Revision del libro: Modern classical physics[1]

Juan Guarín-Rojas

Escuela de Física, Facultad de ciencias

Universidad Industrial de Santander, Colombia

1 de junio de 2022

Universidad Industrial de Santander

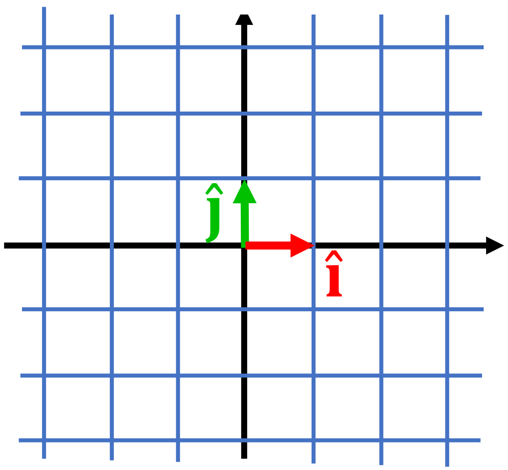
[1] Thorne, K., Blandford, R. (2017). Modern classical physics. Princeton University Press.

Considere dos sistemas de coordenadas con una base cartesiana cada uno: $\{x_1, x_2, x_3\}$ correspondiente a $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$ correspondiente a $\{\mathbf{e}_{\bar{p}}\}$.

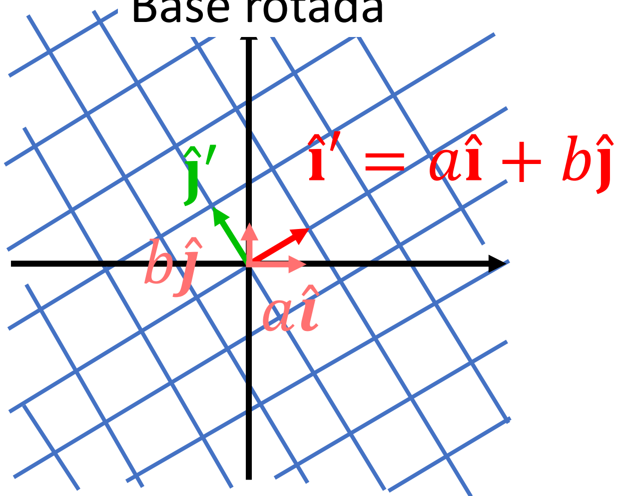
$$\boxed{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\bar{p}} R_{\bar{p}i}, \qquad \mathbf{e}_{\bar{p}} = \mathbf{e}_i R_{i\bar{p}}.}$$

Donde $\left[R_{\bar{p}i}\right] = \begin{bmatrix} R_{\bar{1}1} & R_{\bar{1}2} & R_{\bar{1}3} \\ R_{\bar{2}1} & R_{\bar{2}2} & R_{\bar{2}3} \\ R_{\bar{3}1} & R_{\bar{3}2} & R_{\bar{3}3} \end{bmatrix}$.

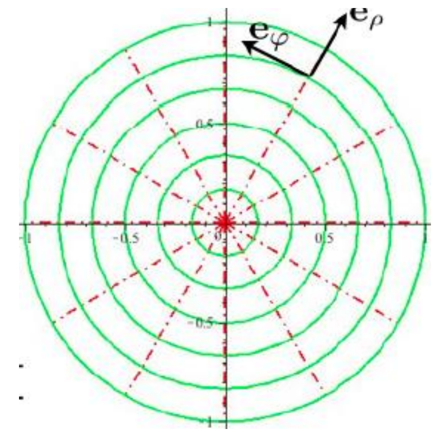
Base cartesiana



Base rotada



Otro tipo de bases dependientes de las coordenadas



Transformación de bases ortogonales

- Transformaciones de componentes y coordenadas:

Componentes vectores $\boxed{A_{\bar{p}} = R_{\bar{p}i} A_i}$

Componentes tensores $\boxed{T_{\bar{p}\bar{q}\bar{r}} = R_{\bar{p}i} R_{\bar{q}j} R_{\bar{r}k} T_{ijk}}$

Coordenadas de un punto $\mathcal{P}$ $\boxed{x_{\bar{p}} = R_{\bar{p}i} x_i}$

- Matrices ortogonales

Partiendo de la ortogonalidad de las bases $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{q}} = \delta_{\bar{p}\bar{q}}$ tenemos:

$$[R_{i\bar{p}}] \equiv [R_{\bar{p}i}]^{-1} = [R_{i\bar{p}}]^T$$

Que es valido también para $R_{\bar{p}i}$ lo que implica que: $[R_{i\bar{p}}]$, $[R_{\bar{p}i}]$ son matrices ortogonales, es decir, son solo rotaciones y reflexiones.

