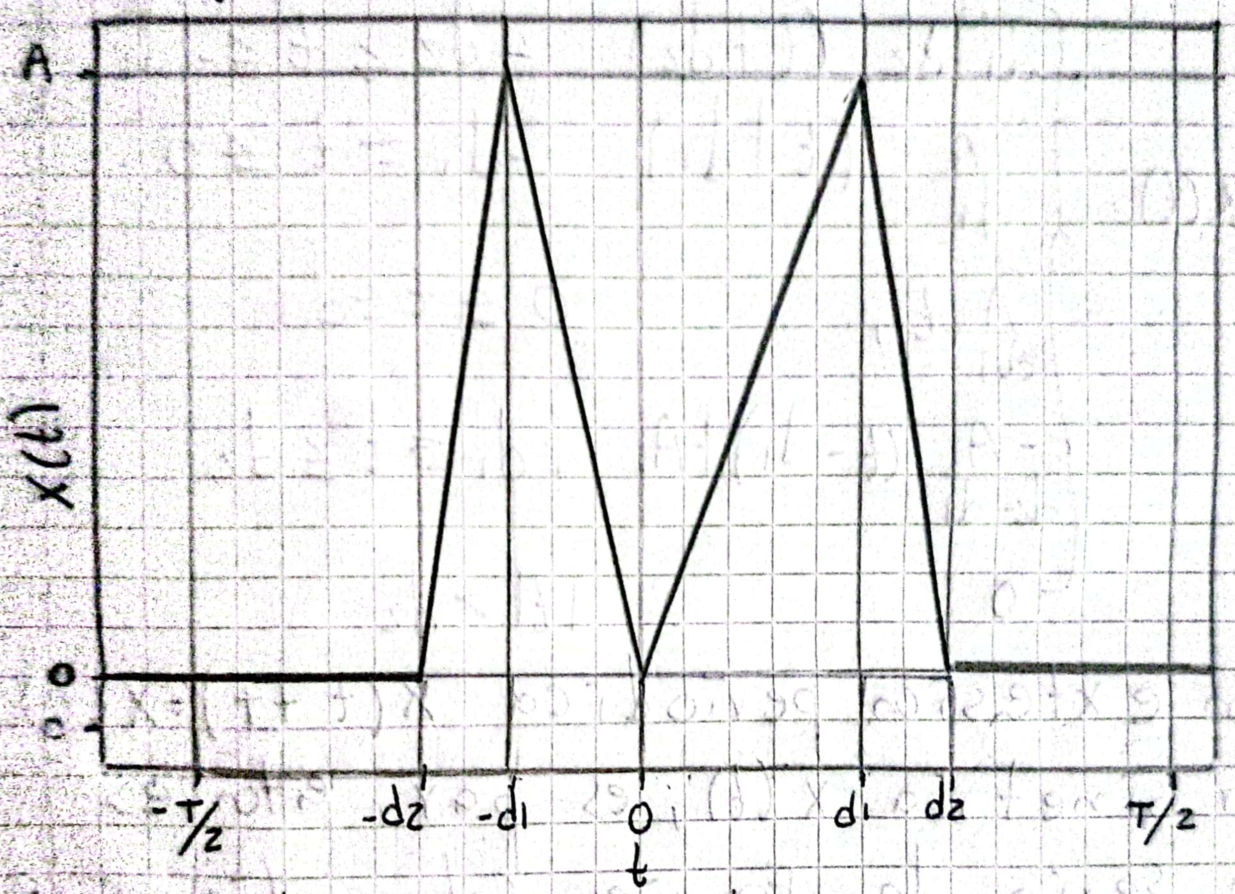
4) Se tiene la señal periodica $x(t)$ de la siguiente figura, de forma triangular simetrica dobles.



Y se pide: econtrar el espectro de Fourier de $x''(t)$, su parte real, imaginaria magnitud, fase y error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$

Solucion: Definicion de la señal $x(t)$
La señal es periodica de periodo T y amplitud A, con asimetria Par

Tiene forma triangular doble, con ceros en $t=0$, $\pm T/2$ y picos en $t=\pm d_1$

$$x(t)=\begin{cases} \frac{A}{d_1-d_2}(t+d_2) & -d_2 \leq t \leq -d_1 \\ \frac{-A}{d_1}(t+d_1) & -d_1 \leq t \leq 0 \\ \frac{A}{d_1}t, & 0 \leq t \leq d_1 \\ \frac{-A}{d_2-d_1}(t-d_1)+A, & d_1 \leq t \leq d_2 \\ 0 & |t| > d_2 \end{cases}$$

Con extensión periódica $x(t+T)=x(t)$

Por simetría $x(t)$, es par, entonces su serie de Fourier solo contiene cosenos

- Serie exponencial de la S. de Fourier

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jnw_0t}, \quad w_0 = 2\pi/T$$

donde: $a_n = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jnw_0t}\,dt$

Como $x(t)$ es par

$$a_n = 2/T \int_0^{T/2} x(t)\cos(nw_0t)\,dt$$

Relación entre $x(t)$ y $x''(t)$

Por tanto $a''_n = -(n\omega_0)^2 a_n$
Entonces basta con calcular a_n y luego obtener a''_n
Calcular analíticamente a_n por tramos (en $0 \leq t \leq d_1$ y en $d_1 \leq t \leq d_2$)
Por $\cos(n\omega_0 t)$ para $n \neq 0$ se reduce a términos $\frac{\text{sen}(n\omega_0 d_1)}{n\omega_0}$ y $\frac{\cos(n\omega_0 d_k)}{(n\omega_0)^2}$ $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = A\,d_2/T$$

El espectro de $x''(t)$

$$a''_n = (jn\omega_0)^2 a_n = -(n\omega_0)^2 a_n$$

magnitud y Fase
$|a''_n| = (n\omega_0)^2 |a_n|$, $\arg(a''_n) = \arg(a_n) + \pi$