ELO211: Sistemas Digitales

Tomás Arredondo Vidal
1er Semestre – 2007

Este material está basado en:

- textos y material de apoyo: *Contemporary Logic Design 1st / 2nd* edition. Gaetano Borriello and Randy Katz. Prentice Hall, 1994, 2005
- material del curso ELO211 del Prof. Leopoldo Silva
- material en el sitio http://es.wikipedia.org

5-Mapas de Karnaugh

- 5.1 Representación y mapas de diferentes dimensiones
- 5.2 Generalizaciones sobre mapas de Karnaugh
- 5.3 Ejemplos de uso de mapas de Karnaugh

Representación

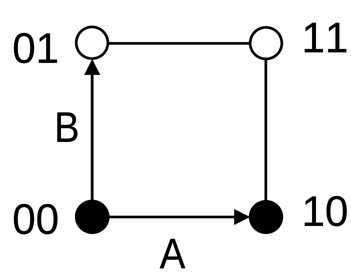
- Los mapas de Karnaugh también permiten visualizar las funciones booleanas en espacios n-dimensionales discretos.
- Las representaciones gráficas están restringidas a valores de n pequeños (<6).

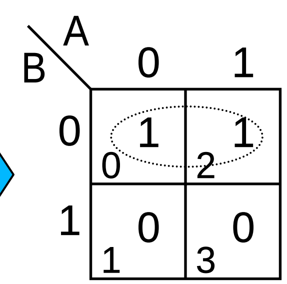
Representación

- Existe una relación uno a uno entre un mapa y una tabla de verdad.
- El mapa también puede ser considerado una representación equivalente a los diagramas de Venn.
- Una tabla tiene un renglón por cada mintérmino; y un mapa, como se verá, tiene una celda (o casillero o cuadro) para cada mintérmino.

Representación

- Un mapa de Karnaugh es una mapa aplanado de un N-Cubo
  - K-mapas están doblados (conectados) alrededor de sus bordes
  - difícil dibujar y visualizar para mas de 4 dimensiones
  - casi imposible para mas de 6 dimensiones
- Alternativa a tabla de verdad para ayudar a visualizar minimizaciones (adyacencias)
  - ayudan a aplicar el teorema de minimización
  - minterminos o elementos del on-set con solo un cambio de una variable son adyacentes (y se pueden agrupar para minimizar)
  - Ejemplo:

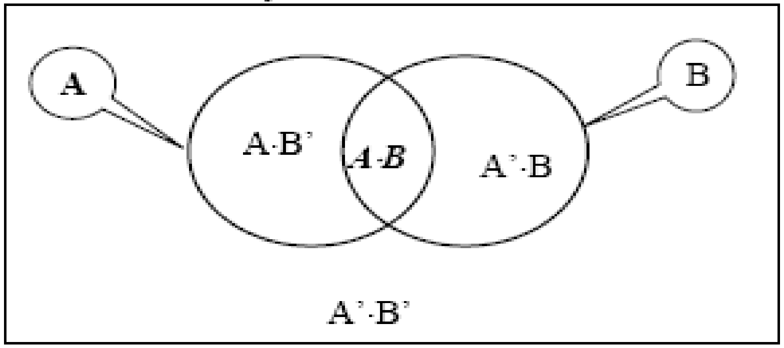




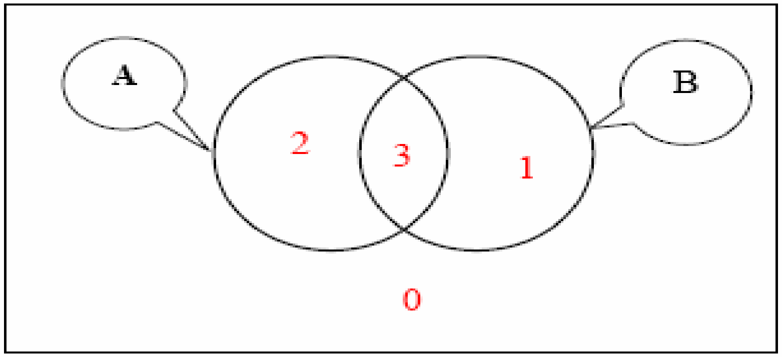
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

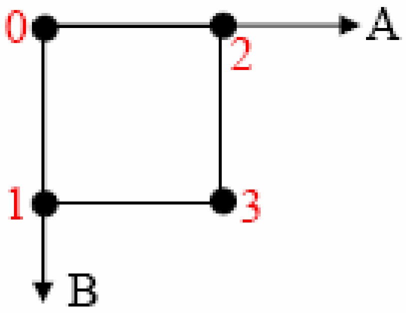
Representación

- Consideremos un diagrama de Venn para dos variables A y B:



- Si el orden de las variables para la asignación del código de mintérminos es AB, se puede rotular el diagrama con el número decimal asociado al mintérmino.
- Resultan áreas desiguales para cada mintérmino; y el gráfico refleja las adyacencias entre mintérminos, pero no tan claramente como un 2-cubo.





