Notas álgebra lineal

Luis Fernando Talavera Rivera

Enero 2021

Agradecimientos a

Daniel Ignacio Arellano Ochoa
Jonathan Iñaki Ortega Martínes

1 Número complejos

1.1 Definición

El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$, donde un número complejo se denota de forma binómica por $z = a + bi$, donde a es la parte real ($Re(z)$), b la parte imaginaria ($Im(z)$) e i la unidad imaginaria que representa $\sqrt{-1}$.

El conjugado de un número complejo z se denota por $\bar{z}$ y se define como $\bar{z} = a - bi$.

1.2 Operaciones

1.2.1 Suma o adición

Sea $z, w \in \mathbb{C}$, donde $z = a + bi$ y $w = c + di$, estos números se suman como binomios

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

1.2.2 Resta o sustracción

De igual forma que la suma, la resta se puede efectuar como la resta de dos binomios.

$$z - w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

1.2.3 Multiplicación o producto

El producto de igual manera se realiza como la multiplicación de dos binomios

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

1.2.4 División o cociente

La división requiere un poco más de esfuerzo porque para llegar a un método directo primero se requiere racionalizar el denominador.

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \\ &= \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

1.3 Potencias de i, módulo o valor absoluto de número complejo

1.3.1 Potencias de i

Si desarrollamos una a una las potencias de i encontramos el siguiente patrón:

$$\begin{aligned} i^{4n} &= 1 \\ i^{4n+1} &= i \\ i^{4n+2} &= -1 \\ i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

1.3.2 Módulo o valor absoluto de un número complejo

El módulo de z se denota por $|z|$ y se define como $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

1.4 Forma polar y exponencial de un número complejo

1.4.1 Forma polar

Un número complejo z se representa de forma polar como

$$z = |z|(\cos\theta + isen\theta)$$

donde las partes real e imaginaria del complejo quedan definidas respectivamente como $Re(z) = a = |z|cos\theta$ e $Im(z) = b = |z|sen\theta$.

Nota: $|z|$ también se suele denotar por r, donde $r = |z|$.

1.4.2 Forma exponencial

Un número complejo z se representa de manera exponencial como

$$\begin{aligned} z = |z|e^{i\theta} &= |z|(cos\theta + isen\theta) \\ e^{a+bi} &= e^a(cosb + isenb) \end{aligned}$$

1.5 Teorema de De Moivre, potencias y raíces de un número complejo

1.5.1 Teorema de De Moivre

Teorema que sirve para obtener la n-ésima potencia de un número complejo.
Sea $z \in \mathbb{C}, z = |z|(cos\theta + isen\theta)$, entonces

$$\begin{aligned} z^n &= [|z|(cos\theta + isen\theta)]^n \\ z^n &= |z|^n(cos\theta + isen\theta)^n \\ z^n &= |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \end{aligned}$$

1.5.2 Raíces de un número complejo

Sean $z, w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}^+$, la ráiz n-ésima de z se denota por $z^{\frac{1}{n}}$ y se define como w tal que $w^n = z$.

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Para $k = 1, 2, 3, ..., \ n - 1$.

1.6 Logaritmo de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, su logaritmo está definido como

$$\log z = \ln |z| + i(arg(z) + 2k\pi)$$

donde $arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

2 Matrices y determinantes

2.1 Definición de matriz

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas. Se representa con una letra mayúscula o una minúscula con dos subíndices, así una matriz se puede representar como $A = a_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Operaciones con matrices

2.2.1 Suma

La suma de matrices está definida **únicamente** para matrices de igual tamaño $m \times n$ y se define como la suma de elemento ij en A con elemento ij en B, así

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

Para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La suma de matrices es conmutativa, esto es

$$A + B = B + A$$

La suma de matrices es asociativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

2.2.2 Multiplicación por un escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y c es un escalar, entonces el **múltiplo escalar** de A por c es la matriz de tamaño de $m \times n$ dada por

$$cA = [ca_{ij}]$$

Para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

La multiplicación por un escalar tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
(cd)A &= c(dA) \\
1A &= A \\
c(A+B) &= cA + cB \\
(c+d)A &= cA + dA \\
c(AB) &= (cA)B = A(cB)
\end{aligned}$$

2.2.3 Multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y si $B = [b_{ij}]$ es una matriz de tamaño $n \times p$, entonces el **producto** AB es una matriz de tamaño $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{1n}$$

Esto signfica que el elemento ij de la matriz AB se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por los correspondientes de la j-ésima columna de B y luego sumar los resultados.

