

Econometría I (EC402)

Clase #19 - Prueba de Chow, Normalidad y Multicolinealidad

Prof. Andrés M. Castaño

Ingeniería Comercial
Universidad Católica del Norte
Lunes 18 de noviembre de 2013

Pruebas de hipótesis en el MCRLM

- Prueba de hipótesis sobre un coeficiente de regresión parcial o individual (Prueba t) \implies desarrollado.
- Prueba de significancia global del modelo de regresión múltiple estimado (prueba F) \implies desarrollado.
- Prueba de que dos o más coeficientes son iguales a cero \implies desarrollado.
- Prueba de que los coeficiente de regresión parcial satisfacen ciertas restricciones \implies pendiente.
- Prueba sobre la forma funcional de los modelos de regresión \implies pendiente.
- Prueba de la estabilidad de los modelos de regresión a través del tiempo \implies pendiente.

Ejemplo: Función Cúbica de Costo

RECONSIDERACIÓN DE LA FUNCIÓN CÚBICA DE COSTO

Recuérdese la función cúbica de costo total estimada en la sección 7.10, la cual por conveniencia se reproduce en seguida:

$$\begin{aligned}\hat{Y}_i &= 141.7667 + 63.4777X_i - 12.9615X_i^2 + 0.9396X_i^3 \\ \text{ee} &= (6.3753) \quad (4.7786) \quad (0.9857) \quad (0.0591) \quad (7.10.6) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4) &= -0.0576; \quad R^2 = 0.9983\end{aligned}$$

donde F es el costo total y X es el producto, y donde las cifras en paréntesis son los errores estándar estimados.

Supóngase que se desea probar la hipótesis de que los coeficientes de los términos X^2 y X^3 en la función cúbica de costo son los mismos, es decir, $\beta_3 = \beta_4$ o $(\beta_3 - \beta_4) = 0$. En la regresión (7.10.6) tenemos todos los resultados necesarios para realizar la prueba t a partir de (8.6.5). La mecánica es la siguiente:

$$\begin{aligned}t &= \frac{\hat{\beta}_3 - \hat{\beta}_4}{\sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_3) + \text{var}(\hat{\beta}_4) - 2\text{cov}(\hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4)}} \\ &= \frac{-12.9615 - 0.9396}{\sqrt{(0.9867)^2 + (0.0591)^2 - 2(-0.0576)}} \\ &= \frac{-13.9011}{1.0442} = -13.3130\end{aligned} \quad (8.6.6)$$

El lector puede verificar que para 6 g de I (¿por qué?) el valor t observado, excede el valor t crítico aún al nivel de significancia de 0.002 (o 0.2%) (prueba de dos colas); el valor p es extremadamente pequeño, 0.000006. Por tanto, se puede rechazar la hipótesis de que los coeficientes de X^2 y X^3 en la función cúbica de costo son idénticos.

Prueba de estabilidad estructural o paramétrica de los modelos de regresión: Prueba de Chow

- En series de tiempo, puede que en algún momento exista un cambio estructural en la relación entre la regresada y las regresoras.
- Ejemplos: la apertura comercial de un país, la guerra entre países, descentralización.
- Por motivo de estos cambios el valor de los parámetros no permanece constante a lo largo del tiempo, en alguna especificación que los incluya de algún modo.

Ejemplo: recesión de 1982 en EEUU

AHORROS E INGRESO PERSONAL DISPONIBLE (EN MILES DE MILLONES DE DÓLARES)
PARA ESTADOS UNIDOS, 1970-1995

Observación	Ahorros	Disponible	Observación	Ahorros	Disponible
1970	61.0	727.1	1983	167.0	2 522.4
1971	68.6	790.2	1984	235.7	2 810.0
1972	63.6	855.3	1985	206.2	3 002.0
1973	89.6	965.0	1986	196.5	3 187.6
1974	97.6	1 054.2	1987	168.4	3 363.1
1975	104.4	1 159.2	1988	189.1	3 640.8
1976	96.4	1 273.0	1989	187.8	3 894.5
1977	92.5	1 401.4	1990	208.7	4 166.8
1978	112.6	1 580.1	1991	246.4	4 343.7
1979	130.1	1 769.5	1992	272.6	4 613.7
1980	161.8	1 973.3	1993	214.4	4 790.2
1981	199.1	2 200.2	1994	189.4	5 021.7
1982	205.5	2 347.3	1995	249.3	5 320.8

Fuente: Reporte económico del Presidente, 1997, tabla B-28, p. 332.

