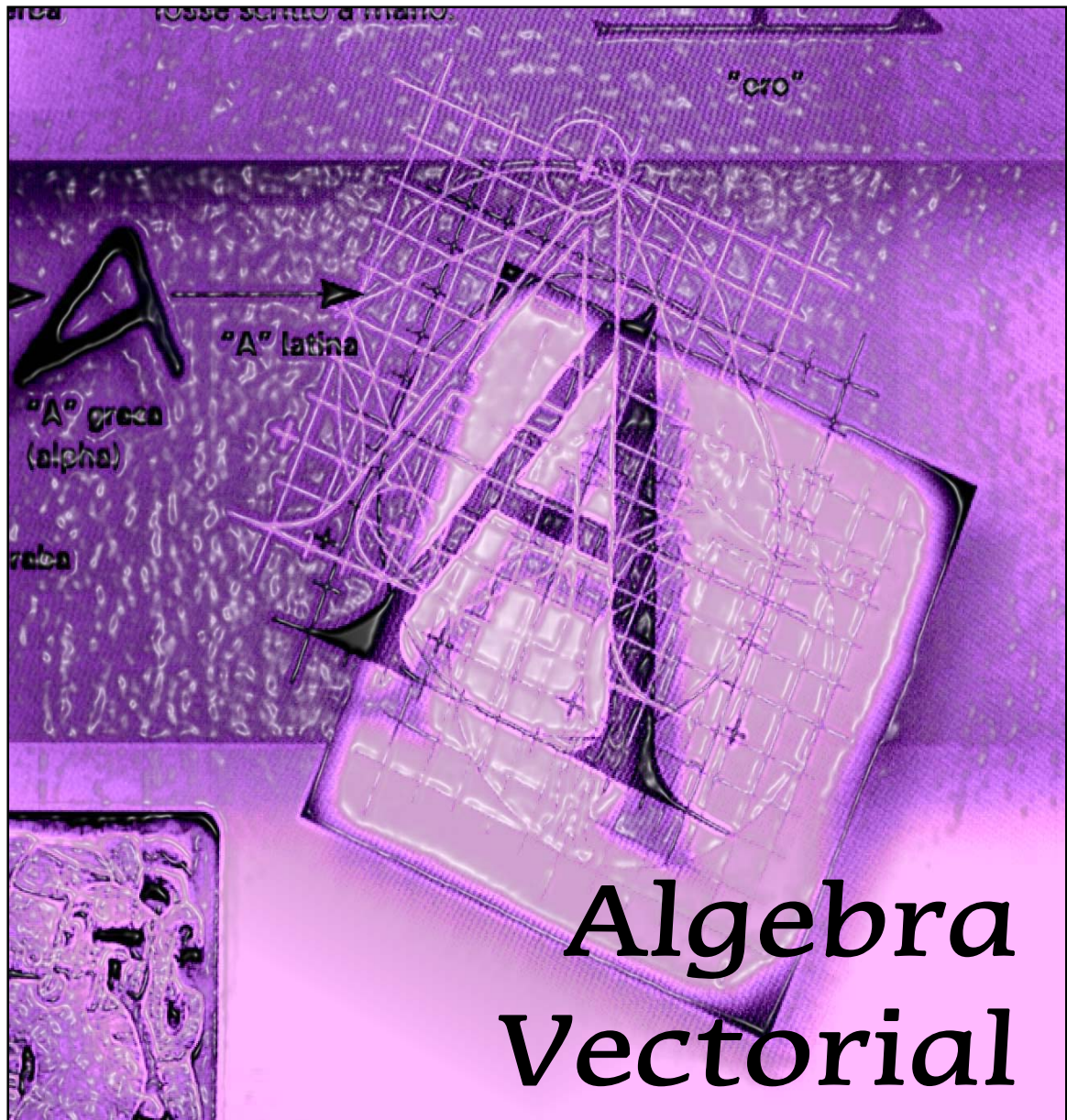


# Unidad 1



## Algebra Vectorial

MDM. Angel Balderas Puga (UAQ - ITQ)

## INDICE

<b>1.</b>	<b><i>INTRODUCCIÓN.....</i></b>	<b><i>1</i></b>
<b>2.</b>	<b><i>SISTEMAS DE REFERENCIA BIDIMENSIONALES .....</i></b>	<b><i>1</i></b>
2.1	COORDENADAS RECTANGULARES EN EL PLANO.....	2
2.2	COORDENADAS POLARES EN EL PLANO .....	2
<b>3.</b>	<b><i>SISTEMAS DE REFERENCIA TRIDIMENSIONALES.....</i></b>	<b><i>3</i></b>
3.1	COORDENADAS RECTANGULARES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL .....	3
3.2	DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO .....	4
<b>4.</b>	<b><i>VECTORES EN EL ESPACIO Y SUS OPERACIONES.....</i></b>	<b><i>4</i></b>
<b>5.</b>	<b><i>PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y TRIPLES.....</i></b>	<b><i>10</i></b>
5.1	PRODUCTO ESCALAR.....	10
5.2	PRODUCTO VECTORIAL.....	11
5.3	PRODUCTOS TRIPLES .....	12
<b>6.</b>	<b><i>RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO .....</i></b>	<b><i>13</i></b>
6.1	RECTAS EN EL ESPACIO.....	13
6.2	NOTAS SOBRE RECTAS EN EL ESPACIO .....	13
6.3	PLANOS EN EL ESPACIO .....	14
6.4	DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO .....	15
6.5	NOTAS SOBRE PLANOS EN EL ESPACIO .....	16

## 1. INTRODUCCIÓN

En el primer curso de Cálculo, se trataron muchos conceptos fundamentales del Análisis Matemático, conceptos que fueron aplicados a la solución de algunos problemas simples tanto geométricos como físicos. Para aplicaciones más profundas del Análisis, se necesita un mejor conocimiento de la Geometría Analítica por lo que en esta unidad nos proponemos profundizar más en algunos conceptos geométricos.

El desarrollo histórico del Análisis estuvo siempre estrechamente ligado al de la Geometría Analítica. Cada nuevo descubrimiento en uno de estos campos condujo a un progreso en el otro. El problema de trazar tangentes a las curvas condujo al descubrimiento de la derivada; el problema del área llevó al concepto de integral; las derivadas parciales se introdujeron para estudiar las superficies en el espacio. Junto a estos resultados se tuvieron desarrollos paralelos en la mecánica y en la física matemática.

En 1788 Lagrange publicó su obra maestra *Mécanique Analytique* (Mecánica Analítica), en donde mostraba la gran flexibilidad y la extraordinaria potencia de los métodos analíticos en el estudio de la mecánica. Más tarde, en el siglo XIX, el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865) introdujo su *Theory of Quaternions* (Teoría de los Cuaterniones), un nuevo método y un nuevo punto de vista que contribuyeron en gran medida a la comprensión de la física y del álgebra.

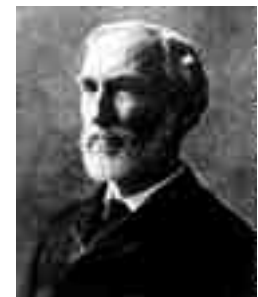
De la fusión de las principales ideas del Análisis y de los cuaterniones y de la geometría analítica nació en seguida, especialmente por los trabajos de J. W. Gibbs (1839-1903) y de O. Heaviside (1850-1929), un nuevo capítulo de las matemáticas: el álgebra vectorial.

Inmediatamente surgió la certeza de que eran los vectores los instrumentos ideales para exponer y simplificar muchos de los conceptos importantes de la geometría y de la física.

En esta primera unidad repasaremos algunos elementos de álgebra vectorial y veremos algunas de sus aplicaciones a la geometría analítica.



O. Heaviside  
(1850-1925)



J.W. Gibbs  
(1839-1903)

En las otras unidades, usaremos el álgebra vectorial con los métodos del Análisis para estudiar algunas aplicaciones en Geometría y en Física.

## 2. SISTEMAS DE REFERENCIA BIDIMENSIONALES

A estas alturas, ya tienes pleno dominio sobre un sistema de coordenadas rectangular bidimensional, que es un sistema de referencia para el análisis de figuras planas e incluso quizá has trabajado con coordenadas polares.

El estudio de figuras en el espacio (que son más cercanas a nuestra experiencia física) requiere de una generalización de los sistemas de referencia bidimensionales. Comenzamos por recordar el sistema de referencia unidimensional.

