Proyecto de laboratorio 1

Determinación de la densidad de masa de la madera de abeto

Angélica María Angarita
Andrés Giovanny Ferreira
Juan Andrés Guarín

25 de Abril del 2021

Universidad Industrial de Santander

Resumen

En esta práctica de laboratorio se determina la densidad de la madera de abeto, haciendo uso del simulador *Scratch*. Se hizo la comprobación con el valor conocido de esta densidad igual a 0.45 g/cm^2 cuando es superficial. Esto se logró con el simulador, midiendo la masa y el área de seis trozos de madera planos, con grosor pequeño y formas geométricas simples, para usarse en el cálculo de la densidad promedio para cada objeto. A su vez, con las mediciones de masa y área se realizó una gráfica de masa vs. área, donde hicimos un ajuste lineal de los datos, obteniendo la pendiente de la recta, que corresponde con la densidad del material. Este trabajo es importante porque nos permite confirmar, por un lado, el dato establecido de la densidad de madera y, por otro lado, que las masas y las áreas son directamente proporcionales entre sí, cuando su densidad superficial es homogénea, como en este caso. En conclusión, los datos que obtuvimos confirman las relaciones que podemos establecer entre objetos con densidad homogénea, respecto a sus áreas y masas. Y a su vez se consiguió que la densidad obtenida mediante el simulador tiene una precisión media y una alta exactitud, al compararla con el valor conocido.

1. Introducción

La densidad es una propiedad que suele considerarse simple, pero en realidad se basa en pequeños aspectos que la hacen interesante de investigar. Para observar esos aspectos, se presenta un experimento en el cual se busca comprobar por medio de métodos experimentales (un simulador) la densidad superficial de cierto material, en este caso la madera de abeto. También, se comprobará una de las características que presenta esa densidad: la proporcionalidad directa entre la masa y el área; esto, debido a que esta propiedad se basa en el material y no en los objetos, cuando los mismos presentan una densidad homogénea. Los métodos experimentales nos generan los datos necesarios para calcular este valor; estos deben ser manejados con los procedimientos adecuados de incertidumbres y errores.

El simulador utilizado es *Práctica introductoria: Preámbulo del investigador* [1] de la página *Scratch*, en el cual las medidas varían cada vez que se toman nuevamente los datos, ya que, estos programas no pueden ser creados con rigurosidad debido al propio entorno en sí mismo.

A lo largo de este informe se podrá observar la metodología, en la cual se describirá los métodos tanto teóricos como experimentales usados en la práctica de laboratorio, y un poco de la teoría que nos llevó a utilizar esos métodos. El tratamiento de datos será la parte más detallada del experimento, ya que en ella se desarrollará los procesos usados para calcular la densidad. En el análisis de datos, se mostrarán las relaciones entre los resultados obtenidos y su componente teórica, considerando los factores que interfirieron en la toma

[1] Haciendo click Aquí podrá acceder al simulador

de datos y en los cálculos. Por ejemplo, los errores que tiene el simulador.

Como apartado final, las conclusiones son el experimento sintetizado, ya que, se presentan los conceptos e ideas que se tuvieron mientras se avanzaba con el experimento, y al finalizar se concretan. Como dijo Emilio Muñoz "En la investigación es más importante el proceso que el logro mismo"; así que esta practica de laboratorio es de utilidad para introducir conocimientos en el uso de herramientas como Python y en el manejo de datos.

A continuación se presentará la metodología utilizada para este reporte.

2. Metodología

Para el desarrollo de esta práctica se seleccionó la madera de abeto como material de estudio. El objetivo principal fue hallar el valor experimental de la densidad superficial del material, para lo que fue necesario el análisis de diferentes presentaciones de la madera de abeto, variando su figura y tamaño en el simulador de *Scratch*, como se muestra a continuación:

Cuadro 1. La tabla muestra las formas y tamaños estudiados.

Figura	Tamaño
Romboide	90
Triángulo	100
Trapecio	90
Rectángulo	85
Cruz	100
Círculo	80

Para hallar la densidad superficial fue necesario conocer los valores de la masa y del área de cada figura. Para lo que se empleó una balanza digital y un pie de rey analógico, ambos elementos en presentaciones virtuales (ver anexo 2).