Qué hacemos para testear el cambio estructural?

- Se divide la muestra en dos periodos: 1970-1981 y 1982-1995.
- Se tiene entonces tres posibles regresiones (la todo el periodo y las dos de los subperiodos):
 - ▶ Periodo 1970-1981 $\implies Y_t = \lambda_1 + \lambda_2 X_t + \mu_{1t} \implies n_1 = 12$
 - ▶ Periodo 1982-1995 $\implies Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 X_t + \mu_{2t} \implies n_2 = 14$
 - ▶ Periodo 1970-1995 $\implies Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \mu_t \implies n = (n_1 + n_2) = 26$
- Si no hubiera cambio estructural entonces $\alpha_1 = \gamma_1 = \lambda_1$ y $\alpha_2 = \gamma_2 = \lambda_2$.
- Las diferencias pueden deberse a diferencias en la intersección o en el coeficiente de pendiente.

Resultados de las tres regresiones

$$\hat{Y}_t = 1.0161 + 0.0803X_t$$
$$t = (0.0873) \quad (9.6015)$$

$$R^2 = 0.9021 \quad \text{SRC}_1 = 1\,785.032 \quad \text{g de l} = 10$$

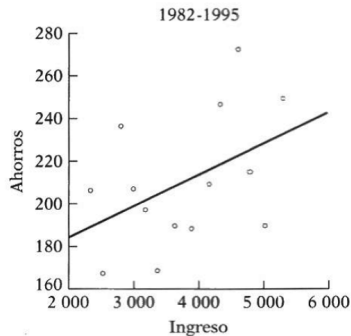
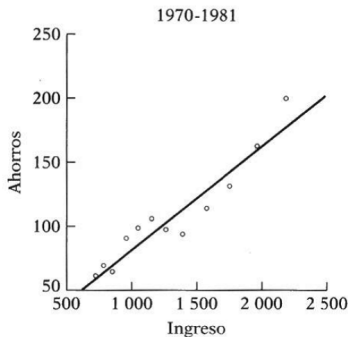
$$\hat{Y}_t = 153.4947 + 0.0148X_t$$
$$t = (4.6922) \quad (1.7707)$$

$$R^2 = 0.2971 \quad \text{SRC}_2 = 10\,005.22 \quad \text{g de l} = 12$$

$$\hat{Y}_t = 62.4226 + 0.0376X_t + \dots$$
$$t = (4.8917) \quad (8.8937) + \dots$$

$$R^2 = 0.7672 \quad \text{SRC}_3 = 23\,248.30 \quad \text{g de l} = 24$$

Gráficos dos periodos



Prueba de Chow

- La prueba supone que: $\mu_{1t} \sim N(0, \sigma^2)$ y $\mu_{2t} \sim N(0, \sigma^2)$. Los términos se distribuyen de manera independiente.
- Se estima la regresión que supone que no hay cambio estructural, y se obtiene la SRC_3 con g de l de $(n_1 + n_2 - k)$ donde k es el número de parámetros estimados. En el ejemplo $SRC_3 = 23248,30$ a esta se le llama suma restringida (SRC_R) dado que supone que $\gamma_2 = \lambda_2$
- Se estima la regresión del primer sub-periodo y se obtiene la SRC_1 con g de l de $(n_1 - k)$. En el ejemplo $SRC_1 = 1785,032$ y 10 g de l.
- Se estima la regresión del segundo sub-periodo y se obtiene la SRC_2 con g de l de $(n_2 - k)$. En el ejemplo $SRC_2 = 10055,22$ y 12 g de l.
- Se suman los residuos de los sub-periodos para obtener la suma de residuos al cuadrado no restringida $(SRC_1 + SRC_2) = SRC_{NR} = (11790,25)$

Prueba de Chow

- La idea detrás de la prueba de Chow es que si no existe un cambio estructural entonces la SRC_{NR} y SRC_R no deberían ser estadísticamente diferentes.

$$F = \frac{\frac{SRC_R - SRC_{NR}}{k}}{\frac{SRC_{NR}}{n_1 + n_2 - 2k}} \sim F(k, (n_1 + n_2 - 2k))$$

- La hipótesis nula es de estabilidad paramétrica, y la alterna es lo contrario.
- Si el $F_{cal} > F_{cri}$, se rechaza la hipótesis nula de estabilidad paramétrica. Por lo cual la regresión agrupada es una mala decisión.

