Análisis Matemático II - Tarea 8

Fecha límite: domingo 5 de diciembre a las 23:59 horas

Andrés Casillas

1. Sean H un espacio de Hilbert, U un subconjunto abierto de H y $\varphi : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable[1].

   (a) Prueba que, para cada $u \in U$, existe un único elemento $\nabla\varphi(u) \in H$ tal que
   $$\varphi'(u)v = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle \qquad \forall v \in H.$$
   $\nabla\varphi(u)$ se llama el **gradiente de φ en u**.

   Solución

   Dado que φ es diferenciable entonces, por definición, $\varphi'(u) : H \to \mathbb{R}$ es lineal y continua. Por el teorema de representación de Riez existe un único vector $w := \nabla\varphi(u) \in H$ tal que
   $$\varphi'(u)v = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle \qquad \forall v \in H$$

   (b) Prueba que φ es de clase $\mathcal{C}^1$ si y sólo si la función
   $$\nabla\varphi : U \to H, \qquad u \mapsto \nabla\varphi(u),$$
   es continua.

   Solución

   Denotemos por
   $$T_{\nabla\varphi(u)} : H \to \mathbb{R}$$
   $$T_{\nabla\varphi(u)}(v) = \langle \nabla\varphi(u), v\rangle$$
   Por el ejercicio 1(a) tenemos que $T_{\nabla\varphi(u)} = \varphi'(u)$ y por la proposición 15.18 sabemos que $T_{\nabla\varphi(u)}$ es lineal y continua y cumple que
   $$\|T_{\nabla\varphi(u)}\|_{\mathcal{L}} = \|\nabla\varphi(u)\|_H$$

[1] Las definiciones requeridas en este ejercicio se encuentran en el Capítulo 10 del libro de texto

$\to$) Sea $\epsilon > 0$ y sea $u \in U$. Por hipótesis, dado que $\varphi' : U \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ es continua tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|u-v\|_H < \delta$ entonces $\|\varphi'(u) - \varphi'(v)\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$ i.e. $\|T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)}\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$. Veamos ahora que para todo $w \in H$

$$(T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)})(w) = \langle \nabla\varphi(u), w\rangle - \langle \nabla\varphi(v), w\rangle = \langle \nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v), w\rangle$$
$$= T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)}(w)$$

de forma que

$$T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)} = T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)}$$

Así, tenemos que

$$\|T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)}\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$$

es lo mismo que

$$\|T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)}\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$$

y como $\|T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)}\|_{\mathcal{L}} = \|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v)\|_H$ entonces

$$\|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v)\|_H < \epsilon$$

Recapitulando, dada $\epsilon > 0$ y $u \in U$ tenemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\|u - v\|_H < \delta$ entonces $\|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v)\|_H < \epsilon$. Por arbitrariedad de $u \in U$, esto demuestra que $\nabla\varphi$ es continua en U.

$\leftarrow$)Sea $\epsilon > 0$ y $u \in U$. Supongamos ahora que $\nabla\varphi$ es continua, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $\|u - v\|_H < \delta$ entonces $\|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v)\|_H < \epsilon$. Dado que

$$\|\nabla\varphi(u) - \nabla\varphi(v)\|_H = \|T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)}\|_{\mathcal{L}}$$

y

$$T_{\nabla\varphi(u)-\nabla\varphi(v)} = T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)}$$

y por el ejercicio 1(a)

$$T_{\nabla\varphi(u)} - T_{\nabla\varphi(v)} = \varphi'(u) - \varphi'(v)$$

entonces

$$\|\varphi'(u) - \varphi'(v)\|_{\mathcal{L}} < \epsilon$$

es decir la función $\varphi' : U \to \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ es continua en $u \in U$. Por arbitrariedad de $u \in U$ se sigue que es continua en U y por lo tanto φ es de clase C^1 en U.

(c) Si φ es de clase $\mathcal{C}^1$, prueba que $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de φ si y sólo si $\nabla\varphi(u) \neq 0$ para todo $u \in M := \varphi^{-1}(c)$.

Solución

$\to$) Supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es un valor regular de φ y, procediendo por contradicción, supongamos que $\nabla\varphi(u) = 0$ para algún $u_0 \in M$. Por definición $\varphi'(u_0) : H \to \mathbb{R}$ es sobreyectiva y por el ejercicio 1(a) sabemos que

$$\varphi'(u_0)(v) = \langle \nabla\varphi(u_0), v\rangle \qquad \forall v \in H$$

de forma que

$$\varphi'(u_0)(v) = \langle 0, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in H$$

Claramente esto contradice que $\varphi'(u_0)$ sea sobreyectiva.

