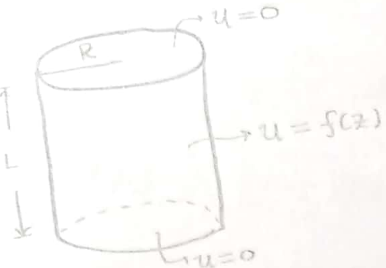
Taller de laplacianos en varios sabores

Estudiante: Juan Andrés Guarín Rojas

1)



Ecuación de calor en estado estacionario:

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Condiciones Frontera
$$\begin{cases} u(\rho,\varphi,0) = 0 \\ u(\rho,\varphi,L) = 0 \\ u(R,\varphi,z) = f(z) \end{cases}$$

condición de continuidad: $u(\rho,\varphi,z) = u(\rho,\varphi+2\pi,z)$

Separación variables:

$$u(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

$$\Phi(\varphi)Z(z)\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P(\rho)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)Z(z)\frac{\partial^2\Phi(\varphi)}{\partial\varphi^2} + P(\rho)\Phi(\varphi)\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{1}{P}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \lambda = -\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$$

Esto conduce a una primera EDO: $\boxed{Z'' = -\lambda Z}$ (1)

El otro lado, multiplicando ρ^2, tenemos:

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \lambda\rho^2$$

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \lambda\rho^2 = \lambda_1 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

Lo que conduce a: $\boxed{\Phi'' = -\lambda_1\Phi}$ (2)

y $\boxed{\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \lambda\rho^2 - \lambda_1 = 0}$ (3)

a) Analizando las condiciones de frontera
$$u(\rho,\varphi,0) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(0) = 0 \rightarrow Z(0) = 0$$
$$u(\rho,\varphi,L) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(L) = 0 \rightarrow Z(L) = 0$$

Como tenemos condiciones de frontera periódicas para Z, la única solución de (1) es para:

$$\lambda = \mu^2 > 0 \rightarrow Z(z) = C_1\cos(\mu z) + C_2\,\mathrm{sen}(\mu z)$$

$$\rightarrow Z(0) = 0 \wedge Z(L) = 0 \Rightarrow \boxed{Z_n(z) = C_2\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}z\right)} \quad \boxed{\mu_n = \frac{n\pi}{L}}$$

Escaneado con CamScanner

D)
Ahora considerando la condición de continuidad $u(\rho,\varphi,z) = u(\rho,\varphi+2\pi,z)$
$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$$

Por lo que la única solución para (2) deben ser combinaciones de senos y cosenos:

$\lambda_1 = \nu^2 > 0 \rightarrow \boxed{\Phi(\varphi) = C_3\cos(\nu\varphi) + C_4\,\mathrm{sen}(\nu\varphi)}$ con $\boxed{\nu = \text{entero}}$

Las condiciones encontradas para λ y λ_1 llevan a:

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \mu^2\rho^2 - \nu^2 = 0$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \left(-\mu^2\rho^2 - \nu^2\right)P = 0 \qquad (4)$$

Hacemos un cambio de variable para llevar nuestra ecuación a la forma de Bessel modificada:

$$\omega = \mu\rho \qquad \frac{\partial f}{\partial\rho} = \frac{\partial f}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \mu\frac{\partial f}{\partial\omega} \rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho} = \mu\frac{\partial}{\partial\omega}$$

$$\rightarrow \rho\mu\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\rho\,\mu\frac{\partial P}{\partial\omega}\right) + \left(-(\mu\rho)^2 - \nu^2\right)P = 0$$

$$\rightarrow \omega\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\frac{\partial P}{\partial\omega}\right) + \left(-\omega^2 - \nu^2\right)P = 0$$

$$\rightarrow \omega^2\frac{\partial^2 P}{\partial\omega^2} + \omega\frac{\partial P}{\partial\omega} + \left(-\omega^2 - \nu^2\right)P = 0$$

↳ Ecuación de Bessel modificada con solución de la forma:

$$P_\nu(\omega) = A\,I_\nu(\omega) + B\,K_\nu(\omega) \qquad (4.1)$$

Donde $K_\nu(\omega)$ no es acotada en $\omega = 0$. Con lo cual para que u no diverja en $\rho = 0$ necesitamos:

$$\boxed{P_{n\nu}(\rho) = C_5\,I_\nu\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right)} \qquad \text{con} \qquad I_\nu\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(m+\nu+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$$

I_ν es la función de Bessel modificada de primer orden.

