

# Introducción a la Estadística Espacial

Dr. Andrés Farall

March 25, 2022

## Motivación

Podemos mencionar al menos dos características fundamentales para considerar a la estadística espacial como un campo de estudio específico.

- El espacio es un factor con una estructura particular relevante para explicar/predecir muchos fenómenos de interés. Técnicamente, si queremos analizar la variable  $Y$  que posee una localización espacial  $S$ , generalmente sucede que su comportamiento (distribución  $D$ ) depende fuertemente del componente espacial  $S$ , es decir  $D(Y/S) \neq D(Y)$ .
- Porque, incluso teniendo en cuenta los factores relevantes  $X$  para analizar el fenómeno  $Y$ , otra información relevante proviene del comportamiento del fenómeno en un entorno cercano. Técnicamente, para la variable  $Y_1$  con localización espacial  $S_1$ , generalmente sucede que su comportamiento depende de  $Y_2$  con localización espacial  $S_2$ , es decir  $D(Y_1/X, S, Y_2) \neq D(Y_1/X, S)$ , si  $S_1$  está cerca de  $S_2$ .

## Procesos Estocásticos Espaciales

De manera general podemos definir a un proceso estocástico espacial como una colección de variables o vectores aleatorios  $Z$  indexados en alguna región  $S$  del espacio  $R^d$  (normalmente con  $d=2$  o  $d=3$ ), es decir

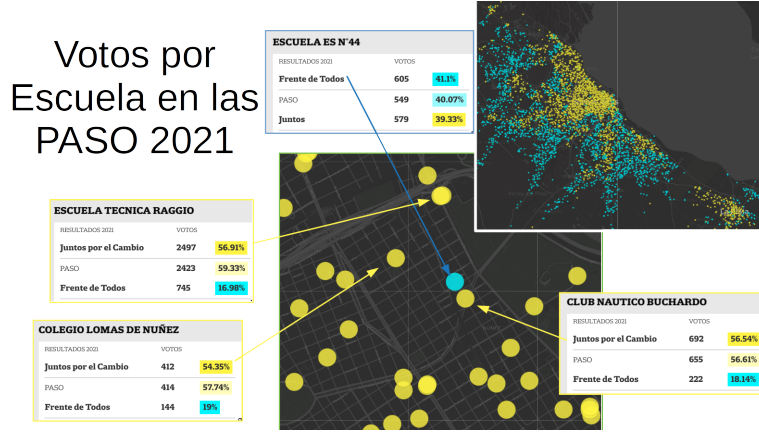
$$\{Z(s) : s \in S \subseteq R^d\}$$

En estos procesos hay dos fuentes bien distintas (y potencialmente relacionadas) de variación o aleatoriedad. La primera es la localización espacial de los casos (o eventos), denotada por  $s$ . La segunda es la valuación de la variable o vector aleatorio  $Z$ .

Para poder caracterizar completamente el proceso, necesitamos conocer la distribución conjunta de cualquier conjunto finito de estas variables o vectores  $Z(s_1), Z(s_2) \dots Z(s_n)$ , es decir conocer

$$P(Z(s_1) \in A_1, Z(s_2) \in A_2 \dots Z(s_n) \in A_n)$$

Un ejemplo concreto de una realización de este tipo de procesos es el resultado de una votación a nivel de establecimiento, para el cual tenemos la localización de cada establecimiento. La próxima figura muestra los sitios de votación alrededor del conurbano bonaerense (arriba a la derecha), junto con un detalle espacial del noreste del barrio de nuñez (centro de la imagen). Asociado a cada punto tenemos la cantidad de votos del sitio y las proporciones resultantes del sufragio. Llama poderosamente la atención el resultado del punto celeste, que no respeta la “tendencia espacial” de las proporciones de votos de la zona.



En este caso particular, las localizaciones puntuales  $s \in S$  pueden ser pensadas como un proceso puntual aleatorio, en tanto que a priori podríamos no saber cuales de todos los establecimientos potencialmente utilizables serán efectivamente utilizados para el comicio. En cuanto a la variable aleatoria  $Z$  podemos pensar en la proporción de votos de un determinado partido político. O, podemos pensar en un vector aleatorio  $\mathbf{Z}$  que contemple todas las proporciones de votos de todos los partidos. Algunas preguntas que surgen naturalmente son:

- ¿ Se hallan las localizaciones  $s$  concentradas espacialmente ?
- ¿ Como se comporta la variable  $Z$  ?
- ¿ Existe una relación entre las localizaciones  $s$  y los valores de la variable  $Z$  ?

Nótese que la primer pregunta involucra sólo a las localizaciones. La segunda pregunta comprende exclusivamente a la variable  $Z$ . En tanto que la tercer pregunta relaciona a las localizaciones con la variable  $Z$ .

La situación más sencilla de proceso estocástico espacial es aquella en la cual sólo tenemos información (o sólo tenemos interés) sobre la localización espacial de los eventos (primer pregunta). Esto puede ser pensado como un caso particular del proceso general mencionado anteriormente, pues alcanza con definir  $Z(s) = 1$  si el evento ocurrió en la posición  $s$  y  $Z(s) = 0$  si no hay evento en la posición  $s$ . Pese a esto, a este caso tan particular se lo conoce

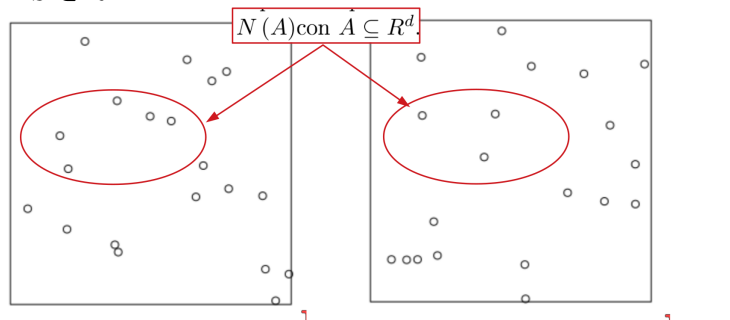
como Procesos Espaciales Puntuales (Point Pattern), y se los trabaja de manera totalmente diferente, como veremos a continuación.