Representación

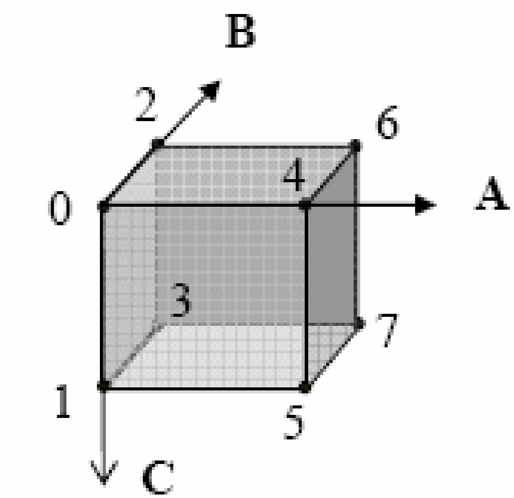
- La identificación de los cuadros con el número del mintérmino, depende de la elección del orden de las variables que se haya elegido para la representación decimal equivalente.
- La representación de funciones mediante mapas, se logra marcando los mintérminos presentes con un "1"; los ceros suelen omitirse.
- Los códigos de los mintérminos quedan ordenados según el código de Gray.
- Solo 1 bit cambia entre celdas adyacentes.
- Para mapas de Karnaugh de 2 variables f(A, B):

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B \ A	0	1
0	$_{0}$ 1	$_{2}$ 1
1	$_{1}$ 0	$_{3}$ 0

Representación

- Para mapas de Karnaugh de 3 variables f(A,B,C), partiendo del n-Cubo y aplanándolo:

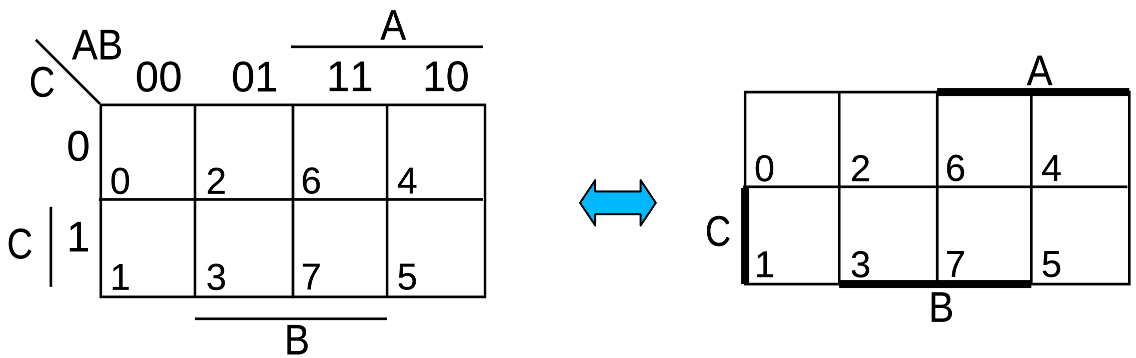


C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

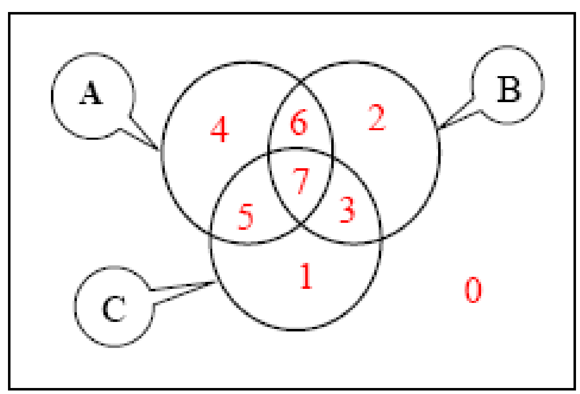
- Nótese que m0 es adyacente a m1, m2 y m4.
- Cuales mintérminos son adyacentes a m6?

