UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

LABORATORIO DE SEÑALES Y SISTEMAS

SEMESTRE 2020 - 1

Proyecto Final

Profesor:

Michael Rojas

Alumnos:

Murrieta Villegas, Alfonso

Reza Chavarria Sergio Gabriel

Palacios Rodríguez Diego Octavio

Valdespino Mendieta Joaquín

Contacto: alfonsomvmx@comunidad.unam.mx

Índice

Introducción

Sistemas y señales

Un sistema es un elemento o conjunto de elementos que interactúan entre sí para cumplir un objetivo específico, el funcionamiento de un sistema depende de la entrada y salida. A estas variables, dentro del desarrollo de la ingeniería se les denomina señales.

Por otro lado, una señal se encuentra asociada a la información que existe en el sistema para su análisis, dentro del ámbito de la física una señal es una función que posee una gran cantidad de parámetros generalmente asociados a magnitudes físicas.
Dicho lo anterior, una función de transferencia es un modelo matemático que relaciona la respuesta de un sistema con la señal de entrada, sirve sobre todo para caracterizar la salida de un sistema **LTI** que está **modelado por ecuaciones diferenciales** con coeficientes constantes.

NOTA: La función de transferencia se conoce como función de estado 0 cuando las condiciones iniciales (CI) son 0.

Sistemas Continuos y Transformado Laplace

Es decir, para un sistema LTI, con respuesta al impulso h(t), se tiene: y(t) = x(t) * h(t). Aplicando convolución y **transformada de Laplace**, obtenemos (en el dominio de la transformada) Y(s) = X(s)H(s)

Si despejamos H(s): H(s)=Y(s)/(X(s))

Entonces**, H(s) es la función de transferencia**.

La función de transferencia de un sistema LTI continúo representado por una EDL de coeficientes constantes de orden N está dada por:

$$\boldsymbol{H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{m} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k}=\frac{P(s)}{Q(s)}}$$

En donde **los ceros son las raíces del polinomio P(s)**, y los **polos son las raíces del polinomio Q(s)**. Es decir, un cero es cuando la función de transferencia vale 0, y un polo es cuando la función de transferencia tiende al infinito.

Conociendo esto, se puede graficar el patrón de polos y ceros de una función de transferencia en un diagrama de Argand. Y se puede decir que **un sistema H(s) es estable si y solo si todos los polos de H(s) se grafican en la parte izquierda del plano**. Es decir, que todos los polos tienen su parte real negativa.

Sistemas Discretos y Transformada Z

Así mismo, es importante entender que, si los **sistemas de tiempo continuo** se pueden representar o modelar con ecuaciones diferenciales, los sistemas discretos se modelan con ecuaciones en diferencias que relacionan la entrada y la salida del sistema. Precisamente por esto es necesaria la utilización de la transformada Z, para poder resolver estas ecuaciones en diferencias. La transformada Z es el equivalente de la transformada de Laplace, pero para señales discretas (en el dominio de los reales).

La **transformada Z** para la salida del sistema:

$$Y(z) = \frac{X(z)B(z)}{A(z)} + \frac{I_0}{A(z)}$$

De la cual podemos observar que tiene dos componentes. El segundo componente depende enteramente de las condiciones iniciales, así, considerando condiciones iniciales I0 = 0, tenemos la relación directa entre la entrada y la salida del sistema, o sea la función de transferencia.
Así mismo, otra manera de expresar la función de transferencia es con convolución para X(z) un sistema y(n) con una señal de entrada x(n) o sea y(n) = x(n) * h(n).

Si a esta última ecuación aplicamos transformada Z, tenemos que **Y(Z) = X(z)H(z).**

Sabiendo esto, podemos entender que la función de transferencia también es interpretable como la transformada Z de la respuesta de un sistema a la entrada de muestra unitaria. También es importante conocer la manipulación necesaria para poder ir de una función de transferencia continua a una discreta. Si se tiene una ecuación diferencial que representa la relación entrada salida de un sistema de la forma

Modelado de Sistemas

Los efectos de los elementos dentro de un sistema se pueden clasificar en tres **Almacenadores de flujo, Almacenadores de esfuerzo** y **Disipadores**. Cabe destacar que los almacenadores de flujo y esfuerzo son considerados los elementos dinámicos dentro del sistema. A continuación, se muestran en una tabla algunos de estos elementos:

