Análisis Matemático II - Tarea 10

Fecha límite: domingo 16 de enero a las 23:59 horas

Andrés Casillas

1. Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Demuestra las siguientes afirmaciones.

   (a) La inclusión $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta para todo $q \in [1, \infty)$. (*Sugerencia:* Reduce esta situación al caso $p \in [1, n)$ y usa el Teorema de Rellich-Kondrashov.)

   <u>Solución</u>

   Sea $q \in [1, \infty)$. Por definición p^* es tal que $\frac{1}{n} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p}$ de forma que cuando $p \to_- n$ (p tiende a n por abajo), $p* \to \infty$. Así, podemos escoger $p \in [1, n)$ tal que $p^* > q$.

   Así, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, $p \in [1, n)$ y $q \in [1, p^*)$ entonces, por el teorema de Rellich-Kondrashov, sabemos que la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta.

   Veamos ahora que $W_0^{1,n}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$.

   Dado que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, entonces $|\Omega| < \infty$. Como $1 \leq p < n \leq \infty$, la proposición 14.31 nos dice que $L^n(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, lo cual, por definición de $W^{1,n}(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ implica que $W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Nuevamente por definición de $W_0^{1,n}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$ se sigue que $W_0^{1,n}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$.

   Veamos ahora que la inclusión $W_0^{1,n}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ manda conjuntos acotados en conjuntos acotados.

   Sea A un subconjunto acotado de $W_0^{1,n}(\Omega)$. Por definición existe $v \in W_0^{1,n}(\Omega)$, $r > 0$ tal que

   $$\|v - u\|_{W_0^{1,n}(\Omega)} < r \quad \forall u \in A$$

   Dado que $n \in [1, \infty)$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado, el corolario 17.9 asegura que

   $$\|u\| := \|\nabla u\|_n$$

es una norma en $W_0^{1,n}(\Omega)$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,n}(\Omega)}$. Análogamente, como $p \in [1,\infty)$ sabemos que

$$\|u\| := \|\nabla u\|_p$$

es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Reescribiendo lo anterior tenemos que

$$\|\nabla(v-u)\|_n < r' \quad \forall u \in A$$

para alguna $r' > 0$.

La proposición 14.31 asegura que

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_n$$

donde $C := |\Omega|^{\frac{(n-p)}{np}} > 0$, de forma que

$$\|\nabla(v-u)\|_p \leq C\|\nabla(v-u)\|_n < Cr'$$

y como $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pues $W_0^{1,n}(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces A está acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Veamos que esto implica que la inclusión $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta.

Primero que nada es claro, por transitividad, que $W_0^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Ahora bien, sea A un subconjunto acotado en $W_0^{1,n}(\Omega)$. Por lo anterior, A es un subconjunto acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dado que la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ es compacta, entonces A es un subconjunto relativamente compacto en $L^q(\Omega)$, lo cual completa la prueba.

(b) Si $p \in (n,\infty)$, entonces la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ es compacta. (Sugerencia: Usa el Corolario 7.10 del libro de texto.)

<u>Solución</u>

Sea $A \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ acotado. Dado que $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado entonces es compacto (Heine-Borel), por lo que, por el corolario 7.10, basta con ver que $A \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ es equicontinuo y acotado en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$.

Veamos que es acotado.

Lema

$\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \subset L^\infty$ y $\| \cdot \|_{\infty, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)} = \| \cdot \|_{\infty, L^\infty}$ en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Demostración

Sea $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. f es medible pues es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ (Ejemplo 14.8). Dado que $\overline{\Omega}$ es compacto y f es continua, f es acotada, por lo que $f \in L^\infty$.

Sea $c := \|f\|_{\infty, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)} = max_{x \in \overline{\Omega}} \|f(x)\|$. Por definición, es claro que $c = min\{c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq c \quad p.c.t.x \in \overline{\Omega})\}$ de forma que $\| \cdot \|_{\infty, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)} = \| \cdot \|_{\infty, L^\infty}$ en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Ahora sí, dado que A es acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe $x \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $r > 0$ tal que $\|x - y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < r$ para toda $y \in A$.