Sobre una recta, podemos establecer un sistema de referencia al elegir un punto  $O$  de la recta como origen y otro punto auxiliar que nos determine una escala y un sentido. La referencia de un punto  $P$  de la recta con respecto al origen está dada por la distancia dirigida del origen a  $P$ .

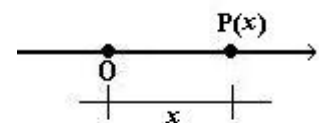


Figura 1: Punto en una recta

## 2.1 COORDENADAS RECTANGULARES EN EL PLANO

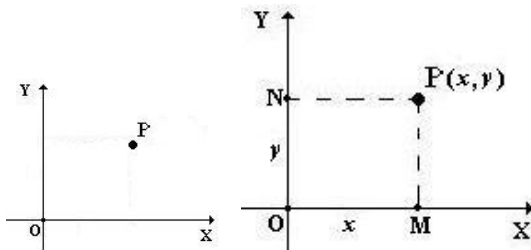


Figura 2: Punto en un plano

En el caso del plano, se establece un sistema de coordenadas rectangular al elegir un punto  $O$  como origen y dos rectas perpendiculares (el eje  $X$  y el eje  $Y$ ) que pasen por  $O$  (ve el esquema de la izquierda en la Figura 2). En este caso la referencia de un punto  $P$  del plano con respecto a los ejes está dada por las distancias dirigidas de los ejes a  $P$  (ve el esquema de la derecha en la Figura 2).

## 2.2 COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

Otra manera de representar puntos del plano, es utilizando **COORDENADAS POLARES**. Se elige un punto  $O$  del plano como origen (a este punto se le llama **polo**) y una semirrecta con origen en  $O$  (llamada **eje polar**) (ve el esquema de la izquierda en la Figura 3). En este caso la referencia de un punto  $P$  del plano con respecto al polo y al eje polar está dada por el ángulo  $\theta$  formado por el segmento  $OP$  con el eje polar y por la distancia  $r$  entre  $O$  y  $P$  (ve el esquema de la derecha en la Figura 3).

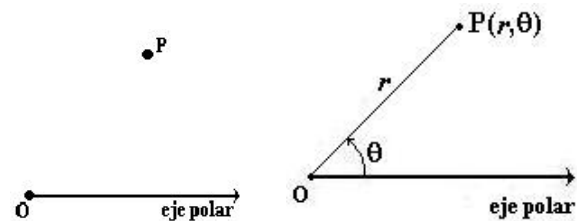


Figura 3: Coordenadas polares

Entonces las coordenadas de  $P$  serían  $(r, \theta)$  con  $r \in [0, +\infty)$  y  $\theta \in [0, 2\pi)$ , aunque en algunas ocasiones (sobre todo cuando se trata de graficar una curva en coordenadas polares se pueden utilizar valores negativos tanto de  $r$  (en este caso el punto se construye en la prolongación del segmento  $PO$ ) como de  $\theta$ .

Para transformar una ecuación en coordenadas polares a una ecuación en coordenadas rectangulares se usan las siguientes fórmulas:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (1)$$

Para transformar una ecuación en coordenadas rectangulares a una ecuación en coordenadas polares se usan las siguientes fórmulas:

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta \quad (2)$$

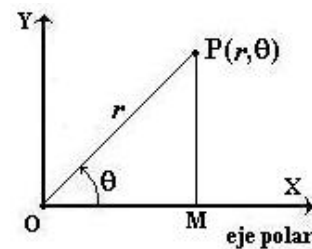
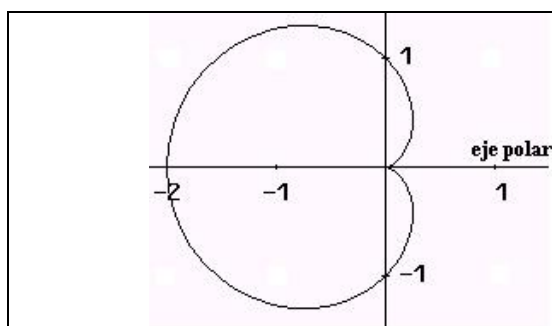
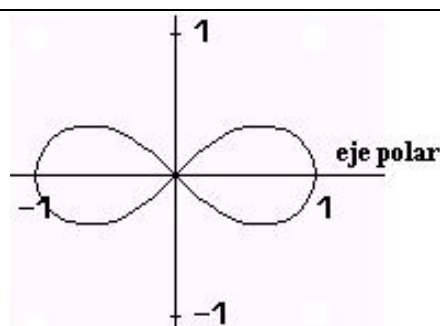


Figura 4: Relación entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares

La utilización de un sistema de coordenadas no rectangular está plenamente justificada por la simplicidad con la que algunas curvas pueden ser descritas en otro tipo de coordenadas. Por ejemplo, en la siguiente tabla se comparan las ecuaciones de algunas curvas usando coordenadas rectangulares y coordenadas polares:

Tabla 1

curva	rectangulares	polares
Recta por el origen	$y = mx$	$\theta = k$
Circunferencia con centro en el origen	$x^2 + y^2 = a^2$	$r = a$
Cardioide (ve la Figura 5)	$(x^2 + y^2 + ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$	$r = a(1 - \cos \theta)$
Lemniscata (ve la Figura 6)	$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$	$r^2 = a \cos 2\theta$

Figura 5: Cardioide  $r = 1 - \cos\theta$ Figura 6: Lemniscata  $r^2 = \cos 2\theta$ 

Otras curvas que se describen de manera sencilla usando coordenadas polares se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2

curva	ecuación
La circunferencia con centro en el punto $(0, a/2)$ y radio $a/2$ :	$r = a \sin\theta$
La circunferencia con centro en el punto $(a/2, 0)$ y radio $a/2$ :	$r = a \cos\theta$
La concoide:	$r = a \csc\theta \pm b$
El caracol de Pascal:	$r = a - b \cos\theta$
La espiral de Arquímedes:	$r = a \theta$
La espiral logarítmica:	$\log r = a \theta$
La espiral hiperbólica:	$r \theta = a$
El lilius:	$r^2 \theta = a^2$
La rosa de dos hojas:	$r^2 = a^2 \sin 2\theta$
La rosa de tres hojas:	$r = a \sin 3\theta$ ó $r = a \cos 3\theta$
La rosa de cuatro hojas:	$r = a \sin 2\theta$ ó $r = a \cos 2\theta$
La rosa de ocho hojas:	$r = a \sin 4\theta$
Las secciones cónicas (parábola, elipse e hipérbola)	$r = \frac{ep}{1 - e \cos\theta}$ donde $e$ es la excentricidad de la cónica

### 3. SISTEMAS DE REFERENCIA TRIDIMENSIONALES

#### 3.1 COORDENADAS RECTANGULARES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

En esta parte generalizaremos el sistema de coordenadas anterior para poder llevar a cabo análisis de figuras tridimensionales. En la Unidad 4 introduciremos otros dos sistemas de referencia NO rectangulares.

Se trata de una generalización del sistema cartesiano plano. Se elige un punto del espacio  $O$  como origen y tres rectas perpendiculares dos a dos (el eje  $X$ , el eje  $Y$  y el eje  $Z$ ) que pasen por  $O$  (ve el esquema de la izquierda de la Figura 3), en este caso quedan determinados tres **planos coordenados**: el plano  $XY$ , el plano  $XZ$  y el plano  $YZ$  y la referencia de un punto  $P$  del espacio está dada por las distancias dirigidas de los planos coordenados a  $P$  (ve el esquema de la derecha de la Figura 3). Al establecer un sistema de este tipo, el espacio queda dividido en ocho regiones llamadas **octantes** (ve la Figura 4).



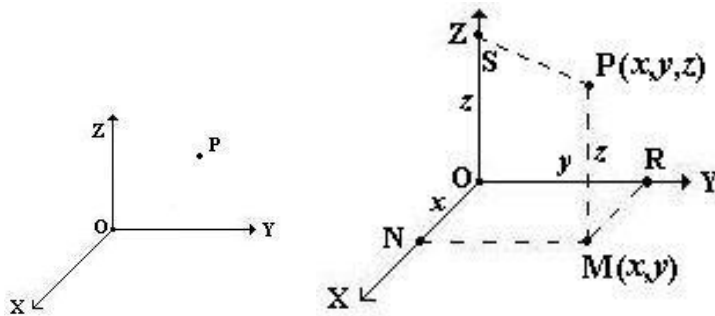


Figura 3: Punto en el espacio

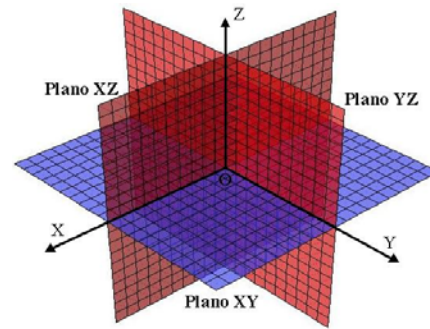


Figura 4: Planos coordenados y octantes

### 3.2 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL ESPACIO

Consideremos los puntos  $P(x_1, y_1, z_1)$  y  $Q(x_2, y_2, z_2)$  en el espacio. Nos interesa determinar la longitud del segmento  $PQ$ .