## Procesos Espaciales Puntuales

Un proceso estocástico puntual  $\mathbf{X}$  es un proceso que genera conjuntos finitos aleatorios de puntos en  $R^d$ . Una definición más formal de un proceso estocástico puntual  $\mathbf{X}$  proviene de pensar que para toda región compacta  $A \subseteq R^d$  puede definirse una función  $N(A) = \# \{X \cap A\}$ , que cuenta la cantidad de eventos en la región, y que se comporta como una variable aleatoria con una cierta distribución. De esta forma, el proceso queda caracterizado por las distribuciones de las variables aleatorias  $N(A)$  con  $A \subseteq R^d$ .

Sorprendentemente, la distribución del proceso  $\mathbf{X}$  sólo depende de las probabilidades de eventos dicotómicos de presencia/ausencia, es decir, que alcanza con conocer el comportamiento de  $V(A) = P(N(A) = 0)$  para toda región  $A \subseteq R^d$ .

La siguiente figura muestra dos realizaciones de un proceso puntual sobre una ventana  $S \subset R^d$ .



Es fundamental entender que realizaciones del mismo proceso pueden ser (y en general lo son) muy distintas !

## Proceso Binomial

El proceso más sencillo que puede plantarse es el proceso binomial.

El proceso binomial es aquel que genera  $n$  eventos de manera independiente sobre una región compacta  $S \subseteq R^d$ , donde cada uno de los eventos obedecen a la distribución espacial (pdf)  $f(x)$  con  $x \in S$ . De esta forma, la variable aleatoria  $N(A)$  tiene una distribución binomial  $b(n, p)$  con la probabilidad  $p = \int_A f(x) dx$ .

El caso particular más simple de proceso binomial consiste en fijar una distribución espacial constante para los eventos  $f(x) = c$  con  $x \in S$ .

### ¿ Cómo generamos una muestra de este proceso ?

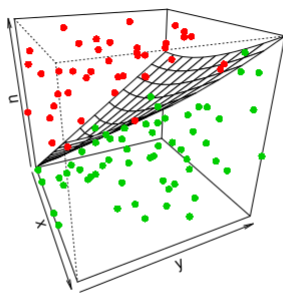
Muy facil. Si la región  $S$  es rectangular  $S = [a, b] \times [c, d]$ , basta con generar  $n$  pares de observaciones uniformes en los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  de manera independiente.

### ¿ Cómo generamos una muestra del proceso binomial para cualquier pdf ?

También es facil. Se basa en el **Principio Fundamental de la Simulación** (no, no es un curso para políticos):

Si  $(\mathbf{X}, U) \sim Unif((\mathbf{x}, u) : 0 \leq u \leq f(\mathbf{x}))$  entonces  $\mathbf{X} \sim f$

La intuición de este principio puede obtenerse rápidamente del próximo gráfico



En la figura se muestran  $N = 100$  eventos generados de manera independiente en el cubo  $[0, 1]^3$ . Si quisieramos generar eventos en el plano  $(x, y)$  que sigan una densidad  $f(x)$  que crezca cuadráticamente con ambas variables, representada por la superficie de la figura, alcanza con tomar los puntos (color verde) que quedan por debajo de la superficie.

El mismo gráfico sugiere la mecánica de simulación: la técnica de aceptación-rechazo por Monte Carlo. Generamos una a una observaciones  $\sim Unif(\mathbf{x}, u)$  en el cubo, y nos quedamos con (aceptamos) las observaciones que satisfacen  $0 \leq$

$u \leq f(\mathbf{x})$ , y rechazamos el resto. El proceso se interrumpe cuando alcanzamos  $n$  observaciones aceptadas.

El mecanismo antes descrito produce realizaciones de un proceso binomial general (bajo cualquier densidad). Nótese que la generación de observaciones en un soporte más irregular que un rectángulo se obtiene forzando a la función  $f$  a tomar valor 0 en los puntos que no están en el soporte. Un caso muy especial es la generación de casos con densidad uniforme en soportes irregulares, en los que se generan casos uniformes en el rectángulo que lo comprende, para luego rechazar las que quedan fuera del soporte.

## La intensidad de un proceso

En general, la intensidad de un proceso es una función que, dada una región particular del soporte, nos permite calcular la cantidad esperada de eventos en esa región. En particular para el proceso binomial, esa función es la densidad  $f$  del proceso. Pues la cantidad esperada de eventos en  $A \subseteq S \subseteq R^d$  es claramente  $E(N(A)) = np_A = n \int_A f(x) dx$ .

## Proceso Poisson

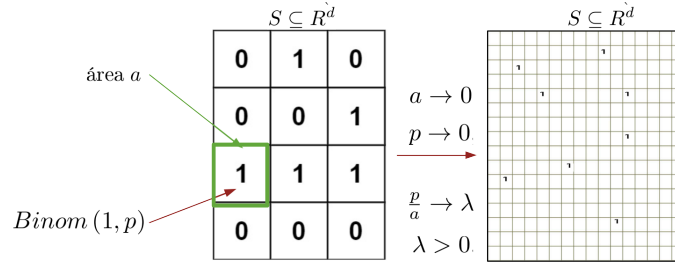
Pensemos ahora en un proceso similar al binomial, pero reemplazando la función de densidad por una función de intensidad  $\lambda$ , para el cual le pedimos que para toda región compacta  $A \subseteq S \subseteq R^d$  cumpla que:

- $N(A) \sim P(\lambda = \int_A \lambda(x) dx)$ . O sea que la cantidad de eventos debe comportarse como una poisson.
- Dado  $N(A) = n$ ,  $N(B) \sim Binom(n, \frac{\int_B \lambda(x) dx}{\int_A \lambda(x) dx})$  cuando  $B \subseteq A$ . Es decir que si condicionamos a una cantidad de eventos fija en la ventana que incluye a la región, la cantidad de eventos en la región sigue siendo binomial.

A un proceso de poisson con intensidad constante, cuya función de intensidad  $\lambda(x) = c$  no depende del espacio, se lo llama **homogeneo**.

