

Proyecto de laboratorio 6

Conservación de la Energía Cinética y el Momento Lineal en una Colisión Unidimensional

Juan Andrés Guarín Rojas
Angélica María Angarita
Andrés Giovanny Ferreira

5 de Septiembre del 2021

Universidad
Industrial de
Santander



Resumen

Para empezar, el fenómeno de las colisiones es un evento que se pudo ver tanto en la vida cotidiana, estando presente en los deportes, así como en el universo, con la colisión de asteroides. En esta práctica se realizó un experimento para la medición de la conservación del momentum, la conservación de energía en colisiones elásticas, y el valor del coeficiente de restitución. En cuanto a las ecuaciones usadas, se asumió que los choques eran frontales y que los objetos no alcanzaron una energía cinética rotacional muy alta y, por ende, no se tomó en cuenta. En el experimento se decidió usar dos tipos de objetos con forma esférica. En nuestro caso fueron dos canicas y un pepón más grande ambos del mismo material. Estos se hicieron colisionar sobre una superficie de vidrio plana y sin inclinación respecto a la horizontal. En esta superficie también se despreció el efecto de la fricción, por tener un efecto pequeño. Además, se usaron libros para las paredes del riel de colisión. Las masas de los objetos se midieron con una balanza con precisión hasta gramos. En total, se grabaron cinco videos, y con la ayuda del programa Tracker, se midieron las velocidades antes y después del choque en cada uno. Los valores de velocidades finales fueron contrastados con lo esperado de acuerdo a la teoría, obteniendo que. En conclusión se obtuvo que

1. Introducción

Como primera medida, se realizó la distinción entre colisión y choque. La primera hace referencia al movimiento de al menos de dos objetos en esta, los cuales ejercen fuerzas mutuamente. En cambio, los choques son definidos como la interacción de objetos en los cuales al menos uno está en movimiento y otro en reposo. Estos últimos fueron la base para el desarrollo de esta práctica. En estos, se pueden presentar varios tipos de choques: elásticos, inelásticos y perfectamente inelásticos. Entre ellos comparten la característica de conservar la cantidad de momentum y sólo para los elásticos también se conserva la energía cinética.

En este proyecto, como se usaron choques se debió tener algunas consideraciones que fueron de ayuda para el uso de ecuaciones teóricas con los resultados experimentales. Se aclaró que al ser un movimiento producido por un choque generó que sea unidimensional, esto debido a que en un caso ideal se desprecian las fuerzas tales como el rozamiento y el peso. Pero esto no sucede con tanta exactitud en la vida real, para que esto fuera los más apegado a la teoría se buscó disminuir la acción de estas a través de manipulación del montaje usado.

Otra condición para la cual se debió tener alto cuidado es la parte rotacional, en el modelo ideal no está presente ya que su velocidad angular inicial es cero, pero en el montaje esto se presentó en mínima medida gracias al manejo que se mencionó antes, de manera que se puede despreciar su efecto. Para generalizar, el montaje realizado debía cumplir las condiciones adecuadas para que al analizar los videos obtenidos en el software Tracker, los

resultados sean lo más apegados al modelo teórico.

En los vídeos que fueron grabados se realizaron los choques con dos canicas en donde se varió la masa de las usadas, también se realizó uno donde se puede observar el comportamiento para el choque de tres canicas. Para el análisis en Tracker se debió obtener la medida de la masa de las dos diferentes canicas, para esto se usó una balanza de tienda ya que era el método más exacto.

En Tracker se analizaron las velocidades, cantidades de movimiento y energías, antes y después de el choque. Estos valores obtenidos fueron comparados con los resultados esperados por el modelo teórico, hallando sus diferencias y la causa de ellas. Además, se clasificaron los choques de acuerdo con su coeficiente de restitución.

Este informe fue seccionado en 5 partes principales. En primer lugar, en metodología se realizó una descripción del montaje usado con sus respectivas características, resaltando la importancia de cada una. Despues, se hizo una pequeña relatoría sobre el manejo de Tracker y los procedimientos realizados en él. Segundo, en la teoría se muestra el modelo teórico para los diferentes casos presentados, y de allí se plantearon los resultados a esperar del modelo experimental. Tercero, en tratamiento de datos se presentaron los datos obtenidos a partir de Tracker y sus ajustes, haciendo pequeñas explicaciones sobre los resultados. Cuarto, análisis de resultados es la sección en la cual se examinó de forma meticulosa los valores obtenidos en la sección anterior y se entregó un balance de ellos respecto del modelo teórico. Finalizando, en las conclusiones se realizó un recuento sobre la práctica, resaltando los aspectos más predominantes de la misma y se puntuó los conocimientos reforzados a partir de este proyecto.

2. Metodología

2.1. Montaje experimental

Para este proyecto se debió encontrar un montaje propicio para realizar la grabación de los vídeos de los choques necesarios para cumplir con el objetivo de esta práctica. El montaje fue creado a partir de canicas de dos diferentes tamaños, una mesa de vidrio, libros y un soporte casero. Para la creación de este, se usó la mesa de vidrio como base y sobre ella, se ordenaron los 4 libros, creando un riel para disminuir el movimiento hacia los lados de las canicas.

Existen varios factores que se tomaron en cuenta en los movimientos que se realizaron, tales como la fricción, la cual debía ser minimizada en el modelo experimental para tener una mejor aproximación a la teoría. Esto fue logrado gracias a al uso de la superficie de vidrio y las canicas, las cuales también eran de vidrio. El coeficiente de fricción dinámico de estas dos superficies tiene un valor de 0,4, siendo este pequeño comparado a los demás

datos obtenidos, se realizó una aproximación en la cual este valor es despreciable.

Para la grabación de cada uno de los videos, se usó la cámara de un celular [6] buscando la mejor calidad posible, y un soporte casero con la misma posición en cada caso, este cumplió la condición de tener el mínimo movimiento en la toma. Las perspectivas del montaje pueden observarse mejor 1 y 7.

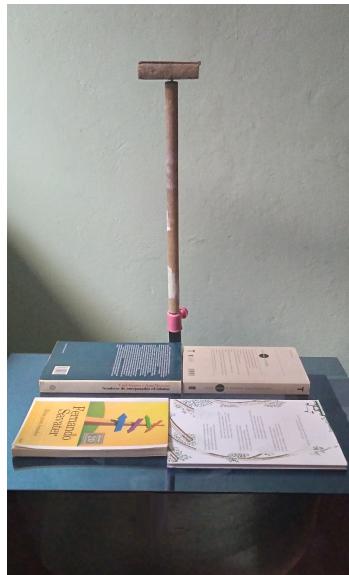


Fig. 1. En esta imagen se puede ver la vista frontal del Montaje experimental del experimento. En ella se puede ver al soporte usado de la cámara para que esta no se moviera. En ella también puede verse la mesa de vidrio usada como superficie y los libros que fueron las paredes del riel.

En la práctica se debieron grabar los vídeos para diferentes casos:

- Casos Vídeo 1, dos maras iguales con $m_1 = m_2 = 6,7g$.
- Casos Vídeo 2, dos pepones iguales con $m_1 = m_2 = 20g$.
- Casos Vídeo 3, un pepón $m_1 = 20g$ contra una mara $m_2 = 6,7g$, donde $m_1 > m_2$.
- Casos Vídeo 4, una mara $m_1 = 6,7g$ contra un pepón $m_2 = 20g$ iguales $m_1 < m_2$.
- Casos Vídeo 5, una mara m_1 colisiona con otra mara m_2 que, a su vez, choca con otra m_3 que tiene justo al lado $m_1 = m_2 = m_3 = 6,7g$.

Antes de ingresar los vídeos al software de análisis *Tracker*, se realizó un medición de la masa de cada una de las canicas. Para hallar este valor se decidió tomarlo con una 'balanza de tienda', la cual entregó un valor aproximado en gramos, es decir tiene una incertidumbre de $\pm 0,001[g]$. Este método fue escogido debido a que los demás se basaban

en otra medidas las cuales tenían mayor incertidumbre, en consecuencia se tendría una propagación de errores de mayor magnitud. Los datos de masa, tamaño y densidad de las maras se pueden ver en la siguiente imagen (ver figura 2)

Fig. 2. En el experimento se usaron dos maras de vidrio con densidades diferentes. La más pequeña tuvo una densidad de $4\pm2 \text{ g/cm}^3$ y $2.4\pm0.6 \text{ g/cm}^3$ para la más grande. Donde sus diámetros fueron 1.5 ± 0.1 y $2.5\pm0.1 \text{ cm}$, y sus masas fueron de $6.7\pm0.1 \text{ g}$ y $20.0\pm0.1 \text{ g}$ respectivamente.



Para el análisis de cada vídeo se realizó un mismo proceso, pero se diferencia en el cambio de masas para los diversos casos. Como paso inicial, se introducen los vídeos en el software y después se procedió a ubicar la vara de calibración, en este caso corresponde a la medida de los dos libros que conforman el riel. Para colocar el eje de coordenadas se debió tener en cuenta que el lado positivo de la horizontal, debía apuntar hacia el lado izquierdo ya que el movimiento se presentó en ese sentido. Se pudo comprobar el cambio del sentido del eje a partir del ángulo de inclinación, este debe ser de una magnitud de 180, el signo de este depende de si se giró en sentido o contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3).