- **Almacenadores de Flujo**

Todos los almacenadores de flujo tienen la siguiente ley de constitución:

$$\boldsymbol{e = K\varphi(f)}$$

donde

e es un esfuerzo
K es una constante de proporcionalidad
f es el flujo

- **Almacenadores de esfuerzo**

Todos los almacenadores de esfuerzo tienen la siguiente ley de constitución

$$\mathbf{f = K\varphi(e)}$$

e es un esfuerzo
K es una constante de proporcionalidad
f es el flujo

- **Almacenadores de esfuerzo**

Todos los disipadores tienen la siguiente ley de constitución

$$\mathbf{e = Kf}$$

e es un esfuerzo
K es una constante de proporcionalidad
f es el flujo.

Desarrollo

En este apartado se describirán y realizarán cada una de las actividades para analizar el sistema 4 asociado a un motor de corriente directa modelado con la siguiente ecuación diferencial:

1. Determinar la estabilidad del sistema

Recordemos que al hablar de un sistema lineal a través de la transformada de Laplace y empleando el concepto de función de transferencia es como se pudo obtener la estabilidad del sistema. A continuación, se muestran las operaciones realizadas:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)$$

$$J_m \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right)$$

$$\mathcal{L}\{T_m(t)\} = T_m(s)$$

$$J_m s^2\theta_m(s) + B_m s\theta_m(s) = T_m(s)$$

$$\theta_m(s)(J_m s^2 + B_m s) = T_m(s)$$

$$\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s}$$

$$\theta_m(s) = \frac{T_m(s)}{s^2 + \frac{B}{J_m}{}_m s}$$

$$s^2 + \frac{B_m}{J_m}s = 0$$

$$s^2 + \frac{12}{6.68}s = 0$$

Obtención de los polos del sistema:

$$s = 0; \quad s + \frac{12}{6.68} = 0$$

$$s = -\frac{12}{6.68} = -1.7964$$

De esta forma sabemos que nuestro sistema es críticamente estable debido a que uno de los polos del sistema se encuentra en cero, mientras que el otro del lado izquierdo en el plano complejo.

NOTA: Cabe destacar que si en vez de tomar en cuenta el desplazamiento angular sino la velocidad angular podríamos obtener un sistema completamente estable.

2. Determinar la respuesta escalón e impulso del sistema

A continuación, se muestran las operaciones realizadas para la obtención de la respuesta escalón e impulso en el sistema:

2.1 Respuesta impulso

Operaciones y despejes matemáticos para la obtención del escalón:

$$\boldsymbol{J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = \delta(t)}$$

$$J_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m\, \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right) \qquad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\theta_m(s) = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s} \qquad \theta_m(s) = \frac{1}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}$$

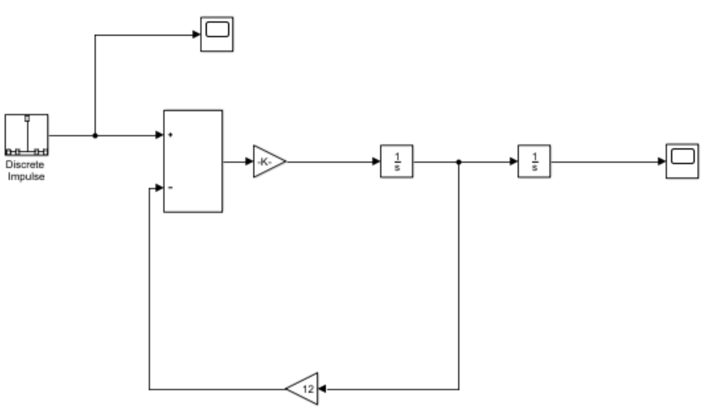
$$\mathcal{L}^{-1}\{\theta_m(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}\right\}$$

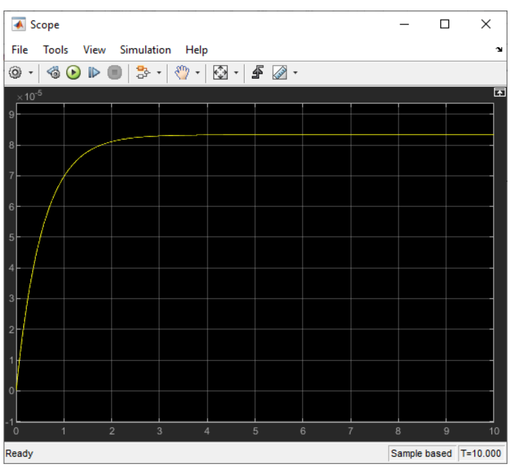
$$\theta_m(t) = \frac{1}{\left(\frac{B_m}{J_m}\right)}\left(1 - e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right) = \frac{J_m}{B_m}\left(1 - e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right)$$

