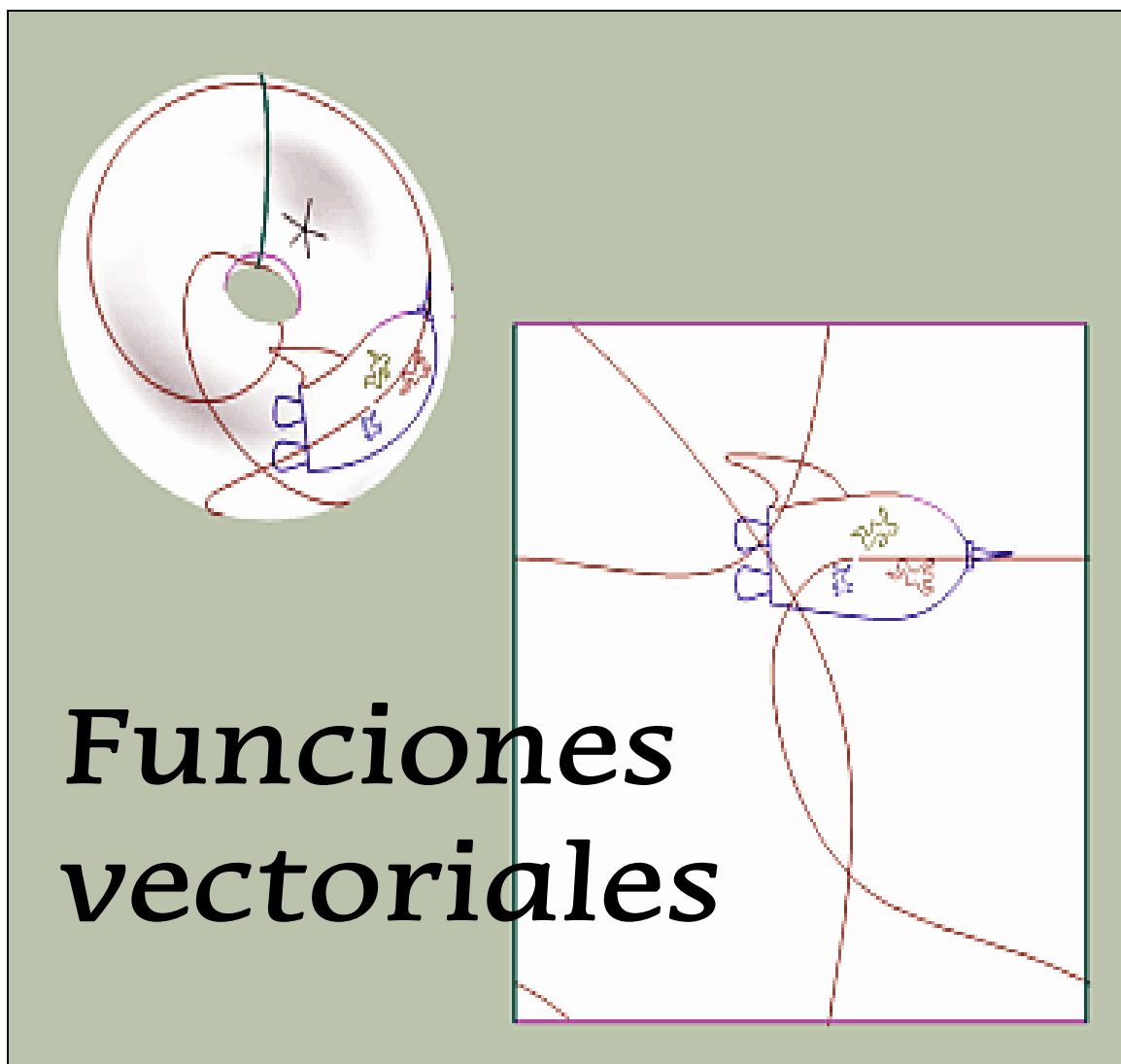


# Unidad 2



# INDICE

<b>1.</b>	<b><i>CURVAS, MOVIMIENTO EN EL ESPACIO Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS</i></b>	<b><i>1</i></b>
1.1	Introducción	1
1.2	Formas de definir una curva	1
<b>2.</b>	<b><i>FUNCIONES VECTORIALES, LIMITES Y CONTINUIDAD</i></b>	<b><i>4</i></b>
2.1	Funciones vectoriales	4
2.2	Gráfica de una función vectorial	5
2.3	Imágenes de funciones vectoriales y curvas	5
2.4	Operaciones con funciones	6
2.5	Límites y Continuidad	6
<b>3.</b>	<b><i>DERIVADAS E INTEGRALES</i></b>	<b><i>8</i></b>
<b>4.</b>	<b><i>APLICACIÓN ELEMENTAL A LA CINEMÁTICA</i></b>	<b><i>10</i></b>
<b>5.</b>	<b><i>GEOMETRIA DIFERENCIAL</i></b>	<b><i>10</i></b>
5.1	Longitud de una curva	11
5.2	Tangente a una curva	12
5.2.1	Vector tangente	12
5.2.2	Vector normal	13
5.3	Plano osculador	14
5.3.1	Componentes tangencial y normal de la aceleración	14
5.4	Curvatura	15
5.5	Torsión	18
<b>6.</b>	<b><i>APLICACIÓN A LA CINEMÁTICA</i></b>	<b><i>19</i></b>

## 1. CURVAS, MOVIMIENTO EN EL ESPACIO Y ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Podemos pensar una curva como un *objeto físico* o como la *trayectoria que sigue una partícula en movimiento*. En este punto veremos que una curva en el plano o en el espacio se define por medio de *ecuaciones paramétricas*.

### 1.1 Introducción

En la Geometría elemental se estudian curvas simples: rectas y segmentos de rectas, círculos y sectores circulares. Más tarde se estudian las funciones trigonométricas y las secciones cónicas, en Cálculo de una variable se estudian curvas asociadas a funciones de una variable pero subsiste el problema del *estudio de curvas en general*.

En la vida práctica y en la naturaleza encontramos constantemente curvas de muchas formas: la trayectoria de un planeta en el espacio, de una nave en el mar, de un proyectil en el aire, la huella de un cincel en el metal, de una rueda en el pavimento, la forma de una cuerda colgante, de un muelle espiral, de una carretera, de una vía férrea, etc.. Ejemplos como estos son interminables.

Los métodos para la elaboración de productos, las propiedades físicas de diversos objetos, las líneas de corriente de los cuerpos, la rigidez o deformabilidad de láminas delgadas, etc., dependen, fundamentalmente de la *forma geométrica* de los objetos y del *material* con el que están contruidos, en el caso de trayectorias la forma de la trayectoria también es fundamental para determinar el comportamiento de los objetos. En una primera aproximación, los objetos reales pueden ser representados por *curvas matemáticas*, que son aquellas en las que se hace *abstracción del espesor*. Las definiciones exactas de estas curvas no son sencillas y pertenecen a una rama de las matemáticas llamada Topología.

### 1.2 Formas de definir una curva

Las curvas se definen por medio de definiciones que abran la posibilidad de un *cálculo numérico*. Solo si las curvas se definen *por medio de ecuaciones*, pueden estudiarse sus propiedades con los *métodos del Análisis*.

De la geometría analítica y del Cálculo, estás acostumbrado a definir una curva por medio de una ecuación, pero esto funciona bien en el caso de curvas planas, no para las curvas en el espacio. Nos planteamos entonces el siguiente problema:

**¿Cómo definir una curva en el espacio?**

Es muy conveniente representar una curva como la *traza del movimiento continuo de un punto material*. Naturalmente, la curva puede haber sido generada de otra manera pero conviene mucho pensarla siempre como la trayectoria de un punto que se mueve sobre ella.

Consideremos primero a la "curva" del plano más sencilla: un segmento de recta.

El segmento de recta que va del punto **A** al punto **B** de  $\mathbb{R}^3$  puede describirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

lo que nos conduce a ecuaciones de la forma

$$x(t) = x_0 + at, \quad y(t) = y_0 + bt \quad \text{y} \quad z(t) = z_0 + ct \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

en el caso que  $t \in \mathbb{R}$ , entonces se describe a toda la recta que pasa por el punto  $\mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$  con vector de dirección  $(a, b, c)$

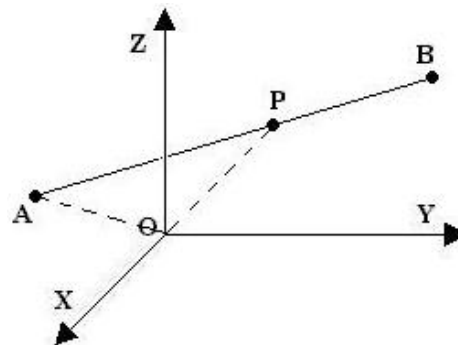


Figura 1: segmento de recta

Analicemos el movimiento circular uniforme en el plano. Supongamos que a lo largo de una circunferencia de radio  $r$  se mueve una partícula con velocidad angular constante  $\omega$  (ángulo girado en la unidad de tiempo  $t$ ). Nos interesa establecer una serie de ecuaciones que describan el movimiento de esta partícula (lo que al mismo tiempo nos permitirá caracterizar a todos los puntos de la curva), naturalmente situaremos la curva en un sistema de coordenadas bidimensional.

Después de nuestro análisis, llegamos a las ecuaciones:

$$x(t) = r \cos \omega t \quad y \quad y(t) = r \sin \omega t \quad (3)$$

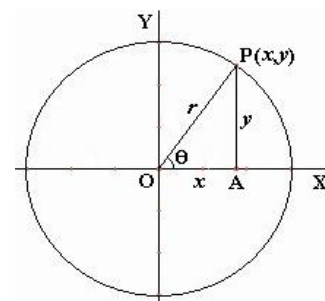


Figura 2: circunferencia

Estas ecuaciones caracterizan a la circunferencia. En efecto, la primera ecuación caracteriza a la primera componente de todos los puntos de la curva, y la segunda ecuación caracteriza a la segunda componente de todos los puntos de la curva.

