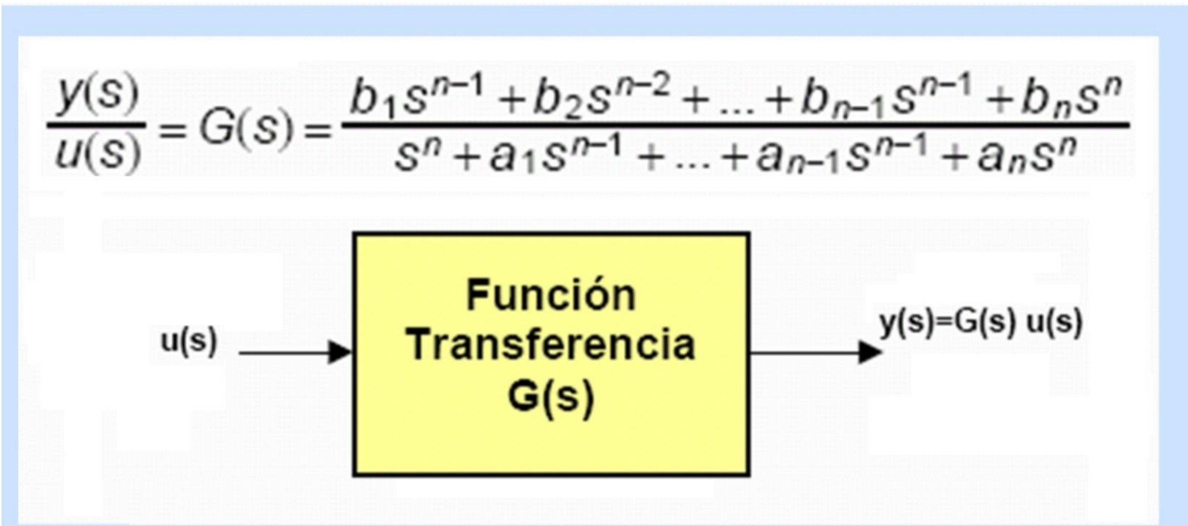
Práctica N◦ 2

Función de transferencia y sistemas de primer orden



Apellidos y nombres:	Murrieta Villegas Alfonso			
	Palacios Rodríguez Diego Octavio			
	Reza Chavarria Sergio Gabriel			
	Valdespino Mendieta Joaquin			
Grupo:	2	Profesor: Isaac Ortega Velázquez		Calificación:
Brigada:	4			
Semestre:	2020-1	Fecha de ejecución:	2 de septiembre de 2019	

Rúbrica

Aspectos a evaluar	Excelente	Destacado	Suficiente	No cumplido	Evaluación
Organización Y conducta. *A*,5 *I*.	Bueno organización. Puntualidad. Actitud de respeto. Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**1p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Actitud de Colaboración. Interés en el desarrollo de la práctica. (**0**,**7p**.)	Buena organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0**,**5p**.)	Mala organización. Impuntualidad. Confusión en las actividades y responsabilidades. Colaboración deficiente. Falta de interés en el desarrollo de la práctica. (**0p**.)	
Desarrollo de Actividades *A*,6 *M*.	Realiza el 100 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuadamente. (**1p**.)	Realiza el 90 % de las actividades. Material solicitado completo. Manejo de equipo adecuadamente. (**0**,**7p**.)	Realiza el 80 % de las actividades. Mate- rial solicitado completo. Manejo de equipo deficiente. (**0**,**5p**.)	Realiza menos del 80 % de las actividades. Material solicitado incompleto. Manejo deficiente del equipo. (**0p**.)	
Asimilación de los objetivos de aprendizaje propios de la práctica. *A*,1 *M*. *A*, 3M, *A*,7*Av*, *A*,2*I*, *A*,4*M*.	Asimilan correctamente los conocimientos. Asocian las experiencias de la práctica con conceptos teóricos. (**4p**.)	Asimilan la mayoría de los conocimientos. Se tiene dificultad en la asociación de los resultados prácticos con la teoría. (**3p**.)	Asimilan escasa- mente los cono- cimientos prácticos. La asociación de la practica con la teoría es escasa. (**2p**.)	No asimilan los objetivos de la práctica. No logran asociar los resultados obtenidos con la teoría. (**0p**.)	
Reporte de la práctica *A*,5*I*.	Cumple con la estructura del reporte. Refleja los conocimientos adquiridos. Reporte de forma adecuada cada una de las actividades. (**4p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Re- fleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**3p**.)	Cumple con la estructura del reporte. Los conocimientos adquiridos son escasos. Las actividades reportadas son incompletas. (**2p**.)	No cumple con la estructura del reporte. No re- fleja los conocimientos adquiridos. Las actividades reportadas son incompletas. (**0p**.)	