En esta parte del análisis, se tuvo en cuenta que se tenía una canica en movimiento y otra que no lo estaba. A la canica en movimiento se analizó su movimiento antes y después del choque, en cambio para la que se encuentra en reposo se realizó el análisis después del choque, ya que como se mencionó en un principio no tiene movimiento por lo cual su velocidad también lo es.

Cuando se tuvo las condiciones anteriores, se siguió con la creación de masas puntuales, en cada vídeo se debe hacer la separación de las canicas involucradas y también se realizó la separación para el momento antes y después del choque. Se necesito separar cada análisis ya que en el choque se presentó un cambio considerable [4].

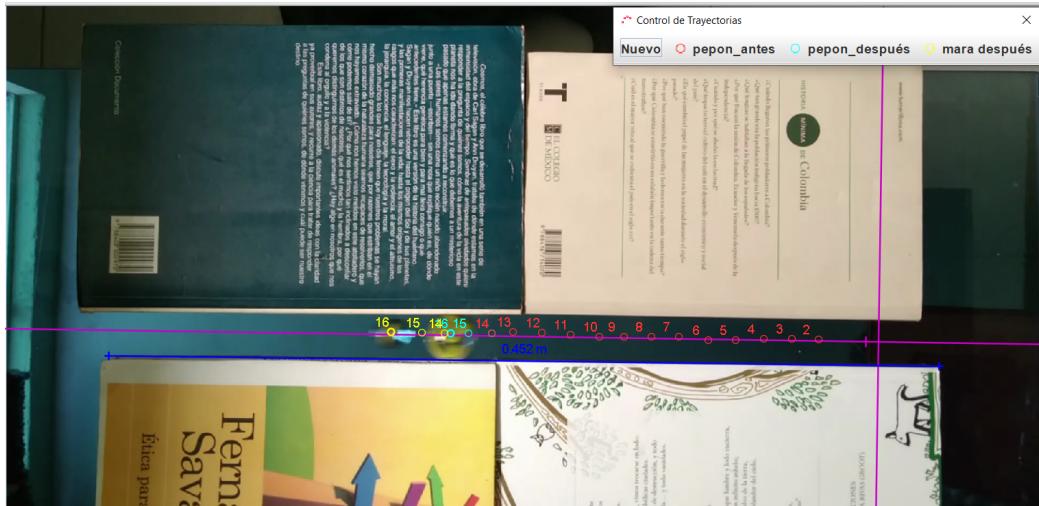


Fig. 3. En esta figura se puede apreciar la vara de calibración y el eje de coordenadas con su respectivo ángulo de inclinación



Fig. 4. Las diferentes cargas puntuales creadas para los videos, este en específico corresponde al video 5

Cuando se decidió realizar las trayectorias de cada una de las masas puntuales creadas, se colocó el tiempo inicial en cero de esta manera se pudieron observar mejor los resultados obtenidos. Esta misma fue calculada manualmente, es decir se debió registrar punto por punto en la trayectoria.

Cada vez que se obtuvo los resultados de la trayectoria para alguna de las masas puntuales, se halló el valor de x , v_x y a_x . Luego con el resultado de la posición se realizó el ajuste lineal para hallar la pendiente de esta y sería el valor de la velocidad para esa canica en ese momento, también se observó ahí mismo la incertidumbre del valor hallado.

3. Teoría

Desde el punto de vista resolutivo de la física, existen diversos caminos para abordar un problema, entre estos, las universales leyes de Newton, o leyes de conservación como la ley de la conservación de la energía cinética. Sin embargo, hay situaciones en las que la resolución de cierto tipo de problemas puede resultar compleja por estos caminos, o de plano que no sea posible llegar a una solución.

Como adición a estas maneras de solucionar problemas, se introduce en la física una

nueva cantidad que describe el movimiento de un objeto. Se trata de la cantidad de movimiento lineal o momentum, que no es más que la presentación real de la segunda ley de Newton presentada por el científico Inglés.

La cantidad de movimiento de un objeto que se mueve con una masa m y velocidad \vec{v} se define como el producto de estos:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Esta cantidad surge a partir del análisis del par de fuerzas acción-reacción que tienen lugar cuando chocan dos objetos. Esta ley establece, que la fuerza que experimenta un cuerpo 1 debido a un cuerpo 2 es la misma que experimenta 2 debido a 1, pero en sentido contrario, o lo que es lo mismo:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Y por lo tanto:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

Usando la segunda ley de newton para sustituir en la fuerza:

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

Nótese que la operación anterior es posible considerando que las masas de los objetos son constantes como en el caso de estudio de esta práctica de laboratorio.

Además nótese que la derivada es igual a cero, por lo que la expresión $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ permanece constante en la variación del tiempo.

A esta expresión se le denomina como cantidad de movimiento lineal de un sistema conformado en este caso por dos partículas de masas m_1 y m_2 que experimentan unas velocidades v_1 y v_2 y se puede extender a un sistema de n partículas, la única condición es que las fuerzas que interactúan sobre dicho sistema son fuerzas internas ejercidas por los pares acción-reacción entre las mismas.

Para el caso de estudio de las colisiones, la conservación de la cantidad de movimiento es evidenciada en cualquier colisión, mientras que la conservación de la energía, permite clasificar las colisiones en tres tipos:

1. Colisiones perfectamente inelásticas

Para este tipo de colisiones, la energía cinética no se conserva y los objetos permanecen unidos tras el choque, de manera que las velocidad finales de los objetos se igualan. Esto se puede observar con lo que se conoce como coeficiente de restitución, un coeficiente que relaciona las velocidades finales e iniciales. Este coeficiente se define como:

$$e = \frac{v_{f_2} - v_{f_1}}{v_{i_1} - v_{i_2}}$$

Y se obtiene a partir del análisis de la conservación de la energía cinética en las colisiones elásticas. Teniendo que:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1_i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1_f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_f}^2$$

$$m_1(v_{1_i}^2 - v_{1_f}^2) = m_2(v_{2_f}^2 - v_{2_i}^2)$$

$$m_1(v_{1_i} - v_{1_f})(v_{1_i} + v_{1_f}) = m_2(v_{2_f} - v_{2_i})(v_{2_f} + v_{2_i})$$

Ahora, de por la conservación de la cantidad de momento se tiene que:

$$m_1v_{1_i} + m_2v_{2_i} = m_1v_{1_f} + m_2v_{2_f}$$

Y por lo tanto:

$$m_1(v_{1_i} - v_{1_f}) = m_2(v_{2_f} - v_{2_i})$$

Ahora, si se divide la expresión anteriormente obtenida por energías, entre esta expresión, se tiene que:

$$(v_{1_i} + v_{1_f}) = (v_{2_f} + v_{2_i})$$

Y por lo tanto, dejando del mismo lado las velocidades iniciales y del otro lado las velocidades finales, se obtiene que:

$$(v_{1_i} - v_{2_i}) = -(v_{1_f} - v_{2_f})$$

Nótese que:

$$v_{2_f} = v_{1_i} - v_{2_i} + v_{1_f} \tag{1}$$

$$v_{1_f} = v_{2_i} - v_{1_i} + v_{2_f} \quad (2)$$

Y al cociente de estos dos factores se le conoce como coeficiente de restitución e .

Este coeficiente de restitución toma valores tales que $0 \leq e \leq 1$ y clasifica las colisiones en cierto tipo tal como se había mencionado.

Para este caso de colisiones perfectamente inelásticas el coeficiente de restitución toma el valor de $e = 0$ lo que implica que las velocidades finales de los objetos sean iguales y por lo tanto una vez choquen se unan. Este caso es un caso hipotético, pues en realidad las velocidades aunque puedan igualarse, no permanecerán así con el paso del tiempo, porque parte de la energía que poseen se pierde en calor, sin considerar presencia de otras fuerzas que también inciden en la realidad.

2. Colisiones elásticas

En este tipo de colisiones la energía cinética se conserva. Y el coeficiente de restitución toma un valor de $e = 1$, partiendo de este hecho y asumiendo la conservación del momento lineal, es posible conocer las expresiones para las velocidades finales de cada uno de los objetos.

Partiendo de la conservación del momento lineal y sustituyendo 1 en dicha expresión, se tiene que:

$$m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 (v_{1_i} - v_{2_i} + v_{1_f})$$

Tras simplificaciones, se llega a que:

$$(m_1 + m_2) v_{1_f} = (m_1 - m_2) v_{1_i} + 2m_2 v_{2_i}$$

Y por lo tanto, de manera general, para la velocidad final del objeto 1 en un choque elástico, se tiene que:

$$v_{1_f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1_i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2_i}$$

Haciendo el mismo proceso con 2, se llega a una expresión general para choques elásticos para la velocidad final del objeto 2:

$$v_{2_f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1_i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2_i}$$

Este tipo de colisión, también es ideal, pues en realidad la energía no se conserva si no que se pierde en forma de calor.

3. Colisiones inelásticas

En este tipo de colisiones la energía no se conserva y son el tipo de colisiones que ocurren en la realidad, donde el coeficiente de restitución toma un valor de $0 < e < 1$.