•

$$F_{cal} = \frac{\frac{23248,30 - 11790,252}{2}}{\frac{11790,252}{22}} = 10,69$$

- F_{cri} para 2 y 22 g de l el valor de F al 1 % es 7.72. Por lo tanto la probabilidad de obtener un F igual o mayor a 10.69 es mucho menor que el 1 %, es de 0.00057

Advertencias respecto a la prueba de Chow

- Se debe verificar que la varianza de los errores de los dos periodos sea igual.
- La prueba de Chow sólo dirá que hay inestabilidad de los parámetros, no dirá si se debe a un cambio de pendiente o a un cambio de intercepto.
- La prueba de Chow supone que el investigador está en la capacidad de determinar en qué momento del tiempo se presentó la ruptura estructural.

Prueba Jarque-Bera (J.B) \implies Normalidad

- Necesaria para realizar inferencia estadística de los coeficientes estimados, indispensable para realizar predicciones.
- Prueba asintótica o de grandes muestras.
- Calcula la asimetría (distribución de los datos, sesgo) y la curtosis (concentración de valores alrededor de la media) de los residuos.

-

$$JB = n \left(\frac{S^2}{6} + \frac{(K - 3)^2}{24} \right)$$

n=tamaño de la muestra; S=coeficiente de asimetría;
K=coeficiente de curtosis.

Prueba Jarque-Bera (JB) \Rightarrow Normalidad

- Hipotesis a contrastar por el estadístico:
 - ▶ H_0 : Los residuos generados por el proceso se distribuyen normalmente.
 - ▶ H_0 : Los residuos generados por el proceso no se distribuyen normalmente.
- Criterio de decisión:
 - ▶ Si J.B calculado $>$ J.B crítico rechaza H_0 .
 - ▶ Si J.B calculado $>$ J.B crítico no rechaza H_0 .
- El estadístico J.B se distribuye $\chi^2_{N.S,g.l.}$.

Normalidad: Implementación en GRETL

The screenshot displays the GRETL software interface. The main window shows a list of variables on the left and a list of models on the right. A sub-window titled 'gretl: modelo 4' is open, showing the results of a normality test. The test results are as follows:

Contraste	Estadístico t	Valor p
No linealidad (cuadrados)	-2,219	0,0272 **
No linealidad (logs)	-2,157	0,0317 **
Contraste RESET de Ramsey	0,5883	0,5568
Heterocedasticidad	0,2912	0,7711
Normalidad de los residuos	-7,279	2,58e-012 ***
Observaciones influyentes	19,31	9,04e-056 ***

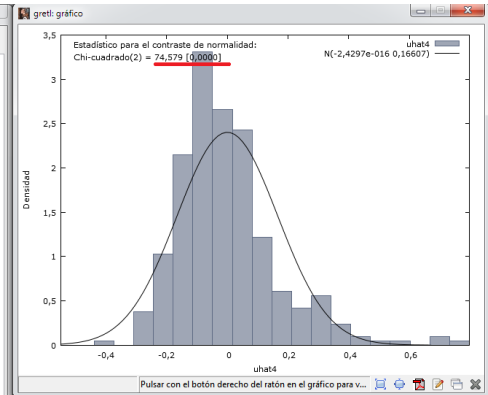
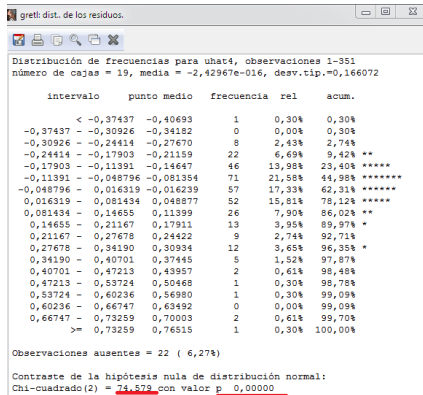
The 'Normalidad de los residuos' test result is highlighted with a red box. The p-value is 2,58e-012, which is less than 0.001, indicating a significant departure from normality.

Below the test results, the following statistics are displayed:

Variable	Valor
Modelo 4: MC	(n = 329)
Se han quitado	incompletas: 22
Variable dependiente	
Media de la	
Suma de cuadrados	
R-cuadrado	
F(5, 323)	
Log-verosimilitud	
Criterio de Akaike	
Criterio de Schwarz	
Contraste de RV de Quandt (QLR)	
Contraste CUSUM	
Contraste CUSUMSQ	
Factor común	
Diagnósticos de panel	

The status bar at the bottom indicates 'Sin fecha: Rango completo 1 - 351'.