### ¿ Cómo se llega a un proceso de Poisson con intensidad constante $\lambda$ ?

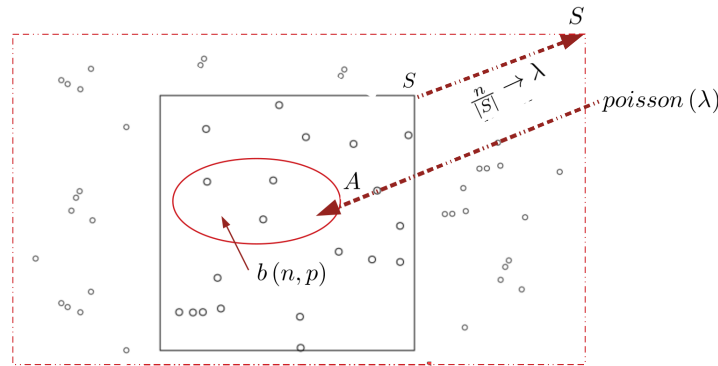
Al proceso de poisson puede llegarse de múltiples maneras, una modalidad particularmente intuitiva (al menos para mí), es partir de un proceso discreto en un soporte acotado  $S \subseteq R^d$ . Armemos una grilla regular con celdas de área  $a$ . En cada celda aleatorizamos la ocurrencia del evento mediante una distribución Bernoulli ( $Binom(1, p)$ ) con probabilidad  $p > 0$ . Ahora hagamos más fina la grilla, llevando el área de cada celda a cero ( $a \rightarrow 0$ ) y al mismo tiempo haciendo que la probabilidad de ocurrencia del evento también tienda a cero ( $p \rightarrow 0$ ), pero de tal forma que la relación entre ambos se mantenga constante y alejada del cero, es decir  $\frac{p}{a} \rightarrow \lambda$  con  $\lambda > 0$ .



En el límite de este ejercicio obtendremos un proceso de Poisson homogéneo con intensidad constante  $\lambda$ .

### ¿ Cómo se llega a un proceso de Poisson desde el Proceso Binomial ?

Partimos del proceso binomial definido sobre una región compacta  $S \subseteq R^d$ , donde se generan  $n$  eventos de manera uniforme e independiente. Tomando la región  $A \subseteq S$ , sabemos que la variable aleatoria  $N(A)$  tiene una distribución binomial  $b(n, p)$  con la probabilidad  $p = \frac{|A|}{|S|}$ . Agrandemos ahora (al infinito y más allá) la región  $S$  y la cantidad de eventos generados, pero de modo tal que  $\frac{n}{|S|} \rightarrow \lambda$  constante (la intensidad). La variable aleatoria  $N(A)$  tiene ahora una distribución *poisson* ( $\lambda$ ).



### ¿ Cómo generamos una muestra del proceso poisson para cualquier función de intensidad $\lambda$ ?

El mecanismo consta de dos pasos:

- Definimos una región compacta  $S \subseteq R^d$ , y generamos  $N \sim P(\lambda = \int_A \lambda(x) dx)$  como la cantidad de eventos en la región.
- Simulamos  $n$  (realización de la v.a.  $N$ ) eventos según un proceso binomial con densidad  $f(x) = \frac{\lambda(x)}{|S|}$

**Importante:** El proceso de poisson queda caracterizado por la funcion de intensidad  $\lambda(x)$ , la cual NO tiene porque ser una densidad. O sea, NO integra 1. Sin embargo, ambas nociones representan lo mismo, salvo una constante de proporcionalidad, pues  $f(x) | S| = \lambda(x)$ .

A modo de ejemplo mostramos en el próximo gráfico dos realizaciones de un proceso de poisson inhomogeneo. La primera con función de intensidad:

$$\lambda(x,y) = 800 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 800 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

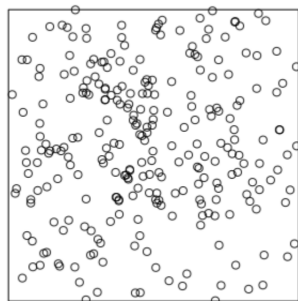
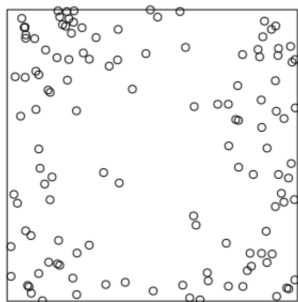
en la que la intensidad se minimiza en el centro de la ventana  $[0,1] \times [0,1]$

La segunda con función de intensidad:

$$\lambda(x,y) = 200 - 800 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 200 - 800 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

en la que la intensidad se maximiza en el centro de la ventana.

## Procesos de Poisson InHomogeneos



## Estacionariedad e Isotropía

Presentamos dos conceptos fundamentales de los procesos espaciales.

**Estacionariedad:** esta propiedad implica que podemos desplazarnos en el soporte del proceso, y el mismo se comporta de la misma manera, es decir

$$\mathbf{X} \sim \mathbf{X} + c \text{ con } c \in R^d$$

**Isotropía:** esta propiedad implica también invarianza del proceso, pero en este caso en términos de su dirección, o sea

$$\mathbf{X} \sim T\mathbf{X} \text{ con } T \in R^{d \times d} \text{ una matriz de rotación}$$

En un proceso de poisson homogeneo y en un proceso binomial con densidad constante, se cumplen ambas propiedades (salvo por efecto borde, cuidado!).

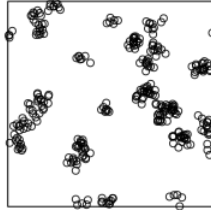
## Procesos de Thomas

Los procesos de Thomas son procesos de clusterización. A diferencia de los procesos de poisson y binomial, este nuevo proceso involucra **interacción** (dependencia) entre los eventos. Específicamente, el proceso establece una dependencia positiva entre los casos, haciendo que la localización de un evento en una zona aumente la probabilidad de localización de otros eventos en dicha zona. Este fenómeno tiende a generar clusters de forma natural. Los pasos para simular realizaciones de este proceso son:

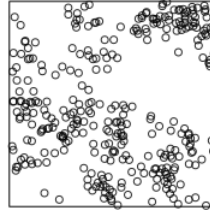
- Genrar eventos “padres” provenientes de un proceso de poisson homoganeo con función de intensidad  $\lambda$ .
- Para cada evento “padre”  $x \in R^d$  generado en el paso anterior, generar una cantidad poisson de “hijos” con cantidad esperada  $\mu$ . La localización del “hijo”  $i$ -ésimo será  $x + \epsilon_i$  con  $\epsilon_i \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$ , siendo los  $\epsilon_i$  independientes entre sí.
- Eliminar los eventos “padre”.

