Microeconomía I (EC301)-I semestre de 2014
Clase #7 - La utilidad

Andrés M. Castaño

Ingeniería Comercial
Universidad Católica del Norte
Septiembre 22 de 2014

Introducción

- El problema de cuantificar la utilidad $\Longrightarrow$ Dio paso a las preferencias.
- Las preferencias son el fundamento para analizar la elección, la utilidad es una forma de describirlas.
- ¿Qué es una función de utilidad?

$$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$$

si y sólo si

$$u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$$

- Utilidad ordinal vs utilidad cardinal.

Importa el orden no la magnitud

Cesta	U_1	U_2	U_3
A	3	17	-1
B	2	10	-2
C	1	0,002	-3

Transformación monótona

- No hay una sola manera de asignar utilidades.
- Transformaciones monótonas: $u_1 > u_2 \Longrightarrow f(u_1) > f(u_2)$
- En general las transformaciones monótonas pueden ser:
  - Multiplicación por un número positivo $\Longrightarrow f(u) = 3u$
  - Suma de cualquier número $\Longrightarrow f(u) = u + 17$
  - Elevación a una potencia impar $\Longrightarrow f(u) = u^3$

Transformación monótona

- No hay una sola manera de asignar utilidades.
- Transformaciones monótonas: $u_1 > u_2 \implies f(u_1) > f(u_2)$
- En general las transformaciones monótonas pueden ser:
  - Multiplicación por un número positivo $\implies f(u) = 3u$
  - Suma de cualquier número $\implies f(u) = u + 17$
  - Elevación a una potencia impar $\implies f(u) = u^3$

Transformación monótona

- Tasa de variación de $f(u) \Longrightarrow$ Variación que experimenta f entre dos valores de u, dividida por la variación de u.

$$\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

- Si $f(u)$ es una transformación monótona de una función de utilidad que representa las preferencias $\succeq$, entonces $f(u(x_1, x_2))$ también es una función de utilidad que representa las mismas preferencias ¿por qué?:
  - Decir que $u(x_1, x_2)$ representa las preferencias ($\succeq$) significa que: $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$, si y solo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$
  - Pero si $f(u)$ es una transformación monótona, $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$, si y solo si $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$
  - Por lo tanto, $f(u(x_1, x_2)) > f(u(y_1, y_2))$, si y sólo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, por lo que $f(u)$ representa las preferencias $\succeq$ de la misma forma que $u(x_1, x_2)$

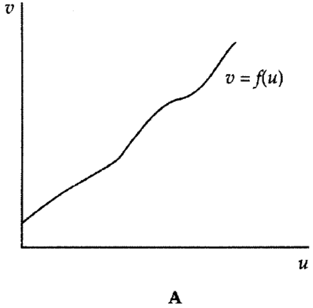
Transformación monótona

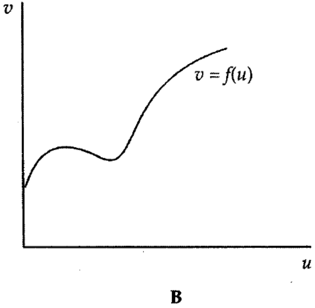
- Tasa de variación de $f(u) \Longrightarrow$ Variación que experimenta f entre dos valores de u, dividida por la variación de u.

$$\frac{\Delta f}{\Delta u} = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1}$$

- Si $f(u)$ es una transformación monótona de una función de utilidad que representa las preferencias $\succeq$, entonces $f(u(x_1, x_2))$ también es una función de utilidad que representa las mismas preferencias ¿por qué?:
    - Decir que $u(x_1, x_2)$ representa las preferencias ($\succeq$) significa que $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$, si y solo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$
    - Pero si $f(u)$ es una transformación monótona, $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$, si y solo si $f(u(x_1, x_2)) \succ f(u(y_1, y_2))$
    - Por lo tanto, $f(u(x_1, x_2)) \succ f(u(y_1, y_2))$, si y sólo si $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, por lo que $f(u)$ representa las preferencias $\succeq$ de la misma forma que $u(x_1, x_2)$

Transformación monótona





Construcción de una función de utilidad $\Longrightarrow$ de la utilidad a las curvas de indiferencia

- Si se excluyen los casos con preferencias in-transitivas, se puede encontrar siempre una función de utilidad para representar dichas preferencias.