Ahora bien, dado que Ω es abierto y acotado, y $p \in (n, \infty)$ entonces, por la desigualdad de Poincaré, sabemos que para cualquier $q \in [1, \infty]$ existe $C > 0$ tal que

$$|\Omega|^{\frac{1}{q}} \|u\|_{\infty, L^\infty} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \|\nabla u\|_{p, L^p} \tag{1}$$

El corolario 17.19 nos asegura que $\|\nabla u\|_{p, L^p}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y que ésta es equivalente a la norma $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, de forma que por 1 tenemos que existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_{\infty, L^\infty} \leq K \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

y por el lema concluimos que

$$\|u\|_{\infty, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)} \leq K \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Así, como $\|x - y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < r$ para toda $y \in A$ entonces

$$\|x - y\|_{\infty, \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)} \leq K \|x - y\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < Kr$$

i.e.

$$\|x-y\|_{\infty,\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)} < r' \quad \forall y \in A$$

Dado que $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ entonces $x \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ y por lo anterior A está acotado en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$.

Veamos ahora que A es equicontinuo.

Sea $u \in A, x \in \Omega, \epsilon > 0$.

En la ayudantía previa a las vacaciones vimos la desigualdad de Morrey, que afirma que si $p > n$ se tiene que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$

$$\|u(x)-u(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}^{1-\frac{n}{p}}$$

casi dondequiera, donde C es una constante que depende solo de n y p.

Si $C = 0$ no hay nada que probar pues basta con tomar $\delta = 1$.

Así, dado que en nuestro caso $p > n$ y suponemos $C \neq 0$, basta con proponer $\delta = (\frac{\epsilon}{C})^{\frac{p}{p-n}}$. Nótese que $\delta > 0$ y depende únicamente de ϵ, p y n. Veamos entonces que

$$\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} \leq (\frac{\epsilon}{C})^{\frac{p}{p-n}} \iff C\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}^{1-\frac{n}{p}} < \epsilon$$

y por la desigualdad de Morrey tenemos finalmente que

$$\|u(x)-u(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq C\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}^{1-\frac{n}{p}} \leq \epsilon$$

i.e.

$$\|u(x)-u(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \epsilon$$

Esto prueba que A es equicontinuo en todo punto de Ω, de forma que A es equicontinuo en $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$.

Por el corolario 7.10 tenemos entonces que la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ es compacta.

2. Sean Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y λ_1 el primer valor propio de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

(a) Prueba que, para cada $\lambda > -\lambda_1$,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega),\lambda} := \left(\lambda \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\right)^{1/2}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$ y que está inducida por el producto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} := \lambda \int_\Omega uv + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

<u>Solución</u>

Veamos que $\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}$ es un producto escalar. Notemos que

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} = \lambda\langle u, v\rangle_2 + \langle u, v\rangle$$

donde

$$\langle u, v\rangle_2 = \int_\Omega uv$$

es el producto escalar en L^2 y

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

es el producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ definido en la definición 17.15.
$(PE3)$ Veamos que es definido positivo.
Sea $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$ y sean $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle, \|u\|_2^2 = \langle u, u\rangle_2$.
Como $\langle u, u\rangle_2, \langle u, u\rangle > 0$ por ser productos escalares y $\lambda > -\lambda_1$ entonces

$$\lambda \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 > -\lambda_1 \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2$$

y, por definición de primer valor propio y de ínfimo,

$$-\lambda_1 \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 = -(inf_{u\in H_0^1(\Omega),u\neq 0}\frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}) \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2$$

$$= -(inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2})\|u\|_2^2 + \|u\|^2 = -inf_{u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0}\|u\|^2 + \|u\|^2 \geq 0$$

de forma que

$$\lambda \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2 > 0$$

i.e.

$$\langle u, u \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} > 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$$

$(PE2)$ Hermiticidad.

