

Proyecto de laboratorio 4

Estudio del Movimiento de un Cuerpo en un Plano con Rozamiento

Juan Andrés Guarín Rojas
Angélica María Angarita
Andrés Giovanni Ferreira

15 de Agosto del 2021

Universidad
Industrial de
Santander



Resumen

Esta práctica de laboratorio tuvo como objetivo analizar el movimiento de un cuerpo deslizando sobre un plano inclinado con fricción significativa. En la parte de teoría, Se consideró una rugosidad homogénea entre las superficies en contacto. Luego, se usó la segunda ley de Newton para determinar las ecuaciones del movimiento, hallando a su vez los coeficientes de fricción dinámico y estático teóricamente. Este mismo análisis se realizó para el de fricción despreciable.

Después de esto, se realizó el montaje experimental que fue grabado en un vídeo para tres ángulos de inclinación del plano diferentes, que fueron de 35° , 30° y 28.7° . Los dos primeros tuvieron fricción dinámica, y el restante tuvo la inclinación mínima para la cual el objeto se deslizó por el plano. Luego, se estimaron los valores de posición, velocidad y aceleración en cada fotograma por medio de *Tracker* [1]. Se realizaron, a su vez, los ajustes de estas variables tomando en cuenta el modelo de la función según la teoría.

Finalmente, se realizó una simulación por medio de *oPhysics* [2] donde se usaron los valores de los coeficientes de fricción obtenidos de los datos de *Tracker*. Luego se compararon los datos de la simulación y del experimento por medio de un código en *Jupyter*, obteniendo como resultado en la posición unas desviaciones promedio de 0.010 y 0.035 [m], en la velocidad de 0.0247 y 0.0799 [m/s], y en la aceleración, se tuvo un error porcentual de 4.19% y 6.94%, para los casos de 35° y 30° respectivamente, siendo valores cercanos a los esperados.

1. Introducción

En física es común crear escenarios ideales en los cuales se desprecian valores para hacer más sencilla la teoría. Estos en el movimiento de un cuerpo son los coeficientes de fricción, que se encuentran en las superficies por las cuales se mueve. Para este experimento no se despreciaron estos valores, y tuvieron el papel principal en el análisis del movimiento.

En la práctica se usó un plano inclinado, este tipo de escenario trajo consigo unas complejidades para el correcto análisis de un objeto moviéndose por él. Una de las más significativas fue el manejo del movimiento en 2 ejes, producto del ángulo presente entre el suelo y el plano. Ésta se pudo sortear rotando el marco de referencia de manera que el movimiento del objeto ocurriese solo en el eje x . Además, cabe mencionar que el plano se mantuvo rígido y con la misma inclinación mientras la masa se movía sobre él.

Para este proyecto, se unieron dos temas de la física que estudian el movimiento desde dos perspectivas distintas: la cinemática y las leyes de Newton. En el primero de los dos, se dio una descripción del movimiento, y en nuestro caso, fue usado *Tracker* para obtener

los resultados experimentales de las magnitudes involucradas en el movimiento. En el segundo, se estudiaron las causas del movimiento y fue hallado con las ecuaciones dadas por la teoría, reemplazando los valores sacados de *Tracker*. De este modo, se obtuvieron los valores de los coeficientes que se buscaban.

En el simulador se introdujeron los valores hallados experimentalmente. Y con esto se busco comparar el modelo teórico con el experimental. En este simulador también se estudió el cambio del movimiento cuando se variaba la masa. Y para finalizar, se realizó el análisis sobre la influencia de los coeficientes de fricción en el movimiento.

Este informe está conformado por 5 secciones principales. Primero la metodología, en esta se explicaron las condiciones iniciales y el procedimiento usado tanto en la parte experimental como en el simulador. Segundo, la teoría es un apartado en el cual se dio un recorrido por el modelo teórico seguido en el proyecto, resaltando a su vez las partes que fueron principales en la práctica. Tercero, en el tratamiento de datos se recogieron tanto los valores dados por medio de *Tracker* como los valores hallados con ayuda del simulador y del código en *Jupyter*. Cuarto, el análisis de resultados es la sección en la cual se hizo la comparación de los dos modelos (experimental y teórico), y se buscó las relaciones de los datos obtenidos con las condiciones dadas. Además, se analizo la influencia que tiene la masa en los coeficientes de fricción del movimiento. Por último las conclusiones, en esta parte se describen los objetivos cumplidos y se hace un recuento de los conocimientos adquiridos teóricamente, los cuales han sido reforzados con la realización de esta práctica.

2. Metodología

2.1. Modelo teórico

En esta fase, se hizo un análisis teórico para determinar mediante una ecuación los valores de la coordenada x en función del tiempo t . Para comenzar, se simplificó el problema para darle solución. Se ajustó el eje de coordenadas, para que registrara el movimiento del objeto solo en el eje x . Luego se hizo el análisis de las fuerzas presentes en el sistema, donde se despreció la fricción con el aire, llegando a que la únicas fuerzas presentes sobre el objeto fueron: la fuerza normal producto de estar sobre el plano inclinado, el peso debido a la gravedad y la fuerza de fricción que se generó debido al contacto entre las superficies. Luego, basado en lo anterior, sobre el eje x (horizontal) se tuvo un movimiento con aceleración constante y sobre el eje y (vertical) no se tuvo movimiento. Cabe mencionar que se realizó el mismo cálculo para $x(t)$ sin rozamiento con la finalidad de observar la influencia de la fuerza de fricción en el movimiento.

El desarrollo matemático que se basó en el análisis de las fuerzas en el sistema fue:

- Caso sin rozamiento

$$\sum \vec{F} = m \vec{g} + \vec{N} = m \vec{a} \quad (1)$$

$$m \vec{g} + \vec{N} = m \vec{a} \rightarrow \begin{cases} -mg \cos(\theta) + N = 0 & \text{en la coordenada } y \\ mg \sin(\theta) = ma_x & \text{en la coordenada } x \end{cases} \quad (2)$$

$$N = mg \cos \theta$$

$$g \sin \theta = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3)$$

Para continuar, se extrajo la ecuación del movimiento en x usando el análisis de fuerzas. En donde, se realizó la integral de la aceleración respecto al tiempo para hallar la velocidad v_x , y luego se integro nuevamente para hallar $x(t)$. Con la cual se obtuvo la ecuación mostrada en 3 para la aceleración. De esta forma, la solución fue la ecuación de x en función del tiempo $x(t)$ y la de la velocidad $v_x(t)$.

Como se pudo observar, el análisis en la componente y , dio como único resultado la fuerza normal, debido a que no hay movimiento sobre este eje. Por otro lado, resolviendo la ecuación (3) se obtuvo:

$$\int \frac{d^2 x}{dt^2} = \int g \sin \theta \, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = g \sin(\theta)t + C_1$$

$$\int \frac{dx}{dt} = \int (g \sin \theta + C_1) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin(\theta)t^2 + C_1 t + C_2$$

Reemplazando $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$, para tener velocidad y posición inicial iguales a cero.

$$v_x(t) = g \sin(\theta)t$$

$$x(t) = \frac{1}{2} g \sin(\theta)t^2$$

- Caso con rozamiento

$$\sum \vec{F} = m \vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_s = m \vec{a}$$

$$m \vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_s = m \vec{a} \rightarrow \begin{cases} -mg \cos(\theta) + N = 0 & \text{en la coordenada } y \\ mg \sin(\theta) - \mu_k N = ma_x & \text{en la coordenada } x \end{cases}$$

$$N = mg \cos \theta$$

$$mg \sin \theta - \mu_k N = ma_x$$

$$mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma_x$$

$$g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = a_x \quad (4)$$

En este punto, se procedió de la misma manera que para el caso sin rozamiento, teniendo en cuenta exactamente las mismas consideraciones y condiciones iniciales mencionadas anteriormente. Por lo tanto:

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} = \int g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) dt$$

$$\frac{dx}{dt} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t + C_1$$

$$\int \frac{dx}{dt} = \int (g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t + C_1) dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t^2 + C_1t + C_2$$

Y por lo tanto se obtuvo que:

$$v(t) = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t$$

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t^2$$

Estas ecuaciones de movimiento fueron usadas después para predecir la posición, velocidad y aceleración de la caja, así como conocer el coeficiente de rozamiento. Del mismo modo, estas ecuaciones fueron graficadas mediante un código en *Jupyter*, donde se compararon estas gráficas con los puntos de posición, velocidad y aceleración de la caja provenientes de *Tracker* (ver figura 8).