Respuesta obtenida - Sobre amortiguada:

$$\boldsymbol{\theta_m(t) = \frac{6.68}{12}\left(1 - e^{-\frac{12}{6.68}t}\right) = 0.55666(1 - e^{-1.7964t})}$$

En la parte inferior se encuentran la simulación a través de simulink de la entrada en el sistema:





2.2 Respuesta Escalón

Operaciones y despejes matemáticos para la obtención del escalón:

$$J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} = u_{-1}(t)$$

$$J_m \mathcal{L}\left\{\frac{d^2\theta_m}{dt^2}\right\} = J_m\left(s^2\theta_m(s) - s\theta_m(0) - \theta'_m(0)\right)$$

$$B_m \mathcal{L}\left\{\frac{d\theta_m}{dt}\right\} = B_m\left(s\theta_m(s) - \theta_m(0)\right) \qquad \mathcal{L}\{u_{-1}(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\theta_m(s) = \frac{\frac{1}{s}}{s\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)} = \theta_m(s) = \frac{1}{s^2\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}$$

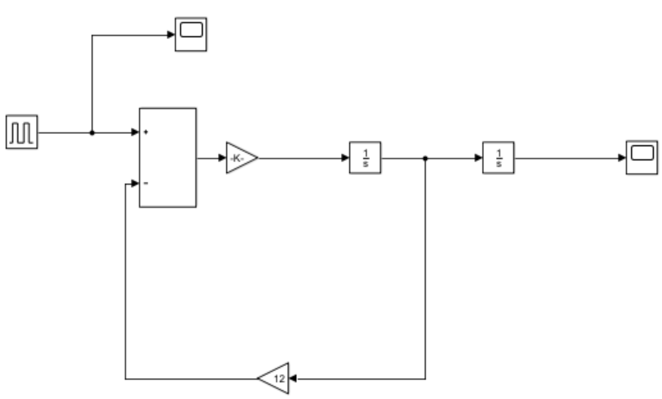
$$\mathcal{L}^{-1}\{\theta_m(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s + \frac{B_m}{J_m}\right)}\right\}$$

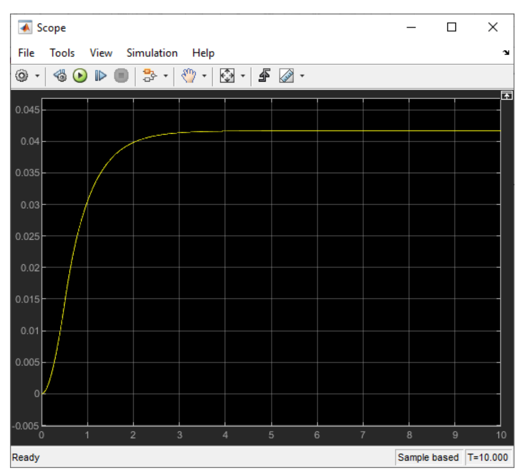
$$\theta_m(t) = \frac{1}{\left(\frac{B_m}{J_m}\right)^2}\left(\frac{B_m}{J_m}t - 1 + e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right) = \frac{J_m{}^2}{B_m^2}\left(\frac{B_m}{J_m}t - 1 + e^{-\frac{B_m}{J_m}t}\right)$$

Respuesta obtenida - críticamente amortiguada:

$$\boldsymbol{\theta_m(t) = 0.3098(1.7964t - 1 + e^{-1.7964t})}$$

En la parte inferior se encuentran la simulación a través de simulink de la entrada en el sistema:





3. Determinar la relación entrada salida

Recordemos que la relación entre la entrada y salida de un sistema es a través de la función de transferencia, la cual se muestra en la parte inferior:

$$H(s)\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s} = \frac{1}{s^2 + \frac{B_m}{J_m}s}$$

4. Caracterización del sistema en función de los valores característicos

$$H(s)\frac{\theta_m(s)}{T_m(s)} = \frac{1}{J_m s^2 + B_m s} = \frac{1}{s^2 + \frac{12}{6.68}s} = \frac{1}{s^2 + 1.7964s}$$

De la ecuación diferencial

$$J_m\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m\frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)$$
$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m}{dt} = T_m(t)$$

Ecuación Homogénea (entrada cero)

$$\frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \frac{B_m}{J_m}\frac{d\theta_m}{dt} = 0$$

Obteniendo el polinomio Característico

$$\lambda^2 + \frac{B_m}{J_m}\lambda = 0$$

$$\lambda^2 + 1.7964\lambda = 0$$

Los valores característicos son:

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = \ 1.7964$$

En la relación a los valores característicos del sistema podemos caracterizar la estabilidad y el comportamiento del sistema, además se observa una relación entre estos y los polos de la función de transferencia.

