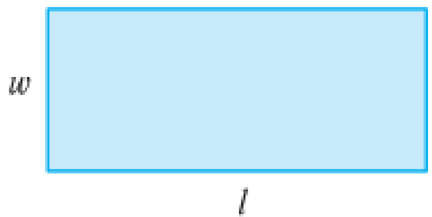
Problema geométrico y físico

Cálculo Diferencial → problemas de la recta tangente y la velocidad para introducir el concepto de derivada.

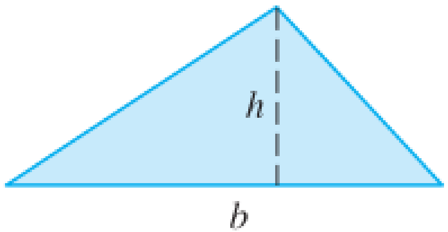
Cálculo Integral → problemas de área y distancia y los utiliza para formular la idea de integral definida

Problema del área

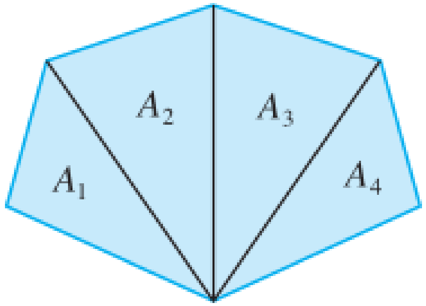
Al intentar resolver el problema del área, debemos preguntarnos: ¿cuál es el significado de la palabra área?