El procedimiento para medir dichas áreas y masas fue sencillo gracias al simulador. Como primer paso, se seleccionó la madera de abeto como material a analizar y se escogió cada una de las figuras, con sus respectivos tamaños, escogidos arbitrariamente.

Como segundo paso, se usaron los instrumentos de medición. El primero de ellos fue el pie de rey, que con una resolución de $\pm$ 0.005 cm en el simulador, permitió realizar medidas características para cada una de las figuras. Cada figura con el tamaño ya establecido, fue insertada entre las mordazas del pie de rey y teniendo en cuenta que cada barra de la escala principal hace referencia a 1 mm, se midieron las longitudes hasta el número aquel que coincidiera con el 0 del nonio. Si la medición no arrojaba un número entero, entonces se tomaba el número que estuviese antes del 0 del nonio. Para las cantidades decimales se usó de nuevo este, escogiendo una barra del nonio que coincidiera perfectamente con una de la escala principal y la posición de esta en dicha escala secundaria indicada en mm, correspondería a las cantidades decimales. Para la cruz fue necesaria la medición de cuatro longitudes, para el trapecio tres, para el triángulo, rectángulo y romboide fueron necesarias dos y para el círculo una (ver anexo 3).

Cada una de estas medidas fue repetida seis veces, de manera que el valor de la media aritmética de estas fue el dato que se usó para hallar el área de cada una de las figuras, que fueron halladas con las fórmulas conocidas gracias a la geometría (ver Apéndice 5).

El segundo instrumento fue la balanza, que con una resolución de $\pm$ 0.001 g, facilitó la medida de las masas de cada una de las figuras. En este caso fue mucho más sencillo, pues únicamente se tuvo que posicionar la figura encima de la balanza y esta arrojó su masa en gramos. Así como las longitudes, estas medidas de masa fueron tomadas seis veces por figura. De la misma manera, se calculó la media aritmética de estos datos que próximamente será el valor a usar para poder hallar la densidad.

Una vez calculados estos datos promedio de área ($\bar{A}$) y masa ($\bar{m}$), como tercer paso, se procedió a calcular las incertidumbres de estas medidas. Para ambos casos la medida de dispersión que se usó fue la desviación estándar. Como en este caso, se trata de un conjunto pequeño de datos, estos se consideran como una muestra más no como una población, por lo tanto la expresión usada para hallar la desviación estándar fue:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_i^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \tag{1}$$

Luego, se definió si las medidas eran directas, es decir, si son medibles mediante instrumentos o indirectas si deben ser encontradas a partir de medidas directas, pues esto influiría en el cálculo de las incertidumbres. Por un lado, la masa es una medida directa, por lo que su incertidumbre fue calculada mediante la siguiente expresión:

$$\delta m = \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{2}$$

Donde s es la desviación estándar y N es la cantidad de datos en la muestra. De manera similar se procedió para calcular la incertidumbre de las longitudes. Por otro lado, el área es una medida indirecta, pues debió calcularse a partir de la longitud característica para cada figura. Por lo tanto la expresión usada para calcular la incertidumbre fue:

$$\delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial A}{\partial y}\right| \delta y + \left|\frac{\partial A}{\partial z}\right| \delta z + ... + \left|\frac{\partial A}{\partial n}\right| \delta n \tag{3}$$

Donde A es el área que depende de las variables x,y,z,..,n.

Lo que se está haciendo es tomar las derivadas parciales de las funciones de área respecto a cada una de las variables, aplicarles valor absoluto y la suma de todos los términos representa la incertidumbre del área.

Es de importancia recordar que en 3 la expresión se usa si las incertidumbres de las variables x,y,z,..,n son pequeñas, como en el caso de estudio.

Conocidas las incertidumbres de las variables en cuestión, como cuarto y último paso se calcularon las densidades para cada una de las figuras y con un código en python, mediante el método de mínimos cuadrados, se pudo conocer la regresión lineal entre los valores obtenidos experimentalmente y los valores teóricos propuestos.

