

## **Proyecto de laboratorio 5**

# **Estudio de las Energías Cinética y Potencial en Sistemas Conservativos y no Conservativos**

Juan Andrés Guarín Rojas  
Angélica María Angarita  
Andrés Giovanni Ferreira

29 de Agosto del 2021

Universidad  
Industrial de  
Santander



## Resumen

En este proyecto de laboratorio se estudió el principio bastante conocido de la conservación de la energía total en sistemas donde hay fuerzas conservativas. Específicamente, se estudiará la conservación de la energía en el tiempo vista como la suma de energía potencial y cinética. Donde se analizará la caída libre de un objeto redondo y la altura de la masa de un péndulo que está oscilando. Los materiales usados para el experimento fueron un balón de fútbol para el caso de la caída libre, y una cuerda inextensible, inflexible y de masa despreciable junto con un balón más pequeño que el anterior para el péndulo. Luego se hizo el vídeo para analizar el movimiento con Tracker [1]. En cuanto al análisis de datos, se tomó en cuenta el modelo teórico de los movimientos para realizar los ajustes de los datos experimentales. De este modo, se compararon los movimientos teóricos y experimentales, obteniendo una correlación bastante alta en la caída libre y en el péndulo, con 0.0014 de desviación rms de posición en el primero, y 0.0138 de posición angular en el segundo. Como conclusión final, se llegó a que la energía mecánica se mantuvo constante con un error de 0.31 % para la caída libre y 5.89 % para el péndulo.

## 1. Introducción

El término energía no puede definirse exactamente debido a la ambigüedad de este, pero en la mayoría de los conceptos se relaciona a la capacidad de generar algo. A partir de esto, se encontraron dos clases de energía, las cuales fueron estudiadas a lo largo de la práctica. La cinética que se genera cuando hay movimiento y la potencial, que depende de la posición del cuerpo respecto a un marco de referencia.

El objetivo principal de este proyecto fue el estudio del Principio de Conservación de la energía mecánica, para esto se buscó entender la diferencia entre fuerzas conservativas y las que no lo son, y cuál es su papel en el comportamiento de sistemas. Estas fuerzas tienen características que fueron utilizadas en el análisis de esos sistemas desde el punto de vista energético.

Para esta práctica, se hizo el análisis de dos tipos de movimiento: Caída libre y un péndulo casero. En cada uno, se encontró la relación entre los tipos de energía presentes y la explicación de aquella relación.

Para la grabación de los movimientos, se debió tener ciertas condiciones para que en su posterior análisis en Tracker, los datos sean lo más parecidos al modelo buscado. Entre las más importantes de estas se encuentran la ubicación de la cámara para evitar los errores de perspectiva y la buena elección del intervalo de tiempo para análisis en el péndulo, y así obtener la información necesaria.

Posterior a la obtención de los datos, se realizó el ajuste de curvas respectivo en el cual

se buscó observar los modelos que fueron obtenidos y de esta manera, se hizo la comparación con el modelo teórico. Además, al encontrarse la no conservación de la energía en el experimento se estudiaron las causas por las cuales se presentó esto, de la misma forma se buscó un modelo para describir esta consecuencia.

Con ayuda de un simulador, se buscó observar y resolver algunas dudas que se presentaron a lo largo de la práctica, entre ellas la energía potencial negativa. También, se hizo uso de esta herramienta para observar los cambios de la energía respecto de la variación de la masa.

Para el desarrollo de este reporte fue seccionado en 5 partes principales. En la primera sección metodología, se hizo un recuento de las herramientas y objetos usados en la práctica, destacando las condiciones y el aprovechamiento que se dio a cada uno. En la segunda, teoría fue el apartado en el que se dio la descripción detallada sobre el modelo teórico manejado a lo largo del experimento, resaltando las partes que fueron esenciales para el análisis de los movimientos. En la tercera sección, tratamiento de datos se entregaron los datos obtenidos a través de los softwares y se hizo una pequeña descripción explicando los resultados. En la cuarta, análisis de resultados es la sección en la que se observa y se da una breve descripción sobre los datos y se explicó la importancia de los mismos para la práctica, también se entregó un balance sobre los resultados finales. Por último, en las conclusiones se hizo un repaso por los procedimientos y resultados obtenidos en la práctica, y se destacó los conocimientos aprendidos a partir de esta.

## **2. Metodología**

### **2.1. Modelo Teórico**

En cuanto al modelo teórico, se consideró que a la fuerza de amortiguamiento del aire como despreciable. Porque los objetos usados fueron de forma redonda, y por tanto, es conocido que son aerodinámicos debido a su geometría. Del mismo modo, como las velocidades alcanzadas estuvieron en el orden de  $10\text{ m/s}$  el efecto del amortiguamiento no es muy notorio, tal y como se observó luego en el experimento.

Se partió del análisis de trabajos en el sistema usando el teorema de trabajo energía cinética para llegar a la expresión que nos dice que la energía mecánica inicial es igual a la final. Donde se consideró que la fuerza gravitacional es conservativa tal y como es conocido.

En ambos experimentos se hizo el análisis cinemático de los movimientos, partiendo de la base de la segunda ley de Newton. Donde también fue posible demostrar que la energía mecánica era constante al reemplazar las ecuaciones de posición y velocidad en las energías potencial y cinética. En el caso de la caída libre se considero solamente a la

fuerza gravitacional, y como constante. En el caso del péndulo se realizó la aproximación a péndulo simple.

## 2.2. Montaje experimental

En esta práctica se manejaron dos casos de movimiento, por esta razón se obtuvieron dos distintos montajes: caída libre y péndulo casero ideal. Aunque estos tuvieran rasgos específicos a tener en cuenta, se pudo englobar unas condiciones que se debían presentar en los dos para su correcto estudio.

Se buscó obtener los vídeos con la mejor calidad posible y con el mínimo movimiento por parte de la toma, para esto se usó la cámara de un celular, las características de este pueden observarse en [11] y un trípode común. Además, fue conveniente colocar horizontalmente el celular, así se obtuvo un mayor rango de visión para apreciar el movimiento. También, la posición del mismo fue elegida especialmente para intentar estar lo más de frente posible al movimiento, es decir, se buscó minimizar los errores de perspectiva (ver Figura 1). Se usó una altura de la cámara igual a la mitad de la altura de cada una de las trayectorias.



**Fig. 1.** Vista de la cámara para cada movimiento.

A continuación, se describieron las condiciones específicas de análisis para cada montaje de los casos de movimiento. Entre estas se encuentran otros factores a tomar en cuenta acerca de los vídeos y su posterior análisis en el software *Tracker*.

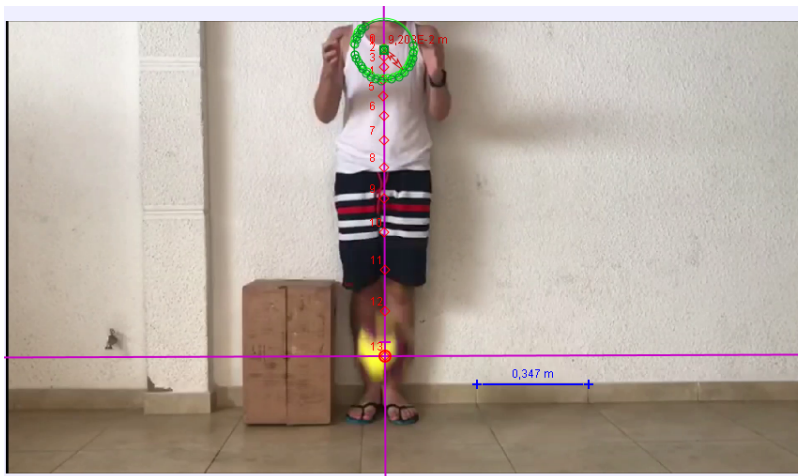
### 2.2.1. Caída Libre

En este caso, se buscó que el balón fuera soltado con una mínima interacción y de esta manera, no entorpecer los datos de manera significativa generando una velocidad inicial. Esto fue logrado ya que se obtuvo una velocidad inicial de  $0.409$  en su magnitud.

Para el análisis en *Tracker*, como primera medida se buscó el ángulo más preciso para girar el eje de tal manera que su movimiento se presentara sólo en el eje  $x$ . Para esto se usó la herramienta de medida 'circle fitter', la cual fue colocada alrededor del balón en su primera y penúltima posición. Luego, la horizontal fue colocada de manera que pasará por los puntos que indican el centro de cada círculo. Como resultado se obtuvo que se debía girar  $90^\circ$  más la inclinación de esos puntos, la cual fue  $0.2^\circ$ , es decir, el eje en su totalidad fue girado  $90.2^\circ$ . Además, para obtener la energía potencial positiva se ubicó el  $(0,0)$  en el último punto de análisis.

Al elegir una vara de calibración, se usó una baldosa cercana de  $0.347\text{ m}$  ya que se encuentra en el mismo plano del movimiento, esto es importante tomarlo en cuenta ya que así se disminuyen los errores de perspectiva. Con este dato ya ingresado, se halló con una cinta el valor entre el centro del 'circle fitter' y su superficie, dando como resultado  $9,203\text{E-}2\text{ m}$  es decir  $9.203\text{ cm}$ , entonces el diámetro del círculo trazado es de  $18.406\text{ cm}$  siendo este también el diámetro conocido del balón. Comprobando a su vez, la precisión de los datos ingresados.

Para analizar la trayectoria, se usó la herramienta 'Trayectoria automática' y de esta manera, se trazó esta por todos los puntos por los cuales paso el centro del balón, marcado por la herramienta 'circle fitter'. Todas estas características pueden observarse en [2](#)



**Fig. 2.** Condiciones para el análisis de caída libre.

A partir de la trayectoria, *Tracker* arrojó los datos de posición, velocidad y aceleración en el eje x de manera automática. Pero, las funciones para las energías no están definidas dentro del software, entonces se procedió a definir las ecuaciones de estas para este caso específico [1].

**Cuadro 1.** Este cuadro muestra las funciones definidas para las energías en Tracker para el caso de la caída libre.

Función	
Energía Potencial	$E_p = mgx$
Energía Cinética	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
Energía Mecánica	$E_m = E_p + E_c$

Al definir estas funciones, *Tracker* luego entregó los valores automáticamente. De esta manera, se tuvo tanto los datos como las gráficas para su posterior ajuste.