$A = lw$



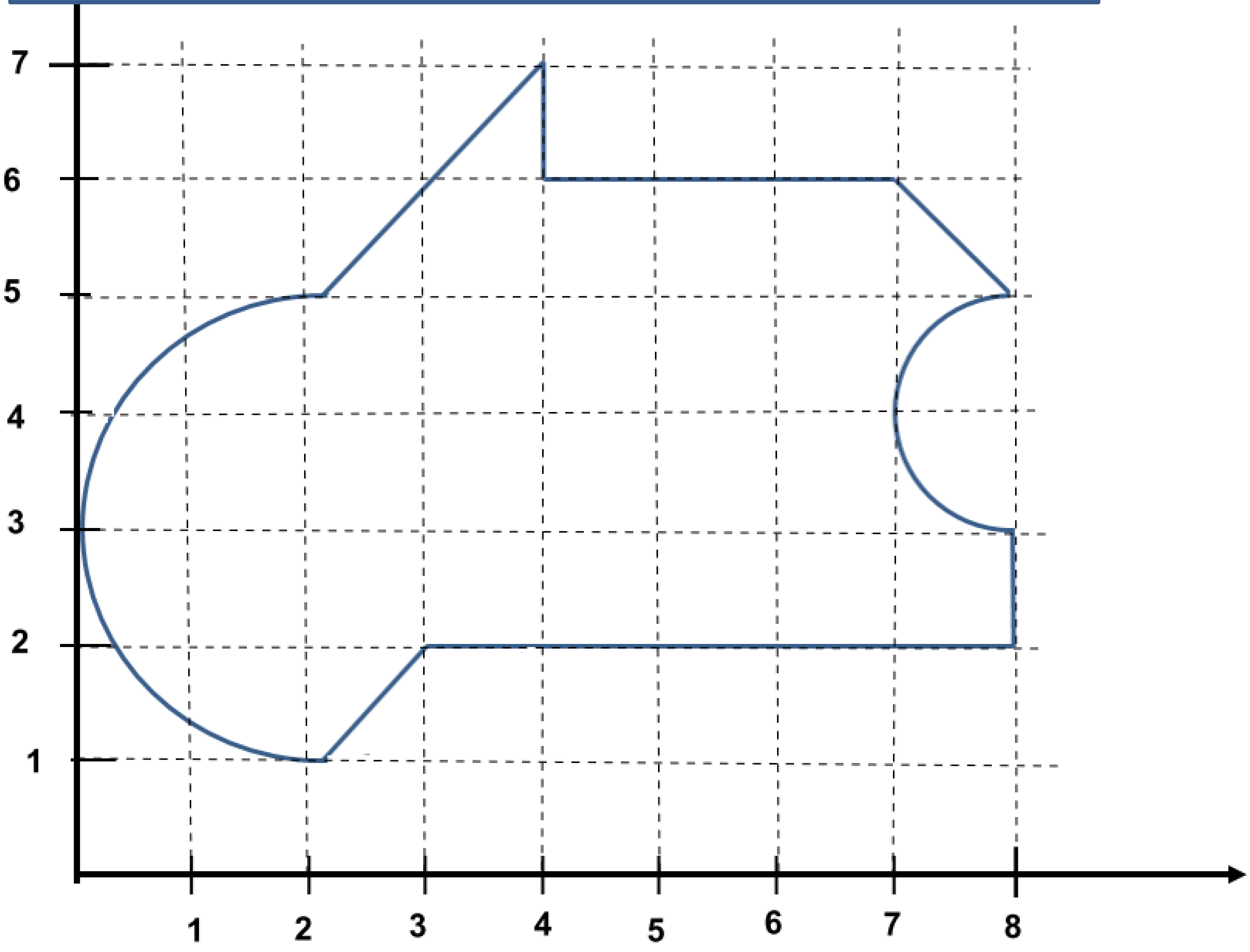
$A = \frac{1}{2}bh$



$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos o **amorfa**.

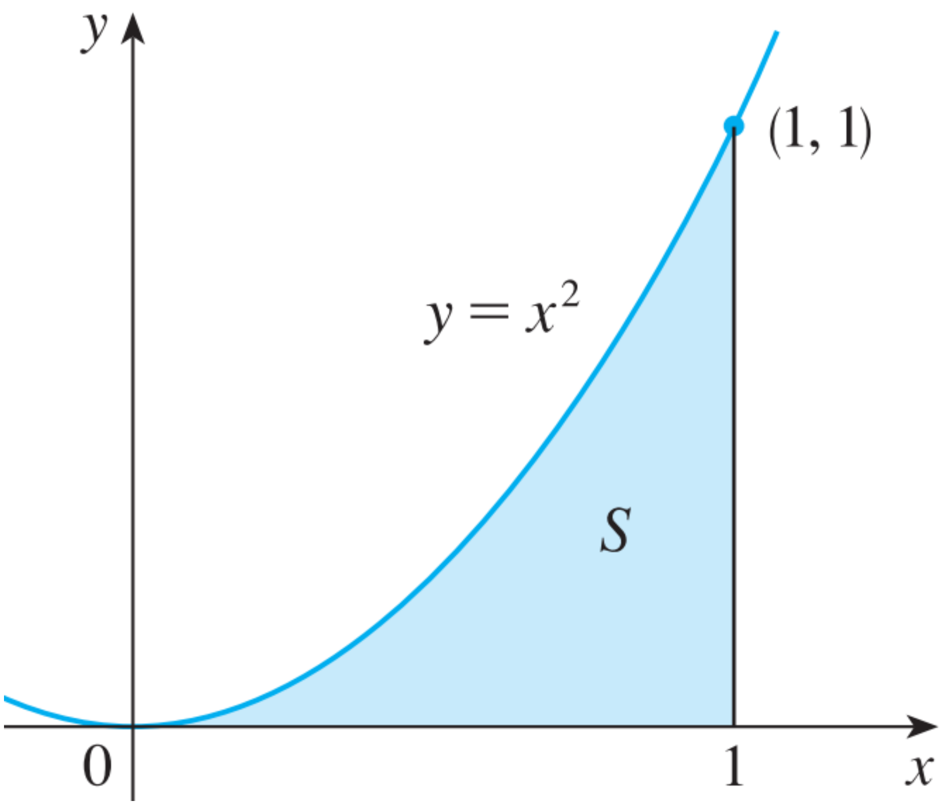
Medición aproximada del área (figura amorfa)



EJEMPLOS EN CLASE (Stewart Sección 5.1)

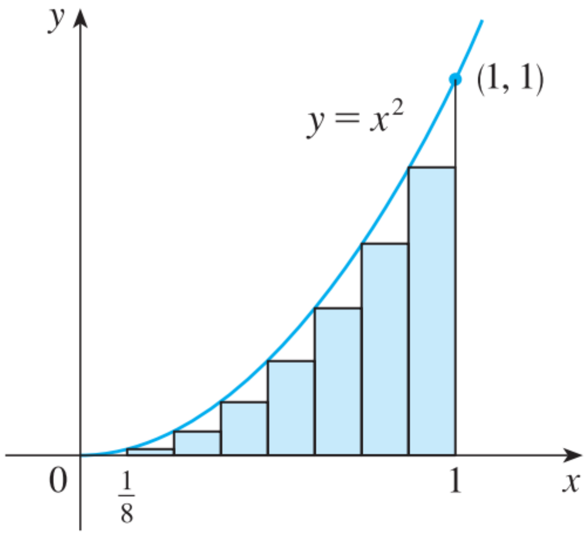
El problema del área

EJEMPLO 1 Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola y = x^2 , desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura).