Adicionalmente, es posible relacionar el valor de e con la energía cinética perdida en los casos de colisiones no elásticas. Se empezó considerando el hecho de que en estos casos la energía cinética no se conserva y, por lo tanto, $\Delta K < 0$ lo que quiere decir que la energía cinética final es menor que la inicial pues hay una perdida de energía.

$$K_f - K_i < 0 \implies K_f < K_i$$

Ahora, se nombró al valor de perdida de energía como $\Delta K = -C$, donde C es una constante positiva. De esta forma, se tuvo que $K_i = K_f + C$.

En este punto se consideró el choque frontal entre dos cuerpos m_1 y m_2 con velocidades iniciales v_{1i} , $v_{2i} = 0$, y velocidades finales v_{1f} , v_{2f} . Donde se tomo v_{2i} como cero para hacerlo más simple. Con lo cual el coeficiente de restitución quedo como:

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i}} \quad (3)$$

Luego, se tomó en cuenta que se conservaba el momentum lineal. De esta manera, la ecuación de energía cinética quedo como:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1v_{1f}^2 + m_2v_{2f}^2\right) + C$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2v_{2f}^2 + 2C$$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2v_{2f}^2 + 2C$$

Igualmente, se tomó la ecuación anterior y se dividió entre la ecuación de momentum expresada como $m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2v_{2f}$.

$$\frac{m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})}{m_1(v_{1i} - v_{1f})} = \frac{m_2v_{2f}^2}{m_2v_{2f}} + \frac{2C}{m_2v_{2f}}$$

Esta ecuación es válida siempre que $v_{1_i} \neq v_{1_f}$ y $v_{2_f} \neq 0$, para evitar que el denominador se haga cero. Por su parte, al continuar, se obtuvo

$$\begin{aligned} v_{1_i} + v_{1_f} &= v_{2_f} + \frac{2C}{m_2 v_{2_f}} \\ -(v_{2_f} - v_{1_f}) &= -v_{1_i} + \frac{2C}{m_2 v_{2_f}} \\ -\frac{v_{2_f} - v_{1_f}}{-v_{1_i}} &= 1 + \frac{2C}{m_2 v_{2_f} (-v_{1_i})} \\ e = 1 - \frac{2C}{m_2 v_{2_f} v_{1_i}} & \end{aligned} \tag{4}$$

Con lo cual se obtuvo que e puede valer uno solo cuando $C = 0$, es decir cuando la perdida de energía cinética sea cero. Y además se tuvo que e fuera igual a cero cuando la perdida de energía fuera $C = \frac{1}{2} m_2 v_{2_f} v_{1_i}$.

Revisando las magnitudes, para comprobar que e resulta adimensional, se encontró:

$$\begin{aligned} [e] &= \left[\frac{N \cdot m}{kg \cdot m^2 / s^2} \right] \\ [e] &= \left[\frac{kgm/s^2}{kg \cdot m/s^2} \right] = [adimensional] \end{aligned}$$

De igual forma se intentó simplificar la ecuación obtenida para el coeficiente de restitución e partiendo de la ecuación 3:

$$\frac{v_{2_f} - v_{1_f}}{v_{1_i}} = e$$

$$v_{2_f} - v_{1_f} = ev_{1_i}$$

$$v_{1_f} = v_{2_f} - ev_{1_i}$$

Aplicando la ecuación de conservación de momentum se obtuvo:

$$m_1 v_{1_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 (v_{2f} - ev_{1i}) + m_2 v_{2f}$$

$$\frac{m_1 v_{1i} (1+e)}{m_1 + m_2} = v_{2f}$$

Con lo cual, se llegó a:

$$\begin{aligned} e &= 1 - \frac{2C}{m_2 \left(\frac{m_1 v_{1i} (1+e)}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}} \\ 1 - e &= \frac{2C(m_1 + m_2)}{m_2 (m_1 v_{1i} (1+e)) v_{1i}} \\ (1 - e)(m_1 v_{1i} + m_1 ev_{1i}) &= \frac{2C(m_1 + m_2)}{m_2 v_{1i}} \\ m_1 v_{1i} - m_1 e^2 v_{1i} &= \frac{2C(m_1 + m_2)}{m_2 v_{1i}} \\ e &= \pm \sqrt{\frac{m_1 v_{1i} - \frac{2C(m_1 + m_2)}{m_2 v_{1i}}}{m_1 v_{1i}}} \end{aligned}$$

Como $e > 0$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2C(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v_{1i}^2}} \quad (5)$$

Analizando las magnitudes, se encontró que e es adimensional como se esperaba:

$$\begin{aligned} [e] &= \left[\sqrt{\frac{N \cdot m \cdot kg}{kg^2 \cdot m^2 / s^2}} \right] \\ [e] &= \left[\sqrt{\frac{kg \cdot m / s^2}{kg \cdot m / s^2}} \right] = [\sqrt{adimensional}] = [adimensional] \end{aligned}$$

En conclusión, se obtuvo una ecuación que relaciona el coeficiente de restitución e con el valor de la energía cinética perdida y con las condiciones iniciales de velocidad y de masas m_1 y m_2 . Donde se consideró a la velocidad inicial de m_2 como cero.

Igualmente, para que la ecuación 5 tuviera sentido se necesitaría que:

$$\frac{2C(m_1 + m_2)}{m_1 m_2 v_{1i}^2} < 1$$

$$C < \frac{m_1 m_2 v_{1i}^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (6)$$

4. Tratamiento de Datos

Para el tratamiento de datos se realizaron los ajustes de los datos de posición para el movimiento de las maras y pepones mediante un modelo lineal. Esto, debido a que sabemos que no hubieron fuerzas externas presentes durante el movimiento. De esta forma, la pendiente del ajuste lineal fueron los datos de velocidad que se tomaron (ver figura 5). Los resultados de estos datos para cada caso se pueden encontrar en los siguientes cuadros (ver cuadros 1 y 2).

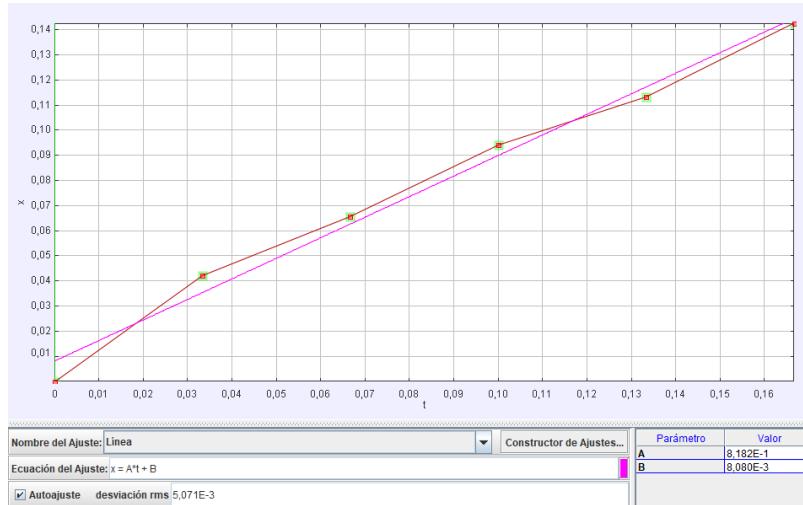


Fig. 5. En esta imagen se muestra un ejemplo del ajuste de los datos de posición en x. En tracker se obtienen los parámetros de la línea recta que mejor se ajusta a los datos y la desviación estándar para cada uno. Igualmente, el sistema otorga una desviación rms que indica que tan preciso es el ajuste comparado con los datos.

En las tablas además se muestra el valor del coeficiente de restitución e , que se calculó en base a los datos de velocidad allí mostrados. En el caso del vídeo 5 se calculó e como si m_1 le hubiera dado toda su energía cinética a m_3 . Con lo cual se garantizó $e = 1$ si la velocidad de m_3 fuera igual a la velocidad inicial de m_1 más su velocidad final, donde además m_1 y m_2 no se movieran mucho, como ocurrió en nuestro caso.

Cuadro 1. En esta tabla se ven los datos obtenidos de cada uno de los vídeos para las velocidades.

video	v_{1_i} [m/s]	v_{1_f} [m/s]	v_{2_f} [m/s]	v_{3_f} [m/s]	e
1	0.82 ± 0.05	0.189 ± 0.001	0.505 ± 0.006	—	0.39 ± 0.03
2	0.97 ± 0.03	0.197 ± 0.006	0.49 ± 0.01	—	0.30 ± 0.02
3	0.490 ± 0.002	0.294 ± 0.0	0.376 ± 0.005	—	0.18 ± 0.02
4	1.27 ± 0.03	-0.40 ± 0.03	0.273 ± 0.004	—	0.53 ± 0.04
5	0.367 ± 0.003	0.0279 ± 0.0007	0.026 ± 0.005	0.2281 ± 0.0002	0.55 ± 0.02

Cuadro 2. En esta tabla se ven los datos de las masas de acuerdo al caso de estudio. El valor de la incertidumbre fue de 0.0001 kg para todas las mediciones

video	m_1 [kg]	m_2 [kg]	m_3 [kg]
1	0.0067	0.0067	—
2	0.02	0.02	—
3	0.02	0.0067	—
4	0.0067	0.02	—
5	0.0067	0.0067	0.0067

Adicionalmente, todas las imágenes donde se realizaron los ajustes pueden encontrarse en el anexo 6.