Para realizar el ajuste de los datos se realizó una combinación de funciones ya entregadas por *Tracker* para algunos parámetros y otras sacadas de la teoría, y así obtener el mejor ajuste. En el caso de posición se usó el ajuste parabólico, en la velocidad uno lineal y en la aceleración como debía ser comparada con la gravedad se utilizó uno constante. En el caso de las energías se sacaron las funciones de ajuste de acuerdo a la teoría [3.1].

De la misma forma, se buscó hacer una comparación con los valores del modelo teórico, por esta razón se realizó un código en *Jupyter* en el cuál se observa los datos experimentales y sus correspondientes valores teóricos para cada uno de los parámetros analizados.

### 2.2.2. Péndulo Casero

Para este caso, también se buscó que al soltarlo se tenga la mínima interacción posible y de esta manera, no generar una velocidad inicial no despreciable. Además, se debió tener cuidado con el montaje realizado puesto que, en el transcurso de la práctica se observó que piso sobre el cual se posaba la estructura que sostiene el péndulo está levemente inclinada, y esto trajo ciertas consecuencias que fueron explicadas a lo largo del reporte.

Al realizar el análisis con *Tracker* se realizó como primer paso, usar la herramienta 'circle fitter' y colocar el centro de esta en donde aproximadamente se encuentra el eje por el cual el péndulo se mueve. Además, en la circunferencia de esta se va a desarrollar el movimiento realizado por la pelota. Con esta misma herramienta se trazaron otros dos círculos, uno en cada posición donde se logró la amplitud máxima.

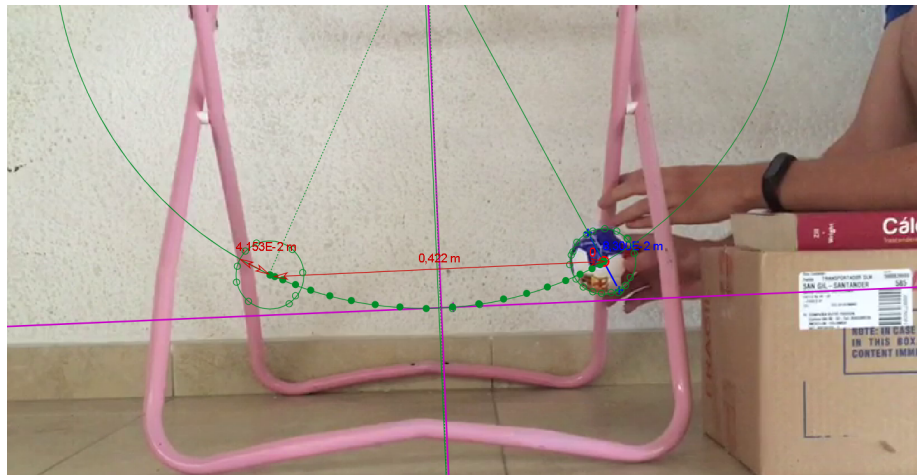
Al tener ya delimitado los círculos, se trazó una cinta entre los centros de cada circunferencia. Esta cinta muestra la línea que une la amplitud máxima a cada lado para el punto de análisis que en este caso se decidió en el centro de la pelota. A partir de esa cinta se

ubicó el eje de tal forma que fuera paralela a esta, obteniendo una inclinación de  $4.5^\circ$

La vara de calibración fue escogida como se mencionó anteriormente en el mismo plano del movimiento para disminuir los errores de perspectiva. Por esta razón se utilizó el diámetro de la pelota, este con un valor  $8.3\text{ cm}$ .

Con ayuda de la herramienta 'Transportador' se hallaron los ángulos de alcance máximo para cada lado, y se obtuvo como resultado por la derecha un valor de  $26.5^\circ$  y en la izquierda  $26.3^\circ$ . Con esto, se encontró que el péndulo cumple con la condición para ser simple por tener un ángulo de  $26.5^\circ$ . Recordando que en el péndulo simple se aproxima  $\sin\theta \approx \theta$ , se obtuvo que en este caso  $\sin 26.5 = \sin(0.462) = 0.446$ . Lo que significó que  $\theta$  es aproximadamente igual al seno de  $\theta$  con un error de  $3.66\%$ , siendo pequeño.

Para analizar la trayectoria del movimiento, en este caso también se usó 'trayectoria automática'. La cual siguió el movimiento por el punto de análisis elegido, como se mencionó antes fue el centro del balón. Además esa trayectoria fue trazada a lo largo de una parte de la circunferencia con centro en el eje del péndulo.



**Fig. 3.** Vista del movimiento del péndulo, con amplitud inicial de  $26.5^\circ$ , diámetro del balón igual a  $8.3\text{ cm}$ , y el eje  $x$  de coordenadas inclinado  $4.5^\circ$  para que sea paralelo a la línea que une la amplitud máxima a la derecha y a la izquierda

Para este caso, *Tracker* entrega los valores de posición de  $x$  y  $y$ , velocidad y aceleración automáticamente. Como el caso anterior se debió definir las funciones de las energías, aunque en este caso se definió un  $\theta$  el cuál fue usado en los ajustes.

**Cuadro 2.** Este cuadro muestra las funciones definidas para las energías en Tracker para el caso del péndulo.  $l$  es la longitud de la cuerda.

	Función
Energía Potencial	$Ep = m * g * y$
Energía Cinética	$Ec = \frac{1}{2} * m * v^2$
Energía Mecánica	$Em = Ep + Ec$
Ángulo	$\theta = atan(\frac{x}{l-y})$

Después de definir las, *Tracker* entrega los valores para cada una, y de esta manera se procedió a realizar los ajustes para cada parámetro.

En los ajustes de este caso la mayoría fueron realizados a partir de ecuaciones teóricas, las representativas del Movimiento Armónico Simple [3.2] pero en estas no se ajustaron los datos de  $x$  y  $y$  ya que se realizó un ajuste de la posición con el  $\theta$ . Excepto, para la energía mecánica se usó un ajuste constante.

### 3. Teoría

En esta sección se presentó el modelo teórico realizado para analizar el movimiento de los dos cuerpos. En este modelo se realizaron unas asunciones. Se despreció el efecto de la fricción con el aire, se ignoraron las fuerzas debidas al flujo del aire en el ambiente, y se consideró que la altura de lanzamiento es despreciable comparada con el radio de la Tierra. Esto hace que la intensidad del campo gravitacional sea la misma durante la caída del objeto o durante el movimiento del péndulo, siendo esta igualdad de intensidad una buena aproximación.

#### 3.1. Caída libre

El sistema de coordenadas fue el plano cartesiano con el eje  $x$  positivo hacia arriba en la dirección de la gravedad vertical, y con el origen en el punto final de la trayectoria (ver figura 4). Ahora, para un objeto de masa  $m$ , que cae desde una altura inicial  $h_0$  y con una velocidad inicial  $v_{0x}$ , donde la aceleración que tiene es igual a la gravedad que es constante, se tuvieron las siguientes ecuaciones para su movimiento (ver ecuaciones [2, 3]).

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} = -mg\hat{i}$$

Considerando que el movimiento es solo en el eje  $x$ , es decir, la velocidad inicial solo va en  $x$ .

$$ma_x = -mg$$



$$a_x = -g \quad (1)$$

$$x(t) = h + v_{0x}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

$$v_x(t) = v_{0x} - gt \quad (3)$$

Y continuando con el análisis de las fuerzas presentes, se llegó a que únicamente había fuerza de gravedad  $F_g$ . Por el teorema de trabajo-energía cinética se tiene que el trabajo debido a la fuerza gravitacional  $W_g$  es igual a la variación de energía cinética. Recordando que el trabajo de la fuerza gravitacional es igual a menos la variación de energía potencial gravitacional  $-\Delta U$  se obtuvo lo siguiente (ver ecuación [4]).

$$\begin{aligned} W_{F_g} &= \Delta K \\ -\Delta U_g &= \Delta K \\ -mgh_f + mgh_i &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \\ mgh_i + \frac{1}{2}mv_i^2 &= mgh_f + \frac{1}{2}mv_f^2 \\ E_{m_i} &= E_{m_f} \end{aligned} \quad (4)$$

Ya que se pueden tomar cualesquiera puntos iniciales  $h_i$  y  $h_f$  sin ninguna restricción, se pudo ver que la ecuación [4] es válida para todos los puntos de la trayectoria. Es decir, la energía mecánica se mantuvo constante. Luego, se usaron las ecuaciones cinemáticas para demostrar que la energía mecánica definida como  $E_m = mgh + \frac{1}{2}mv^2$  se mantenía constante:

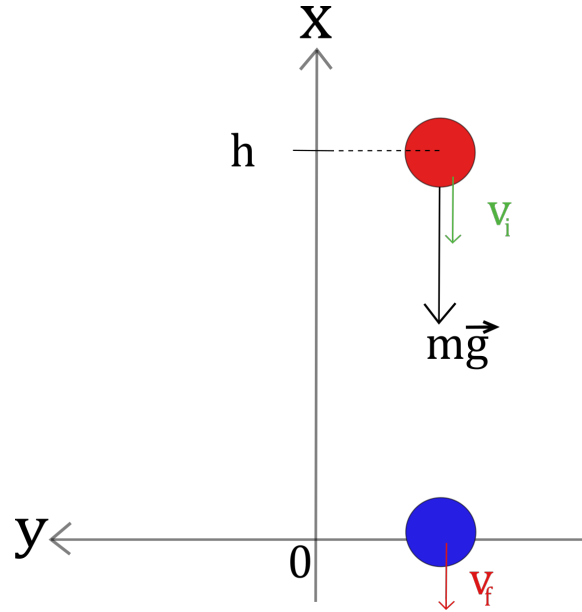
$$\begin{aligned} E_m(t) &= mg \cdot x(t) + \frac{1}{2}m \cdot v_x^2(t) \\ E_m(t) &= mg(h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2) + \frac{1}{2}m(v_0^2 - 2v_0gt + g^2t^2) \\ E_m(t) &= mgh + mgv_0t - \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2 \\ E_m(t) &= mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = cte. \end{aligned} \quad (5)$$

En la ecuación anterior se obtuvo que la ecuación  $E_m(t)$  dependió solamente de las condiciones iniciales del sistema, que fueron  $h$  la altura inicial y  $v_0$  la velocidad inicial. Que era lo que se quería demostrar.

Por su parte, también se observó que si la velocidad inicial fuera de cero, se tuvo que:

$$E_m(t) = mgh \quad (6)$$

Que fue la energía total que se esperaba, ya que la única fuerza presente en el sistema fue la gravitatoria.



