Análisis Matemático II - Tarea 5

Fecha límite: domingo 31 de octubre a las 23:59 horas

Andrés Casillas García de Presno

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \times (a, b) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ una función con las siguientes propiedades:

   - Para cada $t \in (a, b)$, la función $x \mapsto f(x, t)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$.
   - P.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, la función $t \mapsto f(x, t)$ toma valores en $\mathbb{R}$ y es diferenciable en (a, b).
   - Existe una función integrable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tal que, para cada $t \in (a, b)$,

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x) \quad \text{p.c.t. } \ x \in \mathbb{R}^n.$$

   Prueba que la función $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, dada por

   $$F(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x, t) \, \mathrm{d}x,$$

   es diferenciable en (a, b) y que

   $$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, \mathrm{d}x.$$

   Solución

   Sean $t \in (a, b)$, $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en (a, b) tal que $t_k \to t$ y consideremos la siguiente sucesión de funciones

   $$f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
   $$f_k(x) = \frac{f(x, t_k) - f(x, t)}{t_k - t}$$

   Veamos que, por diferenciabilidad de $t \mapsto f(x, t)$ (hipótesis), tenemos que

$$\exists lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

Ahora bien, sabemos que $t \mapsto f(x,t)$ es diferenciable, por lo que en particular es continua. Además, por hipótesis, para cada $t \in (a,b)$

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x) \quad p.c.t. x \in \mathbb{R}^n$$

donde $g(x)$ no depende de t i.e. es una constante $M \in \mathbb{R}$. Así, por el teorema del valor medio (teorema 9.14)

$$|f(x,t_k) - f(x,t)| \leq g(x)|t_k - t|$$

como $t_k \neq t \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$|f_k(x)| = |\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}| \leq g(x)$$

p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$

Ahora bien, como por hipótesis $x \mapsto f(x,t)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces como $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ es espacio vectorial (teorema 12.33) entonces $f_k(x)$ es integrable para toda $k \in \mathbb{N}$.

Observemos que:

a) $f_k(x)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

b) $lim_{k\to\infty} f_k(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \quad p.c.t. \quad x \in \mathbb{R}^n$

c) $|f_k(x)| \leq g(x) \quad p.c.t \quad x \in \mathbb{R}^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$ donde $g(x)$ es integrable (hipótesis).

Así, aplicando el teorema de convergencia dominada (teorema 13.26) tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

es integrable y

$$lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f_k \quad dx = lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} lim_{k\to\infty}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Ahora bien, por hipótesis, sabemos que $t \mapsto f(x,t)$ es diferenciable en (a,b), es decir,

$$\exists lim_{k\to\infty}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}$$

Por el resultado recién anunciado, tenemos que

$$\exists \int_{\mathbb{R}^n} lim_{k\to\infty}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t} = lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}$$

pero

$$lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t} = \lim_{k\to\infty}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t_k)-\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)}{t_k-t} = \lim_{k\to\infty}\frac{F(t_k)-F(t)}{t_k-t}$$

i.e.

$$\exists \lim_{k\to\infty}\frac{F(t_k)-F(t)}{t_k-t}$$

de forma que $F(t)$ es diferenciable en (a,b)

Así, como $F(t)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx$ es diferenciable en (a,b) tenemos que

$$F'(t) = lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}dx$$

y por las igualdades anteriores, particularmente

$$lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x,t_k)-f(x,t)}{t_k-t}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

concluimos que

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

2. Sea $r > 0$. Prueba que la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$ si y sólo si $\gamma + n < 0$ y, en ese caso,

$$\int_{\|x\|\geq r} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x = -\frac{n\,\omega_n}{n+\gamma}\, r^{n+\gamma}.$$

<u>Solución</u>

$\rightarrow$) Supongamos que la función $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$. Del ejemplo 13.30 sabemos que

$$lim_{\beta\to\infty} \int_{A^n(r,\beta)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x = \begin{cases} \infty & \gamma + n \geq 0 \\ -\frac{n\,\omega_n}{n+\gamma}\, r^{n+\gamma} & \gamma + n < 0 \end{cases}$$

Supongamos por cotradicción que $\gamma + n \geq 0$. Por monotonía de la integral e integrabilidad de $x \mapsto \|x\|^\gamma$ tenemos que

$$\int_{A^n(r,\beta)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x < \infty \quad \forall \beta > r > 0$$

pero

$$lim_{\beta\to\infty} \int_{A^n(r,\beta)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x = \infty$$

lo cual es una contradicción.

Se sigue que $\gamma + n < 0$.

$\leftarrow$)Supongamos $\gamma + n < 0$. Sea $b > r > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ defino

$$X_m = A^n(r, b+m)$$

Es claro que $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$ y que $\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$. Por el ejemplo 13.30 sabemos que $f|_{X_k}$ es integrable para toda $k \in \mathbb{N}$ y, como $\gamma + n < 0$ tenemos que

$$lim_{k\to\infty} \int_{X_k} \|x\|^\gamma = -\frac{n\,\omega_n}{n+\gamma}\, r^{n+\gamma} < \infty$$

entonces el corolario 13.27 nos asegura que $x \mapsto \|x\|^\gamma$ es integrable en $\mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$ y en dado caso

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^n(0,r)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x = lim_{\beta\to\infty} \int_{A^n(r,\beta)} \|x\|^\gamma \mathrm{d}x = -\frac{n\,\omega_n}{n+\gamma}\, r^{n+\gamma}$$

3. Sean $a_1, \ldots, a_m$ puntos distintos en $\mathbb{R}^n$, $m > n > 1$, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x) := \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\|x - a_i\|}.$$
Prueba que f es integrable en $\mathbb{R}^n$.