La multiplicación de matrices **no es conmutativa**.

$$AB \neq BA$$

Es asociativa, es decir

$$A(BC) = (AB)C$$

Es distributiva

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= AB + AC \\
(B+C)A &= BA + CA
\end{aligned}$$

2.2.4 Transpuesta de una matriz

La tranpuesta de una matriz se obtiene al escribir las columnas como renglones.

$$A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{m1} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{m2} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

Sus propiedades son las siguientes

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(cA)^T = c(A^T)$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

2.3 Operaciones elementales por renglón

2.3.1 Intercambia dos renglones cualesquiera

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

2.3.2 Multiplica un renglón por una constante diferente de cero

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha d & \alpha e & \alpha f \end{pmatrix}$$

2.3.3 Suma el múltiplo de un renglón a otro

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + \alpha R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} a+\alpha d & b+\alpha e & c+\alpha f \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

2.4 Inversa de una matriz

Una matriz A de $n \times n$ es **invertible** (o no **singular**) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = BA = I_n$ donde I_n es la matriz identidad de orden n (una matriz cuya diagonal $i = j$ son solo unos y el resto de sus elementos son ceros). B se denomina **inversa** multiplicatica de A. Si A no tiene una inversa se denomina **no invertible** (o **singular**).

La inversa de una matriz A es única y se denota por A^{-1}.

Solo las matrices cuadradas (mismo número de renglones y columnas) pueden poseer inversa, cualquier otra matriz no tiene inversa.

La inversa de una matriz tiene las siguientes propiedades

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

2.4.1 Matriz inversa por Gauss-Jordan

La forma más común y eficiente de obtener la inversa de una matriz es por el método Gauss-Jordan.

Este método consiste en escribir una matriz aumentada G, que del lado izquierdo tiene la matriz a invertir A y en el lado derecho se encuentra la matriz identidad I_n, tal que $G = (A|I_n)$.

Por ejemplo si A es 2×2

$$G = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Si A es 3×3

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se busca por medio de operaciones elementantes por renglón que la matriz del lado izquierdo sea la identidad, la matriz del lado derecho será la inversa de A, es decir, de $(A|I_n)$ a $(I_n|A^{-1})$.

Lo más recomendable es primero buscar obtener la forma escalonada reducida de A y luego ir volviendo ceros los elementos de la mitad superior, la forma escalonada reducida significa que los elementos de la diagonal $i = j$ sean 1 y que los elementos debajo de la diaognal sean ceros, por ejemplo de una matriz 3×3 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Se procederá a calcular la inversa de la matriz A por el método Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 5 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se comienza a utilizar operaciones elementales por renglón

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 5 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{1}{10}R_1 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_2 + 5R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 - 3R_1 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \frac{2}{7}R_2 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{35} & -\frac{13}{35} & -\frac{1}{7} & 1 \end{array}\right) \; 35R_3 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5 & 35 \end{array}\right) \; R_2 - \frac{1}{7}R_3 \to R_2$$

Observar que se ha llegado a la matriz escalonada, de aquí en adelante el proceso es muy sencillo.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5 & 35 \end{array}\right) \; R_1 + \frac{7}{10}R_3 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & -\frac{35}{10} & \frac{245}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5 & 35 \end{array}\right) \; R_1 - \frac{1}{2}R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -10 & -4 & 27 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -5 & 35 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -4 & 27 \\ 2 & 1 & -5 \\ -13 & -5 & 35 \end{pmatrix}$$

Para comprobar se puede realizar el producto $A \cdot A^{-1}$, el resultado debe ser la matriz identidad.