**Fig. 4.** En esta imagen se muestra la disposición del sistema de coordenadas. El punto de energía potencial cero se tomó en el último punto donde se tuvo datos de velocidad en el experimento. En este punto solo hubo energía cinética

### 3.2. Péndulo

Este sistema se aproximó al caso de péndulo simple o ideal para poder analizarlo. El sistema de coordenadas se orientó usando el eje  $x$  positivo paralelo al piso y hacia la derecha, y el eje  $y$  en la vertical positivo hacia arriba. Y el origen del eje de coordenadas se puso en el punto más bajo de la trayectoria. Con lo cual la línea cero del potencial quedó en el punto de menor altitud.

Luego, en el caso de una pelota de masa  $m$ , radio  $R$  atada a un punto fijo mediante una cuerda de largo  $L$  que es soltada con una amplitud inicial de  $\theta_0$  y con una velocidad inicial de  $\dot{\theta}_0$  se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T} = I\vec{\alpha}$$

Tomando en cuenta que  $\vec{r}$  y  $\vec{T}$  son antiparalelos, su producto cruz se anuló. La dirección de  $\vec{r}$  se tomó para una posición de la pelota a la derecha. La imagen del péndulo se puede ver en (5)

$$(r \sin \theta (\hat{i}) + r \cos \theta (-\hat{j})) \times mg(-\hat{j}) = I \vec{\alpha}$$

$$-mgr \sin \theta (\hat{i} \times \hat{j}) + mgr \cos \theta (\hat{j} \times \hat{j}) = I \vec{\alpha}$$

Sabiendo que  $\hat{j} \times \hat{j} = \vec{0}$ , se obtuvo:

$$-mgr \sin \theta (\hat{k}) = I \vec{\alpha}$$

$$-mgr \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

Donde  $r$  es la distancia entre el punto fijado de la cuerda y el centro de masa de la pelota  $r = L + R$ .

El momento de inercia  $I$  pudo ser hallado por el teorema de ejes paralelos  $I = I_{cm} + mh^2$ , donde  $h$  es la distancia desde el punto donde se fijó el péndulo al centro de masas de la pelota. El momento de inercia en el centro de masas es conocido, igual a  $\frac{2}{5}mR^2$ , por tanto,  $I = \frac{2}{5}mR^2 + mr^2$ . Luego, se asumió que  $R \ll r$ , implicando que el término  $\frac{2}{5}mR^2$  es despreciable.

$$I = mr^2 \quad (\text{para } R \ll r) \quad (7)$$

Esto conllevó a:

$$-mgr \sin \theta = I \ddot{\theta} = mr^2 \ddot{\theta}$$

$$-\frac{g}{r} \sin \theta = \ddot{\theta}$$

Considerando péndulo ideal

$$-\frac{g}{r} \theta = \ddot{\theta}$$

Esta ecuación diferencial es la ecuación para un movimiento armónico simple y su solución es la de una función sinusoidal. Con esto se obtuvo:

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \delta) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (9)$$

Que son las ecuaciones conocidas para un M.A.S., y donde:

$$A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2}}; \quad \tan \delta = \frac{-\dot{\theta}_0}{\omega \theta_0}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

Ahora, de forma similar a la anterior se pudo demostrar que la energía mecánica fue constante usando las ecuaciones de movimiento armónico simple encontradas y reemplazándolas en las ecuaciones de energía.

$$E_m(t) = mgy(t) + \frac{1}{2}mv^2(t)$$

En este caso, se cumplió que la velocidad es igual a la velocidad angular por el radio de giro  $v(t) = r\dot{\theta}(t)$ . Además, recordando la disposición del sistema de coordenadas (ver figura 5) se pudo establecer que  $y(t) = r - r \cos \theta$ . Entonces:

$$E_m(t) = mgr - mgr \cos(A \cos(\omega t + \delta)) + \frac{1}{2}mr^2(-A\omega \sin(\omega t + \delta))^2$$

$$E_m(t) = mgr - mgr \cos(A \cos(\omega t + \delta)) + \frac{1}{2}mr^2A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Por la condición de péndulo simple  $\sin \theta \approx \theta$ , donde también se cumple que para el coseno:  $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ . De lo anterior se tuvo que, como  $\theta = A \cos(\omega t + \delta)$ , entonces  $\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}A^2 \cos^2(\omega t + \delta)$ .

Continuando se tuvo que:

$$E_m(t) = mgr - mgr + \frac{1}{2}mgrA^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}mr^2A^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

Considerando  $\omega^2 r^2 = g$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mgrA^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2}mgrA^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mgrA^2 (\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta))$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}mgrA^2 = \frac{1}{2}mgr \left( \theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} \right) = cte. \quad (10)$$

Con lo cual se mostró que la energía se mantuvo constante ya que solo dependió de las condiciones iniciales del sistema. Esto se obtuvo al considerar que no había pérdida de energía.

De igual modo, se consideró el caso donde  $v_0 = 0$  llegando a que:  $E_m = \frac{1}{2}mgr\theta_0^2$  y considerando la aproximación inversa para el coseno  $\frac{1}{2}\theta_0^2 \approx 1 - \cos \theta$  se obtuvo:

$$E_m = mgr(1 - \cos \theta_0) = mg(r - r \cos \theta_0) = mgy_0$$

Que es la energía mecánica esperada para ese caso.

Del mismo modo, se encontró que al considerar a la posición inicial como  $y_0 = r - r \cos(A \cos(\delta)) \approx \frac{1}{2} r A^2 \cos^2(\delta)$  y a la velocidad inicial como  $v_0 = -A \omega \sin(\delta) r$  se obtenía que:

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgrA^2\cos^2(\delta) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\delta)r^2$$

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mrA^2(g\cos^2(\delta) + \omega^2r\sin^2(\delta))$$

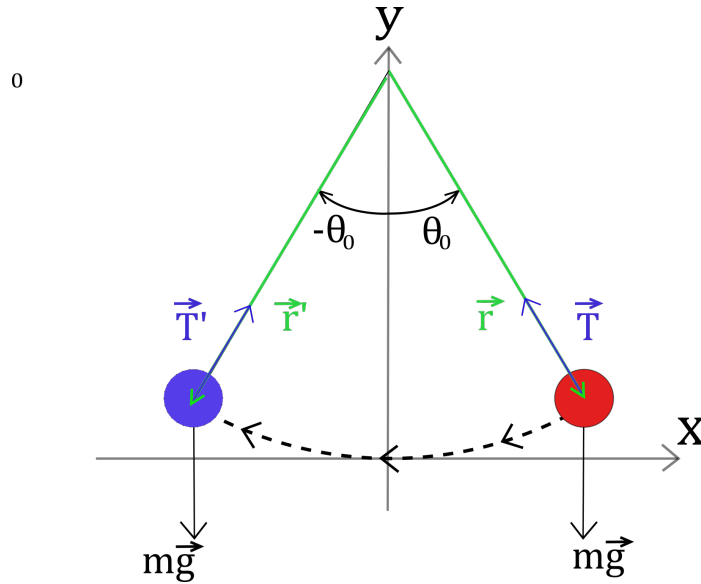
Como  $\omega = \sqrt{g/r}$ , se tiene que  $\omega^2 r = g$ :

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgrA^2(g\cos^2(\delta) + g\sin^2(\delta))$$

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgrA^2g$$

Esta última ecuación es igual a la energía mecánica mostrada en [10], por tanto se obtuvo otra forma de expresar la energía mecánica para esta caso:

$$E_m = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (11)$$



**Fig. 5.** Cuando la pelota se ubica en un punto a la derecha del eje Y el vector  $\vec{r}$  se describe como  $\vec{r} = r \sin \theta \hat{i} + r \cos \theta (-\hat{j})$ , y para un punto a la izquierda se describe como  $\vec{r} = r \sin \theta (-\hat{i}) + r \cos \theta (-\hat{j})$ . Esto al final no cambió las ecuaciones, puesto que el signo menos adicional en la segunda ecuación apareció también en la aceleración angular:  $\alpha = -\ddot{\theta}$

#### 4. Tratamiento de Datos

Una vez grabados los vídeos, lo primero fue obtener los datos de la posición, velocidad, aceleración, energía potencial, cinética y mecánica, tanto para el caso de caída libre, como para el de péndulo simple. Esto fue realizado mediante el seguimiento de los objetos, siguiendo el procedimiento mencionado en metodología, mediante el software *Tracker* [1]. Estos datos pueden encontrarse en la sección de anexos en los cuadros 7 y 8.

Estos datos fueron analizados por medio de la herramienta de ajustes de *Tracker* (ver figura 12), la cual proporcionó los valores de los coeficientes de los polinomios, que son las funciones para este caso y que describirían el comportamiento de los objetos en su respectivo movimiento. Los resultados de cada ajuste se encuentran en las siguientes tablas (ver cuadros 3 y 5). Sin embargo, al tratarse de montajes experimentales diferentes, el tratamiento de estos datos cambió de uno a otro, los procedimientos realizados para cada uno se muestran a continuación.

##### 4.1. Caída libre

Una vez obtenidos los datos, mediante *Tracker* se conocieron las gráficas de las ecuaciones que describían el comportamiento de la pelota para cada variable. Estas gráficas fueron construidas a partir de las mediciones del software en los instantes de tiempo en los que analizó el movimiento y por lo tanto permitieron hacer un ajuste para cada ecuación que correlacionara con el menor error posible los puntos en las mediciones.

Con base en la teoría, se realizaron los ajustes para cada una de las magnitudes de estudio, con las opciones que tiene el mismo software, en el que se puede escoger libremente el tipo de ajuste que se quiere, lineal, parabólico, exponencial, etc. Es pertinente mencionar que para la expresión de ajuste que describía la energía potencial, cinética y mecánica en este movimiento, se realizó un procedimiento diferente al usado para las demás magnitudes.