Loa parámetros que definen este proceso son: la tasa de intensidad  $\lambda$ , la cantidad esperada de hijos  $\mu$  y la dispersión  $\sigma$ . La siguiente figura muestra 4 realizaciones de un proceso de Thomas en las que se varían los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

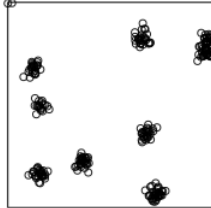
Lambda= 30 Mu= 10 Sigma= 0.02



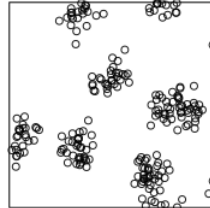
Lambda= 30 Mu= 10 Sigma= 0.05



Lambda= 10 Mu= 30 Sigma= 0.02



Lambda= 10 Mu= 30 Sigma= 0.05



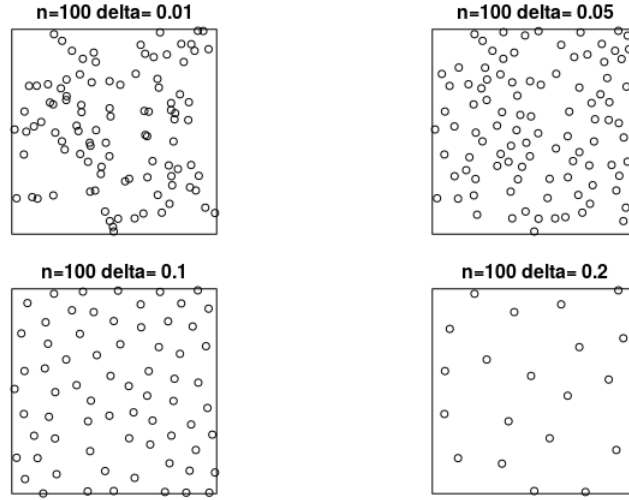


## Proceso Secuencial de Inhibición Simple

Este proceso genera eventos con patrones de distribución regular. El proceso para generar  $n$  puntos se resume en los siguientes pasos:

1. Defino una ventana  $S \subseteq \mathbf{R}^d$  donde tomará lugar el proceso puntual y una distancia  $\delta$  de inhibición entre puntos.
2. Fijo  $k = 1$  y genero un primer punto  $X_k = X_1 \in S$  aleatoriamente con densidad uniforme
3. Genero un nuevo punto  $X_{k+1}$  con densidad uniforme en  $S_{k,\delta} = \{s \in S : \|s - s_i\| > \delta, i = 1 \dots k\}$
4. Si  $k + 1 < n$  vuelvo a 3, caso contrario termino

El resultado de un proceso como este puede apreciarse en la siguiente figura.



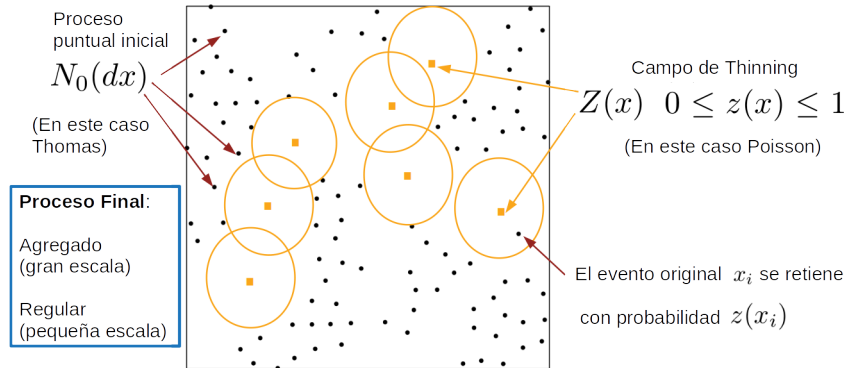
Puede observarse como al aumentar la distancia de inhibición se incrementa la regularidad en el patrón de localización de los eventos.

## Proceso de Thinning

El proceso de Thinning simula algunos procesos naturales en los que primero se crean eventos, para luego ser reducidos mediante un proceso de eliminación. El proceso se puede resumir genericamente en los siguientes pasos:

1. Generar una realización de un proceso inicial  $N_0(dx)$ .
2. Generar una realización de un segundo proceso  $Z(X)$  que define que eventos del proceso inicial serán retenidos, y cuales serán eliminados.

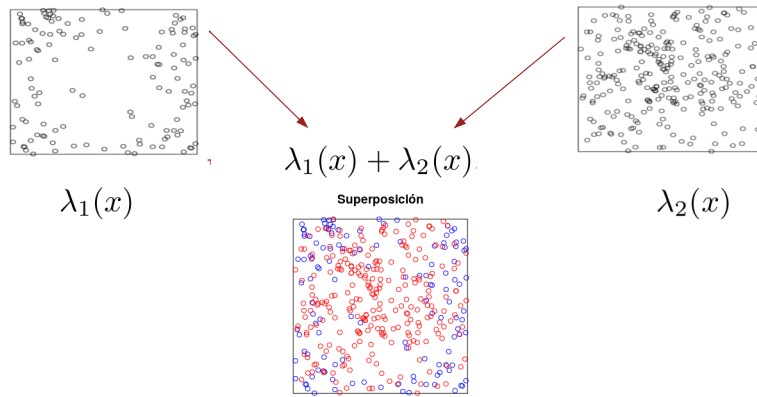
Este proceso tiene la potencialidad de generar eventos con patrones de distribución regular a pequeña escala, y con patrones de agregación a gran escala, como se representa en la próxima figura, mediante un caso particular de proceso de Thinning, en el cual el proceso inicial es un proceso de Thomas, en tanto que el segundo proceso corresponde a un proceso de Poisson homogéneo.