De manera semejante, puede demostrarse que un movimiento elíptico queda descrito por ecuaciones del tipo:

$$x(t) = a \cos \omega t \quad y \quad y(t) = b \sin \omega t \quad (4)$$

Analicemos ahora el movimiento de la hélice de una avión (ve la foto respectiva). Si observas, un punto material situado en un extremo de una de las paletas de la hélice, genera una curva en forma de resorte a la que llamaremos **hélice circular**, esto se debe a que se dan dos movimientos: uno circular alrededor del centro de la hélice y otro rectilíneo en la dirección del movimiento del avión, al ir aumentando la velocidad del avión, esta especie de resorte se va "alargando".

Al igual que en el caso anterior, nos interesa obtener unas ecuaciones que describan el movimiento de la partícula, es decir, ecuaciones tales que nos den la variación de cada una de las componentes de todos los puntos que forman la curva.

Para simplificar un poco, consideraremos que el avión se mueve a lo largo de una línea recta con una rapidez constante  $c$  y con una velocidad angular constante  $\omega$ . No altera el resultado suponer que esta recta coincide con el eje  $Z$ . Sea  $r$  el radio de la hélice.

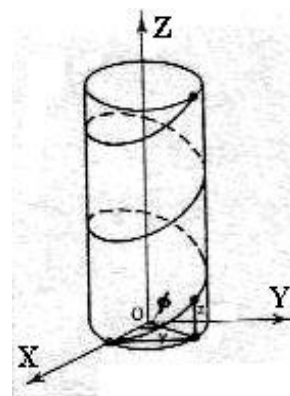


Figura 3: hélice

Después de nuestro análisis, llegamos a las ecuaciones:  $x(t) = r \cos \omega t$ ,  $y(t) = r \sin \omega t$ , y  $z(t) = ct$  (5)

Una **hélice elíptica** esta caracterizada por las siguiente ecuaciones:

$$x(t) = a \cos \omega t, \quad y(t) = b \sin \omega t \quad y \quad z(t) = ct \quad (6)$$

Finalmente, consideremos un tercer ejemplo: el movimiento de una rueda de radio  $r$  que gira con una velocidad angular constante  $\omega$  y que avanza en la dirección del movimiento (este sería, por ejemplo, el caso de la llanta de un automóvil). Consideremos una partícula que se halla en el extremo de la rueda, la partícula al mismo tiempo que recorre una circunferencia, avanza en la dirección del movimiento. La curva así descrita recibe el nombre de *cicloide*.

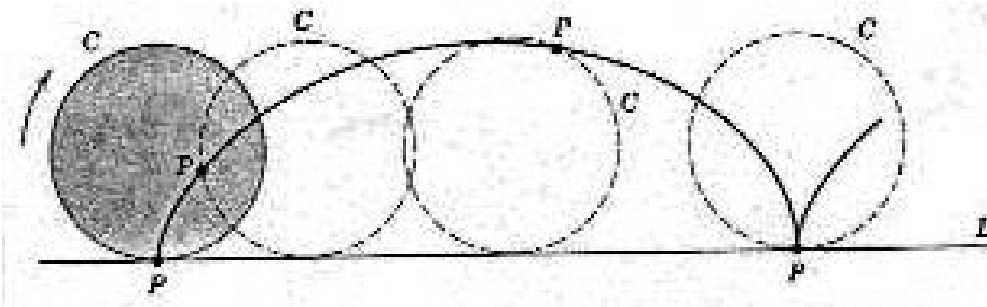


Figura 4: generación de una cicloide

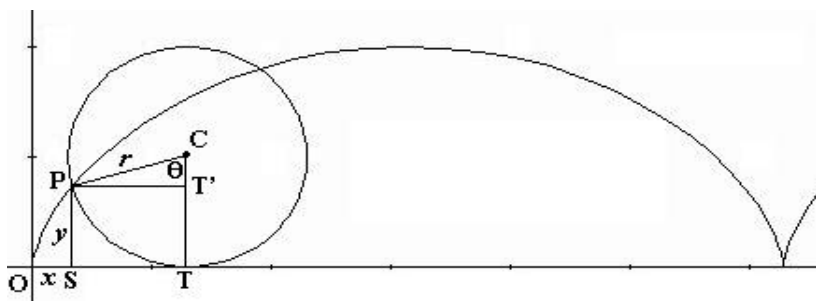


Figura 5: cicloide

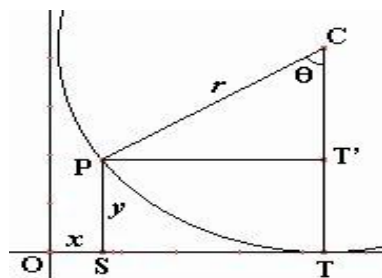


Figura 6: zoom de la figura anterior

Después de nuestro análisis, llegamos a las ecuaciones:

$$x(t) = r(\omega t - \sin \omega t) \text{ y } y(t) = r(1 - \cos \omega t) \quad (7)$$

En las ecuaciones (2),  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$ ,  $a$ ,  $b$  y  $c$  son constantes; en las ecuaciones (3) y (7)  $r$  y  $\omega$  son constantes; en las ecuaciones (5),  $r$ ,  $\omega$  y  $c$  son constantes; Así, en estos grupos de ecuaciones,  $x$ ,  $y$  y  $z$  dependen de la variable  $t$ , es decir, cada componente de los puntos de la curva, depende del valor de  $t$  por lo que podemos pensar cada una de esas ecuaciones como **funciones reales**.

Los análisis anteriores pueden extenderse para muchas otras curvas: se fija un sistema de coordenadas en el plano o en el espacio y se supone que un punto móvil recorre la curva desde un instante  $t = a$  hasta un instante  $t = b$ , entonces las coordenadas de ese punto móvil se dan por funciones del tiempo  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y  $z = z(t)$ . Recíprocamente, dadas inicialmente las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , podemos servirnos de ellas para definir las coordenadas de un punto móvil que describa alguna curva.

En consecuencia, las curvas en el espacio pueden describirse analíticamente por medio de tres ecuaciones de la forma

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad y \quad z = z(t) \quad (8)$$

Análogamente, una curva plana puede definirse por medio de dos ecuaciones:

$$x = x(t) \text{ y } y = y(t) \quad (9)$$

**Esta es la manera más general de definir curvas.** Estas ecuaciones se dicen **ECUACIONES PARAMÉTRICAS** de la curva dada y  $t$  se dice **PARÁMETRO** y lo podemos pensar siempre como el tiempo aunque en realidad el parámetro puede representar otra cosa: un ángulo  $\theta$ , una longitud  $s$ , etc.

En general, **cualquier** función de una variable  $f(x)$  se puede **parametrizar** mediante las ecuaciones paramétricas  $x(t) = t$  y  $y(t) = f(t)$ .

Por ejemplo, podemos parametrizar un movimiento parabólico. Si una partícula sigue como trayectoria la gráfica de la parábola  $y = ax^2$  las ecuaciones paramétricas que describen la trayectoria están dadas por

$$x(t) = t \text{ y } y(t) = at^2 \quad (10)$$

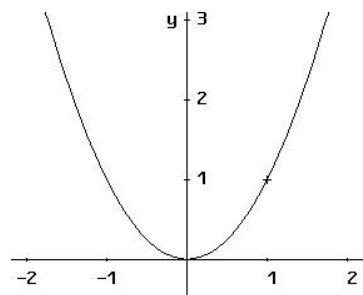


Figura 7: parábola

Así como algunas curvas se describen más fácilmente en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares, otras curvas se describen de una manera más sencilla usando ecuaciones paramétricas y para algunos análisis que usaremos posteriormente será muy cómodo usarlas. Otras curvas que se describen de manera sencilla usando ecuaciones paramétricas son:

Tabla 1

curva	ecuaciones
Astroide	$x(t) = a \cos^3(\omega t)$ y $y(t) = b \sen^3(\omega t)$
Evoluta de la elipse	$x(t) = a \cos^3(\omega t)$ y $y(t) = b \sen^2(\omega t)$
Trocoide	$x(t) = r\omega t - b \sen(\omega t)$ y $y(t) = r - b \cos(\omega t)$

## 2. FUNCIONES VECTORIALES, LIMITES Y CONTINUIDAD

### 2.1 Funciones vectoriales

El semestre pasado trabajaste con funciones cuyo dominio y cuyo codominio eran ambos conjuntos de números reales. Ahora que conoces los vectores, nos proponemos investigar un nuevo tipo de funciones cuyo dominio está formado por números reales pero cuyo ***codominio está formado por vectores***. Estas funciones, que llamaremos ***funciones con valores vectoriales*** o más simplemente ***funciones vectoriales*** tienen muchas aplicaciones. Una de las más importantes se refiere al estudio del movimiento de un cuerpo en el espacio, en efecto, un modo conveniente de describir un movimiento de este tipo es a través de una función vectorial cuyo dominio es un intervalo que representa al tiempo y cuyo valor para cualquier tiempo  $t$  es la posición del cuerpo en el espacio.

En la primera parte de esta unidad aplicaremos al nuevo tipo de funciones los conceptos que ya conoces y manejas muy bien: límites, continuidad, derivadas e integrales. Posteriormente, aplicaremos estas funciones al estudio del movimiento en el plano y en el espacio. La segunda parte de la unidad la dedicaremos a una parte de la Geometría Diferencial: el estudio de curvas en el espacio. Comenzamos con la siguiente definición.

