PROYECTO FINAL: LABORATORIO DE SEÑALES Y SISTEMAS

MURRIETA VILLEGAS, ALFONSO
PALACIOS RODRÍGUEZ DIEGO OCTAVIO
REZA CHAVARRIA SERGIO GABRIEL
VALDESPINO MENDIETA JOAQUÍN

MARCO TEÓRICO

- Sistemas modelados mediante Ecuaciones Diferenciales

- La Transformada de Laplace:
  - Se utiliza en sistemas continuos
  - $\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k} = \frac{Salida}{Entrada}}$

- La Transformada Z:
  - Se utiliza en sistemas **discretos.**
  - $Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0}{A(z)}$ **=>** $Y(z) = X(z)H(z)$

MODELO A ANALIZAR:

- Ecuación Diferencial que modela a un Motor de Corriente Directa

$$T_m(t) = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt}$$

- Considerando los siguientes valores:

$$J_m = 6.68 \qquad B_m = 12$$

ESTABILIDAD DEL SISTEMA.

- La estabilidad se determina mediante la ubicación de los polos:

$$\boldsymbol{J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)}$$

- Uso de Transformada de Laplace:

$$\boldsymbol{J_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\}} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$\boldsymbol{B_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\}} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{T_m(t)\}} = T_m(s)$$

- Función de transferencia:

$$\theta_m(s) = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s} = \frac{T_m(s)}{s^2 + \frac{B}{J_m}\,{}_m s} \quad \boldsymbol{=> s^2 + \frac{B_m}{J_m} s} = 0$$

ESTABILIDAD DEL SISTEMA.

- Sustituyendo: $J_m = 6.68 \qquad B_m = 12$

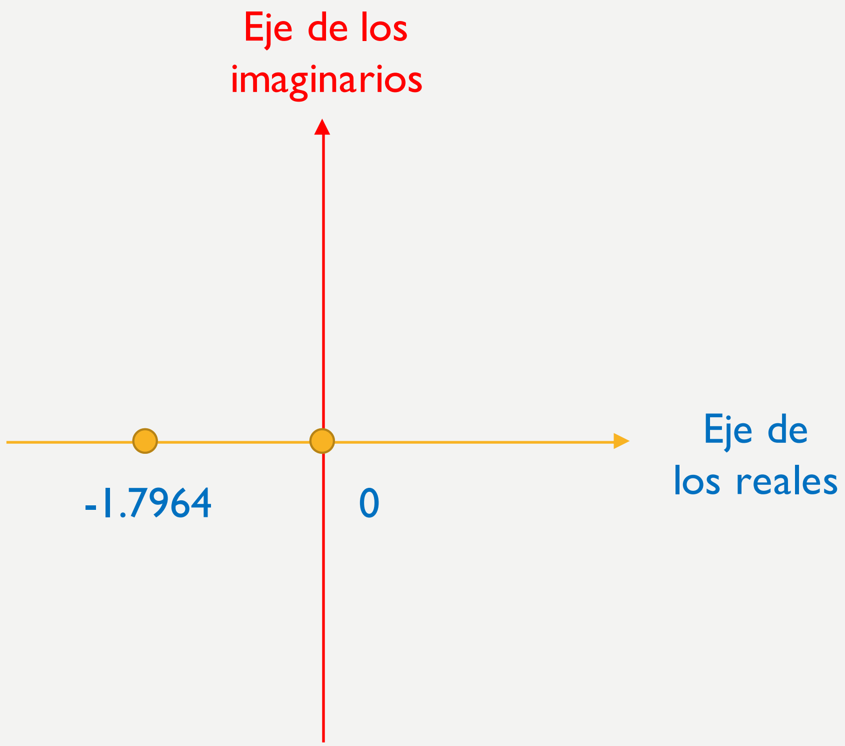
$$s^2 + \frac{12}{6.68}s = 0$$

- Polos del sistema:

$$s = 0; \quad s + \frac{12}{6.68} = \mathbf{0}$$

$$s = -\frac{12}{6.68} = \mathbf{-1.7964}$$

- Como uno de los polos está en 0, se puede concluir que el sistema es **críticamente estable**.



RELACIÓN ENTRADA-SALIDA

Retomando partes de la ED transformadas:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)$$

$$J_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\{T_m(t)\} = T_m(s)$$

- La relación entrada-salida de un sistema está dada por la función de transferencia:

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s} = \frac{1}{s^2 + \frac{B_m}{J_m} s}}$$

RESPUESTA IMPULSO.