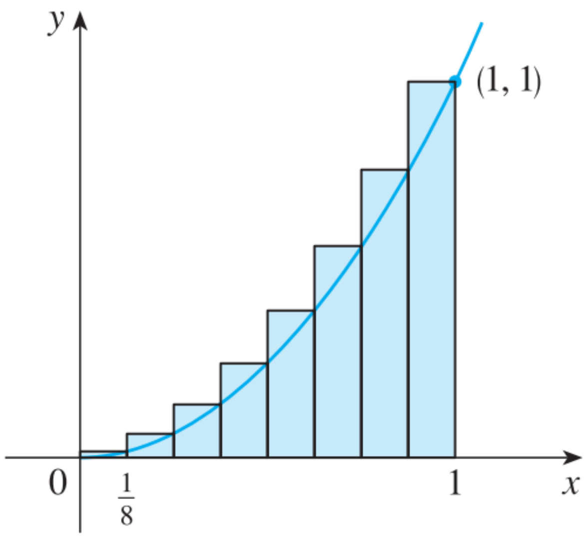


Estimación de áreas (Stewart Sección 5.1)

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. Como se muestra lo que sucede cuando dividimos la región S en ocho franjas de anchos iguales.



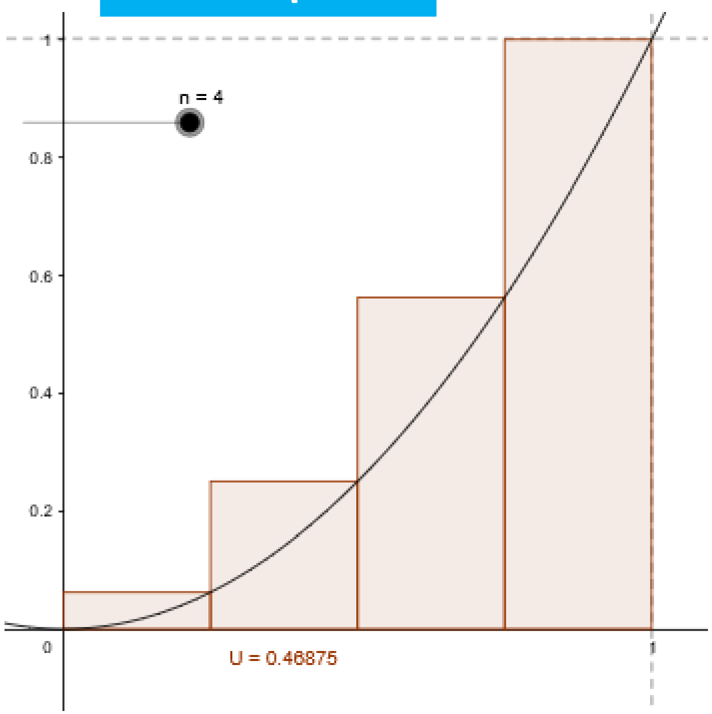
a) Usando los puntos extremos a la izquierda