## Procesos de Superposición

Como se imaginarán, estos procesos refieren a los procesos resultantes de “superponer” varios procesos en forma simultanea. Un caso particular interesante es la superposición de procesos de Poisson Inhomogeneos, que resulta en otro proceso de Poisson cuya intensidad es la suma de las intensidades de los procesos intervinientes.

La figura siguiente muestra la superposición de las dos realizaciones de los procesos de Poisson inhomogeneos presentados previamente.



## Complete Spatial Randomnes (CSR)

De forma intuitiva podemos decir que un proceso que satisface la propiedad de Complete Spatial Randomness (CSR) es un proceso que genera eventos **aleatorios independientes** y de manera **uniforme** sobre un area específica.

Estos procesos involucran dos características fundamentales:

- Homogeneidad: todas las subregiones tienen la misma probabilidad de ocurrencia.
- No Interacción: la presencia de un evento en una subregión no condiciona la probabilidad de ocurrencia de otro evento.

El proceso de Poisson homogéneo es EL proceso que respeta la CSR. Por otro lado, un proceso de Poisson inhomogéneo falla en la primer característica, mientras que el proceso de Thomas incumple la segunda característica.

Es improbable que un fenómeno espacial real cumpla en forma exacta la CSR. La relevancia de CSR proviene de servir como una referencia contra la cual se comparan los procesos puntuales empíricos de interés. A continuación veremos algunas métricas que usualmente se aplican para medir la distancia de un proceso real a uno del tipo CSR.

## La Función G

La función  $G(r)$  computa la proporción de eventos para los cuales su vecino más cercano dista menos que  $r$ . Dicho de otra forma, es la función de distribución de la variable (aleatoria) “distancia al vecino más cercano”. Si denominamos  $d_{ij}$  a la distancia entre el punto  $i$  y el punto  $j$ , y  $D_i = \min_j \{d_{ij}, \forall j \neq i\}$  la distancia al vecino más cercano del evento  $i$ , la función se puede definir así:

$$G(r) = \frac{\#\{D_i : D_i \leq r\}}{n}$$

donde  $n$  es la cantidad total de eventos o puntos.

Para un proceso CSR la función  $G$  puede calcularse analíticamente, como

$$G(r) = 1 - e^{-\lambda \pi r^2}$$

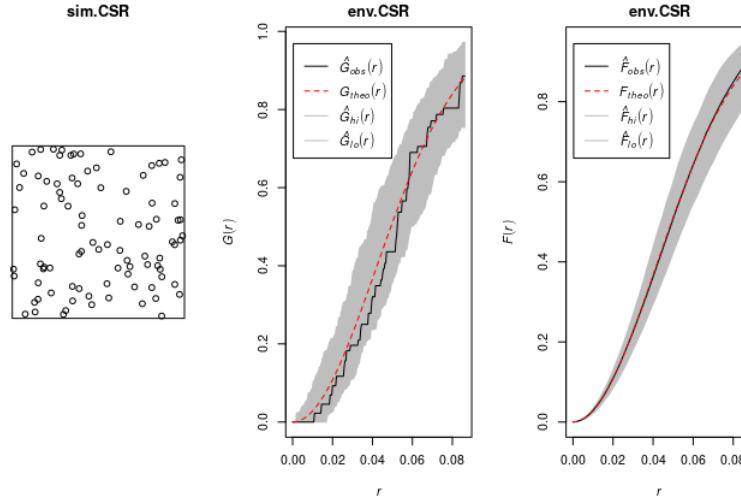
siendo  $\lambda$  la intensidad (constante, por ser SCR) del proceso.

## La Función F

Una limitación obvia de la función  $G$  es que las distancias a los vecinos más cercanos son medidas sólo desde los mismos eventos. Esto produce por un lado una discretización natural de la curva, ya que los eventos son pocos (en este caso) y no se distribuyen por toda la región. Por otro lado, las distancias a eventos desde zonas vacías no es tenida en cuenta. Una solución (o alternativa) a esto es calcular las distancias a los eventos más cercanos, pero ahora desde cualquier punto arbitrario de la región de interés. Así, la función  $F(r)$  computa la función de distribución de la variable (aleatoria) “distancia al evento más cercano” de todos los puntos de la región de análisis.

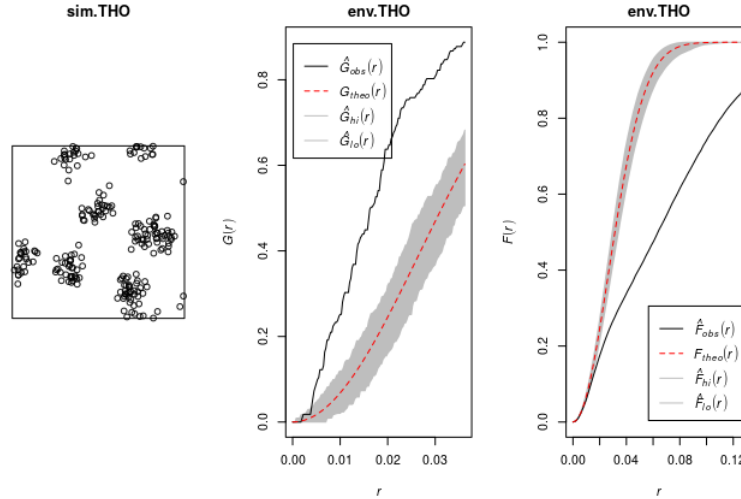
Para mostrar la utilidad de estas métricas, tomaremos algunos de los procesos vistos previamente, y calcularemos la función  $G$  en cada uno de ellos.