- Aplicando respuesta en la ED:

$$\boldsymbol{J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \delta(t)}$$

- Aplicando Transformada de Laplace:

$$J_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1}$$

magia matemática …

$$\mathcal{L}^{-1}\{\theta_m(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\theta_m(t) = \frac{1}{\left(\frac{B_m}{J_m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right) = \frac{J_m}{B_m}\left(1 - e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right)}$$

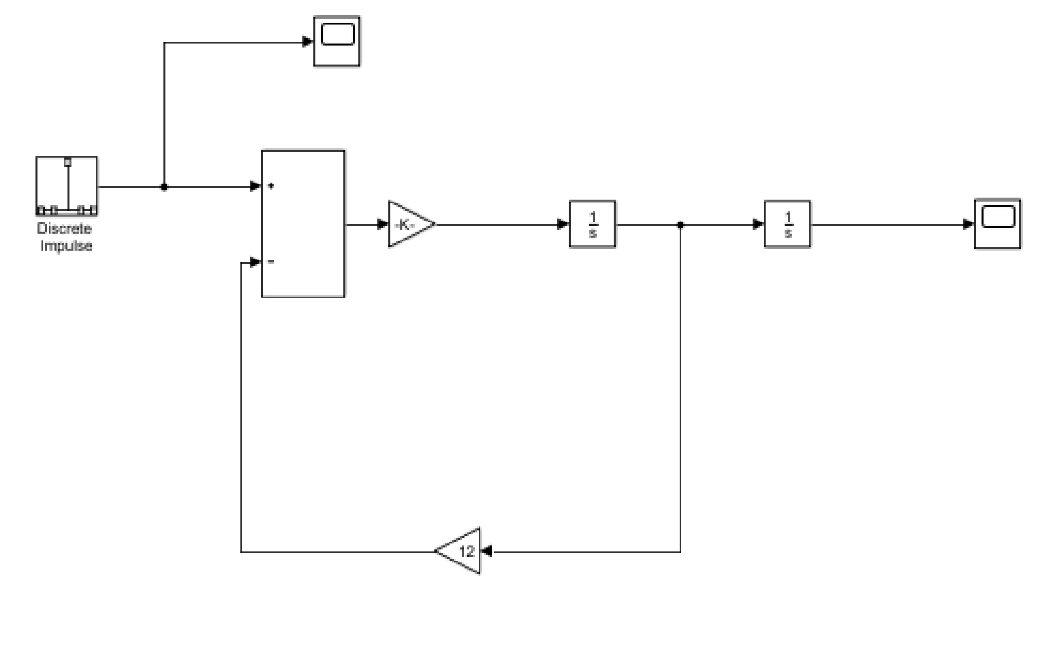
RESPUESTA IMPULSO.

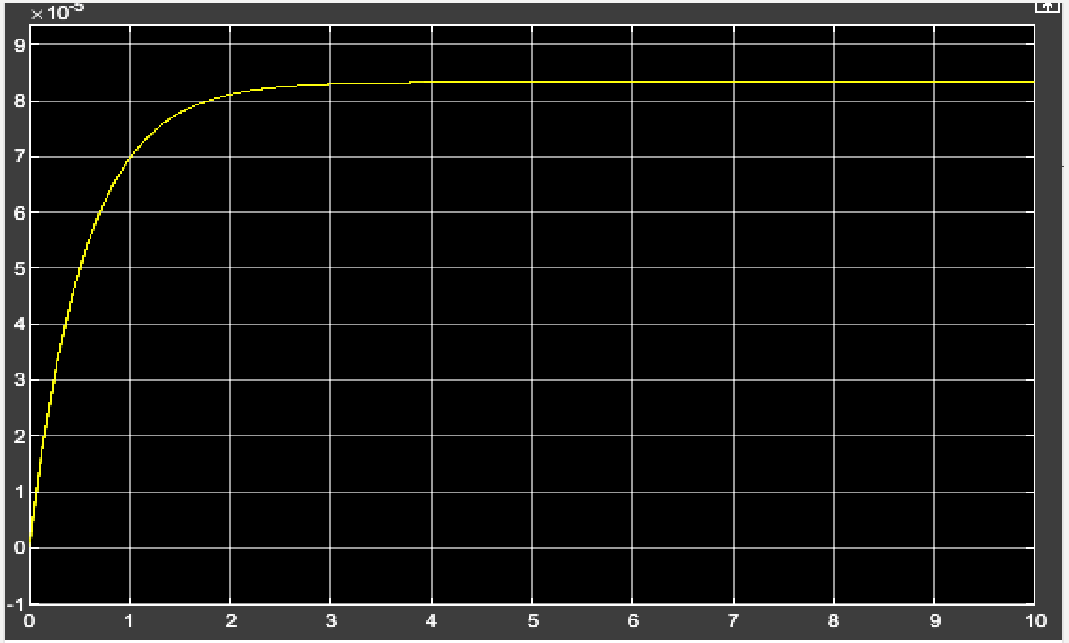
$J_m = 6.68 \qquad B_m = 12$

- Sustituyendo valores:

