3) Intervalo $[t_i - t_f]$ de duracion $T = t_f - t_i$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)e^{-jnw_0t}\,dt\,,\quad w_0 = 2\pi/T$$

Integramos por partes dos veces para expresar C_n en terminos de $x''(t)$

$$I_n = \int_{t_i}^{t_f} x(t)\,e^{-jnw_0t}\,dt$$

• Integracion por partes

$u = x(t)$, $dv = e^{-jnw_0t}\,dt$ entonces

$du = x'(t)\,dt$ y $v = \dfrac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}$

$$I_n = \left. x(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}\right|_{t_i}^{t_f} + \frac{1}{jnw_0}\int_{t_i}^{t_f} x'(t)e^{-jnw_0t}\,dt$$

Segunda integracion

Para $J_n = \int_{t_i}^{t_f} x'(t)e^{-jnw_0t}\,dt$ tomamos

$u = x'(t)$, $dv = e^{-jnw_0t}$, entonces $v = \dfrac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}$

y $du = x''(t)\,dt$

$$J_n = [x'(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}]\Big|_{ti}^{tf} + \frac{1}{jnw_0}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt$$

Sustituyendo J_n en la expresion I_n

$$I_n = [x(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}]\Big|_{ti}^{tf} + \frac{1}{jnw_0}\left([x'(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{-jnw_0}]\Big|_{ti}^{tf}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{jnw_0}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt\right)$$

Agrupando

$$I_n = (\text{termino frontera}) + \frac{1}{(jnw_0)^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt$$

Si $x(t)$ y $x'(t)$ son periodicas en $T =$ t_i y $t_f = t_i + T$

$$I_n = \frac{1}{(jnw_0)^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt$$

Usando $C_n = 1/T\; I_n$

$$C_n = 1/T\cdot\frac{1}{(jnw_0)^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt$$

$(j)^2 = -1$, aparece $t_i - t_f$ en el denominador.

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2w_0^2}\int_{t_i}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0t}\,dt \quad n \neq 0$$

Porque $t_i - t_f = -T$

- La formula no vale para $n=0$ (división por n^2); Para $n=0$ se usa la definición.

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\,dt$$

Como Calcular a_n y b_n. apartir de la (serie trigonometrica).

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnw_0t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{jnw_0t} + C_{-n} e^{-jnw_0t}\right)$$

agrupando en Cosenos y Senos

$$C_n e^{jnw_0t} + C_{-n} e^{-jnw_0t} = (C_n + C_{-n})\cos(nw_0t) + j(C_n - C_{-n})\operatorname{Sen}(nw_0t)$$

Comparando con la forma trigometrica

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nw_0t) + b_n (nw_0t)\right)$$

obtenemos $n \geq 1$

$$\boxed{a_n = C_n + C_{-n}\,,\quad b_n = j(C_n - C_{-n})}$$

y $a_0 = C_0$

Por tanto, si se calcula C_n apartir de $x''(t)$ Con la formula anterior, puedes formar los a_n, b_n mediante estas relaciones.