Así, $\nabla\varphi(u) \neq 0$ para todo $u \in M$.

$\leftarrow$) Supongamos que $\nabla\varphi(u) \neq 0$ para todo $u \in M$. Procediendo por contradicción, supongamos que para algún $u_0 \in M$, $\varphi'(u_0)$ no es suprayectiva. Por el inciso 1(a) sabemos que

$$\varphi'(u_0) = \langle \nabla\varphi(u_0), v\rangle \qquad \forall v \in H$$

Ahora bien, sea $r \in \mathbb{R}$ y consideremos $v := r\frac{\nabla\varphi(u_0)}{\langle \nabla\varphi(u_0), \nabla\varphi(u_0)\rangle}$. Dado que $\nabla\varphi(u_0) \neq 0$ entonces $\langle \nabla\varphi(u_0), \nabla\varphi(u_0)\rangle \neq 0$ y $v \in H$ está bien definido.

Por bilinealidad del producto escalar tenemos que

$$\varphi'(u_0)(v) = \langle \nabla\varphi(u_0), v\rangle = r\frac{\langle \nabla\varphi(u_0), \nabla\varphi(u_0)\rangle}{\langle \nabla\varphi(u_0), \nabla\varphi(u_0)\rangle} = r$$

de forma que $\varphi'(u_0)$ es sobreyectiva, pues basta con definir v como lo hemos hecho para cada $r \in \mathbb{R}$. Esto es una contradicción y por lo tanto $\varphi'(u)$ es sobreyectiva para todo $u \in M$, es decir, $c \in \mathbb{R}$ es valor regular de φ.

(d) Sean $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de φ y $M := \varphi^{-1}(c)$. Prueba que el espacio tangente a M en el punto $u \in M$ es el espacio ortogonal a $\nabla\varphi(u)$, es decir,

$$T_uM = \{v \in H : \langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0\}.$$

Solución

Sea $u \in M$. Por definición, dado que $\varphi'(u) : H \to \mathbb{R}$, $T_uM = ker\varphi'(u) = \{v \in H : \varphi'(u)(v) = 0\}$. Por el ejercicio 1(a) tenemos que $\{v \in H : \varphi'(u)(v) = 0\} = \{v \in H : \langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0\}$ de forma que $T_uM = \{v \in H : \langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0\}$.

(e) Sean $\varphi, \psi : U \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, $c \in \mathbb{R}$ un valor regular de φ y $M := \varphi^{-1}(c)$. Prueba que u es un punto crítico de ψ en M si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla\psi(u) = \lambda\nabla\varphi(u).$$

λ se llama un **multiplicador de Lagrange**.

Solución

Lemita

$\{v \in H : \langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0\} = \{v \in H : \langle \lambda\nabla\varphi(u), v\rangle = 0 \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}\}$

Demostración

$\to$) Si v es tal que $\langle \nabla\varphi(u), v\rangle = 0$ entonces dada $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que $\langle \lambda\nabla\varphi(u), v\rangle = \lambda\langle \nabla\varphi(u), v\rangle = \lambda * 0 = 0$.

$\leftarrow$) Sea v tal que $\langle \lambda \nabla \varphi(u), v \rangle = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{R}$ y supongamos por contradicción que $\langle \nabla \varphi(u), v \rangle \neq 0$. Entonces para $\lambda \neq 0$ tendríamos que $\langle \lambda \nabla \varphi(u), v \rangle = \lambda \langle \nabla \varphi(u), v \rangle \neq 0$ lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por definición, u es un punto crítico de ψ en M si y sólo si $\psi'(u)v = 0$ para todo $v \in T_u M$. Por el inciso anterior sabemos que $T_u M = \{v \in H : \langle \nabla \varphi(u), v \rangle = 0\}$ y por el lemita $\{v \in H : \langle \nabla \varphi(u), v \rangle = 0\} = \{v \in H : \langle \lambda \nabla \varphi(u), v \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$

Observemos que, por definición de subespacio ortogonal, $\{v \in H : \langle \lambda \nabla \varphi(u), v \rangle = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\} = \{v \in H : v \in lin(\nabla \varphi(u))^{\perp}\} = lin(\nabla \varphi(u))^{\perp}$.