Después de nuestro análisis, tenemos que

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

Como caso particular, la distancia de un punto  $P(x, y, z)$  cualquiera al origen, está dada por

$$d(P, O) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

La distancia tiene las siguientes propiedades:

- 1)  $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P=Q$       2)  $d(P, Q) = d(Q, P)$

Usando la fórmula de la distancia podemos demostrar que la ecuación de una esfera de centro  $C(x_0, y_0, z_0)$  y radio  $r$  está dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (3)$$

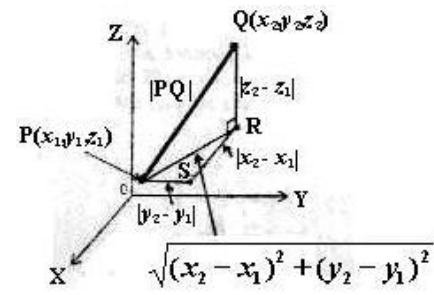


Figura 5: Distancia entre dos puntos

## 4. VECTORES EN EL ESPACIO Y SUS OPERACIONES

Muchas cantidades físicas y abstractas tienen únicamente magnitud y por lo tanto, pueden ser descritas por números. Ejemplos de este tipo de cantidades son: masa, costo, ganancia, rapidez, área, longitud, volumen, etc.. Otras cantidades tienen además de una magnitud, una dirección y un sentido.

El ejemplo más notable de este tipo de cantidades es la velocidad (que incluye no solo a la rapidez de un objeto sino también a la dirección del movimiento), pero también podemos mencionar la fuerza y la aceleración. Consideremos el movimiento de una partícula a lo largo de una curva en el espacio (ve la Figura 6), la dirección del movimiento queda determinada si consideramos en cada punto un segmento tangente a la curva, de hecho esto es lo que sucede por ejemplo cuando un automóvil recorre una carretera, el automóvil no se curva para seguir la forma de la carretera, sino que podemos pensarlo como un segmento de longitud constante que va cambiando continuamente de dirección lo que nos permite una representación geométrica del fenómeno.

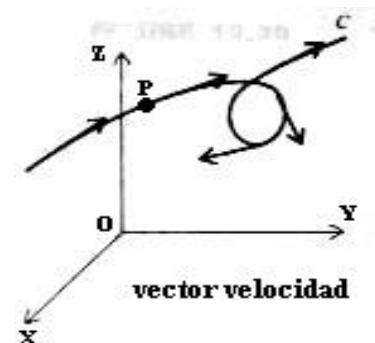


Figura 6

Representaciones análogas pueden ser utilizadas para otro tipo de fenómenos, por ejemplo en aerodinámica se puede representar la fuerza del viento alrededor de las alas de un avión (ve la Figura 7 y la Figura 8), en hidrodinámica se puede representar la velocidad de un fluido (ve la Figura 9), en electricidad y magnetismo las intensidades de cargas eléctricas (ve la Figura 10).

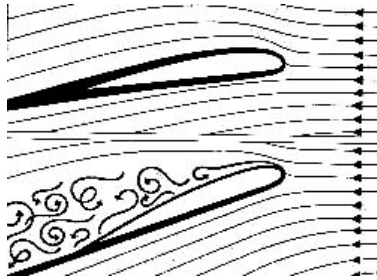
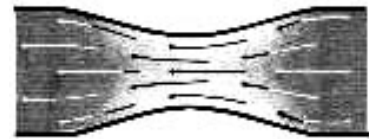


Figura 7



Figura 8



Un fluido que corre por la angostura de un tubo aumenta su velocidad, y se reduce la presión en las paredes del tubo

Figura 9: Principio de Bernoulli

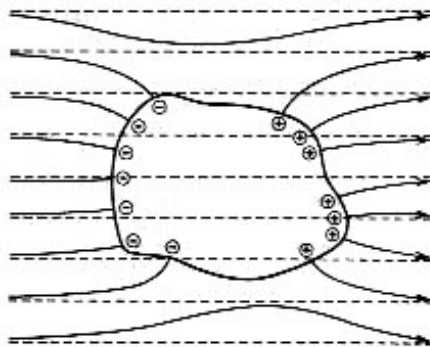


Figura 10

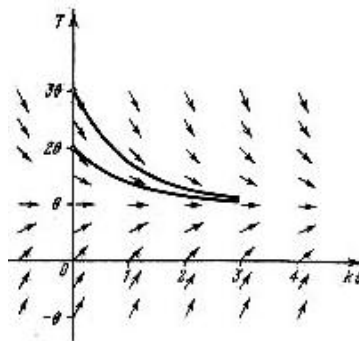


Figura 11

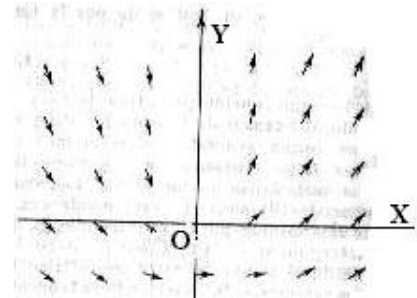


Figura 12

Las cantidades que tienen magnitud, dirección y sentido se describen matemáticamente por medio de los vectores. En esta unidad estudiaremos a los vectores y sus aplicaciones (incluyendo la descripción de rectas y planos en el espacio).

En los ejemplos anteriores hemos utilizados flechas para representar geoméricamente fuerzas o velocidades, lo que sugiere la siguiente definición.

### DEFINICION 1 (vector) (definición geométrica)

Un **VECTOR**  $\mathbf{u}$  es un segmento orientado del espacio.

Al vector  $\mathbf{u}$  lo representaremos por  $\overline{\mathbf{u}}$  o por  $\vec{\mathbf{u}}$ . Si el vector une al punto  $\mathbf{A}$  con el punto  $\mathbf{B}$ , podemos escribir  $\overline{\mathbf{AB}}$ ,  $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$  ó  $\overline{\mathbf{AB}}$  y en ese caso  $\mathbf{A}$  se dice punto inicial y  $\mathbf{B}$  punto final ó vértice (ve la Figura 13).

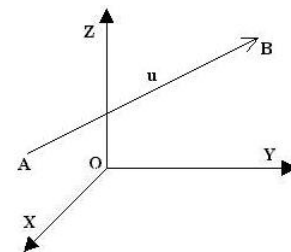


Figura 13

Si dos vectores tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido, entonces se dicen vectores equivalentes (o iguales) (véanse los vectores  $\overrightarrow{\mathbf{RS}}$  y  $\mathbf{A}$  en la Figura 14).

Si el punto inicial de un vector es el origen, se dice que el vector está en posición ordinaria (ve la Figura 15).

Observa que cada vector tiene un vector equivalente en posición ordinaria (ve la Figura 16) por lo que en el estudio de los vectores podemos pensar que todos están en dicha posición lo que simplificará los cálculos.

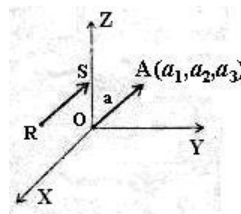


Figura 14

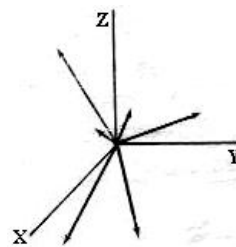


Figura 15: Vectores en posición ordinaria

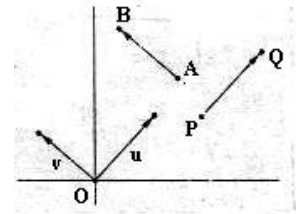


Figura 16

En el caso de vectores planos en posición ordinaria, el ángulo formado por el vector y la parte positiva del eje X se llama ángulo de dirección del vector.

