4) Punto 1) Sea $x''(t)$ La segunda derivada de la señal $x(t)$ donde $t \in [t_i, t_f]$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t} \, dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

* Demostración de la formula de C_n

La Serie de Fourier para una función periódica $x(t)$ con periodo $T = t_f - t_i$.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0t}, \qquad w_0 = 2\pi/T$$

Dado que:

$$x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (jnw_0)^2 e^{jnw_0t} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n n^2 w^2 e^{jnw_0t}$$

Se multiplica por el conjugado e^{-jmw_0t}

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jmw_0t} \, dt = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n n^2 w_0^2 \int_{t_i}^{t_f} e^{j(n-m)w_0t} \, dt$$

Por ortogonalidad

$$\int_{t_i}^{t_f} e^{j(n-m)w_0t} \, dt = \begin{cases} T & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jmw_0t} \, dt = -C_m m^2 w_0^2 T$$

Powered by CamScanner

$$C_n = \frac{1}{T n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

Entonces:

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 \omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt$$

Relación entre las dos series de Fourier

Exponencial: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$

C_n = Complejos

trigonométrica:

$$x(t) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)]$$

Conversión de la exponencial a trigonométrica

Para cada $n > 0$

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \qquad C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad \operatorname{Sen}(n\omega_0 t) = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2}$$

despejamos a_n y b_n: Sumando las dos expresiones se suma $C_n + C_{-n}$

$$C_n + C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) + \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

$$= \frac{1}{2}[(a_n - j b_n) + (a_n + j b_n)] = \frac{1}{2}(2a_n) = a_n$$

Entonces: $a_n = C_n + C_{-n}$

Ahora se resta $C_n - C_{-n}$

$$C_n - C_{-n} = \tfrac{1}{2}(a_n - jb_n) - \tfrac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

$$= \tfrac{1}{2}[(a_n - jb_n) - (a_n + jb_n)] = \tfrac{1}{2}[-2jb_n] = -jb_n$$

Entonces = $b_n = j(C_n - C_{-n})$

Formulas Finales:

$$a_n = C_n + C_{-n} \qquad b_n = j(C_n - C_{-n})$$

Espectro C_n.

- El espectro obtenido apartir de $x''(t)$, concuerda perfectamente con el obtenido directamente desde $x(t)$
- El error relativo de reconstrucción es cercano a 0% (por lo general menor a 1%, lo que valida la formula

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$