Ejercicios Econometría
Ayudantía #2

Prof. Andrés Castaño Zuluaga

Ayudantes:

Josefa Pellejero
Mariana Camila Nadal

Econometría I (EC402)
Ingeniería Comercial
Universidad Católica del Norte

6 de septiembre de 2013

1. Método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios

1.1. Propiedades de la sumatoria

1. $\sum_{i=k}^{n} K = nK$ (donde K es una constante)

2. $\sum_{i=1}^{n} KX_i = K\sum_{i=1}^{n} X_i$

3. $\sum_{i=1}^{n}(a + bX_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} X_i$

4. $\sum_{i=1}^{n}(Y_i + X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$

1.2. Demostración MCO

Después de haber repasado estas propiedades, se parte de la definición de un error estimado:

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Reemplazando el estimador para la $E(Y \mid X)$ tenemos:

$$\hat{\mu}_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$$

Ahora dado que los errores son una función de los párametros a estimar:

$$\sum \hat{\mu}_i^2 = f(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

Elevando al cuadrado los errores podemos ponderar de manera diferente a los errores que están más alejados de la recta estimada, por lo tanto:

$$\sum \hat{\mu}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)^2$$

Se debe resolver el siguiente producto notable:

$$(Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) * (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)$$

Resolviendo y aplicando sumatoria tenemos:

$$\sum \hat{\mu}_i^2 = \sum Y_i^2 + n\hat{\beta}_1^2 + \hat{\beta}_2^2 \sum X_i^2 - 2\hat{\beta}_1 \sum Y_i - 2\hat{\beta}_2 \sum X_i Y_i + 2\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2 \sum X_i$$

Para obtener los parámetros $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$, derivamos la expresión anterior respecto a cada parámetro:

$$\frac{\partial \sum \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = -2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \hat{\mu}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = -2\sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i)(X_i) = 0$$

Las condiciones de primer orden o ecuaciones normales serían:

$$n\hat{\beta}_1 - \sum_{i=1}^{n} Y_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \tag{1}$$

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \tag{2}$$

Ahora despejando obtenemos expresiones para $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$, primero si dividimos la primera ecuación normal entre n, obtenemos:

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

Luego, si dividimos la ecuación normal número 2 entre $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y luego le restamos el valor de la ecuación anterior tendríamos:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \hat{\beta}_1 + \frac{\hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

Reemplazando $\hat{\beta}_1$ y reordenando se obtiene:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \bar{Y} = \hat{\beta}_2 \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \bar{X}\right)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \bar{Y}}{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \bar{X}}$$

1.3. Expresiones alternativas para el parámetro $\hat{\beta}_2$

Demuestre que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2} \tag{3}$$

Además demuestre que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{Cov(X_i, Y_i)}{Var(X_i)} \tag{4}$$

1.3.1. Demostración Ecuación 3

Partiendo de la segunda ecuación normal:

$$\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i X_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

Si se reemplaza el valor de $\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}$ se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}) \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

Dado que $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, se sabe que $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$, reemplazando en la ecuación anterior se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}) n\bar{X} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i X_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}\bar{Y} + n\hat{\beta}_2 \bar{X}^2 = 0$$

Sacando factor común de $\hat{\beta}_2$ y despejando se obtiene:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

1.3.2. Demostración Ecuación 4

Recordemos que la covarianza se define como:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

y la varianza como:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

Por lo tanto se debe demostrar que:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

Para tal fin, se parte de:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Se soluciona el producto notable en el numerador de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \sum_{i=1}^{n} X_i\bar{Y} - \sum_{i=1}^{n} \bar{X}Y_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}\bar{Y}$$

Aplicando la propiedad 1 y 2 de la sumatoria se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \bar{Y}\sum_{i=1}^{n} X_i - \bar{X}\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\bar{X}\bar{Y}$$

Luego teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$ y $\sum_{i=1}^{n} Y_i = n\bar{Y}$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \bar{Y}(n\bar{X}) - \bar{X}(n\bar{Y}) + n\bar{X}\bar{Y}$$

Como se puede ver los tres últimos componentes son expresiones equivalentes, por lo tanto se llega a:

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}$$

Luego se soluciona el producto notable del denominador de acuerdo a:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \bar{X}^2$$

Aplicando las propiedades 1 y 2 de la sumatoria se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}^2$$

Luego reemplazando $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}(n\bar{X}) + n\bar{X}^2$$

Multiplicando $\bar{X}$ por $\bar{X}$ y reordenando, nos queda:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2$$

Restando se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

Por lo tanto se demuestra que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

