Tecnológico Nacional de México

Álgebra elemental

Alfabeto griego

Letra	Variante	Nombre en español
A, α		Alfa
B, β		Beta
Γ, γ	$\mathit{\Gamma}$	Gama
Δ, δ	$\mathit{\Delta}$	Delta
E, ϵ	ε	Epsilon
Z,ζ		Zeta
H, η		Eta
Θ θ	$\mathit{\Theta}$, ϑ	Teta
I, ι		Iota
K, κ		Kapa
Λ, λ	$\mathit{\Lambda}$	Lambda
M, μ		Mi (o también Mu)
N, ν		Ni (o también Nu)
Ξ, ξ	$\mathit{\Xi}$	Xi
O, o		Omicron
Π, π	$\mathit{\Pi}$, ϖ	Pi
P, ρ	ϱ	Ro
Σ, σ	$\mathit{\Sigma}$ ς	Sigma
T, τ		Tau
Υ, υ	$\mathit{\Upsilon}$	Ipsilon
Φ, ϕ	$\mathit{\Phi}$, φ	Fi
X, χ		Ki (o también Ji)
Ψ, ψ	$\mathit{\Psi}$	Psi
Ω, ω	$\mathit{\Omega}$	Omega

Propiedades de los número reales ($\mathbb{R}$)

Si a, b y c representan números reales ($a, b, c \in \mathbb{R}$), entonces se cumplen las siguientes propiedades en las operaciones de adición y multiplicación.

1. **Cerradura de la adición**
   $a + b \in \mathbb{R}$
2. **Cerradura de la multiplicación**
   $a \times b \in \mathbb{R}$
3. **Conmutatividad de la adición**
   $a + b = b + a$
4. **Conmutatividad de la multiplicación**
   $a \times b = b \times a$
5. **Asociatividad de la adición**
   $(a + b) + c = a + (b + c)$
6. **Asociatividad de la multiplicación**
   $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
7. **Existencia del neutro aditivo**
   En $\mathbb{R}$ existe el número 0 tal que $a + 0 = a$
8. **Existencia del neutro multiplicativo**
   En $\mathbb{R}$ existe el número 1 tal que $a \times 1 = a$
9. **Existencia del inverso aditivo**
   Para cualquier número real a existe el número real $-a$ tal que $a + (-a) = 0$
10. **Existencia del inverso multiplicativo**
   Para cualquier número real a *distinto de cero* existe el número a^{-1}, comunmente representado como la fracción $\frac{1}{a}$, tal que $a \times a^{-1} = 1$
11. **Distributividad del producto sobre la adición**
   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Propiedades de la igualdad

Si a, b y c representan números reales ($a, b, c \in \mathbb{R}$), entonces se cumplen las siguientes propiedades en la igualdad.

1. **Reflexividad (o Identidad)**
   $a = a$
2. **Simetría**
   $a = b \Leftrightarrow b = a$
3. **Transitividad**
   Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$
4. **Uniformidad**
   Si $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$
5. **Cancelación**
   Si $a + b = c + b$, entonces $a = c$
6. **Aditiva de la igualdad**
   Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$
7. **Multiplicativa de la igualdad**
   Si $a = b$, entonces $a \times c = b \times c$

Propiedades de las desigualdades

1. **Propiedades transitivas**
   Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$
   Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$
   Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$
   Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$
2. **Propiedades de adición**
   Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
   Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$
   Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
   Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$
3. **Propiedades de multiplicación (Parte 1)**
   Si c es un número **positivo** ($c > 0$), entonces:
   Si $a > b$, entonces $a \times c > b \times c$
   Si $a \geq b$, entonces $a \times c \geq b \times c$
   Si $a < b$, entonces $a \times c < b \times c$
   Si $a \leq b$, entonces $a \times c \leq b \times c$

4. **Propiedades de multiplicación (Parte 2)**
   Si c es un número **negativo** ($c < 0$), entonces:
   Si $a > b$, entonces $a \times c < b \times c$
   Si $a \geq b$, entonces $a \times c \leq b \times c$
   Si $a < b$, entonces $a \times c > b \times c$
   Si $a \leq b$, entonces $a \times c \geq b \times c$