Por el ejercicio 1(a) tenemos que $\psi'(u)v = \langle \nabla \psi(u), v \rangle$ de forma que u es un punto crítico de ψ en M si y sólo si $\langle \nabla \psi(u), v \rangle = 0$ para toda $v \in lin(\nabla \varphi(u))^{\perp}$, es decir, $\nabla \psi(u) \in lin(\nabla \varphi(u))^{\perp^{\perp}}$.

Veamos ahora que $lin(\nabla \varphi(u))$ es un subespacio cerrado de H.

Sean $w \in \overline{lin(\nabla \varphi(u))}$, $\epsilon > 0$. Por definición existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\langle w - \lambda \nabla \varphi(u), w - \lambda \nabla \varphi(u) \rangle < \epsilon$, es decir, $\|w\|^2 - 2\lambda \langle \nabla \varphi(u), w \rangle + \lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 < \epsilon$.

Sin pérdida de generalidad, podemos escribir a w como $w = \lambda \varphi(u) + z$ con $z \in H$. Tenemos entonces que

$$\|w\|^2 - 2\lambda \langle \nabla \varphi(u), \lambda \varphi(u) + z \rangle + \lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 < \epsilon$$

$$\|w\|^2 - 2\lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 - 2\lambda \langle \nabla \varphi(u), z \rangle + \lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 < \epsilon$$

$$\|w\|^2 - \lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 - 2\lambda \langle \nabla \varphi(u), z \rangle < \epsilon$$

donde

$$\|w\|^2 = \lambda^2 \|\nabla \varphi(u)\|^2 + 2\lambda \langle \nabla \varphi(u), z \rangle + \|z\|^2$$

de forma que

$$\lambda^2\|\nabla\varphi(u)\|^2 - \lambda^2\|\nabla\varphi(u)\|^2 + 2\lambda\langle\nabla\varphi(u), z\rangle - 2\lambda\langle\nabla\varphi(u), z\rangle + \|z\|^2 < \epsilon$$

$$\|z\|^2 < \epsilon$$

Es decir, $z = 0_H$. Así, $w = \lambda\nabla\varphi(u)$ de forma que $lin(\nabla\varphi(u))$ es cerrado.

Veamos ahora que esto implica que $lin(\nabla\varphi(u))^{\perp^\perp} = lin(\nabla\varphi(u))$. Hagámoslo en general para cualquier subespacio cerrado V.

Dado que V es cerrado, por el teorema 15.17 sabemos que

$$H = V \oplus V^\perp$$

Por la proposición 15.12 sabemos que $V^\perp$ siempre es cerrado, de forma que, aplicando de nuevo el teorema 15.17 tenemos que

$$H = V^\perp \oplus V^{\perp^\perp}$$

Así, dado $h \in H$, existen únicos $v \in V, v_1, v_2 \in V^\perp, w \in V^{\perp^\perp}$ tales que

$$h = v + v_1$$
$$h = v_2 + w$$

de forma que

$$0 = (v_1 - v_2) + (v - w)$$

donde $(v_1 - v_2) \in V^\perp$. Por las relaciones anteriores se sigue que $(v - w) \in V$ i.e. $w \in V$. Así, $V^{\perp^\perp} \subset V$. La definición 15.10 asegura que siempre $V \subset V^{\perp^\perp}$, lo cual conluye la prueba.

Recapitulando, sabemos que $\nabla\psi(u) \in lin(\nabla\varphi(u))^{\perp^\perp}$ y por lo dicho anteriormente $\nabla\psi(u) \in lin(\nabla\varphi(u))$ de forma que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla\psi(u) = \lambda\nabla\varphi(u)$.

2. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert.

(a) Prueba que, si $T : H_1 \to H_2$ es una función lineal y continua y $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1, entonces $Tu_k \rightharpoonup Tu$ débilmente en H_2.

Solución

Veamos que para cada $w_2 \in H_2$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \langle T(u_k), w_2 \rangle = \langle T(u), w_2 \rangle$$

Sea $w_2 \in H_2$. Por la proposición 15.18 sabemos que

$$T_{w_2} : H_2 \to \mathbb{R}$$

$$T_{w_2}(u) := \langle u, w_2 \rangle$$

es lineal y continua.