#### DEFINICION 1 (función vectorial)

Dado un conjunto de números reales  $X$  y un conjunto de vectores  $Y$ , se dice que está dada una función de  $X$  en  $Y$  si se da una regla que permite asociar a cada número uno y sólo un vector. Una función de este tipo se dice **FUNCION VECTORIAL**.  $X$  se dice **dominio**,  $Y$  se dice **codominio** y la regla dada se dice **regla de correspondencia**.

Para diferenciar las nuevas funciones de las de Cálculo de una variable, a aquellas las llamaremos "funciones reales", y de hoy en adelante, en esta unidad, cuando digamos función, debes entender que se trata de una función vectorial.

Se acostumbra representar la variable independiente de estas funciones con la letra  $t$  en vez de la letra  $x$ ; la razón de esto es que en la mayoría de las aplicaciones el dominio será un intervalo del tiempo. Las funciones vectoriales las representaremos por letras mayúsculas  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , etc. y las reales (como antes) por minúsculas  $f$ ,  $g$ ,  $h$ , etc.

A cada función vectorial  $F$ , le corresponden tres funciones reales  $f_1, f_2$  y  $f_3$ , en efecto, a cada número  $t$  en el dominio de  $F$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  representan a las componentes de  $F(t)$ , dichas funciones se dicen **funciones componentes** de  $F$  y en ese caso escribimos  $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ . Es posible que  $F(t)$  tenga sólo dos funciones componentes, esto sucede cuando a cada  $t$  se le asigna un vector del plano.

A menos que se indique lo contrario, cuando una función vectorial  $F$  está dada por sus funciones componentes, el dominio de  $F$  consiste de todos los números para los que cada una de las funciones componentes tiene sentido en  $\mathbb{R}$  (!igualito que en Cálculo de una variable). Es decir,  $D_F$  es la intersección de los dominios de cada función componente.

#### DEFINICION 2 (imagen de una función)

Al conjunto de todos los elementos del codominio que están relacionados con los elementos del dominio en una función, se le llama **IMAGEN** (o **RANGO**) de la función.

## 2.2 Gráfica de una función vectorial

Recuerda que en Cálculo I, se definió la gráfica de una función  $f$  como el conjunto  $G = \{(x, f(x)) / x \in D_f\}$ , es decir, el conjunto de todas las parejas ordenadas cuyas primeras componentes son los elementos del dominio y cuyas segundas componentes son las respectivas imágenes.

Para una función vectorial podemos definir su gráfica de la misma manera: Dada  $F$ , la gráfica de  $F$  es el conjunto  $G = \{(t, F(t)) / t \in D_F\}$ . Para una función real  $G \subset \mathbb{R}^2$ , pero para una función vectorial:

Si  $F(t) \in \mathbb{R}^2$  para toda  $t$ , entonces  $G \subset \mathbb{R}^3$ . De este tipo de funciones podemos dibujar entonces su imagen (que queda en el plano) y su gráfica (que queda en el espacio).

Si  $F(t) \in \mathbb{R}^3$  para toda  $t$ , entonces  $G$  sería un subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  por lo que no podemos dibujar la gráfica. Alternativamente, podemos hacernos una idea del comportamiento de la función graficando su imagen (que estaría en el espacio).

## 2.3 Imágenes de funciones vectoriales y curvas

Consideremos la función  $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ , su imagen  $I_F$  se definió como el conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio de la función, es decir,  $I_F = \{F(t) / t \in D_F\}$ ; ahora  $F(t) \in \mathbb{R}^3 \forall t \in \mathbb{R}$  por lo que  $I_F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  y entonces podemos graficar  $I_F$  en un sistema de coordenadas cartesiano tridimensional.

Si llamamos  $x(t)$  a la primer función componente,  $y(t)$  a la segunda y  $z(t)$  a la tercera, tendremos entonces la siguientes ecuaciones:

$$x(t) = f_1(t) \quad y(t) = f_2(t) \quad y \quad z(t) = f_3(t) \quad (11)$$

nos quedan tres ecuaciones paramétricas, por lo que la gráfica de  $I_F$  es una curva en el espacio.

Análogamente, si consideramos la función  $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$ ,  $F(t) \in \mathbb{R}^2 \forall t \in \mathbb{R}$  por lo que  $I_F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  y entonces podemos graficar  $I_F$  en un sistema de coordenadas cartesiano bidimensional.

Si llamamos  $x(t)$  a la primer función componente, y  $y(t)$  a la segunda tendremos entonces la siguientes ecuaciones:

$$x(t) = f_1(t) \quad y \quad y(t) = f_2(t) \quad (12)$$

nos quedan dos ecuaciones paramétricas, por lo que la gráfica de  $I_F$  es una curva en el plano.

Por otra parte, consideremos una curva  $C$  de ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  y  $z = z(t)$ , podemos construir la función  $F(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , de esta manera la imagen de  $F$  sería  $C$ . Y lo mismo sucede para el caso de curvas planas.

De esta manera, las curvas están íntimamente ligadas a las funciones vectoriales: la imagen de una función vectorial es una curva y una curva puede ser descrita y por lo tanto definida mediante una función vectorial.

Así por ejemplo, la imagen de la función  $F(t) = (2 - 3t, 4 + t, -2t)$  es una recta en el espacio que pasa por  $P(2, 4, 0)$  con vector de dirección  $a = (-3, 1, -2)$ , la imagen de  $F(t) = (\cos t, \sin t, t)$  es una hélice con eje el eje Z; la imagen de  $F(t) = (\cos t, \sin t)$  es una circunferencia; la imagen de  $F(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  es una cicloide.

## 2.4 Operaciones con funciones

Al igual que con las funciones reales, podemos combinar funciones para obtener otras nuevas, lo que facilita el análisis de funciones más complejas. Las operaciones con funciones reales se definieron con base en sus imágenes y lo mismo se hace con las funciones vectoriales. En las funciones reales, las imágenes son números reales, por eso se definieron operaciones que habitualmente usamos con esos números. Las imágenes de las funciones vectoriales son vectores por lo que se definen operaciones habituales entre vectores.

### DEFINICION 3 (operaciones con funciones)

Dadas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  funciones vectoriales y  $f$  y  $g$  funciones reales, definimos las siguientes operaciones entre ellas:

$$\begin{aligned} 1) (\mathbf{F} + \mathbf{G})(t) &= \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t) & 2) (\mathbf{F} - \mathbf{G})(t) &= \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t) & 3) (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) &= \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{G}(t) \\ 4) (\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) &= \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t) & 5) (f \mathbf{F})(t) &= f(t) \mathbf{F}(t) & 6) (\mathbf{F} \circ g)(t) &= \mathbf{F}(g(t)) & 7) \|\mathbf{F}\|(t) &= \|\mathbf{F}(t)\| \end{aligned}$$

Observa que en la definición anterior se definieron dos productos porque tenemos dos productos entre vectores, no se definió una división porque no está definida la división entre vectores y se definió la única composición posible. Observa también que  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$  es una función real mientras que  $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$  es una función vectorial.

Al igual que con las funciones reales, el dominio de la función resultante es el conjunto de valores para los que tiene sentido su regla de correspondencia.

## 2.5 Límites y Continuidad

El concepto de límite para funciones vectoriales tiene la misma acepción que para las funciones reales: es el valor al que nos acercamos con las imágenes cuando nos acercamos al punto del dominio en el que estamos calculando el límite por lo que damos la siguiente definición.

### DEFINICION 4 (límite de una función)

Sea  $\mathbf{F}$  una función vectorial definida en un intervalo abierto que contiene a  $t_0$  excepto posiblemente en  $t_0$  mismo.

Un vector  $\mathbf{L}$  se dice **LÍMITE** de  $\mathbf{F}$  en  $t_0$  si y sólo si:  $t \rightarrow t_0 \Rightarrow \mathbf{F}(t) \rightarrow \mathbf{L} = (l_1, l_2, l_3)$

en ese caso escribimos  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{L} = (l_1, l_2, l_3)$  y decimos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$  existe.

Al igual que con las funciones reales, los límites NO los calculamos usando la definición. El siguiente teorema es muy útil pues permite calcular el límite de  $\mathbf{F}(t)$  calculando los límites de sus funciones componentes.

### TEOREMA 1 (para el cálculo de límites)

La función  $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ ,  $\mathbf{F}$  tiene límite en  $t_0$  si y sólo si  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  tienen límites en  $t_0$  y en ese caso:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t), \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) \right)$$

El teorema anterior también proporciona una forma fácil de obtener fórmulas para operaciones con límites.

### COROLARIO 1.1 (operaciones con límites)

Sean  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  funciones vectoriales y  $f$  y  $g$  funciones reales. Supongamos que existan  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$  y que  $\lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = t_0$ . Entonces:

$$\begin{aligned} a) \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} \pm \mathbf{G})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \pm \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t) & b) \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t) \\ c) \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{F} \times \mathbf{G})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{G}(t) & d) \lim_{t \rightarrow t_0} (f \mathbf{F})(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) & e) \lim_{s \rightarrow s_0} (\mathbf{F} \circ g)(s) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) \end{aligned}$$



Es decir, el límite de una suma es la suma de los límites, el límite de un producto escalar es el producto escalar de los límites, etc. Estas propiedades son *útiles para demostrar otras propiedades* pero NO se usan para calcular límites, en ese caso es mucho más sencillo primero realizar la operación respectiva y luego calcular el límite de la función resultante componente a componente.

Al igual que con las funciones reales, podemos extender la definición de límite para hablar de límites unilaterales o de límites al infinito. Esto lo haremos de la forma más natural (la sugerida por el teorema 1).