2.2. Montaje experimental

Para este laboratorio se realizó un montaje experimental que permitiera grabar un vídeo de un objeto deslizando por un plano inclinado; en este caso, el objeto utilizado fue una caja de celular, de geometría rectangular. Para esto, se dispuso de una cámara puesta de forma horizontal y de un trípode convencional (ver figura 10), para que su movimiento fuese mínimo mientras se grabase. Y de esta forma, se pudiera registrar el movimiento del proyectil correctamente. Ahora, con respecto a la cámara, se usó la de un celular para hacer la grabación. Ésta cuenta con una resolución de 1920x1080 y la posibilidad de grabar a 60 fotogramas por segundo. (ver Figura 1).



Fig. 1. Esta es la cámara del celular que se usó para grabar el vídeo del experimento.

Igualmente, con respecto al punto de grabación, se eligió el punto donde la altura de la cámara fuera la mitad de la altura de la caja antes de su lanzamiento en el caso del ángulo mayor, y, a su vez, que se encontrara en la mitad de la trayectoria horizontal del proyectil. En este caso, la cámara fue situada a 24,4 cm de altura respecto del suelo y a 44,2 cm en la línea horizontal medido desde el punto donde la caja empezó a deslizar. Estas medidas fueron tomadas con una cinta métrica que tiene una incertidumbre de $\pm 0,1\text{ cm}$. Por lo tanto, éstas cumplen aproximadamente con las condiciones de grabación descritas al comienzo. En este caso, fue sencillo situar la cámara en ese lugar, por lo que las mediciones se consideraron cercanas a las más óptimas (ver figura 2).

Por otro lado, el método usado para dejar caer la caja sobre el plano inclinado y que fuese casi imperceptible la fuerza que se le ejercía al tocarla, fue el de posicionarla sobre el plano inclinado y poner el dedo como obstáculo de manera que le impidiese bajar, así, una vez se levantara el dedo rápidamente, la caja empezaría a deslizar. De esta manera fue posible registrar el movimiento del proyectil para cada caso de estudio. (ver figura 5).

Una vez terminada la grabación del vídeo, el siguiente paso consistió en analizar este mismo por medio de *Tracker*¹. Este software permitió reconstruir la trayectoria de la caja

¹Para más información ver: <https://tracker.physlets.org/>

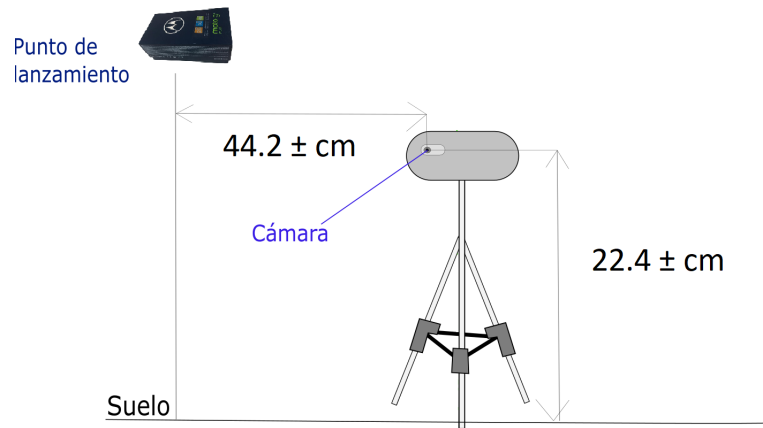


Fig. 2. En esta imagen se muestra la posición de la cámara con respecto al punto de lanzamiento de la caja. Las distancias fueron tomadas sobre el plano donde se deslizó la caja.

en el tiempo, determinando las posiciones en x y y de esta misma. Luego, tomando en cuenta estos datos de posición y tiempo, el software determinó las velocidades y aceleraciones de la caja en los dos ejes del recorrido. En este caso, se usó la configuración por defecto del programa, que determina esas variables por el procedimiento de diferencias finitas. Por esto, el sistema solo puede encontrar la velocidad desde el segundo cuadro hasta el penúltimo; y la aceleración, desde el tercero hasta el antepenúltimo.

En *Tracker*, se situó una vara de calibración para que el software pudiera calcular las distancias entre cada punto de la trayectoria y el eje de coordenadas. En este caso, se usó el plano inclinado sobre el que deslizó la caja, como puede verse en la figura 5. Además, el origen del eje de coordenadas se puso en el punto de lanzamiento de la caja. Esto se hizo por facilidad de cálculo, ya que de esta manera el movimiento se registraría solo en el eje x .

Después de haber registrado los datos de posición, velocidad, aceleración de la trayectoria en el eje x , como segundo paso, se procedió a realizar los ajustes de los datos mediante la función respectiva obtenida del análisis de fuerzas realizado. De manera que los datos de cada variable o gráfica se ajustaron como se ve en la siguiente tabla (ver cuadro 1). Además con los datos obtenidos se calcularon los coeficientes de fricción estático μ_s y dinámico μ_k .

Cuadro 1. Este cuadro muestra las funciones de ajuste utilizadas en las gráficas del análisis de datos de Tracker

Gráfica	Función de ajuste	Polinomio
x vs t	At^2+Bt+C	Cuadrático
v_x vs t	$Bt + C$	Lineal
a_x vs t	C	Constante

Para a_x se tomó un ajuste de una función constante debido a que eso dice el modelo teórico y además también se analizó un ajuste lineal en tratamiento de datos.

En el caso de los ajustes, el programa de *Tracker* proporcionó una desviación estándar que indicó lo cerca que están los puntos del ajuste con los puntos experimentales. Específicamente, fue calculado tomando las diferencias entre la ordenada de los puntos dados y los del ajuste encontrado. Estas desviaciones rms también fueron calculadas mediante un código en *Jupyter*, que arrojó los valores exactos mostrados en el software.

Al terminar lo anterior, lo siguiente fue utilizar el simulador *oPhysics*² para determinar de forma teórica el tiempo de recorrido, y la distancia, velocidad y aceleración en este instante.

Para hacer la simulación se tomaron las condiciones iniciales del experimento. En el caso de la velocidad inicial se estableció en cero, dado que el análisis del movimiento del objeto inició justo antes de que la caja empezara a deslizar. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k fueron calculados con los datos de ángulo y aceleración obtenidos experimentalmente. De esta manera, corriendo la simulación se pudieron conocer los datos teóricos del movimiento de la caja (ver figura 6).

3. Teoría

Para el modelo teórico se tomó en cuenta que la rugosidad de ambos materiales en contacto era homogénea y que el cuerpo se desplaza sobre el plano inclinado sin girar. En este sentido, las únicas fuerzas presentes serían el peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción (ver Figura 3). Y además, ya que, el cuerpo no gira no se debe tomar en cuenta la sumatoria de torques. Con lo cual se obtuvieron las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_y = mg \cos \theta + N = 0 \quad (5)$$

$$N = mg \cos \theta$$

Y la sumatoria de fuerzas en x quedó de esta forma:

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_k = ma_x \quad (6)$$

$$mg \sin \theta - \mu_k N = ma_x$$

$$mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma_x$$

²Para más información ver en: <https://ophysics.com/f2.html>

$$g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) = a_x \quad (7)$$

Ahora, la ecuación anterior pudo resolverse integrando la aceleración en el tiempo y tomando en cuenta las condiciones iniciales. Que en este caso fueron: $x(0) = 0$ y $v_x(0) = 0$

$$x(t) = \frac{1}{2}g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t^2 \quad (8)$$

$$v_x(t) = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)t \quad (9)$$

En la ecuación (5) se reemplazó la aceleración en y por cero considerando que el objeto no se desplaza en esa dirección. Por otro lado en la ecuación (6) se consideró que el cuerpo se movía y por lo tanto su fricción era dinámica. En el caso de que tanto la aceleración en x como y fuera de cero, entonces se obtuvo que la fricción sería estática, lo que conllevó a las siguientes ecuaciones:

En el caso del movimiento en y se obtuvo lo mismo que antes:

$$\sum F_y = mg \cos \theta + N = 0 \quad (10)$$

$$N = mg \cos \theta$$

Después, se analizó para el caso del movimiento en x :

$$\sum F_x = mg \sin \theta - f_s = 0 \quad (11)$$

$$mg \sin \theta = f_s$$

Luego, se consideró el punto donde $f_s = \mu_s N$, que representa la fuerza de fricción máxima que puede ejercer el plano sobre el cuerpo, para que ninguna de las dos superficies se pudiera mover con respecto a la otra. Esto implicó que si se le aumenta la componente del peso, aumentando θ , para que fuera mayor que $f_s = \mu_s N$, la masa comenzaría a moverse. Y con esto, se pudo obtener una ecuación para el valor de μ_s :

$$mg \sin \alpha = \mu_s N$$

$$mg \sin \alpha = \mu_s mg \cos \alpha$$

$$\sin \alpha / \cos \alpha = \mu_s$$

$$\tan \alpha = \mu_s \quad (12)$$

Donde en la ecuación (12) el ángulo α fue el ángulo para el cual f_s es máxima. Y este podría determinarse experimentalmente midiendo el ángulo más pequeño para el cual la

masa empezara a moverse.

Del mismo modo, se utilizó el hecho de que la aceleración en x es constante en el tiempo, y basándose en la ecuación 4 se obtuvo:

$$\mu_k \cos \theta = \text{sen } \theta - a_x/g$$

$$\mu_k = (\text{sen } \theta - a_x/g) / \cos \theta \quad (13)$$

Por otro lado, luego se evaluó el caso donde no existe fuerza de fricción, condición que se obtuvo al reemplazar $\mu_k = 0$ en la ecuación (7):

$$g \text{ sen } \theta = a_x \quad (14)$$

Con esta ecuación luego se pudo obtener la posición y la velocidad para el caso de superficie sin fricción o fricción despreciable:

$$x(t) = \frac{1}{2} g \text{ sen } \theta t^2 \quad (15)$$

$$v_x(t) = g \text{ sen } \theta t \quad (16)$$

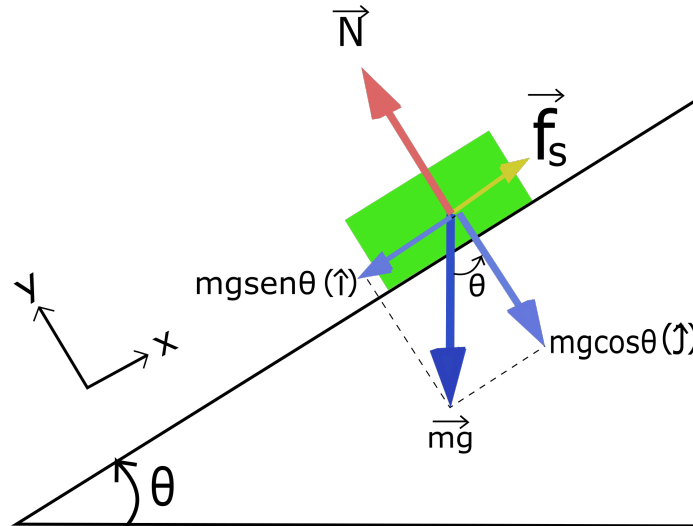


Fig. 3. En esta imagen se puede observar el diagrama de fuerzas del objeto sobre el plano inclinado, donde f_s representa la fuerza de fricción

4. Tratamiento de Datos

Para comenzar, se registraron los datos de la posición, velocidad y aceleración para los dos vídeos con fricción dinámica, por medio del software *Tracker* como se mencionó en

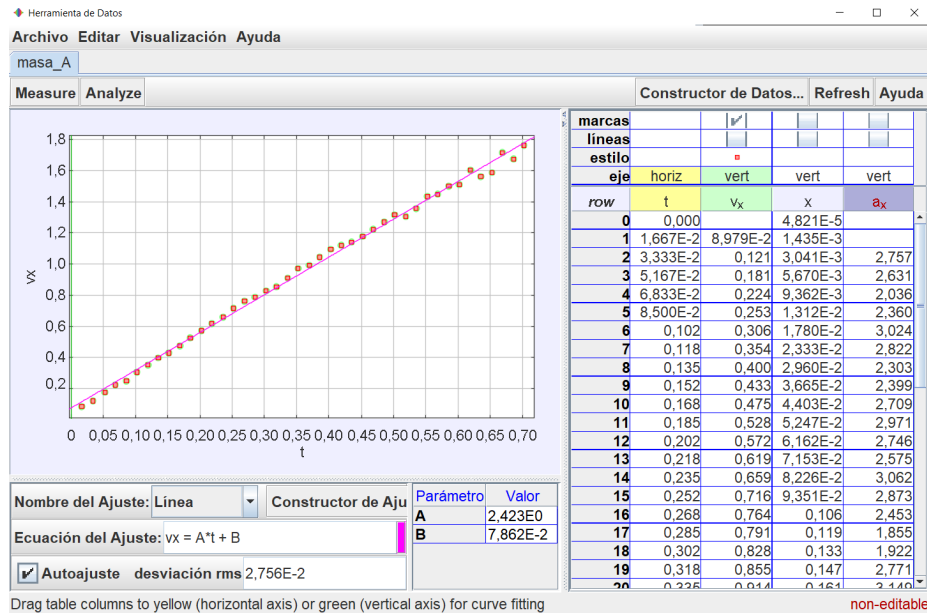


Fig. 4. En esta imagen puede verse la herramienta de ajuste de datos de Tracker. Para esto, Tracker utiliza el modelo de una función (Linea, Parábola, Gaussian) para encontrar los mejores parámetros que se ajusten a los datos.

metodología [1]. El conjunto de datos se puede encontrar en la sección de anexos en los cuadros 7 y 8.

Estos datos fueron analizados por medio de la herramienta de ajustes de *Tracker* (ver figura 4), la cual proporcionó los valores de los coeficientes de los polinomios, que son las funciones para este caso. Los resultados de cada ajuste se encuentran en las siguientes tablas (ver cuadros 2 y 3).

Cuadro 2. Este cuadro muestra las ecuaciones de ajuste obtenidas para el caso dinámico 1, con un ángulo de 35° .

Variable	Ecuación	Desviación rms
x	$x(t) = 1,212t^2 + 0,0862t - 0,0029$	$1,624 \times 10^{-3} \text{ m}$
v_x	$v_x(t) = 2,4230t + 0,0786$	$2,756 \times 10^{-2} \text{ m/s}$
a_x lineal	$a_x(t) = -0,9259t + 2,4700$	$7,707 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$
a_x constante	$a_x(t) = 2,407$	$7,911 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$

Cuadro 3. Este cuadro muestra las ecuaciones de ajuste obtenidas para el caso dinámico 2, con un ángulo de 30° .

4 Variable	Ecuación	Desviación rms
x	$x(t) = 0,8726t^2 + 0,0986t - 0,0032$	$1,490 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
v_x	$v_x(t) = 1,7840t + 0,0817$	$2,958 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$
a_x lineal	$a_x(t) = -0,0520t + 1,8570$	$9,338 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$
a_x constante	$a_x(t) = 1,8360$	$9,339 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$

Estos ajustes fueron realizados tomando en cuenta el modelo visto en la parte teórica de este reporte. Como por ejemplo que la función de $x(t)$ sea una parábola, tal como se mostró en la ecuación 8.

Además, es de resaltar que para el caso de la aceleración se tomaron dos modelos para comparar cual de ellos es mejor para el problema. El primero consistió en un ajuste lineal, donde se esperó obtener una pendiente cercana a cero debido a que la aceleración debería ser constante. Y por su parte, en el segundo se usó una función constante, que es el modelo acorde directamente con la teoría.