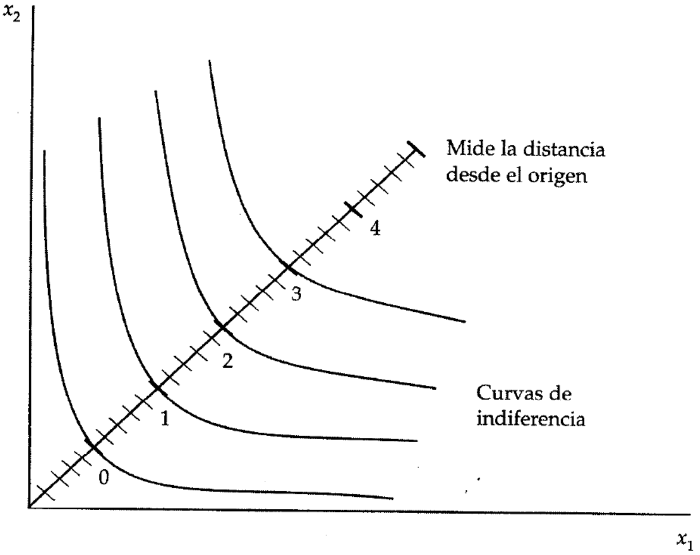
- Si tenemos $u(x_1, x_2)$ se pueden trazar curvas de indiferencia. Se debe dibujar todos los puntos (x_1, x_2), de tal manera que $u(x_1, x_2)$ sea una constante $\Longrightarrow$ Lo habíamos explicado como curva de nivel.

Construcción de una función de utilidad $\Longrightarrow$ de la utilidad a las curvas de indiferencia

- Si se excluyen los casos con preferencias in-transitivas, se puede encontrar siempre una función de utilidad para representar dichas preferencias.

- Si tenemos $u(x_1, x_2)$ se pueden trazar curvas de indiferencia. Se debe dibujar todos los puntos (x_1, x_2), de tal manera que $u(x_1, x_2)$ sea una constante $\Longrightarrow$ Lo habíamos explicado como curva de nivel.

Construcción de una función de utilidad



Ejemplo

- Suponga $u(x_1, x_2) = x_1 * x_2$ ¿Cómo son las curvas de indiferencia?
- Suponga la función de utilidad $v(x_1, x_2) = x_1^2 * x_2^2$ ¿Cómo son las curvas de indiferencia?

Ejemplo

- Suponga $u(x_1, x_2) = x_1 * x_2$ ¿Cómo son las curvas de indiferencia?

- Suponga la función de utilidad $v(x_1, x_2) = x_1^2 * x_2^2$ ¿Cómo son las curvas de indiferencia?

Ejemplo

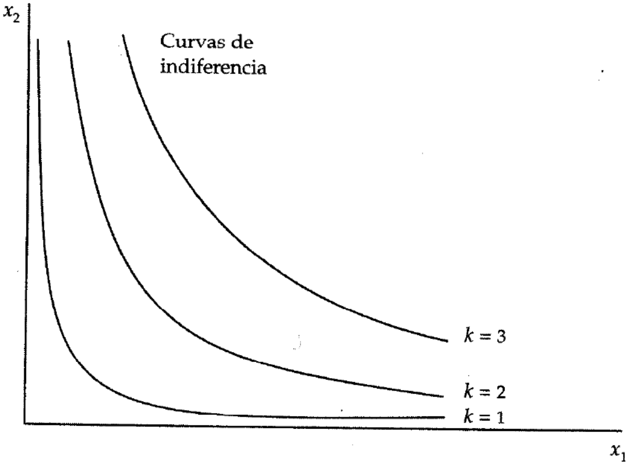


Figura 4.3. Las curvas de indiferencia. Las curvas de indiferencia $k = x_1 x_2$, correspondientes a diferentes valores k.

De las curvas de indiferencia a la función de utilidad (Dos formas)

- Matemáticamente $\Longrightarrow$ Dadas las curvas de indiferencia, se debe encontrar una función que sea constante a lo largo de cada una.

- Dada una descripción de las preferencias $\Longrightarrow$ Qué intenta maximizar el individuo.

De las curvas de indiferencia a la función de utilidad (Dos formas)

- Matemáticamente $\Longrightarrow$ Dadas las curvas de indiferencia, se debe encontrar una función que sea constante a lo largo de cada una.

- Dada una descripción de las preferencias $\Longrightarrow$ Qué intenta maximizar el individuo.