Para estos tres casos, lo que se hizo fue, mediante el uso de la opción Constructor de ajustes de *Tracker*, se ingresaron las ecuaciones obtenidas por el modelo teórico, e ingresando los parámetros de los que depende dicha ecuación, *Tracker* lo que haría sería recibir estos valores y a partir de uno de ellos, relacionar los restantes para así encontrar el mejor ajuste en cada caso. En primer lugar, para la energía potencial  $E_p = mgh$ , se expresó el valor de  $h$  para un valor de  $t$  cualquiera. De manera que la ecuación ingresada en *Tracker* fue:

$$E_p = mg\left(-\frac{gt^2}{2} + v_0t + h_0\right)$$

De manera análoga, para la energía cinética  $E_c = \frac{mv^2}{2}$ , donde de nuevo, en base a la

teoría se pudo expresar la velocidad  $v$  para un valor cualquiera de  $t$ . Así, la ecuación ingresada en *Tracker*, fue:

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 - mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2$$

Por último, para la energía mecánica, la ecuación usada fue la mencionada anteriormente en teoría:

$$E_m = mgh + \frac{mv^2}{2}$$

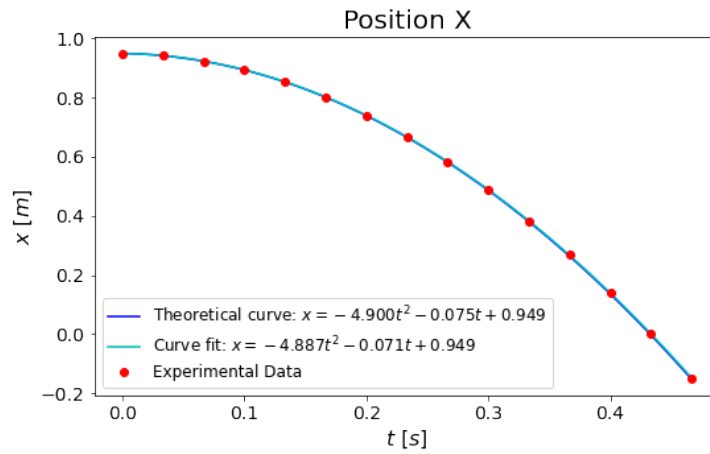
Para todos estos ajustes, se ingresaron los parámetros debidos para cada uno de ellos,  $g = 9,8m/s^2$ ,  $h_0 = 0,949$ ,  $v_0 = 0,003$ , aunque como se mencionó anteriormente por este método lo que hace el software es a partir del valor de uno de ellos ajustar los demás y así conocer la gráfica de ajuste para la energía potencial y su respectiva desviación rms.

Los ajustes para las demás magnitudes, como ya fue mencionado fueron realizados con las opciones de *Tracker* y basados en la teoría. Estos ajustes se observan en el cuadro 3).

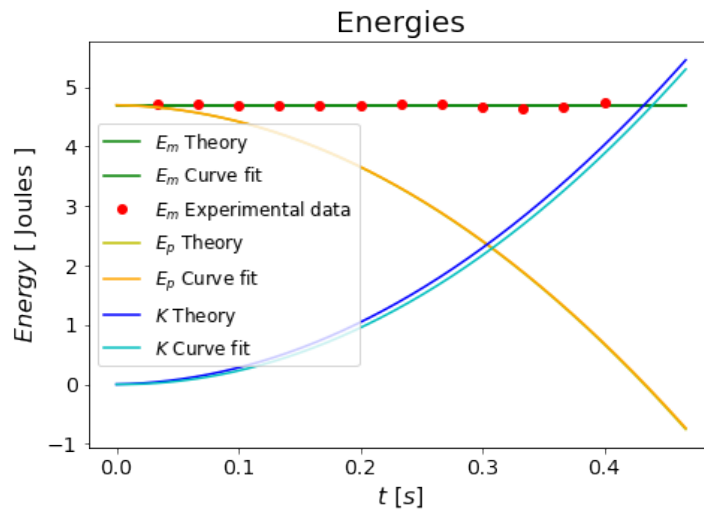
Además, cabe mencionar que se realizaron las gráficas teóricas de las variables cinemáticas y de energías del sistema. Estas gráficas teóricas fueron hechas basadas en lo visto en la sección de teoría (ver sección 3). Se usó *Jupyter* para realizar las gráficas. Además, se calcularon las desviaciones rms entre los datos del ajuste experimental y la curva teórica para cada caso (ver figuras 6, 7).

El código en Jupyter puede encontrarse en el siguiente repositorio en Git Hub: [https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/Lab5\\_Conservative\\_forces/Jupyter](https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/Lab5_Conservative_forces/Jupyter). Los datos de desviación rms para las comparaciones se pueden encontrar en el cuadro 4.

Por último, las gráficas de la comparación del movimiento de  $x$  en el tiempo y la comparación con todas las energía se muestran a continuación. Además, las demás gráficas de comparación pueden verse en la sección 6.



**Fig. 6.** Variación de la posición en  $x$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 7.** Representación en un solo gráfico de todas las energías potencial, cinética y mecánica del sistema en función del tiempo  $t$ .



**Cuadro 3.** Este cuadro muestra las ecuaciones de ajuste obtenidas para cada variable en el caso de la caída libre

Variable	Ecuación de ajuste	Desviación rms
$x$	$x(t) = 4,886t^2 - 0,07198t + 0,9493$	$0,000806 \text{ m}$
$v_x$	$v(t) = -9,773t - 0,07525$	$0,0197 \text{ m/s}$
$E_p$	$E_p = -24,18t^2 - 0,356t + 4,698$	$0,00399 \text{ J}$
$E_c$	$E_c = 24,68t^2 + 0,194t + 0,0003834$	$0,0261 \text{ J}$
$E_m$	$E_m = 4,699$	$0,02863 \text{ J}$

**Cuadro 4.** Este cuadro muestran las desviaciones rms entre las gráficas de ajuste experimental y las curvas teóricas obtenidas para el caso de caída libre

Variable de comparación	Desviación rms
$x(t)$	$0.001395 \text{ m}$
$v_x(t)$	$0.00357 \text{ m/s}$
$E_p(t)$	$0.0055 \text{ J}$
$E_c(t)$	$0.0886 \text{ J}$
$E_m(t)$	$0.0147 \text{ J}$

## 4.2. Péndulo Simple

Para este caso, y en similitud a la caída libre, una vez obtenidos los datos, se realizaron los ajustes para cada una de las variables en cuestión.

De la misma manera, con la herramienta Constructor de ajustes conociendo las ecuaciones teóricas, fue posible construir un ajuste con base en parámetros conocidos desde la toma de datos, y como se explicó anteriormente, en este punto *Tracker* lo que hizo fue a partir de uno de los valores de los parámetros ingresados, realizar un ajuste que correlacionó los restantes, obteniendo un buen ajuste.

Es importante mencionar que en el tratamiento de dato se usó la ecuación [7] para simplificar el momento de inercia. En el experimento el valor de  $I$  tomando en cuenta  $R$  fue  $0.01229 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y sin tomarlo en cuenta fue de  $0.01225$ , teniendo un error  $0.3 \%$ .

En primer lugar para la componente de la posición en el eje  $y$ , la ecuación usada fue:

$$y(t) = r - r \cos \theta = r - r \cos \left[ \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \arctan \left( \frac{-\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega} \right)) \right]$$

En segunda instancia, para la velocidad, la expresión usada fue:

$$v(t) = |r\dot{\theta}| = \left| r \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2}} \omega \sin(\omega t + \arctan\left(\frac{-\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega}\right)) \right|$$

En tercer lugar, para el caso de la energía potencial, la ecuación que describía esta magnitud, fue:

$$E_p = mgy = mgr - mgr \cos \left[ \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \arctan\left(\frac{-\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega}\right)) \right]$$

Que correspondió a la ecuación de energía potencial sin la aproximación para el seno de  $\theta$  debido a que se quería un ajuste lo más preciso posible.

En cuarto lugar, para el ajuste de energía cinética se usó:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2 \left( \theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} \right) \omega^2 \sin^2(\omega t + \arctan\left(\frac{-\dot{\theta}_0}{\theta_0 \omega}\right)) \quad (12)$$

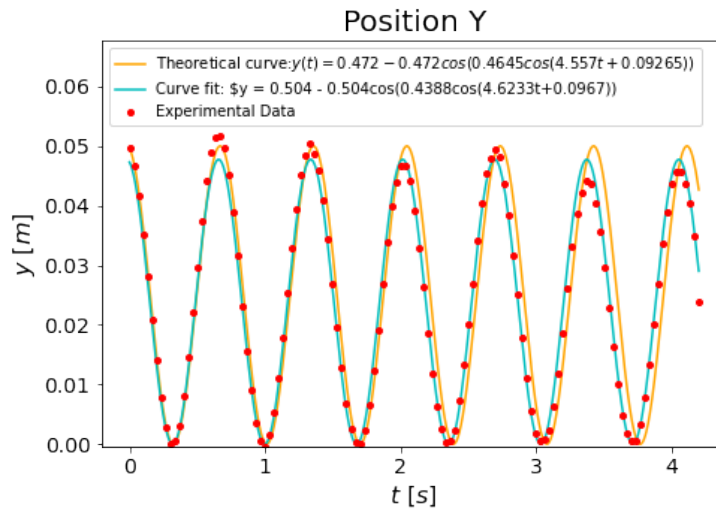
Finalmente, en el caso de la energía mecánica se uso un ajuste de una constante:

$$E_m = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

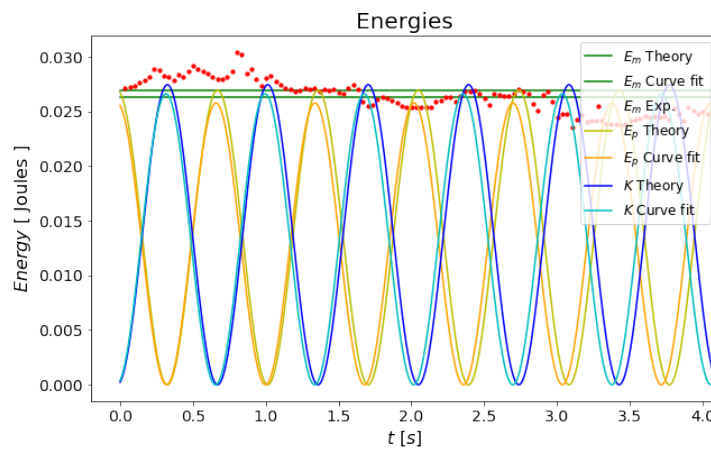
Donde además se consideraron tres ajustes para la energía mecánica, uno durante cada periodo del péndulo. Ya que, se encontró que entre cada periodo hubo la mayor perdida de energía. Los resultados de este ajuste pueden verse en las figuras (22, 23, 24). Por su part, las desviaciones rms de cada ajuste se pueden encontrar en la tabla (ver cuadro 5).