Entonces la solución general será de la forma:

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_\nu\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\left(A_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + B_{n\nu}\,\mathrm{sen}(\nu\varphi)\right) \qquad (5)$$

Retomamos la condición de borde:

$$u(R,\varphi,z) = f(z)$$

$$\rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} I_\nu\left(\frac{n\pi R}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}z\right)\left(A_{n\nu}\cos(\nu\varphi) + B_{n\nu}\,\mathrm{sen}(\nu\varphi)\right) = f(z)$$

Como nuestro problema tiene simetría cilíndrica u no va a depender de φ y entonces $\Phi(\varphi) = \text{cte}$. Esto podemos verlo al obtener las expresiones de $A_{n\nu}$ y $B_{n\nu}$ con la condición de ortogonalidad:

$$\left| \begin{aligned} A_{m\tilde{\nu}} &= \frac{2}{\pi L\, I_{\tilde{\nu}}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} f(z) \cos(\tilde{\nu}\varphi)\, \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) d\varphi\, dz \\ B_{m\tilde{\nu}} &= \frac{2}{\pi L\, I_{\tilde{\nu}}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \int_0^L \int_0^{2\pi} f(z) \operatorname{sen}(\tilde{\nu}\varphi)\, \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) d\varphi\, dz \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} A_{m\tilde{\nu}} &= \frac{2}{\pi L\, I_{\tilde{\nu}}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \int_0^L f(z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) dz \overbrace{\int_0^{2\pi} \cos(\tilde{\nu}\varphi)\, d\varphi}^{=0 \text{ para } \tilde{\nu} \neq 0} \\ B_{m\tilde{\nu}} &= \frac{2}{\pi L\, I_{\tilde{\nu}}\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \int_0^L f(z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) dz \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\tilde{\nu}\varphi)\, d\varphi}_{=0 \text{ para todo } \tilde{\nu}} \end{aligned} \right.$$

Lo anterior impone que $B_{m\tilde{\nu}} = 0 \quad \forall \tilde{\nu} \in \mathbb{Z}$ y que $A_{m\tilde{\nu}}$ no es cero solo para $\tilde{\nu} = 0$

$$A_{m0} = \frac{2}{\pi L\, I_0\left(\frac{m\pi R}{L}\right)} \int_0^L f(z) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{L} z\right) dz$$

Esto conduce a la solución:

$$\boxed{u(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} z\right) A_{n1}} \qquad (6)$$

$$\downarrow$$

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\, I_0\left(\frac{n\pi}{L}\rho\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} z\right)}{\pi L\, I_0\left(\frac{n\pi R}{L}\right)} \int_0^L f(z) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} z\right) dz$$

2) En este caso nuevamente tendremos separación de variables de la forma $u(\rho,\varphi,z) = P(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ por lo que tendremos igual que antes:

$$Z'' = -\lambda Z$$

$$\Phi'' = -\lambda_1 \Phi$$

$$\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \lambda\rho^2 - \lambda_1 = 0$$

condiciones de frontera
$$\begin{cases} u(\rho,\varphi,0) = 0 \\ u(\rho,\varphi,L) = g(\rho) \\ u(R,\varphi,z) = 0 \end{cases}$$

Primero resolvemos la ecuación $\Phi'' = -\lambda_1\Phi$ considerando la condición de continuidad: $\Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi)$, que implica $\lambda_1 = m^2$ para que la solución $\Phi(\varphi)$ sea periódica.

$$\boxed{\Phi_m(\varphi) = A\cos(m\varphi) + B\,\mathrm{sen}(m\varphi)} \qquad \boxed{m = \text{entero}}$$

Esto conduce a la ecuación: $\frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) - \lambda\rho^2 - m^2 = 0$ con $P(R) = 0$ y $P(0)$ acotada.

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + (-\lambda\rho^2 - m^2)P = 0$$

Tenemos tres casos:

1) $\boxed{\lambda = \mu^2 > 0}$

Con esto caemos en el mismo caso de la ecuación (4). donde al hacer el cambio de variable $\omega = \mu\rho$ llegabamos a la ecuación de Bessel modificada con una solución de la forma:

$$P_m(\rho) = C\, I_m(\mu\rho) + D\, K_m(\mu\rho) \qquad \text{(ver ecuación 4.1)}$$

La condición de $P_m(\rho)$ acotada en $\rho = 0$ se cumple para:

$$D = 0 \Rightarrow \boxed{P_m(\rho) = C\, I_m(\mu\rho)}$$

Por otro lado, $P(R) = 0$ impone:

$$I_m(\mu R) = 0$$

Dado que las funciones de Bessel modificadas se comportan como exponensiales crecientes y decrecientes, tendremos que $I_m(\mu R)$ solamente posee una raiz cuando $m \neq 0$ y $\mu = 0$. Por este motivo descartamos este caso ya que no podremos tener una solución por series.