Una vez que tenemos la anterior definición, surge de manera natural la siguiente pregunta: ¿cómo se pueden describir matemáticamente esas flechas de tal manera que podamos operar con ellas? Esto equivale a buscar una forma que nos permita describir analíticamente las magnitudes vectoriales.

La clave es colocar un vector en posición ordinaria (ve la Figura 14) ya que de esta manera podemos asociar de manera unívoca al vector con su punto final por lo que es natural asociar los vectores del plano con parejas ordenadas y los vectores del espacio con ternas ordenadas, lo que sugiere la siguiente definición.

### DEFINICION 2 (vector) (definición analítica)

Un **VECTOR A** es un terna ordenada de números reales.

Si el vector **A** está dado en forma analítica  $A=(a_1, a_2, a_3)$ , entonces  $a_1, a_2$  y  $a_3$  se dicen componentes del vector.

### DEFINICION 3 (espacio vectorial tridimensional)

El **ESPACIO VECTORIAL TRIDIMENSIONAL**  $\mathbb{R}^3$  es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales.

Normalmente trabajaremos con ternas ordenadas y usaremos los segmentos orientados para interpretar geoméricamente algunos resultados. Cuando se trabaja con vectores, a los números se les llama escalares.

Si se conocen los puntos inicial y final de un vector  $A=(a_1, a_2)$  y  $B=(b_1, b_2)$  (ve la Figura 17), siempre se puede construir un vector equivalente en posición ordinaria (ve la Figura 18) el que queda definido sólo con base en su punto final cuyas coordenadas son  $C(b_1-a_1, b_2-a_2)$  por lo que  $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$  y en general esto sucede también en el espacio tridimensional, dados  $A=(a_1, a_2, a_3)$  y  $B=(b_1, b_2, b_3)$

$$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3) \quad (4)$$

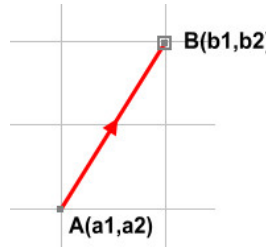


Figura 17

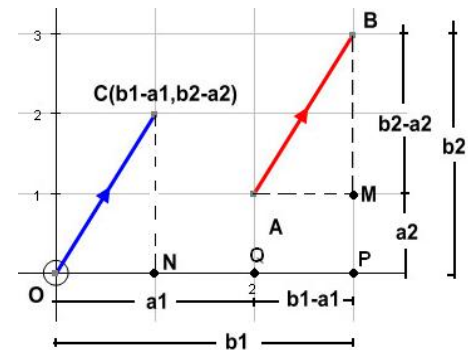


Figura 18

### DEFINICION 4 (norma)

La **NORMA** (ó **LONGITUD**) de un vector  $A=(a_1, a_2, a_3)$ , denotada por  $\|A\|$  se define como

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

observa que  $\|A\|$  es siempre un escalar.

### DEFINICION 5 (vector unitario)

Un vector se dice **UNITARIO** si tiene norma 1.

En el plano son muy importantes los vectores unitarios  $i=(1,0)$  y  $j=(0,1)$  (ve la Figura 19) y en el espacio los vectores unitarios  $i=(1,0,0)$ ,  $j=(0,1,0)$  y  $k=(0,0,1)$  (ve la Figura 20). Estos vectores se dicen también versores unitarios.

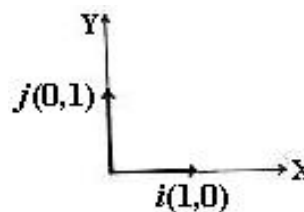


Figura 19: Versores unitarios en el plano

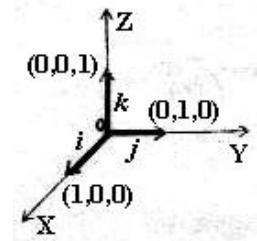


Figura 20: Versores unitarios en el espacio

### DEFINICION 6 (igualdad de vectores)

Dos vectores  $A=(a_1, a_2, a_3)$  y  $B=(b_1, b_2, b_3)$  se dicen **IGUALES** si y sólo si sus respectivas componentes son iguales. En este caso, la ecuación vectorial  $A=B$  tiene el mismo significado que las ecuaciones

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2 \text{ y } a_3 = b_3$$



**DEFINICION 7 (suma de vectores)**

Dado dos vectores  $A=(a_1, a_2, a_3)$  y  $B=(b_1, b_2, b_3)$ , su **SUMA** se define como el vector obtenido sumando las componentes correspondientes:

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Dados en el plano 2 vectores cualquiera  $A$  y  $B$  (ve la Figura 21) siempre podemos dibujar vectores equivalentes en posición ordinaria (ve la Figura 22). Si dibujamos  $B$  a partir del punto final de  $A$  (ve la Figura 23) obtenemos el punto  $C$  de coordenadas  $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$  a partir del cual queda definido el vector  $C$  que no es otro más que el vector suma  $A+B$  (ve la Figura 24) por lo que el vector suma se puede representar de la siguiente manera: dados 2 vectores cualquiera se construye el vector con punto inicial uno el punto inicial de uno de los 2 vectores y punto final el punto final del otro vector.

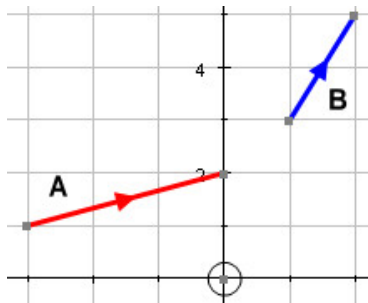


Figura 21

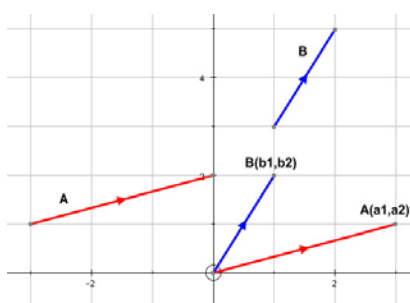


Figura 22

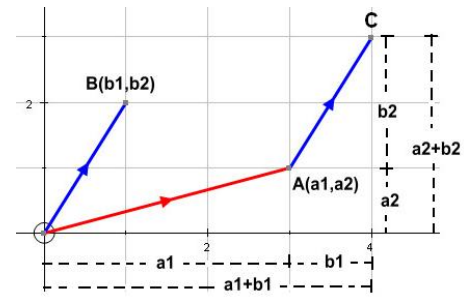


Figura 23

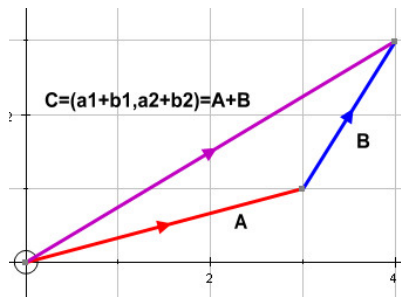


Figura 24: vector suma

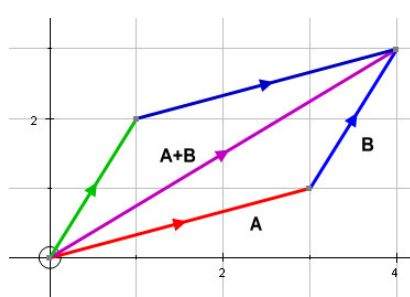


Figura 25: ley del paralelogramo

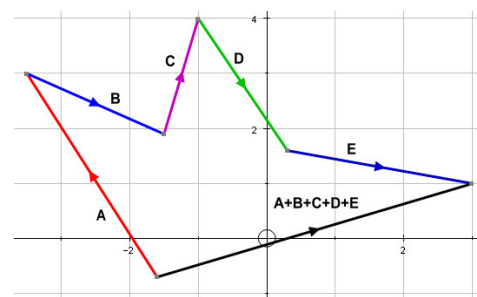


Figura 26

Alternativamente (ve la Figura 25), se construye un paralelogramo con vectores paralelos a los vectores por sumar, el vector suma es la diagonal que va del punto inicial de uno de los vectores al punto final del otro vector. En este caso se habla de la “ley del paralelogramo”. Sin embargo para representar la suma de más de 2 vectores es mucho más cómoda la primera forma de construcción (ve la Figura 26).

De manera semejante se puede probar que lo mismo sucede para vectores en el espacio tridimensional (ve la Figura 27).

