

# Ejercicios teórico-prácticos: Transformadas de Laplace y Z para el estudio de sistemas lineales e invariantes con el tiempo

## Señales y Sistemas 2022-2

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.  
Departamento de ingeniería eléctrica, electrónica y computación  
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

### 1. Transformada de Laplace y análisis de sistemas lineales e invariantes con el tiempo

- 1.1 Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Definición transformada de la Laplace.
- 1.2 Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Propiedades básicas transformada de la Laplace.
- 1.3 Demuestre las siguientes propiedades (sin utilizar tablas de propiedades): i)  $\mathcal{L}\{x(t - t_o)\} = e^{-st_o} X(s)$ , ii)  $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X(s/a)$ , iii)  $\mathcal{L}\{\frac{dx(t)}{dt}\} = sX(s)$ , y iv)  $\mathcal{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$ . Ver material de apoyo y propiedades de Laplace.
- 1.4 Encuentre la transformada de Laplace, dibuje el esquema de polos y ceros y la región de convergencia (ROC), de las siguientes señales: i)  $e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$ , ii)  $e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$ , iii)  $e^{-a|t|}$ , iv)  $e^{-2t}[u(t) - u(t - 5)]$ .
- 1.5 Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Transformada inversa de Laplace.
- 1.6 Consultar y realizar los ejercicios del cuaderno Autofunciones y SLITs.
- 1.7 Encuentre la función de transferencia en lazo abierto para un circuito  $RLC$  serie (entrada tensión de alimentación - salida tensión en el capacitor) y un circuito  $RCL$  en paralelo (entrada corriente de alimentación - salida corriente en el inductor). Nota: tenga en cuenta las condiciones iniciales del sistema según lo explicado en el material de apoyo Circuito  $RLC$  y Análisis de redes eléctricas.
- 1.8 Para las funciones de transferencia en lazo abierto encontradas en el punto anterior, encuentre la expresión de la salida en el tiempo para una configuración en lazo cerrado del sistema, en función de  $R$ ,  $L$  y  $C$ , para las siguientes entradas: i) impulso, ii) escalón unitario, y iv) rampa. Compruebe los resultados en simulación sobre Python (utilizando sympy) y grafique la señal de salida para cada caso. Ver cuaderno de ayuda Fracciones parciales Circuito  $RLC$ .
- 1.9 Consulte en qué consiste un sistema subamortiguado, sobre-amortiguado, y de amortiguamiento crítico. Genere simulaciones para ejemplificar cada uno de los casos con los sistemas  $R,L,C$  serie y paralelo estudiados. Nota: asuma condiciones iniciales cero.
- 1.10 Para los sistemas del punto 2.9, encuentre las expresiones para el factor de amortiguamiento  $\zeta$ , la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ , y la frecuencia natural amortiguada  $\omega_d$  en función de  $R$ ,  $L$ , y  $C$ . Nota: asuma condiciones iniciales cero.

### 2. Transformada Z y filtros digitales

- 2.1 Consulte en qué consiste la transformada Z. Explique las semejanzas y diferencias entre la serie de Fourier, transformada de Fourier en tiempo continuo y discreto, transformada de Laplace y la transformada Z. Ver material de apoyo Transformada de Fourier, Transformada de Laplace y Transformada Z.
- 2.2 Encuentra la transformada Z para las siguientes señales: i)  $x[n] = -a^n u[-n - 1]$ , ii)  $x[n] = a^n$  para  $0 \leq n \leq N - 1$  y  $a > 0$ , y iii)  $x[n] = \{5, 3, -2, 0, 4, -3\}$ , donde  $n = 0$  para  $x[n]_{\dagger}$ .
- 2.3 Consulte en qué consisten los filtros de respuesta impulso finita (Finite impulse response - FIR), y los filtros de respuesta impulso infinita (infinite impulse response - IIR). Realice un paralelo entre los FIR, IIR y los sistemas con y sin realimentación. Ver cuaderno Filtros digitales y transformada Z.
- 2.4 Presente una comparación entre las estrategias de diseño mediante invarianza al impulso y transformación bilineal.
- 2.5 Realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno Filtros digitales y transformada Z.

### Referencias

<https://github.com/amalvarezme/SenalesSistemas>

Hsu, H., (2014). Signals and systems (Vol. 8). New York: McGraw-Hill Education.

Castellanos-Dominguez et. al (2010), *Teoría de señales: fundamentos*, Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales.

Hsu, H. (2003), *Theory and problems of analog and digital communications*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill.

Hsu, H. (1995), *Schaum's outlines of theory and problems of signals and systems*, McGraw Hill.

Hsu, H. (1970), *Análisis de Fourier*, Prentice Hall.