Normalidad: Implementación en GRETL



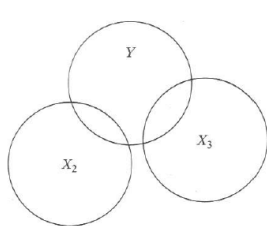
Naturaleza de la Multicolinealidad

- Diferencia entre multicolinealidad perfecta y menos que perfecta.
- La multicolinealidad provoca que no pueda estimar los errores estándar con precisión ¿porqué?

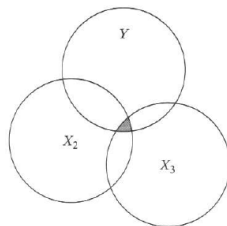
Ejemplo: Perfecta y menos que perfecta

X_2	X_3	X_3^*
10	50	52
15	75	75
18	90	97
24	120	129
30	150	152

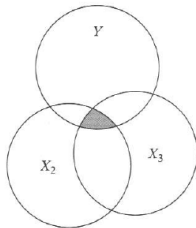
Ejemplo



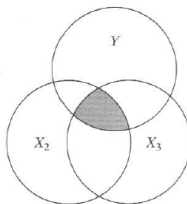
a) No existe colinealidad



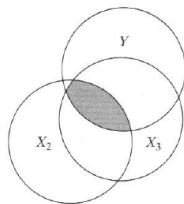
b) Baja colinealidad



c) Colinealidad moderada



d) Colinealidad alta



e) Colinealidad muy alta

Naturaleza de la Multicolinealidad

- La relación entre las variables tiene que ser lineal, la siguiente es una relación no lineal:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_1^2 + \beta_2 X_1^3 + \beta_2 X_1^4 + \mu_i$$

- Cuando la multicolinealidad es perfecta los coeficientes de regresión son indeterminados y sus errores estándar son infinitos.
- Cuando la multicolinealidad es menos que perfecta los coeficientes no pueden ser estimados con precisión.

Fuentes de la multicolinealidad

- El método de recolección de información empleado.
- Restricciones en el modelo o en la población objeto de muestreo (regresión consumo de electricidad contra el ingreso y el tamaño de las viviendas).
- Especificación en el modelo.
- Modelo sobredeterminado $\implies X > N$
- Regresoras de tendencia común \implies Series de Tiempo

Estimación en presencia de Multicolinealidad Perfecta

- Porqué los coeficientes son indeterminados y sus errores estándar son infinitos?

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

- Suponga que $X_{3i} = \lambda X_{2i}$, y que λ es una constante diferente de 0.

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_2 &= \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i})(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2) - \lambda^2 (\sum x_{2i}^2)^2} \\ &= \frac{0}{0}\end{aligned}$$

para $\hat{\beta}_3$ igual es indeterminada.

Estimación en presencia de Multicolinealidad Perfecta

- Recuerde que $\hat{\beta}_2$ es la tasa de cambio en el valor promedio de Y cuando X_2 cambia en una unidad, en presencia de multicolinealidad $\hat{\beta}_3$ cambia también en un valor igual a λ , ¿qué implicaciones tiene esto?

- $$y_i = \hat{\beta}_2 x_{2i} + \hat{\beta}_3 (\lambda x_{2i}) + \hat{\mu}_i$$

- No hay forma de estimar β_2 y β_3 en forma igualmente única.

Estimación en presencia de Multicolinealidad menos que perfecta

- La situación de multicolinealidad perfecta es en la práctica un fenómeno anormal.
- Suponga que $X_{3i} = \lambda X_{2i} + v_i$, y que λ es una constante diferente de 0 y v_i es un término de error estocástico tal que $\sum x_{2i}v_i = 0$. Ahora los parámetros serían:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda \sum y_i x_{2i} + \sum y_i v_i)(\lambda \sum x_{2i}^2)}{(\sum x_{2i}^2)(\lambda^2 \sum x_{2i}^2 + \sum v_i^2) - (\lambda^2 \sum x_{2i}^2)}$$

para $\hat{\beta}_3$ igual se podría estimar.