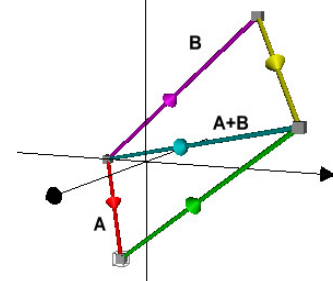


Figura 27

**DEFINICION 8 (producto por un escalar)**

Dado el vector  $A$  el **PRODUCTO POR UN ESCALAR**  $c$  se define como el vector obtenido multiplicando cada componente de  $A$  por el número  $c$ :

$$cA = (ca_1, ca_2, ca_3)$$

La multiplicación por un escalar tiene también una interpretación geométrica. En la Figura 28 se observan los vectores  $\mathbf{A}$  y  $c\mathbf{A}$ . Si  $\alpha$  y  $\beta$  son los ángulos de dirección de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , respectivamente, entonces  $\alpha=\beta$ , por lo que no cabe la posibilidad que se observa en la figura y  $c\mathbf{A}$  debe quedar sobrepuesto a  $\mathbf{A}$ , es decir,  $\mathbf{A}$  y  $c\mathbf{A}$  tienen la misma dirección por lo que  $c\mathbf{A}$  se diferencia de  $\mathbf{A}$  sólo por su magnitud y su sentido (ve la Figura 29): si el escalar es mayor de 1, el vector "se alarga"; si el escalar es positivo y menor de 1, el vector "se acorta" y si el escalar es negativo, el vector cambia de sentido (acortándose o alargándose dependiendo del valor absoluto del escalar) y esto es válido también para vectores en el espacio tridimensional (ve la Figura 29).

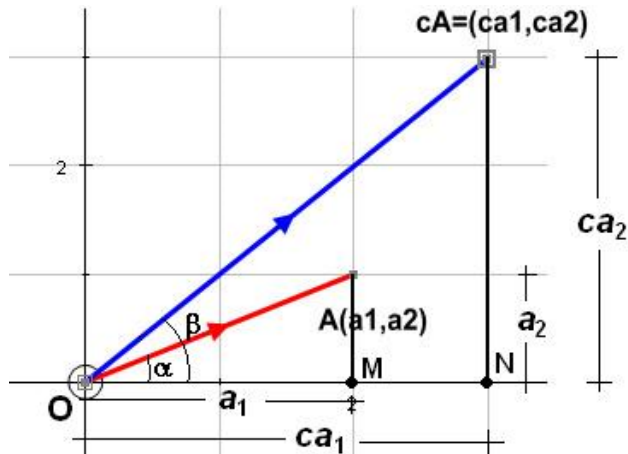


Figura 28

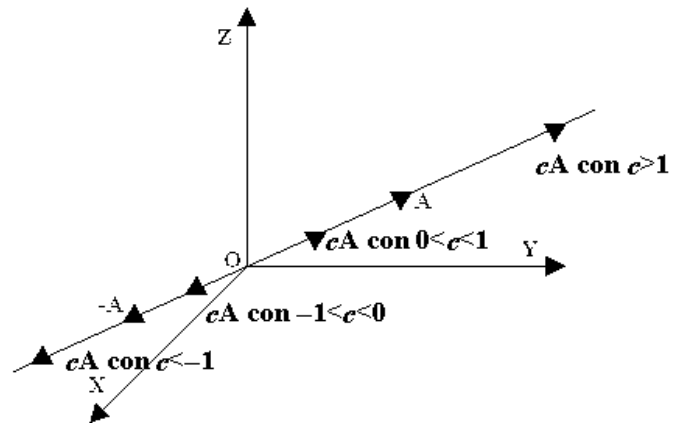


Figura 29: Interpretación geométrica del producto por un escalar

Se puede dividir un vector  $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$  por un escalar  $d$ , basta multiplicar  $\mathbf{A}$  por  $1/d$ , en ese caso tendríamos:

$$\frac{\mathbf{A}}{d} = \left( \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \frac{a_3}{d} \right) \quad (5)$$

Observa que cada vector se puede escribir como "combinación lineal" de los versores unitarios, para el caso del plano tenemos que

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \quad (6)$$

y en el caso del espacio

$$\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad (7)$$

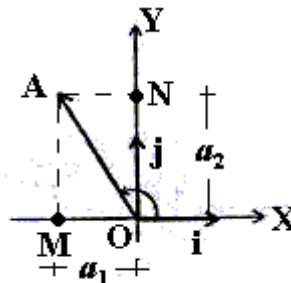


Figura 30

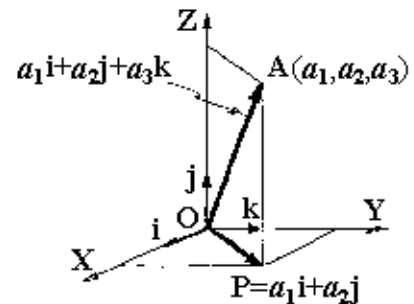


Figura 31

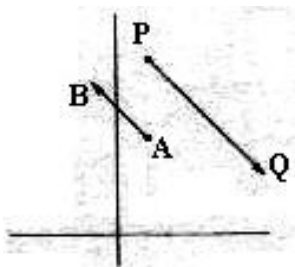


Figura 32: Vectores paralelos

### DEFINICION 9 (vectores paralelos)

Dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son PARALELOS si y sólo si existe un número  $c$  tal que  $\mathbf{A}=c\mathbf{B}$  (si  $c>0$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen el mismo sentido, en cambio, si  $c<0$ ,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  tienen sentidos opuestos). En ese caso escribiremos  $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ .

**TEOREMA 1 (propiedades de las operaciones)**

En cada caso  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son vectores en  $\mathbb{R}^3$  y  $c$  y  $d$  escalares:

E.1 Cerradura respecto a la adición:	$\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^3$
E.2 Cerradura respecto al producto por un escalar:	$c\mathbf{A} \in \mathbb{R}^3$
E.3 Conmutatividad de la suma:	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
E.4 Asociatividad de la suma:	$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
E.5 Existencia del vector cero:	$\exists \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
E.6 Existencia de los opuestos:	$\forall \mathbf{A} \exists (-\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$
E.7 Asociatividad del producto por escalares:	$c(d\mathbf{A}) = (cd)\mathbf{A}$
E.8 Distributividad (suma de vectores):	$c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c\mathbf{A} + c\mathbf{B}$
E.9 Distributividad (suma de números):	$(c+d)\mathbf{A} = c\mathbf{A} + d\mathbf{A}$
E.10	$\forall \mathbf{A}$ se tiene que $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

**DEFINICION 10 (resta de vectores)**

Dado dos vectores  $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$  y  $\mathbf{B}=(b_1, b_2, b_3)$ , su **RESTA**  $\mathbf{A}-\mathbf{B}$  se define como el vector  $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$  que equivale a

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

es decir, el vector resta se obtiene restando las componentes correspondientes.

La resta de vectores tiene también una interpretación geométrica como consecuencia de la ley del paralelogramo, el vector resta es la otra de las diagonales del paralelogramo determinado por los dos vectores dados (ve la Figura 33).

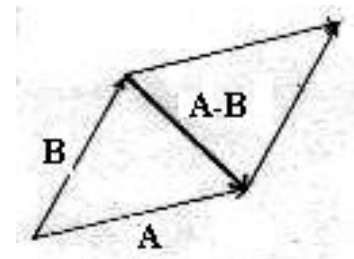


Figura 33: Resta de vectores

**TEOREMA 2 (propiedades de la norma)**

- 1)  $\|\mathbf{A}\| > 0$  si  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  (positividad)
- 2)  $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- 3)  $\|c\mathbf{A}\| = |c| \|\mathbf{A}\|$  (homogeneidad)

**DEFINICION 11 (vector unitario)**

Dado un vector  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ , el **VECTOR UNITARIO EN LA DIRECCIÓN DE A**  $\mathbf{u}_A$  se define como el vector

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{A}\|}$$

(estos vectores serán particularmente importantes en la siguiente unidad).

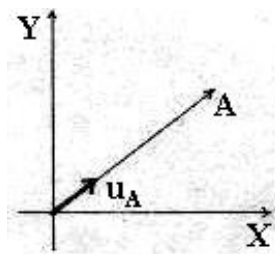


Figura 34: Vector unitario en la dirección del vector A

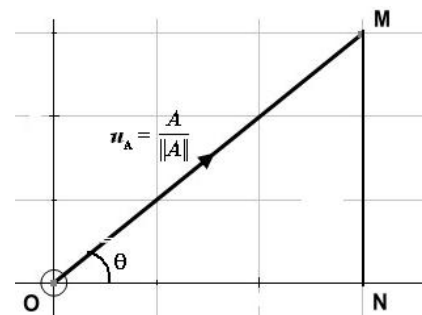


Figura 35

**TEOREMA 3 (vector del plano en términos de su ángulo de dirección)**

Dado el vector  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$ , entonces  $\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos\theta, \sin\theta)$ , donde  $\theta$  es el ángulo de dirección de  $\mathbf{A}$ .