2) $\lambda = 0$

Descartamos este caso dado que esto supondría $Z(z) = C_1 z$ y la ecuación para $P(\rho)$ sería de Cauchy-euler con solución de la forma:

$P(\rho) = D_1 \rho^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4m^2}-1)}$ para que sea acotada, y cuya condición $P(R) = 0$ no se satisface para ningún m.

$$\lambda = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho}\right) - m^2 P = 0$$

$$\rho^2 P'' + \rho P' - m^2 P = 0 \quad \Rightarrow P(\rho) = D_1 \rho^{\frac{1}{2}(\sqrt{1-4m^2}-1)} + D_2 \rho^{-\frac{1}{2}(\sqrt{1-4m^2}+1)}$$

3) $\boxed{\lambda = -\mu^2 < 0}$

Este caso conduce a la ecuación:

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial P}{\partial \rho}\right) + (\mu^2 \rho^2 - m^2) P = 0$$

Tomando el cambio de variable: $\omega = \mu \rho \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \omega}\mu \rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} = \mu \frac{\partial}{\partial \omega}$

$$\mu\rho \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\mu\rho \frac{\partial P}{\partial \omega}\right) + (\omega^2 - m^2) P = 0$$

$$\omega \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\omega \frac{\partial P}{\partial \omega}\right) + (\omega^2 - m^2) P = 0 \quad \rightarrow \text{Ecuación Bessel}$$

La solución será:

$$P_m(\omega) = \bar{D}_1 J_m(\omega) + \bar{D}_2 Y_m(\omega)$$

La condición de $P_m(0)$ acotado implica:

$$\bar{D}_2 = 0 \Rightarrow P_m(\omega) = \bar{D}_1 J_m(\omega)$$

La segunda condición $P_m(R) = 0$ implica:

$$J_m(\mu R) = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\alpha_{mn}}{R}}$$

siendo α_{mn} el n-ésimo cero de la función J_m $n = 1, 2, 3, \ldots \infty$. Entonces:

$$\boxed{P_m(\rho) = \bar{D}_1 J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\rho\right)}$$

Por último, como $\lambda = -\mu^2 = -\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\right)^2$ tendremos:

$$Z'' = +\mu^2 Z$$

$$\rightarrow Z(z) = E_1 \cosh(\mu z) + E_2 \operatorname{senh}(\mu z)$$

La condición de borde $u(\rho, \varphi, 0) = 0$ conduce a $Z(0) = 0$

$$\Rightarrow E_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z(z) = E_2 \operatorname{senh}(\mu z)}$$

Entonces la solución general será de la forma:

$$u(\rho,\varphi,z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\rho\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} z\right)\left(A_{mn}\cos(m\varphi) + B_{mn}\operatorname{sen}(m\varphi)\right)$$

Finalmente tenemos la condición de borde:

$$u(\rho,\varphi,L) = g(\rho)$$

$$\rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\rho\right) \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} L\right)\left(A_{mn}\cos(m\varphi) + B_{mn}\operatorname{sen}(m\varphi)\right) = g(\rho)$$

Para este caso tendremos involucrada una serie de Fourier en φ y una serie de Bessel en ρ. Esto llevará a encontrar los coeficientes A_{mn} y B_{mn}:

$$A_{mn} = 2\left(\pi R^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}L\right) J_{m+1}^2(\alpha_{mn})\right)^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} g(\rho)\cos(m\varphi) \cdot \rho\, J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\rho\right) d\varphi\, d\rho$$

$$B_{mn} = 2\left(\pi R^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}L\right) J_{m+1}^2(\alpha_{mn})\right)^{-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} g(\rho)\operatorname{sen}(m\varphi) \cdot \rho\, J_m\left(\frac{\alpha_{mn}}{R}\rho\right) d\varphi\, d\rho \qquad (7)$$