2.5 Determinantes

2.5.1 Definición

Sea $A \in M_{2\times 2}$, su determinante $det(A)$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sea $A \in M_{n\times n}$. El menor ij se denota por $M_{ij} \in M_{n-1\times n-1}$ se define como la matriz resultante de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Sea $A \in M_{n\times n}$. El cofactor ij se denota por $C_{ij} \in \mathbb{R}$ y se define como

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Sea $A \in M_{n\times n}$, donde $n > 2$ su determinante se denota por $det(A)$ o $|A|$ y queda definido como

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \text{ para } i = 1, 2, 3, ..., n \text{ o}$$
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} \text{ para } j = 1, 2, 3, ..., n$$

Una matriz triangular superior es aquella que todos los elementos debajo de su diagonal principal son cero, por ejemplo para una matriz 3×3

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

Por otro lado, una matriz tirangular inferior se refiere a que todos los elementos encima de la diagonal principal son cero, nuevamante para una matriz 3×3 el ejemplo sería

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Si $A \in M_{n\times n}$ es triangular, ya sea superior o inferior su determinante es la multiplicación de los elementos de su diagonal principal, esto es

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$$

2.5.2 Operacionaes elementales por renglón y determinantes

Para facilitar el cálculo de determinantes se hace uso de las siguientes propiedades. Sean A y B dos matrices cuadradas:

- Si B es el resultado de intercambiar dos renglones de A, entonces $det(B) = -det(A)$.
- Si B es el resultado de sumar el múltiplo de un renglón de A a otro renglón de A, entonces $det(B) = det(A)$.
- Si B es el resultado de multiplicar algún renglón de A por una constante c diferente de cero, entonces $det(B) = c \cdot det(A)$

El determinante de una matriz es cero cuando un renglón o columna es solo ceros, cuando dos renglones o columnas son iguales o cuando un renglón o columna es múltiplo de otro.

2.5.3 Propiedades

Si A y B son dos matrices cuadradas de tamaño $n \times n$, entonces

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Sea A una matriz de $n \times n$ y c un escalar el determinante de cA está dado por

$$det(cA) = c^n det(A)$$

Una matriz cuadrada A es invertible (no singular) si y solo si $det(A) \neq 0$

Si A es una matriz de $n \times n$, el determinante de su inversa está dado por

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, entonces

$$det(A) = det(A^T)$$

2.5.4 Inversa de una matriz cuadrada a través de la adjunta

Si A es una matriz cuadrada, entonces la matriz de cofactores de A es

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ C_{31} & C_{32} & \cdots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

La transpuesta de esta matriz se llama adjunta de A y se denota por $adj(A)$
Si A es invertible su inversa se puede expresar como

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

3 Sistemas de ecuaciones lineales

3.1 Definición y clasificación

Un sistema de m ecuaciones lineales en n variables es un conjunto de m ecuaciones, cada una de las cuales es lineal en las mismas n variables.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Al conjunto de soluciones del sistema se les conoce como **conjunto solución**.
Un sistema de ecuaciones lineales cumple con solo una de las siguientes afirmaciones

- Tiene exactamente una solución (sistema consistente).
- El sistema tiene un número infinito de soluciones (sistema consistente).
- El sistema no tiene solución (sistema inconsistente).

Si en un sistema de ecuaciones lineales todos sus términos independientes b_m son cero, al sistema se le denomina **homógeneo** y tiene la característica de que posee al menos una solución o infinitas soluciones, la solución **trivial** u obvia es aquella donde todas sus variables tiene el valor de cero.

3.2 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

3.2.1 Eliminación de Gauss-Jordan

Para usar este método primero es necesario escribir el sistema de ecuaciones como una matriz aumentada, donde la matriz del lado izquierdo es la matriz de coeficientes formada por los coeficientes de las ecuaciones del sistema y la matriz del lado derecho son los términos independientes de cada ecuación.
Si el sistema es el siguiente

$$
\begin{aligned}
ax + by + cz &= \alpha \\
dx + ey + fz &= \beta \\
gx + hy + iz &= \gamma
\end{aligned}
$$

donde x,y y z son variables, la matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \alpha \\ d & e & f & \beta \\ g & h & i & \gamma \end{array}\right)$$

Luego, mediante operaciones elementales por renglón se busca transformar la matriz en su forma escalonada reducida, es decir, que todos los elementos de su diagonal sean unos y que los elementos debajo de esta diagonal sean ceros, después se busca volver ceros todos los elementos por encima de la diagonal principal, como resultado la matriz del lado izquierdo debe ser igual a la matriz identidad.