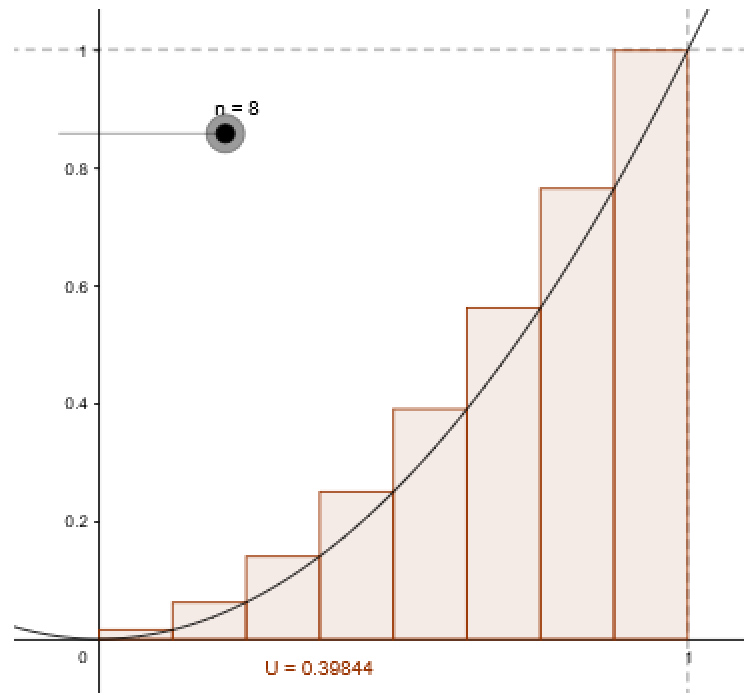


b) Usando los puntos extremos a la derecha

Comprobando con Geogebra

Suma Superior



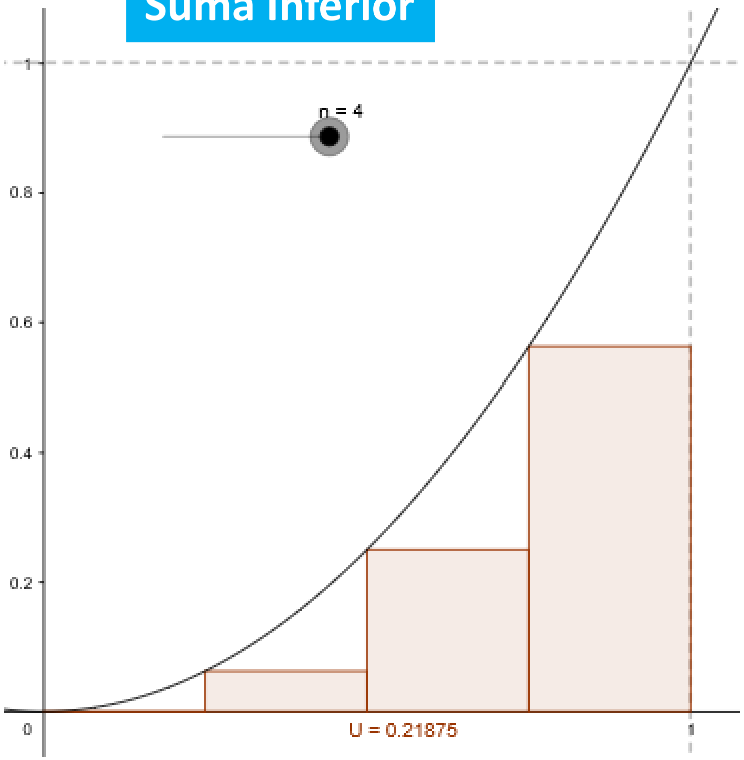


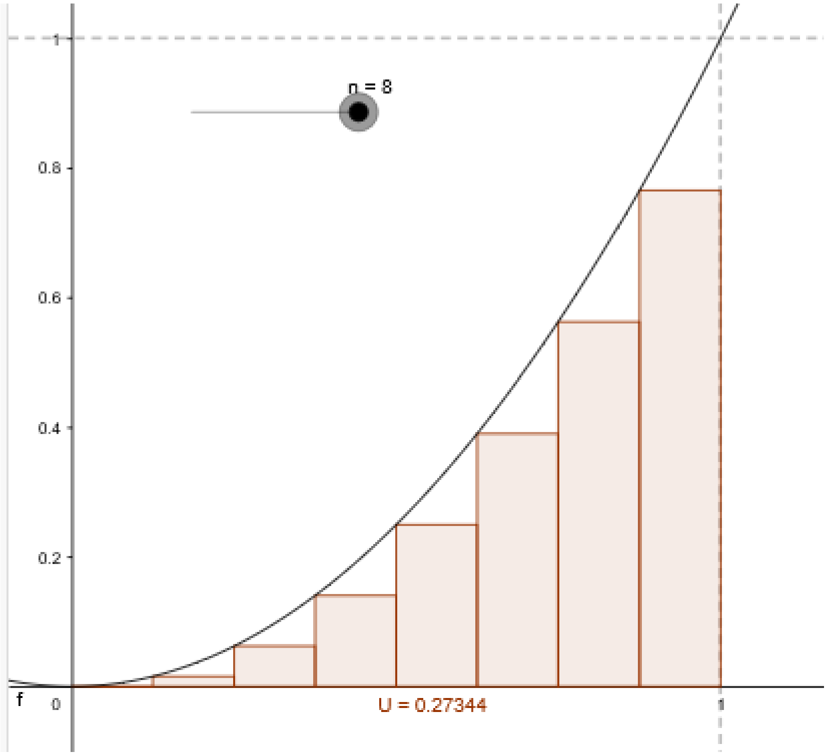
n = 4
A ~ 0.46875

n = 8
A ~ 0.39844

Comprobando con Geogebra

Suma Inferior





n = 4
A ~ 0.21875