Representación

- En general se puede o no escribir el valor de los codigos de los mintérminos:

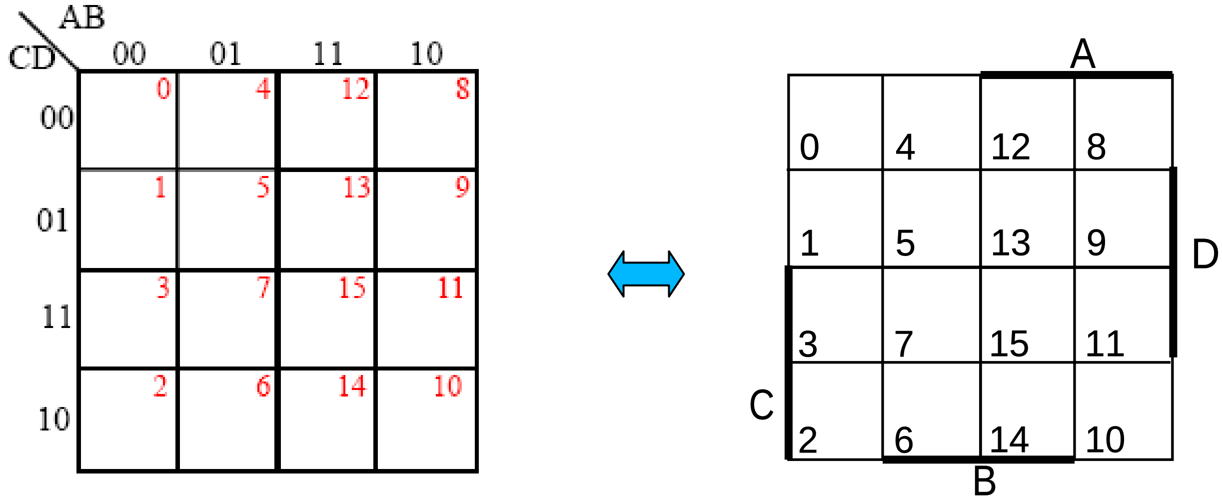


- Equivalen al siguiente diagrama de Venn:



Representación

- El mapa de Karnaugh de 4 variables f(A,B,C,D):