1.4. Demostración Matricial

Partiendo de:

$$y_i = X_i'\hat{\beta} + e_i$$

Aplicando lo aprendido se sabe que un error estimado es:

$$e_i = y_i - X_i'\hat{\beta}$$

Aplicando sumatoria se obtiene:

$$SRC = \sum_{i=1}^{n}(y_i - X_i'\hat{\beta})^2$$

$$SRC = (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$

Ahora recuerde que por propiedades de la transpuesta, $(AB)'$ es igual a $(B'A')$, por lo tanto la expresión queda expresada así:

$$SRC = (y' - \hat{\beta}'X')(y - X\hat{\beta})$$

Resolviendo el producto notable se obtiene:

$$SRC = y'y - y'X\hat{\beta} - \hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Dado que estas matrices tienen la misma dimensión, se puede aplicar por propiedades de la transpuesta $(A'BC) = (C'B'A)$, por lo cual estas matrices son equivalentes:

$$y'X\hat{\beta} = \hat{\beta}'X'y$$

Entonces:

$$= y'y - 2y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$$

Ahora, si se definen las siguientes expresiones (con el fin de que la expresión se vea más simple): $a = X'y$, $a' = y'X$, $A = X'X$ Entonces:

$$SRC = y'y - 2a'\hat{\beta} + \hat{\beta}A\hat{\beta}$$

Hacemos la derivada de matrices respecto el vector de parámetros:

$$\frac{\partial(SRC)}{\partial\hat{\beta}} = -2a + 2A\hat{\beta} = 0$$

La ecuación normal sería:

$$-2a + 2A\hat{\beta} = 0$$
$$2A\hat{\beta} = 2a$$
$$\hat{\beta} = \frac{2a}{2A}$$
$$\hat{\beta} = \frac{X'y}{X'X}$$

Finalmente despejando se obtiene:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'y)$$

La ecuación definida con más claridad puede reescribirse como:

$$\begin{bmatrix} 1 & ... & 1 \\ X_1 & ... & X_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & ... & 1 \\ X_1 & ... & X_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & X_1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

y obtenemos la expresión conocida:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'y)$$

Expresada de mejor manera queda como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_i \end{bmatrix} \tag{7}$$

Se debe resolver la inversa $(X'X)^{-1}$ para eso se utiliza la definición de la inversa para el caso de una matriz $2x2$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} * \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{9}$$

Aplicado a nuestra matriz queda:

$$(10) \qquad \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} * \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_i \\ -\sum_{i=1}^{n} X_i & n \end{bmatrix}$$

Obteniendo esta inversa y luego multiplicando por $X'y$, se obtendrían los parámetros que hacen que la suma de los residuos al cuadrado sea mínima.

2. Ejercicios

1. La empresa ”La onda veloz” ha especificado un modelo de regresión lineal clásico para explicar la función de demanda de sus aparatos de radio (Y), expresada en miles de unidades, y en función del precio de los aparatos de radio (X), en miles de pesos. Para su estimación se recoge una muestra de 24 observaciones, con los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{24} Y_i = 2637{,}252$$

$$\sum_{i=1}^{24} X_i = 85{,}249$$

$$\sum_{i=1}^{24} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = -16{,}586$$

$$\sum_{i=1}^{24} (X_i - \bar{X})^2 = 3{,}091$$

$$\sum_{i=1}^{24} (Y_i - \bar{Y})^2 = 159{,}8926$$

De acuerdo a la información anterior obtenga:

1. Obtenga los parámetros.

2. Especifique la ecuación estimada.

3. Obtenga el coeficiente de correlación entre x y y

Solución:

1. Los parámetros se obtienen aplicando la fórmula:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{Cov(X_i, Y_i)}{Var(X_i)} = \frac{-16{,}5862}{3{,}09161} = -5{,}364$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} =$$

Dado que:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{24} X_i}{n} = \frac{85{,}249}{24} = 3{,}552$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{24} Y_i}{n} = \frac{2637{,}252}{24} = 109{,}88$$

Por lo tanto:

$$\hat{\beta}_1 = 109{,}885 - (-5{,}364)(3{,}552) = 128{,}942$$

2. La ecuación estimada es igual a:

$$\hat{Y}_i = 128{,}942 - 5{,}3649 X_i$$

3. El coeficiente de correlación entre X y Y sería igual a

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x S_y}$$

De ahí que:

$$\rho_{xy} = \frac{-16{,}586}{(1{,}758)(12{,}6448)} = -0{,}7461 = -74\,\%$$