Objetivos

☞ El alumno estudiará el concepto de función de transferencia.

☞ El alumno caracterizará la respuesta de sistemas de primer orden a las entradas impulso y escalón.

Recursos

1. Software

a) Software especializado para cálculo numérico, puede utilizarse paquetería de software libre como Octave o Silaba.

2. Equipos, instrumentos, herramientas y accesorios

a) Computadora con 2GB RAM mínimo. Seguridad en la ejecución de la actividad

	Peligro o fuente de energía	Riesgo asociado	Medidas de control	Verificación
1ro	Voltaje alterno 127 V	Electrocución	Identificar los puntos energizados antes de realizar la actividad y evitar contacto	✓
		Apellidos y nombres:		

Introducción

En esta práctica, se estudiarán las características de una función de transferencia, así como lo que es un polo y un cero, y entenderemos cuáles podrían ser las respuestas de una función a una entrada escalón y un impulso unitario.

Marco teórico

La función de transferencia es un modelo matemático que relaciona la respuesta de un sistema con la señal de entrada y **es necesario conocer la respuesta del sistema**. Sirve para caracterizar la salida de un sistema LTI que está modelado por ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. La función de transferencia se conoce como función de estado 0 cuando las condiciones iniciales (CI) son 0.

Es decir, para un sistema LTI, con respuesta al impulso *h(t)*, se tiene: *y(t) = x(t) * h(t)*. Aplicando convolución y transformada de Laplace, obtenemos (en el dominio de la transformada) *Y(s) = X(s)H(s)*

Si despejamos *H(s):* $\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$

Entonces, *H(s)* es la función de transferencia, que es transformada de Laplace de la respuesta al impulso del sistema.

La función de transferencia de un sistema LTI continuo representado por una EDL de coeficientes constantes de orden N está dada por:

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k} = \frac{P(s)}{Q(s)}}$$

En donde los ceros son las raíces del polinomio P(s), y los polos son las raíces del polinomio Q(s). Es decir, un **cero** es cuando **la función de transferencia vale 0**, y un **polo** es cuando **la función de transferencia tiende al infinito**.

Conociendo esto, se puede graficar el patrón de polos y ceros de una función de transferencia en un diagrama de Argand. Y se puede decir que un sistema *H(s)* es estable si y solo si **todos los polos de *H(s)* se grafican en la parte izquierda del plano.** Es decir, que todos los polos tienen su parte real negativa.

Desarrollo de la práctica

1. **Encontrar la representación mediante el patrón de polos y ceros, así como el término constante del sistema cuya función de transferencia es:**

$$H(s) = \frac{6s^2 + 18s + 12}{2s^3 + 10s^2 + 16s + 12}$$

Ceros del sistema:

$$6s^2 + 18s + 12 = 0; \qquad \boldsymbol{s_1 = -2, s_2 = -1}$$

Polos del sistema:

$$2s^3 + 10s^2 + 16s + 12 = 0; \qquad \boldsymbol{s_1 = -3}, \quad \boldsymbol{s_2 = -1 + i}, \quad \boldsymbol{s_3 = -1 - i}$$

Obtención mediante software:

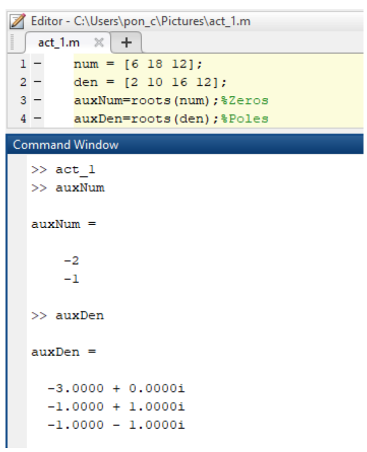


Imagen 0: Captura de pantalla de los valores de los polos y ceros del sistema utilizando Matlab.