Igual que antes, las ecuaciones de ajuste experimental se gráfican junto con las curvas teóricas (ver figuras 8, 9). El código en Jupyter puede encontrarse en el [repositorio](https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/Lab5_Conservative_forces/Jupyter) de Git Hub: [https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/Lab5\\_Conservative\\_forces/Jupyter](https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/Lab5_Conservative_forces/Jupyter). Los datos de desviación rms para las comparaciones se pueden encontrar en el cuadro 6.

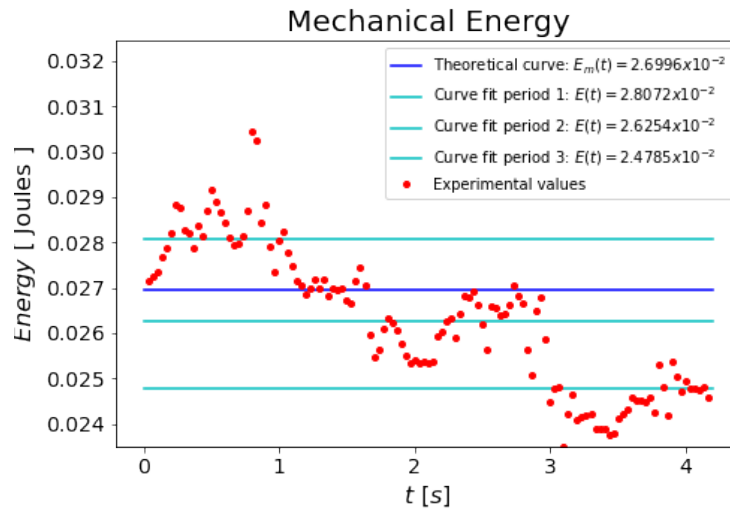
Por último, todas las gráficas de la comparación del movimiento de la masa del péndulo y la comparación con todas las energía se muestran a continuación. Además, las demás gráficas de comparación pueden verse en la sección 6.



**Fig. 8.** Variación de la posición y respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 9.** En esta imagen se muestran todas las energías potencial, cinética y mecánica respecto al tiempo  $t$ , incluyendo los ajustes experimentales y las curvas teóricas



**Fig. 10.** Variación de la energía mecánica  $E_m$  respecto al tiempo  $t$  donde se muestra el ajuste de energía para cada periodo.

**Cuadro 5.** Este cuadro muestra las ecuaciones de ajuste obtenidas para cada variable en el caso del péndulo

Variable	Ecuación de ajuste	Desviación rms
$y$	$y(t) = 0,504 - 0,504 \cos(0,4388 \cos(4,6233t + 0,0967))$	$2.062 \times 10^{-3} \text{m}$
$v$	$v(t) =  0,564 \cdot 0,3784 \cdot 4,618 \sin(4,618 + 0,1098) $	$2.494 \times 10^{-2} \text{m/s}$
$E_p$	$E_p(t) = 0,3242(1 - \cos(0,4014 \cos(4,6234t + 0,0966)))$	$1.110 \times 10^{-3} \text{J}$
$E_c$	$E_c = 24,68t^2 + 0,194t + 0,0003834$	$1.042 \times 10^{-3} \text{J}$
$E_m$ periodo completo	$E_m(t) = 2,6319 \times 10^{-2}$	$1.550 \times 10^{-3} \text{J}$
$E_m$ periodo 1	$E_m(t) = 2,8072 \times 10^{-2}$	$8.081 \times 10^{-4} \text{J}$
$E_m$ periodo 2	$E_m(t) = 2,6254 \times 10^{-2}$	$5.865 \times 10^{-4} \text{J}$
$E_m$ periodo 3	$E_m(t) = 2,4785 \times 10^{-2}$	$8.615 \times 10^{-4} \text{J}$

**Cuadro 6.** Este cuadro muestran las desviaciones rms entre las gráficas de ajuste experimental y las curvas teóricas obtenidas para el caso del péndulo

Variable de comparación	Desviación rms
$x(t)$	$3,4695 \times 10^{-3} \text{m}$
$v_x(t)$	$6,8721 \times 10^{-2} \text{m/s}$
$E_p(t)$	$1,8725 \times 10^{-3} \text{J}$
$E_c(t)$	$1,8785 \times 10^{-3} \text{J}$
$E_m(t)$ periodo completo	$6,77 \times 10^{-2} \text{J}$

## 5. Análisis de Resultados

En esta práctica de laboratorio se analizó el comportamiento de la energía en dos sistemas diferentes, la caída libre y el péndulo simple. El caso de la caída libre se consideró como un sistema conservativo, debido a que sobre este solo interactuaron fuerzas conservativas, por lo que no se produjo pérdida de energía mecánica, caso contrario al del péndulo, el cual fue un sistema no conservativo o disipativo, pues en este interactuó la fuerza de fricción con el aire, lo cual llevó al detenimiento del movimiento en un cierto tiempo.

Como se trabajaron con dos montajes experimentales diferentes, tuvo que darse un tratamiento diferente a los datos obtenidos en cada uno de estos, esto influyó en la medida del experimento como tal, pues para el caso del péndulo, la cuerda que sujetaba la pelota se reposó sobre un soporte que tuvo que ser ubicado en el suelo el cual contaba con cierta inclinación, como consecuencia, dicho soporte estaba inclinado y por lo tanto el montaje del péndulo como tal no fue el ideal, esto pudo generar errores mayores a los que se podrían tener simplemente por el trackeo de datos, o perspectivas de cámara. Diferente al caso de caída libre en el que esto no tuvo relevancia.

Respecto a los ajustes realizados en *Tracker* se implementó una manera para poder relacionar los parámetros de cada uno de estos, pues en realidad aunque *Tracker* obtiene muy buenos ajustes automáticamente, no tiene en cuenta la correlación que en sí tienen estos parámetros, por lo tanto, la manera en la que se obtuvieron sí relacionaron dichos parámetros, así mismo se obtuvieron muy buenos ajustes, con desviaciones rms mayores a los de *Tracker* pero que en realidad, no deberían ser lo como tal, por lo ya mencionado.

Por lo mismo, tal y como se pudo observar en las gráficas de comparación de curvas, los ajustes de los datos experimentales se ajustan casi perfectamente a la curva teórica, obteniendo desviaciones rms en el caso de caída libre, que varían entre 0,000806 para la posición, la cual tiene la menor propagación de errores en el trackeo de datos, hasta 0,02863 para la energía mecánica que es la que tiene mayor propagación de errores. Estas desviaciones rms, muestran qué tan alejados de la curva de ajuste pueden estar los datos experimentales, por lo que se pudo apreciar que para el caso de caída libre teniendo un valor para la energía mecánica de  $E_m = 4,699$  con la desviación anteriormente mencionada, la variación de esta fue muy pequeña, y esta mínima diferencia tuvo que ser ocasionada por la fricción con el aire, que aunque no se tenga en cuenta para la teoría no se puede eximir de la práctica. En paralelo, para el caso del péndulo, la desviación rms para la energía mecánica fue del orden de 0,00155, lo cual indicó la poca variación de la energía en el periodo de oscilación del péndulo analizado, que fue una fracción del tiempo total de oscilación. Además para este mismo, la energía potencial máxima fue de  $2,6 \times 10^{-2} J$  con una desviación rms de  $1,11 \times 10^{-3}$  y para la cinética, el valor máximo fue de  $2,8 \times 10^{-2} J$  con una desviación rms de  $1,04 \times 10^{-3}$ .

## 6. Conclusiones

Por medio del análisis teórico del movimiento, se llegó a demostrar que la energía mecánica se mantuvo constante en el tiempo para ciertas consideraciones ideales, como la ausencia de fricción con el aire o fricción en el punto donde se ataba la cuerda del péndulo. También se mostró que la energía mecánica dependía de los parámetros del sistema y de las condiciones iniciales de posición y velocidad (ver ecuaciones 5, 10).

En el caso de la caída libre, el resultado teórico se evidencio experimentalmente con una buena precisión. Ya que, se estimó que el error de un ajuste constante para los datos de energía mecánica fue de tan solo 0.31 %. Y es de destacar que haciendo el ajuste de datos experimentales, el valor obtenido es bastante parecido al predicho teóricamente, con un erro mínimo de  $2,13 \times 10^{-3} \%$  (ver figura 28). Lo que nos permitió concluir que en este sistema se conservó la energía mecánica, y el valor al que se mantuvo constante coincidió muy bien con el valor predicho teóricamente.

En el caso del péndulo, se observo cierta discrepancia en los ajustes de los datos de energía potencial y cinética. Las desviaciones rms fueron de un orden de magnitud menor a los datos de energía, lo que implica que el error porcentual está en el orden de 10 % (ver cuadro 5 y la figura 9). Esto, a su vez, indica que la desviación promedio encontrada es aceptable. Adicionalmente, la gráfica de energía mecánica contra tiempo disminuyo en los últimos datos. Lo que indicó que hubo perdida de energía. A pesar de esto, esta perdida de energía fue pequeña ya que representó el 11.71 %, con respecto a la energía al inicio. Donde se tomo en cuenta el ajuste de energía mecánica hecho en cada periodo del péndulo (ver cuadro 5)

Es de resaltar que gracias a los análisis teóricos fue posible demostrar que el valor de energía mecánica total en ambos experimentos fue de  $E_m = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$ , es decir, la energía mecánica solamente dependió de las condiciones iniciales del movimiento (ver ecuaciones 5, 11). Además, con esta ecuación es posible ver que la energía mecánica fue directamente proporcional a la masa. Por lo tanto una masa mayor que otra tendrá una energía mecánica mayor, y con la misma proporción que la proporción entre las masas. Como se está analizando energía potencial, es posible cambiar el sistema de referencia para que la energía mecánica sea tanto mayor o menor como se desee. Esto no afectó el estudio del sistema porque se sigue cumpliendo que al tomar las variaciones de energía mecánica se tenga la misma variación de energía cinética. Una energía potencial negativa solo implicó que el objeto estaría por debajo del cero del potencial,

Cabe agregar que la perdida de energía en el caso del péndulo podría calcularse con el coeficiente de amortiguamiento, que puede conocerse con el decrecimiento logarítmico de la amplitud de  $\theta$  para dos puntos separados por un periodo. Se debería usar  $\theta$  porque es la magnitud que se consideró como un movimiento armónico simple, y que en realidad sería una aproximación del movimiento oscilatorio amortiguado.

El proyecto es importante porque evidenció un principio fundamental de la física que

es la conservación de energía en sistemas donde no existen fuerzas disipativas como la fricción. A su vez, este análisis puede usarse en el estudio de otros sistemas donde se conserve la energía como el de un skater en una pista, o el movimiento de un niño en un columpio.