## 5. PRODUCTOS ESCALAR, VECTORIAL Y TRIPLES

Ahora que ya tenemos definida la suma y la diferencia de dos vectores, es natural el preguntarse como podemos definir un producto que sea útil. El modo más evidente sería el de definir la multiplicación haciendo el producto componente a componente (tal como se hizo para la suma y para la resta) pero un producto definido de esta manera tiene poco significado físico y casi nunca aparece en las aplicaciones, por la misma razón, no consideraremos ninguna división entre vectores. Sin embargo, otros dos tipos de producto, conocidos como producto escalar y producto vectorial, tienen un profundo significado físico. Consideremos el primero de estos productos.

### 5.1 PRODUCTO ESCALAR

#### DEFINICION 12 (producto escalar)

Dados los vectores  $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$  y  $\mathbf{B}=(b_1, b_2, b_3)$ , el **PRODUCTO ESCALAR** (o **PRODUCTO PUNTO** o **PRODUCTO INTERIOR**) de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es el número  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  definido por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

#### TEOREMA 4 (propiedades del producto escalar)

Dados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  vectores y  $c$  un escalar, valen las siguientes propiedades:

- |   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| 1) conmutatividad:  | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$   | 2) distributividad:                                  | $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$ |
| 3) homogeneidad:  | $c (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (c\mathbf{B})$ | 4) positividad:                                      | $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} > 0$ si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$  |
| 5) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \vec{0}$ | 6) $\ \mathbf{A}\ ^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$   | 7) $\mathbf{A} \cdot \vec{0} = 0 \forall \mathbf{A}$ |  |

#### TEOREMA 5 (ángulo entre vectores)

Dados los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , el ángulo  $\theta$  comprendido entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|} \quad (\text{con } 0 \leq \theta \leq \pi)^1$$

#### COROLARIO 5.1 (vectores perpendiculares u ortogonales)

Los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son perpendiculares si y sólo si

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$$

en ese caso escribiremos  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ .

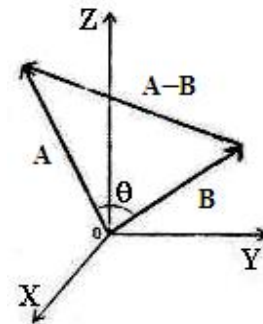


Figura 36: Ángulo entre vectores

#### DEFINICION 13 (ángulos de dirección y cosenos directores)

Dado el vector  $\mathbf{A}$ , los **ÁNGULOS DE DIRECCIÓN** de  $\mathbf{A}$  se definen como los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  (entre  $0$  y  $\pi$ ) que  $\mathbf{A}$  forma con los ejes coordenados. Los cosenos de esos ángulos se dicen **COSENOS DIRECTORES** de  $\mathbf{A}$ .

#### COROLARIO 5.2 (cosenos directores)

Los cosenos directores de  $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$ , están dados por:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{A}\|}, \cos \beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{A}\|} \text{ y } \cos \gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{A}\|}$$

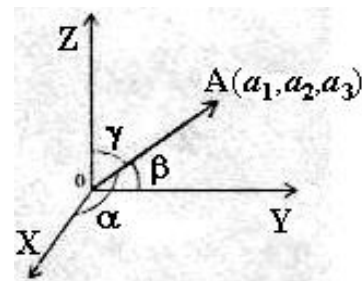


Figura 37: Ángulos de dirección

<sup>1</sup> LEY DE LOS COSENOS. Dado un triángulo cualquiera con ángulos  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  y longitudes de los lados  $a$ ,  $b$ , y  $c$  valen las siguientes fórmulas:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ,  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  y  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

**COROLARIO 5.3 (vector en términos de sus cosenos directores)**

Dado el vector  $\mathbf{A}$ , se tiene que  $\mathbf{A} = \|\mathbf{A}\| (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

**COROLARIO 5.4**

Dado el vector  $\mathbf{A}$  cuyos ángulos de dirección son  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , se tiene que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Dados dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  (ve la Figura 38) la proyección de  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{A}$ ,  $\text{pr}_A \mathbf{B}$ , es un vector paralelo a  $\mathbf{A}$  cuyo punto final se obtiene de la intersección de  $\mathbf{A}$  con la perpendicular a  $\mathbf{A}$  que pasa por el punto final de  $\mathbf{B}$ . En este caso se tiene que

$$\|\text{pr}_A \mathbf{B}\| = \frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|}{\|\mathbf{A}\|} \quad (8)$$

lo que nos conduce a la siguiente definición

**DEFINICION 14 (proyección)**

Dado el vector  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ , la **PROYECCIÓN**  $\text{pr}_A \mathbf{B}$  de un vector  $\mathbf{B}$  en  $\mathbf{A}$  se define así:

$$\text{pr}_A \mathbf{B} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\|\mathbf{A}\|^2} \mathbf{A}$$

Dados dos vectores perpendiculares  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , un vector  $\mathbf{C}$  cualquiera se puede descomponer como la suma de dos vectores, uno paralelo a  $\mathbf{A}$  y el otro a  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C} = \text{pr}_A \mathbf{C} + \text{pr}_B \mathbf{C} \quad (9)$$

no es necesario hallar las dos proyecciones arriba mencionadas, basta hallar  $\text{pr}_A \mathbf{B}$  y luego  $\text{pr}_B \mathbf{C} = \mathbf{C} - \text{pr}_A \mathbf{C}$

(10)

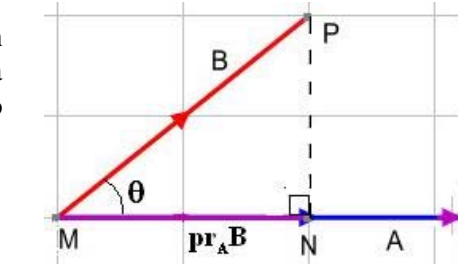


Figura 38: Proyección de B en A

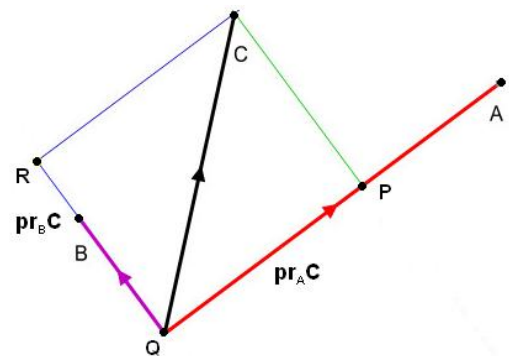


Figura 39

**5.2 PRODUCTO VECTORIAL****DEFINICION 15 (producto vectorial)**

Dados dos vectores  $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$  y  $\mathbf{B}=(b_1, b_2, b_3)$ , el **PRODUCTO VECTORIAL** (o **PRODUCTO CRUZ**) de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  es el vector  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  definido por:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Una forma sencilla de recordar esta fórmula, es expresar la parte derecha como un determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (11)$$

**TEOREMA 6 (propiedades del producto vectorial)**

Dados  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  vectores y  $c$  un escalar, valen las siguientes propiedades:

- 1)  $\mathbf{A} \times \vec{0} = \vec{0}$
- 2)  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \vec{0}$
- 3)  $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  (NO vale la conmutatividad)
- 4)  $(c\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = c(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (c\mathbf{B})$  (homogeneidad)
- 5)  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$
- 6)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  (distributividad)
- 7) En general  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  (NO vale la asociatividad)



**TEOREMA 7 (vector perpendicular a dos vectores dados)**

Dados **A** y **B** vectores, valen las siguientes propiedades:

1)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$  y  $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$

(por lo que si  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es diferente de cero, entonces  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es perpendicular tanto a **A** como a **B**, ve la Figura 40).

2)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  es perpendicular a  $r\mathbf{A} + s\mathbf{B}$

(es decir, el producto cruz no solo es perpendicular a los vectores **A** y **B** sino también a todas sus combinaciones lineales).