2. **Con ayuda de un equipo de cómputo y un software especializado, obtenga la representación gráfica de los polos y de los ceros de la función de transferencia anteriormente mencionada. ¿Qué puede decir sobre la estabilidad del sistema?**

A continuación, se muestra la representación gráfica de los polos y ceros de la función de transferencia mediante Matlab 2019:

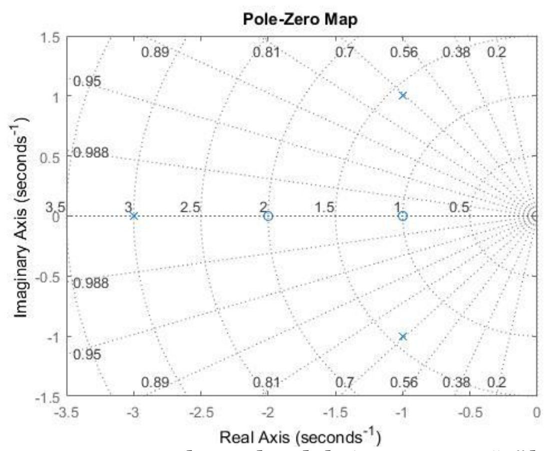
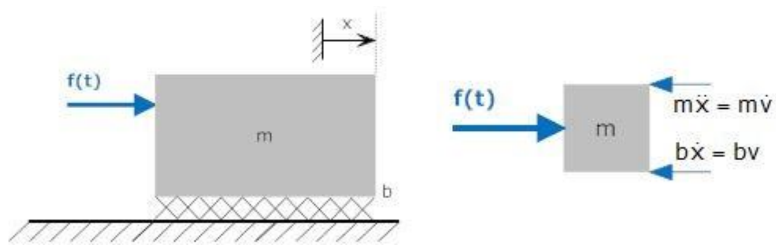


Imagen 1: Con “x” se representan los polos del sistema, con “o” los ceros del sistema.

Como se puede observar en la imagen superior, tanto los ceros como los polos se encuentran en el mismo semiplano por lo que matemáticamente esto nos garantiza que el sistema es estable.

3. De la Figura inferior obtenga la ecuación diferencial que represente la dinámica del sistema.



Obtención de la ecuación diferencial del sistema:

$$f(t) = m\frac{d\dot{x}}{dt} + b\frac{dx}{st}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = m\,\mathcal{L}\left\{\frac{d\dot{x}}{dt}\right\} + b\,\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{st}\right\}$$

$$F(s) = m[s^2 x(s)] + b[s\,x(s)] = x(s)[ms^2 + bs]$$

$$x(s) = \frac{F(s)}{[ms^2 + bs]}$$

4. Obtenga la función de transferencia del sistema y determine la expresión matemática de la respuesta al impulso unitario (considere condiciones iniciales nulas).

Función de transferencia:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs}$$

Polos:

$$ms^2 + bs = 0$$
$$s(ms + b) = 0$$
$$s = 0; \qquad s = \frac{-b}{m}$$

Ceros:

No tiene ceros

Respuesta al impulso:

Para obtener la respuesta al impulso aplicamos la transformada inversa de Laplace:

Fracciones parciales:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + bs} = \frac{A}{s} + \frac{B}{ms + b}$$

$$1 = A(ms + b) + Bs$$

Obteniendo valores de A y B:

$$s = 0; \qquad 1 = Ab; \qquad \boldsymbol{A = \frac{1}{b}}$$

$$1 = A(ms + b) + Bs$$

$$1 = \frac{1}{b}(ms + b) + Bs; \qquad 1 = \frac{ms}{b} + 1 + Bs;$$

$$\left(\frac{m}{b} + B\right)s = 0$$

$$\frac{m}{b} + B = 0; \quad \boldsymbol{B = -\frac{m}{b}}$$

$$H(s) = \frac{1}{bs} - \frac{m}{b}\left(\frac{1}{ms+b}\right) = \frac{1}{bs} - \frac{1}{b}\left(\frac{1}{s+\frac{b}{m}}\right)$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{b}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{b}{m}}\right\}$$

$$x(t) = \frac{1}{b} - \frac{1}{b}e^{-\frac{b}{m}t}$$

5. Bosqueje la respuesta al impulso cuando la magnitud de este es dos, considere m = b = 1.

A continuación, se muestra gráficamente los resultados obtenidos con Geogebra:

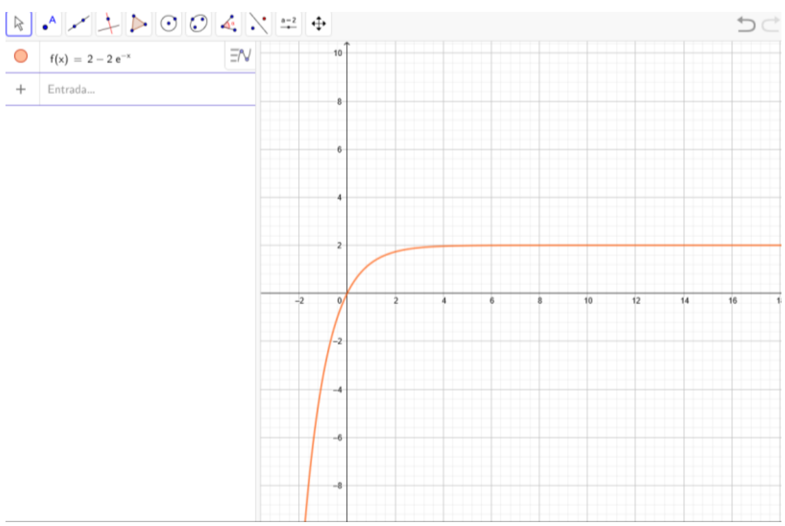


Imagen 2: Representación gráfica de la respuesta al impulso con los valores previos.

6. Considere un sistema cuya función de transferencia es representada como:

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

Utilice el método de fracciones parciales para encontrar la transformada inversa de Laplace y corrobore sus resultados con ayuda de un software especializado.

$$F(s) = \frac{s+1}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$A(s+2)+B(s)=s+1$$

$$s=0; \qquad 2A=1 \qquad\qquad A=\frac{1}{2}$$

$$A(s)+2A+B(s)=s+1$$

$$s(A+B)+2A=s+1$$

$$s\left(\frac{1}{2}+B\right)+2\frac{1}{2}=s+1$$

$$s\left(\frac{1}{2}+B\right)+1=s+1$$

$$s\left(\frac{1}{2}+B\right)+1=s+1$$

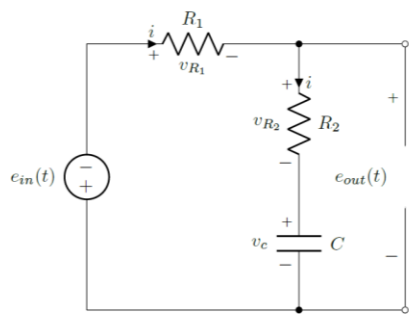
$$s\left(\frac{1}{2}+B\right)=s$$

$$\frac{1}{2}+B=1; \qquad B=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore F(s)=\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(s+2)}$$

$$F(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

7. **Considere el circuito mostrado en la Figura 18. Si la entrada de voltaje, $e_{in}(t)$ es un escalón, encuentre la salida $e_{out}(t)$. Considere R1 = 2 [Ω], R2 = 3 [Ω] y C = 1 [F].**



Como primer punto encuentre la función de transferencia. Considere que el circuito es un divisor de voltaje con dos impedancias, es decir:

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$Z_1 = R_1$$
$$Z_2 = Z_{R2} + Z_c$$

$$\frac{E_{out}(s)}{E_{in}(s)} = H(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}}$$