Consecuencias teóricas de la Multicolinealidad

- A nivel teórico la multicolinealidad, el número reducido de observaciones y poca variabilidad hacer parte de un mismo problema \implies problemas para estimar los coeficientes con errores estándar pequeños (Leaner).
- La micronumerosidad (exacta) es la contraparte de la multicolienalidad (exacta). Problemas para estimar cuando las observaciones exceden por poco el número de parámetros.
- (1) La multicolinealidad permite obtener estimadores insesgados.
- (2) La colinealidad no destruye la propiedad de varianza mínima (eficiencia), pero no significa que la varianza del estimador MCO sea pequeña en relación con el valor del estimador en cualquier muestra dada.
- (3) La multicolinealidad es esencialmente un fenómeno de la regresión muestral.

Consecuencias prácticas de la Multicolinealidad

- (1) Aun cuando los estimadores MCO sean MELI, estos presentan varianzas y covarianzas grandes que hacen difícil la estimación precisa.
- (2) Debido a (1) los intervalos de confianza tienden a ser mucho más amplios, lo cual propicia una aceptación más fácil de la aceptación de la hipótesis nula.
- (3) Debido a (1) la razón t de uno o más coeficientes sea estadísticamente significativa.
- (4) R^2 tiende a ser muy alto.
- (5) Los estimadores MCO y sus errores estándar son sensibles a pequeños cambios de información.

1. Estimadores con varianzas y covarianzas grandes



$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2(1 - r_{23}^2)}$$



$$Var(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2(1 - r_{23}^2)}$$



$$Cov(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = \frac{-r_{23}\sigma^2}{(1 - r_{23}^2)\sqrt{\sum x_{2i}^2 x_{3i}^2}}$$

- La velocidad a la que las varianzas y covarianzas se incrementa se define como el FIV (factor inflador de varianza)

$$FIV = \frac{1}{1 - r_{23}^2}$$

1. Estimadores con varianzas y covarianzas grandes



$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2} * FIV$$



$$Var(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{\sum x_{3i}^2} * FIV$$

- Con k variables:

$$Var(\hat{\beta}_j) = \frac{\sigma^2}{\sum x_j^2} * FIV_j$$



$$TOL_j = \frac{1}{FIV_j} = (1 - R_j^2)$$

Ejemplo: Efecto del FIV

EFFECTO DE INCREMENTAR r_{23} SOBRE LA VAR ($\hat{\beta}_2$) Y LA COV ($\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$)

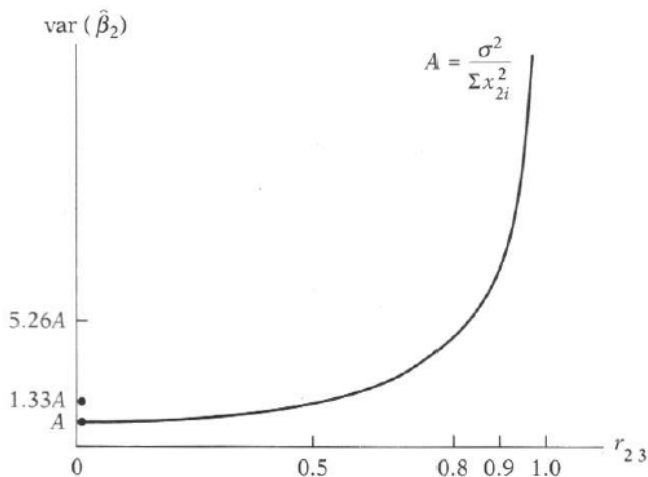
Valor de r_{23} (1)	FIV (2)	var ($\hat{\beta}_2$) (3)*	$\frac{\text{var}(\hat{\beta}_2)(r_{23} \neq 0)}{\text{var}(\hat{\beta}_2)(r_{23} = 0)}$ (4)	cov ($\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$) (5)
0.00	1.00	$\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2} = A$	—	0
0.50	1.33	$1.33 \times A$	1.33	$0.67 \times B$
0.70	1.96	$1.96 \times A$	1.96	$1.37 \times B$
0.80	2.78	$2.78 \times A$	2.78	$2.22 \times B$
0.90	5.76	$5.26 \times A$	5.26	$4.73 \times B$
0.95	10.26	$10.26 \times A$	10.26	$9.74 \times B$
0.97	16.92	$16.92 \times A$	16.92	$16.41 \times B$
0.99	50.25	$50.25 \times A$	50.25	$49.75 \times B$
0.995	100.00	$100.00 \times A$	100.00	$99.50 \times B$
0.999	500.00	$500.00 \times A$	500.00	$499.50 \times B$

Nota: $A = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}$

$$B = \frac{-\sigma^2}{\sqrt{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}}$$

x = tiempo

Ejemplo: Efecto del FIV



El comportamiento de la $\text{var}(\hat{\beta}_2)$ como función de r_{23} .