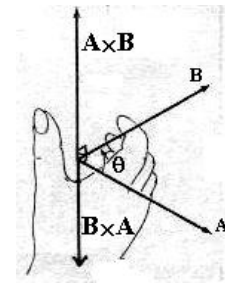


Figura 40: Regla de la mano derecha

**LEMA 8**

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{B}\|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

**TEOREMA 8**

Si  $\theta$  es el ángulo entre **A** y **B**, entonces

$$\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \sin \theta \text{ (con } 0 \leq \theta \leq \pi)$$

**COROLARIO 8.1**

Si  $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$ , entonces  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$

**COROLARIO 8.2 (vectores paralelos)**

Dados **A** y **B** vectores:  $\mathbf{A} // \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$

**COROLARIO 8.3 (áreas)**

Dados los vectores **A** y **B**, el área del paralelogramo con lados adyacentes **A** y **B**, está dada por  $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$  y el área del triángulo cuyos

lados son **A** y **B**, está dada por  $\frac{1}{2} \|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\|$ .

El producto escalar es un buen producto para hallar el ángulo entre vectores y la proyección de un vector sobre otro, además proporciona una condición de perpendicularidad.

El producto vectorial es útil porque permite hallar en el espacio un vector perpendicular a dos vectores dados lo que será muy útil para hallar ecuaciones de planos.

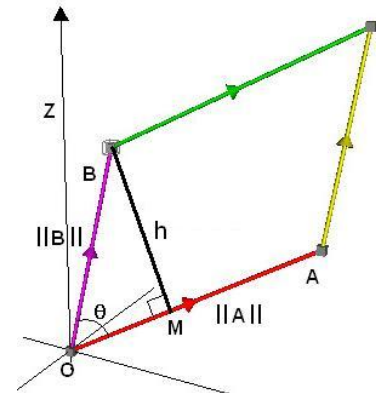


Figura 41

**5.3 PRODUCTOS TRIPLES**

Los siguientes productos aparecen ocasionalmente en las aplicaciones físicas:

**DEFINICION 16 (productos triples)**

Los productos  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  y  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  se dicen **TRIPLES PRODUCTOS ESCALARES** y los productos  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  y  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$  se dicen **TRIPLES PRODUCTOS VECTORIALES**. El producto  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  lo representaremos por  $[\mathbf{ABC}]$ .

**TEOREMA 9 (propiedades de los productos triples)**

Dados **A**, **B** y **C** vectores, valen las siguientes propiedades:

1)  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$  (es decir  $[\mathbf{ABC}] = [\mathbf{BCA}] = [\mathbf{CAB}]$ ).

Dado que el producto escalar es conmutativo, se tiene que:  $[\mathbf{ABC}] = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

2) El producto  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ , lo podemos calcular mediante el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

## 6. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

El álgebra vectorial puede aplicarse al estudio de la geometría analítica, en esta parte del curso, nos interesará sobre todo, la aplicación de los métodos del álgebra vectorial al estudio de las rectas y los planos en el espacio. Desde el momento en que los vectores los hemos pensado como segmentos orientados, no es de extrañar que éstos y las rectas estén íntimamente ligados: usaremos a los vectores para describir rectas.

### 6.1 RECTAS EN EL ESPACIO

#### DEFINICION 17 (paralelismo entre un vector y una recta)

Dada la recta  $\mathcal{L}$  en el espacio y el vector  $\mathbf{a}$ , decimos que  $\mathbf{a}$  es PARALELO a  $\mathcal{L}$  si y sólo si  $\mathbf{a}$  es paralelo al vector  $\mathbf{PQ}$  donde  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  son dos puntos cualquiera de la recta. En ese caso, escribimos  $\mathbf{a} // \mathcal{L}$ .

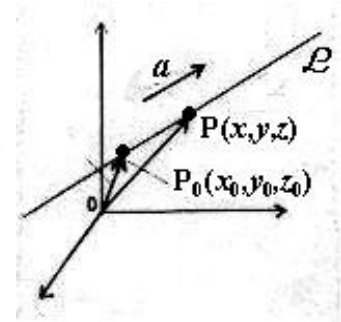


Figura 42

#### DEFINICION 18 (ecuación vectorial de la recta)

La RECTA  $\mathcal{L}$  que pasa por el punto  $\mathbf{P}_0$  y es paralela al vector  $\mathbf{a}$ , está dada por:

$$\mathcal{L} = \{ \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a} \} \text{ donde } t \text{ es un escalar.}$$

👉 nota sobre la última definición:

Podemos escribir en forma sintética:  $\mathcal{L}: \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + t\mathbf{a}$ , esta ecuación se dice ECUACIÓN VECTORIAL de la recta y el vector  $\mathbf{a}$  se dice VECTOR DE DIRECCIÓN de  $\mathcal{L}$ .

#### TEOREMA 10 (ecuaciones paramétricas de la recta)

La recta  $\mathcal{L}$  que pasa por el punto  $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y es paralela al vector  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ , está determinada por las ecuaciones:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt \quad \text{y} \quad z = z_0 + ct \quad (12)$$

estas ecuaciones se dicen ECUACIONES PARAMÉTRICAS de la recta y  $t$  se dice PARÁMETRO.

#### DEFINICION 19 (ángulo entre rectas)

Dadas dos rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , el ÁNGULO formado por  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  es el ángulo formado por sus respectivos vectores de dirección (la definición se aplica aún en el caso de que  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  no se corten).

#### DEFINICION 20 (rectas paralelas)

Se dice que las rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son PARALELAS si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos. En ese caso escribimos:  $\mathcal{L}_1 // \mathcal{L}_2$ .

### 6.2 NOTAS SOBRE RECTAS EN EL ESPACIO

1. Para hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ , basta tomar como vector de dirección al vector  $\overrightarrow{\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2}$  y tomar como punto a cualquiera de los dos.
2. Si conoces las ecuaciones paramétricas de la recta, los coeficientes de  $t$  nos dan un vector paralelo a la recta y los términos constantes de la derecha nos dan un punto por donde pasa la recta.
3. Para obtener puntos de una recta de la que se tienen sus ecuaciones paramétricas, basta dar diferentes valores al parámetro.

### 6.3 PLANOS EN EL ESPACIO

#### DEFINICION 21 (ecuación vectorial de un plano)

Dado un punto  $P_0$  y dos vectores  $a$  y  $b$  no paralelos, el PLANO  $\mathcal{P}$  que pasa por  $P_0$  y es generado por  $a$  y  $b$ , se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + sa + tb\} \text{ donde } t \text{ y } s \text{ son escalares.}$$

observa que entonces podemos dar la siguiente condición para que un punto pertenezca a un plano  $\mathcal{P}$ :

$$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} = s a + t b$$

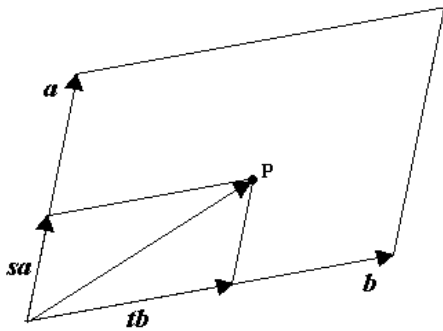


Figura 43: Plano generado por dos vectores

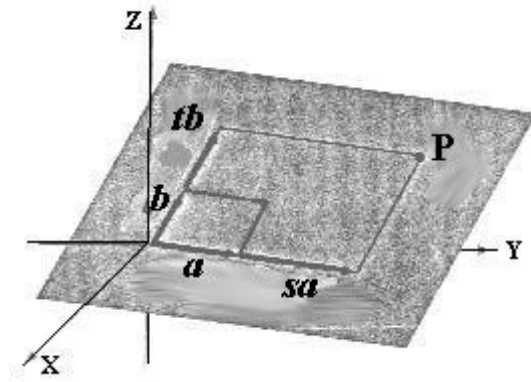


Figura 44

#### DEFINICION 22 (plano normal a un vector)

Dado un punto  $P_0$  y un vector  $N$ , el PLANO  $\mathcal{P}$  que pasa por  $P_0$  y es perpendicular a  $N$ , se define como:

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 / N \cdot (P - P_0) = 0\}$$

(esta definición equivale a escribir  $\mathcal{P}: N \cdot P = N \cdot P_0$ )

entonces tenemos otra condición para que un punto pertenezca a un plano  $\mathcal{P}$ :

$$P \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP_0} \perp N$$

a este vector  $N$  se le llama NORMAL al plano.