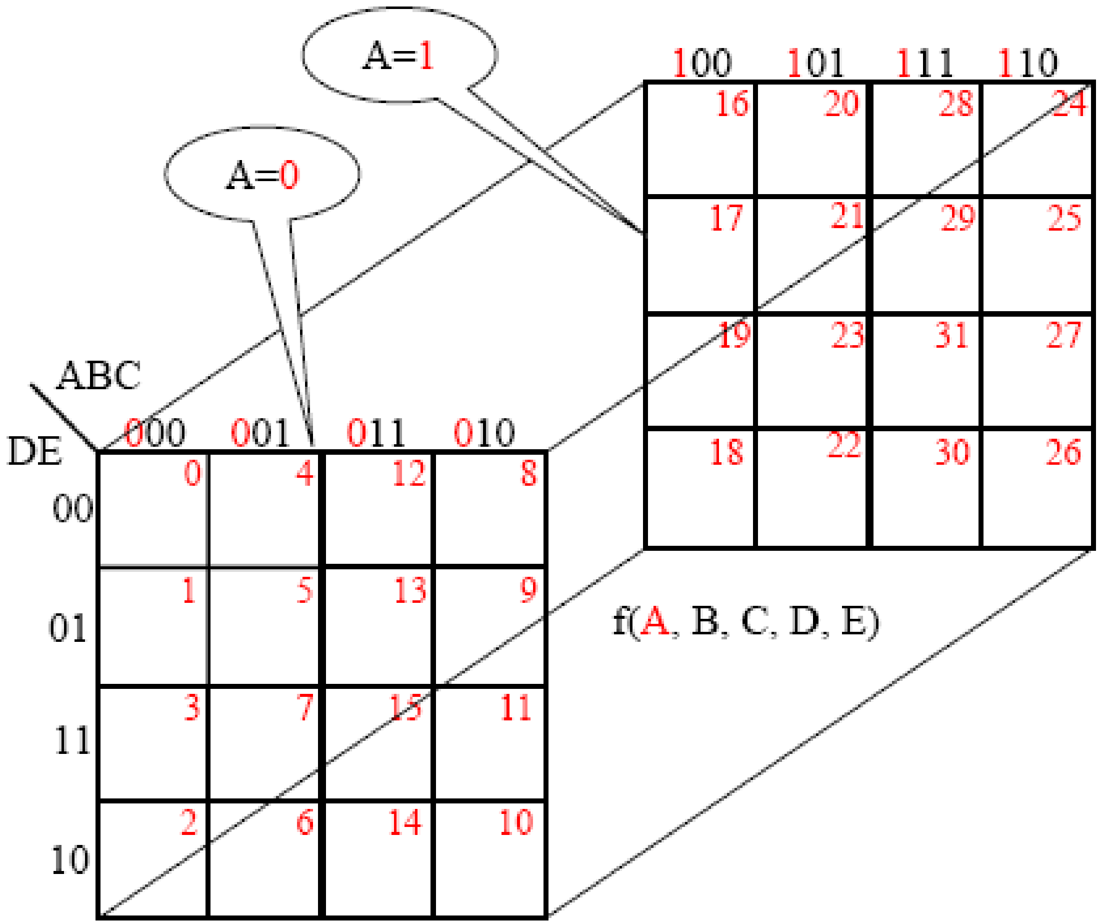
Representación

- Nótese que el mapa de 5 variables se obtiene a partir de dos mapas para n = 4.
- A uno se le antecede un cero en la codificación de las columnas y al otro un 1.
- El mapa de Karnaugh de 5 variables f(A,B,C,D,E):

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	4	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13	9	25	29	21	17
11	3	7	15	11	27	31	23	19
10	2	6	14	10	26	30	22	18

Representación

- Otra forma de representación



5-Mapas de Karnaugh

5.1 Representación y mapas de diferentes dimensiones

5.2 Generalizaciones sobre mapas de Karnaugh

5.3 Ejemplos de uso de mapas de Karnaugh

Generalizaciones

- Un mapa de Karnaugh n variables tiene 2^n celdas o cuadros.
- Cada celda o casillero de un mapa de n variables, tiene n celdas adyacentes; es decir, los códigos binarios de los mintérminos están a distancia uno.
- Una celda está asociada a un producto que contiene las n variables, pudiendo éstas estar o no complementadas.
- Agrupando dos celdas adyacentes, se logra una expresión tipo producto de (n-1) variables.
- Esto empleando: a = ab + ab'
- Considerando que dos celdas adyacentes difieren en sólo una variable, ya que están a distancia 1 (código Grey).

Generalizaciones

- Bloques pueden agruparse de un número de celdas que es una potencia de dos; es decir: 2, 4, 8, 16...
- Agrupando 2^k celdas, que forman un k-cubo, la expresión booleana asociada es la que resulta de eliminar k variables de las n correspondientes a un mintérmino.
- Los grupos posibles de k literales, cuando se tienen n variables ($k \leq n$), quedan dados por: $$\binom{n}{k} 2^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^k$$
- Ejemplo: los grupos de 1 literal cuando n=4

$$\binom{4}{1} 2^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} 2^1 = 8$$

  - Son A, B, C, D, A', B', C', D'

Generalizaciones

- Ejemplo, para n = 4 (e.g. A, B, C, D):
- Un mintérmino se expresa como un producto de 4 variables.
- Una agrupación de 2 mintérminos, que forman un 1-cubo (o que son adyacentes), puede expresarse en tres variables.
- Una agrupación de 4 mintérminos, que forman un 2-cubo, se expresa en dos variables.
- Una agrupación de 2^3 mintérminos (que forman un 3-cubo), puede expresarse como una variable.
- Una agrupación de los 2^4 mintérminos (forman un 4-cubo), puede expresarse como 1 (usando 0 variables).
- Nótese que bajo el mapa suele escribirse la función que éste representa.