Por último, los valores que se encuentran en la matriz del lado derecho serán el valor correspondiente a cada variable, obteniendo así el conjunto solución.

Ejemplo Sistema a resolver:

$$
\begin{aligned}
2x - y + z &= 2 \\
3x + y - 2z &= 9 \\
-x + 2y + 5z &= -5
\end{aligned}
$$

La matriz aumentada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

Se comienza a resolver

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array}\right) \frac{1}{2}R_1 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 9 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array}\right) R_2 - 3R_1 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 6 \\ -1 & 2 & 5 & -5 \end{array}\right) R_3 + R_1 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 6 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -4 \end{array}\right) \frac{2}{5}R_2 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -4 \end{array}\right) R_3 - \frac{3}{2}R_2 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & \frac{38}{5} & -\frac{38}{5} \end{array}\right) \ \frac{5}{38}R_3 \to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \ R_2 + \frac{7}{5}R_3 \to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \ R_1 - \frac{1}{2}R_3 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \ R_1 + \frac{1}{2}R_2 \to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema son

$$x = 2,\ y = 1,\ z = -1$$

3.2.2 Eliminación Gaussiana

Primero se escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales, después se utilizan operaciones elementales por renglón para reducir la matriz a su forma escalonada, luego se reescribe la matriz aumentada como sistema de ecuaciones, se despeja el valor de la última incógnita y se comienzan a resolver las ecuaciones hasta obtener los valores de todas las variables.

Ejemplo Si se retoma el ejemplo anterior, la eliminación Gaussiana difiere con el método Gauss-Jordan cuando en el siguiente paso:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Si se reescribe la matriz como sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ y - \frac{7}{5}z &= \frac{12}{5} \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Se calcula el valor de y sabiendo que $z = -1$

$$\begin{aligned} y - \frac{7}{5}(-1) &= \frac{12}{5} \\ y + \frac{7}{5} &= \frac{12}{5} \\ y &= \frac{12}{5} - \frac{7}{5} \\ y &= \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

Ahora se calcula el valor de x, con $y = 1$ y $z = -1$

$$\begin{aligned}
x - \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(-1) &= 1 \\
x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} &= 1 \\
x - 1 &= 1 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son

$$x = 2,\ y = 1,\ z = -1$$

3.2.3 Método de la matriz inversa

Si nuestro sistema de ecuaciones tiene n variables y n incógnitas

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

El sistema se puede reescribir como

$$Ax = b$$

donde A es la matriz de coeficientes, cuyo renglón i contiene los coeficientes de x_i; x es la matriz columna de las variables y b es la matriz columna de los términos contantes, en otras palabras $Ax = b$ es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si el determinante de la matriz A es diferente de cero, entonces A tiene inversa y por operaciones de matrices se puede deducir que

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\
Ix &= A^{-1}b \\
x &= A^{-1}b
\end{aligned}$$

El resultado del producto $A^{-1}b$ será la solución del sistema.

3.2.4 Regla de Cramer

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene una matriz de coeficientes con determinante diferente de cero, la regla de Cramer indica que la incógnita x_i del sistema está dada por

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

donde A_i es la matriz de coeficientes pero reemplazando la columna i por la columna de términos independientes, b.

Ejemplo El sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ -2x + y - 7z &= 0 \\ 3x - y + 8z &= 2 \end{aligned}$$

El deterimante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Como el determinante es diferente de 0 entonces el sistema tiene solución, se procede a calcular los valores de cada incógnita.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}}{-8} \\ x &= \frac{-28}{-8} = \frac{7}{2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-8} \\ y &= \frac{28}{-8} = -\frac{7}{2} \\ z &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-8} \\ z &= \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Las soluciones del sistema son

$$x = \frac{7}{2},\ y = -\frac{7}{2},\ z = -\frac{3}{2}$$

4 Espacios vectoriales

4.1 Definición

Un espacio vectorial es un conjunto de elementos, llamados vectores, junto con una suma y multiplicación por un escalar definidas que para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar (número real) α y β cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, cerradura bajo adición.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$, propiedad conmutativa.