Cómo obtener funciones de utilidad para distinto tipo de preferencias

- Substitutos perfectos:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

- Complementarios perfectos:

$$u(x_1, x_2) = min(ax_1, bx_2)$$

- Preferencias Cobb-Douglas $\Longrightarrow$ ejemplo natural de preferencias regulares

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

Cómo obtener funciones de utilidad para distinto tipo de preferencias

- Substitutos perfectos:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

- Complementarios perfectos:

$$u(x_1, x_2) = min(ax_1, bx_2)$$

- Preferencias Cobb-Douglas $\Longrightarrow$ ejemplo natural de preferencias regulares

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

Cómo obtener funciones de utilidad para distinto tipo de preferencias

- Substitutos perfectos:

$$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$

- Complementarios perfectos:

$$u(x_1, x_2) = min(ax_1, bx_2)$$

- Preferencias Cobb-Douglas $\Longrightarrow$ ejemplo natural de preferencias regulares

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

Ejemplo

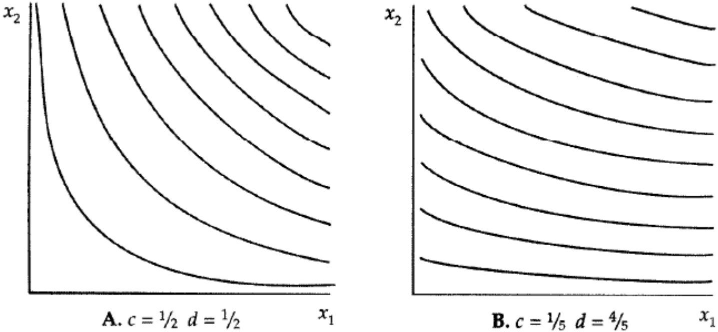


Figura 4.5. Las curvas de indiferencia Cobb-Douglas. La parte A muestra el caso en que $c = 1/2$, $d = 1/2$ y la parte B muestra el caso en el que $c = 1/5$, $d = 4/5$.

Ejemplos de transformaciones monótonas con la función Cobb-Douglas

- Transformación logarítmica: $v(x_1, x_2) = ln(x_1^c x_2^d)$

$$v(x_1, x_2) = ln(x_1^c x_2^d)$$

$$= c * lnx_1 + d * lnx_2$$

Ejemplos de transformaciones monótonas con la función Cobb-Douglas

- Ahora suponga : $v(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$, si elevamos la utilidad a la potencia $\frac{1}{c+d}$, se obtiene:

$$= x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$$

- Esto implica que siempre se puede tener una transformación monótona de la función de utilidad Cobb-Douglas en la que los exponentes sumen uno

Utilidad marginal

- Utilidad marginal:

$$UM_1 = \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{u(x_1 + \Delta x_1, x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

$$UM_2 = \frac{\Delta U}{\Delta x_2} = \frac{u(x_1, x_2 + \Delta x_2) - u(x_1, x_2)}{\Delta x_2}$$

- La utilidad marginal como número sólo sirve para representar la forma en que los individuos ordenan la cesta de bienes. Depende de la función de utilidad específica.

Utilidad marginal y la RMS

- Partiendo de la función de utilidad $u(x_1, x_2)$

$$UM_1 \Delta x_1 + UM_2 \Delta x_2 = \Delta U = 0$$

$$RMS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}$$

- La función de utilidad y la de utilidad marginal no son únicas, cualquier transformación monótona proporciona una función de utilidad igualmente válida.

- Las transformaciones monótonas alteran las utilidades marginales, pero no la RMS.

Derivando la RMS

- Considerando una variación (dx_1, dx_2) que mantenga constante la utilidad:

$$du = \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

debemos llegar a:

$$RMS = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}$$

$$RMS = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{UM_1}{UM_2}$$

Ejercicio #1

- Obtenga la RMS para la siguiente función Cobb-Douglas:

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d$$

Debería llegar a:

$$RMS = -\frac{c * x_2}{d * x_1}$$

Ejercicio #2

- Anteriormente dijimos que una transformación monótona puede afectar las utilidades marginales, pero no la RMS. Demuestre que la siguiente transformación logarítmica es monótona:

  $$u(x_1, x_2) = ln(x_1^c x_2^d)$$

  Se debería llegar a la misma RMS del ejercicio número 1 ?