Las imágenes de todos los ajustes se mostraron en la sección 6 de anexos.

Es importante mencionar que estos ajustes tuvieron un error, debido a factores como la resolución de la cámara con la que fue grabado el vídeo para su análisis, la precisión al momento de usar *Tracker*, el uso de cifras significativas, entre otros.

Para cada uno de los ajustes realizados, la desviación rms calculada por *Tracker* puede observarse en la siguiente tabla.

Cuadro 4. Desviaciones para cada ajuste

	$\theta = 35^\circ$	$\theta = 30^\circ$
Ajuste	Desviación rms	Desviación rms
x vs t	$1,624 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$1,490 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
vx vs t	$2,756 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$	$2,958 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$
ax vs t constante	$7,707 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$	$9,339 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$
ax vs t lineal	$8,449 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$	$9,338 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}^2$

Estas desviaciones indicaron qué tan bien coinciden los datos reales tomados por *Tracker* con la ecuación de ajuste hallada, tal y como se mencionó en metodología.

Posteriormente, se procedió a calcular el valor de los coeficientes de fricción, tomando en cuenta las ecuaciones (13) y (12). En donde para el caso dinámico y estático, el ángulo

θ y α respectivamente, fueron calculados por medio de *Tracker* usando la inclinación del eje de coordenadas (ver figura 5). En el caso de fuerza de fricción dinámico, se consideró al valor de la aceleración del cuerpo a_x como dos veces por el coeficiente de t^2 del ajuste de la ecuación de $x(t)$. Esto debido a que se observó que el ajuste de la posición fue el que tuvo la menor desviación rms con respecto a las demás variables de velocidad y aceleración (ver cuadro 4) y por lo tanto, correspondieron a los datos más precisos.

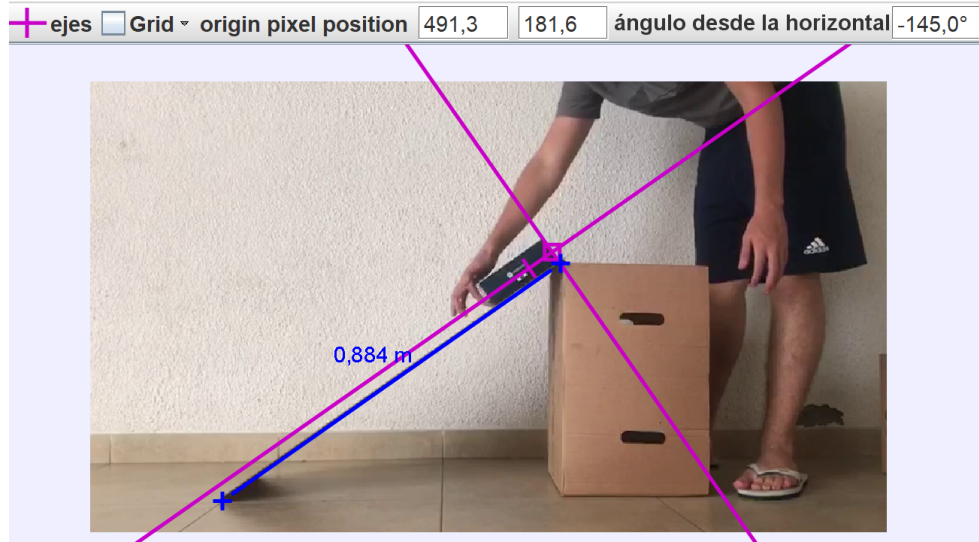


Fig. 5. En esta imagen se muestra el eje de coordenadas y la vara de calibración para el vídeo con $\theta = 35^\circ$. El eje se ajustó de forma que tuviera la misma inclinación del plano y punto de origen en la posición inicial del objeto. Además, observe que el ángulo del plano se puede hallar tomando: $\theta = 180^\circ + \text{Ángulo desde la horizontal} = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$.

De esta forma, los valores de μ_s y μ_k fueron: $\mu_{k1} = 0,398$, $\mu_{k2} = 0,372$ y $\mu_s = 0,464$. Luego, se promedió el valor de μ_k del vídeo 1 y 2 para obtener:

$$\mu_k = 0,385 \quad (17)$$

$$\mu_s = 0,464 \quad (18)$$

Donde el valor de μ_k tiene una incertidumbre de desviación estándar igual a ± 0.0188 .

4.1. Simulador

Una vez hecho lo anterior, se procedió a usar el simulador *oPhysics* para determinar de forma teórica algunos parámetros del movimiento, que fueron: el tiempo final al recorrer de la distancia recorrida por el objeto, la velocidad en el tiempo final, y la aceleración en x . Para esto se consideraron los dos casos que se trabajaron en la parte experimental. El primer caso fue el de $\theta = 35^\circ$ y el segundo de $\theta = 30^\circ$. En ambos casos, se usó una velocidad

inicial de cero $V_0 = 0 \text{ m/s}$, la aceleración de la gravedad como $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, y los coeficientes de fricción encontrados anteriormente $\mu_k = 0,385$ y $\mu_s = 0,464$ (ver ecuaciones 17 y 18).

Además, el simulador requería de que se insertara la masa del objeto. Con respecto a esto, se pudo observar por medio del simulador que el valor de la masa no afectaba la aceleración que adquiriría el cuerpo. Tal como lo muestran las figuras 6, 7. Donde se observó que el único cambio debido a modificar la masa era la magnitud de los vectores de las fuerzas. Y se llegó a concluir que si se aumentaba la masa, el peso aumentaba, pero también lo hacía la fuerza de fricción; y ambas lo hacían en la misma proporción. Lo que implica que los dos efectos se cancelaban dejando a la aceleración neta como constante.

Esta observación experimental también se pudo fundamentar en las ecuaciones que se obtuvieron para el movimiento, en particular la ecuación (3) donde se pudo notar que la aceleración en x no dependía de la masa del objeto.

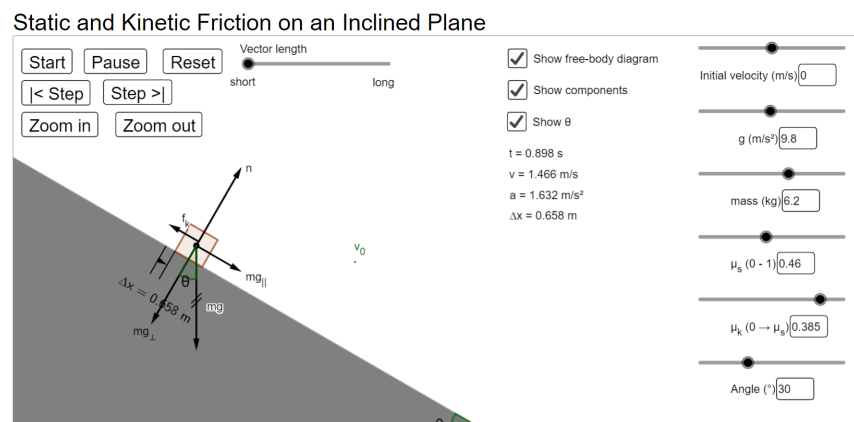


Fig. 6. Esta imagen muestra el uso del simulador *oPhysics* en esta práctica de laboratorio. Para este caso, se usaron las condiciones iniciales descritas en la sección del Simulador y se usó un valor de $6,2 \text{ kg}$ para la masa

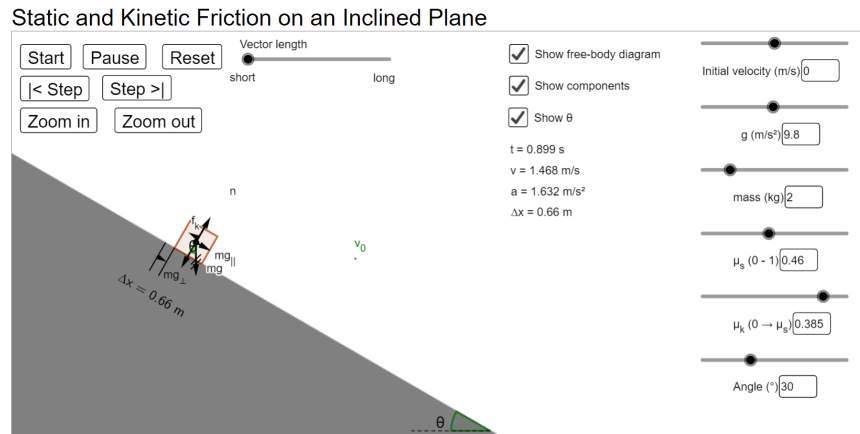


Fig. 7. Esta imagen muestra el uso del simulador *oPhysics*. Para este caso, se usaron las mismas condiciones iniciales que en la figura anterior, pero cambiando la masa por 2 kg. Observe que la aceleración no cambió para nada, y la velocidad y posición se mantuvieron casi iguales con respecto al caso anterior.