Generalizaciones

- Ejemplo: los grupos de 2 literales (k=2), cuando n=4:

$$\binom{4}{2}2^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}2^2 = 24$$

- Estos son: AB, A'B, AB', A'B', AC, A'C, AC', A'C',..., C'D'

Definiciones

- Un implicante de una función F es un elemento del on-set o un grupo de elementos que pueden ser combinados en un mapa de Karnaugh
- Un implicante primo es un implicante que no puede ser combinado con otros implicantes para eliminar un literal (porques ya es lo mas grande posible)
- Un implicante primo esencial es cuando un implicante primo es el único que cubre un elemento del on-set
- El objetivo es encontrar el conjunto mas pequeño de implicantes primos que juntos cubren todos los elementos del on-set (opcionalmente incluyendo don't cares)

Derivación de una Expresión Mínima de un Mapa

- Un procedimiento para encontrar una expresión mínima como suma de productos es el siguiente (Katz p. 100):

1. Elegir un elemento del on-set y buscar todos los grupos máximos de 1s y Xs adyacentes a ese elemento. Repetir el paso 1 para encontrar todos los implicantes primos.
2. Visitar un elemento del on-set. Si esta cubierto por un solo implicante es esencial y va a contribuir un terminó a la expresión final de suma de productos. Repetir el paso 2 para encontrar todos los implicantes primos esenciales.
3. Si es que faltan algunos 1s que no están cubiertos entonces seleccionar un numero mínimo de implicantes primos para cubrirlos. Tratar varias alternativas de cubrimientos para encontrar el que tenga el numero menor de implicantes.

5-Mapas de Karnaugh

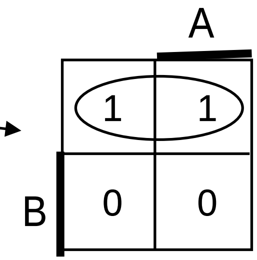
5.1 Representación y mapas de diferentes dimensiones

5.2 Generalizaciones sobre mapas de Karnaugh

5.3 Ejemplos de uso de mapas de Karnaugh

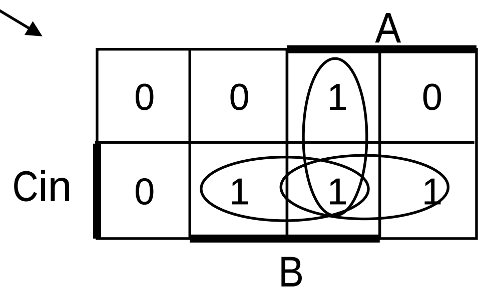
Uso de mapas de Karnaugh

- $F = \Sigma m(0,2)$



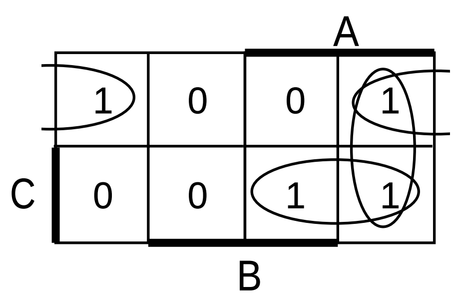
B'

- $Cout = \Sigma m(3,5,6,7)$



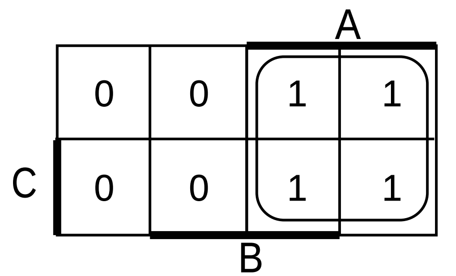
$AB + ACin + BCin$

- $f(A,B,C) = \Sigma m(0,4,5,7)$

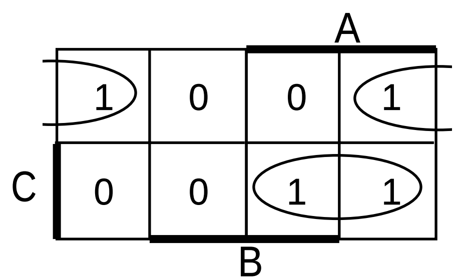


$AC + B'C' + \cancel{AB'}$

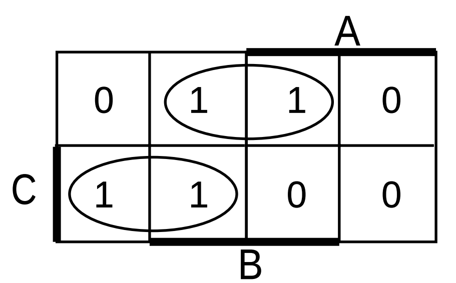
Uso de mapas de Karnaugh



G(A,B,C) = A



F(A,B,C) = Σm(0,4,5,7) = AC + B'C'

