Revision del libro: Modern classical physics[1]

Juan Guarín-Rojas

Escuela de Física, Facultad de ciencias

Universidad Industrial de Santander, Colombia

15 de junio de 2022

Universidad Industrial de Santander

[1] Thorne, K., Blandford, R. (2017). Modern classical physics. Princeton University Press.

Volúmenes

- El volumen tridimensional de un paralelepípedo formado por los lados $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ corresponde a:

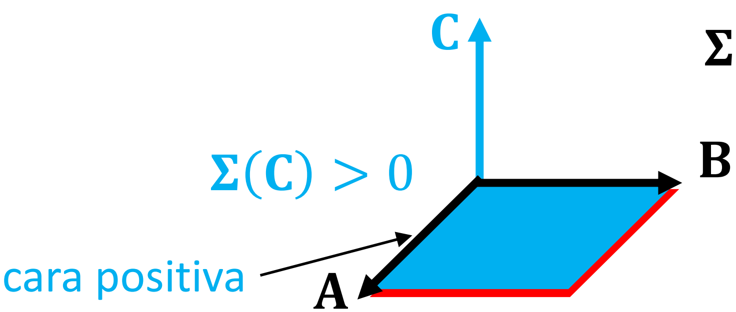
$$3 - \text{volumen} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \det \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$$

- El 2-volumen o área de un paralelogramo formado por $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ en un espacio tridimensional es:

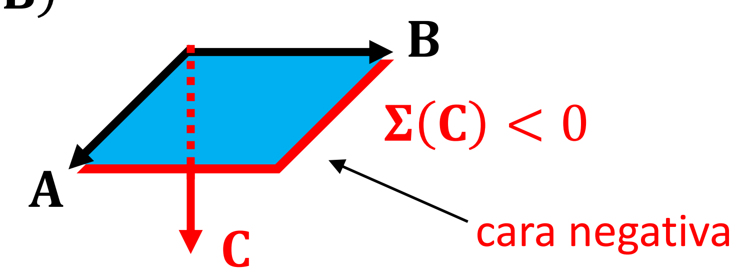
$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\epsilon}(\_\_, \mathbf{A}, \mathbf{B})$$

- Este vector de área superficial puede interpretarse como un objeto al cual hace falta insertarle un tercer lado $\mathbf{C}$ para retornar un volumen.

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{C}) \equiv \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$$



Paralelepípedo dextrógiro



Paralelepípedo levógiro

Teoremas integrales

- Teoremas de Gauss y Stokes

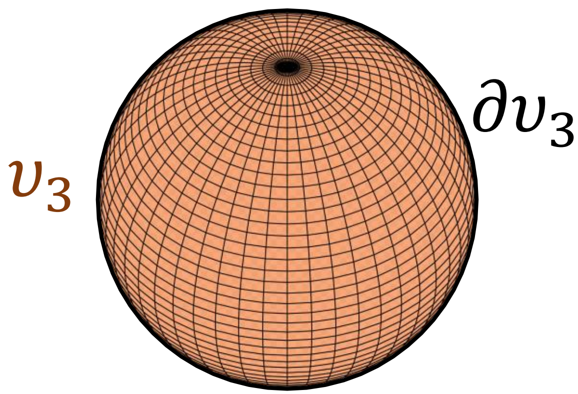
Campo vectorial

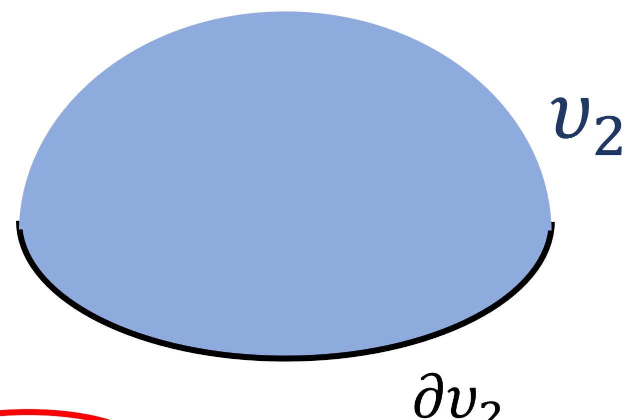
Teorema de Gauss

$$\iiint_{v_3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, dV = \oiint_{\partial v_3} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$$

Teorema de Stokes

$$\iint_{v_2} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \, d\Sigma = \oint_{\partial v_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$





- Donde v_3 es una región tridimensional compacta y ∂v_3 es su frontera bidimensional cerrada. Y donde v_2 es una región bidimensional compacta y ∂v_2 es la curva unidimensional que lo limita.