Con base en el uso del simulador se obtuvieron los siguientes resultados de tiempo final, que es el tiempo donde la masa recorre una distancia igual a la del experimento; la velocidad final y la aceleración neta del objeto. Estos datos se pueden ver en la siguiente tabla, donde se compararon con los datos de *Tracker* (ver cuadro 5):

Cuadro 5. En esta tabla se muestra la comparación de los datos obtenidos experimentalmente y los obtenidos con el simulador

Vídeo 1 $\theta = 35^\circ$	Teórico	Experimental	Error porcentual
$a_x [m/s^2]$	2.530	2.424	4.19 %
$v_x(t_{final}) [m/s]$	1.812	1.762	2.78 %
$t_{final} [s]$	0.736	0.718	2.40 %
Vídeo 2 $\theta = 30^\circ$			
$a_x [m/s^2]$	1.632	1.745	6.94 %
$v_x(t_{final}) [m/s]$	1.450	1.437	0.89 %
$t_{final} [s]$	0.898	0.817	9.06 %

Es importante mencionar que los datos obtenidos por el simulador podrían estar sujetos a un error debido a las condiciones iniciales que le fue proporcionado. Estas condiciones iniciales fueron el ángulo θ y el valor de μ_k , que pudieron tener un error debido a las mediciones hechas en *Tracker*, de la inclinación del plano y de los puntos de posición del objeto.

Por último se realizó una comparación en *Jupyter* entre los datos obtenidos experimentalmente y los predichos por el modelo teórico para la posición y la velocidad, estos últimos sacados de las ecuaciones (8, 9). En este modelo teórico se utilizó al valor de la gravedad

como $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, y se usaron los valores conocidos del ángulo $\theta = 35^\circ$ y $\theta = 30^\circ$, y también el valor hallado experimentalmente de $\mu_k = 0,385$. Las gráficas obtenidas se muestran a continuación (ver cuadros 8, 9):

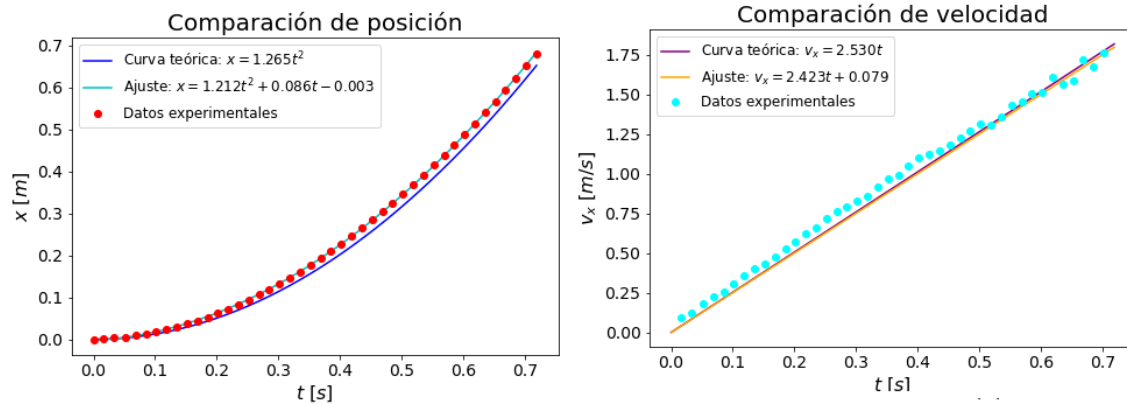


Fig. 8. El gráfico muestra la comparación de los datos obtenidos experimentalmente y los predichos por el modelo teórico, de $x(t)$ y $v_x(t)$ para el caso de $\theta = 35^\circ$. Observe que los datos teóricos se ajustan bien a los datos experimentales.

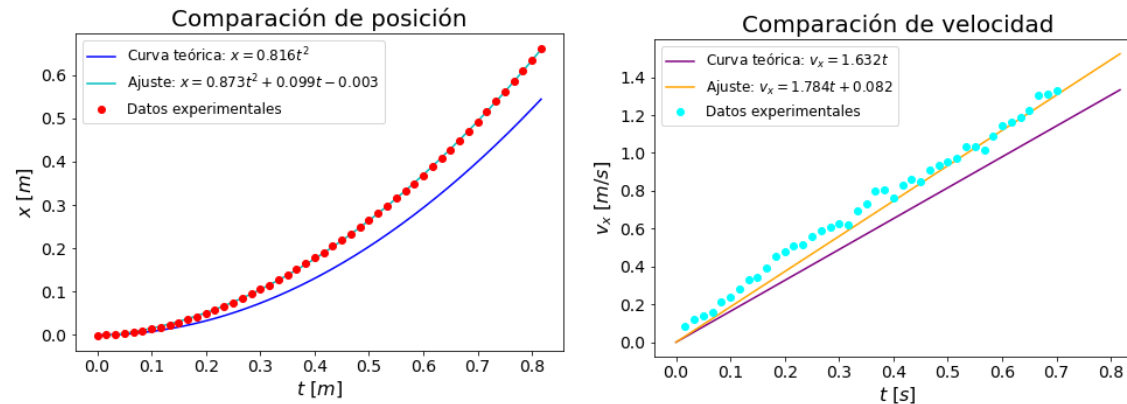


Fig. 9. El gráfico muestra la comparación de los datos obtenidos experimentalmente y los predichos por el modelo teórico, de $x(t)$ y $v_x(t)$ para el caso de $\theta = 30^\circ$. Observe que la gráfica de datos teóricos está por debajo de los datos experimentales, indicando que pudo existir un error en los parámetros iniciales del código.

En el gráfico se aprecia qué tan separados están los datos experimentales de los predichos por el modelo teórico para la posición y la velocidad. Esta apreciación pudo calcularse con el valor de la desviación rms, de forma similar al que usó *Tracker* para calcular el mejor ajuste para los datos. Esta desviación se realizó tomando la desviación estándar de las diferencias entre las ordenadas de los puntos del ajuste experimental y de los teóricos. Para

Cuadro 6. En este cuadro se pueden ver las desviaciones rms calculadas entre los puntos de la ecuación de ajuste experimental y de la ecuación teórica. Este valor representa que tan lejos puede estar el valor experimental del teórico en promedio, y para el intervalo de tiempo donde se tomaron los datos

Caso	Desviación rms	
	$x(t)$ [m]	$v_x(t)$ [m/s]
1. $\theta = 35^\circ$	0.01044	0.02467
2. $\theta = 30^\circ$	0.0349	0.07988

más detalles puede ver en el siguiente enlace los códigos usados³. Los resultados de esta desviación se mostraron en el cuadro 6

5. Análisis de Resultados

En esta práctica se estudió el movimiento de un cuerpo por un plano inclinado con fricción no despreciable. A partir de los vídeos analizados en *Tracker* y la fórmula despejada de las leyes de Newton se obtuvieron los valores del coeficiente de fricción tanto dinámica como estática para el montaje realizado. Además, se debió recordar que el coeficiente de fricción dinámico es un parámetro que depende de las superficies en contacto y no del ángulo de inclinación.