Donde hemos considerado la ortogonalidad de las funciones de Bessel como:

$$\int_0^a \rho\, J_\nu\left(\alpha_{\nu i}\frac{\rho}{a}\right) J\left(\alpha_{\nu j}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = 0 \qquad i \neq j$$

Siendo su norma:

$$\int_0^a \rho\, J_\nu^2\left(\alpha_{\nu i}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu i})\right]^2$$

donde $\alpha_{\nu i}$ es el i-ésimo cero de J_ν

Observación: como en nuestro caso tenemos $g = g(\rho)$, $\int_0^{2\pi}\cos(m\varphi)\,d\varphi = 0 \quad m \neq 0$ y $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(m\varphi)\,d\varphi = 0$. Esto conduce a:

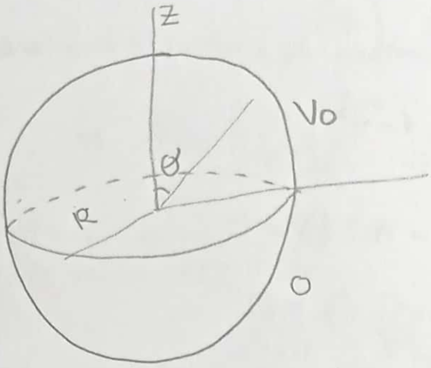
$$B_{mn} = 0 \quad \text{para todo } m$$

$$A_{mn} = 0,\ m\neq 0, \quad A_{0n} = 2\left(\pi R^2 \operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}L\right) J_1^2(\alpha_{0n})\right)^{-1} \int_0^R g(\rho)\,\rho\, J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}\rho\right) d\rho$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{u(\rho,\varphi,L) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n}\, J_0\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}\rho\right)\operatorname{senh}\left(\frac{\alpha_{0n}}{R}z\right)} \qquad (8)$$

3)



$$\nabla^2 V = 0 \qquad \text{Ecuación de Laplace}$$

$$V(R, \varphi, \theta) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Usamos coordenadas esféricas por la simetría del problema:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

Planteamos separación de variables: $V(r, \varphi, \theta) = P(r)\, \Phi(\varphi)\, \Theta(\theta)$

$$\Phi(\varphi)\Theta(\theta)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right) + \frac{P(r)\Phi(\varphi)}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \frac{P(r)\Theta(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Multiplicando por $\dfrac{r^2}{P\Phi\Theta}$ se tiene:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right) = \lambda = -\frac{1}{\Theta \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\Phi \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right) - \lambda P = 0} \qquad (a)$$

$$\boxed{-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial (\Theta\Phi)}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 (\Theta\Phi)}{\partial \varphi^2} = \lambda(\Theta\Phi)} \qquad (10)$$

Si identificamos $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ vemos que la ecuación (10) es la ecuación característica de los armónicos esféricos, donde la primera parte correspondería al operador $\mathbb{L}^2$ de mecánica cuántica. Esto se cumple para $\boxed{\lambda = \ell(\ell+1)}$ Por tanto una solución para (10) es:

$$\boxed{\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}}$$

con $\boxed{-\ell \leq m \leq \ell.}$

(Para otros valores más generales que $\lambda = \ell(\ell+1)$ se tienen singularidades de $Y(\theta,\varphi)$ en $\theta = \pi$)

Observación:

La ecuación (10) implica $\dfrac{1}{\Theta}\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \dfrac{\partial \Theta}{\partial \theta}\right) + \lambda \operatorname{sen}^2\theta = \mu = -\dfrac{1}{\Phi}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$

Para que $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$ por condición de continuidad, se tiene $\mu = m^2$ y:

$$\phi(\varphi) = A_1 \cos(m\varphi) + A_2 \operatorname{sen}(m\varphi)$$

Por otra parte, en la ecuación para Θ hacemos el cambio de variable $x = \cos\theta$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\theta \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$$

$$-\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial}{\partial x}\left(-\operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \lambda \operatorname{sen}^2\theta\, \Theta - m^2 \Theta = 0$$

$$(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \left[\lambda(1-x^2) - m^2\right]\Theta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0$$

Ecuación polinomios asociados Legendre

Con únicas soluciones para $\lambda = \ell(\ell+1)$, $-\ell \leq m \leq \ell$:

$$\Theta(x) = P_\ell^m(x)$$

$$\Theta(\theta) = P_\ell^m(\cos\theta) \quad \rightarrow \text{ confirmando lo obtenido anteriormente}$$