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} = \lambda \langle u, v \rangle_2 + \langle u, v \rangle$$

y como $\langle u, u \rangle_2, \langle u, v \rangle$ son productos esclares entonces

$$\lambda \langle u, v \rangle_2 + \langle u, v \rangle = \lambda \langle v, u \rangle_2 + \langle v, u \rangle = \langle v, u \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}$$

i.e.

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} = \langle v, u \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}$$

$(PE1)$ Linealidad.
Sean $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$.

$$\langle \nu u + \mu v, w \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} = \lambda \langle \nu u + \mu v, w \rangle_2 + \langle \nu u + \mu v, w \rangle$$

$$= \lambda(\nu \langle u, w \rangle_2 + \mu \langle v, w \rangle_2) + \nu \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$$

$$= \lambda \nu \langle u, w \rangle_2 + \lambda \mu \langle v, w \rangle_2 + \nu \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$$

$$= \nu(\lambda \langle u, w \rangle_2 + \langle u, w \rangle) + \mu(\lambda \langle v, w \rangle_2 + \langle v, w \rangle)$$

$$= \nu \langle u, w \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda} + \mu \langle v, w \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}$$

por propiedades de producto escalar de $\lambda\langle \nu u+\mu v, w\rangle_2$ y $\langle \nu u+\mu v, w\rangle$.
Así, $\langle , \rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}$ es un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$. Es claro que la norma propuesta $\|u\|_{H_0^1(\Omega),\lambda} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H_0^1(\Omega),\lambda}}$ lo cual implica que ésta en efecto es una norma y claramente es inducida por el producto escalar anterior.

(b) Prueba que todas estas normas son equivalentes. En consecuencia, $H_0^1(\Omega)$ es completo con cualquiera de estas normas.
<u>Solución</u>
Sea $u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0$ (si $u = 0$ el resultado es trivial).
Sean $\mu_1, \mu_2 > -\lambda_1$. Denotaré por $\|u\|_{\mu_1} := \|u\|_{H_0^1(\Omega),\mu_1}$ y $\|u\|_{\mu_2} := \|u\|_{H_0^1(\Omega),\mu_2}$.

P.D. $\exists a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$a\|u\|_{\mu_1} \leq \|u\|_{\mu_2} \leq b\|u\|_{\mu_1}$$

Si $\mu_1 = \mu_2$ el resultado es trivial. Así, supongamos sin pérdida de generalidad, que $\mu_1 > \mu_2$.
Veamos que, como $\|u\|_2^2 \geq 0$ y $\mu_1 > \mu_2$ entonces

$$\mu_1\|u\|_2^2 > \mu_2\|u\|_2^2$$

y en consecuencia

$$\mu_1\|u\|_2^2 + \|u\|^2 > \mu_2\|u\|_2^2 + \|u\|^2$$

y por lo tanto

$$\|u\|_{\mu_1} > \|u\|_{\mu_2}$$

es decir basta con tomar $b = 1$.
Para la otra desigualdad, propongo $a^2 = \frac{\mu_2+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1}$.
<u>Observaciones:</u>

i. $a^2 \in (0,1)$ y por lo tanto $a \in (0,1)$.
Dado que $\mu_1 > \mu_2 > -\lambda_1$ entonces $\mu_1 + \lambda_1 > \mu_2 + \lambda_1 > 0$ y $1 > \frac{\mu_2+\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} > 0$

ii. $\lambda_1 > 0$ (teorema 17.19) por lo que λ_1^{-1} existe.

iii. $u \neq 0$ por lo que $\langle u, u\rangle \neq 0$.