2.1. Código en python

Con el fin de analizar la dependencia lineal de la masa y el área se realizo un código en python, que realizará un ajuste lineal y que mostrará la gráfica (ver figura 1). Este ajuste de los datos se hizo por medio de la función *curve_fit* del módulo *optimize* de la librearía *scipy* en python y fue implementado en jupyter notebook. [2]

La función *curve_fit* recibe como parámetros de entrada: primero, la función deseada para el ajuste, que en este caso es la ecuación de la línea recta $ax+b$; segundo, los datos, tanto de la variable independiente como de la dependiente; y por último los errores en la variable independiente.

Esta función usa el método de mínimos cuadrados para encontrar la función que se ajusta mejor a los datos. De manera que se obtiene por medio del comando $curve\_fit$ los parámetros de ajuste de la función, en este caso a y b, y a su vez, los errores asociados a estos. Dicho error es estimado por el comando y corresponde a una desviación estándar, que igualmente, se ve influido por los errores de la variable independiente que fueron dados.

Finalmente, con base en estos parámetros se puede graficar la función de ajuste y asimismo obtener la pendiente de esta recta.

3. Tratamiento de Datos

Para empezar, se mostrarán los resultados de las masas y áreas, encontradas para cada figura. En el caso de la masa, la incertidumbre se calculó con la desviación estándar de las seis mediciones realizadas, mediante la ecuación 2. A su vez, las incertidumbres del área fueron calculadas por el método de derivadas parciales también para cada figura, como se mostró en la ecuación 3. (ver cuadro 2).

[2] Aquí puede encontrar el código de Jupyter Notebook.

Cuadro 2. Este cuadro muestra los resultados de masa y área para cada figura. Observe la relación entre la cantidad de masa y área.

Figuras	Masa $[g]$	Área $[cm^2]$
Romboide	2.370 ± 0.002	5.304 ± 0.067
Triángulo	2.885 ± 0.001	6.393 ± 0.057
Trapecio	3.316 ± 0.001	7.364 ± 0.089
Rectángulo	3.714 ± 0.002	8.353 ± 0.106
Cruz	4.353 ± 0.002	9.67 ± 0.19
Círculo	5.021 ± 0.002	11.05 ± 0.15

Para llegar a estos resultados se tomaron en cuenta los valores de las longitudes características de cada figura (ver sección 5). Con esto se puede conocer el área de todas estas figuras. En los apéndices A y B, se muestran las ecuaciones usadas para dicha área y su incertidumbre asociada.

Ahora, se puede calcular las densidades superficiales para cada uno de las figuras anteriormente mostradas en el recuadro. Para lo cual, se toma en cuenta la siguiente ecuación:

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{M}}{\bar{A}} \tag{4}$$

Donde $\bar{M}$ representa la masa promedio y $\bar{A}$ el área promedio. Está ecuación es válida ya que estamos manejando objetos con densidad homogénea. A su vez, estos son valores promedio porque se está manejando un conjunto de datos a los cuales se obtiene su media aritmética.

Además, se puede usar el método de derivadas parciales para calcular la incertidumbre de la densidad superficial. Esto, como lo muestra la siguiente ecuación:

$$\delta\sigma = \frac{\delta M}{A} + \frac{M\delta A}{A^2} \tag{5}$$

Por otro lado, se puede calcular el porcentaje de error de los datos de densidad, tomando en cuenta el valor conocido para la madera de abeto. Este se obtiene mediante la expresión:

$$error = \left| \frac{valor_{experimental} - valor_{teórico}}{valor_{teórico}} \right| \cdot 100 \tag{6}$$

Donde el valor de referencia es igual a $\sigma = 0{,}45 g/cm^2$. Lo anterior conlleva a la siguiente tabla de datos (ver cuadro 3)

Como factor adicional, se realizó un código en python. De donde se obtiene el ajuste lineal de los datos de masa vs área, ya que, como se mencionó antes estas magnitudes son directamente proporcionales; a mayor área, mayor masa, y viceversa. En suma, esto consiste en la tendencia esperada para dichos datos.

