Ejercicios Econometría
Ayudantía #4

Prof. Andrés Castaño Zuluaga

Ayudantes:

Josefa Pellejero Marangunič
Mariana Camila Nadal Fernandez

Econometría I (EC402)
Ingeniería Comercial
Universidad Católica del Norte

2 de octubre de 2013

1. Demostraciones útiles de las propiedades numéricas del ajuste MCO

1.1. Demuestre que $\bar{\mu} = 0$

Para comenzar a demostrar que el valor medio de los residuos es igual a cero, partimos de la definición conocida:

$$\mu_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Dado que por la definición de la ecuación de regresión muestral estocástica se define $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$, entonces:

$$\mu_i = Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_i$$

Aplicando sumatoria a ambos lados obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - n\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Si dividimos ambos lados entre n se obtiene:

$$\bar{\mu} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}$$

Finalmente si reemplazamos la definición del intercepto se obtiene:

$$\bar{\mu} = \bar{Y} - \bar{Y} + \hat{\beta}_2 \bar{X} - \hat{\beta}_2 \bar{X} = 0$$

1.2. Demuestre que $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$

$$\mu_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Aplicando sumatoria a ambos lados:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i$$

Dividiendo entre n:

$$\bar{\mu} = \bar{Y} - \bar{\hat{Y}}$$

Por lo cual dado que $\bar{\hat{\mu}} = 0$, entonces:

$$\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$$

1.3. Demuestre que $\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \mu_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \mu_i = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i) \mu_i$$

Resolviendo se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \mu_i = \hat{\beta}_1 n \bar{\mu} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i \mu_i$$

Ahora dado que $\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n} = \bar{\mu}$, reemplazamos en la ecuación este resultado y obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \mu_i = \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} X_i \mu_i$$

Dado que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{n} X_i \mu_i = 0$, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \mu_i = 0$$

2. Demostraciones Bondad de Ajuste

2.1. Demuestre que $R^2 = 1 - \frac{SRC}{STC}$

La variabilidad total de la Y_i observadas se puede expresar a través de la suma total de cuadrados (STC) o suma cuadrática total (SCT):

$$SCT = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

Descomponemos la variabilidad en:

$$STC = \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i + \mu_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} ((\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \mu_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \mu_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \mu_i \hat{Y}_i - 2\bar{Y} \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

Si se satisface el supuesto de que las X_i no son todas iguales, $STC > 0$ y por lo tanto.

$$\frac{STC}{STC} = \frac{SEC}{STC} + \frac{SRC}{STC}$$

$$\frac{SEC}{STC} + \frac{SRC}{STC} = 1$$

$\frac{SEC}{STC}$ es la proporción de la variabilidad total explicada por el modelo $= R^2$ o coeficiente de determinación:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC}$$

ó bien:

$$R^2 = 1 - \frac{SRC}{STC}$$

$\frac{SRC}{STC}$ es la proporción de la variabilidad total NO explicada por el modelo.

2.2. demuestre que la raíz cuadrada de R^2 es igual a $r_{Y,\hat{Y}}$

Se parte de la definición del coeficiente de correlación entre dos variables:

$$r_{Y,\hat{Y}} = \frac{\sum_i^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_i^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}}$$