### DEFINICION 5 (límites unilaterales y límites al infinito)

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \mathbf{F}(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_1(t), \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_2(t), \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_3(t) \right) \text{ lo mismo vale para } t \rightarrow t_0^- \text{ y } t \rightarrow \infty$$

La definición anterior puede hacerse en términos de  $\varepsilon$  y  $\delta$ , luego se demuestra que esos límites se pueden calcular con las funciones componentes, el ahorrarnos ese trabajo es la razón de haber definido directamente los límites en términos de los límites respectivos de las funciones componentes.

#### 👉 NOTA:

No tienen sentido las siguientes escrituras:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{F}(t) = \infty$ , en ese caso decimos que el límite no existe.

### DEFINICION 6 (función continua)

Una función  $\mathbf{F}$  definida en un intervalo  $\mathbf{I}$  y  $t_0 \in \mathbf{I}$ , se dice CONTINUA en  $t_0$  si y sólo si:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0)$

$\mathbf{F}$  se dice CONTINUA en  $\mathbf{I}$  si es continua en cada punto de  $\mathbf{I}$ , y CONTINUA si es continua en todos los puntos de su dominio.

Observa que esta definición es la misma que se utiliza en Cálculo de una variable. Al igual que en el caso de los límites, la continuidad de una función vectorial depende de la continuidad de sus funciones componentes como señala el siguiente teorema:

### TEOREMA 2 (continuidad de una función)

Dada una función  $\mathbf{F}$  definida en un intervalo  $\mathbf{I}$  y  $t_0 \in \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{F}$  es continua en  $t_0$  si y sólo si cada una de sus funciones componentes es continua en  $t_0$ .

Al igual que en el caso de las funciones reales, la continuidad se preserva después de ciertas operaciones y esto no es más que una consecuencia del teorema anterior.

### COROLARIO 2.1 (operaciones con funciones continuas)

Dadas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  funciones vectoriales y  $g$  una función real tales que  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{G}$  son continuas en  $t_0$  y  $g$  es continua en  $s_0$  con  $g(s_0) = t_0$  entonces:

- |                                                     |                                                |                                                                                            |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$ es continua en $t_0$ . | b) $c\mathbf{F}$ es continua en $t_0$ .        | c) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ y $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$ son continuas en $t_0$ . |
| d) $g\mathbf{F}$ es continua en $t_0$ .             | e) $\mathbf{F} \circ g$ es continua en $s_0$ . | f) $\ \mathbf{F}\ $ es continua en $t_0$ .                                                 |

### 3. DERIVADAS E INTEGRALES

Las funciones componentes de una función vectorial son muy importantes, ya que al ser reales, permiten trasladar la teoría de Cálculo de una variable a las funciones vectoriales. Así, calcular el límite de una función vectorial o verificar su continuidad se reduce a calcular el límite respectivo o a verificar la continuidad de sus funciones componentes. Ahora veremos que las derivadas e integrales de funciones vectoriales se calculan también calculando las respectivas derivadas e integrales de sus funciones componentes.

#### DEFINICION 7 (derivada)

Dada una función  $F$  definida en un intervalo  $I$  y  $t_0 \in I$ , si existe  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}$ , se dice que  $F$  es

**DERIVABLE** en  $t_0$ , el límite dado se dice la **DERIVADA** de  $F$  en  $t_0$  y en ese caso escribimos:

$$F'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \quad (13)$$

$F$  se dice **DERIVABLE EN UN INTERVALO  $I$**  si es derivable en cada punto de  $I$ .  $F$  se dice **DERIVABLE** si es derivable en su dominio. Alternativamente, podemos escribir:

$$F'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} \quad (14)$$

La derivada tiene una interpretación geométrica interesante:

si  $P_0 = F(t_0)$  es un punto sobre la curva  $C$  imagen de la función  $F$ , el vector  $F(t) - F(t_0)$  es un vector “secante” a la curva en el punto  $P_0$  (ve la primera figura de la derecha) por lo que  $F'(t_0)$  representaría el límite de vectores secantes y por lo tanto un vector tangente a  $C$  en  $P_0$  (ve la figura de la extrema derecha).

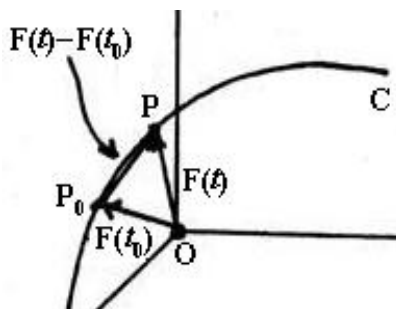


Figura 8:

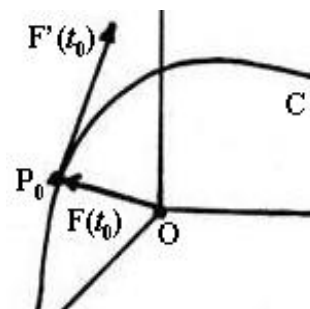


Figura 9

#### TEOREMA 3 (para el cálculo de derivadas)

Dada  $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ , entonces

$$F'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) \quad (15)$$

(es decir, la derivada es el vector formado por las derivadas de cada función componente)

Al igual que en Cálculo de una variable, para las funciones vectoriales existen también reglas de derivación para las operaciones con funciones. Estas reglas son similares a las que ya conoces para funciones reales y las enunciamos en el siguiente teorema.

#### TEOREMA 4 (reglas de derivación)

Dadas  $F$  y  $G$  funciones vectoriales y  $f$  y  $g$  funciones reales, si  $F, G$  y  $f$  son derivables en  $t$  y  $g$  es derivable en  $s$  con  $g(s) = t$ , entonces:

$$1) (F \pm G)'(t) = F'(t) \pm G'(t) \quad 2) (fF)'(t) = f(t)F'(t) + F(t)f'(t) \quad 3) (F \cdot G)'(t) = F(t) \cdot G'(t) + G(t) \cdot F'(t)$$

$$4) (F \times G)'(t) = F(t) \times G'(t) + F'(t) \times G(t)$$

$$5) \left( \frac{F}{f} \right)'(t) = \frac{f(t)F'(t) - F(t)f'(t)}{f^2(t)}$$

$$6) (F \circ g)'(s) = F'(g(s))g'(s) = F'(t)g'(s)$$

$$7) \|F\|'(t) = \frac{F \cdot F'}{\|F\|}$$

Al igual que en el caso de los límites, estas propiedades son *útiles para demostrar otras propiedades* pero NO se usan para calcular derivadas, en ese caso es mucho más sencillo primero realizar la operación respectiva y luego calcular la derivada de la función resultante componente a componente. En el caso de usar la fórmula 4 se debe poner atención a usarla tal como está indicada ya que recuerda que el producto cruz no es conmutativo.

Hay una consecuencia de este teorema que es particularmente importante cuando se analiza la interpretación geométrica de las funciones vectoriales y de sus operaciones.

#### COROLARIO 4.1 (relación entre una función y su derivada)

Dada una función vectorial  $\mathbf{F}$ , definida en un intervalo  $\mathbf{I}$ , si su norma es constante, es decir, si  $\|\mathbf{F}\| = c$  (con  $c \in \mathbb{R}$ ), entonces:

$$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t) = 0$$

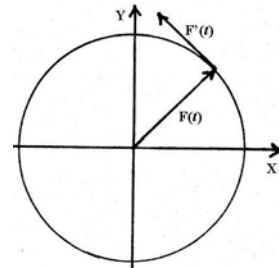


Figura 10

El teorema anterior es aplicable a cualquier vector unitario, por lo que  $\frac{\mathbf{F}(t)}{\|\mathbf{F}(t)\|}$  es perpendicular a  $\left(\frac{\mathbf{F}(t)}{\|\mathbf{F}(t)\|}\right)'$ .

El siguiente teorema es análogo a uno aplicable a las funciones reales, relaciona la derivada con la continuidad.

#### TEOREMA 5 (relación entre derivación y continuidad)

Si una función  $\mathbf{F}$  es derivable en  $t_0$ , entonces  $\mathbf{F}$  es continua en  $t_0$ .

Para las funciones vectoriales se definen derivadas de orden superior (segunda derivada, tercera derivada, etc.) aunque nos concretaremos al caso de la segunda derivada que es la que tiene un significado físico interesante.

#### DEFINICION 8 (segunda derivada)

Dada la función  $\mathbf{F}$ , su **SEGUNDA DERIVADA**  $\mathbf{F}''$ , es la derivada de la derivada, es decir:  $\mathbf{F}''(t) = (\mathbf{F}'(t))'$

$\mathbf{F}''$  se halla con el TEOREMA , es decir, se calcula la segunda derivada de cada función componente.

Se puede definir la integral de una función vectorial con sumas de Riemann y luego demostrar que la integral se puede calcular con base en las integrales respectivas de las funciones componentes, para simplificar, definiremos la integral directamente en términos de las funciones componentes.

#### DEFINICION 9 (integral)

Dada  $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ , donde  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  y  $f_3(t)$  son continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces la **INTEGRAL DEFINIDA**  $\int_a^b \mathbf{F}(t) dt$  y la **INTEGRAL INDEFINIDA**  $\int \mathbf{F}(t) dt$ , se definen de la siguiente manera:

$$\int_a^b \mathbf{F}(t) dt = \left( \int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \int_a^b f_3(t) dt \right) \quad (16)$$

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \left( \int f_1(t) dt, \int f_2(t) dt, \int f_3(t) dt \right) \quad (17)$$

(es decir, la integral es el vector formado por las integrales de cada función componente).