Al tener raíces diferentes y negativas, considerando el cero podemos determinar que el sistema tiene un comportamiento sobre amortiguado, además de ser estable.

5. Versión discreta del sistema

Considerando las siguientes aproximaciones con la primera y segunda derivada respecto al tiempo:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}$$

$$\frac{d^2\, y(t)}{dt^2} \approx \frac{d}{dt}\left(\frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s}\right) = \left(\frac{\frac{y(t) - y(t - T_s)}{T_s} - \frac{y(t) - y(t - 2T_s)}{T_s}}{T_s}\right)$$

$$= \left(\frac{y(t) - 2y(t - T_s) + y(t - 2T_s)}{{T_s}^2}\right)$$

Aplicando en los términos del modelo:

$$J_m\left(\frac{\theta_m(t) - 2\theta_m(t - T_s) + \theta_m(t - 2T_s)}{{T_s}^2}\right) + B_m\left(\frac{\theta_m(t) - \theta_m(t - T_s)}{T_s}\right) = T_m(t)$$

$$\theta_m(t)\left(\frac{J_m}{{T_s}^2} + \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(t - T_s)\left(-2\frac{J_m}{{T_s}^2} - \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(t - 2T_s)\left(\frac{J_m}{{T_s}^2}\right) = T_m(t)$$

$$t = nT_s$$

$$\theta_m(nT_s)\left(\frac{J_m}{{T_s}^2} + \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(nT_s - T_s)\left(-2\frac{J_m}{{T_s}^2} - \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(nT_s - 2T_s)\left(\frac{J_m}{{T_s}^2}\right) = T_m(nT_s)$$

$$\theta_m(nT_s)\left(\frac{J_m}{{T_s}^2} + \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(T_s(n-1))\left(-2\frac{J_m}{{T_s}^2} - \frac{B_m}{T_s}\right) + \theta_m(T_s(n-2))\left(\frac{J_m}{{T_s}^2}\right) = T_m(nT_s)$$

$$\theta_m(n)(J_m + B_m) + \theta_m(n-1)(-2J_m - B_m) + \theta_m(n-2)(J_m) = T_m(n)$$

Obteniendo el sistema modelado a través de **Ecuaciones en diferencias**

$$\theta_m(n)(J_m + B_m) + \theta_m(n-1)(-2J_m - B_m) + \theta_m(n-2)(J_m) = T_m(n)$$

$$\theta_m[z](J_m + B_m) + z^{-1}\theta_m[z](-2J_m - B_m) + z^{-2}\theta_m[z](J_m) = T_m(z)$$

$$\theta_m[z](6.68 + 12) + z^{-1}\theta_m[z](-2(6.68) - 12) + z^{-2}\theta_m[z](6.68) = T_m(z)$$

$$\theta_m[z](18.68) + z^{-1}\theta_m[z](-25.36) + z^{-2}\theta_m[z](6.68) = T_m(z)$$

$$\theta_m[z]((18.68) + z^{-1}(-25.36) + z^{-2}(6.68)) = T_m(z)$$

Función de transferencia discreta

$$\frac{\theta_m[z]}{T_m[z]} = \frac{1}{((18.68) + z^{-1}(-25.36) + z^{-2}(6.68))}$$

$$H[z] = \frac{z^2}{(18.68z^2 - 25.36z + 6.68)}$$

6. Estabilidad del sistema discreto

Con base a la función de transferencia obtenida en el apartado 5 es como se obtuvieron los valores de los polos del sistema:

$$18.68z^2 - 25.36z + 6.68 = 0$$

$$z = \frac{-(-25.36) \pm \sqrt{(-25.36)^2 - 4(18.68)(6.68)}}{2(18.68)}$$

$$z_1 = \frac{25.36 + 12}{37.36} \qquad z_2 = \frac{25.36 - 12}{37.36}$$

Valores obtenidos de los polos del sistema:

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{37.36}{37.36} = 1} \qquad \boldsymbol{z_2 = \frac{13.36}{37.36} = 0.3576}$$

Podemos observar que nuestro sistema al igual que en su versión continua es críticamente estable debido a que uno de los polos se encuentra en el círculo unitario.