Cabe destacar que los datos de incertidumbre de las velocidades fueron tomados de la desviación estándar dada por Tracker para ese parámetro de ajuste. En el caso de las masas se tomó en cuenta que se usó una balanza con una incertidumbre de 0.1 gramos. Y en el caso del coeficiente de restitución e , la incertidumbre fue calculada por el método de diferencias finitas como se muestra en la sección 6.

Después de esto, se hallaron los errores porcentuales del momentum lineal y de la energía cinética, con el objetivo de poner a prueba la conservación del momentum y para calcular la perdida de energía. En la tabla 3 se pueden ver los resultados obtenidos en cada caso.

Cuadro 3. Errores de los valores de momentum y energía cinética en porcentajes

vídeo	$\%Error_p$	$\% Error_K$
1	15 ± 8	57 ± 7
2	29 ± 5	70 ± 5
3	20 ± 3	37 ± 3
4	67 ± 5	76 ± 4
5	23 ± 5	60 ± 2

Donde los valores de incertidumbre fueron calculados por medio del método de diferencias finitas, usando las incertidumbres de los momentum y energías cinéticas derivadas de las de masa y velocidad. Para más detalles ver la sección 6.

Es importante destacar que también se observó que si se consideraba la conservación de momentum angular en lugar de la de momentum lineal, los valores de porcentaje de error en el video 3 y 4 respectivamente pasaban a ser:

$$\%Error_L = 18,1 \quad (7)$$

$$\%Error_L = 24 \quad (8)$$

Donde para los demás casos el error fue el mismo, ya que en ellos los radios de las masas eran iguales. Esto fue posible hacerlo considerando que la sumatoria de torques desde el centro de rotación era cero puesto que no hubieron torques externos a parte de la fuerza de fricción. Y debido a que había rodadura el torque debido a la fuerza de fricción se podía despreciar. En estos casos se consideró al momentum angular como $L = Iw$ donde $I = \frac{2}{5}mr^2$ fue el momento de inercia para la esfera, que consideramos como maciza por dentro, y $w = \frac{v}{r}$ fue la velocidad angular que tiene esa forma por la condición de rodadura. Para más detalles de los cálculos puede ver el archivo de excel donde se hicieron los calculos ¹.

Los datos donde se encuentran los valores de momentum y energía cinética pueden encontrar en el cuadro de anexos 5.

Finalmente, se realizó una comparación entre la perdida de energía cinética que resultó de los datos y la perdida que se puede inferir de la ecuación [5]. De esta forma, el valor de energía cinética perdida en función de e y de algunas condiciones iniciales fue:

$$C = \frac{m_1 m_2 v_1^2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} \quad (9)$$

Tomando a la perdida de energía como que $|\Delta K| = C$ para el caso teórico y como $|\Delta K| = K_i - K_f$, se obtuvieron los datos de la siguiente tabla (ver tabla 4).

¹<https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/blob/main/Laboratory/Lab6FrontalCollisions/Calcs.xlsx>

Cuadro 4. En esta tabla se muestra una comparación entre los datos obtenidos experimentalmente de la perdida de energía cinética, y el valor que se esperaba teóricamente. El valor de e para el cálculo teórico fue tomado del obtenido experimentalmente.

Vídeo	$ \Delta K $ experimental [J]	$ \Delta K $ teórico [J]	Error ΔK [J]	% Error ΔK [J]
1	1.26×10^{-3}	9.5×10^{-4}	3.13×10^{-4}	32.94
2	6.52×10^{-3}	4.23×10^{-3}	2.29×10^{-3}	54.22
3	7.7×10^{-4}	5.1×10^{-4}	2.61×10^{-4}	51.21
4	4.07×10^{-3}	2.87×10^{-3}	1.19×10^{-3}	41.54
5	2.7×10^{-4}	1.6×10^{-4}	1.13×10^{-3}	71.61

En estas ecuaciones de perdida de energía, la variación de perdida de energía se calculó como:

$$\text{Error}\Delta K = |\Delta K_{\text{teórico}} - \Delta K_{\text{experimental}}|$$

Y el porcentaje de error como:

$$\% \text{Error}\Delta K = |\Delta K_{\text{teórico}} - \Delta K_{\text{experimental}}| / \Delta K_{\text{teórico}}$$

5. Análisis de Resultados

En esta práctica se estudió el principio de conservación de momentum para una colisión unidimensional de dos objetos trasladándose sin fuerzas externas. También se estudió el parámetro e que representa el coeficiente de restitución de la colisión, donde e varía de cero a 1. De manera que, se tuvo que si $e = 1$ la energía cinética se conserva y cuando $e < 1$ no se conserva. Además es importante mencionar que en este experimento solo se consideraron a los proyectiles como masas puntuales y no como cuerpos rígidos, que en este caso, fueron esferas. Esto hace que la energía no se conserve del todo y que los momentum puedan cambiar al considerar la rotación de los cuerpos en colisión.

Tomando en cuenta lo anterior, en primer lugar se mostraron las velocidades obtenidas en cada caso. Con ellos se calculó el coeficiente de restitución e , dando como resultado que en los vídeos 1, 2, 4 y 5 la colisión fuera inelástica y en el vídeo 3 estuviera un poco más cerca de ser plástica pero no tanto (ver cuadros 1 y 2). Los valores fueron principalmente intermedios, indicando que se tienen casos no ideales donde después del choque la forma no se recupera completamente. En el caso del vídeo 3 se pudo notar que debido a que la mara que fue lanzada tenía mayor masa que la otra, el impulso debido al choque iba a retrasar menos su velocidad, haciendo que su momentum cambiara menos. Esto también se pudo evidenciar en el vídeo 4 cuando al lanzar la mara pequeña contra la grande, la mara de mayor masa avanzó lentamente después del choque, mientras que la otra, que había sido lanzada, rebotó y cambió su dirección de velocidad; aunque ambos objetos hubieran expe-

rimentado el mismo impulso, es decir, la misma fuerza y durante el mismo tiempo.

También se pudo observar que en el caso de las colisiones de las dos maras con la misma masa (vídeos 1 y 2) se pudo ver que el coeficiente de restitución fue similar, siendo de 0.39 para las dos maras pequeñas y 0.30 para las dos maras grandes. Siendo esta similitud debida a que ambos tipos de maras son de un material muy similar, ya que fueron de material vidrioso con densidades de $4g/cm^3$, con una incertidumbre igual a $1.6g/cm^3$, en las maras pequeñas y $2.4g/cm^3$, con una incertidumbre de $0.2g/cm^3$, en las grandes (ver figura 2). Esto va de acuerdo con que el coeficiente e debería ser similar para colisiones de materiales similares como en el caso de los vídeos 1 y 2. Para los demás vídeos, esto pudo no haberse cumplido por haber sido colisiones entre objetos de distinto tamaño o por ser un choque con tres maras.

Cabe mencionar el caso del vídeo 3, se tuvo una colisión mas cercana a ser plástica, quizás debido a que la masa grande no se vio tan afectada al colisionar contra la pequeña por ser tres veces más grande cómo puede verse en 2.

Luego de esto, se mostraron los resultados para los porcentajes de error del momentum y la energía cinética. En el caso del momentum los datos mostraron una reducción apreciable del momentum final (ver cuadro 3). A excepción del vídeo 4, ese error fue cercano al 20%. Hay varias cosas que pudieron haber hecho que no se conservara, entre ellos la fricción con el suelo pudo haber reducido un poco la velocidad justo después del choque como para que esas diferencias sean detectables. Otro factor a tomar en cuenta fue el hecho de que las maras están rodando sobre la superficie con un momentum angular asociado a su giro. Realizando este análisis se obtuvo una mejora en el error asociado al vídeo 4, puesto que este se redujo a 24.2% (ver ecuación 7). Para agregar, otro factor de perdida de momentum pudo haber sido que las maras hallan chocado contra las paredes y esto les halla dado un impulso externo que cambiara su momentum. Para finalizar, es posible que los datos de velocidad no se hubieran medido con precisión en Tracker debido a errores en la posición que se pusiera para la masa en cada cuadro.

Para continuar, se encontró que para las energía cinética la perdida de energía fue cercana al 50% indicando una perdida considerable (ver cuadro 3). Los casos de mayor perdida fueron los del vídeo 3 y 4. En el caso del vídeo 3 esto pudo deberse a que la colisión estuvo más cerca de ser plástica, y en el vídeo 4 la perdida de energía pudo deberse a un factor externo como la fricción. En este caso, la fricción del pepón que fue lanzado en el vídeo 4 tuvo que haber sido mayor porque tuvo mayor masa.

Ahora, para analizar de mejor manera la perdida de energía cinética se consideró una ecuación teórica basada en las condiciones iniciales y en el coeficiente de restitución (ver ecuación 9). Con esto, se obtuvieron los valores de perdida de energía asociados al valor de e y, por tanto, relacionados con deformación neta de los objetos. Esto indicó que una parte

de la energía perdida se debió a que durante el choque los materiales se deformaban pero no restituían su forma completamente. De esta forma los valores de error mostrados en la tabla representan la perdida de energía debida a factores externos a la deformación, como por ejemplo la fricción. Con esto, se obtuvo que, la perdida de energía estuvo influenciada por factores externos, puesto que el porcentaje de error es cercano al 50%

6. Conclusiones

Por medio del análisis de esta práctica, desde el punto de vista teórico se evidenció que para cualquier colisión, la cantidad de movimiento lineal se conservó, es decir, que fue la misma antes y después del choque, sin embargo, a nivel experimental, aunque sí se obtuvieron datos con los que el momento no varió mucho antes del choque y después de este, también se obtuvieron otros en los que dichos valores para las variaciones de cantidades de movimiento lineal fueron mayores, esto debió deberse únicamente a la toma de datos en las velocidades para cada caso y para cada objeto, estas velocidades que fueron medidas en *Tracker* a partir de la posición, llevaron consigo un error debido a la propagación de errores. Además, se pudieron deber también a posibles colisiones con las paredes del riel y al ocasionar variaciones en las velocidades de los objetos, también, ocurrieron variaciones en las cantidades de movimiento lineal.