$$\theta_m(t) = \frac{6.68}{12}\left(1 - e^{-\frac{12}{6.68}t}\right) = 0.55666\left(1 - e^{-1.7964t}\right)$$

- La respuesta o comportamiento es sobre amortiguada





RESPUESTA ESCALÓN

- Aplicando respuesta en la ED:

$$\boldsymbol{J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt}} = u_{-1}(t)$$

- Aplicando Transformada de Laplace:

$$J_m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\{u_{-1}(t)\} == \frac{1}{s}$$

magia matemática …

$$\theta_m(t) = \frac{1}{\left(\frac{B_m}{J_m}\right)^2}\left(\frac{B_m}{J_m}t - 1 + e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right) = \frac{{J_m}^2}{B_m^2}\left(\frac{B_m}{J_m}t - 1 + e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right)$$

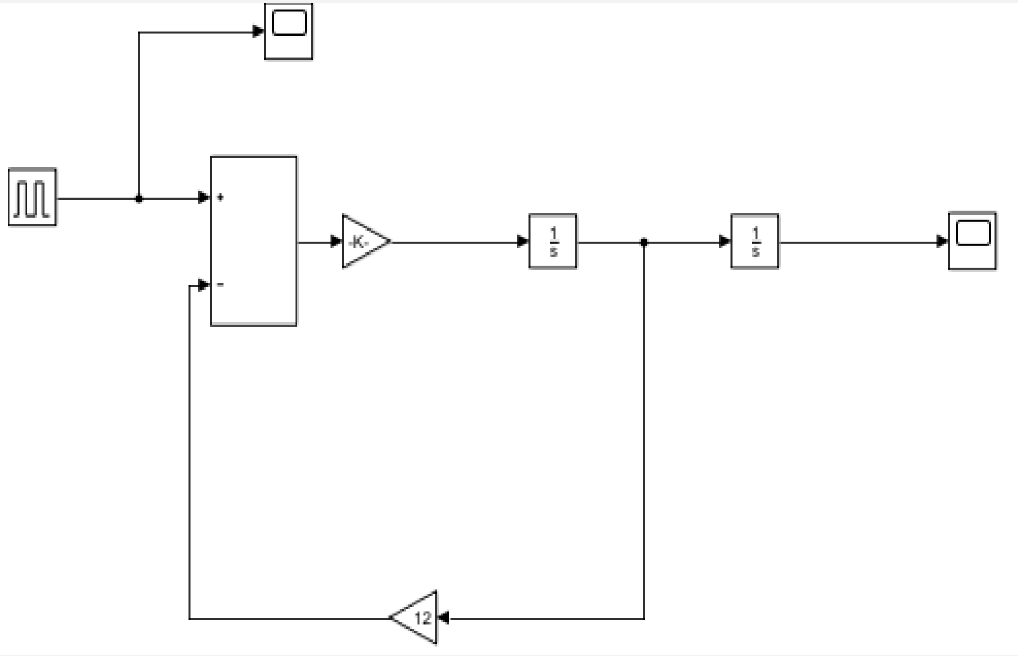
RESPUESTA ESCALÓN

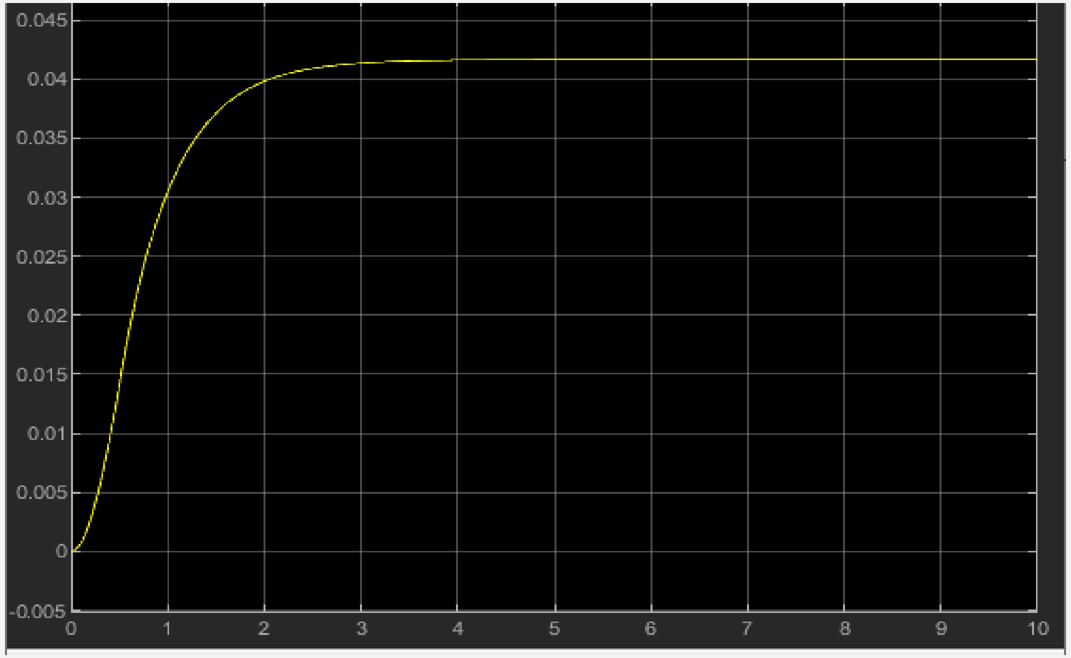
$$J_m = 6.68 \qquad B_m = 12$$

- Sustituyendo valores:

$$\theta_m(t) = 0.3098\left(1.7964t - 1 + e^{-1.7964t}\right)$$

- La respuesta o comportamiento es críticamente amortiguada





CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA MEDIANTE VALORES CARACTERÍSTICOS

- Modelo del Motor de Corriente Directa

$$\boldsymbol{J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)}$$

- Normalizado ED:

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)$$

- Ecuación Homogénea:

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m}{dt} = 0$$

- Polinomio característico:

$$\lambda^2 + \frac{B_m}{J_m}\lambda = 0$$

CARACTERIZACIÓN DEL SISTEMA MEDIANTE VALORES CARACTERÍSTICOS

- Sustituyendo valores:

$$\lambda^2 + 1.7964\lambda = 0$$

- Valores característicos:

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1.7964$$

- Los valores característicos sirven para caracterizar la del sistema

NOTA: Existe relación entre éstos y los polos de la función de transferencia:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 & s_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 1.7964 & s_2 &= -1.7964 \end{aligned}$$

- Al tener **raíces diferentes y negativas**, el sistema tiene un comportamiento **sobre amortiguado.**

SISTEMA EN SU FORMA DISCRETA

- Aproximaciones respecto a la primera y segunda derivada:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} \qquad \frac{d^2\, y(t)}{dt^2} \approx \left(\frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{{T_s}^2}\right)$$

- Obteniendo modelo a través del uso de ecuaciones en diferencias:

$$\theta_m(n)(J_m + B_m) + \theta_m(n-1)(-2J_m - B_m) + \theta_m(n-2)(J_m) = T_m(n)$$

- **Función de Transferencia** (Domino de Z):

$$\theta_m[z]((18.68) + z^{-1}(-25.36) + z^{-2}(6.68)) = T_m(z)$$

$$\frac{\theta_m[z]}{T_m[z]} = \frac{1}{((18.68) + z^{-1}(-25.36) + z^{-2}(6.68))}$$

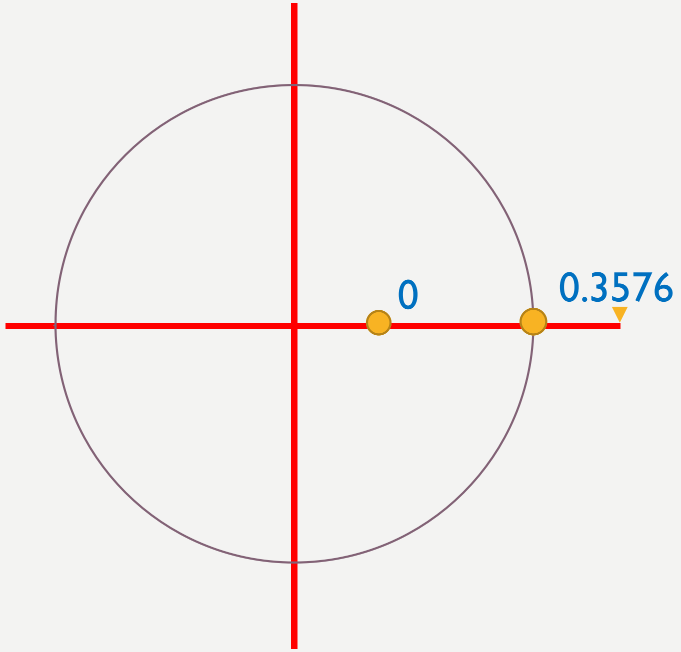
$$\boldsymbol{H[z] = \frac{z^2}{(18.68z^2 - 25.36z + 6.68)}}$$