A partir de los valores hallados se comprobó que el coeficiente estático es mayor a el coeficiente dinámico. Siendo estos 0,398 y 0,372 para los casos de 35° y 30° respectivamente para los casos del coeficiente dinámico, y con un promedio de 0,385. Y el valor obtenido para el coeficiente estático fue de 0,464. Para los casos de los coeficientes dinámicos se pudo observar una pequeña diferencia, esto pudo presentarse debido a factores que no se tienen en cuenta o en la grabación del vídeo.

Respecto a los ajustes realizados para la aceleración, es importante mencionar que aquel que mejor se ajustó al dato teórico fue el ajuste de función constante por lo que fue este el utilizado para realizar los respectivos análisis posteriormente.

Con base en los ajustes de curvas, se observó que los valores de los parámetros para la aceleración son muy similares, esto nos indicó que los datos tienen una buena precisión (ver cuadros 2 y 3). La aceleración que se escogió para realizar los cálculos fue el valor sacado del ajuste de la posición, ya que es el parámetro mejor controlado en el experimento. Además, de esta manera se garantizó que el valor que fue escogido no tuviese un mayor error a causa de la propagación de errores que se presentan en las otras ecuaciones de ajuste.

³ Aquí puede ver los documentos adjuntos o, si no, ir a: <https://github.com/AndresGuarin/JupyterCods/tree/main/Laboratory/FrictionMovement>

Ya en el simulador se reemplazó los valores de los coeficientes, y se obtuvo el movimiento del modelo. Tomando en cuenta los resultados en *Tracker*, se compararon con los entregados por el simulador (Ver cuadro 5). De esta manera, se observó que los porcentajes de error son relativamente bajos. Además, las desviaciones rms obtenidas para cada uno de los parámetros fue pequeña con respecto a las medidas reportadas. Por lo que se concluyó que los valores de *Tracker* además de ser precisos son exactos en cierta medida.

Igualmente, en el simulador se hizo la variación de la masa en los montajes. Así, se concluyó que el valor de la masa no generó cambios en los movimientos, ya que se observó que la fuerza ejercida por el peso del objeto aumentaba mientras también lo hacía la fuerza de fricción debido a la normal. (Ver figuras 6 y 7)

Para la mejor comparación del modelo experimental y teórico, se realizó un código en *Jupyter* en el cual se observó esa diferencia de valores de manera más sencilla (Ver figuras 8 y 9). En el primer vídeo, los dos modelos se ajustaron bien, pero en el segundo se observó que la curva teórica estaba separada de la experimental. Esto es debido a que se pudo presentar un error de perspectiva al momento en que se halló el ángulo experimentalmente por medio de *Tracker*.

6. Conclusiones

Convenciones

Caso 1: $\theta = 35^\circ$

Caso 2: $\theta = 30^\circ$

Primero, es importante destacar que todas las observaciones que se harán de las magnitudes serán correspondientes al eje x dado que para este caso, no hubo movimiento sobre el eje y .

Antes que nada, respecto a la fuerza de fricción, se logró observar como esta influyó en el movimiento de la caja, retardándolo y por ende haciendo que este tuviese una aceleración menor al del caso sin fricción. Además de esto, como ya se mostró anteriormente, para el caso 1 y el caso 2 se obtuvieron valores diferentes de μ_k , por lo que fue conveniente utilizar un valor promedio para los análisis en el simulador, dicho valor fue cercano al valor teórico. Además se demostró de la teoría que μ_k solo puede tomar valor de $(0 - \mu_s)$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estático.

En este proyecto se realizó el ajuste de las ecuaciones de movimiento de la caja deslizando por el plano inclinado. Se evidenció que en ambos casos la caja sigue una trayectoria que aunque a simple vista parecía una línea recta en realidad correspondía a una parábola y

esto es debido a que contaba con una aceleración producto de las fuerzas que en ella interactuaban, además, en tramos pequeños la curvatura de la tierra se considera despreciable, pero si se prolongase el plano inclinado a medidas donde esta no lo fuese, se entendería más fácilmente porque describe una trayectoria curvilínea. Para el caso 1 se obtuvo en esta medida de posición una desviación rms de $0,001624m$ y para el caso 2 de $0,00149m$, valores normales para la distancia recorrida por la caja.

Del mismo modo, en el caso de la velocidad se realizó un ajuste lineal para la componente en x , obteniendo una desviación rms de $0,02756\frac{m}{s}$ para el caso 1 y de $0,02958\frac{m}{s}$ para el caso 2, lo que implicó que fuesen buenos ajustes de los datos experimentales.

En el caso de la aceleración, se obtuvieron las desviaciones más grandes de $0,7911\frac{m}{s^2}$ para el caso 1 y de $0,9339\frac{m}{s^2}$ para el caso 2, esto es producto de la propagación de errores ya que esta medida es tomada de la posición.

Con el simulador se realizaron dos cosas, la primera, obtener los datos teóricos de las variables de posición, velocidad y aceleración y compararlos con los experimentales, los cuales como se pudo evidenciar en las gráficas de las comparaciones hechas anteriormente, se ajustan al modelo predicho teóricamente. Por otro lado, el simulador también permitió variar la masa del objeto de estudio con el fin de conocer si esta influía en el movimiento o no, evidenciando que no, debido a que el movimiento se presentó solo sobre el eje x .

De este proyecto se encontraron varias consideraciones que se debieron tener en cuenta, y las cuales se intentaron minimizar en lo posible para obtener los resultados más aproximados a los esperados. Primero, el trípode usado permitió la estabilidad al momento de grabar y de esta manera fue como se logró que el vídeo no tuviera perturbaciones al momento de su análisis. Segundo, aunque la resolución de la cámara podría ser mucho mejor que la usada, esta permitió grabar con buena calidad y así obtener buenos datos experimentales. Como último, el objeto utilizado, en este caso la caja no contaba con una distribución de masa homogénea, sin embargo esto no fue relevante como se evidenció anteriormente. Por último, la longitud de la tabla fue un impedimento al momento de buscar ángulos más separados entre sí para haber logrado un análisis del movimiento más general, pero como no se disponía de una tabla con mayor longitud, se tuvieron que escoger ángulos cercanos entre sí.

Finalmente, es importante mencionar que el estudio de este fenómeno no está alejado de la cotidianidad ni mucho menos, es visto aplicado desde sistemas como el de una escalera eléctrica o rampas que permitan el cargue y descargue de mercancías industriales, entre otros y se usa para optimizar factores como el tiempo y el peso que resista cada material en cuestión.

Cabe mencionar que para la realización de este reporte nos basamos en el documento guía [3], y además todos los datos del experimento en *Tracker* junto con el código de python pueden encontrarse en el siguiente enlace de Google Drive: <https://drive.google.com>.

[com/drive/folders/1mJfs4eMYwty0vXvm7P53LEb6UBFQjCUS?usp=sharing](https://drive.google.com/drive/folders/1mJfs4eMYwty0vXvm7P53LEb6UBFQjCUS?usp=sharing)

Referencias

- [1] Brown D, Christian W, Hanson R (2021) Tracker, . URL <https://www.physlets.org/tracker/>.
- [2] Walsh T ophysics: Interactive physics simulations, . URL <https://ophysics.com/f2.html>.
- [3] Forero Pinto o Triana Camacho (2020) Estudio del movimiento de un cuerpo en un plano inclinado con rozamiento. *Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander* .