Respecto a los choques como tal, se evidenció que no ocurren los casos teóricos de colisiones perfectamente inelásticas o colisiones elásticas, en las que se podría conservar o no la energía cinética, pero que son casos en los que no se consideran presencia de otros factores, como el caso de las colisiones perfectamente inelásticas en los que $e = 0$, lo que asegura que las velocidades finales de los objetos son iguales, caso que no ocurre en la práctica debido a la pérdida de energía en forma de calor. O para el caso de colisiones elásticas, en los que se asume la conservación de la energía cinética, hecho que como se acaba de mencionar no ocurre.

Gracias al análisis hecho en el modelo teórico, se pudo calcular la constante C para cada caso de estudio, y con esta obtener el valor del error en la pérdida de energía cinética. Estos errores, pudieron ser elevados, debido a la deformación de los objetos, producto de los errores ya mencionados en las velocidades que también afectaron a los valores de cantidad de movimiento lineal.

Se evidenció de igual manera, un factor importante para la obtención de resultados en esta práctica de laboratorio, que fue la fricción con la superficie. En este caso, el coeficiente de rozamiento dinámico entre las superficies es de 0,4 al tratarse de vidrio-vidrio. Este coeficiente de rozamiento se vio implícito en la fuerza de fricción ejercida al contacto de las canicas con la superficie del riel. Dicha fuerza de fricción generó variaciones en las velocidades de cada objeto, y fue en gran parte a lo que se debieron los errores de cantidad

de movimiento lineal. Esta fuerza de fricción podría disminuirse, disminuyendo el coeficiente de rozamiento entre las superficies, agregando una sustancia que hiciera más fácil el deslizamiento de los objetos.

Como se evidenció en análisis, para algunos de los casos de estudio, sería posible realizar los cálculos de los momentos angulares de los objetos, para observar la conservación de estos mismos, debido a la obtención de errores grandes en las mediciones de cantidades de movimiento lineales en cada uno de estos casos. Adicionalmente, este análisis nos llevo a mencionar que otra cantidad que debería conservarse en este experimento es el momentum angular, siempre que no hubieran torques externos netos.

Por último, esta práctica permitió estudiar el comportamiento de las colisiones y su comportamiento real en la cotidianidad, donde se deben tener en cuenta la mayor cantidad de factores posibles que sobre estos actúen. El estudio de este fenómeno es muy importante en aplicaciones como la fabricación de vehículos, donde se debe tener en cuenta la preservación tanto de la integridad del vehículo, como del pasajero, y a partir de esto, diseñar la construcción que mejor se ajuste a lo deseado.

Los datos de esta práctica pueden encontrar en el [repositorio](#) de Git Hub. Igualmente, este experimento se guió en el documento de referencia [1].

Referencias

- [1] Pinto F, Camacho T, otros (2020) Econservación de la energía cinética y el momento lineal en una colisión unidimensional. *Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander* .

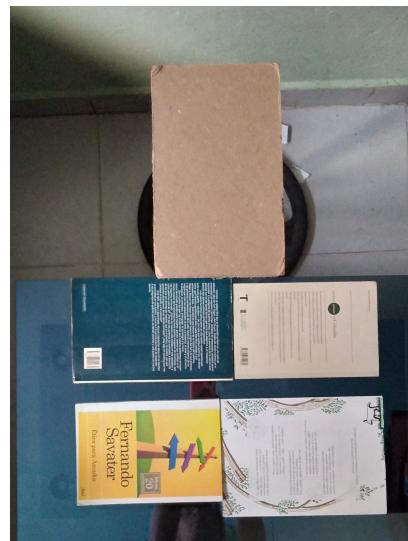
Anexos

Anexo A: Montaje experimental

Fig. 6. La cámara cuenta con una resolución de 1200x680 y graba con 30 FPS.



Fig. 7. En esta imagen se ve el Montaje experimental desde la vista superior. En esta misma posición estuvo grabando la cámara a las colisiones realizadas.



Anexo B: Imágenes de ajuste

- Casos Vídeo 1, dos maras iguales con $m_1 = m_2$.

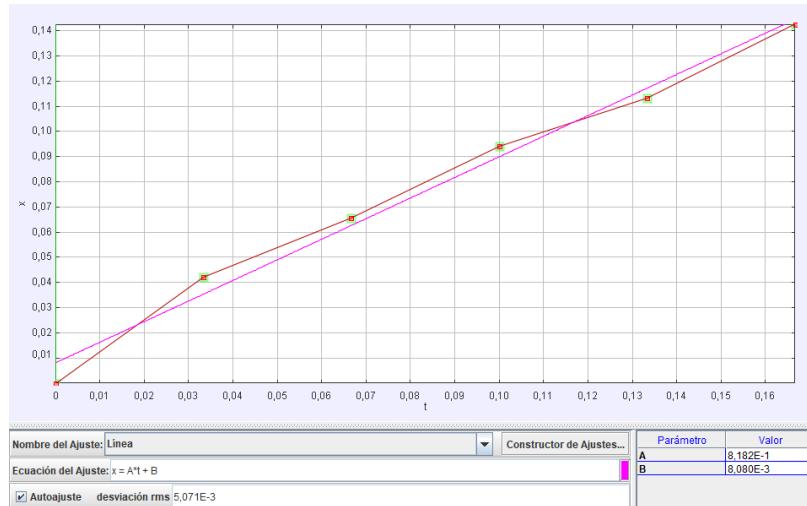


Fig. 8. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_1 antes del choque.

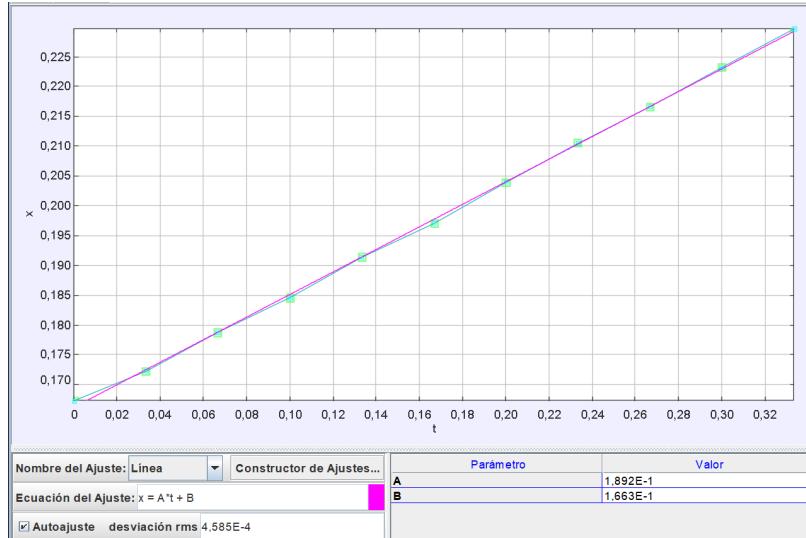


Fig. 9. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_1 después del choque.

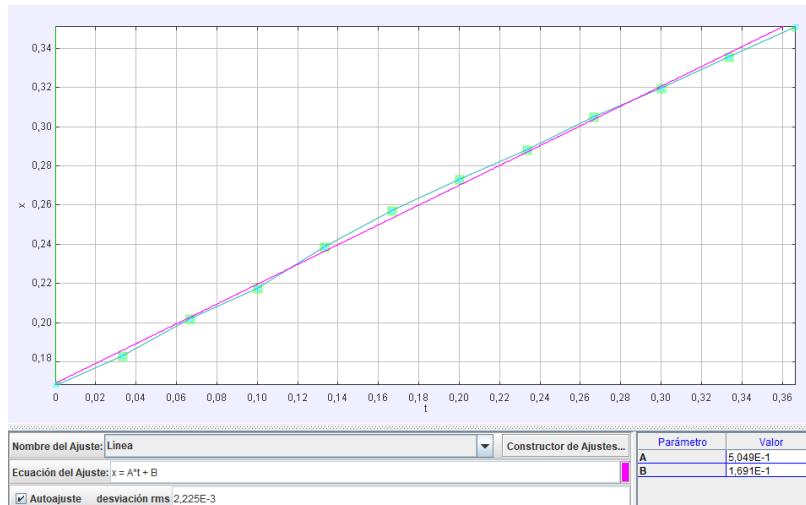


Fig. 10. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara impactada m_2 después del choque.

- Casos Vídeo 2, dos pepenes iguales con $m_1 = m_2 = M$.