Veamos entonces que:

$$a^2 = \frac{\mu_2 + \lambda_1}{\mu_1 + \lambda_1} \iff a^2(\mu_1 + \lambda_1) = \mu_2 + \lambda_1 \iff a^2(\frac{\mu_1}{\lambda_1} + 1) = \frac{\mu_2}{\lambda_1} + 1$$

$$\iff a^2\frac{\mu_1}{\lambda_1} + a^2 - \frac{\mu_2}{\lambda_1} - 1 = 0 \iff a^2\frac{\mu_1}{\lambda_1} - \frac{\mu_2}{\lambda_1} = 1 - a^2$$

$$\iff \lambda^{-1}(a^2\mu_1 - \mu_2) = 1 - a^2 \iff \langle u, u\rangle\lambda^{-1}(a^2\mu_1 - \mu_2) = \langle u, u\rangle(1 - a^2)$$

La desigualdad de Poincaré (pag. 451) nos dice que

$$\langle u, u\rangle_2 \leq \lambda_1^{-1}\langle u, u\rangle$$

de forma que

$$\langle u, u\rangle_2(a^2\mu_1 - \mu_2) \leq \langle u, u\rangle\lambda^{-1}(a^2\mu_1 - \mu_2) = \langle u, u\rangle(1 - a^2)$$

i.e.

$$\langle u, u\rangle_2(a^2\mu_1 - \mu_2) \leq \langle u, u\rangle(1 - a^2) \iff \langle u, u\rangle_2(a^2\mu_1 - \mu_2) + \langle u, u\rangle(a^2 - 1) \leq 0$$

$$\iff a^2(\mu_1\langle u, u\rangle_2 + \langle u, u\rangle) \leq \mu_2\langle u, u\rangle_2 + \langle u, u\rangle$$

$$\iff a(\mu_1\langle u, u\rangle_2 + \langle u, u\rangle)^{\frac{1}{2}} \leq (\mu_2\langle u, u\rangle_2 + \langle u, u\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

i.e.

$$a\|u\|_{\mu_1} \leq \|u\|_{\mu_2}$$

Veamos ahora que $\exists a', b' \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$a'\|u\|_{\mu_2} \leq \|u\|_{\mu_1} \leq b'\|u\|_{\mu_2}$$

Dado que $\mu_2 < \mu_1$, por un desarrollo totalmente análogo al realizado primero, basta con tomar $a' = 1$.

Sabemos que $\exists a \in \mathbb{R}^+$ tal que $a\|u\|_{\mu_1} \leq \|u\|_{\mu_2}$ i.e. $\|u\|_{\mu_1} \leq \frac{1}{a}\|u\|_{\mu_2}$ por lo que basta con tomar $b' := \frac{1}{a}$.

(c) Si $\lambda = -\lambda_1$, ¿es cierto que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega),-\lambda_1} := \left(-\lambda_1 \int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\nabla u\|^2\right)^{1/2}$$

es una norma en $H_0^1(\Omega)$? Justifica tu respuesta.

Solución

No es norma.

Sea $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que minimiza a $I(u) := \|u\|^2$ en $\Sigma \cap H_0^1(\Omega)$. Notemos que por la proposición 17.17 u_0 existe, $u_0 \neq 0$ y por el teorema 17.18 sabemos que $\lambda_1 = \frac{\|u_o\|^2}{\|u_0\|_2^2}$.

Así, por definición de primer valor propio y lo recién dicho

$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega),-\lambda_1} = -(inf_{u\in H_0^1(\Omega),u\neq 0}\frac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2})\|u_0\|_2^2 + \|u_0\|^2$$

$$= -(\frac{\|u_0\|^2}{\|u_0\|_2^2})\|u_0\|_2^2 + \|u_0\|^2 = -\|u_0\|^2 + \|u_0\|^2 = 0$$

de forma que

$$\|u_0\|_{H_0^1(\Omega),-\lambda_1} = 0 \quad , \quad u_0 \neq 0$$

por lo que $\|u\|_{H_0^1(\Omega),-\lambda_1}$ no es una norma en $H_0^1(\Omega)$.