NOTA: Recordemos que, al hablar de sistemas discretos, el plano complejo varia respecto a sus ejes, por ello la estabilidad de un sistema se da dentro del concepto de círculo unitario.

7. Análisis del sistema a través de entradas en concreto

7.1 Análisis del sistema con la entrada 1:

A continuación, se muestra todo el apartado matemático para la obtención del comportamiento del sistema a través de la siguiente entrada:

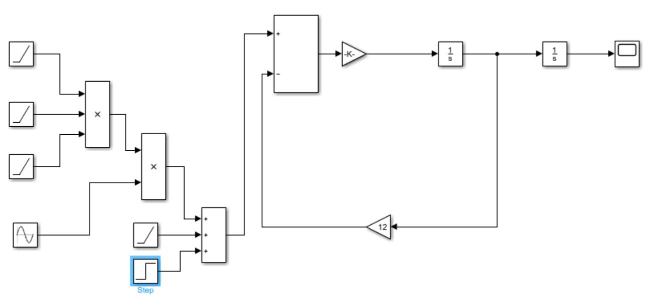
$$\boldsymbol{E_1 = t^3 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + t - 2}$$

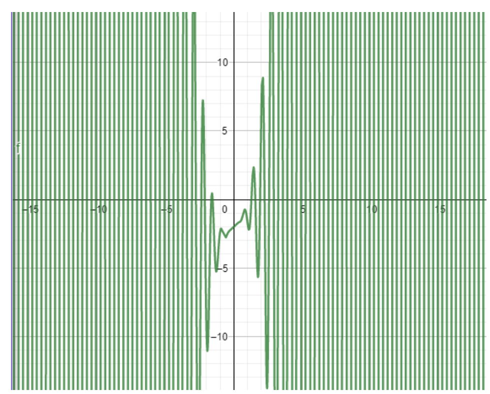
$$\frac{dE_1}{dt} = 3t^2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\pi t^3 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$
$$\frac{d^2E_1}{dt^2} = (6t - 9\pi^2 t^3)\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 18\pi t^2 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$J_m\left((6t - 9\pi^2 t^3)\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 18\pi t^2 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) + B_m\left(3t^2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\pi t^3 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = T_m(t)$$

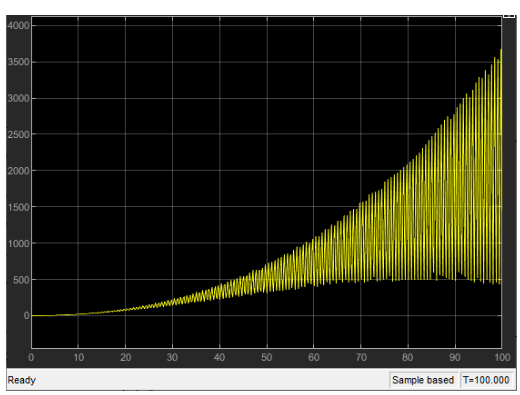
$$T_m(t) = (6.68)\left((6t - 9\pi^2 t^3)\sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 18\pi t^2 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right) + (12)\left(3t^2 \sin\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\pi t^3 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)$$

Simulación mediante simulink y oscilograma de la señal o función de entrada:





Respuesta obtenida:



7.2 Análisis del sistema con la entrada 2:

A continuación, se muestra todo el apartado matemático para la obtención del comportamiento del sistema a través de la siguiente entrada:

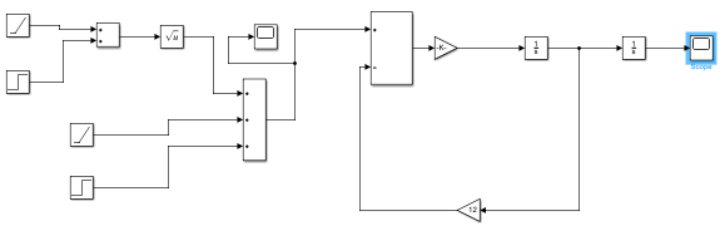
$$\boldsymbol{E_2 = \sqrt{2t + 2\cos(10\pi)} + 5t - 3}$$