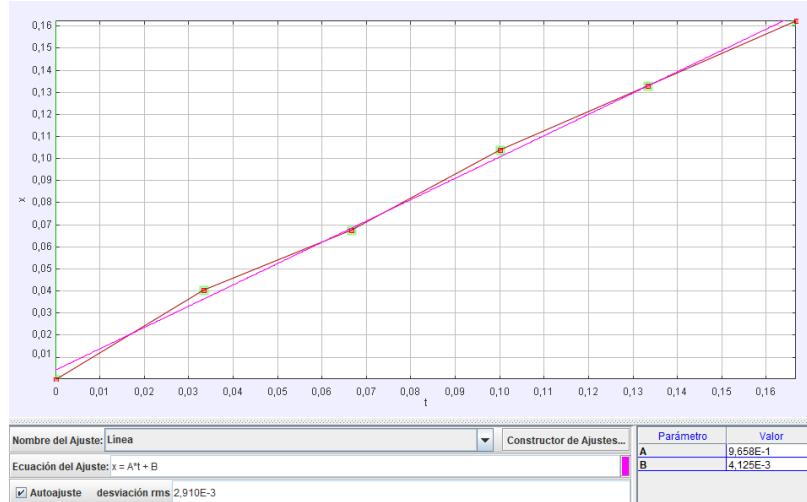


Fig. 11. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón lanzado m_1 antes del choque.

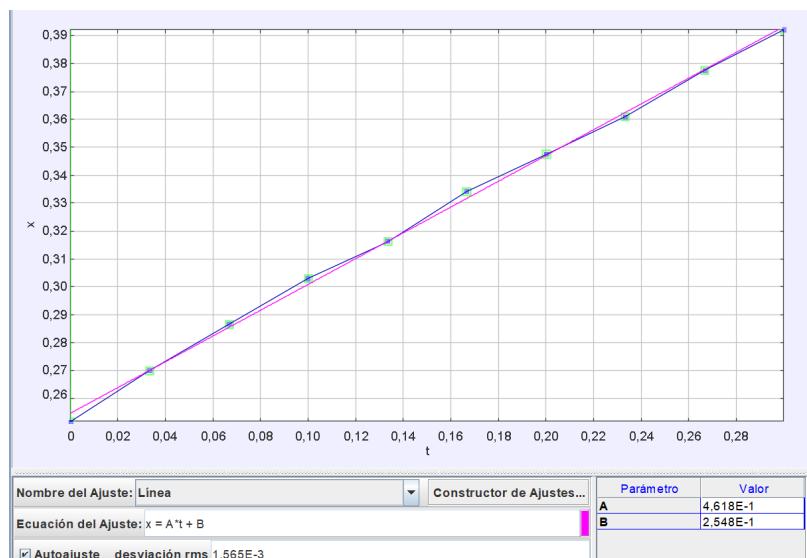


Fig. 12. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón lanzado m_1 después del choque.

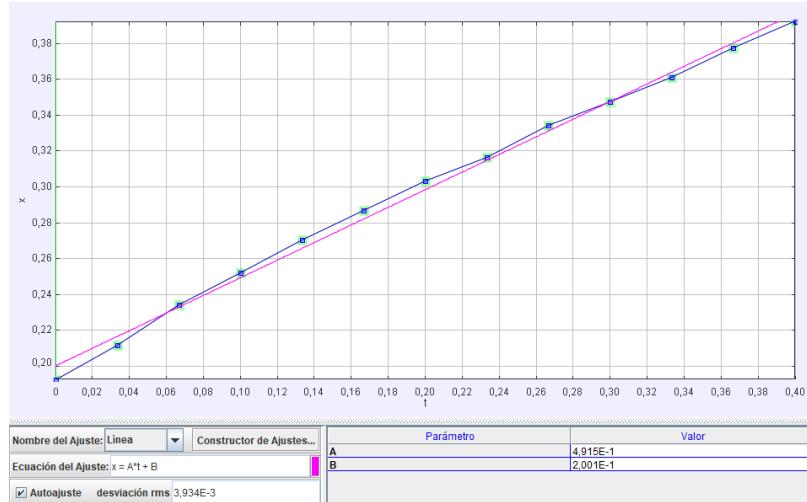


Fig. 13. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón impactado m_2 después del choque.

- Casos Vídeo 3, un pepón m_1 contra una mara m_2 con $m_1 > m_2$.

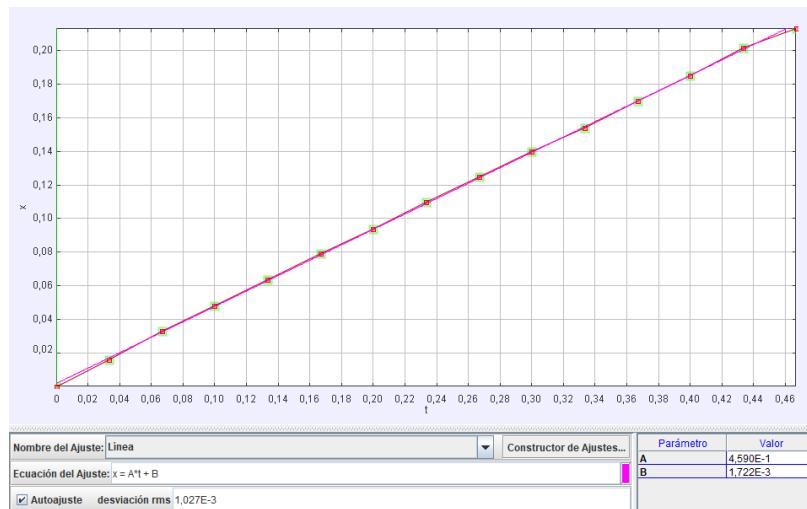


Fig. 14. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón lanzado m_1 antes del choque

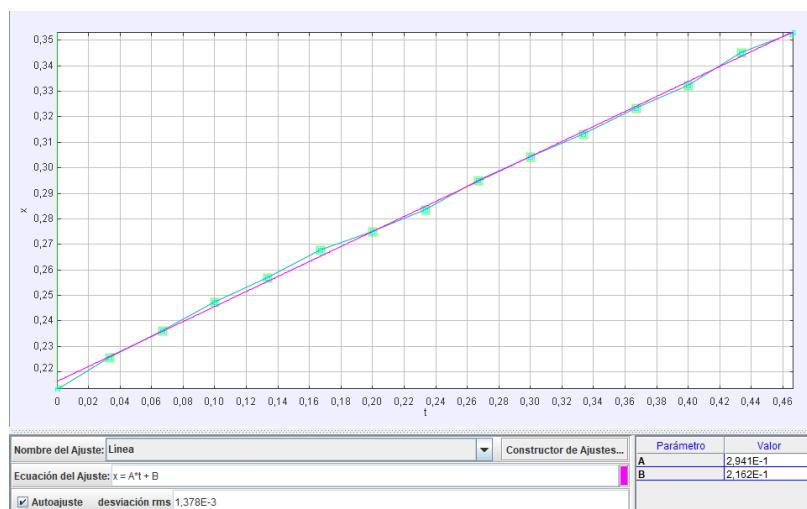


Fig. 15. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón lanzado m_1 después del choque

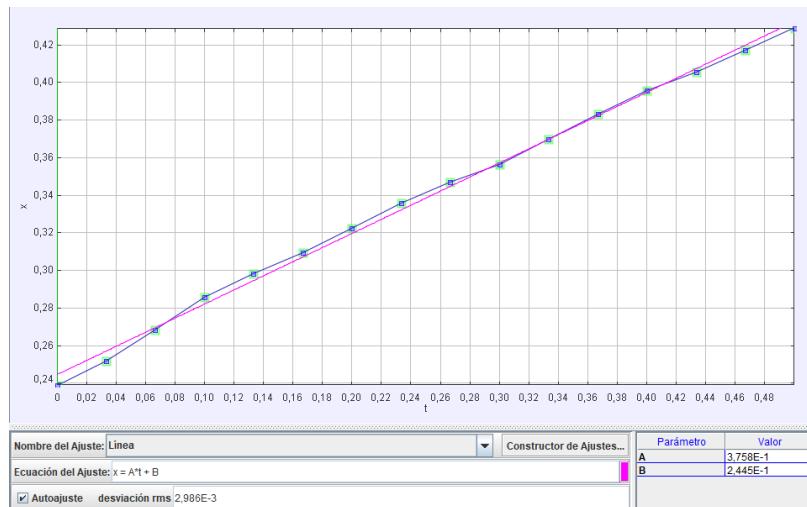


Fig. 16. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara impactada m_2 después del choque

- Casos Vídeo 4, una mara m_1 contra un pepón m_2 iguales $m_1 < m_2$.

