m+1}, ..., x_n) \neq 0$ lo cual implica que $g(x_1, ..., x_m) \neq 0$ y $h(x_{m+1}, ..., x_n) \neq 0$ i.e. $x \in \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}$ y $x \in \{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}$.

$\leftarrow$) Sea $x \in \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\} \times \{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}$, por definici[o]n, $g(x_1, ..., x_m) \neq 0$ y $h(x_{m+1}, ..., x_n) \neq 0$ y como $\mathbb{R}$ no tiene divisores de 0 se sigue que $g \odot h(x) = g(x_1, ..., x_m)h(x_{m+1}, ..., x_n) \neq 0$, es decir $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\}$.

Veamos ahora que $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}} \times \overline{\{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}}$. Sea $x \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\}}$ y sea $\epsilon > 0$. Por definici[o]n, existe $y \in \{x \in \mathbb{R}^n : g \odot h(x) \neq 0\}$ tal que $y \in B_\epsilon^{||_2}(x)$ i.e. $||y - x||_2 < \epsilon$. Sea $\Pi_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\Pi_m(x) = (x_1, ..., x_m)$. An[a]logamente, sea $\Pi_{m-n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-n}$, $\Pi_{m-n}(x) = (x_{m+1}, ..., x_{m-n})$. Como sabemos que $||y - x||_2 = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$, es claro entonces que $||y - x||_2 \geq ||\Pi_m(y) - \Pi_m(x)||$ y $||y - x||_2 \geq ||\Pi_{m-n}(y) - \Pi_{m-n}(x)||$, por lo que $||\Pi_m(y) - \Pi_m(x)|| < \epsilon$ y $||\Pi_{m-n}(y) - \Pi_{m-n}(x)|| < \epsilon$. Por el resultado anterior, sabemos que $\Pi_m(y) \in \{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}$ y $\Pi_{m-n}(y) \in \{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}$, lo cual implica que $\Pi_m(x) \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}}$ y $\Pi_{m-n}(x) \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}}$. Como adem[a]s $x = \Pi_m(x) \times \Pi_{m-n}(x)$, tenemos que $x \in \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : g(x) \neq 0\}} \times \overline{\{x \in \mathbb{R}^{n-m} : h(x) \neq 0\}}$, que es lo que se quer[i]a demostrar.

As[i] las cosas, $sop(g \odot h) \subset sop(g) \times sop(h)$, y como por hip[o]tesis $sop(g)$ y $sop(h)$ son compactos, entonces $sop(g) \times sop(h)$ es compacto (resultado de an[a]lisis 1). Como $sop(g \odot h)$ es un subconjunto cerrado (pues es la cerradura de otro conjunto) contenido en un compacto $(sop(g) \times sop(h))$, entonces $sop(g \odot h)$ es compacto.

Veamos ahora que $g \odot h$ es continua. Para eso, basta con ver que las proyecciones $\Pi_m(x)$ y $\Pi_{m-n}(x)$ son continuas. Veamos el caso de $\Pi_m(x)$, pues el caso de $\Pi_{m-n}(x)$ es an[a]logo.

Sean $x \in \mathbb{R}^n$ , $\epsilon > 0$ y $(x_k)$ una sucesi[o]n de puntos del dominio tales que $(x_k) \to x$. Como existe una $k_0$ tal que para toda $k > k_0$ se cumple que $||x_k - x|| < \epsilon$ y adem[a]s $||x_k - x|| \geq ||\Pi_m(x_k) - \Pi_m(x)||$, entonces para toda $k > k_0$ se cumple que $||\Pi_m(x_k) - \Pi_m(x)|| < \epsilon$, es decir, $\Pi_m(x_k) \to \Pi_m(x)$, por lo que $\Pi_m(x)$ es continua (y an[a]logamente lo es $\Pi_{m-n}(x)$).