Región sin huecos o puntos faltantes, acotada por una frontera, y sin excluir puntos sobre la frontera

Leyes de conservación integral y diferencial

- La carga total y el número total de partículas dentro de una región tridimensional υ_3 viene dado por:

$$Q = \int_{\upsilon_3} \rho_e \, dV \qquad N = \int_{\upsilon_3} n \, dV$$

Densidad de carga

Densidad de número de partículas

- Entonces, las leyes integrales de conservación de la carga y partículas son:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\upsilon_3} \rho_e \, dV + \int_{\partial\upsilon_3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0} \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\int_{\upsilon_3} n \, dV + \int_{\partial\upsilon_3} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{\Sigma} = 0}$$

Densidad de corriente

Vector flujo de partículas

- Aplicando el teorema de Gauss a las primeras integrales y considerando que el integrando se anula, se obtienen las formas diferenciales:

$$\boxed{\frac{d\rho_e}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \qquad \boxed{\frac{dn}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0}$$

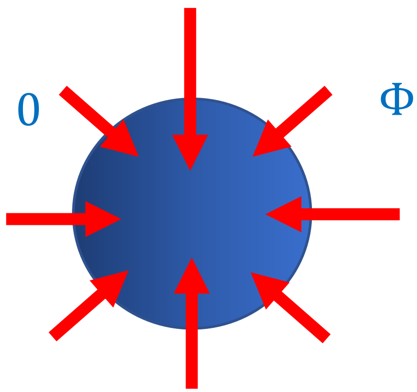
- Patrón universal ecuaciones de conservación:

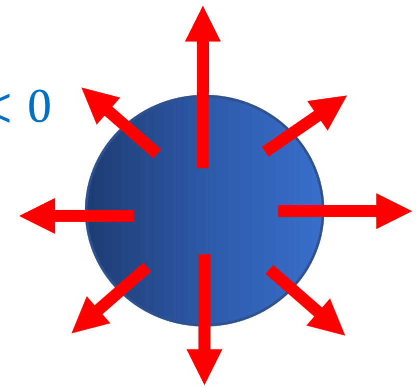
La derivada temporal de la densidad de una cantidad más la divergencia de su flujo se anula.

Leyes de conservación integral y diferencial

- Es posible ilustrar la ley de conservación de la carga de la siguiente manera:

$$\frac{dQ}{dt} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0 \qquad\qquad \frac{dQ}{dt} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0$$



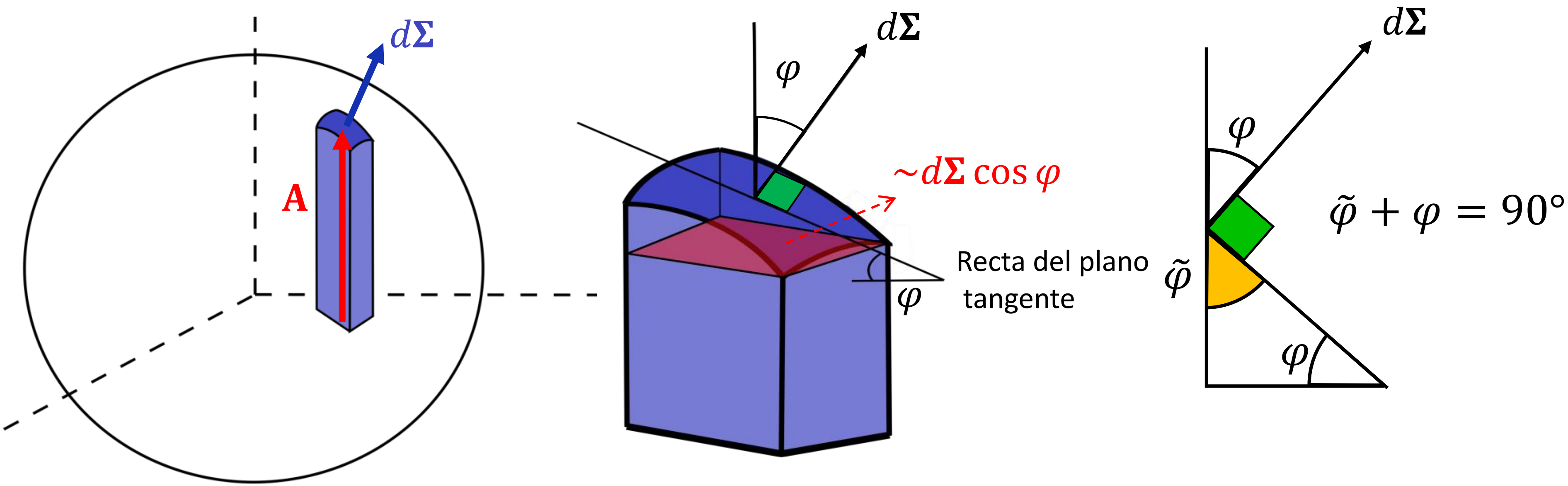


- Ejercicio:

  Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{A} = z\mathbf{e}_z$ sobre una esfera de radio a centrada en el origen

$$\oiint_{\partial v_3} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_{v_3} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A})\, dV = \iiint_{v_3} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i}\right) dV = \iiint_{v_3} 1\, dV = \frac{4\pi}{3} a^3 \longrightarrow \text{Volumen esfera}$$

- Podemos interpretar por qué el flujo del campo $\mathbf{A}$ corresponde al volumen de la esfera.

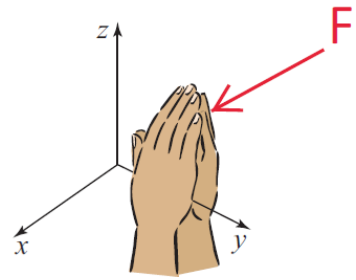


- El producto escalar $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{\Sigma}$ representa el volumen diferencial del paralelepípedo que va desde el plano $z = 0$ hasta un punto sobre la superficie de la esfera. Por lo tanto, al integrar en toda la superficie debemos obtener el volumen.

Tensor de estrés

- El tensor de estrés permite obtener la Fuerza $\mathbf{F}$ normal a la superficie $\boldsymbol{\Sigma}$, para dos superficies en contacto:

$$\mathbf{F}(\_) = \mathbf{T}(\_, \boldsymbol{\Sigma})$$

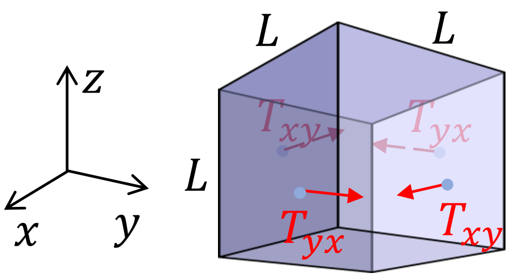


- Las componentes del tensor son:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \text{componente } i \text{ de la fuerza por unidad de área} \\ \text{a lo largo de una superficie perpendicular a } \mathbf{e}_j \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{T}$ debe ser un tensor simétrico. Primero calculamos el torque:

Momento de inercia



$$N_z = T_{xy} L^2 \left(\frac{L}{2}\right) \qquad N_{\text{net}} = \left(T_{xy} - T_{yx}\right) L^3 = \boxed{\frac{1}{6}\rho L^5} \frac{d\Omega_z}{dt}$$

$$\boxed{\text{Si } T_{xy} - T_{yx} \text{ no se anula entonces: cuando } L \to 0 \ \frac{d\Omega_z}{dt} \to \infty}$$

Comportamiento no físico

Back up

Ejercicio del libro

- Ejercicio:

  Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{A} = z\mathbf{e}_z$ sobre una esfera de radio a centrada en el origen

$$\mathbf{A} = a\cos\phi\,(\cos\phi\,\mathbf{e}_{\hat{r}} - \sin\phi\,\mathbf{e}_{\hat{\phi}})$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\epsilon}(\_\_, a d\phi\,\mathbf{e}_{\hat{\phi}}, a d\theta \sin\phi\,\mathbf{e}_{\hat{\theta}}) = \boldsymbol{\epsilon}(\_\_, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}) a^2 \sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = (\cos\phi\,\mathbf{e}_{\hat{r}} - \sin\phi\,\mathbf{e}_{\hat{\phi}})\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\_\_, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}) a^3 \cos\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = [\cos\phi\,\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}) - \sin\phi\,\boldsymbol{\epsilon}(\cancel{\mathbf{e}_{\hat{\phi}}, \mathbf{e}_{\hat{\phi}}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}})] a^3 \cos\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$\mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = a^3\cos^2\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$\iint_{v_2} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} a^3\cos^2\phi\sin\phi\, d\theta\, d\phi = \frac{4\pi}{3}a^3$$

Volumen esfera

- Usando el Teorema de Gauss:

$$\oiint_{\partial v_3} \mathbf{A}\cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint_{v_3} (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A})\, dV = \iiint_{v_3} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^i}\right) dV = \iiint_{v_3} 1\, dV = \frac{4\pi}{3}a^3$$