Cuadro 3. Este cuadro contiene los datos estimados para las densidades, así como el porcentaje de error calculado con respecto al valor conocido de la densidad de la madera de abeto.

Figuras	densidad $[g/cm^2]$	error
Romboide	0.4468 ± 0.0061	0.71 %
Triángulo	0.4513 ± 0.0042	0.28 %
Trapecio	0.4503 ± 0.0056	0.06 %
Rectángulo	0.4446 ± 0.0059	1.20 %
Cruz	0.450 ± 0.009	0.06 %
Círculo	0.4542 ± 0.0065	0.92 %

Dentro de este código se hace la regresión lineal por medio de la función *curve_fit* como se mencionó anteriormente en metodología. De esta se obtienen los parámetros de ajuste de la línea recta y los errores para su pendiente y ordenada. Este error es el estimado por el comando, que igualmente, toma en cuenta el error añadido a la variable independiente, que en este caso es la masa (Ver figura 1).

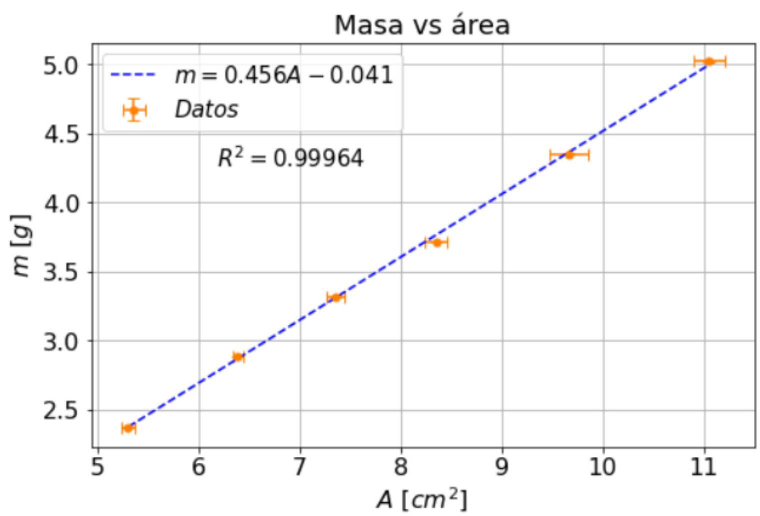

Fig. 1. Esta gráfica muestra el ajuste lineal hecho de los datos de masa y área de las seis figuras hechas de madera. Observe que los Datos se ajustan con precisión a la recta.

El valor obtenido por este ajuste fue de $m = 0.456A - 0.041$ con errores asociados por el método de regresión de 0.001 para la pendiente y 0.003 para la ordenada. Además el coeficiente de correlación de Pearson fue de: R^2 =0.9996. En este caso la pendiente de la recta es equivalente al valor de la densidad superficial del material, por lo que, se obtiene que:

$$\sigma = (0{,}456 \pm 0{,}001)\, g/cm^2 \tag{7}$$

Donde el porcentaje de error asociado es igual a:

$$error = 1{,}33\,\% \pm 0{,}22\,\% \tag{8}$$

4. Análisis de Resultados

La densidad es una propiedad que depende del material en vez de los objetos, para comprobar esa proposición se usó el experimento anterior. Por eso se ve que el resultado final es una misma cifra, aunque sean figuras diferentes cada una con su propia masa y área. Los resultados del experimento constan de varias características que se pueden señalar:

Se comprueba tanto a partir de la gráfica (ver figura 1) como del cuadro 2 que las variables de masa y área son directamente proporcionales ya que, una aumenta a medida que la otra lo hace; comprobando a su vez que su densidad superficial es homogénea.

Los métodos experimentales con poca rigurosidad pueden diferir del valor teórico, a causa de pequeños errores que se pueden presentar. Estos se ven reflejados en las incertidumbres halladas para los valores con los métodos explicados antes.