Aplicando el escalón unitario a la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{3 + \frac{1}{s}}{5 + \frac{1}{s}}; \qquad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s)u(s) = \frac{3 + \frac{1}{s}}{5s + 1} = \frac{3}{5s + 1} + \frac{\frac{1}{s}}{5s + 1} = \frac{3}{5s + 1} + \frac{1}{s(5s + 1)}$$

$$\frac{1}{s(5s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{5s + 1}$$

$$1 = A(5s + 1) + B(s)$$

$$s = 0; \qquad 1 = A(5(0) + 1) + B(0); \qquad 1 = A$$

$$s = 1; \qquad 1 = A(5(1) + 1) + B(1); \qquad 1 = (1)(6) + B; \qquad -5 = B$$

$$\therefore A = 1, B = -5$$

Reduciendo la expresión:

$$H(s)u(s) = \frac{3}{5s + 1} + \frac{1}{s} + \frac{-5}{s + 1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{5s + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{-5}{5s + 1}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{3}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{5}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{5}}\right\}$$

Respuesta al escalón:

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{-\frac{1}{5}t} + 1 - e^{-\frac{1}{5}t} = 1 - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t}$$

8. Encuentre la expresión matemática que determina la respuesta a una entrada escalón y grafique sus resultados con ayuda de un software especializado.

Expresión de la respuesta a una entrada escalón:

$$H(s) = \frac{E_{out}}{E_{in}}; \qquad u(s) = \frac{1}{s}; \qquad H(s)u(s) = \frac{E_{out}}{E_{in}} \cdot \frac{1}{s};$$

Respuesta al escalón:

$$f(t) = \frac{3}{5}e^{-\frac{1}{5}t} + 1 - e^{-\frac{1}{5}t} = 1 - \frac{2}{5}e^{-\frac{1}{5}t}$$

Parte gráfica del sistema:

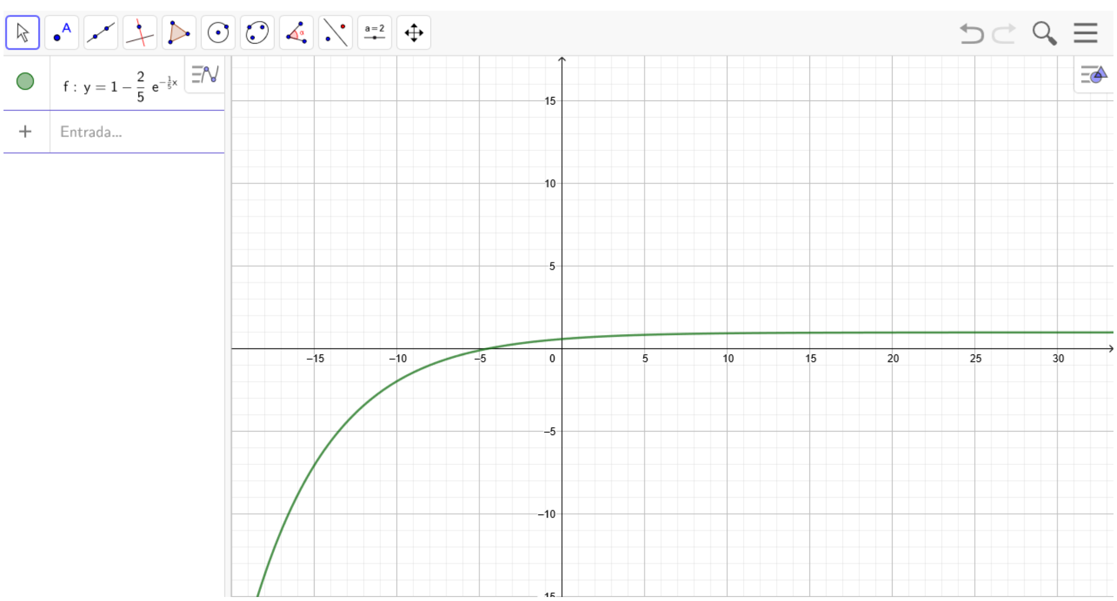


Imagen 3: Representación gráfica de la respuesta a una entrada escalón del sistema.

9. De una forma alternativa, considerando el teorema del valor final y el teorema del valor inicial (sin la transformada inversa de Laplace) determine la respuesta al escalón. ¿Qué puede decir con respecto a lo realizado en la actividad 8?