El siguiente teorema nos da algunas propiedades de la integral que son consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones reales y que de la misma manera, relacionan derivadas con integrales:

#### TEOREMA 6 (propiedades de la integral)

$$a) \left( \int \mathbf{F}(t) dt \right)' = \mathbf{F}(t) \quad b) \int \mathbf{F}'(t) dt = \mathbf{F}(t) + (c_1, c_2, c_3) \quad c) \int_a^b \mathbf{F}'(t) dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

## 4. APLICACIÓN ELEMENTAL A LA CINEMÁTICA

Importantes aplicaciones físicas de las funciones vectoriales se dan, como ya hemos comentado, en el estudio del movimiento, la base de estas aplicaciones es la siguiente definición.

### DEFINICION 10 (vectores posición, velocidad, y aceleración; rapidez)

Si  $\mathbf{r}(t)$  representa la posición de una partícula en el instante  $t$ , entonces definimos:

el vector posición:  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  (18)

el vector velocidad:  $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$  (19)

el vector aceleración:  $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$  (20)

la rapidez:  $\|\mathbf{v}(t)\|$  (21)

En este caso se acostumbra representar a la rapidez simplemente como  $v$  y a la norma de la aceleración como  $a$ .

## 5. GEOMETRIA DIFERENCIAL

En la Geometría elemental no hay nada sobre curvas arbitrarias, en la Geometría analítica hay ya algo, pero este estudio se restringe al uso de los métodos del álgebra y de la Geometría elemental. En cambio, el estudio general de curvas forma parte de una rama de las matemáticas llamada **GEOMETRIA DIFERENCIAL**. Esta rama usa como instrumento primordial al cálculo diferencial y estudia las "propiedades diferenciales" de las curvas, es decir, propiedades locales. Así, la dirección de una curva en un punto, está dada por su **tangente** en ese punto; la medida en que está plegada, está dada por la **curvatura**; y la medida en que se mueve a través de diferentes planos, está dada por la **torsión**. Se estudian pequeños segmentos de curva y sólo más adelante se estudian propiedades "globales" aunque ese estudio se sale del alcance de este curso.

El desarrollo de la Geometría Diferencial está inseparablemente ligado al del Análisis. Las operaciones básicas del Análisis: derivación e integración tienen un significado físico inmediato. Así como en Análisis se estudian funciones arbitrarias, en Geometría diferencial se estudian curvas arbitrarias.

En el Análisis, el primer objeto de estudio, es el recorrido general de una curva en el plano, sus máximos y mínimos, su mayor o menor curvatura, sus concavidades, sus intervalos de monotonía, sus puntos de inflexión, etc. Es decir, es muy estrecha la relación entre Análisis y curvas.

Hacia el siglo XVIII, el Cálculo diferencial e integral estaba ya bastante desarrollado como para permitir una más profunda aplicación a la Geometría. Los problemas de las curvas en el espacio son mucho más ricos en contenido de los problemas respectivos de las curvas planas, pero bien rápido estos problemas fueron mucho más allá de una simple aplicación del Análisis a la Geometría y formaron una teoría independiente entre cuyos principales fundadores se puede mencionar a Euler, Monge, y Clairaut. Mucho interés provocó la Geometría diferencial debido sobre todo a los requerimientos de la mecánica, la física y la astronomía, es decir, de la tecnología y la industria para los que los resultados de la Geometría elemental eran evidentemente insuficientes.



Leonhard Euler (1707-1783)    Gaspard Monge (1746-1818)    Alexis Clairaut (1713-1765)    Gaston Darboux (1842-1917)

A finales del siglo XIX, estaba ya consolidada la Geometría diferencial "clásica", los resultados de esta parte, fueron compendiados por Darboux en 4 libros (1887-1897). Aún hoy se estudia la parte "clásica" (que es lo que haremos nosotros) aunque la mayor parte del estudio de la Geometría diferencial está encaminada hacia otras direcciones en las que las figuras estudiadas son siempre más amplias.

En la Geometría diferencial de curvas planas existen **tres conceptos básicos: longitud, tangente y curvatura**. Para las curvas en el espacio existen además el **plano osculador** y la **torsión**. Analizaremos ahora el sentido y significado de estos conceptos recordando que en el punto anterior vimos que una curva estará asociada a una función vectorial.

## 5.1 Longitud de una curva

Todos tenemos en la mente una idea natural de lo que se entiende por longitud. Sin embargo, es necesario convertir esta idea en una definición precisa de longitud de una curva matemática, una definición con un carácter numérico específico que nos permita calcular la longitud de una curva con el grado deseado de exactitud y en consecuencia, argumentar sobre longitudes de una manera rigurosa. *La misma observación se aplica a todos los conceptos matemáticos*. La transición de ideas no formales a medidas exactas y definiciones representa el paso del conocimiento precientífico de los objetos a una teoría científica. La necesidad de una definición precisa de longitud surgió, en última instancia, de las exigencias de la tecnología y las ciencias naturales, cuyo desarrollo requería la investigación de las propiedades de las longitudes, áreas y otras entidades geométricas.

Consideremos la curva  $C$  asociada a la función  $F$  y supongamos que una partícula recorre  $C$  desde un instante  $t = a$  hasta un instante  $t = b$ . Buscamos obtener una fórmula que nos de la longitud de la curva recorrida por la partícula.

Sea  $s(t)$  la lectura del odómetro, entonces  $s(t)$  nos da la longitud de la curva desde el punto  $F(a)$  hasta el punto  $F(t)$ ,  $s(t)$  es una función definida en el intervalo  $[a, b]$  con valores reales y supongamos que  $s(t)$  es derivable.

Consideremos ahora dos puntos sobre la curva que estén muy cercanos, digamos  $F(t)$  y  $F(t+h)$  con  $h$  suficientemente pequeña, en ese caso la distancia sobre la curva  $s(t+h) - s(t)$  es aproximadamente la distancia medida en línea recta  $\|F(t+h) - F(t)\|$ .

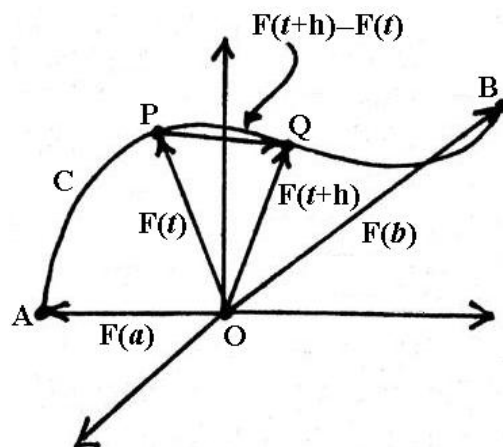


Figura 11

Después de nuestro análisis, llegamos a la fórmula

$$s(t) = \int_a^t \|F'(u)\| du \quad (22)$$

Con la fórmula anterior, podemos dar la siguiente definición:

### DEFINICION 11 (longitud de una curva)

Dada una curva  $C$ , imagen de una función vectorial  $F$ , definimos su longitud  $s$  desde  $t = a$  hasta  $t = b$  de la siguiente manera:

$$s = \int_a^b \|F'(t)\| dt \quad (23)$$

Para funciones reales, podemos construir la función vectorial  $F(t) = (t, f(t))$  y entonces la fórmula de la definición 11 se transforma en la siguiente fórmula:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt \quad (24)$$

Para funciones polares  $r = f(\theta)$ , podemos construir la función vectorial  $\mathbf{F}(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta)$  y entonces la fórmula de la definición 11 se transforma en la siguiente fórmula:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2} d\theta \quad (25)$$

## TEOREMA 7

La distancia recorrida  $s(t)$  y la norma de la derivada están relacionadas mediante la siguiente fórmula

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{F}'(t)\|$$

En la era pre-informática, el cálculo efectivo de la longitud por medio de estas fórmulas no siempre era sencillo, ahora con el uso de software podemos calcular muchas integrales definidas por lo que el problema del cálculo se simplifica. Sin embargo debes observar que las fórmulas matemáticas son útiles para algo más que para hacer simples cálculos: son un breve enunciado de teoremas que establecen conexiones entre diferentes entes matemáticos. El significado teórico de tales conexiones puede superar con mucho el valor "computacional" de la fórmula.

## 5.2 Tangente a una curva

### 5.2.1 Vector tangente

En tu curso anterior de cálculo trabajaste ampliamente con el concepto de tangente a una curva en un punto dado, de hecho, te diste cuenta que históricamente, el concepto de derivada surge para resolver "el problema de la tangente".

No es casual que se estudie la tangente a una curva, pues esta recta tiene un importante significado geométrico: *es la recta más parecida a la curva cerca del punto de tangencia*. Es decir, cerca del punto de tangencia, la curva se desvía menos -en un sentido bien definido- de esta recta que de cualquier otra. En otras palabras, la distancia de los puntos de la curva a la tangente es muy pequeña en comparación con su distancia al punto de tangencia.

De este modo, si sustituimos un pequeño arco de curva por un segmento de la tangente, el error que se comete es pequeño en comparación con la longitud del segmento. Este procedimiento permite a menudo simplificar las demostraciones, ya que en el paso al límite da resultados completamente exactos.

Consideremos una curva  $C$  definida por una función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$ , sea  $t_0 \in I$  nos interesa determinar la tangente a  $C$  en el punto  $\mathbf{F}(t_0)$ .

Al igual que en el caso de las funciones reales, y como ya lo hicimos cuando obtuvimos una interpretación geométrica de la derivada (ve la gráfica respectiva), consideramos un punto suficientemente cercano a  $\mathbf{F}(t_0)$ , digamos  $\mathbf{F}(t_0+h)$ , entonces  $\mathbf{F}(t_0+h) - \mathbf{F}(t_0)$  es un vector secante a  $C$ , si hacemos tender  $h$  a cero, este vector secante tiende a ser un vector tangente, de donde si existe el límite adecuado,  $\mathbf{F}'(t_0)$  será uno de los tantos vectores tangentes a  $C$  en el punto  $\mathbf{F}(t_0)$ .