ESTABILIDAD DEL SISTEMA DISCRETO

- Obtención de los polos a través de la función de transferencia:

$$z_1 = 1 \qquad\qquad z_2 = 0.3576$$

- El sistema es **críticamente estable** debido a que uno de los polos se encuentra en la frontera del **circulo unitario**.

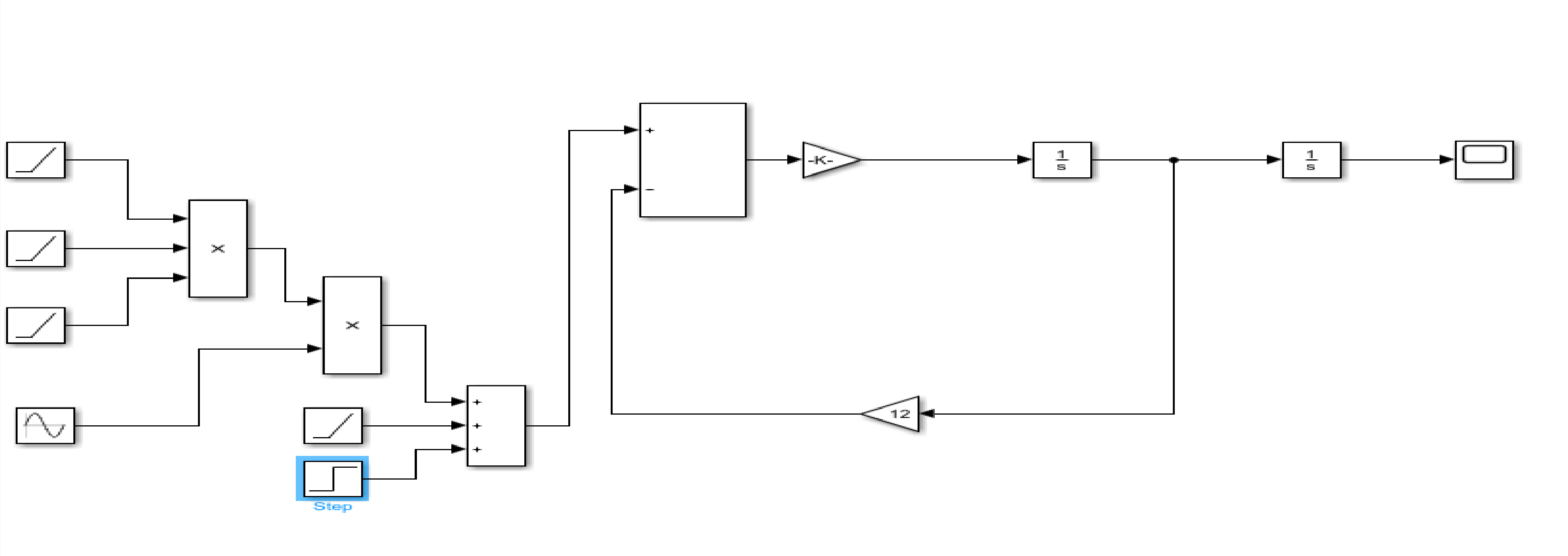


ANÁLISIS DE LAS ENTRADAS PROPUESTAS