As[i], como $g$ y $h$ son continuas, y la composici[o]n de continuas es continua, entonces $g \circ \Pi_m$ y $h \circ \Pi_{m-n}$ son continuas. Como el producto de continuas es continua, entonces $(g \circ \Pi_m)(h \circ \Pi_{m-n})$ es continua, pero $g \odot h = (g \circ \Pi_m)(h \circ \Pi_{m-n})$, por lo que $g \odot h$ es continua.

Probemos ahora que $\int_{\mathbb{R}^n}(g \odot h) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} g\right)\left(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h\right)$.

Veamos primero que $sop(g) \times sop(h) \subseteq sop(g \odot h)$. Sean $x \in sop(g) \times sop(h)$ y $\epsilon > 0$. Por definici[o]n sabemos que existe una sucesion $(x_k)$ de elementos de $Int(sop(g))$ tales que $(x_k) \to \Pi_m(x)$, es decir, existe $k_1$ tal que para toda $k > k_1$, $||x_k - \Pi_m(x)|| < \frac{\epsilon}{2}$. An[a]logamente, existe una sucesion $(y_k)$ de elementos de $Int(sop(h))$ tales que $(y_k) \to \Pi_{n-m}(x)$ i.e. existe $k_2$ tal que para toda $k > k_2$, $||y_k - \Pi_{n-m}(x)|| < \frac{\epsilon}{2}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^n$. por construcci[o]n, $z_k \in Int(sop((g \odot h)))$ y tomando $k = max\{k_1, k_2\}$ tenemos que $||z - x|| \leq ||x_k - \Pi_m(x)|| + ||y_k - \Pi_{n-m}(x)|| < \epsilon$ (pues $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ siempre que $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$), es decir, $z \in B_\epsilon(x)$ lo cual prueba el resultado.

Ahora s[i]. Por definici[o]n, $\int_{\mathbb{R}^n}(g \odot h) = \int_{a_n}^{b_n}(...(\int_{a_1}^{b_1}(g \odot h)dx_1)...)dx_n$ donde $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ es un rect[a]ngulo que contiene a $sop(g \odot h)$. Como $sop(g) \times sop(h) \subseteq sop(g \odot h) \subset Q$, por lo que $sop(g) \subset [a_1, b_1] \times ... \times [a_m, b_m]$ y $sop(h) \subset [a_{m+1}, b_{m+1}] \times ... \times [a_n, b_n]$. Notemos tambi[e]n que $g(x_1, ..., x_m)$ es una constante con respecto a las $n - m$ variables restantes, y que $h(x_{m+1}, ..., h_n)$ es una constante con respecto a las primeras $m$ variables. As[i], las cosas, por linealidad de la integral, tenemos lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(g \odot h) = \int_{a_n}^{b_n}(...(\int_{a_1}^{b_1} g(x_1, ..., x_m)h(x_{m+1}, ..., x_n)dx_1)...)dx_n = ...$$

$$... = \int_{a_n}^{b_n} (...(\int_{a_m+1}^{b_m+1} h(x_{m+1}, ..., x_{m+1}) \int_{a_m}^{b_m} \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} ... \int_{a_1}^{b_1} g(x_1, ..., x_m) dx_1)...dx_{m+1})...)dx_n$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} (...(\int_{a_m+1}^{b_m+1} h(x_{m+1}, ..., x_{m+1}) \int_{\mathbb{R}^m} g) dx_{m+1})...)dx_n$$

$$= (\int_{\mathbb{R}^m} g)(\int_{a_n}^{b_n} (...(\int_{a_{m+1}}^{b_{m+1}} h(x_{m+1}, ..., x_n) dx_{m+1})...)dx_n)$$

$$= (\int_{\mathbb{R}^m} g)(\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h)$$

4. Prueba que, si $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, entonces $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

<u>Soluci[o]n</u>

Sea $f|_{sop(f)} : sop(f) \to \mathbb{R}$ la funci[o]n restricci[o]n de $f$ a su soporte. Por ser una funci[o]n continua (pues $f$ es continua en $\mathbb{R}^n$) definida en un conjunto compacto (pues, por hip[o]tesis, $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$) entonces $f|_{sop(f)}$ es uniformemente continua en su dominio. As[i], $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\forall \epsilon > 0$, si $||x - y|| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ para toda $x, y \in sop(f)$.

