Revision del libro: Modern classical physics[1]

Juan Guarín-Rojas

Escuela de Física, Facultad de ciencias
Universidad Industrial de Santander, Colombia

24 de mayo de 2022

Universidad Industrial de Santander

[1] Thorne, K., Blandford, R. (2017). Modern classical physics. Princeton University Press.

El punto de vista geométrico de las leyes de la física

- El libro plantea expresar todas las cantidades y leyes físicas en sus formas geométricas. Es decir, en formas independientes de cualquier sistema de coordenadas o vectores base.

- En principio las leyes de Newton obedecen a esta idea. $\mathbf{F} = \mathrm{m}\mathbf{a}$

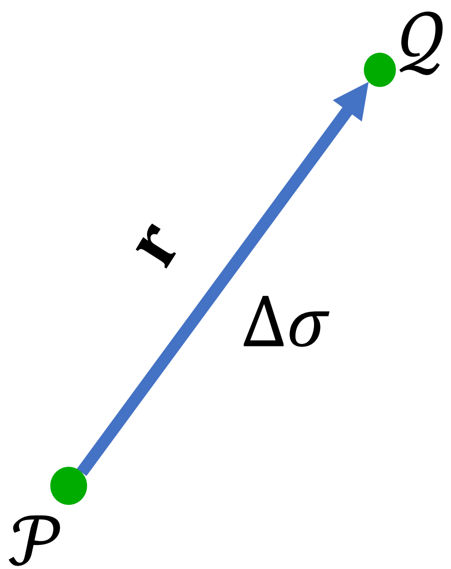
- La independencia a los sistemas de coordenadas y a las bases constriñen fuertemente las leyes de la física, porque imponen condiciones especificas a las ecuaciones (Ej. electrodinámica, ecuaciones de Navier-Stokes)

- El poder y elegancia de las formulaciones geométricas sugieren que las leyes físicas de la naturaleza son intrínsecamente geométricas.

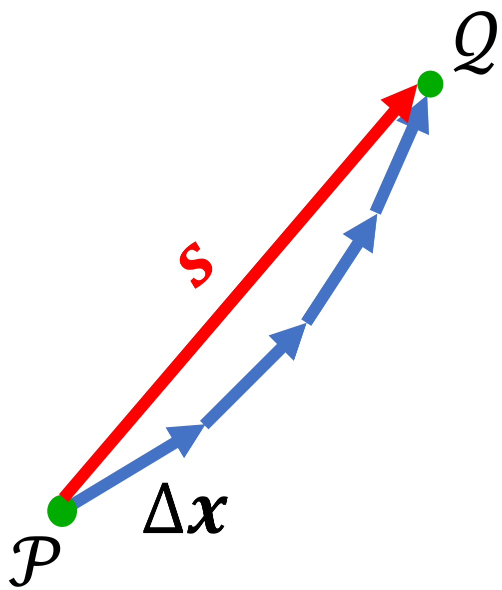
Relaciones físicas geométricas

Distancia Euclidiana

$$\vec{r}^{\,2} = \Delta\sigma^2$$



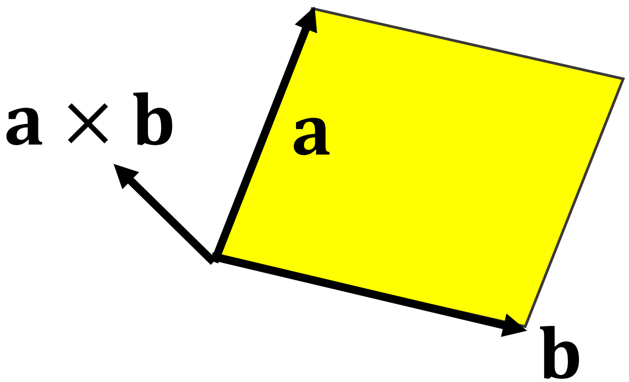
Suma cabeza con cola



Las componentes son secundarias. Debemos tratar a los vectores, matrices y tensores en las leyes físicas como objetos geométricos, sin considerar las componentes o números asociados a ellos

Relaciones matemáticas geométricas

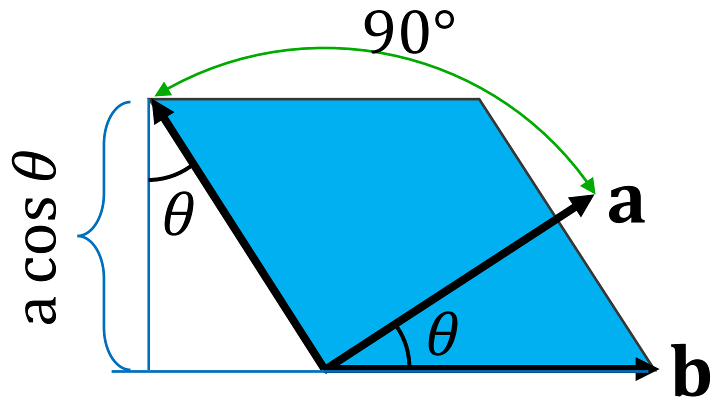
Producto cruz



$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| :=$ área del paralelogramo formado por $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a} \quad \wedge \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}\,.$$