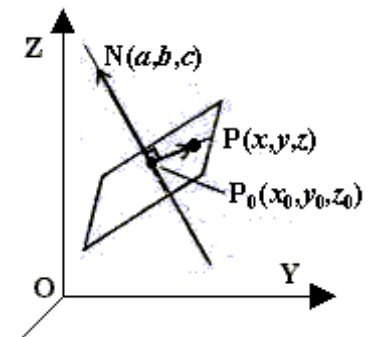


Figura 45: Normal a un plano

#### TEOREMA 11 (ecuación cartesiana de un plano)

La ecuación del plano  $\mathcal{P}$  que es normal al vector  $N=(a,b,c)$ , está dada por

$$\mathcal{P}: ax+by+cz=d$$

Debes observar que el vector normal a un plano no es único si no que hay un número infinito de vectores perpendiculares a un plano dado y cualquiera de ellos puede ser considerado como normal (ve la Figura 46).

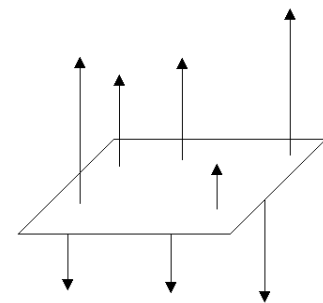


Figura 46: Vectores normales a un plano

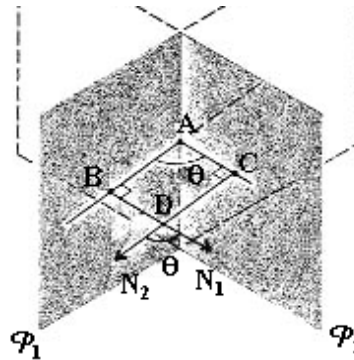


Figura 47: Angulo entre planos

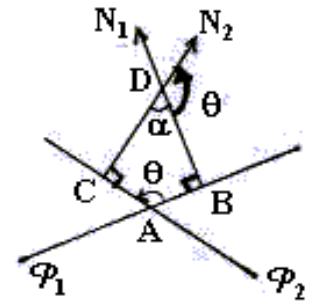


Figura 48

**DEFINICION 23 (ángulo entre planos)**

Dados los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ , el ÁNGULO formado por ellos es el ángulo formado por sus respectivas normales.

**DEFINICION 24 (planos paralelos y planos perpendiculares)**

1) Se dice que los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  son PARALELOS si y sólo si sus normales son paralelas. En ese caso escribimos:  $\mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2$ . Observa como en este caso podemos pensar que todos los planos paralelos tienen la misma normal.

2) Se dice que los planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  son PERPENDICULARES si y sólo si sus normales son perpendiculares. En ese caso escribimos:  $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$ .

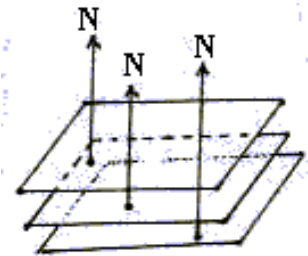


Figura 49: Planos paralelos

**TEOREMA 12**

Dado  $\mathcal{P}_1: ax + by + cz = d_1$ , entonces  $\mathcal{P}_2: ax + by + cz = d_2$  es paralelo a  $\mathcal{P}_1$ .

**6.4 DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UN PLANO****TEOREMA 13 (distancia entre un punto y un plano)**

Dado el punto  $P_1$  y el plano  $\mathcal{P}$ , cuya normal es  $N$ , la distancia  $D$

entre  $P_1$  y  $\mathcal{P}$  está dada por:  $D = \frac{|N \cdot \vec{PP}_1|}{\|N\|}$ , donde  $P$  es cualquier punto de  $\mathcal{P}$  ó si se conoce la ecuación cartesiana del plano  $ax+by+cz=d$  y  $P_1=(x_1, y_1, z_1)$ :

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (13)$$

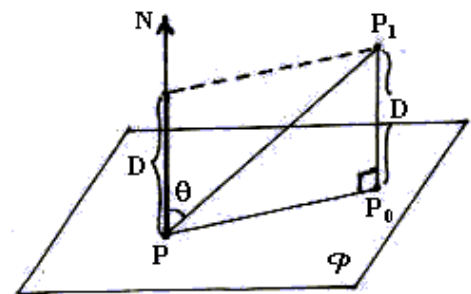


Figura 50: Distancia entre un punto y un plano

## 6.5 NOTAS SOBRE PLANOS EN EL ESPACIO

- 1) La normal de un plano se obtiene con dos vectores no paralelos que pertenezcan al plano.
- 2) Para hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos  $P_0$ ,  $P_1$  y  $P_2$ , basta hallar dos vectores cualquiera que los unan y luego tomar como normal al plano al producto cruz de esos vectores y tomar como punto a cualquiera de los tres (ve la Figura 51).

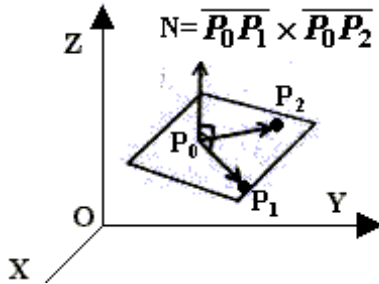


Figura 51: Plano por 3 puntos

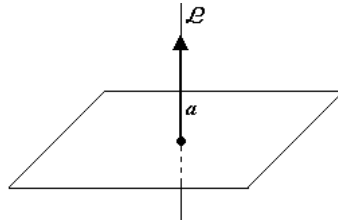


Figura 52: recta perpendicular a un plano

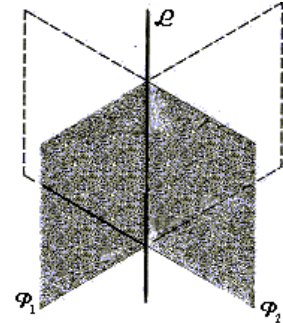


Figura 53: intersección de dos planos

- 3) Si se da la ecuación cartesiana de un plano, los coeficientes de la ecuación dan  $\mathbf{N}$ .
- 4) Si nos dan una recta  $\mathcal{L}$  perpendicular a un plano, para hallar la ecuación del plano se toma como normal al vector de dirección de la recta (ve la Figura 52).
- 5) Si nos piden una recta  $\mathcal{L}$  perpendicular a un plano, se toma como vector de dirección de la recta a la normal al plano (ve la Figura 52).
- 6) Si se da la ecuación cartesiana de un plano, para hallar puntos de él, se dan valores cualquiera a dos de las variables y se halla el valor respectivo de la tercera variable. Se sugiere por facilidad dar valores de cero (es igualito a lo que hacías en la prepa con las rectas del plano).
- 7) Para hallar la distancia entre planos paralelos basta hallar la distancia entre un punto cualquiera del primer plano y el segundo plano.
- 8) Dos planos  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  en el espacio, pueden tener las siguientes posiciones relativas (ve la Figura 53):
  - a) Que sean paralelos. En este caso  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ .
  - b) Que los planos coincidan. En este caso  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ .
  - c) Que los planos se corten. En este caso  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  es una recta.

Si necesitas la intersección de dos planos dadas sus ecuaciones cartesianas, basta resolver el sistema formado por sus ecuaciones en términos de  $z$  y luego parametrizar haciendo  $z=t$ . Obtenemos de esta manera las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección.

- 9) Tres planos  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  y  $\mathcal{P}_3$  en el espacio, pueden tener las siguientes posiciones relativas:
  - a) Que los planos no tengan ningún punto en común. (Puede ser que dos de ellos o los tres sean paralelos o que no haya planos paralelos pero aún así los tres no tengan ningún punto en común). En este caso  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$ .
  - b) Que los planos coincidan. En este caso  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3$ .
  - c) Que los planos tengan toda una recta en común.
  - d) Que los planos sólo tengan un punto en común.

Si necesitas la intersección de tres planos dadas sus ecuaciones cartesianas, debes resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, por cualquier método. Lo más fácil es usar el método de Gauss-Jordan (en el caso que ya hayas cursado álgebra lineal), si no has estudiado este método, puedes hallar la recta de intersección de dos de los planos  $\mathcal{L} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  y luego hallar la intersección de ésta recta con el tercer plano  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{L} \cap \mathcal{P}_3$ .

Si el sistema tiene solución única, estás en el caso **d**, si el sistema tiene un número infinito de soluciones estás en el caso **c** o **b** y si el sistema no tiene solución estás en el caso **a**.