Ahora bien, sea $\epsilon > 0$ y sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $||x - y|| < \delta$. Propongo $\delta = \delta_1$ mostrada anteriormente.

Notemos primero que si $x, y \in sop(f)$ el resultado se sigue de la afirmaci[o]n anterior.

Si $x, y \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))$ entonces, por definici[o]n de $sop(f)$, tenemos que $f(x) = f(y) = 0$, por lo que se cumple que siempre que $||x - y|| < \delta$ suceder[a] que $|f(x) - f(y)| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$.

As[i] las cosas, el [u]nico caso interesante es si $x \in sop(f)$ y $y \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))$. Veamos primero las siguientes observaciones:

<u>Observaci[o]n 1</u>: $\forall x \in \partial sop(f)$ , $f(x) = 0$.

Como $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$, en particular $f$ es continua en todo $\mathbb{R}^n$, por lo que podemos tomar una sucesi[o]n de puntos, digamos $(x_k)$ tales que $(x_k) \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))$ y $(x_k) \to x$. Dicha sucesi[o]n existe por definici[o]n de frontera de un conjunto. Ahora bien, por ser $f$ continua, sabemos que $(f(x_k) \to f(x))$, pero $(f(x_k)) = (0)$, es decir, dicha sucesi[o]n es la sucesion constante 0 (por definici[o]n de $sop(f)$), lo cual implica que $f(x) = 0$.

Observaci[o]n 2: existe $z \in \partial sop(f)$ tal que $||x - z|| \leq ||x - y||$.

Consideremos al funci[o]n $L : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $L(t) = x + t(y-x)$. Dicha funci[o]n es continua, pues dada $\epsilon > 0$ basta con tomar $\delta = \frac{\epsilon}{||y-x||}$ para ver que si $|t_1 - t_2| < \frac{\epsilon}{||y-x||}$ entonces $|t_1 - t_2| ||y-x|| < \epsilon$ i.e $||(t_1 - t_2)(y-x)|| = ||x + t_1(y-x) - (x + t_2(y-x))|| = ||f(t_1) - f(t_2)|| < \epsilon$. Por ser continua, cumple el teorema del valor intermedio, es decir que para todo $z \in \{x + t(y - x) | t \in [0, 1]\}$ existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $L(t) = z$. Denotemos por $Im(L)$ a la imagen de $L$ y por $Int(sop(f))$ al interior del soporte. Veamos que $Im(L) \cap \partial sop(f) \neq \emptyset$. Supongamos que $Im(L) \cap \partial sop(f) = \emptyset$. Sabemos que $L(1) \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))$ y que $L(0) \in sop(f)$. Por el teorema del valor intermedio tendr[i]amos que $L^{-1}\{x \in Im(L) | x \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))\} \cup L^{-1}\{x \in Im(L) | x \in sop(f)\} = [0, 1]$, pero, como $L$ es continua, esos dos conjuntos son abiertos (pues son preim[a]genes de abiertos bajo una funci[o]n continua), por lo que su uni[o]n es un conjunto abierto, contradiciendo la igualdad anterior. Por lo tanto $Im(L) \cap \partial sop(f) \neq \emptyset$.

Por lo tanto, por el teorema del valor intermedio, existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que $L(t_0) = z$ con $z \in \partial sop(f)$. Es decir, $x + t_0(y - x) = z$, de forma que $||x - z|| = ||x - (x + t_0(y - x))|| = || - t_0(y - x)|| = t_0||y - x||$ con $t_0 \in (0, 1)$, por lo que $||x - z|| < ||x - y||$.