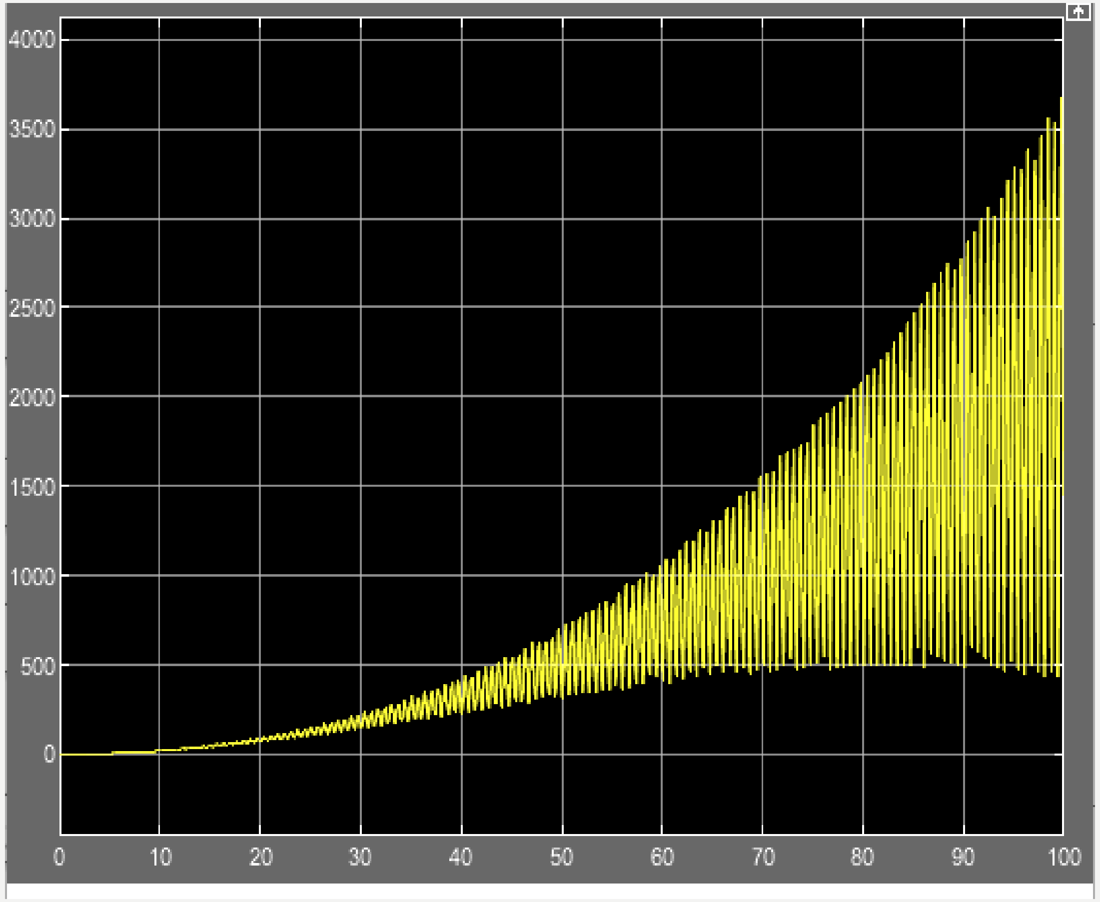
- Entrada a considerar:

$$E_1 = t^3 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + t - 2$$

- Simulación mediante Simulink



ENTRADA 1 Y SALIDA



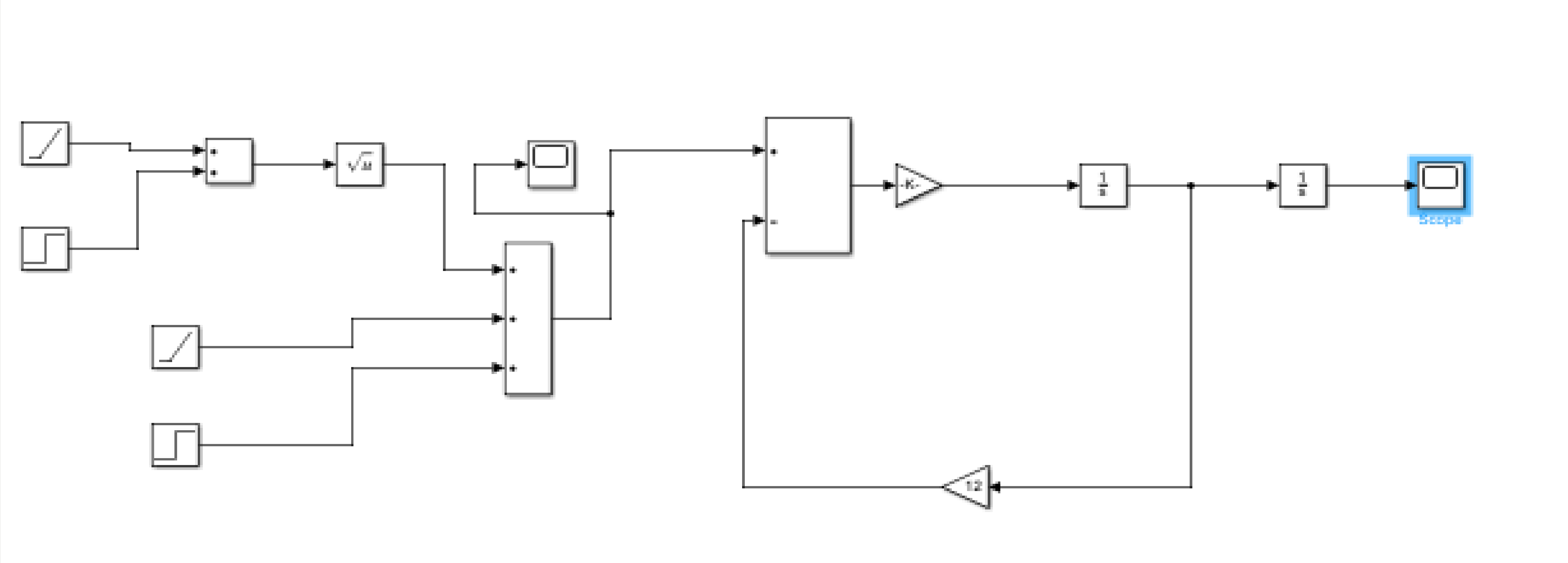
$$E_1 = t^3 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + t - 2$$