3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$, propiedad asociativa.
4. Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, idéntico aditivo.
5. Para cada $\mathbf{u} \in V$ existe un vector $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, inverso aditivo.
6. $\alpha\mathbf{u} \in V$, cerradura bajo la multiplicación escalar.
7. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$, propiedad distributiva.
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$, propiedad distributiva.
9. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$, propiedad asociativa.
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, idéntico escalar.

4.1.1 Espacios vectoriales importantes

- El espacio $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- El espacio $P_{\mathbf{n}}$ = polinomios de grado menor que o igual a n.
- El espacio $C[a, b]$ = funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$.
- El espacio M_{mn} = matrices de $m \times n$ con coeficientes reales.
- El espacio $\mathbb{C}^n = \{c_1, c_2, \ldots, c_n : c_i \in \mathbb{C} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$. $\mathbb{C}$ denota el conjunto de los números complejos.

4.2 Subespacios vectoriales

Un subespacio H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en sí un espacio vectorial.

Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones de cerradura:

1. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. Si $\mathbf{u} \in V$, entonces $\alpha\mathbf{u} \in V$ para cada escalar α.

4.3 Combinación lineal e independencia lineal

4.3.1 Combinación lineal

Si un vector $\mathbf{v}$ en V se puede expresar de la forma

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$$

se denomina al vector como **combinación lineal** de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$, donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ son escalares.

4.3.2 Conjuntos generadores

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial V. S **genera** a V si todo vector en V puede expresarse como combinación lineal de vectores en S. También se puede denominar S como conjunto generador de V.

El espacio generado por $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en S y se denota como

$$gen(S) = \{\alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_k\mathbf{v}_k\}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ son números reales.

$gen(S)$ es un subespacio de V.

4.3.3 Independencia lineal

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V se denomina **linealmente independiente** si la ecuación vectorial

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

tiene solamente la solución trivial,

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$$

.

Si también hay soluciones **no** triviales, entonces S se denomina **linealmente dependiente**.

Para comprobar la independecia y dependencia lineal se siguen los siguientes pasos:

1. A partir de la ecuación vectorial $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ se escribe un sistema homógeneo de ecuaciones lineales tomando como variables $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.
2. Se resuelve el sistema por medio de eliminación gaussiana.
3. Si el sistema tiene solamente la solución trivial $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$ entonces el conjunto S es linealmente independiente. Si el sistema tiene soluciones triviales, entonces S es linealmente dependiente.

Corolario

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

4.3.4 Wronskiano

Para determinar si un conjunto de n funciones que son $n-1$ derivables es linealmente independiente se utiliza el Wronskiano $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ que está dado por

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

El Wronskiano es el determinante de la matriz formada por el conjunto de funciones en el primer renglón, el conjunto de la derivada de cada función en el segundo renglón y el conjunto de la $n-1$ derivada en el n-ésimo renglón.

Sea $\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}$ un conjunto de funciones, el conjunto es linealmente **dependiente** si y sólo si $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0\ \forall x$.

Ejemplo 1 Determinar si el conjunto de funciones $\{1, x, x^2\}$ es linealmente independiente.
El Wronskiano del conjunto es

$$W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 2 \neq 0\ \forall x$$

Por lo tanto el conjunto es linealmente independiente.

Ejemplo 2 Determinar si el conjunto de funciones $\{sen(x), cos(x)\}$ es linealmente independiente.
El Wronskiano del conjunto es

$$W(sen(x), cos(x)) = \begin{vmatrix} sen(x) & cos(x) \\ cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix} = -sen^2(x) - cos^2(x) = -1 \neq 0\ \forall x$$

Por lo tanto el conjunto es linealmente independiente.

4.4 Base y dimensión de un espacio vectorial

4.4.1 Base un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V se denomina **base** de V si cumple las siguientes condiciones:

1. S genera a V.
2. S es linealmente independiente.

Aunque existen infinitas bases de un mismo espacio vectorial, frecuentemente se utiliza o busca la base **canónica** o **estándar** por su sencillez para representar cualquier elemento del espacio en términos de esta base.