Los datos de esta práctica pueden encontrar en el [repositorio](#) de Git Hub. Igualmente, este experimento se guio en el documento de referencia [2]

## Referencias

- [1] Brown D, Christian W, Hanson R (2021) Tracker, . URL <https://www.physlets.org/tracker/>.
- [2] Forero Pinto o Triana Camacho (2020) Estudio de las energías cinética y potencial en sistemas conservativos y no conservativos. *Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander* .

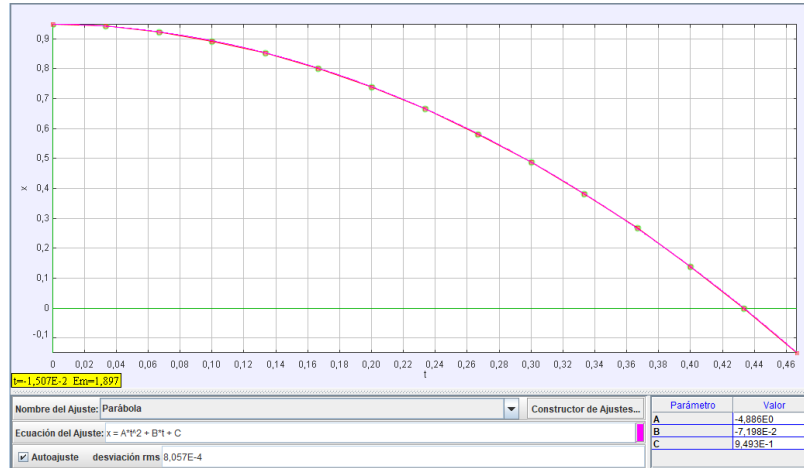
## Anexos



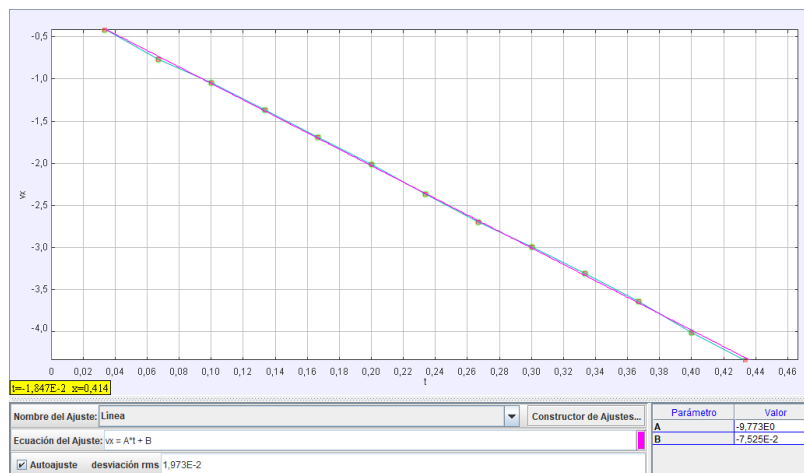
**Fig. 11.** La cámara cuenta con una resolución de 1920x1080 y graba 60 FPS.

## Anexo A: Figuras de ajuste

- Ajustes para la caída libre

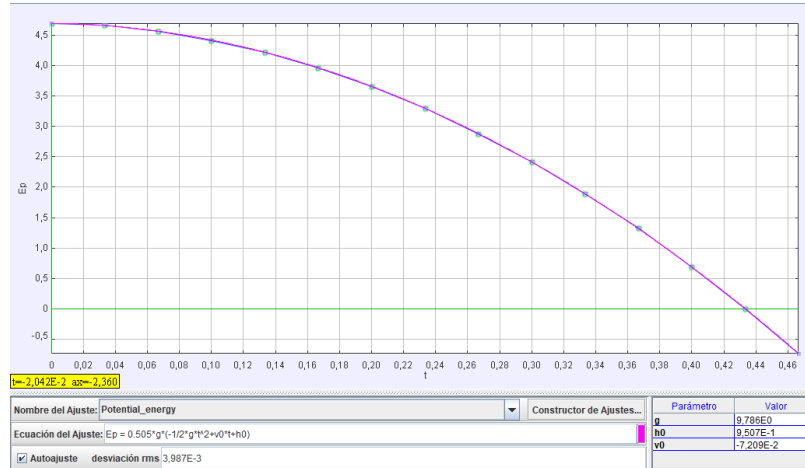


**Fig. 12.** Variación de la posición en  $x$  respecto al tiempo  $t$ .

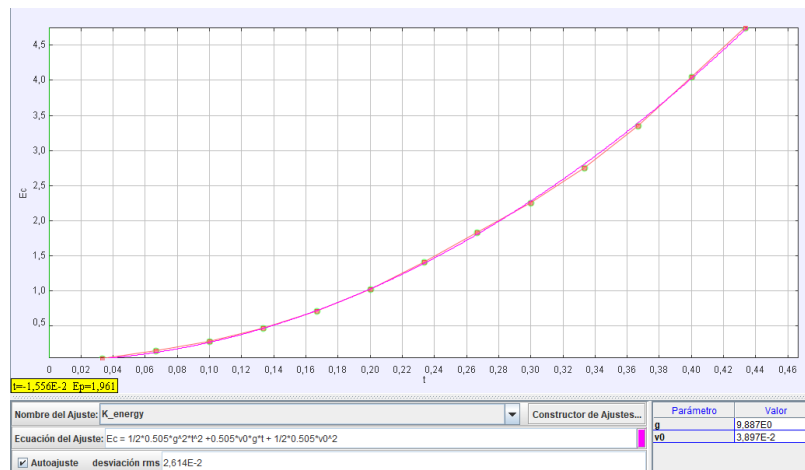


**Fig. 13.** Variación de la componente en  $x$  velocidad respecto al tiempo  $t$ .

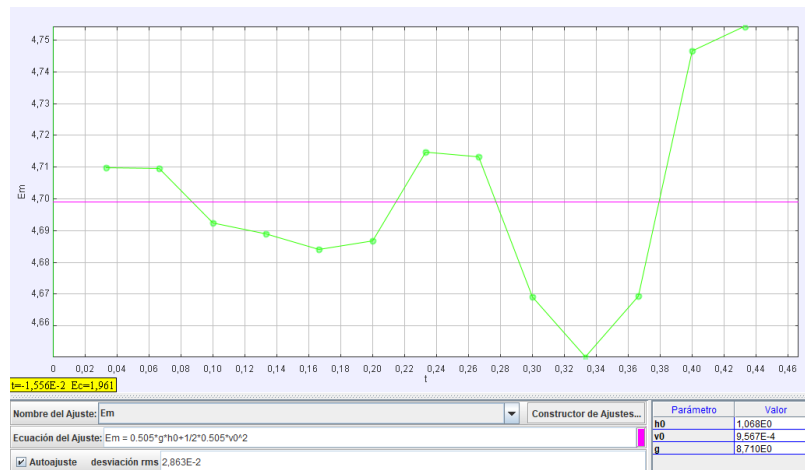




**Fig. 14.** Variación de la energía potencial en  $E_p$  respecto al tiempo  $t$ .

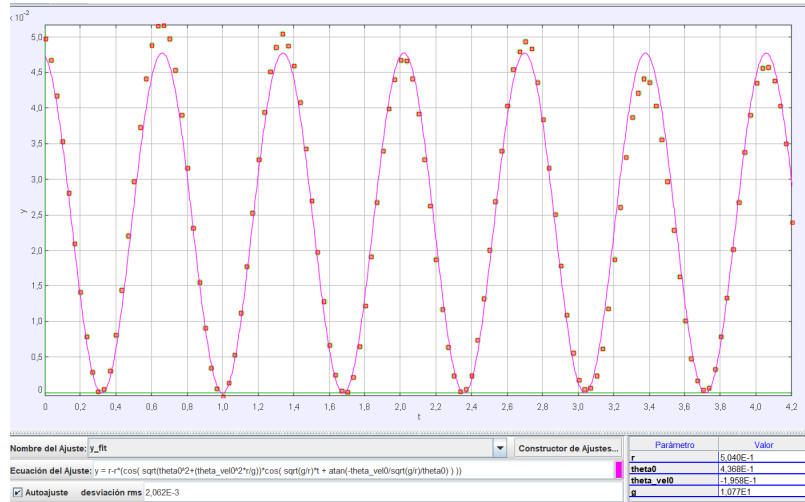
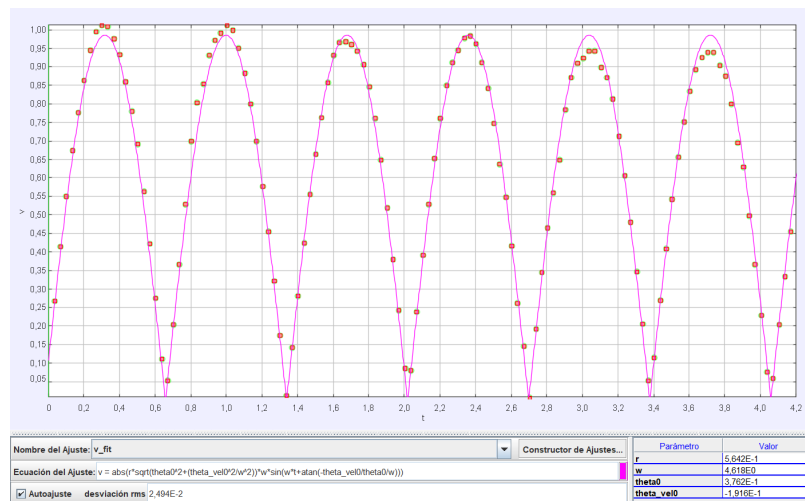


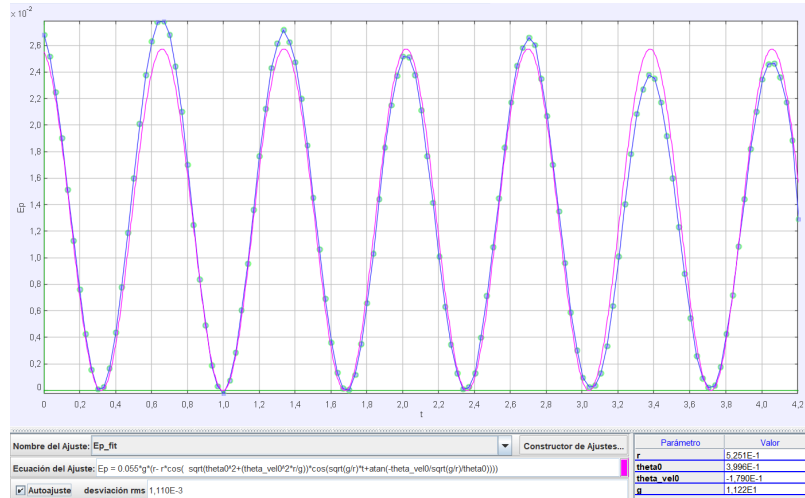
**Fig. 15.** Variación de la energía cinética en  $E_c$  respecto al tiempo  $t$ .