En el cuadro 3, se puede observar que los resultados son medianamente precisos pero, exactos. Esto debido a que las incertidumbres son como mínimo cuatro veces mayor que las mostradas en el ajuste. Sin embargo, los datos son exactos puesto que, los errores varían entre 0,06 y 1,20 %.

Para unir los datos entregados por los seis figuras, se decidió hacer un ajuste lineal y así entregar un solo resultado, siendo este la pendiente de la recta de ese ajuste. Esto puede ser observado en el gráfico de masa vs área (ver figura 1).

Del gráfico referido antes, se puede concluir que se obtuvo una buena exactitud respecto al valor teórico de la densidad, ya que, el coeficiente de correlación de Pearson estuvo muy cerca de 1.

Aunque el experimento permitió observar varias características de la densidad, hay factores que no podemos observar como su dependencia a la temperatura. Este mismo ayudó a tener una mejor visión sobre la densidad y sus características, y sirvió como practica para introducir el correcto manejo de datos y programas como Python.

5. Conclusiones

Los resultados de esta práctica de laboratorio son los siguientes: se consiguió hallar el valor de la densidad para cada figura con buena exactitud, se comprobó la dependencia lineal de los datos de masa y área, resultado que se esperaba por el modelo teórico, y finalmente se estableció un valor único para la densidad de la madera de abeto, basándose en los datos de masa y área en cada figura.

Con respecto a la densidad en cada figura, se vio que los valores tienen una incertidumbre que varia entre 0,004 y 0,009 g/cm^2, siendo resultados un poco imprecisos, aunque sí fueron exactos. Esto último, considerando que el mayor porcentaje de error fue solamente de 1.20 % (ver cuadro 3). Esto hace que los datos obtenidos sean buenos, pero que sin embargo, puedan mejorarse y así aumentar su precisión.

A su vez, la regresión lineal fue útil para establecer que los datos se ajustan a una dependencia lineal, y por lo tanto, los objetos que se tienen, tienen densidades similares u homogéneas (ver figura 1). Esto es importante porque hace posible dar una relación entre ellos, como la hecha en la última parte de la sección 4. Donde se proporcionó un valor de densidad que incluyó a todos los datos, debido al ajuste lineal, ver ecuaciones 7 y 8.

Es importante mencionar que el ajuste lineal realizado se fundamenta en que la densidad de los objetos que se están usando son constantes, esto quiere decir que esta es homogénea. Con esto, se tiene que se cumple la ecuación 4 y se puede escribir $m = \sigma A$ donde σ sería la constante de proporcionalidad entre la masa y el área. Esto coincide parcialmente con el dato obtenido de m =0,455A-0,041. Pero, en este caso, se puede observar que la ordenada está cerca de cero, haciendo que la pendiente de este ajuste sea una buena aproximación para el valor real de la densidad deseada.

Para continuar, los datos de densidad que fueron derivados del ajuste lineal ganaron en precisión, pasando a una incertidumbre de 0,001 g/cm^2 que es menor a la menor incertidumbre de las figuras individualmente (cuadro 3). Aunque ahora su porcentaje de error aumentó ligeramente a 1,33 %, hecho que puede deberse a las propias incertidumbres del área que se le está proporcionando al código.

Por otra parte, este método de análisis puede ser extendido al calculo de densidades superficiales de otro tipo de materiales como aluminio, hierro, y en particular aquellos que se puedan laminar, y que sean sólidos, esto último para medir directamente las longitudes. Además, la precisión de estos datos puede depender de que tan bien se recorten físicamente las figuras de cada material. Sin embargo, una forma de comprobar si estos datos (masa y área) son consistentes con la realidad, es comprobar que se ajustan bien a una modelo lineal, comprobando que el material no contenga impurezas que alteren su densidad.

Cabe mencionar que para la realización de este reporte nos basamos en el documento guía [1], y además todos los datos del experimento junto con el código de python pueden encontrarse en el siguiente enlace de google drive: Datos y código

Referencias

[1] Forero Pinto o Triana Camacho (2020) Preámbulo del investigador. *Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander* .