Ahora es f[a]cil ver que si $||x-y|| < \delta$ entonces para alguna $z \in \partial sop(f)$ garantizada por la observaci[o]n 2, $||x - z|| < ||x - y|| < \delta$ implica que $||x - z|| < \delta$. Como $z \in \partial sop(f)$, por la observaci[o]n 1, sabemos que $f(x) = 0$ y como $sop(f)$ es cerrado entonces $z \in sop(f)$, de forma que tenemos garantizado que si $||x-z|| < \delta$ entonces $|f(x) - f(z)| < \epsilon$ (por elecci[o]n de $\delta = \delta_1$), pero $|f(x) - f(z)| = |f(x) - 0| = |f(x) - f(y)|$ (pues $y \in (\mathbb{R}^n \setminus sop(f))$)de forma que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, que es lo que se quer[i]a demostrar.

5. Considera el espacio $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ con la norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|,$$

y sea $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una medida de Haar. ¿Es cierto que $J$ es continua? Justifica tu afirmación.

Soluci[o]n

Afirmo que $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ no es continua siempre que $J(f) = c\int_{\mathbb{R}^n} f$ para alguna $c > 0$. Veamos que $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ es discontinua en la constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Pensemos en las siguientes funciones $f_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \notin [\frac{-2}{\delta}, \frac{2}{\delta}] \\ \\ \frac{\delta^2}{4}(x + \frac{2}{\delta}) & si \quad x \in [\frac{-2}{\delta}, 0] \\ \\ -\frac{\delta^2}{4}(x - \frac{2}{\delta}) & si \quad x \in [0, \frac{2}{\delta}] \end{cases}$$

Veamos que para toda $\delta \in \mathbb{R}^+$, $f_\delta$ es una funci[o]n continua. Es claro que $f_\delta$ es continua en $(\mathbb{R} \setminus [\frac{-2}{\delta}, \frac{2}{\delta}])$, pues en dicho dominio es una funci[o]n constante. As[i], sean $x_0 \in [\frac{-2}{\delta}, \frac{2}{\delta}]$ y $\epsilon > 0$. Propongo $\delta' = min\{|x_0|, \frac{4\epsilon}{\delta^2}\}$. Como $\delta' \leq |x_0|$, entonces si $|x - x_0| < \delta'$ entonces $x, x_0 \in [\frac{-2}{\delta}, 0]$ o $x, x_0 \in [0, \frac{2}{\delta}]$. Hagamos el caso en el que $x, x_0 \in [\frac{-2}{\delta}, 0]$ ya que el otro caso es totalmente an[a]logo. Tambi[e]n supongamos $\delta' = \frac{4\epsilon}{\delta^2}$ pues corresponde a las vecindades peque[n]as.

Asi $|x - x_0| < \frac{4\epsilon}{\delta^2} \iff |\frac{\delta^2}{4}(x - x_0)| < \epsilon \iff |\frac{\delta^2}{4}(x + \frac{-2}{\delta}) - \frac{\delta^2}{4}(x_0 + \frac{-2}{\delta})| < \epsilon \iff |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Es claro tambi[e]n que $sop(f_\delta) = [\frac{-2}{\delta}, \frac{2}{\delta}]$, que, por ser un conjunto cerrado y acotado y subconjunto de $\mathbb{R}$, es compacto.

As[i], $f_\delta \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ para toda $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Veamos ahora que $J : \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ no es continua en $f$, es decir, que existe una $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, $||f - f_\delta||_{max} < \delta$ y a pesar de eso $|J(f) - J(f_\delta)| > \epsilon$.

Propongo $\epsilon = \frac{c}{2}$,donde $c > 0$ es la que conocemos de $J(f) = c\int_{\mathbb{R}} f$ . Veamos que $||f - f_\delta||_{max} = ||f_\delta||_{max} = \frac{\delta}{2} < \delta$, y a pesar de eso $|J(f) - J(f_\delta)| = |J(f_\delta)| = |c\int_{\mathbb{R}} f_\delta| = |c| = c > \frac{c}{2} = \epsilon$.

Veamos ahora que si $c = 0$, entonces $J(f) = 0$ para toda $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. En este caso afirmo que $J$ es continua y propongo $\delta = 1$. Sea $\epsilon > 0$, $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$. Es claro que si $||f - g||_{max} < 1$ se cumple que $|J(f) - J(g)| = 0 < \epsilon$.