Anexos

Fig. 10. En esta imagen se puede ver el trípode utilizado en la grabación del vídeo. Así como la caja usada como objeto de análisis para el estudio del movimiento

Figuras de ajuste

- Figuras del caso 1 con $\theta = 35^\circ$

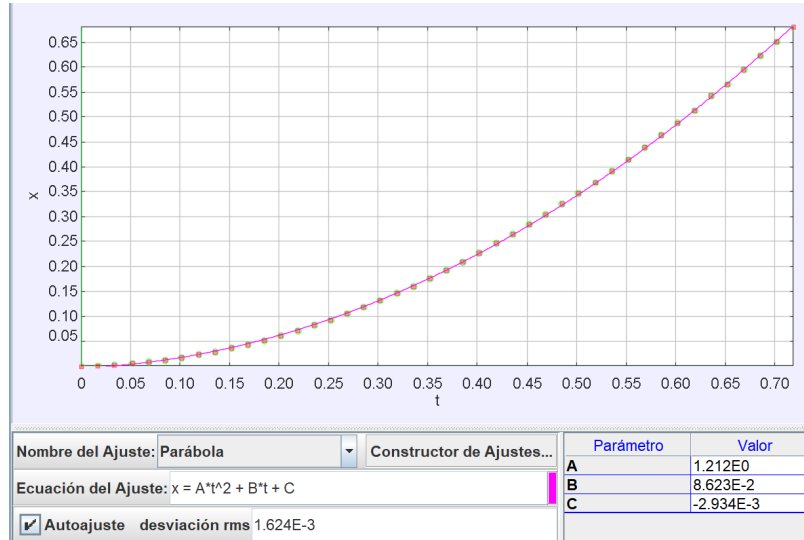


Fig. 11. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . Observe que el parámetro B que indica la velocidad inicial es cercano a cero, y por lo tanto se cumple parcialmente el hecho de que el objeto sea lanzado en reposo.

Nótese que en 11 los puntos corresponden a los datos tomados por *Tracker* y la línea rosa corresponde al ajuste hecho por el software sobre los mismos puntos.

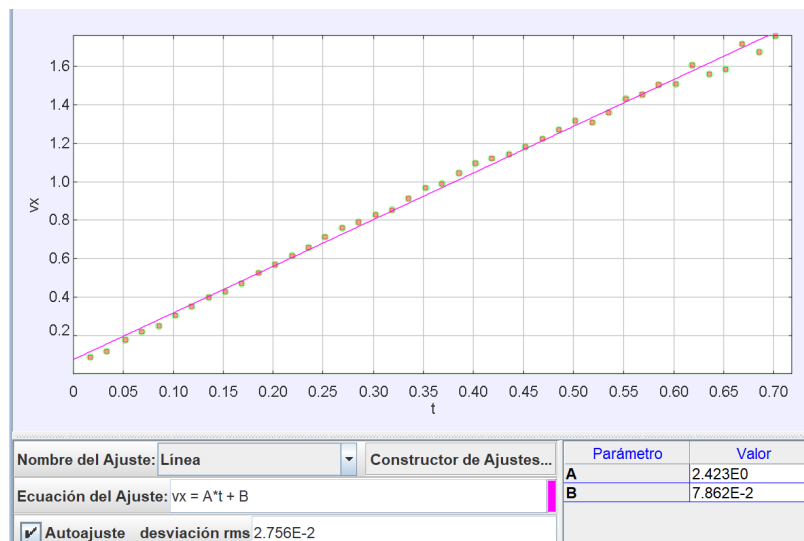


Fig. 12. Variación de la componente en x de la velocidad respecto al tiempo t . Note que como el parámetro B es pequeño, la velocidad inicial es cercana a cero

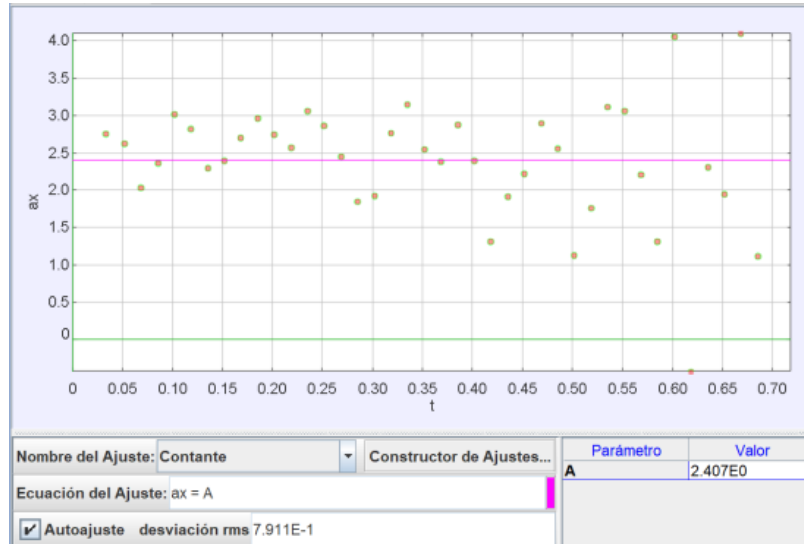


Fig. 13. Variación de la componente en x de la aceleración respecto al tiempo t . Observe que en este caso la desviación rms igual a 0.791 representa el 30% del valor reportado de aceleración, siendo un poco alto

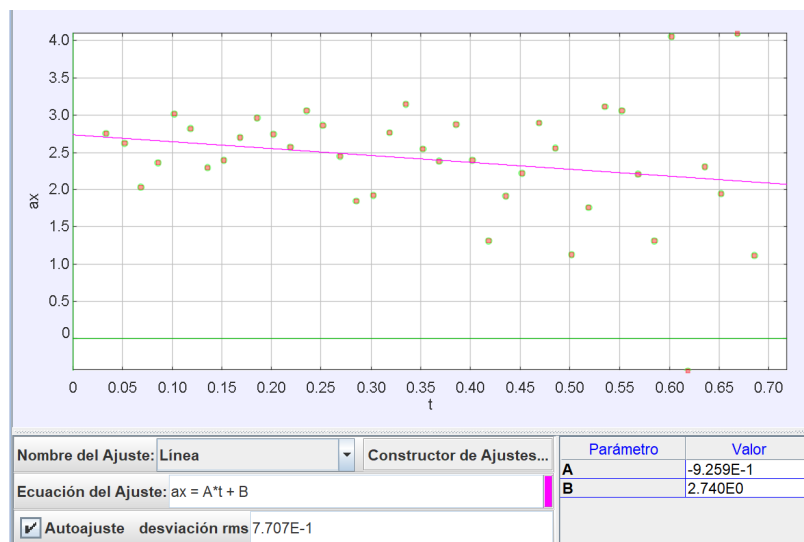


Fig. 14. Variación de la componente en x de la aceleración respecto al tiempo t . Donde se usó el ajuste lineal

- Figuras del caso 2 con $\theta = 30^\circ$

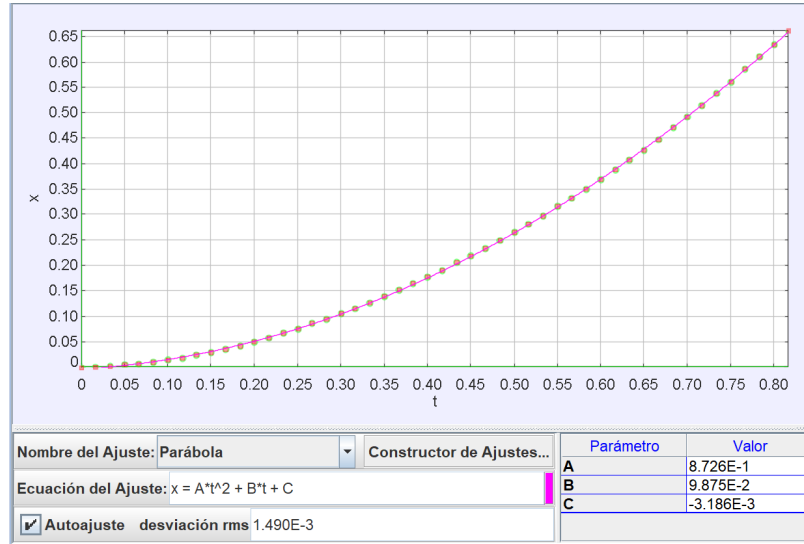


Fig. 15. Variación de la posición en x respecto al tiempo t . Observe que en este caso el término B también es pequeño, indicando una poca velocidad inicial