Por hipótesis $T : H_1 \to H_2$ es lineal y continua, por lo que $T_{\bar{w}} := T_{w_2} \circ T$ es lineal y continua, $T_{\bar{w}} : H_1 \to \mathbb{R}$. Por el teorema de representación de Fréchet-Riesz sabemos que existe un único $\bar{w} \in H_1$ tal que

$$T_{\bar{w}}(u) = \langle u, \bar{w} \rangle \quad \forall u \in H_1$$

Así, como por hipótesis $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en H_1, entonces para $\bar{w} \in H_1$ sabemos que

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, \bar{w} \rangle = \langle u, \bar{w} \rangle$$

i.e.

$$\lim_{k\to\infty} T_{\bar{w}}(u_k) = T_{\bar{w}}(u)$$

y por definición de $T_{\bar{w}}$

$$\lim_{k\to\infty} T_{w_2} \circ T(u_k) = T_{w_2} \circ T(u)$$

i.e.

$$\lim_{k\to\infty} T_{w_2}(T(u_k)) = T_{w_2}(T(u))$$

de forma que, por definición de T_{w_2},

$$\lim_{k\to\infty}\langle T(u_k), w_2\rangle = \langle T(u), w_2\rangle$$

Esto demuestra que $T(u_k) \rightharpoonup T(u)$ débilmente en H_2.

(b) Da un ejemplo de una función continua $\varphi : H_1 \to H_2$ y una sucesión (u_k) débilmente convergente en H_1 tales que $(\varphi(u_k))$ no converge débilmente en H_2.

<u>Solución</u>

Sean H_1 cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita, $H_2 = \mathbb{R}$ con el producto interior dado por el producto usual y $\phi : H_1 \to H_2$ la función norma i.e. $\phi = \|\cdot\|$. Sabemos que la función norma entre cualesquiera dos espacios normados es continua, en particular entre cualesquiera dos espacios de Hilbert.

Denotemos por e_0 al 0 del espacio H_1 y sea $\mathcal{O} = \{e_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ un subconjunto ortonormal de H_1. Consideremos el conjunto $\mathcal{O}' := \mathcal{O} \cup e_0$ y la siguiente sucesión:

$$(e'_k) := (e_1, e_0, e_2, e_0, e_3, e_0, e_4, \dots)$$

definida explícitamente como

$$f : \mathbb{Z}^+ \to H_1$$

$$f(n) = \begin{cases} e_0 & n = 2k \quad p.a.k \in \mathbb{Z}^+ \\ e_k & n = 2k-1 \quad p.a.k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Es claro que $lin(\mathcal{O}) = lin(\mathcal{O}')$, por lo que, por la demostración del ejemplo 15.26, tenemos que $e'_k \rightharpoonup 0$ débilmente en H_1. Otra forma de verlo es la siguiente: por el ejemplo 15.26 sabemos que la sucesión

$$((e_k)) := (e_1, e_2, e_3, e_4, \dots)$$

es tal que $((e_k)) \rightharpoonup 0$ débilmente en H_1. Como para cualquier $v \in H_1$ se tiene que $\lim_{k\to\infty}\langle e_0, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$ entonces para

cualquier $v \in H_1$ se tiene que $\lim_{k\to\infty}\langle e_k, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$ i.e. $(e'_k) \rightharpoonup 0$ débilmente en H_1.
Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\phi(e_k) = \|e_k\| = \begin{cases} 1 & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

de forma que, tomando $1 \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\langle \phi(e_k), 1\rangle_{\mathbb{R}} = \begin{cases} \langle 1, 1\rangle_{\mathbb{R}} & k \neq 0 \\ \langle 0, 1\rangle_{\mathbb{R}} & k = 0 \end{cases}$$

y por definición de (e'_k) se sigue que no existe $\lim_{k\to\infty}\langle \phi(e_k), 1\rangle_{\mathbb{R}}$ i.e. $(\phi(e_k))$ no converge débilmente en $\mathbb{R}$.
Para un ejemplo particular concreto basta con tomar $H_1 = l^2$ el espacio de sucesiones $x = (x_k)$ de números reales tales que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ converge, con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad x = (x_k), y = (y_k) \in l^2$$

$$e_k = (0, \dots, 1_k, 0, \dots) \quad si \quad k \geq 1$$
$$e_0 = (0, \dots) \quad si \quad k = 0$$

donde 1_k representa un 1 en el k-ésimo elemento de la sucesión.