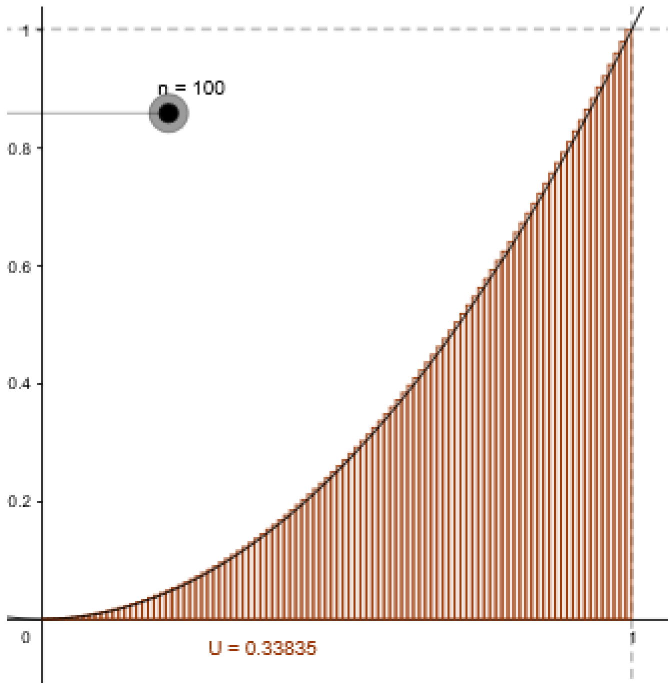
n = 8
A ~ 0.27344

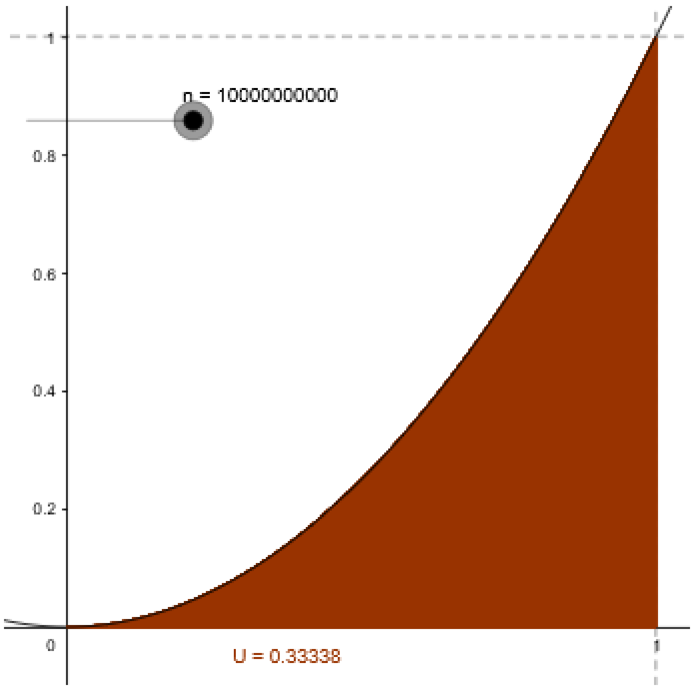
EJEMPLOS EN CLASE (Stewart Sección 5.1)

EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores tiende a 1/3; es decir,

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \frac{1}{3}$$

Comprobando con Geogebra (suma superior)