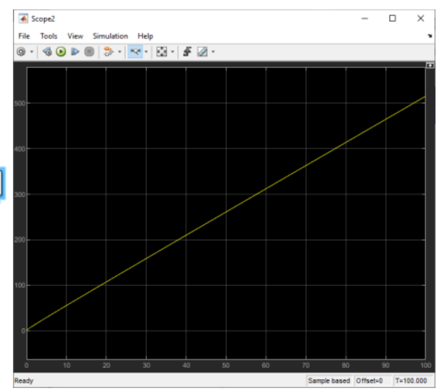
$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} + 5 \qquad\qquad \frac{d^2E_1}{dt^2} = -\frac{1}{(2t+2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$J_m\left(-\frac{1}{(2t+2)^{\frac{3}{2}}}\right) + B_m\left(\frac{1}{\sqrt{2t+2}} + 5\right) = T_m(t)$$

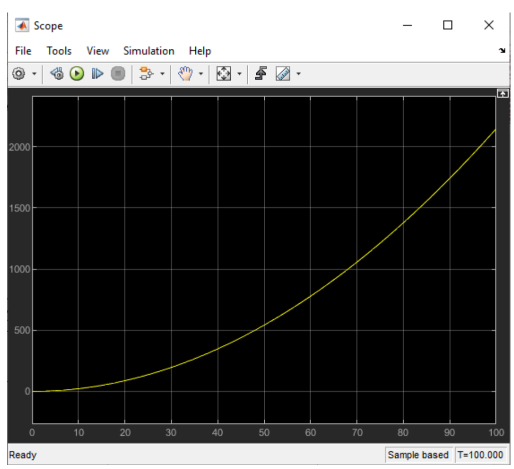
$$\boldsymbol{T_m(t) = (6.68)\left(-\frac{1}{(2t+2)^{\frac{3}{2}}}\right) + (12)\left(\frac{1}{\sqrt{2t+2}} + 5\right)}$$

Simulación mediante simulink y oscilograma de la señal o función de entrada:





Respuesta obtenida:



Discusión de los resultados

Para este apartado simplemente se comentarán algunos aspectos pendientes de todos los incisos del apartado de desarrollo, cabe destacar que las conclusiones de los resultados obtenidos se mencionaron en la parte final de cada uno de los apartados del desarrollo.

1) Lo primero que podemos es que independientemente de que tengamos el sistema en su forma continua o discreta al final la estabilidad que obtenemos de este es la misma, notablemente debemos considerar que la estabilidad de un sistema tiene una ubicación distinta en cada uno de los planos complejos, ya sea en el circulo unitario para el caso de la tranformada Z o en el lado izquierdo para el caso de la transformada de Laplace.

2) Por otro lado, con los valores característicos del sistema también podemos caracterizar la estabilidad y el comportamiento del sistema, como tuvimos raíces diferentes y negativas, considerando el cero podemos determinar que el sistema tiene un comportamiento sobre amortiguado, además de ser estable.

3) Con base en lo anterior y observando a su vez los resultados obtenidos a través de la respuesta escalón e impulso comprobamos el tipo de comportamiento que adquiere nuestro sistema ante estas entradas.

Conclusiones

En el presente proyecto a través de las distintas actividades que se realizaron aplicamos todo lo aprendido en el curso para poder analizar a través de una ecuación diferencial como modelo de un sistema las entradas, salidas, comportamientos de este.

Por otro lado, mediante conceptos tan relevantes como transformaciones lineales para la aplicación de la transformada de Laplace y transformada Z es como se pudo analizar el sistema correspondiente a través del concepto de función de transferencia.

Con la aplicación e interpretación de los planos complejos asociados a cada una de las transformaciones y mediante la importancia de los polos dentro de la función de transferencia es como se pudo determinar la estabilidad del sistema.

También, mediante el uso de la respuesta escalón y respuesta al impulso se observó el comportamiento obtenido del sistema.

Referencias

1. Oppenheim A. Señales y sistemas. Prentice hall Hispanoamerica. México.

2. Gloria Mata H. Víctor M. Sánchez. Análisis de sistemas y señales con computo avanzado. DGAPA UNAM, facultad de Ingeniería.

3. La Transformada Z. M.I. Ricardo Garibay Jiménez Facultad de Ingeniería UNAM.