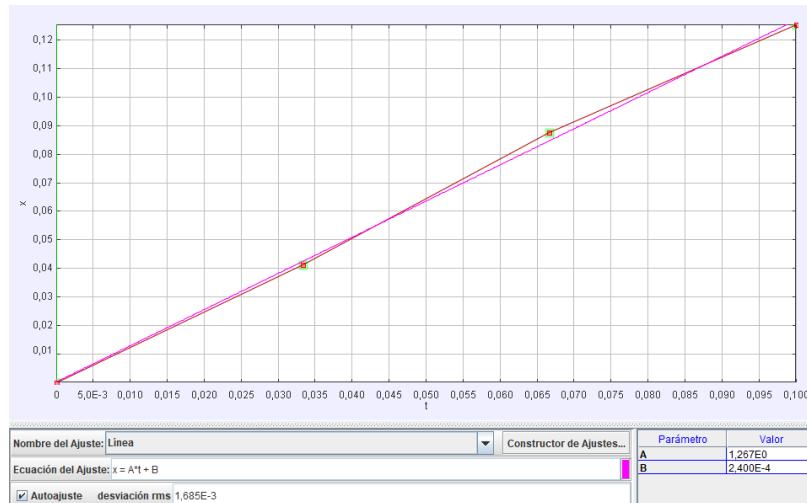


Fig. 17. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_2 antes del choque

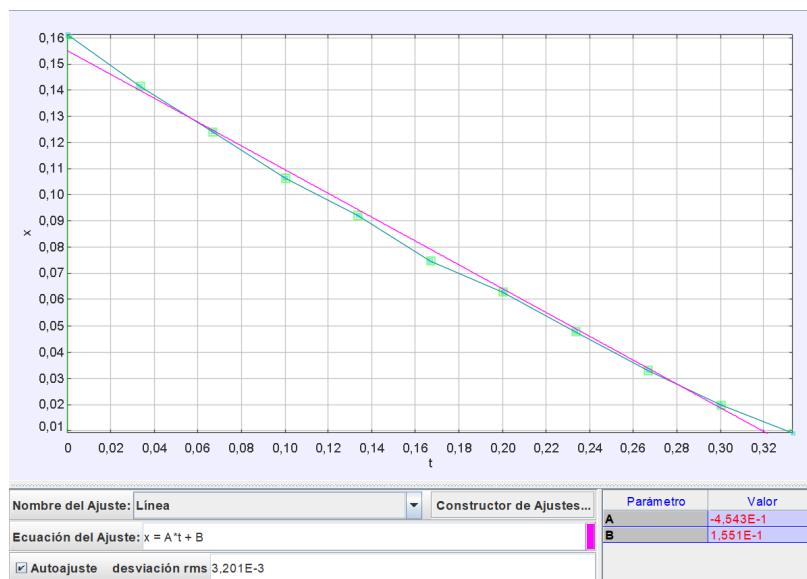


Fig. 18. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_2 después del choque

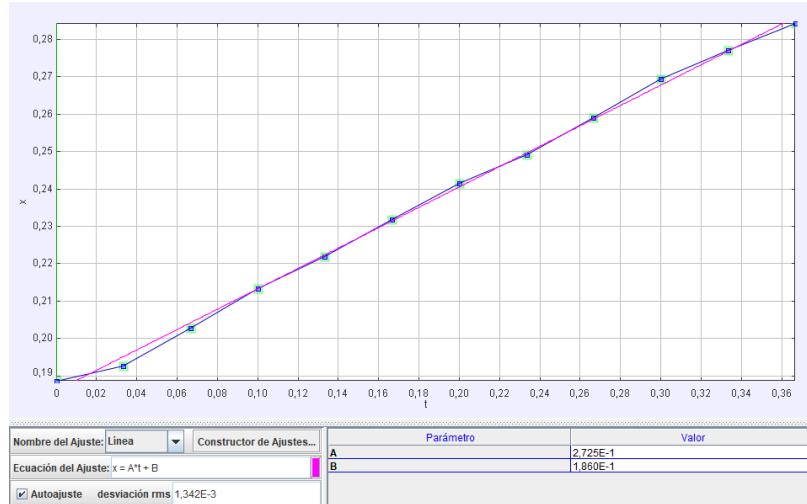


Fig. 19. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso del pepón impactado m_2 después del choque

- Casos Vídeo 5, una mara m_1 colisiona con otra mara m_2 que, a su vez, choca con otra m_3 que tiene justo al lado $m_1 = m_2 = m_3$.

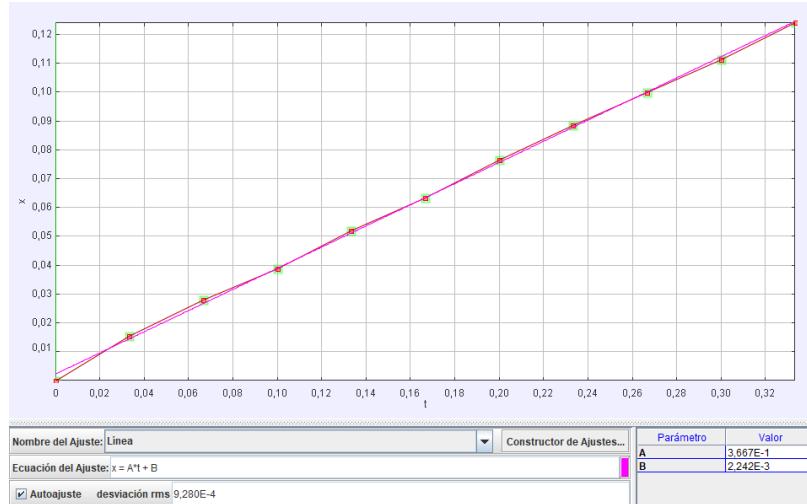


Fig. 20. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_1 antes del choque

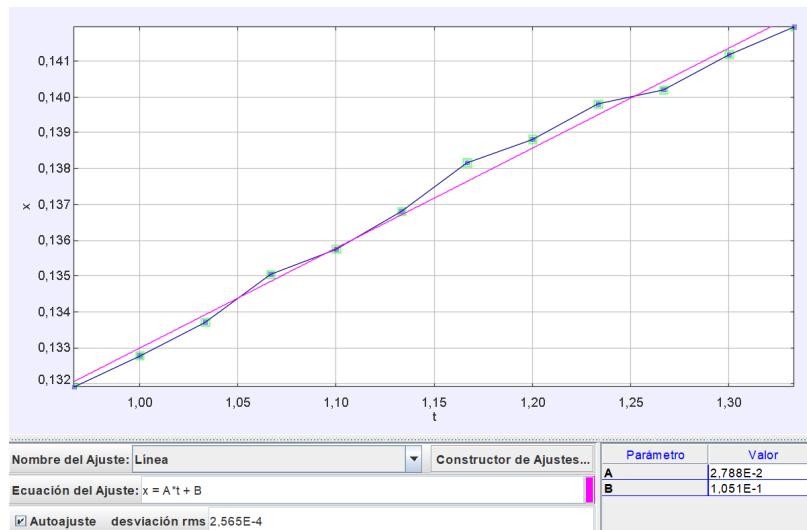


Fig. 21. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara lanzada m_1 después del choque

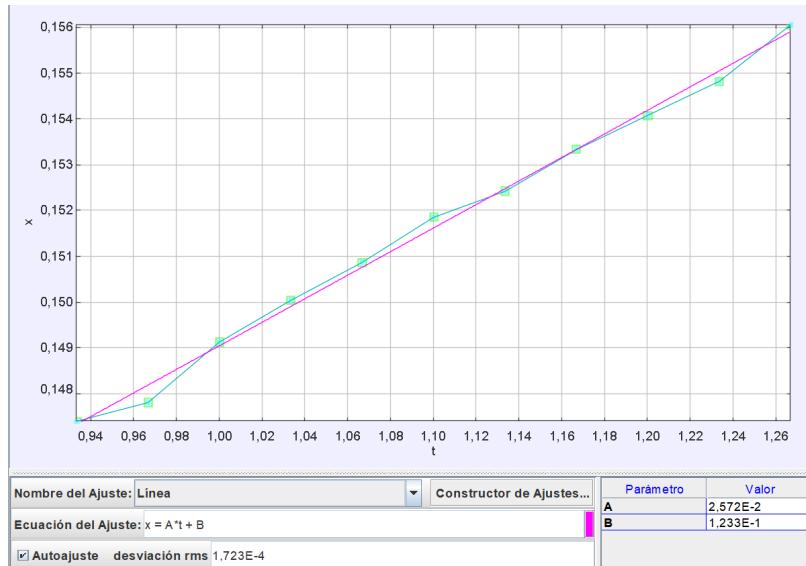


Fig. 22. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara de en medio m_2 después del choque

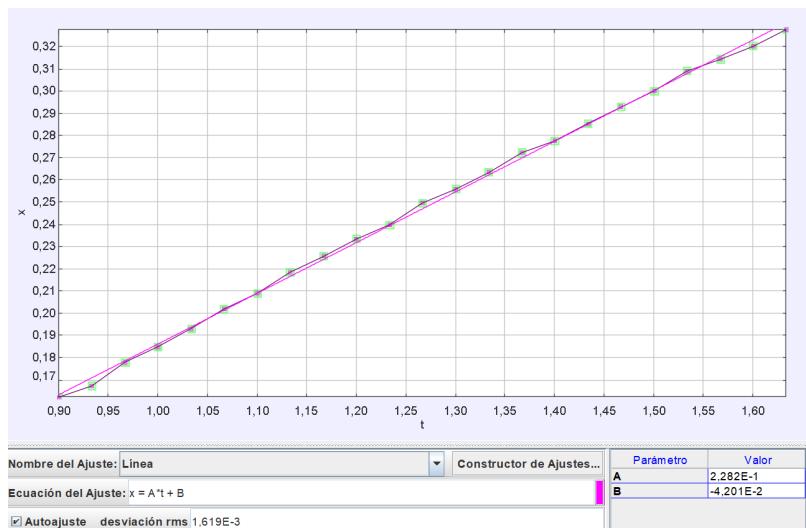


Fig. 23. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . En el caso de la mara impactada m_3 después del choque

Anexo C: Ecuaciones de incertidumbre usadas para las mediciones indirectas

- Coeficiente de restitución e

En este caso, la ecuación usada para el coeficiente fue:

$$e = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i} - v_{2i}} = -\frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{1i}}$$

$$e = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i}}$$

De este modo, aplicando el método de diferencias finitas se tuvo:

$$\delta e = \left| \frac{-1}{v_{1i}} \right| \delta v_{1f} + \left| \frac{1}{v_{1i}} \right| \delta v_{2f} + \left| \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{1i}^2} \right| \delta v_{1i}$$

Donde δv_{1f} , δv_{2f} , y δv_{1i} son los valores de incertidumbre conocidos, que fueron hallados en el experimento por medio de Tracker.

