Nombre: Juan Diego Figueroa Hernández	**Código:** 2200815
Juan Andrés Guarín Rojas	2201870
Gabriela Sánchez Ariza	2200816
Nicolas Toledo Parra	2200017

Problema de N-Cuerpos

En física, la cuestión del problema de los n-cuerpos trata de determinar los movimientos individuales de un grupo de partículas materiales las cuales interactúan constantemente con el conjunto entero de partículas, por lo tanto, la descripción del movimiento de cada cuerpo altera la descripción del movimiento del resto de cuerpos y por ende la del cuerpo en si misma de nuevo y así sucesivamente. En sus orígenes el problema se planteó para un conjunto de objetos astronómicos que interactúan mutuamente según las leyes de la gravitación universal de Newton.

Utilidad del problema desde el punto de vista físico

De resolver el problema se podría predecir los movimientos del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas visibles, o en general cualquier tipo de sistema de n-cuerpos que afecten su movimiento entre sí mismos.

Descripción matemática del método seleccionado Método de Runge-Kutta:

Los métodos de Runge-Kutta (RK) son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial. Sean:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

una ecuación diferencial ordinaria, con $f : \Omega\ C\ R\ x\ R^n \to R^n$ donde Ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea

$$(t_0, y_0)\ pertenecientes\ a\ \Omega$$

Entonces el método RK (de orden s) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\square=1}^{\square} b_i k_i \qquad [1]$$

donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el incremento $\Delta\, t_n$ entrelos sucesivos $t_n\ y\ t_{n+1}$. Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera local.

$$k_i = f\left(t_n + h\,c_i\,, y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right) \quad i = 1, \ldots, s. \qquad [2]$$

con a_{ij}, b_i, c_i coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes a_{ij} del esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir, $a_{ij} = 0$ para $j = i, \ldots, s$ los esquemas son explícitos.

Aplicación del Método de Runge-Kutta al Problema N-Cuerpos

En este problema se usó una variante del método de Runge-Kutta llamado método de Runge Kutta de cuarto orden (RK4). En este caso, se inicia tomando un problema de valor inicial dado por $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$ con $y(t_0) = y_0$, definiendo el término y_n como:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

en donde se establecen las constantes s, b_i de la ecuación [1] como: $s = 4$, $b_1 = \frac{1}{6}$, $b_2 = \frac{2}{6}$, $b_3 = \frac{2}{6}$, $b_4 = \frac{1}{6}$. Los términos de aproximación k_i se definen como:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \qquad [3]$$

con:

$$t_{n+1} = h + t_n$$

para $n = 0,1,2,...$

Así, en el problema de N-cuerpos, se definieron dos PVI que han de ser resueltos por el método de Runge-Kutta de cuarto orden:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \vec{r}(t_0) = \vec{r_0} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \\ \vec{v}(t_0) = \vec{v_0} \end{cases} \text{ con } \vec{a} = \sum_i -\frac{GM_i}{r_i^3}\vec{r_i}$$

Siendo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ la posición de uno de los cuerpos en un instante de tiempo t, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ siendo la velocidad del mismo cuerpo en el mismo instante t, y siendo $\vec{a} = \vec{a}(t)$ la aceleración de este mismo en el instante t. La aceleración se calculó en base a la sumatoria de fuerzas gravitacionales que siente el cuerpo de estudio, debido a la masa de los demás cuerpos M_i ubicados a una distancia r_i del cuerpo, usando la ley de gravitación de Newton. Siendo $\vec{r_i}$ un vector que va del cuerpo de masa M_i al cuerpo de estudio.

Restringiendo el problema al caso bidimensional y usando notación de índices podemos definir:

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i = (x_j - x_i)\hat{e}_x + (y_j - y_i)\hat{e}_y$$

Siendo $\vec{r_{ij}}$ el vector posición que va del cuerpo M_i al M_j. Con lo cual la ley de gravitación usada para hallar la fuerza neta sobre M_i queda como:

$$M_i\vec{a}_i = \vec{F}_{ji} = \sum_{j=0}^{n-1} -G\frac{M_jM_i}{r_{ji}^3}\vec{r}_{ji} \quad \text{con } i \neq j$$

Para las posiciones en x del cuerpo de masa M_i se obtiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = v_{x_i} \\ \dfrac{dv_{x_i}}{dt} = a_{x_i} \\ x_i(t_0) = x_{i0} \\ v_x(t_0) = v_{x_{i0}} \end{cases} \text{ con } a_{x_i} = \sum_{j=0,\, i\neq j}^{n-1} \frac{GM_j}{r_{ji}^3}\,(x_j - x_i) \quad i,j = 0,1,2,...n-1$$

Y para las posiciones en y del cuerpo de masa M_i:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} = v_{y_i} \\ \dfrac{dv_{y_i}}{dt} = a_{y_i} \\ y_i(t_0) = y_{i0} \\ v_y(t_0) = v_{y_{i0}} \end{cases} \text{ con } a_{y_i} = \sum_{j=0,\, i\neq j}^{n-1} \frac{GM_j}{r_{ji}^3}\,(y_j - y_i) \quad i,j = 0,1,2,...n-1.$$

Así, a cada componente x_i, y_i, v_{xi}, v_{yi} se le puede aplicar el algoritmo RK4, con el cual se pueden actualizar las posiciones y velocidades en cada instante de tiempo t_n.