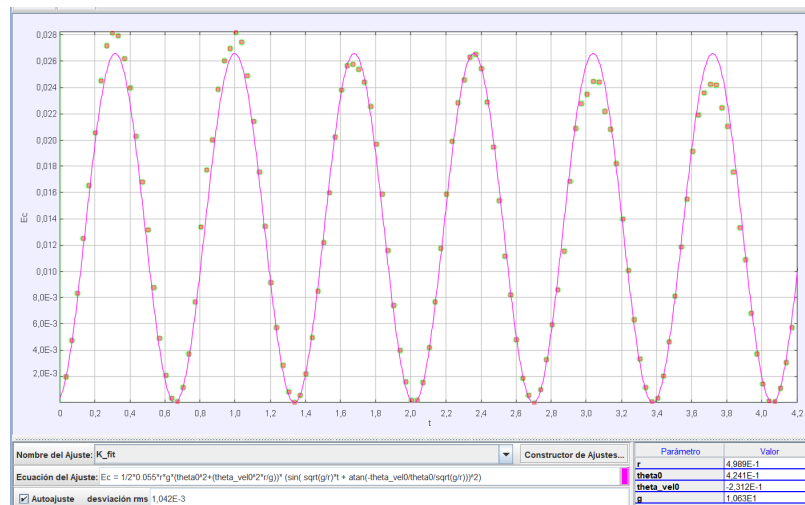
**Fig. 16.** Variación de la energía mecánica en  $E_m$  respecto al tiempo  $t$ .

■ Ajustes para el péndulo

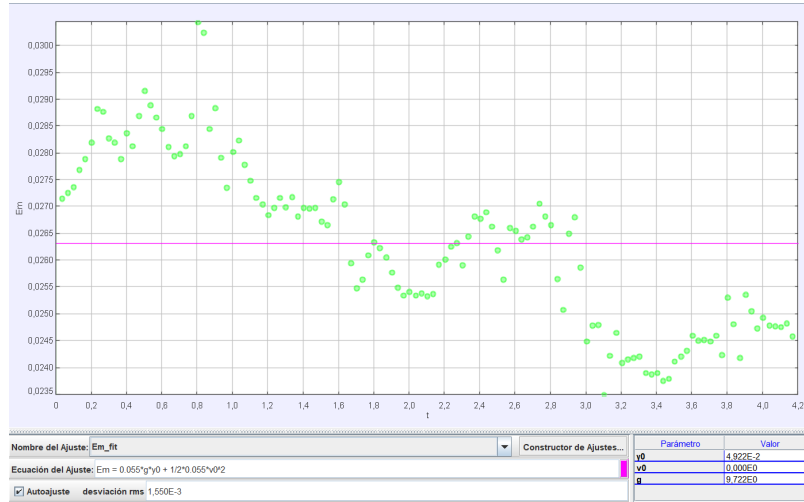
Fig. 17. Variación de la posición en  $y$  respecto al tiempo  $t$ .Fig. 18. Variación de la velocidad  $v$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 19.** Variación de la energía potencial en  $E_p$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 20.** Variación de la energía cinética en  $E_c$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 21.** Gráfica del ajuste mediante una función constante de la energía mecánica  $E_m(t)$  durante todo el movimiento.



**Fig. 22.** Gráfica del ajuste mediante una función constante de la energía mecánica  $E_m(t)$  durante el primer (1) periodo del péndulo.



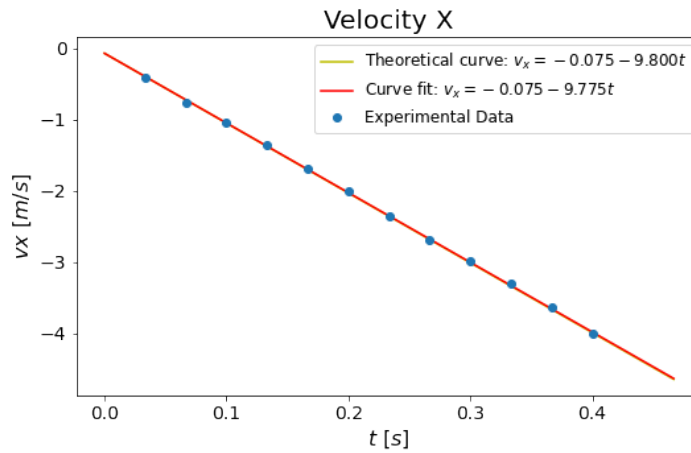
**Fig. 23.** Gráfica del ajuste mediante una función constante de la energía mecánica  $E_m(t)$  durante el segundo (2) periodo del péndulo.



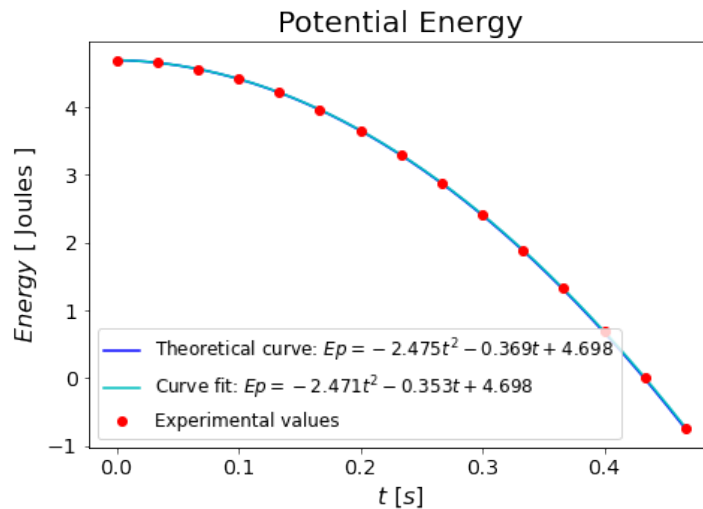
**Fig. 24.** Gráfica del ajuste mediante una función constante de la energía mecánica  $E_m(t)$  durante el tercer (3) periodo del péndulo.

## Anexo B: Gráficas Teóricas vs Experimentales

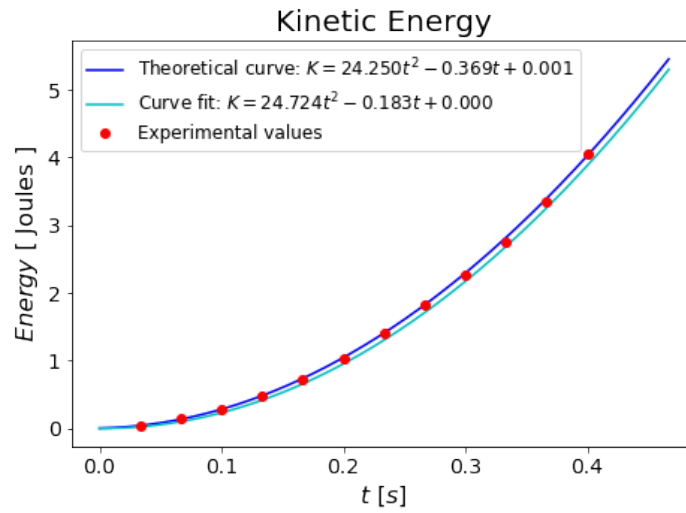
### Comparaciones para la caída libre



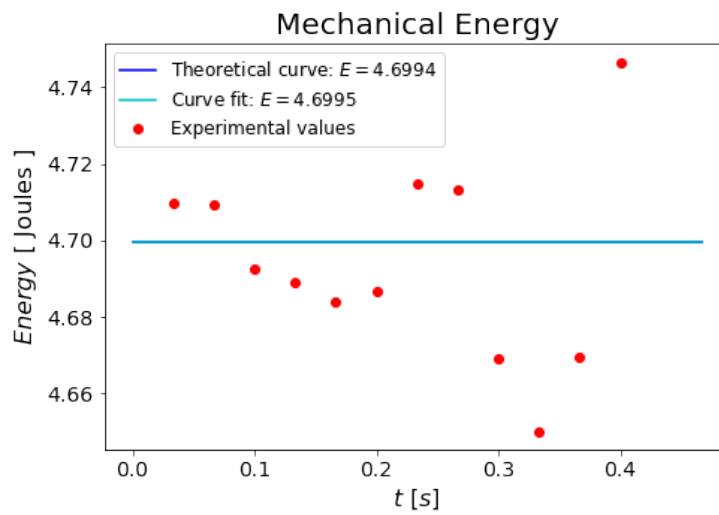
**Fig. 25.** Variación de la velocidad en  $x$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 26.** Variación de la energía potencial  $E_p$  respecto al tiempo  $t$ .



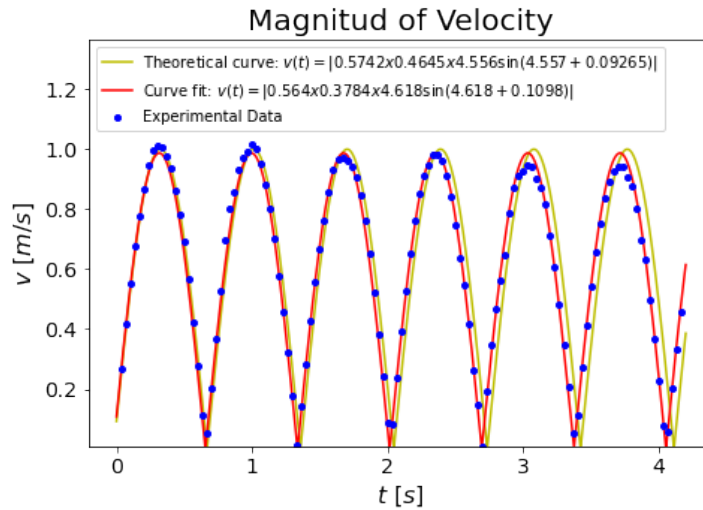
**Fig. 27.** Variación de la energía cinética  $E_p$  respecto al tiempo  $t$ .