Así la base canónica para $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

Para los polinomios de grado igual o menor que n P_n, su base canónica es el conjunto de vectores $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$

Para matrices 2×2, el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base canónica, de la misma manera la base canónica del espacio vecotrial M_{mn} consta de mn matrices de $m \times n$ que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos son iguales a cero.

Teorema Unicidad de la representación de la base
Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todos los vectores en V puede escribirse de una y sóla una forma como combinación lineal de vectores en S.

Teorema Bases y dependencia lineal
Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en V es linealmente dependiente.

Teorema Número de vectores en una base
Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces toda base de V tiene n vectores.

4.4.2 Dimensión de un espacio vectorial

Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión** es el número de vectores n en cada base y denota como $dim(V) = n$, a su vez V se denomina espacio vectorial de dimensión finita. De otra manera V se denomina espacio vectorial de dimensión infinita. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, es decir, el único elemento de V es el vector nulo, entonces la dimensión de V se define como cero.

- La dimensión de $\mathbb{R}^n$ con las operaciones estándar es n.
- La dimensión de P_n con las operaciones estándar es $n + 1$.
- La dimensión de M_{mn} con las operaciones estándar es mn.

Si H es un subespacio del espacio de dimensión finita V, entonces

$$dim(H) \leq dim(V)$$

4.5 Espacio vectorial con producto interno

4.5.1 Definición

Un espacio vectorial V se denomina espacio con producto interno si existe una función que asocia un vector en V con un escalar en F (el campo, ya sea el de los realos o el de los complejos) denotado por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, tal que para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ y $\alpha \in F$ cumpla la sigiuentes propiedades:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $\alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

El producto interno cuenta con las siguientes propiedades

- $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}$

Ya se ha trabajo con un producto interno en otras asignaturas, este es el conocido como *producto punto* definido en R^n.

4.5.2 Definición de norma, distancia y ángulo

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio V con producto interno.

1. La **norma** (o **longitud**) de $\mathbf{u}$ es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. La **distancia** entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$
3. El **ángulo** entre dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por

$$cos\ \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|},\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

$\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$
Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces $\mathbf{v}$ se llama **vector unitario**.
Si $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces el vector $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ es unitario en dirección de $\mathbf{v}$.

4.5.3 Bases ortonormales y proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

El conjunto de vectores S en un espacio V con producto interno se llama **ortogonal** si todo par de vectores en S es ortogonal. Si, además, cada vector en este conjunto es unitario, entonces S se denomina **ortonormal**. En pocas palabras, es ortogonal si cumple con

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0,\ i \neq j$$

y ortonormal si cumple la condición anterior y con la siguiente

$$\|\mathbf{v}_i\| = 1,\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

Si S es una base, entonces se denomina base ortogonal o base ortonormal, respectivamente.

Teorema Los conjuntos orotognales son linealmente independientes
Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto orotognal de vectores diferentes de cero en un espacio V con producto

interno, entonces S es linealmente independiente.

Corolario
Si V es un espacio con producto interno de dimensión n, entonces cualquier conjunto de n vectores ortogonales diferentes de cero es una base para V.

Un procedimiento para encontrar bases ortonormales es el **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** y consta de tres pasos.

1. Comenzar con una base del espacio con producto interno, no es necesario que sea ortogonal.
2. Convertir la base dada a una base ortogonal.
3. Normalizar cada uno de los vectores de la base ortogonal a fin de obtener una base ortonormal. Por normalizar se refiere a tomar cada vector y cambiar su longitud a 1 sin cambiar su dirección.

El método analítico del proceso es el siguiente:

1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio V con producto interno.
2. Sea $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, donde $\mathbf{w}_i$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\mathbf{w}_{n-1}
\end{aligned}$$

   Entonces B' es una base ortogonal.

3. Sea $\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$, el conjunto $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal.