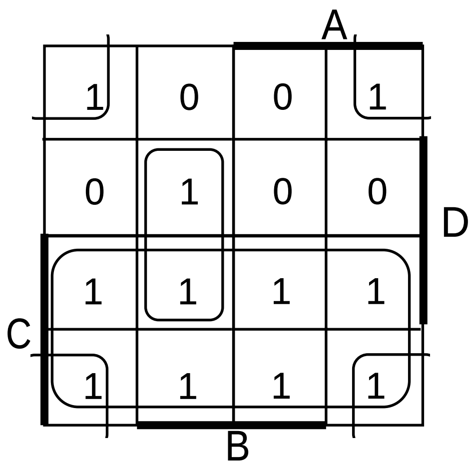


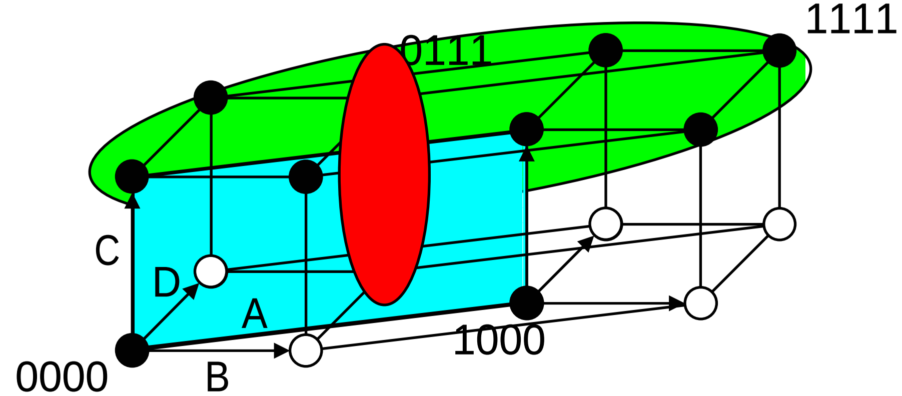
F' simplemente replaza 1's con 0's y vice versa
F'(A,B,C) = Σ m(1,2,3,6)= BC' + A'C

Uso de mapas de Karnaugh

- F(A,B,C,D) = Σm(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)

  F = C + A'BD + B'D'

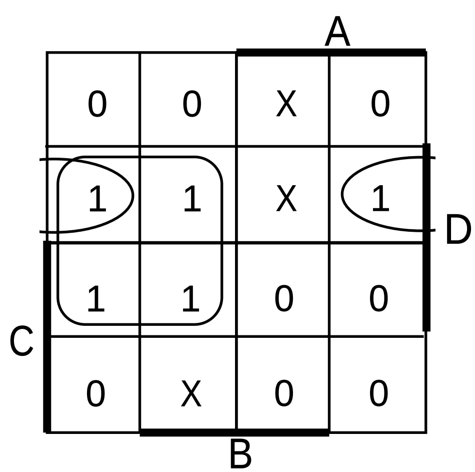




encontrar el menor numero de subcubos de mayor tamaño para cubrir el ON-set (menor numero de términos con el menor numero de inputs por termino)

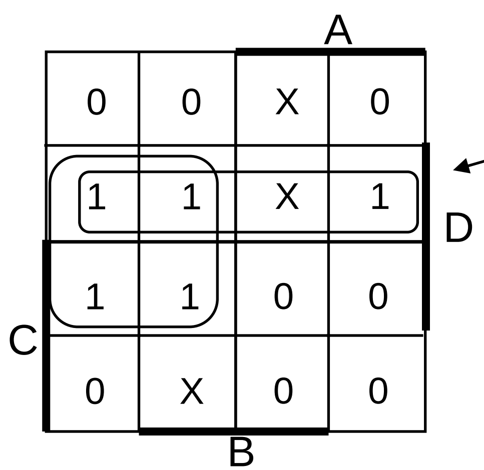
Uso de mapas de Karnaugh con don’t cares

- $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$
  - sin don't cares
    - $f = A'D + B'C'D$



Uso de mapas de Karnaugh con don’t cares

- $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$
  - $f = A'D + B'C'D$ sin don't cares
  - $f = A'D + C'D$ con don't cares



usando un don't care como un "1"
se puede formar un 2-cubo
en ves de un 1-cubo para cubrir
este nodo

<u>don't cares</u> se pueden usar como
1s or 0s
dependiendo de lo que sea
mas conveniente

Actividad

- Minimizar la función $F = \Sigma\, m(0, 2, 7, 8, 14, 15) + d(3, 6, 9, 12, 13)$