Para el proceso de Poisson homogéneo obtenemos:



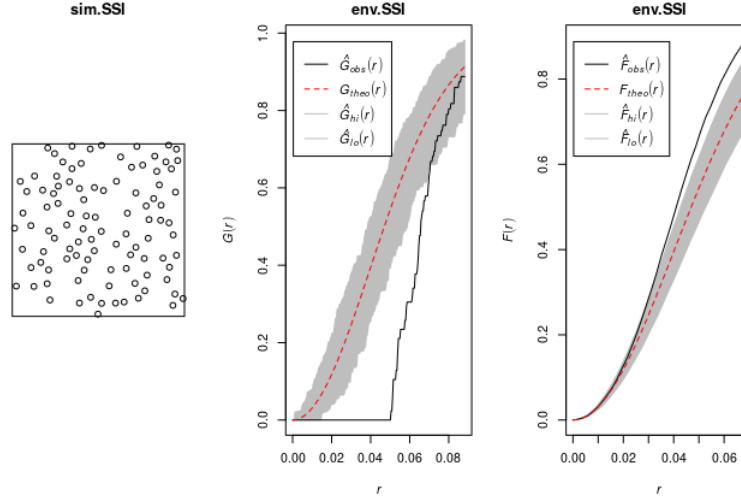
Puede verse que las funciones empíricas F y G (curvas sólidas) se mantienen bien adentro de la envolvente esperada para un proceso CSR.

Para el proceso de Thomas obtenemos:



En este caso, como es de esperar, la función G se posiciona por encima de la envolvente, pues las distancias chicas a los vecinos más cercanos son fáciles de alcanzar desde los mismos eventos, ya que se hallan fuertemente concentrados. Inversamente, la función F se posiciona por debajo de la envolvente, pues las distancias chicas a los vecinos más cercanos son menos probables de alcanzar desde puntos arbitrarios dentro de la región de análisis. Sólo cuando los puntos de la región caen cerca o dentro de los clusters, se obtienen proporciones importantes de distancias chicas.

Para el proceso de Inhibición Simple obtenemos:



Este caso es inverso al anterior, pues la función  $G$  acusa una nula proporción de eventos muy cercanos entre sí, por la inhibición. Mientras que la función  $F$  muestra proporciones altas de distancias chicas a eventos, pues la regularidad del patrón puntual le asegura a cada punto arbitrario dentro de la región un evento vecino cercano.

Nótese también que en los dos últimos casos la función  $F$  es mucho más suave que la función  $G$ , manteniendo una relación inversa con respecto al benchmark de CSR.

## La Función K de Ripley

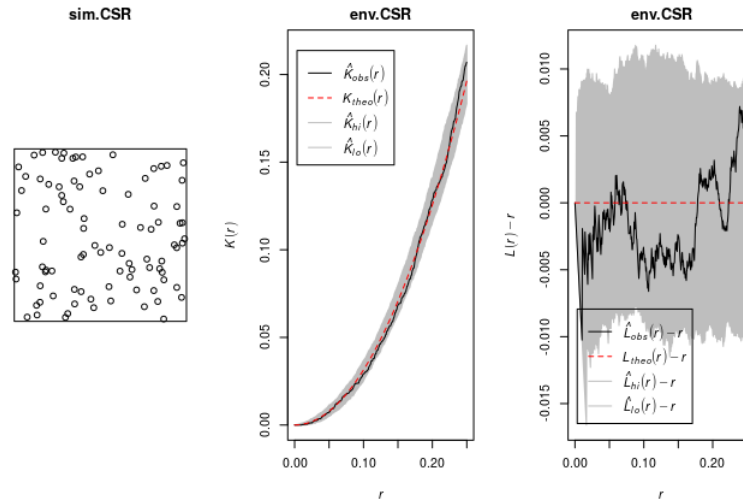
La métrica más difundida para cuantificar el alejamiento de un patrón de eventos en relación a un proceso CSR es la función  $K$  de Ripley. Esta función  $K(r)$  mide, salvo una constante, la proporción de distancias entre eventos  $d_{ij}$  que son menores a  $r$ . O sea

$$K(r) = \frac{\|A\|}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} I(d_{ij} < r) = \lambda^{-1} \sum_{i \neq j} \frac{I(d_{ij} < r)}{n-1}$$

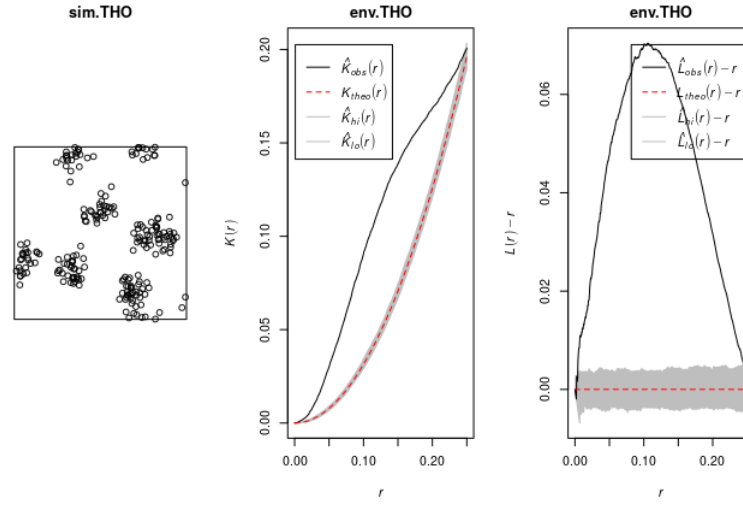
Para un proceso CSR, la función equivale a  $K(r) = \pi r^2$ . Para simplificar la comparación, se aplica una simple transformación a esta función, obteniéndose la función  $L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}}$ . Con esta última función se suele graficar  $r - L(r)$  versus  $r$ , y buscar alejamientos del valor 0.

Nuevamente, observemos para los procesos definidos previamente el comportamiento de la función.

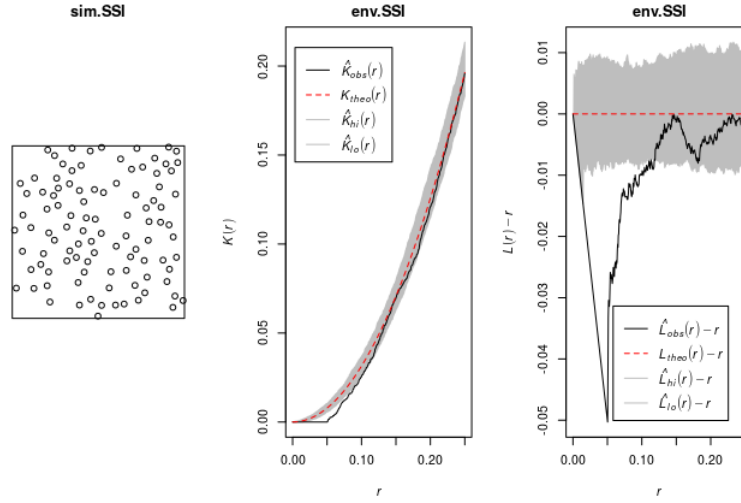
Para el proceso de Poisson homogéneo obtenemos:



Para el proceso de Thomas obtenemos:



Para el proceso de Inhibición Simple obtenemos:



Nótese que en el caso de procesos de concentración, la función empírica queda por encima de la envolvente, ya que preponderan las distancias pequeñas. En tanto que en las situaciones de regularidad, las distancias muy cortas están subrepresentadas, como en el proceso de inhibición, en el que se excluyen vecinos muy cercanos.