Operadores diferenciales

- Sea $\mathbf{T}(P)$ un campo tensorial en un espacio Euclidiano tridimensional y sea $\mathbf{A}$ vector. Entonces

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\mathbf{T}(\mathbf{x}_P + \epsilon\mathbf{A}) - \mathbf{T}(\mathbf{x}_P)\right).}$$

- Por construcción podemos ver que $\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ tiene el mismo rango que $\mathbf{T}$. Además, es posible mostrar que $\nabla_{\mathbf{A}+\mathbf{B}}\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T} + \nabla_{\mathbf{B}}\mathbf{T}$.

- Por tanto, es posible asociar un tensor de rango $n+1$ que sea tal que:

Ranura diferencial

$$\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \nabla\mathbf{T}(\_,\_,\_,\mathbf{A})$$

- $\nabla\mathbf{T}$ es llamado gradiente.
- En cualquier sistema de coordenadas cartesiano:

$$\boxed{\text{componentes } \nabla\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{abc};j} = \frac{\partial \mathrm{T}_{abc}}{\partial x_j},} \quad \boxed{\text{componentes } \nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{abc};j}\mathrm{A}_j,} \quad \boxed{x_j \equiv (x,y,z)}$$

Operadores diferenciales

- Como la derivada direccional se construyó similarmente a la derivada usual, ésta cumple con la regla de Leibniz:

$$\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{S}\otimes\mathbf{T}) = (\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{S})\otimes\mathbf{T} + \mathbf{S}\otimes(\nabla_{\mathbf{A}}\mathbf{T}).$$

- Dado que g_{ab} son constantes en cualquier sistema cartesiano:

$$\nabla\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{g}_{ab;j} = 0.$$

Operadores diferenciales

- Divergencia $\longrightarrow$ $\nabla\cdot\mathbf{A} = \text{contraction } \nabla\mathbf{A} = \mathbf{A}^{a}_{;a}$
- Divergencia Tensor $\longrightarrow$ $\mathrm{T}_{abc;b}$ y $\mathrm{T}_{abc;c}$
- Laplaciano $\longrightarrow$ $\nabla^2\mathbf{T} \equiv (\nabla\cdot\nabla)\mathbf{T} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{T}_{abc,jj}$

Tensor de Levi-Civita

El tensor de Levi-Civita $\boldsymbol{\epsilon}$ enmarca la noción espacial de volumen.

Tensor de Levi-Civita

a) Definición implícita de ϵ

El tensor de Levi-Civita es un tensor de rango n definido de manera tal que al ser evaluado en los vectores $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}$ este devuelve una medida de volumen

$$\text{volumen} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}).$$

Propiedad de volumen aditivo. Dado que es un tensor cumple la propiedad de linealidad

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{P}_1 + \alpha \mathbf{P}_2) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{P}_1) + \alpha \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{P}_2). \longrightarrow \text{Paralelepípedo}$$

b) Definición directa espacio tridimensional

Dado un espacio tridimensional elegimos un volumen elemental y un signo:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{123} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = +1,$$

Siendo $\{\mathbf{e}_i\}$ una base ortonormal dextrógira.
Segundo, imponemos que $\boldsymbol{\epsilon}$ tenga antisimetría:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ijk} = -\boldsymbol{\epsilon}_{jik}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{ijk} = -\boldsymbol{\epsilon}_{ikj}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{ijk} = -\boldsymbol{\epsilon}_{kji}.$$

Entonces:

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} +1 \ \text{ si } (a, b, c) = \text{permutacion par}(1,2,3) \\ -1 \ \text{ si } (a, b, c) = \text{permutacion impar}(1,2,3) \end{cases}$$

Como $\boldsymbol{\epsilon}$ representa un volumen, entonces siempre que alguna de sus entradas este repetida, la componente debe ser cero.