- Momentum lineal p Partiendo de la ecuación $p = mv$ se obtuvo:

$$\delta p = |v| \delta m + |m| \delta v$$

Igualmente, la incertidumbre del error porcentual de momentum $\%Error_p = \left| \frac{p_i - p_f}{p_i} \right| \cdot 100$:

$$\delta Error_p = \left| \frac{100}{p_i} \right| \delta p_f + \left| \frac{p_f}{p_i^2} \right| 100 \delta p_i$$

- Energía cinética K

Empezando por la ecuación $K = \frac{1}{2}mv^2$ se tuvo:

$$\delta K = \left| \frac{1}{2} v^2 \right| \delta m + \left| \frac{1}{2} m 2v \right| \delta v$$

$$\delta K = \frac{1}{2} v^2 \delta m + |mv| \delta v$$

Adicionalmente, se halló la incertidumbre para el error porcentual de momentum $\%Error_K = \left| \frac{K_i - K_f}{K_i} \right| \cdot 100$:

$$\delta Error_K = \left| \frac{100}{K_i} \right| \delta K_f + \left| \frac{K_f}{K_i^2} \right| 100 \delta K_i$$

Cuadro 5. En esta imagen pueden verse los datos obtenidos de momentum y energía cinética.

Vídeo	p_i [kg m/s]	p_f [kg m/s]	K_i [J]	K_f [J]
1	5.454E-03	4.627E-03	2.231E-03	9.690E-04
2	1.932E-02	1.38E-02	9.328E-03	2.80E-03
3	9.180E-03	8.387E-03	2.107E-03	1.336E-03
4	8.446E-03	2.767E-03	5.350E-03	1.283E-03
5	2.444E-03	1.879E-03	4.482E-04	1.784E-04

Anexo D: conjunto de datos obtenidos de posición

- Datos de momentum y energía cinética
- Datos de posición obtenidos de tracker para cada mara o pepón

Cuadro 6. En este cuadro se muestran los datos de posición para las dos masas m_1 y m_2 , para el vídeo 1 de $m_1 = m_2$. Donde además, los tiempos de cada movimiento fueron ajustados en tiempo inicial igual a cero. Esto fue posible hacerlo porque la diferencia de tiempos entre cada punto fue la misma

t [s]	m_1		m_2
	x_{1i} [m]	x_{1f} [m]	x_{2f} [m]
0.00E+00	2.10E-05	1.61E-01	1.68E-01
3.33E-02	4.21E-02	1.41E-01	1.83E-01
6.67E-02	6.57E-02	1.24E-01	2.02E-01
1.00E-01	9.39E-02	1.06E-01	2.18E-01
1.33E-01	1.13E-01	9.22E-02	2.38E-01
1.67E-01	1.43E-01	7.49E-02	2.57E-01
2.00E-01		6.29E-02	2.73E-01
2.33E-01		4.78E-02	2.88E-01
2.67E-01		3.32E-02	3.05E-01
3.00E-01		2.00E-02	3.20E-01
3.33E-01		9.15E-03	3.36E-01
3.67E-01			3.51E-01

Cuadro 7. En este cuadro se muestran los datos de posición para las dos masas m_1 y m_2 , para el vídeo 2 de $m_1 = m_2 = M$. Donde además, los tiempos de cada movimiento fueron ajustados en tiempo inicial igual a cero.

t [s]	m_1		m_2
	x_{1_i} [m]	x_{1_f} [m]	x_{2_f} [m]
0.00E+00	7.00E-05	1.77E-01	1.93E-01
3.33E-02	4.05E-02	1.83E-01	2.11E-01
6.67E-02	6.76E-02	1.88E-01	2.34E-01
1.00E-01	1.04E-01	1.94E-01	2.52E-01
1.33E-01	1.33E-01	2.02E-01	2.70E-01
1.67E-01	1.63E-01	2.08E-01	2.87E-01
2.00E-01		2.15E-01	3.03E-01
2.33E-01		2.21E-01	3.16E-01
2.67E-01		2.28E-01	3.34E-01
3.00E-01		2.36E-01	3.48E-01
3.33E-01			3.61E-01
3.67E-01			3.78E-01
4.00E-01			3.92E-01

Cuadro 8. En este cuadro se muestran los datos de posición para las dos masas m_1 y m_2 , para el vídeo 3 de $m_1 > m_2$. Donde además, los tiempos de cada movimiento fueron ajustados en tiempo inicial igual a cero.

t [s]	m_1		m_2
	x_{1_i} [m]	x_{1_f} [m]	x_{2_f} [m]
0.00E+00	2.47E-05	2.13E-01	2.39E-01
3.33E-02	1.58E-02	2.26E-01	2.52E-01
6.67E-02	3.30E-02	2.36E-01	2.68E-01
1.00E-01	4.78E-02	2.47E-01	2.86E-01
1.33E-01	6.36E-02	2.57E-01	2.98E-01
1.67E-01	7.90E-02	2.68E-01	3.09E-01
2.00E-01	9.38E-02	2.75E-01	3.23E-01
2.33E-01	1.10E-01	2.83E-01	3.36E-01
2.67E-01	1.25E-01	2.95E-01	3.47E-01
3.00E-01	1.40E-01	3.04E-01	3.56E-01
3.33E-01	1.54E-01	3.13E-01	3.70E-01
3.67E-01	1.70E-01	3.23E-01	3.83E-01
4.00E-01	1.85E-01	3.32E-01	3.96E-01
4.33E-01	2.02E-01	3.45E-01	4.06E-01
4.67E-01	2.13E-01	3.53E-01	4.17E-01
5.00E-01			4.29E-01

Cuadro 9. En este cuadro se muestran los datos de posición para las dos masas m_1 y m_2 , para el video 4 de $m_1 < m_2$. Donde además, los tiempos de cada movimiento fueron ajustados en tiempo inicial igual a cero.

t [s]	m_1		m_2
	x_{1_i} [m]	x_{1_f} [m]	x_{2_f} [m]
0.00E+00	1.07E-04	1.25E-01	1.89E-01
3.33E-02	4.13E-02	1.61E-01	1.93E-01
6.67E-02	8.75E-02	1.41E-01	2.03E-01
1.00E-01	1.25E-01	1.24E-01	2.13E-01
1.33E-01		1.06E-01	2.22E-01
1.67E-01		9.22E-02	2.32E-01
2.00E-01		7.49E-02	2.42E-01
2.33E-01		6.29E-02	2.49E-01
2.67E-01		4.78E-02	2.59E-01
3.00E-01		3.32E-02	2.69E-01
3.33E-01		2.00E-02	2.77E-01
3.67E-01		9.15E-03	2.84E-01

Cuadro 10. En este cuadro se muestran los datos de posición para las tres masas m_1 , m_2 y m_3 , para el video 5 con $m_1 = m_2 = m_3$. Donde además, los tiempos de cada movimiento fueron ajustados en tiempo inicial igual a cero.

t [s]	x_{1_i} [m]	x_{1_f} [m]	x_{2_f} [m]	x_{3_f} [m]
9.00E-01	8.64E-06	1.32E-01	1.47E-01	1.62E-01
9.33E-01	1.52E-02	1.33E-01	1.48E-01	1.67E-01
9.67E-01	2.78E-02	1.34E-01	1.49E-01	1.78E-01
1.00E+00	3.87E-02	1.35E-01	1.50E-01	1.85E-01
1.03E+00	5.19E-02	1.36E-01	1.51E-01	1.93E-01
1.07E+00	6.34E-02	1.37E-01	1.52E-01	2.02E-01
1.10E+00	7.63E-02	1.38E-01	1.52E-01	2.09E-01
1.13E+00	8.84E-02	1.39E-01	1.53E-01	2.19E-01
1.17E+00	9.98E-02	1.40E-01	1.54E-01	2.26E-01
1.20E+00	1.11E-01	1.40E-01	1.55E-01	2.33E-01
1.23E+00	1.24E-01	1.41E-01	1.56E-01	2.40E-01
1.27E+00		1.42E-01		2.50E-01
1.30E+00				2.56E-01
1.33E+00				2.63E-01
1.37E+00				2.72E-01
1.40E+00				2.78E-01
1.43E+00				2.85E-01
1.47E+00				2.93E-01
1.50E+00				3.00E-01
1.53E+00				3.09E-01
1.57E+00				3.14E-01
1.60E+00				3.20E-01