Ejemplo Encontrar una base ortonormal de P_2, a partir de la base $B = \{1, x, x^2\}$ y el producto interno

$$\int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

1. Comenzar con una base del espacio con producto interno, no es necesario que sea ortogonal.
   La base es $B = \{1, x, x^2\}$.
2. Convertir la base dada a una base ortogonal.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= 1 \\
\mathbf{w}_2 &= x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}(1) = x - \frac{\int_{-1}^{1}(x)(1)dx}{\int_{-1}^{1}(1)(1)dx} \\
&= x - \frac{\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}}{x\Big|_{-1}^{1}}(1) = x - \frac{0}{2}(1) = x \\
\mathbf{w}_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}(1) - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}(x) = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1}(x^2)(1)dx}{\int_{-1}^{1}(1)(1)dx}(1) - \frac{\int_{-1}^{1}(x^2)(x)dx}{\int_{-1}^{1}(x)(x)dx}(x) \\
&= x^2 - \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}}{x \;\; -1^{1}}(1) - \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1}}{\frac{x^3}{3} \;\; -1^{1}}(x) = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}(1) - \frac{0}{\frac{2}{3}}(x) = x^2 - \frac{1}{3} \\
B'' &= \{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\}
\end{aligned}
$$

3. Normalizar cada uno de los vectores de la base ortogonal a fin de obtener una base ortonormal. Por normalizar se refiere a tomar cada vector y cambiar su longitud a 1 sin cambiar su dirección.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(1)(1)dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\sqrt{\langle x, x\rangle}} \\
&= \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x)(x)dx}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x) \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\|x^2 - \frac{1}{3}\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}} \\
&= \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9})dx}} \\
&= \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3}) \\
B'' &= \{\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x),\ \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 - \frac{1}{3})\}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, B'' es una base ortonormal para P_2.

5 Transformaciones lineales

5.1 Definición de tranformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T(\mathbf{v}) \in W$ y que satisface para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \tag{1}$$

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v}) \tag{2}$$

Se escribe $T : V \to W$ para indicar que T es una función cuyo dominio es V y cuya imagen es un subconjunto de W.

Sea T una transformación lineal de V en W, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V, entonces T cumple con las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{0} = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
3. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$
4. Si $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, entonces
   $T(\mathbf{v}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T(\mathbf{v_1}) + \alpha_2 T(\mathbf{v_2}) + \cdots + \alpha_n T(\mathbf{v_n})$

5.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal

5.2.1 Núcleo e imagen

Sean V y W dos espacioes vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces

- El núcelo o kernel de T es el conjunto de todos los vectores que se "transforman" en el cero de W y se denota por $ker(T)$ o $nu(T)$, se define como

$$ker(T) = \{\mathbf{v} \in V : \ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

- La imagen de T, denotada por $Im(T)$, está dada por

$$Im(T) = \{\mathbf{w} \in W : \ \mathbf{w} = T(\mathbf{v}) \text{ para alguna } \mathbf{v} \in V\}$$

$ker(T)$ es un subespacio de V e $Im(T)$ es un subespacio de W.

5.2.2 Nulidad y rango

La dimensión del kernel de T se llama nulidad y se denota como $nul(T)$ o $\upsilon(T)$, por otro lado, a la dimensión de la imagen se le denomina rango de T y se denota como $R(T)$ o $\rho(T)$

- Nulidad de $T = nul(T) = \upsilon(T) = dim(ker(T))$
- Rango de $T = R(T) = \rho(T) = dim(Im(T))$

Teorema Suma del rango y la nulidad
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V n-dimensional a un espacio vectorial W. Entonces, la suma de las dimensiones del rango y el kernel es igual a la dimensión del dominio. Es decir,

$$nul(T) + R(T) = n \text{ o } dim(ker(T)) + dim(Im(T)) = dim(V)$$

5.3 Clasificación de transformaciones lineales

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces T es **uno a uno** (1-1) si y sólo si $ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, es decir, si el único elemento en el kernel o núcleo es el elemento nulo de V.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es **sobre** W o simplemente sobre, si para todo $\mathbf{w} \in W$ existe al menos un $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Es decir, T es sobre W si y sólo si $R(T) = dim(W)$.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y $dim(V) = dim(W)$, entonces T es uno a uno si y sólo si T es sobre.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$. Entonces

1. Si $n > m$. T no es uno a uno.

2. Si $m > n$. T no es sobre.

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un **isomorfismo** si T es uno a uno y sobre. Cuando existe un isomorfismo entre V y W se dice que V y W son isomorfos.