2. Intervalos de confianza más amplios

EFFECTO DE INCREMENTAR LA
COLINEALIDAD SOBRE EL INTERVALO
DE CONFIANZA DEL 95% PARA
 β_2 : $\hat{\beta}_2 \pm 1.96$ ee $(\hat{\beta}_2)$

Valor de	Intervalo de confianza del 95% para
0.00	$\hat{\beta}_2 \pm 1.96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}}$
0.50	$\hat{\beta}_2 \pm 1.96 \sqrt{1.33} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}}$
0.95	$\hat{\beta}_2 \pm 1.96 \sqrt{(10.26)} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}}$
0.995	$\hat{\beta}_2 \pm 1.96 \sqrt{100} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}}$
0.999	$\hat{\beta}_2 \pm 1.96 \sqrt{(500)} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2}}$

Nota: Se está usando la distribución normal porque

3. Razones t no significativas

- El estadístico t se define como:

$$t = \frac{\hat{\beta}_k}{ee(\hat{\beta}_k)}$$

- El error estándar aumenta drásticamente producto del FIV, por lo cual t disminuye, lo que finalmente lleva a que no se rechaze con más facilidad

4. Un R^2 alto pero pocas razones t significativas

- Dado lo anterior es posible encontrar que uno o más coeficientes sean no significativos de manera individual de acuerdo a la prueba t.
- Con un R^2 alto es posible rechazar la hipótesis de que los coeficientes son simultáneamente iguales a cero con base en la prueba F.
- Una señal clara de multicolinealidad son valores t no significativos pero un R^2 alto.

5. Sensibilidad de los estimadores MCO y sus errores a pequeños cambios en la información

$$\hat{Y}_i = 1.1939 + 0.4463X_{2i} + 0.0030X_{3i}$$

$$(0.7737) \quad (0.1848) \quad (0.0851)$$

$$t = (1.5431) \quad (2.4151) \quad (0.0358)$$

$$R^2 = 0.8101 \quad r_{23} = 0.5523$$

$$\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0.00868 \quad g \text{ de } l = 2$$

5. Sensibilidad de los estimadores MCO y sus errores a pequeños cambios en la información

TABLA 10.3

DATOS HIPOTÉTICOS EN Y , X_2 Y X_3

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	12
4	6	0
5	8	16

TABLA 10.4

DATOS HIPOTÉTICOS EN Y , X_2 Y X_3

Y	X_2	X_3
1	2	4
2	0	2
3	4	0
4	6	12
5	8	16

5. Sensibilidad de los estimadores MCO y sus errores a pequeños cambios en la información

$$\hat{Y}_i = 1.2108 + 0.4014X_{2i} + 0.0270X_{3i}$$

$$(0.7480) \quad (0.2721) \quad (0.1252)$$

$$t = (1.6187) \quad (1.4752) \quad (0.2158)$$

$$R^2 = 0.8143 \quad r_{23} = 0.8285$$

$$\text{cov}(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3) = -0.0282 \quad g \text{ de } l = 2$$

Detección de la Multicolinealidad

- Una señal clara de multicolinealidad son valores t no significativos pero un R^2 alto.
- Correlaciones altas entre parejas de regresores. Condición necesaria más no suficiente.
- Examen de correlaciones parciales.
- Regresiones auxiliares, y luego verificar el estadístico F .
- Factores de tolerancia e inflación de varianza. Si FIV es superior a 10 se dice que hay problema grave de multicolinealidad.
- Determinante de la matriz de correlaciones.

Medidas correctivas para la Multicolinealidad

- No hacer nada (Blanchard, 1967) \implies La multicolinealidad es la voluntad de Dios.
- Técnica de información a priori. Definir o conocer a priori la magnitud de la colinealidad.
- Combinación de información de corte transversal con series de tiempo (mezcla de datos).
- Eliminación de variables y el sesgo de especificación.
- Transformación de variables \implies Primeras diferencias, transformación de razón
- Análisis factorial o el de componentes principales.