Teorema de Valor Inicial:

$$F(0) = \lim_{t\to 0} (F(t)) = \lim_{s\to\infty} (sF(s))$$

Considerando la salida como y(s):

$$y(s) = G(s)\, u(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to\infty} (s\, y(s))$$

Partiendo de la expresión de la expresión del sistema:

$$H(s) = \frac{3+\frac{1}{s}}{5+\frac{1}{s}} ; \qquad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{3s + 1}{5s + 1}$$

Aplicando el límite y la regla de I'Hopital:

$$H(\infty) = \lim_{s\to\infty} (\frac{3s + 1}{5s + 1})$$

$$H(0) = \frac{3}{5}$$

Teorema de Valor final:

$$F(\infty) = \lim_{t\to\infty} (F(t)) = \lim_{s\to 0} (sF(s))$$

Considerando la salida como y(s):

$$y(s) = G(s)\, u(s)$$

$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} (s\, y(s))$$

Partiendo de la expresión de la expresión del sistema:

$$H(s) = \frac{3+\frac{1}{s}}{5+\frac{1}{s}}\ ; \qquad u(s) = \frac{1}{s}$$

$$H(s) = \frac{3s\ +\ 1}{5s\ +\ 1}$$

Aplicando el límite:

$$H(\infty) = \lim_{s \to 0} \left(\frac{3s\ +\ 1}{5s\ +\ 1}\right)$$

$$H(\infty) = 1$$

Comparación respecto al apartado 8:

Realmente ambos teoremas son procedimientos matemáticos realmente sencillos de realizar, sin embargo, cada uno sólo nos ofrece un punto respecto a la respuesta total del sistema, es decir, si lo único que se requiere es saber el punto inicial o final de la respuesta podemos utilizar los teoremas de valor inicial y final, sin embargo, si lo que queremos es obtener todo el comportamiento de la respuesta, definitivamente la transformada inversa de Laplace es la opción.

Conclusiones

Murrieta Villegas Alfonso

En la presente práctica aprendimos la relación que existe entre las funciones de transferencia y los sistemas, a su vez aprendimos que mediante las funciones de transferencia podemos obtener los zeros y polos del sistema los cuales sirven para analizar la estabilidad de estos.

Por otro lado, cabe destacar la importancia y facilidad que nos ofrece la transformada y la transformada inversa de Laplace para el tratamiento de las respuestas del sistema ante diferentes entradas, sin embargo y como bien se planteó en la última parte de la práctica existen otras alternativas para la obtención de datos del comportamiento de entradas en el sistema.

Palacios Rodríguez Diego Octavio

En esta práctica, pudimos obtener y comprender la función de transferencia de algunos sistemas. Comprendiendo que la función de transferencia es una relación de la respuesta del sistema con su entrada, también pudimos observar, entender e incluso graficar con ayuda de Matlab los polos y los ceros de determinados sistemas. De la misma forma, también pudimos deducir y observar gráficamente el concepto de estabilidad en una función de transferencia.

También, por las razones que se mencionaron con anterioridad, se comprendió el uso que tiene la transformada de Laplace y la convolución, ambos componentes necesarios para obtener la función de transferencia.

Reza Chavarría Sergio Gabriel
En la práctica realizada se pudo comprender el concepto de función de transferencia, junto con los conceptos de polos y ceros. Siendo conceptos importantes para el comportamiento o la estabilidad del sistema estudiado.

También se dio los análisis de los comportamientos o de las repuestas de un sistema de primer orden cuando de entrada se le da una señal o entrada de impulso unitario o escalón. Este punto se da la importancia a la Transformada y la Transformada inversa de Laplace, ya que con esto nos puede dar la información del comportamiento total de la respuesta.

Valdespino Mendieta Joaquin

En la realización de esta práctica se pudo observar la relación entre los sistemas y su representación mediante funciones de transferencia a partir de la ecuaciones diferenciales, posteriormente al analizarlos mediante las raíces de la función por medio de los ceros y polos podemos determinar la estabilidad de los mismos, cabe destacar el uso de Laplace, es decir, la transformada y anti transformada como medio de la obtención de la respuesta de un sistema ante una entrada, lo que nos permite caracterizar las respuestas, en este caso la función impulso y la función escalón.

Referencias

1. Gloria Mata H. Víctor M. Sánchez. Análisis de sistemas y señales con computo avanzado. DGAPA UNAM, facultad de Ingeniería.

2. Oppenheim A. Señales y sistemas. Prentice hall Hispanoamerica. México.