Anexos

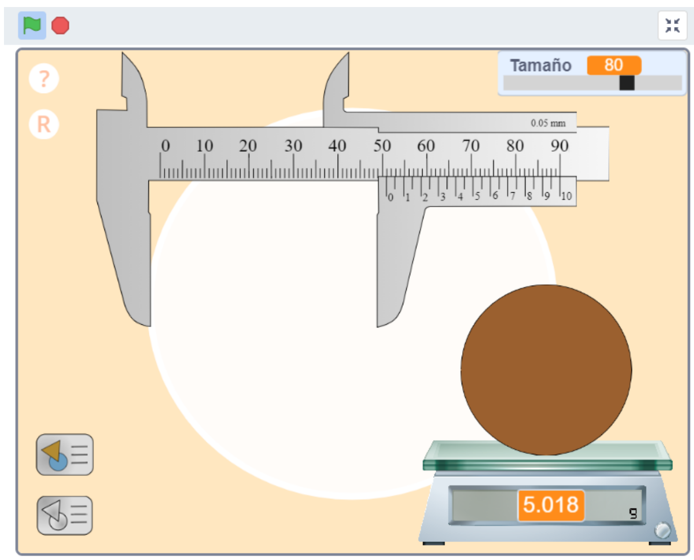

Fig. 2. Montaje experimental en el simulador de Scratch

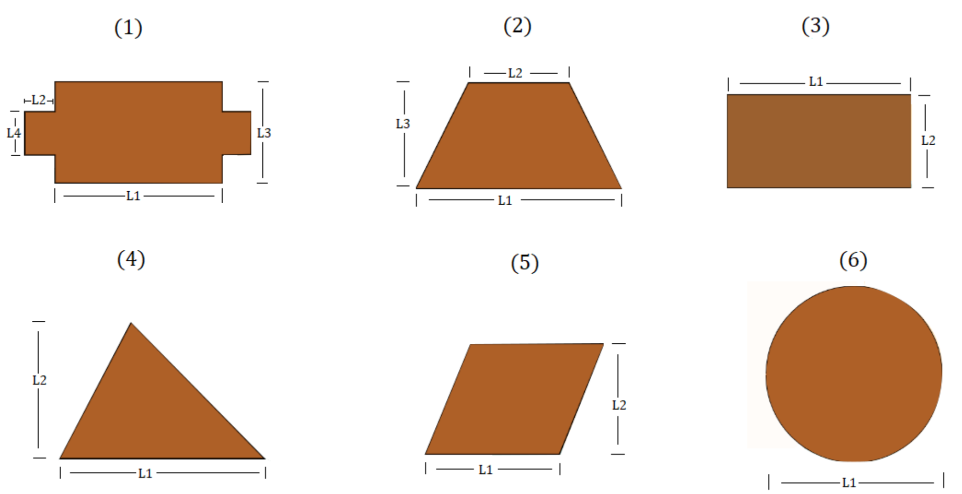

Fig. 3. Longitudes de las figuras mencionadas en la sección 2, que fueron medidas para calcular el área de cada figura

CRUZ - TAMAÑO : 100					
Medición	Masa [g]	L1 [cm]	L2 [cm]	L3 [cm]	L4 [cm]
1	4,356	3,770	0,795	2,265	1,015
2	4,346	3,645	0,735	2,200	0,945
3	4,351	3,770	0,660	2,260	0,975
4	4,348	3,610	0,730	2,200	0,915
5	4,352	3,800	0,730	2,265	0,975
6	4,363	3,705	0,630	2,200	0,945

Fig. 4. Medidas Cruz

ROMBOIDE - TAMAÑO : 90			
Medición	Masa [g]	L1 [cm]	L2 [cm]
1	2,997	2,640	2,290
2	3,001	2,670	2,300
3	3,006	2,640	2,325
4	2,993	2,675	2,290
5	3,002	2,715	2,350
6	3,004	2,670	2,350

Fig. 5. Medidas Romboide

CÍRCULO - TAMAÑO : 80		
Medición	Masa [g]	L1 [cm]
1	5,027	3,705
2	5,017	3,745
3	5,023	3,740
4	5,020	3,700
5	5,022	3,875
6	5,014	3,745