$$\epsilon_{112} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0, \ \text{i.e.,} \ \epsilon_{abc} = 0 \ \text{ si } a = b \ \vee a = c \vee b = c$$

Producto cruz y rotacional

- Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vectores en un espacio tridimensional, podemos definir el producto cruz y el rotacional como:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \boldsymbol{\epsilon}(\_, \mathbf{A}, \mathbf{B})$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \equiv \epsilon_{ijk} A_{k;j} \ \mathbf{e}_i$$

- En un espacio tridimensional con una base ortonormal dextrógira:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk} = \delta^{ij}_{\ell m} \equiv \delta^i_\ell \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_\ell$$

- Usando esta notación podemos demostrar:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}]\mathbf{C} - [(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}]\mathbf{D}$$

Que podemos verificar usando un C.A.S.

Back up

Transformación de bases ortogonales

Partiendo de la ortogonalidad de las bases $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $\mathbf{e}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{q}} = \delta_{\bar{p}\bar{q}}$ podemos demostrar:

$$[R_{i\bar{p}}] = [R_{\bar{p}i}]^{-1} = [R_{i\bar{p}}]^{T}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= (\mathbf{e}_{\bar{p}} R_{\bar{p}i}) \cdot (\mathbf{e}_{\bar{q}} R_{\bar{q}j}) \\
&= R_{\bar{p}i} R_{\bar{q}j} (\mathbf{e}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{e}_{\bar{q}}) \\
&= R_{\bar{p}i} R_{\bar{q}j} \delta_{\bar{p}\bar{q}} \\
&= R_{\bar{p}i} R_{\bar{p}j} \\
&= R_{\bar{1}i} R_{\bar{1}j} + R_{\bar{2}i} R_{\bar{2}j} + R_{\bar{3}i} R_{\bar{3}j}
\end{aligned}$$

Lo anterior representa multiplicación $\text{columna}_i \cdot \text{columna}_j$, lo que podemos escribir cómo: $[R_{\bar{p}i}]^{T} \cdot [R_{\bar{p}j}] = [\delta_{ij}]$ lo que implica $[R_{\bar{p}i}]^{T} = [R_{\bar{p}i}]^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} R_{\bar{1}1} \\ R_{\bar{2}1} \\ R_{\bar{3}1} \end{matrix}} & \begin{matrix} R_{\bar{1}2} \\ R_{\bar{2}2} \\ R_{\bar{3}2} \end{matrix} & \begin{matrix} R_{\bar{1}3} \\ R_{\bar{2}3} \\ R_{\bar{3}3} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} R_{\bar{1}1} \\ R_{\bar{2}1} \\ R_{\bar{3}1} \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} R_{\bar{1}2} \\ R_{\bar{2}2} \\ R_{\bar{3}2} \end{matrix}} & \begin{matrix} R_{\bar{1}3} \\ R_{\bar{2}3} \\ R_{\bar{3}3} \end{matrix} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} (i,j) = (1,2) \\ R_{\bar{1}1} R_{\bar{1}2} + R_{\bar{2}1} R_{\bar{2}2} + R_{\bar{3}1} R_{\bar{3}2} \end{matrix}$$

Transformación de bases ortogonales

- Un paralelepípedo formado por aristas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}$ tiene un volumen de:

$$\text{volumen} = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F})$$

- El cual satisface la propiedad de antisimetría completamente:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \mathbf{F}) = -\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{F})$$

- Observaciones (Ex 1.7):
  i. $\text{volumen} = 0$ a menos que todos los vectores de entrada sean L.I.
  ii. Todos los volúmenes están determinados por el volumen de un solo paralelepípedo.
  iii. Entonces requerimos de un número y la propiedad antisimétrica para determinar $\boldsymbol{\epsilon}$.
  iv. Además de la antisimetría necesitamos un signo: la elección de qué paralelepípedos tienen volumen positio y negativo.
- En coordenadas cartesianas y bajo una base ortonormal dextrógira:

Número elegido

$$\epsilon_{123} = +1$$

Signo elegido

$$\epsilon_{abc} = \begin{cases} +1 & \text{si } (a,b,c) = \text{permutacion par}(1,2,3) \\ -1 & \text{si } (a,b,c) = \text{permutacion impar}(1,2,3) \\ 0 & \text{si } a = b \lor a = c \lor b = c \end{cases}$$