

Ejercicios teórico-prácticos: serie y transformada de Fourier

Señales y Sistemas - 2022-2

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Representación generalizada y serie de Fourier

- 1.1 Encuentre el valor de $\omega_o \in \mathbb{R}$ para que el conjunto $\{e^{jn\omega_o t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea ortogonal en el intervalo $t \in [-T/2, T/2]$, con $T \in \mathbb{R}^+$.
- 1.2 Demuestre la ortogonalidad del conjunto $\{\cos(n\omega_o t), \sin(m\omega_o t)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$.
- 1.3 Calcular los coeficientes de la serie compleja, trigonométrica y compacta de Fourier para las siguientes funciones, con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$: a) $3t + 4$, b) $|\sin(t)|$, c) $\text{sgn}(3t)$, d) $|\cos^2(t/3)|$, e) e^{jt} , f) $2t^2$. Para cada señal representada encuentre el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5\}$. Implemente las simulaciones en Python para graficar la parte real del espectro, la parte imaginaria del espectro, la magnitud del espectro, la fase del espectro y la señal reconstruida. Ver cuaderno Serie de Fourier.
- 1.4 Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(t_f - t_i)n^2\omega_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?

- 1.5 Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ mediante una simulación en Python.
- 1.6 ¿Cómo se puede simplificar el cálculo de la serie trigonométrica de Fourier para señales con simetría de media onda y de cuarto de onda? En dichos casos, ¿cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n con $n \in \mathbb{N}$? Ver material de apoyo Simetría en serie de Fourier.

2. Transformada de Fourier

- 2.1 Explique las semejanzas y diferencias entre la serie de Fourier (exponencial, trigonométrica y compacta) y la transformada de Fourier, transformada de Fourier en tiempo discreto

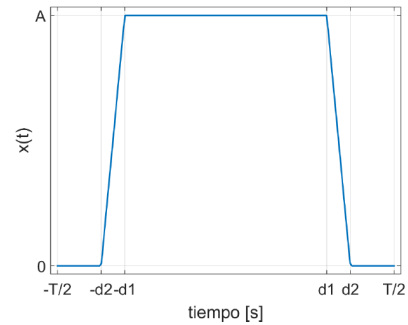


Figura 1: Espectro de Fourier desde $x''(t)$.

- (DTFT) y transformada discreta de Fourier (DFT). Considere las diferentes combinaciones entre: espectro continuo y discreto y señal en tiempo continuo y discreto. Además, consulte en qué consiste el algoritmo *Fast Fourier Transform* - (FFT) y su utilidad para el cálculo de la transformada discreta de Fourier. Explique en detalle el algoritmo FFT y su costo computacional vs el de la transformada discreta. Ver cuaderno Serie y transformada de Fourier.
- 2.2 Encuentre la función de densidad espectral (transformada de Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades): a) $e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$; b) $\cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$; c) $\sin(w_s t)$, $w_s \in \mathbb{R}$; d) $f(t) \cos(w_c t)$, $w_c \in \mathbb{R}$, $f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; e) $e^{-a|t|^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$. f) $\text{Arect}_d(t)$, $A, d \in \mathbb{R}$.
- 2.3 Aplique las propiedades de la transformada de Fourier para resolver: a) $\mathcal{F}\{e^{-jw_1 t} \cos(w_c t)\}$, $w_1, w_c \in \mathbb{R}$; b) $\mathcal{F}\{u(t) \cos^2(w_c t)\}$, $w_c \in \mathbb{R}$; c) $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{7}{w^2+6w+45} * \frac{10}{(8+jw/3)^2}\right\}$; d) $\mathcal{F}\{3t^3\}$, e) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+(w-n\omega_o)^2} + \frac{1}{a+j(w-n\omega_o)} \right)$, donde $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\omega_o = 2\pi/T$ y $B, T \in \mathbb{R}^+$. Ver Tablas de propiedades y Tablas transformada de Fourier.
- 2.4 **Aplicación en circuitos eléctricos - potencia.** Consulte en qué consiste la distorsión total de armónicos (*Total Harmonic Distortion*-(THD)) y el factor de potencia en un circuito eléctrico. Cómo puede calcularse el THD desde la FFT?. Cómo puede calcularse la distorsión del factor de potencia con base al THD?. Genere un ejemplo ilustrativo para el cálculo del THD y la distorsión del factor de potencia pa-

ra un rectificador de onda completa con carga: i) netamente resistiva y ii) carga RC en serie. Establezca las condiciones necesarias para las simulaciones y pruebe con diferentes valores de R y C. Discuta los resultados obtenidos. Ver cuaderno Rectificador RC y THD.

2.5 Aplicación en comunicaciones - modulación AM. Consulte en qué consiste la modulación por amplitud por detección coherente y sus aplicaciones. Genere un ejemplo ilustrativo sobre Python en el que se grafique las señales en el tiempo y en frecuencia (utilizando la 'rfft') para: señal mensaje tipo pulso rectangular y señal mensaje tipo coseno. El usuario podrá definir el índice de modulación de interés. Ver cuaderno Modulación AM.

Referencias

<https://github.com/amalvarezme/SenalesSistemas>

Hsu, H., (2014). Signals and systems (Vol. 8). New York: McGraw-Hill Education.

Castellanos-Dominguez et. al (2010), *Teoría de señales: fundamentos*, Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales.

Hsu, H. (2003), *Theory and problems of analog and digital communications*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill.

Hsu, H. (1995), *Schaum's outlines of theory and problems of signals and systems*, McGraw Hill.

Hsu, H. (1970), *Análisis de Fourier*, Prentice Hall.