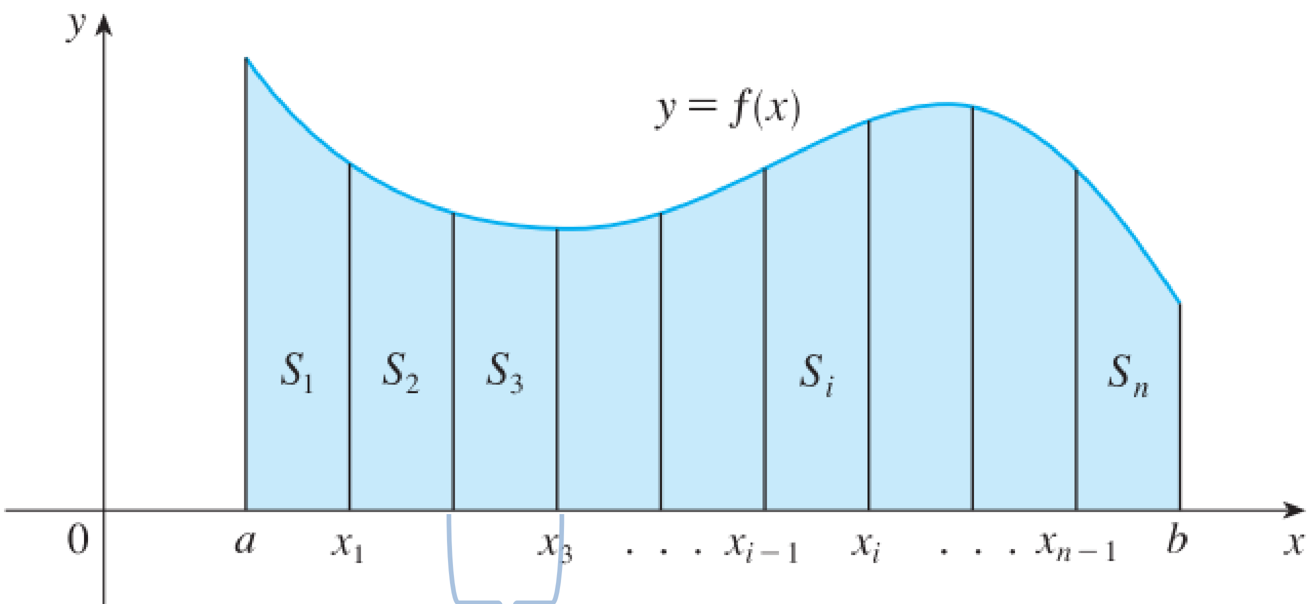
n = 100
A ~ 0.33835

n → ∞
A → 1/3

DEFINICIÓN (Stewart Sección 5.1)

2 Definición El **área** A de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$



$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

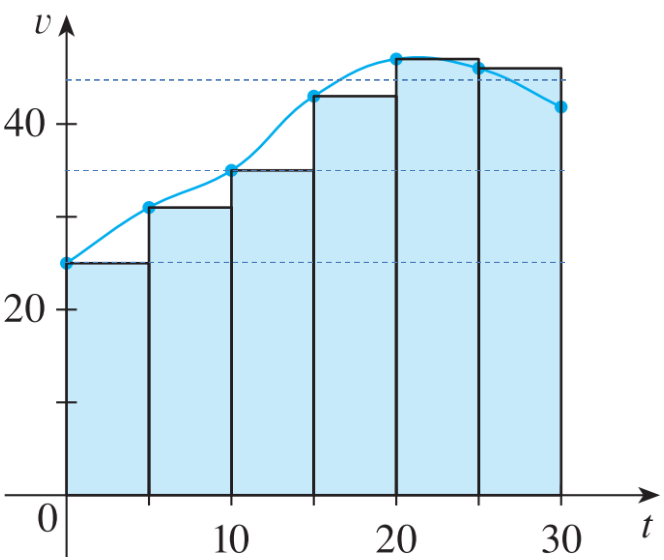
EJEMPLOS EN CLASE (Stewart Sección 5.1)

El problema de la distancia

EJEMPLO 4 Supongamos que el odómetro de nuestro automóvil esta averiado y que deseamos estimar la distancia que ha recorrido en un intervalo de tiempo de 30 segundos. Tomamos las lecturas del velocímetro cada cinco segundos y las registramos en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41



Cuanto mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas son las estimaciones, así que parece plausible que la distancia exacta d recorrida sea el límite de esas expresiones:

$$\boxed{d = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t}$$