Fig. 6. Medidas Círculo

TRIÁNGULO - TAMAÑO : 100			
Medición	Masa [g]	L1 [cm]	L2 [cm]
1	2,880	4,400	2,925
2	2,883	4,350	2,925
3	2,887	4,435	2,955
4	2,885	4,400	2,920
5	2,888	4,305	2,855
6	2,886	4,405	2,925

Fig. 7. Medidas Triángulo

RECTÁNGULO - TAMAÑO : 85			
Medición	Masa [g]	L1 [cm]	L2 [cm]
1	3,717	4,020	2,050
2	3,709	4,095	2,105
3	3,714	3,965	2,005
4	3,722	4,000	2,080
5	3,710	4,090	2,070
6	3,710	4,110	2,075

Fig. 8. Medidas Rectángulo

TRAPECIO - TAMAÑO : 90				
Medición	Masa [g]	L1 [cm]	L2 [cm]	L3 [cm]
1	3,312	4,360	2,170	2,255
2	3,319	4,435	2,175	2,260
3	3,315	4,335	2,105	2,205
4	3,320	4,465	2,175	2,260
5	3,316	4,460	2,180	2,295
6	3,314	4,340	2,135	2,205

Fig. 9. Medidas Trapecio

Apéndice A: Áreas de cada figura

Para determinar el área de cada una de las figuras se usaron las fórmulas de geometría conocidas y las longitudes medidas en el simulador.

- Círculo $A_{circulo} = \pi \cdot (\frac{L_1}{2})^2$
- Triángulo $A_{triangulo} = \frac{L_1 \cdot L_2}{2}$
- Rectángulo $A_{rectangulo} = L_1 \cdot L_2$
- Romboide $A_{romboide} = L_1 \cdot L_2$
- Trapecio $A_{trapecio} = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \cdot L_3$
- Cruz $A_{cruz} = L_1 \cdot L_3 + 2 \cdot L_2 \cdot L_4$

Apéndice B: Ecuaciones de las incertidumbres del Área para cada figura

Para obtener las incertidumbres del área, en cada figura, se usó el método de derivadas parciales. Las ecuaciones obtenidas toman en cuenta la fórmula del área del apéndice A, y estas son mostradas a continuación.

- Círculo $\delta A = \frac{\pi}{2} \cdot L_1 \cdot \delta(L_1)$
- Triángulo $\delta A = \frac{1}{2} \cdot L_2 \cdot \delta(L_1) + \frac{1}{2} \cdot L_1 \cdot \delta(L_2)$
- Rectángulo $\delta A = L_2 \cdot \delta(L_1) + L_1 \cdot \delta(L_2)$
- Romboide $\delta A = L_2 \cdot \delta(L_1) + L_1 \cdot \delta(L_2)$
- Trapecio $\delta A = \frac{1}{2} \cdot \delta(L_1) \cdot L_3 + \frac{1}{2} \cdot \delta(L_2) \cdot L_3 + \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \cdot \delta(L_3)$
- Cruz $\delta A = L_3 \cdot \delta(L_3) + L_1 \cdot \delta(L_2) + 2 \cdot L_2 \cdot \delta(L_4) + 2 \cdot L_4 \cdot \delta(L_2)$

Apéndice C: Longitudes promedio que fueron medidas

Cuadro 4. Datos de las longitudes promedio para cada figura usada en esta práctica de laboratorio

Figura	L1[cm]	L2[cm]	L3[cm]	L4[cm]
Romboide	2.558 ± 0.016	2.073 ± 0.013		
Triángulo	4.383 ± 0.019	2.918 ± 0.014		
Trapecio	4.399 ± 0.024	2.157 ± 0.013	2.247 ± 0.015	
Rectángulo	4.047 ± 0.025	2.065 ± 0.014		
Cruz	3.717 ± 0.031	0.713 ± 0.024	2.232 ± 0.014	0.962 ± 0.014
Círculo	3.752 ± 0.002			