Solución
Lema 1:
Sea $a_i \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$.Entonces la función $x \mapsto \frac{1}{\|x-a_i\|}$ es integrable en $\bar{B}^n(0,r)$ y en ese caso

$$\int_{\|x-a_i\|\le r} \|x - a_i\|^{-1} dx = \frac{n\omega_n}{n-1} r^{n-1}$$

Demostración:
Sea $\gamma = -1$. Dado que $n > 1$, por la proposición 13.31 y el teorema de cambio de variable aplicado a $\phi(x) = x - a_i$ (donde $|det\phi'| = 1$) tenemos que $x \mapsto \frac{1}{\|x-a_i\|}$ es integrable en $\bar{B}^n(0,r)$ y

$$\int_{\|x-a_i\|\le r} \|x - a_i\|^{-1} dx = \int_{\|x\|\le r} \|x\|^{-1} dx = \frac{n\omega_n}{n-1} r^{n-1}$$

Veamos que f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ defino

$$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$f_i(x) = \frac{1}{\|x - a_i\|}$$

de forma que

$$f = \prod_{i=1}^{m} f_i$$

Sea $r = \frac{1}{4} min\{\|a_i - a_j\| : i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j\}$ y sea

$$B = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{B}^n(a_i, r)$$

Por construcción, $\bar{B}^n(a_i, r) \cap \bar{B}^n(a_j, r) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Por el lema 1 sabemos que cada f_i es integrable en $\bar{B}^n(a_i, r)$ y es claro que cada f_j es integrable en $\bar{B}^n(a_i, r)$ con $i \neq j$ pues $f_j|_{\bar{B}^n(a_i,r)}$ es continua definida en un compacto, por lo que es integrable (proposición 12.42). Además como es continua definida en un compacto alcanza su máximo y su mínimo, por lo que en particular es acotada.

Así, f_i es integrable en $\bar{B}^n(a_j, r)$ para toda $j \in \{1, \ldots, m\}$ y es acotada en $\bar{B}^n(a_j, r)$ con $j \neq i$.

Ahora sí, sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Como $K = (K \cap B) \cup (K \setminus B)$ basta con ver que f es integrable en $(K \cap B)$ y en $(K \setminus B)$.

Veamos primero que f es integrable en $(K \setminus B)$. Como $K \setminus Int(B) = (\mathbb{R}^n \setminus Int(B)) \cap K$ es compacto (pues es intersección de cerrados y está acotado por K, que a su vez está acotado por ser compacto) y f es continua en $K \setminus Int(B)$ (pues cada f_i lo es) entonces es integrable en dicho dominio (proposicion 12.42). Sabemos que $\partial B = \bigcup_{i=1}^{m} \partial \bar{B}^n(a_i, r) = \bigcup_{i=1}^{m} S^{n-1}(a_i, r)$ pues son disjuntas. Por el ejemplo 13.37 sabemos que $S^{n-1}(a_i, r)$ es nulo para toda $i \in \{1, \ldots, m\}$ y como unión finita de nulos es nulo (ejemplo 13.5) entonces ∂B es nulo. Claramente $(K \cap \partial B) \subset \partial B$ por lo que $(K \cap \partial B)$ es nulo (proposición 13.4). Como $(K \setminus B) = (K \setminus Int(B)) \setminus (K \cap \partial B)$ entonces $f|_{(K \setminus Int(B))} = f|_{(K \setminus B)}$ p.c.t. $x \in \mathbb{R}^n$, entonces por la proposición 13.10 $f|_{(K \setminus B)}$ es integrable i.e. f es integrable en $(K \setminus B)$.

Veamos ahora que f es integrable en $(K \cap B)$. Veamos primero que f es integrable en $\bar{B}^n(a_i, r)$ con a_i arbitrario. Como cada f_i es integrable en $\bar{B}^n(a_i, r)$ y f_j (con $i \neq j$) es acotada en $\bar{B}^n(a_i, r)$ entonces aplicando recursivamente la proposicion 12.37 llegamos a que f es integrable en $\bar{B}^n(a_i, r)$.

Así, extensiones triviales de $f|_{\bar{B}^n(a_i,r)}$ son integrables (definición 12.41), por lo que $\sum_{i=1}^{m} \bar{f}|_{\bar{B}^n(a_i,r)} = f|_B$ es integrable (teorema 12.33) i.e. f es integrable en B. Como B y K con compactos entonces son integrables y por lo tanto $(K \cap B)$ es integrable (proposición 12.38). Por la proposición 12.43, como $(K \cap B) \subset B$ entonces f es integrable en $(K \cap B)$.

Así, como f es integrable en $(K \setminus B)$ y en $(K \cap B)$ entonces $f = \bar{f}|_{(K\setminus B)} + \bar{f}|_{(K\cap B)}$ es integrable en K.

Veamos ahora que existen $\epsilon > 0$, $M \geq 0$ y $r > 0$ tales que

$$|f(x)| \leq \frac{M}{\|x\|^{n+e}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$$

Sea $\epsilon = m - n > 0, M = 2^m, r = 2max\{\|a_i\| : i \in \{1, \ldots, m\}\}$

Notemos que, por elección de r, $\|a_i\| \leq \frac{\|x\|}{2} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$.

De esta forma

$\|x - a_i\| \geq \|x\| - \|a_i\| \geq \|x\| - \frac{1}{2}\|x\| = \frac{\|x\|}{2} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$

Así $\frac{1}{\|x-a_i\|} \leq \frac{2}{\|x\|} \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$

y

$$|f(x)| = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\|x - a_i\|} \leq \frac{2^m}{\|x\|^m} = \frac{M}{\|x\|^{n+\epsilon}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B^n(0,r)$$

El corolario 13.35 nos asegura que f es integrable en $\mathbb{R}^n$.