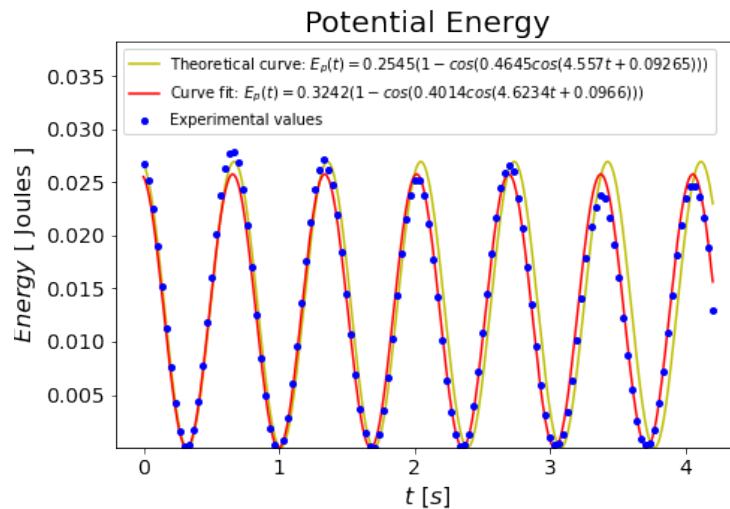
**Fig. 28.** Variación de la energía mecánica  $E_m$  respecto al tiempo  $t$ .



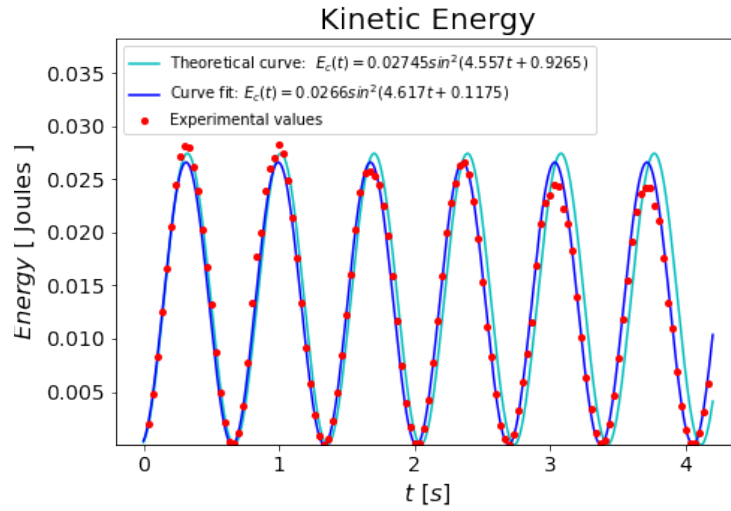
## Comparaciones para el péndulo



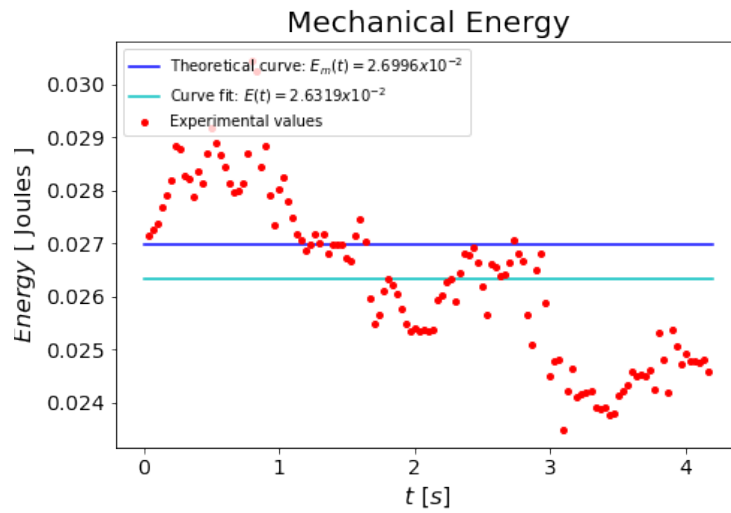
**Fig. 29.** Variación de la magnitud de la velocidad  $v$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 30.** Variación de la energía potencial  $E_p$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 31.** Variación de la energía cinética  $E_c$  respecto al tiempo  $t$ .



**Fig. 32.** Variación de la energía mecánica  $E_m$  respecto al tiempo  $t$  durante todo el periodo.

**Anexo C: Tablas con los datos**

**Cuadro 7.** En este cuadro se muestran todos los datos de posición, velocidad y aceleración en el eje  $x$ , así como las energías potencial, cinética y mecánica, obtenidos de *Tracker* para el caso de estudio de caída libre.

$t$	$x$	$v_x$	$a_x$	$Ep$	$Ec$	$Em$
0	0,949			4,698		
0,033	0,943	-0,409		4,668	4,22E-02	4,71
0,067	0,922	-0,761	-9,821	4,563	0,146	4,709
0,1	0,892	-1,045	-9,02	4,416	0,276	4,692
0,133	0,852	-1,366	-9,586	4,218	0,471	4,689
0,167	0,801	-1,687	-9,784	3,966	0,718	4,684
0,2	0,74	-2,015	-10,18	3,662	1,025	4,687
0,233	0,667	-2,366	-10,09	3,301	1,414	4,715
0,267	0,582	-2,694	-9,425	2,881	1,832	4,713
0,3	0,487	-2,99	-9,181	2,412	2,257	4,669
0,333	0,383	-3,303	-9,743	1,895	2,756	4,65
0,367	0,267	-3,641	-10,58	1,322	3,347	4,669
0,4	0,14	-4,006	-10,31	0,693	4,053	4,746
0,433	9,46E-05	-4,339		4,68E-04	4,754	4,754
0,467	-0,149			-0,738		

**Cuadro 8.** En este cuadro se muestran todos los datos de posición en el eje  $x$  y eje  $y$ , la velocidad y aceleración resultantes y las energías potencial, cinética y mecánica, obtenidos de *Tracker* para el caso de estudio del péndulo simple.

$t$	$x$	$y$	$v$	$a$	$Ep$	$Ec$	$Em$
0,00E+00	2,10E-01	4,97E-02			2,68E-02		
1,33E-01	1,60E-01	2,81E-02	6,75E-01	3,51E+00	1,52E-02	1,25E-02	2,77E-02
2,67E-01	4,77E-02	2,88E-03	9,95E-01	2,34E+00	1,55E-03	2,72E-02	2,88E-02
4,00E-01	-8,44E-02	8,15E-03	9,34E-01	2,21E+00	4,39E-03	2,40E-02	2,84E-02
5,35E-01	-1,85E-01	3,73E-02	5,65E-01	4,11E+00	2,01E-02	8,78E-03	2,89E-02
6,68E-01	-2,18E-01	5,17E-02	5,29E-02	4,83E+00	2,79E-02	7,69E-05	2,79E-02
8,02E-01	-1,73E-01	3,16E-02	6,99E-01	4,05E+00	1,70E-02	1,34E-02	3,05E-02
9,35E-01	-6,11E-02	3,47E-03	9,73E-01	2,13E+00	1,87E-03	2,60E-02	2,79E-02
1,07E+00	7,13E-02	5,31E-03	9,52E-01	2,48E+00	2,86E-03	2,49E-02	2,78E-02
1,20E+00	1,73E-01	3,28E-02	5,78E-01	3,70E+00	1,77E-02	9,18E-03	2,68E-02
1,34E+00	2,11E-01	5,04E-02	1,31E-02	4,67E+00	2,72E-02	4,70E-06	2,72E-02
1,47E+00	1,77E-01	3,43E-02	5,56E-01	3,65E+00	1,85E-02	8,50E-03	2,70E-02
1,60E+00	7,93E-02	6,74E-03	9,31E-01	2,35E+00	3,63E-03	2,38E-02	2,75E-02
1,74E+00	-4,88E-02	2,24E-03	9,43E-01	2,06E+00	1,21E-03	2,44E-02	2,56E-02
1,87E+00	-1,57E-01	2,68E-02	6,50E-01	3,72E+00	1,44E-02	1,16E-02	2,61E-02
2,00E+00	-2,04E-01	4,68E-02	8,65E-02	4,80E+00	2,52E-02	2,06E-04	2,54E-02
2,14E+00	-1,76E-01	3,28E-02	5,29E-01	4,04E+00	1,77E-02	7,69E-03	2,54E-02
2,27E+00	-7,89E-02	6,40E-03	9,12E-01	2,21E+00	3,45E-03	2,29E-02	2,63E-02
2,40E+00	4,93E-02	2,42E-03	9,62E-01	2,27E+00	1,31E-03	2,55E-02	2,68E-02
2,54E+00	1,57E-01	2,68E-02	6,38E-01	3,19E+00	1,45E-02	1,12E-02	2,56E-02
2,67E+00	2,07E-01	4,79E-02	1,46E-01	3,88E+00	2,58E-02	5,87E-04	2,64E-02
2,80E+00	1,86E-01	3,84E-02	4,65E-01	3,01E+00	2,07E-02	5,94E-03	2,67E-02
2,94E+00	1,01E-01	1,10E-02	8,72E-01	2,45E+00	5,91E-03	2,09E-02	2,68E-02
3,07E+00	-2,16E-02	6,94E-04	9,42E-01	1,68E+00	3,74E-04	2,44E-02	2,48E-02
3,20E+00	-1,34E-01	1,87E-02	7,14E-01	3,47E+00	1,01E-02	1,40E-02	2,41E-02
3,34E+00	-1,93E-01	4,22E-02	2,06E-01	4,41E+00	2,27E-02	1,17E-03	2,39E-02
3,47E+00	-1,80E-01	3,56E-02	4,10E-01	4,10E+00	1,92E-02	4,62E-03	2,38E-02
3,60E+00	-9,80E-02	1,01E-02	8,34E-01	2,51E+00	5,44E-03	1,91E-02	2,46E-02
3,74E+00	2,35E-02	6,63E-04	9,39E-01	1,96E+00	3,57E-04	2,42E-02	2,46E-02
3,87E+00	1,35E-01	2,02E-02	6,96E-01	2,96E+00	1,09E-02	1,33E-02	2,42E-02
4,00E+00	1,97E-01	4,36E-02	2,29E-01	4,16E+00	2,35E-02	1,44E-03	2,49E-02
4,14E+00	1,90E-01	4,03E-02	3,35E-01	3,86E+00	2,17E-02	3,08E-03	2,48E-02