Producto punto



$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| :=$ área del paralelogramo formado por un vector y la rotación de 90° del segundo.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{ab}\cos\theta$$

Análisis tensorial

Tensor de rango n

$$\mathbf{T}(\underbrace{\_,\_,\_,\cdots}_{n \text{ entradas}}) \in \mathbb{R}$$

Un tensor es función lineal real de n vectores. Para ilustrar su linealidad podemos escribir:

$$\mathbf{T}(e\mathbf{E} + f\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = e\mathbf{T}(\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) + f\mathbf{T}(\mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$$

Tensor métrico

$\mathbf{g}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow$ $\mathbf{g}$ es simétrico, y como surge de un producto interno es lineal.

Producto tensorial y contracción

$$\mathbf{A}(\mathbf{E}) \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{E}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\,(\mathbf{E}, \mathbf{F}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{E})\mathbf{B}(\mathbf{F}) \quad \mathbf{A}(\_) \quad \mathbf{B}(\_)$$

Rango 2 $\boxed{\text{contraction}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}$

$$\text{contraction}(\mathbf{T}) = \text{contraction}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} + \cdots)$$

Rango 3

$$1\&3\text{contraction}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{D} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{F} + \cdots) \equiv (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{F} + \cdots$$

Análisis tensorial

En el espacio euclidiano tridimensional existe un único conjunto de vectores bases ortonormales asociados con un sistema de coordenadas cartesiano $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\} \equiv \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

Ortogonalidad de la base $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \delta_{12}$

Componentes vector $\mathbf{A} = \mathrm{A}_i \, \mathbf{e}_i \longrightarrow \mathrm{A}_i = \mathbf{A}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i$

Componentes tensor $\mathbf{T} = T_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \longrightarrow T_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$

Tensor métrico $g_{ij} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}(\_\_, \_\_, \mathbf{A}) &= T_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k(\_\_, \_\_, \mathbf{A}) \\
&= T_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \, (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{A}) \\
&= T_{ijk} A_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j
\end{aligned}
$$

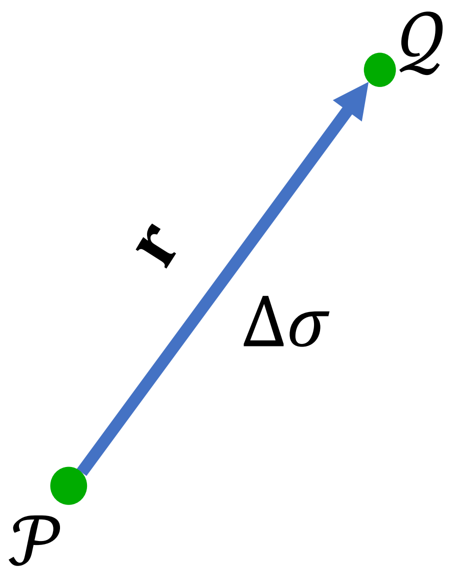
$$\boxed{\text{components } \mathbf{T}(\_\_, \_\_, \mathbf{A}) = T_{ijk} A_k}$$

Back up

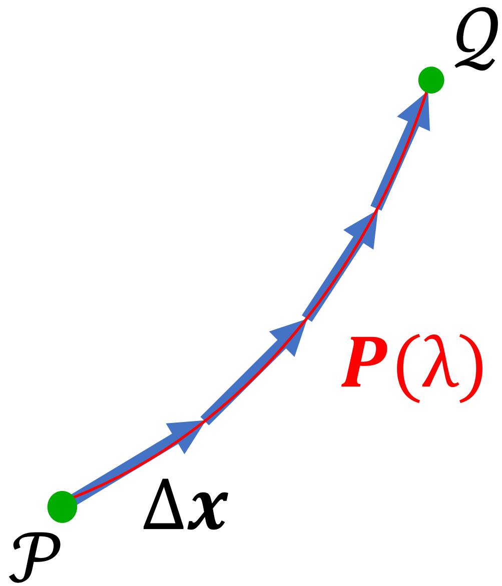
Relaciones físicas geométricas

Distancia Euclidiana

$$\vec{r}^{2} = \Delta\sigma^{2}$$



Relaciones físicas



$\boldsymbol{P}(\lambda)$ denota la curva parametrizada

$$\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

Cuando $\lambda = t$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{p} = \mathrm{m}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathbf{F} = \mathrm{m}\mathbf{a}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/\mathrm{q}$$