Microeconomía I (EC301)-I semestre de 2014
Clase #22 y #23 - Minimización de costos

Andrés M. Castaño

Ingeniería Comercial
Universidad Católica del Norte
Noviembre 28 de 2014

Introducción

- Anteriormente explicamos como la empresa maximiza su beneficio. No obstante, existe una forma más indirecta de entender la maximización del beneficio.
  - El problema de minimización de costos para un determinado nivel de producción
  - Cómo se elige el más rentable.

La minimización de los costos

- Una empresa minimiza costos si produce cualquier cantidad de su producto, $y \geq 0$, al menor costo posible.
- $C(y)$ es el menor costo posible de producir Q unidades.
- $C(y)$ e la función de costo total.
- Si la empresa se enfrenta a los precios de los factores $w = (w_1, w_2, .., w_n)$ entonces la función de costo total se puede escribir como.

$$CT(w_1, ..., w_n, y)$$

El problema de minimización de costos

- Suponga una empresa que emplea 2 factores para obtener un cierto producto.
- La función de producción es:

$$y = f(x_1, x_2)$$

- Dados los precios de los factores w_1 y w_2, el costo de la canasta de factores (x_1, x_2) es

$$w_1 x_1 + w_2 x_2$$

- Por lo cual dados w_1, w_2 y dado y, el problema de minimización de costos es:

$$\underset{x_1, x_2 \geq 0}{\text{minimizar}} \quad w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$\text{sujeto a} \quad f(x_1, x_2) = y$$

El problema de minimización de costos

- $x_1^*(w_1, w_2, y)$ y $x_2^*(w_1, w_2, y)$ es la demanda condicional de factor del bien 1 y el bien 2.

- Por lo tanto el menor costo de producir y unidades es:

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

- Por lo tanto el problema se podría reducir a lo siguiente, dados w_1, w_2 y dado y, ¿cuál es la canasta de factores de menor costo?

- ¿Y cómo se estima el costo total? $\Longrightarrow$ Rectas iso-costo

Rectas iso-costo

- La recta que contiene todas las canastas de factores que tienen el mismo costo es una recta iso-costo.

- Por ejemplo: dados w_1 y w_2, la recta isocosto para un CT de 100 es:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = 100$$

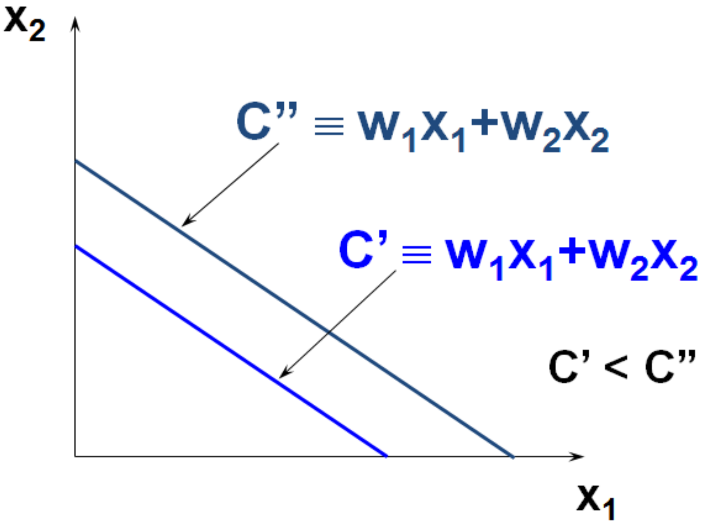
- La recta iso-costo es:

$$w_1x_1 + w_2x_2 = C$$

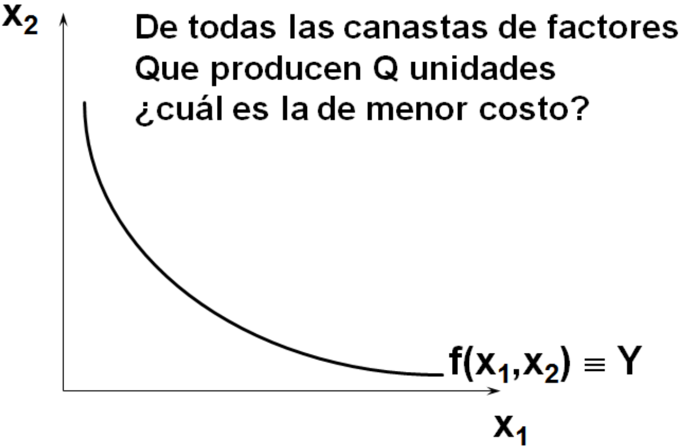
$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 + \frac{C}{w_2}$$

- Con pendiente igual a $-\frac{w_1}{w_2}$

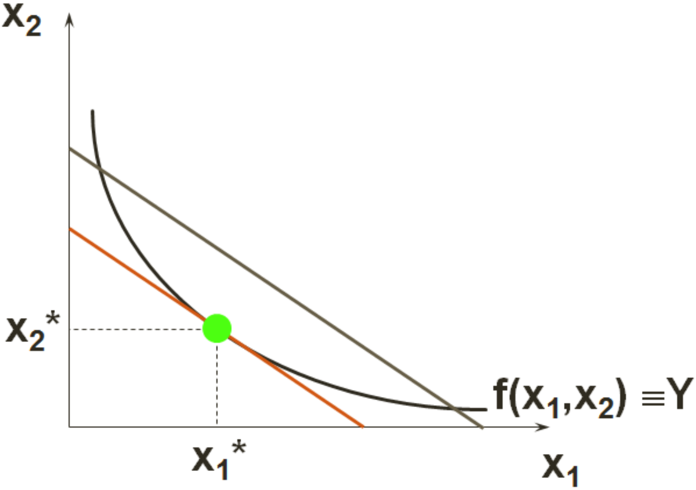
Rectas iso-costo



La isocuanta de producción



La minimización del costo



Ejemplo: Minimización de costos con una función de producción Cobb-Douglas

- Partiendo de la función de producción Cobb-Douglas:

$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$$

- Si los precios de los factores son w_1 y w_2
- ¿Cuáles son las demandas condicionales de factor?