## Estimación de la Intensidad del Proceso

Si tuviéramos la sospecha que el proceso generador de los eventos es No homogéneo, como es de esperar en la mayoría de los casos, surge la necesidad de inferir la función de intensidad subyacente al proceso.

La técnica más difundida de estimación de la intensidad es la de KDE (Kernel Density Estimation). El estimador se define como

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{\|x - x_i\|}{h}\right)$$

donde  $x$  es el punto de estimación,  $h$  es un escalar que sirve para regular la granularidad de la estimación (ventana o bandwidth), y  $K$  es una función positiva de núcleo que sirve para ponderar las observaciones, dándole mayor importancia a las más cercanas al punto donde se está estimando la intensidad.

Este estimador de la intensidad, es equivalente al estimador de densidad por núcleos que se usa para estimar densidades. La única diferencia es la falta de la constante  $\frac{1}{n}$  que asegura que sea una densidad (que integre 1).

El kernel más utilizado es el gaussiano. Otro kernel muy usual para el cálculo de intensidades en estadística espacial es el kernel cuadrático:

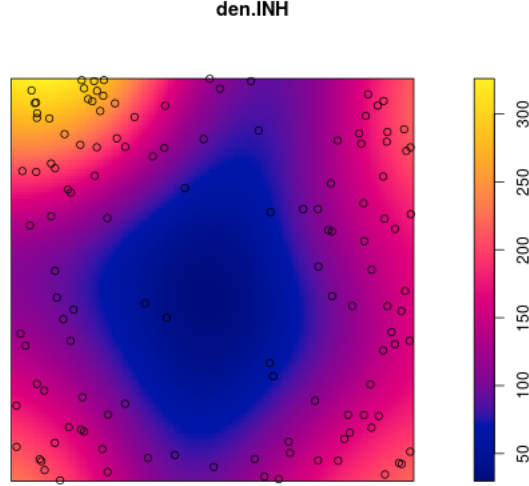
$$K(u) = \begin{cases} \frac{3}{\pi} (1 - \|u\|^2)^2 & u \in (-1, 1) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Veamos ahora como se comporta el estimador de intensidad por núcleos en algunas de las realizaciones de procesos vistos antes. Empecemos con el proceso de Poisson Inhomogéneo.

Estimamos la intensidad del patrón de puntos que fue generado con función de intensidad:

$$\lambda(x, y) = 800 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 800 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

en la que la intensidad se minimiza en el centro de la ventana  $[0, 1] \times [0, 1]$ , con un valor de 0, y se maximiza hacia los bordes, en donde alcanza valores que oscilan entre 200 y 400 (en las esquinas). El siguiente gráfico muestra el resultado de aplicar el estimador KDE con un núcleo normal y un valor de ventana de 0.15.



Se aprecia que la estimación es bastante precisa. Pero de donde sacamos este valor de ventana  $h = 0.15$  ? Una modalidad usual y efectiva es calcular el  $h$  óptimo por validación cruzada de un elemento (LOOCV). Se aproxima el error (esperado) entre la intensidad estimada y la real para diferentes valores de  $h$  y se elige el que arroje un menor error.

La idea es hallar un valor de  $h$  que minimice el siguiente error

$$Error(h) = \int \left( \widehat{\lambda}_h(x) - \lambda(x) \right)^2 dx$$

que es equivalente a

$$Error(h) = \int \widehat{\lambda}_h^2(x) dx - 2 \int \widehat{\lambda}_h(x) \lambda(x) dx + \int \lambda^2(x) dx$$

como el último término no depende de  $h$  podemos eliminarlo, y nos queda

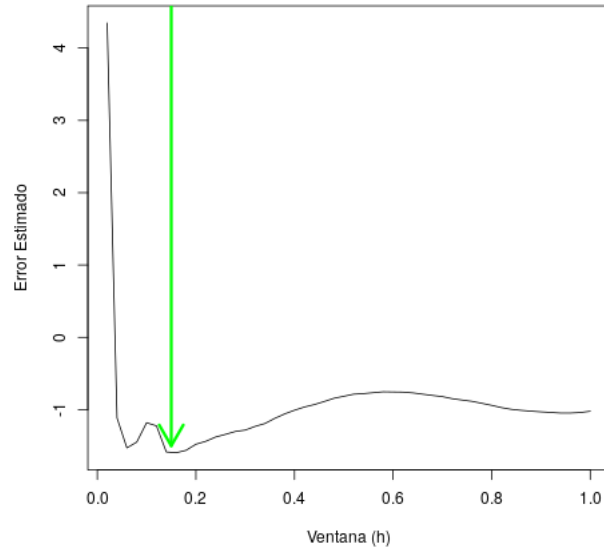
$$Error^*(h) = \int \widehat{\lambda}_h^2(x) dx - 2 \int \widehat{\lambda}_h(x) \lambda(x) dx$$

que puede ser aproximado por

$$\widehat{Error}^*(h) = \int \widehat{\lambda}_h^2(x) dx - 2 \sum_i \widehat{\lambda}_h^{-i}(x_i) \frac{1}{n} dx$$

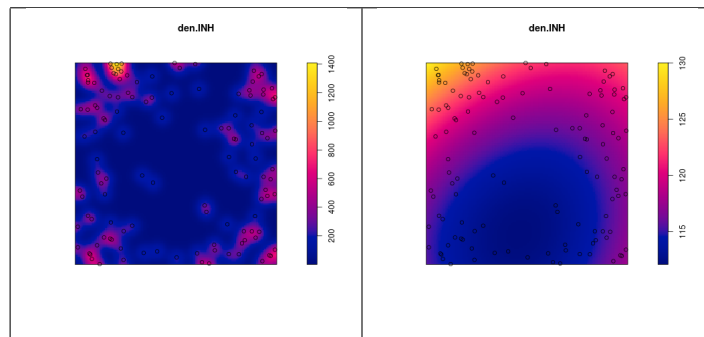
donde  $\widehat{\lambda}_h^{-i}(x_i)$  es la estimación (sin la observación  $i$ -ésima) de la intensidad evaluada en la observación  $i$ .