Ahora, recuerda que una recta en el espacio queda determinada por un punto y su vector de dirección por lo que en realidad, da lo mismo tomar cualquiera de los vectores tangentes, la elección más natural es la de tomar el vector unitario en la dirección de  $\mathbf{F}'(t_0)$  y llegamos así a la siguiente definición:

### DEFINICION 12 (vector tangente)

Sea una curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$  y un punto  $t_0 \in I$ . Si  $\mathbf{F}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ , el **VECTOR TANGENTE**  $\mathbf{T}(t_0)$  en el punto  $\mathbf{F}(t_0)$ , se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\mathbf{F}'(t_0)}{\|\mathbf{F}'(t_0)\|} \quad (26)$$



En general,  $\forall t \in I$ , tendríamos:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{F}'(t)}{\|\mathbf{F}'(t)\|} \quad (27)$$

Si  $\mathbf{F}'(t_0) = \mathbf{0}$ , definimos  $\mathbf{T}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{T}(t)$  en el caso de que este límite exista.

Así, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva  $C$  en el punto  $\mathbf{F}(t_0)$ , basta tomar como vector de dirección a  $\mathbf{F}'(t_0)$ . Otra cosa importante de hacer notar para el vector tangente  $\mathbf{T}$ , es que  $\mathbf{T}$  lleva la misma orientación que la curva  $C$ .

### 5.2.2 Vector normal

En Cálculo I además de la recta tangente, se definió la recta **normal**. Esta última es una recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Queremos extender esta definición para el caso de curvas en el espacio y hablar de un **vector normal**.

Dado el punto  $\mathbf{F}(t)$  de una curva  $C$  y el vector tangente  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{F}(t)$ , nos interesa definir un vector  $\mathbf{N}$  que pase por  $\mathbf{F}(t)$  y sea perpendicular a  $\mathbf{T}$ , pero en el espacio hay un número infinito de este tipo de vectores por lo que tenemos que hacer una elección.

De entre todos los vectores tangentes a  $\mathbf{T}$  en  $\mathbf{F}(t)$ , podemos tomar el que nos señala el corolario 4.1 ya que  $\mathbf{T}(t)$  cumple con las hipótesis de la proposición, por lo tanto, la elección del vector normal  $\mathbf{N}$  recaerá en el vector  $\mathbf{T}'(t)$  y como lo que nos interesará más que nada es la dirección, lo tomaremos (al igual que en el caso de  $\mathbf{T}$ ) unitario, tenemos así la siguiente definición:

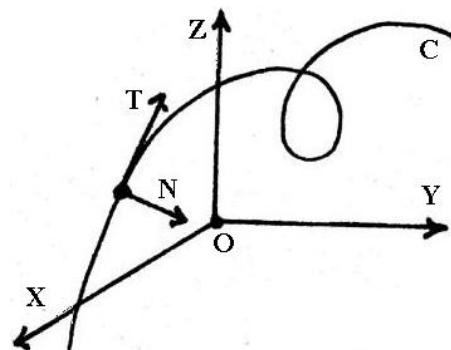


Figura 12: vectores tangente y normal

#### DEFINICION 13 (vector normal)

Sea una curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$  y un punto  $t_0 \in I$ . Si existe  $\mathbf{F}''(t_0)$ , el **VECTOR NORMAL**  $\mathbf{N}(t_0)$  en el punto  $\mathbf{F}(t_0)$ , se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{N}(t_0) = \frac{\mathbf{T}'(t_0)}{\|\mathbf{T}'(t_0)\|} \quad (28)$$

En general,  $\forall t \in I$ , tendríamos:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \quad (29)$$

En el caso de curvas planas, podemos trazar  $\mathbf{N}$  a partir de  $\mathbf{T}$  si tomamos en cuenta lo siguiente. Sea  $\theta(t)$  el ángulo formado por  $\mathbf{T}$  con la horizontal, si al recorrer la curva siguiendo la orientación dada,  $\theta(t)$  es estrictamente creciente, entonces  $\mathbf{N}(t)$  se obtiene de  $\mathbf{T}(t)$  mediante una rotación de  $90^\circ$  en sentido positivo; y si  $\theta(t)$  es estrictamente decreciente, entonces  $\mathbf{N}(t)$  se obtiene de  $\mathbf{T}(t)$  mediante una rotación de  $90^\circ$  en sentido negativo.

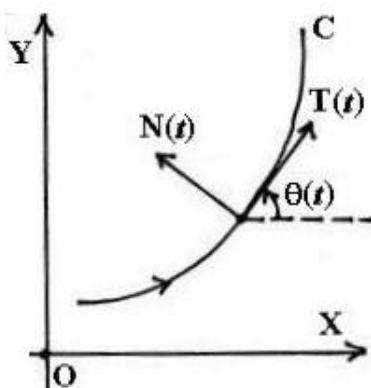


Figura 13

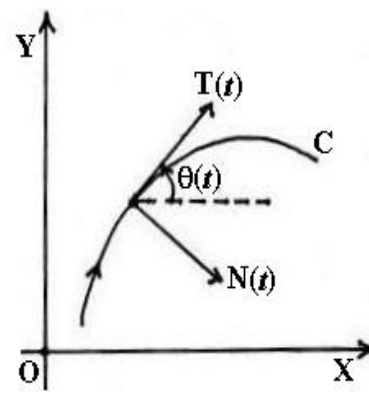


Figura 14

Así, si una curva es cóncava hacia arriba, entonces  $\mathbf{N}(t)$  apunta hacia arriba y si cóncava hacia abajo, entonces  $\mathbf{N}(t)$  apunta hacia abajo.

### 5.3 Plano osculador

#### DEFINICION 14 (plano osculador)

Dada una curva  $C$  definida por la función  $F$  en un intervalo  $I$  y un punto  $t_0 \in I$ . Al plano que contiene a los vectores  $T(t_0)$  y  $N(t_0)$  se le llama **PLANO OSCULADOR** de  $C$  en  $t_0$ .

Y seguramente recordarás que los planos se estudian en el espacio a través de su normal, por lo que la normal al plano osculador recibe también un nombre especial.

#### DEFINICION 15 (vector binormal)

Al vector  $B(t) = T(t) \times N(t)$  se le llama **vector binormal**.

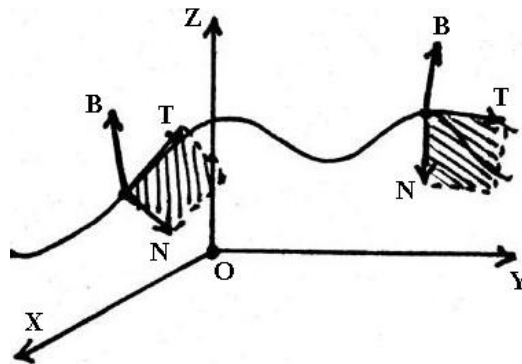


Figura 15: plano osculador

Ten cuidado al calcular  $B$ , recuerda que el producto vectorial no es conmutativo.

#### TEOREMA 8 (norma del vector binormal)

$$\|B\| = 1$$

Así, en cada punto  $F(t_0)$  quedan definidos tres vectores unitarios perpendiculares dos a dos como se muestra en la siguiente figura en donde se ha trazado la imagen de  $F(t) = (t \cos 2t, 2t \sin 2t, t)$  en el intervalo  $t \in [0, 4]$  con los vectores  $T$ ,  $N$  y  $B$  correspondientes a  $t = 1$ ,  $t = 2$  y  $t = 3$ . En el extremo derecho se muestra una ampliación de un sector de la curva.

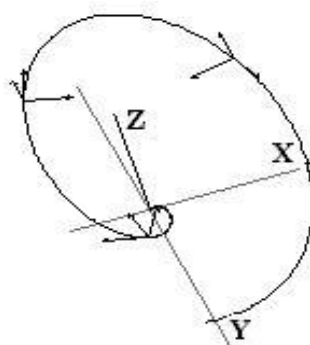


Figura 16: vector binormal

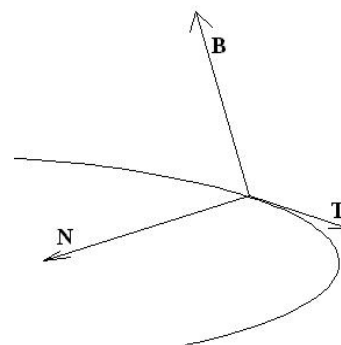


Figura 17: vector binormal

#### DEFINICION 16 (planos rectificador y normal)

Dada una curva  $C$  definida por la función  $F$  en un intervalo  $I$  y un punto  $t_0 \in I$ . A los planos que contienen a los vectores  $T(t_0)$  y  $B(t_0)$  y  $N(t_0)$  y  $B(t_0)$  se les llama **PLANO RECTIFICADOR** y **PLANO NORMAL** de  $C$  en  $t_0$ .

#### 5.3.1 Componentes tangencial y normal de la aceleración

En esta parte, aplicaremos los conceptos relativos a la curvatura al estudio del movimiento.

Recordemos que dada una curva  $C$ , los vectores  $T$  y  $N$  son perpendiculares en todos los puntos de  $C$  por lo que de la unidad anterior, cualquier vector  $u$  en el plano definido por  $T$  y  $N$  se puede descomponer como la suma de vectores paralelos a  $T$  y  $N$ :

$$u = u_T T + u_N N \quad (30)$$

$u_T$  y  $u_N$  se dicen **componentes tangencial y normal** de  $u$ , respectivamente.

Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una curva  $C$ , probaremos que los vectores velocidad y aceleración quedan en el plano definido por  $T$  y  $N$  y posteriormente hallaremos las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Resumimos nuestro análisis en el siguiente teorema:



### TEOREMA 9 (componentes tangencial y normal de la aceleración)

Si una partícula se mueve a lo largo de una curva  $C$ , las componentes tangencial y normal de la aceleración  $\mathbf{a}(t)$  están dadas por:

$$\mathbf{a}_T = \|\mathbf{v}(t)\|' \quad (31)$$

y

$$\mathbf{a}_N = \|\mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{T}'(t)\| \quad (32)$$

según las fórmulas anteriores, es complicado hallar  $\mathbf{a}_N$  por lo que puede utilizarse la siguiente fórmula alternativa:

$$\mathbf{a}_N = \sqrt{\|\mathbf{a}(t)\|^2 - \mathbf{a}_T^2} \quad (33)$$

en la demostración del teorema anterior observamos que

$$\mathbf{v}_T = \|\mathbf{v}(t)\| \quad (34)$$

y

$$\mathbf{v}_N = 0 \quad (35)$$

por otra parte se tiene que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{T} \quad (36)$$

y

$$\mathbf{a} = \|\mathbf{v}(t)\|' \mathbf{T} + \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| \mathbf{N} \quad (37)$$

## 5.4 Curvatura

Para poder juzgar si un camino, una varilla delgada o una línea de un dibujo está más o menos curvado no es necesario estudiar matemáticas. Pero incluso para los problemas más simples de mecánica, una mirada casual no es suficiente; necesitamos una exacta descripción cuantitativa de la curvatura. Esta se obtiene, dando expresión precisa a nuestra impresión intuitiva de la curvatura, como la rapidez de cambio de dirección de la curva.

Ahora, ¿cómo podemos medir el cambio de dirección de una curva?, ¡utilizando el vector tangente!. En efecto, para una curva que no sea una línea recta, es decir, que no tenga una dirección en el sentido elemental, se puede definir su dirección en cada punto como la dirección del vector tangente en ese punto. De este modo, se amplía notablemente el concepto de dirección, dándole un significado que previamente no tenía. Este nuevo concepto de dirección refleja la naturaleza real del movimiento a lo largo de una curva; en cada instante el punto se mueve en alguna dirección definida, que varía continuamente. Busquemos ahora una fórmula que nos mida la curvatura.

Consideremos una curva  $C$ , y observemos el cambio de dirección del vector tangente  $\mathbf{T}$  en cada uno de sus puntos. Si  $C$  es una línea recta, la dirección de  $\mathbf{T}$  es constante;

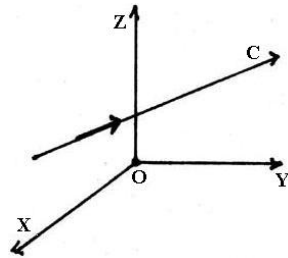


Figura 18

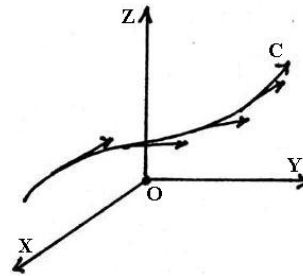


Figura 19

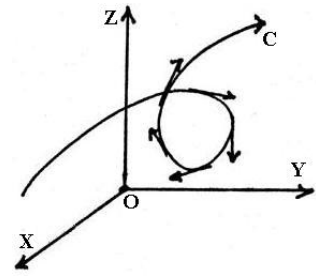


Figura 20

si  $C$  es una curva suave,  $\mathbf{T}$  cambia de dirección suavemente y si  $C$  es una curva con partes muy curvadas, entonces  $\mathbf{T}$  cambia de dirección rápidamente en esas partes.

Lo anterior nos sugiere que podemos medir la curvatura a través de la tasa de cambio del vector tangente con respecto a la distancia recorrida, es decir con  $\|\mathbf{dT}/ds\|$ .

Después de nuestro análisis llegamos a la fórmula buscada, la que damos en la siguiente definición:

**DEFINICION 17 (curvatura)**

Sea una curva  $C$  definida por la función  $F$  en un intervalo  $I$  y un punto  $t_0 \in I$ . Si existe  $F''(t_0)$ , la **CURVATURA**  $k(t_0)$  en el punto  $F(t_0)$ , se define de la siguiente manera:

$$k(t_0) = \frac{\|T'(t_0)\|}{\|F'(t_0)\|} \quad (38)$$

En general,  $\forall t \in I$ , tendríamos:

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|F'(t)\|} \quad (39)$$

ó en el caso que la posición de una partícula esté dada por una función  $r(t)$ ,  $k(t) = \frac{\|T'\|}{\|v\|}$

Observa que la curvatura es un número no negativo. Es posible que  $k(t)$  sea cero en un punto o en muchos puntos; en efecto, la curvatura de un segmento recto es cero en todos sus puntos.

La fórmula para hallar la curvatura, dada en la definición anterior, a veces es latosa (por las operaciones que involucra), alternativamente, podemos usar la siguiente fórmula:

**TEOREMA 10**

Sea una curva  $C$  definida por la función  $F$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $F''(t) \forall t \in I$ , entonces la **CURVATURA**  $k(t)$  en el punto  $F(t)$ , está dada por:

$$k(t) = \frac{\|F'(t) \times F''(t)\|}{\|F'(t)\|^3} \quad (40)$$

en el caso de que la posición de una partícula esté dada por una función  $r(t)$ :

$$k(t) = \frac{\|v \times a\|}{\|v\|^3} \quad (41)$$

El teorema anterior nos proporciona otras fórmulas para el caso de curvas del plano.

**COROLARIO 10.1**

Sea una curva  $C$  del plano definida por la función  $F(t) = (x(t), y(t))$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $F''(t) \forall t \in I$ , entonces la **CURVATURA**  $k(t)$  en el punto  $F(t)$ , está dada por:

$$k(t) = \frac{|x' y'' - x'' y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad (42)$$

**COROLARIO 10.2**

Sea una curva  $C$  del plano definida por la función  $y = f(x)$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $f''(x) \forall x \in I$ , entonces la **CURVATURA**  $k(x)$  en el punto  $f(x)$ , está dada por:

$$k(x) = \frac{|f''|}{[1 + (f')^2]^{3/2}} \quad (43)$$

**COROLARIO 10.3**

Sea una curva  $C$  del plano definida por la función polar  $r = f(\theta)$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $f'(\theta) \forall \theta \in I$ , entonces la **CURVATURA**  $k(\theta)$  en el punto  $f(\theta)$ , está dada por:

$$k(\theta) = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - r r''|}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}} \quad (44)$$

**DEFINICION 18 (vértices)**

Los puntos de una curva en donde se tiene curvatura máxima o mínima se llaman **vértices**.

Determinemos ahora la curvatura de un círculo de radio  $r$ . Sintetizamos nuestro análisis en el siguiente teorema.

**TEOREMA 11**

La curvatura de un círculo es constante. Si el radio del círculo es  $r$ , entonces  $k(t) = 1/r \forall t$ .

Con base en el teorema anterior, entre más pequeño sea círculo más grande será su curvatura y viceversa, entre más grande sea el círculo, más pequeña será su curvatura en cada uno de sus puntos, lo que explica porque durante tanto tiempo se creyó, erróneamente, que la tierra era plana: su gran radio hace imperceptible su curvatura para cualquiera que se halle en su superficie.

Dado que la curvatura de un círculo es el recíproco del radio, se puede extender esta relación para dar las siguientes definiciones:

**DEFINICION 19 (radio de curvatura)**

Dada la curva  $C$  y un punto  $P = F(t_0)$  de ella, el **RADIO DE CURVATURA** de  $C$  en  $P$ , se define como:

$$\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)} \quad (45)$$

**DEFINICION 20 (círculo y centro de curvatura)**

Dada la curva  $C$  y un punto  $P = F(t_0)$  de ella, el **CENTRO DE CURVATURA** de  $C$  en  $P$ , se define como el punto:

$$C(t_0) = F(t_0) + \rho(t_0) N(t_0) \quad (46)$$

y la circunferencia con centro el centro de curvatura y radio el radio de curvatura se dice **CIRCULO DE CURVATURA** ó **CIRCULO OSCULADOR**.

La circunferencia de la definición anterior, tiene la propiedad de tener la misma recta tangente que  $C$  en  $P$  (su centro se halla en el lado cóncavo de  $C$ ).

En las siguientes gráficas se dibujó la función  $f(x) = x^2$  con sus círculos osculadores en los puntos  $x = 0$ ,  $x=1$  y  $x = 2$  (observa como aumenta el radio del círculo a medida que disminuye la curvatura).