Ejemplo: Minimización de costos con una función de producción Cobb-Douglas

- Partiendo de $y = (x_1^*)^{\frac{1}{3}}(x_2^*)^{\frac{2}{3}}$
- Sabemos que geometricamente el punto donde se minimiza los costos es el lugar donde la isocuanta y la isocosto son tangentes, por lo tanto se cumple:

$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = -\frac{x_2^*}{2x_1^*}$$

Por lo tanto:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}$$

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2}x_1^*$$

Ejemplo: Minimización de costos con una función de producción Cobb-Douglas

- Partiendo de $y = (x_1^*)^{\frac{1}{3}}(x_2^*)^{\frac{2}{3}}$

- Sabemos que geometricamente el punto donde se minimiza los costos es el lugar donde la isocuanta y la isocosto son tangentes, por lo tanto se cumple:

$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} = -\frac{x_2^*}{2x_1^*}$$

Por lo tanto:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}$$

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*$$

Ejemplo: Minimización de costos con una función de producción Cobb-Douglas

- Luego reemplazando en la función de producción obtengo:

$$y = (x_1^*)^{\frac{1}{3}} \{\frac{2w_1}{w_2} x_1^*\}^{\frac{2}{3}}$$

Por lo que la demanda condicional del factor 1 es:

$$x_1^* = \{\frac{w_2}{2w_1}\}^{\frac{2}{3}} y$$

La demanda condicional del factor 2 es:

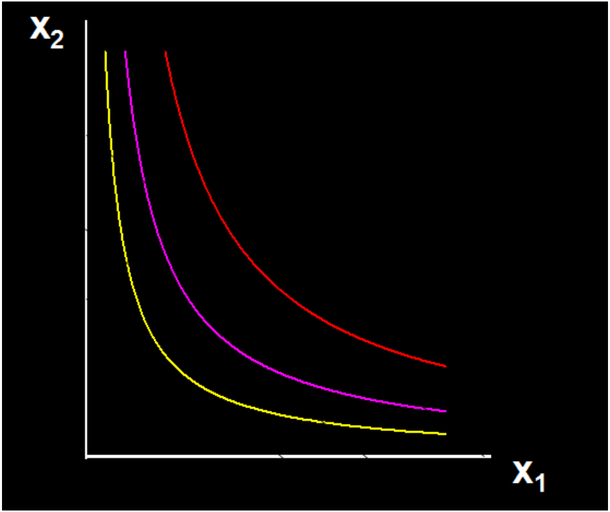
$$x_2^* = \{\frac{2w_1}{w_2}\}^{\frac{1}{3}} y$$

Por lo que la canasta de factores de menor costo para producir Q unidades es:

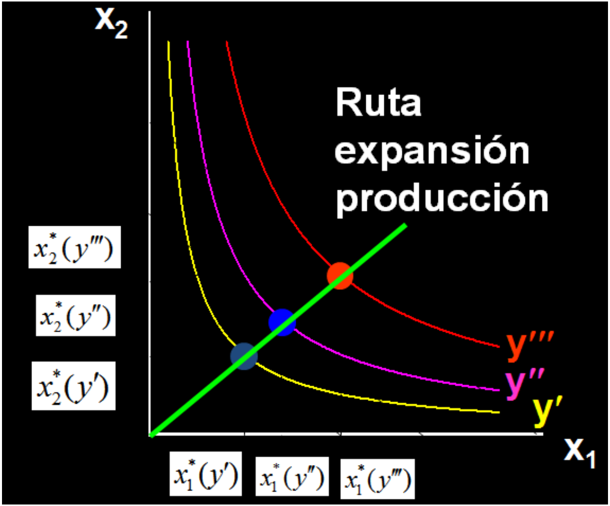
$$\{x_1^*(w_1, w_2, y), x_2^*(w_1, w_2, y)\}$$

$$\{(\frac{w_2}{2w_1})^{\frac{2}{3}} y, (\frac{2w_1}{w_2})^{\frac{1}{3}} y\}$$

Curvas de demanda condicional de factor



Ruta de expansión de laa producción



Ejemplo: Minimización de costos con una función de producción Cobb-Douglas

- En consecuencia, la función de costo total de la empresa es:

$$C(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

$$= \{\frac{2w_1}{w_2}\}^{\frac{1}{3}} y$$

Por lo que la canasta de factores de menor costo para producir Q unidades es:

$$= w_1\{(\frac{w_2}{2w_1})^{\frac{2}{3}} y + w_2\{(\frac{2w_1}{w_2})^{\frac{1}{3}} y$$

$$= (\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} y + 2^{\frac{1}{3}} w_1^{\frac{1}{3}} w_2^{\frac{2}{3}} y$$

$$= 3\{\frac{w_1 w_2^2}{4}\}^{\frac{1}{3}} y$$