5. **Propiedades de los recíprocos (Parte 1)**
   Si a y b, son números distintos de cero con el mismo signo ($ab > 0$), entonces:
   Si $a > b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
   Si $a \geq b$, entonces $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$
   Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
   Si $a \leq b$, entonces $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

6. **Propiedades de los recíprocos (Parte 2)**
   Si a y b son números distintos de cero con signo contrario ($ab < 0$), entonces:
   Si $a > b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
   Si $a \geq b$, entonces $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$
   Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
   Si $a \leq b$, entonces $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$

7. **Propiedades de simplificación para el valor absoluto (Parte 1)**
   Si $|a| < b$, entonces $-b < a < b$
   Si $|a| \leq b$, entonces $-b \leq a \leq b$

8. **Propiedades de simplificación para el valor absoluto (Parte 2)**
   Si $|a| > b$, entonces $-b > a \vee a > b$
   Si $|a| \geq b$, entonces $-b \geq a \vee a \geq b$

Intervalos

- **Intervalo abierto**
  $(a, b) = \{x \,|\, a < x < b\}$
- **Intervalo cerrado**
  $[a, b] = \{x \,|\, a \leq x \leq b\}$
- **Intervalos semiabiertos**
  $(a, b] = \{x \,|\, a < x \leq b\}$
  $[a, b) = \{x \,|\, a \leq x < b\}$
- **Intervalos infinitos**
  $[a, \infty) = \{x \,|\, x \geq a\}$
  $(-\infty, a] = \{x \,|\, x \leq a\}$
  $(a, \infty) = \{x \,|\, x > a\}$
  $(-\infty, a) = \{x \,|\, x < a\}$

Valor absoluto y sus propiedades

Si a es un número real, entonces el *valor absoluto* de a, que se denota por el símbolo $|a|$, representa a un número real definido como:

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

o también como:

$$|a| = \begin{cases} (-a); & \text{si } a < 0 \\ a; & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$$

Geométricamente el *valor absoluto* representa la distancia desde a hasta el origen y satisface las siguientes propiedades:

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|-a| = |a|$
4. $|a \times b| = |a| \times |b|$
5. Si $a \neq 0$, entonces $\left|a^{-1}\right| = \frac{1}{|a|}$
6. Si $b \neq 0$, entonces $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$
8. $|a - b| \geq |a| - |b|$

Propiedades de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; para $a \neq 0$
4. $a^0 = 1$ para $a \neq 0$
5. $a^1 = a$
6. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ para $a \neq 0$
7. $(ab)^m = a^m b^m$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; para $b \neq 0$

Propiedades de los radicales

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
   $= \sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a; & \text{si } n \text{ es impar} \\ |a|; & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$
4. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; para $b \neq 0$

Definición y propiedades de los logaritmos

En las siguientes expresiones el número b se dice *base del logaritmo* y representa a un número positivo distinto de 1.

Definición:

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x$$

Propiedades:

1. $\log_b b^x = x$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b 1 = 0$
4. $\log_b uv = \log_b u + \log_b v$
5. $\log_b \dfrac{u}{v} = \log_b u - \log_b v$
6. $\log_b u^n = n \log_b u$
7. $\ln u = \log_\mathrm{e} u$
8. $\log u = \log_{10} u$

Cambio de base:
Si a y b son números positivos distintos de 1, se tiene que:

$$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$$

Productos notables

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$
$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$
$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

Factores notables

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$a^2 + b^2$ no es factorizable
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^4 - b^4 = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$
$a^4 + b^4$ no es factorizable
$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+a^4)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^4)$
$a^6 - b^6 = (a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
$a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

Solución de ecuaciones polinomiales

Fórmula general para la ecuación de primer grado $(ax + b = 0)$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Fórmula general para la ecuación de segundo grado $(ax^2 + bx + c = 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$