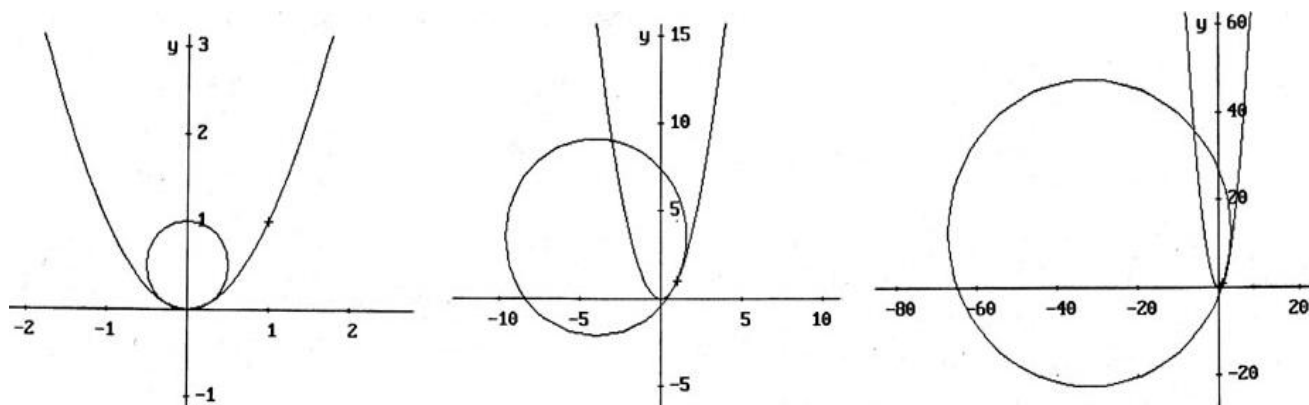


Figura 21: algunos círculos osculadores de la función  $f(x) = x^2$

## 5.5 Torsión

Habíamos ya comentado que el concepto de torsión es importante en el análisis de las curvas en el espacio, intuitivamente, la torsión nos indicaría que tan "torcida" está la curva y debemos buscar la manera de medir esto. La torsión aparece cuando una curva no está totalmente contenida en un solo plano en ese caso los vectores  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{N}$  van recorriendo planos distintos aunque mantienen la perpendicularidad entre ellos, las variaciones de la curva las podemos medir entonces por la variación del plano osculador o equivalentemente por la variaciones del vector binormal  $\mathbf{B}$  por lo que la torsión irá relacionada con  $\|d\mathbf{B}/ds\|$ . Después de un breve análisis podemos dar la siguiente definición:

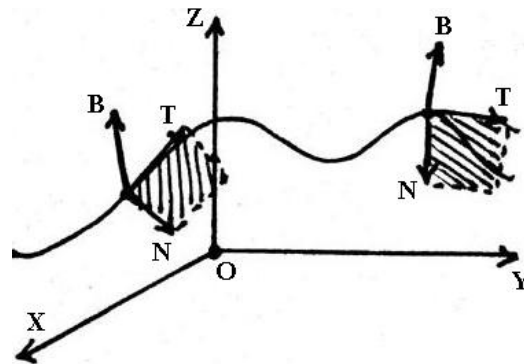


Figura 22: plano osculador

### DEFINICION 21 (torsión)

Sea una curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $\mathbf{F}''(t) \forall t \in I$ , la **TORSION**  $\tau(t)$  en el punto  $\mathbf{F}(t)$ , se define de la siguiente manera:

$$\tau(t_0) = \frac{\|\mathbf{B}'(t_0)\|}{\|\mathbf{F}'(t_0)\|} \quad (47)$$

En general,  $\forall t \in I$ , tendríamos:

$$\tau(t) = \frac{\|\mathbf{B}'(t)\|}{\|\mathbf{F}'(t)\|} \quad (48)$$

Observa que  $\tau(t) \geq 0 \forall t$  y que  $\tau(t) = 0$  si y sólo si  $C$  se encuentra en un plano.

Las ecuaciones del siguiente teorema relacionan los vectores  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{B}$  con sus derivadas con respecto a la distancia recorrida y son muy importantes y fundamentales para el estudio analítico de curvas en el espacio.

### TEOREMA 12 (fórmulas de Frenet-Serret)

Dada la curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$ , valen las siguientes relaciones:

$$1) \frac{d\mathbf{T}}{ds} = k \mathbf{N} \quad (49) \quad 2) \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \tau \mathbf{N} \quad (50) \quad 3) \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k \mathbf{T} - \tau \mathbf{B} \quad (51)$$

### LEMA 1

Dada la curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{r}(t)$  en un intervalo  $I$ , entonces:  $\mathbf{a}'(t) = \alpha \mathbf{T} + \beta \mathbf{N} + \gamma \mathbf{B}$

con  $\alpha = \|\mathbf{v}(t)\|'' - k^2 \|\mathbf{v}(t)\|^3$ ,  $\beta = 3k \|\mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{v}(t)\|' + k' \|\mathbf{v}(t)\|^2$  y  $\gamma = -k\tau \|\mathbf{v}(t)\|^3$

Al igual que en el caso de la curvatura existe otra fórmula alternativa para el cálculo de la torsión dada por el siguiente teorema:

### TEOREMA 13 (torsión)

Dada la curva  $C$  definida por la función  $\mathbf{F}$  en un intervalo  $I$ . Si existe  $\mathbf{F}'''(t) \forall t \in I$ , la **TORSION**  $\tau(t)$  en el punto  $\mathbf{F}(t)$ , está dada por :

$$\tau(t) = \frac{|(\mathbf{F}' \times \mathbf{F}'') \cdot \mathbf{F}'''}{\|\mathbf{F}' \times \mathbf{F}''\|^2} \quad (52)$$

Determinemos ahora la torsión de una hélice circular  $\mathbf{F}(t) = (r \cos \omega t, r \sin \omega t, ct)$  y observamos que  $\tau(t) = \frac{|c\omega|}{c^2 + r^2 \omega^2} \forall t$ , es decir, la torsión de una hélice circular es constante pues no depende de  $t$ .

Terminamos esta breve incursión en la Geometría Diferencial señalando que mediante la utilización de resultados muy simples de la teoría de las Ecuaciones Diferenciales, se puede probar un teorema fundamental que dice, toscamente hablando, que dos curvas con la misma curvatura y la misma torsión son idénticas (es decir, se puede mover rígidamente una de ellas hasta que coincida con la otra). De esta manera, la curvatura y la torsión como funciones de la longitud de arco, definen completamente una curva salvo su posición en el espacio; describen todas las propiedades de la curva expresando las relaciones entre su longitud, su curvatura y su torsión, de esta manera, los tres conceptos constituyen una especie de fundamento esencial para cuestiones concernientes a curvas.

Naturalmente, la teoría de curvas no se agota aquí. Hay muchos conceptos relativos a esta clase de figuras: tipos especiales de curvas, familias de curvas, posición de curvas sobre superficies, forma de una curva como un todo, etc. Estas cuestiones y los métodos de contestarlas están conectados con casi todas las ramas de las matemáticas y requieren de un estudio más profundo.

## 6. APLICACIÓN A LA CINEMÁTICA

La fórmula física más importante relativa al movimiento es la Segunda Ley del Movimiento de Newton que se refiere al movimiento de un objeto de masa  $m$  al que se le aplica una fuerza  $\mathbf{F}(t)$ :

$$\mathbf{F}(t) = m \mathbf{a}(t) \quad (53)$$

De esta fórmula, se puede determinar la aceleración de un objeto una vez que se conocen su masa y las fuerzas que actúan sobre él. Dado que la velocidad es la integral de la aceleración y que la posición es la integral de la velocidad, es posible (al menos en principio) determinar la posición de un objeto conociendo su masa, las fuerzas que actúan sobre él, su posición inicial y su velocidad inicial (que por lo general se toman cuando  $t = 0$ ).

Una aplicación elemental de estas ideas es la consideración del movimiento de un objeto que se mantiene muy cerca de la superficie terrestre y que se mueve sólo bajo la acción de la gravedad. Con base en la Ley de la Gravitación Universal de Newton, la fuerza de atracción de la tierra es aproximadamente constante en las cercanías de su superficie y se dirige hacia el centro de la tierra. Si elegimos un sistema de coordenadas tridimensional de tal manera que su origen coincida con el centro de la tierra y el eje  $\mathbf{Z}$  apunte hacia arriba en la dirección de la posición del objeto, entonces  $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{k}$ , donde  $g = 9.81$  m/seg (ó 32 ft/seg) por lo que se puede probar fácilmente que el vector posición está dado por:

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{k} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \quad (54)$$

Con base en la expresión anterior es posible demostrar que la posición de un objeto que se lanza hacia arriba y hacia adelante con rapidez inicial  $\mathbf{v}_0$  desde una altura  $h_0$  y con un ángulo de salida  $\alpha$  está dada por las siguientes ecuaciones paramétricas (con  $\mathbf{v}_0 \leq 30$  m/s rapidez hasta la que es posible despreciar la fricción del aire)

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \quad \text{y} \quad y(t) = (v_0 \sin \alpha) t + h_0 - \frac{gt^2}{2} \quad (55)$$

También se puede demostrar que un movimiento circular sobre un círculo de radio  $r$  con rapidez constante  $v$  está dada por las siguientes ecuaciones paramétricas

$$x(t) = r \cos\left(\frac{vt}{r}\right) \quad \text{y} \quad y(t) = r \sin\left(\frac{vt}{r}\right) \quad (56)$$

Dado que  $\|\mathbf{v}(t)\|$  es constante, con base en el COROLARIO 4.1  $\mathbf{v}(t)$  y  $\mathbf{a}(t)$  son perpendiculares por lo que  $\mathbf{a}(t)$  apunta hacia el centro del círculo por lo que se le conoce con el nombre de **aceleración centrípeta** y cualquier fuerza que provoca este tipo de aceleración se le llama **fuerza centrípeta**. En este caso  $\mathbf{a} = v^2/r$ . Este tipo de función se puede aplicar a un satélite que describa una órbita circular alrededor de la Tierra (cuyo radio es aproximadamente 6400km). En este caso se puede demostrar que la rapidez  $v$ , la aceleración  $\mathbf{a}$ , el radio de la órbita  $r$  y el período  $T$  están relacionados mediante las fórmulas (con  $r$  en m,  $v$  en m/s,  $\mathbf{a}$  en m/s<sup>2</sup>)

$$\mathbf{a} = \frac{C}{r^2} \quad (57) \quad v^2 = \frac{C}{r} \quad (58) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{C} \quad (59)$$