SIMULACIÓN DE LA ENTRADA 2

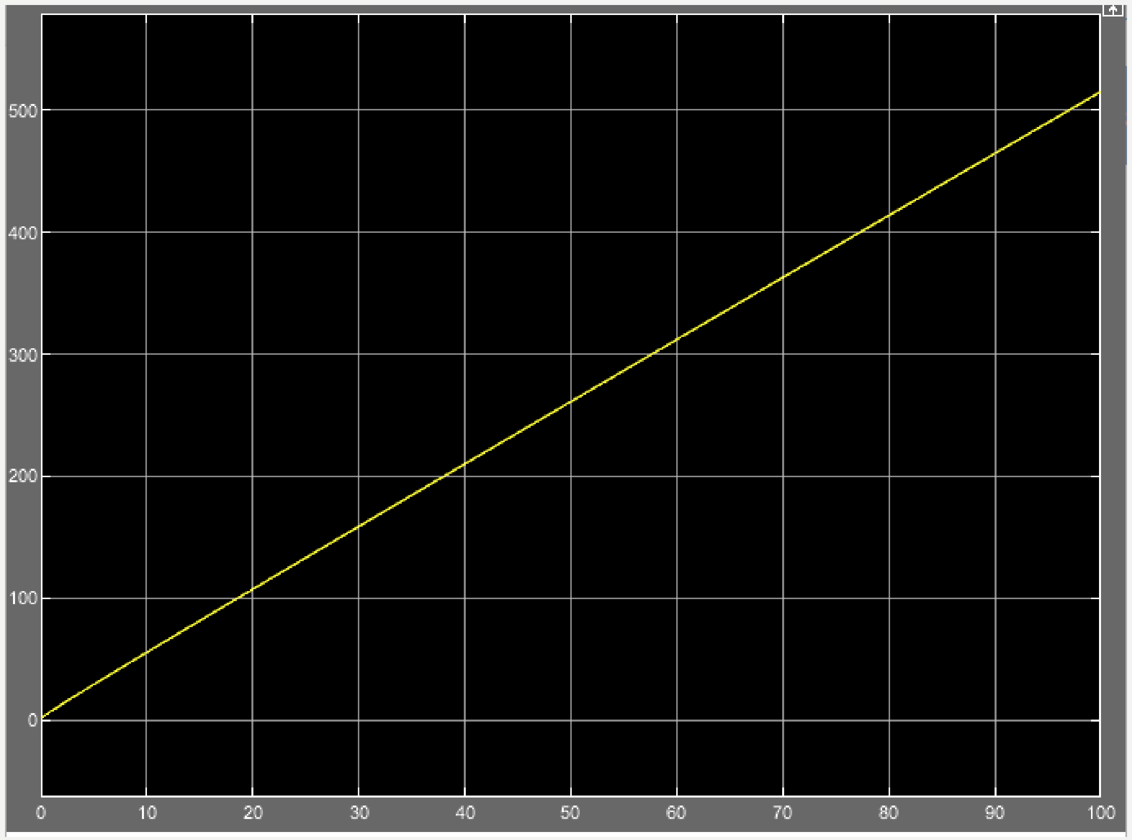
- Entrada a considerar:

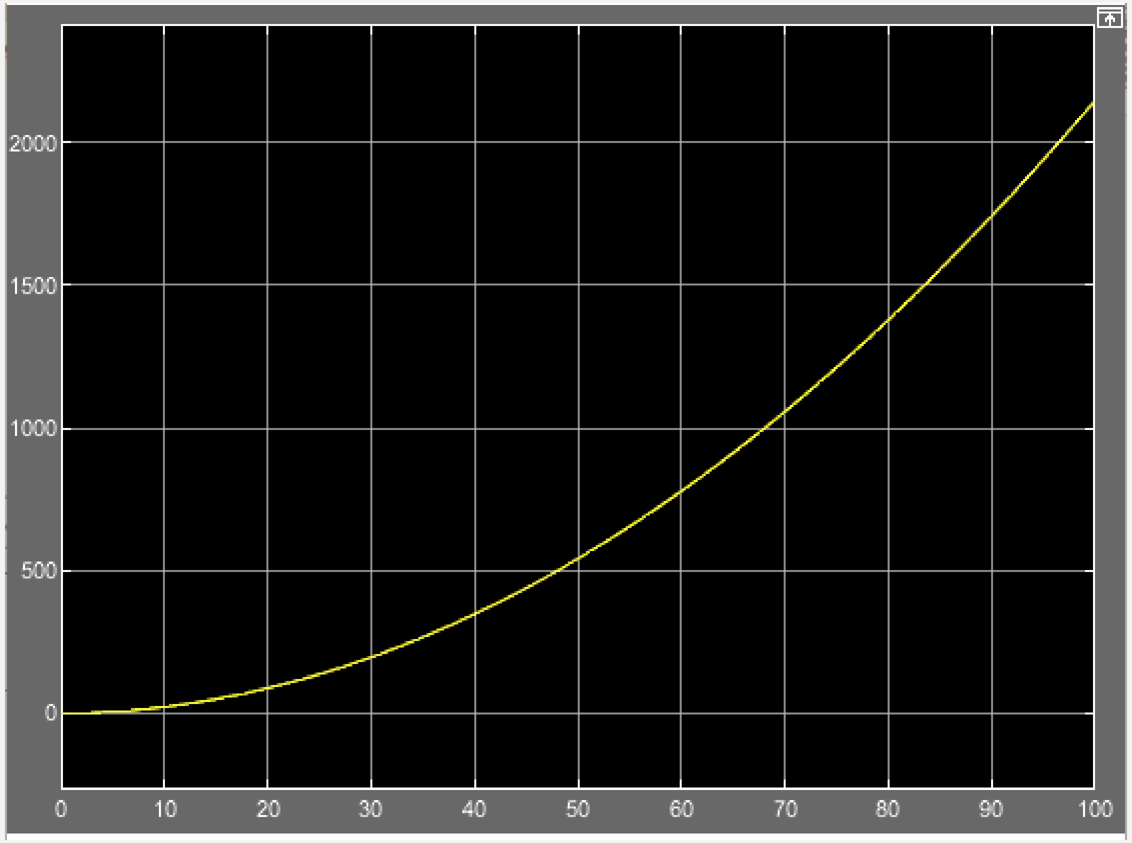
$$E_2 = \sqrt{2t + 2\cos(10\pi)} + 5t - 3$$

- Simulación mediante Simulink



ENTRADA 2 Y SU SALIDA





$$E_2 = \sqrt{2t + 2\cos(10\pi)} + 5t - 3$$

CONCLUSIONES

- Independientemente de que tengamos el **sistema en su forma continua o discreta**, la estabilidad obtenida es la misma.
  - Considerar la estabilidad de un sistema tiene una ubicación distinta
- Los **valores característicos** pueden ayudar a caracterizar a nuestro sistema y comprobar el comportamiento del sistema ante respuestas como el escalón o impulso.
- Destacar la importancia de materias como matemáticas avanzadas, algebra lineal y sobre todo ecuaciones diferenciales.
- Uso de la **velocidad angular** para poder hacer estable el modelo del motor en DC

REFERENCIAS

- Oppenheim A. Señales y sistemas. Prentice hall Hispanoamerica. México.
- Gloria Mata H. Víctor M. Sánchez. Análisis de sistemas y señales con computo avanzado. DGAPA UNAM, facultad de Ingeniería.
- La Transformada Z. M.I. Ricardo Garibay Jiménez Facultad de Ingeniería UNAM.