En nuestro caso, el gráfico de la estimación del error  $\widehat{Error}^*(h)$  por LOOCV es (la flecha verde señala el valor  $h = 0.15$ )

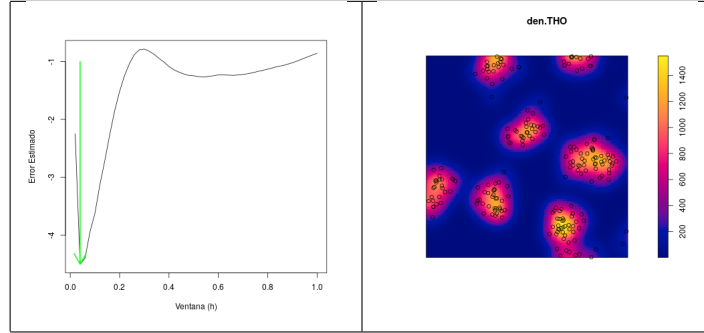


Claramente, ventanas más grandes (y muchos más chicos) aumentarían el error.

Veamos dos situaciones desfavorables, una con una ventana muy chica (panel izquierdo,  $h = 0.03$ ), y la otra con un valor de ventana exageradamente grande (panel derecho,  $h = 0.6$ ).



Veamos ahora que sucede con la estimación de la intensidad del patrón de puntos generado por el proceso de Thomas.



## El Índice de Moran

Mide la autocorrelación espacial de una variable. Se define

$$I = \frac{n}{\sum_{i,j} W_{ij}} \frac{\sum_{i,j} W_{ij} (X_i - \bar{X}) (X_j - \bar{X})}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$$

## El Variograma

Sea un proceso espacial  $Z(s)$ . Tomemos dos elementos del proceso, ubicados en  $s_1$  y en  $s_2$ . El variograma mide la dependencia espacial entre estos elementos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \gamma(s_1, s_2) &= \text{Var}(Z(s_1) - Z(s_2)) = \\ &= E(Z(s_1) + E(Z(s_1)) - Z(s_2) - E(Z(s_2)))^2 \end{aligned}$$

Si el proceso es homogéneo entonces  $E(Z(s_1)) = E(Z(s_2))$  por lo que

$$\gamma(s_1, s_2) = E(Z(s_1) - Z(s_2))^2$$

Si el proceso es estacionario e isotrópico entonces podemos eliminar los índices y pensar que  $Z(s_1) = Z(s)$  y  $Z(s_2) = Z(s+h)$ , por lo que

$$\gamma(s_1, s_2) = E(Z(s) - Z(s+h))^2 = \gamma(h)$$

Es claro que  $\gamma(0) = 0$  y  $\gamma(h) \geq 0 \forall h$ .

Por supuesto que si contamos con una sola realización del proceso, la expresión anterior no será de mucha utilidad, pues sólo contamos con finitos valores de  $h$  para calcular esta expresión, así que tendremos que definir un estimador empírico del variograma, o suponer algún modelo paramétrico para el mismo.

# Interpolación y Predicción Espacial

## Kriging

Es una técnica de predicción espacial para procesos marcados que se originó en la industria de la minería. La idea principal es la de descomponer a un proceso espacial en dos componentes. Un primer componente de variación espacial de gran alcance o de alcance global  $\mu(S)$ . Un segundo componente de variación espacial de corto alcance o de alcance local  $\epsilon(S)$ . Así el fenómeno se puede expresar

$$Z(S) = \mu(S) + \epsilon(S)$$

en donde la componente  $\mu(S)$  suele incorporar efectos de predictoras, y la componente  $\epsilon(S)$  se encarga de modelar los efectos de la autocorrelación espacial.

A grandes rasgos existen tres tipos de kriging distintos, cada uno obedeciendo a diferentes supuestos sobre la primer componente.

Lo que se conoce con Simple Kriging asume una intensidad media  $\mu$  constante y conocida, o sea

$$Z(S) = \mu + \epsilon(S)$$

En el caso que podamos suponer una intensidad media constante pero desconocida  $m$ , tendremos Ordinary Kriging

$$Z(S) = m + \epsilon(S)$$

Finalmente, el modelo más útil y realista, consiste en suponer una intensidad media no constante, dependiente (potencialmente) de predictoras  $X$

$$Z(S) = X(S)\beta + \epsilon(S)$$

## El Modelo

El modelo de kriging puede ser considerado un caso particular del modelo que motiva a la técnica Generalized Least Squares (GLS), que expande al modelo lineal al caso en el que los errores NO son independientes. En nuestro caso, es de esperar que los errores muestren una estructura de autocorrelación dependiente de la distancia de las localizaciones de las observaciones.

La predicción puntual que plantea kriging puede escribirse así

$$Z_0 = X_0\beta + vV^{-1}(Z - X\beta)$$

donde

$Z_0$  es la respuesta a predecir

$X_0$  es el vector de predictoras asociadas a la respuesta  $Z_0$

$\beta$  es el vector de coeficientes que capta el efecto de las predictoras

$v$  es el vector de covarianzas entre  $Z_0$  y  $Z$

$V$  es la matriz de covarianzas de los errores

De la expresión surge claramente que la predicción contempla dos efectos, el efecto de las predictoras en el punto de interés  $X_0\beta$  y el efecto que los residuos  $(Z - X\beta)$  tienen, dependiendo de las distancias al punto en cuestión, esto último captado por los pesos de kriging  $vV^{-1}$ . ótese que ante la falta de autocorrelación el segundo término se anula, y el predictor coincide con un simple predictor lineal.