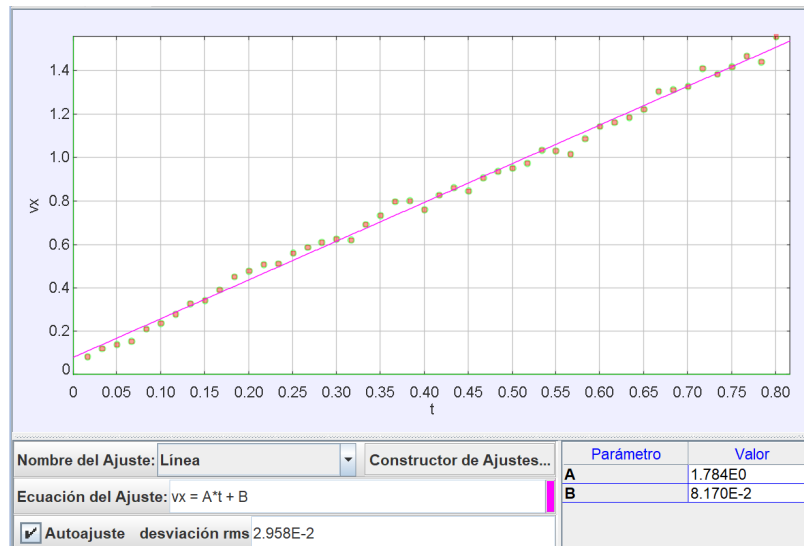


Fig. 16. Variación de la componente en x de la velocidad respecto al tiempo t



Fig. 17. Variación de la componente en x de la aceleración respecto al tiempo t . Note que en este caso el valor de la desviación rms corresponde al 50% del valor encontrado. Es por esto que es más preciso analizar los casos de posición y velocidad solamente

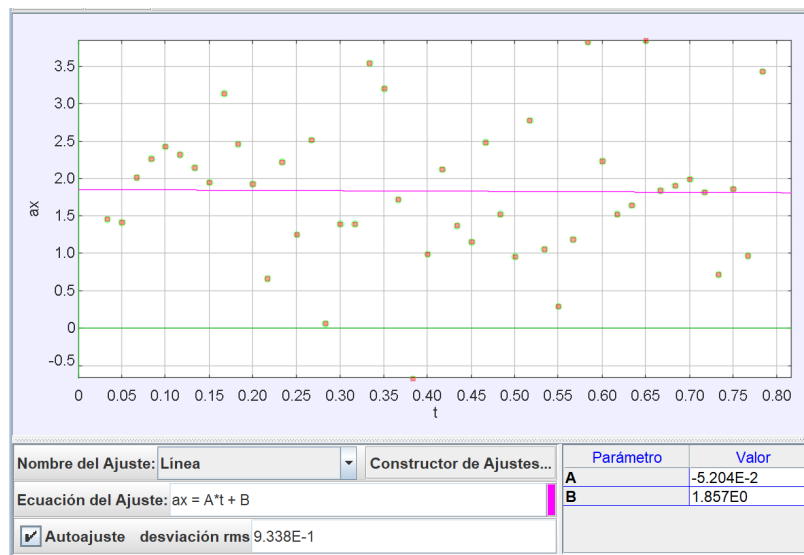


Fig. 18. Variación de la componente en x de la aceleración respecto al tiempo t . Donde se usó el ajuste lineal

Tablas

Cuadro 7. En este cuadro se muestran todos los datos de posición, velocidad y aceleración obtenidos de Tracker para el primer caso de fricción dinámica, con un ángulo de 35°

$t[s]$	$x[m]$	$v_x[m/s]$	$a_x[m/s^2]$	$t[s]$	$x[m]$	$v_x[m/s]$	$a_x[m/s^2]$
0.0000	0.0000			0.3683	0.1934	0.9930	2.3815
0.0167	0.0014	0.0898		0.3850	0.2102	1.0476	2.8772
0.0333	0.0030	0.1210	2.7567	0.4017	0.2283	1.0975	2.3936
0.0517	0.0057	0.1806	2.6310	0.4183	0.2467	1.1218	1.3116
0.0683	0.0094	0.2236	2.0364	0.4350	0.2657	1.1436	1.9156
0.0850	0.0131	0.2531	2.3603	0.4517	0.2849	1.1808	2.2237
0.1017	0.0178	0.3061	3.0237	0.4683	0.3051	1.2239	2.8996
0.1183	0.0233	0.3541	2.8216	0.4850	0.3257	1.2714	2.5605
0.1350	0.0296	0.3996	2.3026	0.5017	0.3474	1.3163	1.1343
0.1517	0.0366	0.4328	2.3988	0.5183	0.3695	1.3093	1.7635
0.1683	0.0440	0.4746	2.7092	0.5350	0.3911	1.3594	3.1226
0.1850	0.0525	0.5277	2.9708	0.5517	0.4149	1.4337	3.0663
0.2017	0.0616	0.5720	2.7458	0.5683	0.4389	1.4527	2.2077
0.2183	0.0715	0.6192	2.5750	0.5850	0.4633	1.5038	1.3119
0.2350	0.0823	0.6593	3.0621	0.6017	0.4890	1.5108	4.0570
0.2517	0.0935	0.7164	2.8731	0.6183	0.5136	1.6057	-0.4291
0.2683	0.1061	0.7638	2.4532	0.6350	0.5425	1.5621	2.3076
0.2850	0.1190	0.7909	1.8554	0.6517	0.5657	1.5874	1.9519
0.3017	0.1325	0.8284	1.9225	0.6683	0.5954	1.7173	4.1090
0.3183	0.1466	0.8552	2.7712	0.6850	0.6229	1.6739	1.1222
0.3350	0.1610	0.9144	3.1488	0.7017	0.6512	1.7617	
0.3517	0.1771	0.9715	2.5538	0.7183	0.6817		

Cuadro 8. En este cuadro se muestran todos los datos de posición, velocidad y aceleración obtenidos de Tracker para el segundo caso de fricción dinámica. con un ángulo de 30°

$t[s]$	$x[m]$	$v_x[m/s]$	$a_x[m/s^2]$	$t[s]$	$x[m]$	$v_x[m/s]$	$a_x[m/s^2]$
0.0000	0.0134			0.4167	0.2046	0.8287	2.1267
0.0167	0.0147	0.0832		0.4333	0.2197	0.8617	1.3778
0.0333	0.0162	0.1206	1.4581	0.4500	0.2333	0.8485	1.1526
0.0500	0.0187	0.1415	1.4215	0.4667	0.2479	0.9091	2.4839
0.0667	0.0209	0.1568	2.0166	0.4833	0.2636	0.9374	1.5265
0.0833	0.0239	0.2132	2.2676	0.5000	0.2792	0.9513	0.9577
0.1000	0.0280	0.2382	2.4255	0.5167	0.2954	0.9747	2.7817
0.1167	0.0319	0.2812	2.3212	0.5333	0.3117	1.0336	1.0614
0.1333	0.0374	0.3302	2.1519	0.5500	0.3298	1.0332	0.2928
0.1500	0.0429	0.3442	1.9517	0.5667	0.3461	1.0149	1.1917
0.1667	0.0489	0.3939	3.1419	0.5833	0.3637	1.0873	3.8171
0.1833	0.0560	0.4539	2.4678	0.6000	0.3824	1.1431	2.2374
0.2000	0.0640	0.4778	1.9305	0.6167	0.4018	1.1636	1.5224
0.2167	0.0720	0.5102	0.6709	0.6333	0.4211	1.1867	1.6441
0.2333	0.0810	0.5136	2.2198	0.6500	0.4413	1.2239	3.8494
0.2500	0.0891	0.5604	1.2539	0.6667	0.4619	1.3052	1.8460
0.2667	0.0997	0.5881	2.5167	0.6833	0.4848	1.3121	1.9127
0.2833	0.1087	0.6097	0.0650	0.7000	0.5057	1.3300	1.9971
0.3000	0.1200	0.6249	1.3961	0.7167	0.5292	1.4103	2.8025
0.3167	0.1295	0.6231	1.3952	0.7333	0.5527	1.4120	0.8216
0.3333	0.1408	0.6920	3.5396	0.7500	0.5762	1.4349	1.3926
0.3500	0.1526	0.7344	3.2041	0.7667	0.6005	1.4634	0.2937
0.3667	0.1652	0.7986	1.7223	0.7833	0.6250	1.4469	-0.4986
0.3833	0.1792	0.8036	-0.6646	0.8000	0.6487	1.4371	
0.4000	0.1920	0.7628	0.9964	0.8167	0.6729		