Ahora retomando (a):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right) - \ell(\ell+1)P = 0 \quad \rightarrow \text{ Ecuación Cauchy-Euler}$$

$$\downarrow \; r^2 P'' + 2rP' - \ell(\ell+1)P = 0$$

Suponemos soluciones de la forma: $P(r) = r^m$: $P' = mr^{m-1}$; $P'' = m(m-1)r^{m-2}$

$$m(m-1)\cancel{r^m} + 2m\cancel{r^m} - \ell(\ell+1)r^m = 0$$

$$m^2 - m + 2m - \ell(\ell+1) = 0$$

$$\rightarrow m^2 + m - \ell(\ell+1) = 0 \quad \rightarrow \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\ell(\ell+1)}}{2}$$

$$\rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{4\ell^2 + 4\ell + 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(2\ell+1)^2}}{2} \underset{\ell \geq 0}{=} \frac{-1 \pm (2\ell+1)}{2} \begin{cases} m_1 = \ell \\ m_2 = -(\ell+1) \end{cases}$$

Esto implica soluciones de la forma:

$$P(r) = B_1 r^\ell + B_2 \frac{1}{r^{\ell+1}}$$

Para que $P(0)$ esté acotada necesitamos $B_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{P_\ell(r) = B_1 r^\ell}$

Por tanto, la solución general será como:

$$V(r,\varphi,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{m\ell}\, r^\ell\, Y_\ell^m(\theta,\varphi); \quad Y_\ell^m(\theta,\varphi) \propto P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$

La condición de frontera para $V(R,\varphi,\theta)$ impone:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{m\ell}\, R^\ell\, Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \begin{cases} V_0 & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} = h(\theta)$$

Donde podremos hallar $A_{m\ell}$ considerando la ortogonalidad de los armónicos esféricos:

Ortogonalidad: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, \text{sen}\theta \left[Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta,\varphi)\right]^* Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell_1\ell_2}\delta_{m_1m_2}$

$$\Rightarrow A_{m\ell} = \frac{1}{R^\ell}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{sen}\theta' \, Y_\ell^m(\theta,\varphi)^* \, h(\theta') \, d\theta d\varphi$$

como $h(\theta)=0$ para $\theta' \in [\pi/2, \pi]$, la integral para θ' puede hacerse solamente desde $\theta'=0$ hasta $\theta'=\pi/2$:

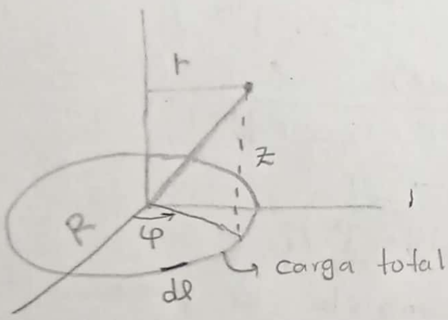
$$A_{m\ell} = \frac{1}{R^\ell}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \text{sen}\theta' \, Y_\ell^m(\theta,\varphi)^* \, V_0 \, d\theta'$$

$$A_{m\ell} = \frac{2\pi V_0}{R^\ell}\int_0^{\pi/2} Y_\ell^m(\theta,\varphi)^* \, \text{sen}\theta' \, d\theta'$$

con:

$$\boxed{V(r,\varphi,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{m\ell} \, r^\ell \, Y_\ell^m(\theta,\varphi)}$$

4)



Usando las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

como $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ tenemos:

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \delta(r-R)\,\rho_{anillo} \quad \text{en } z=0$$

Como queremos que la carga total sea Q tenemos:

$$Q = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}\int_0^{2\pi} \delta(r-R)\,\rho_{anillo}\,\overbrace{R\,d\varphi}^{d\ell}\,dr$$

$$Q = \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{R-\varepsilon}^{R+\varepsilon}\delta(r-R)\,dr}_{1}\;\rho_{anillo}\cdot R\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$Q = \rho_{anillo}\,2\pi R \Rightarrow \rho_{anillo} = \frac{Q}{2\pi R}$$

Observación:

Podemos considerar más precisamente $\rho(r,\varphi,z) = \rho_{anillo}\,\delta(r-R)\,\delta(z-0)$ y entonces:

$$Q = \iiint_V \rho\,dV = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{2\pi} \rho_{anillo}\,\delta(r-R)\,\delta(z-0)\,\underbrace{r}_{\substack{\text{Jacobiano}\\ \text{coordenadas cilíndricas}}}\,d\varphi\,dr\,dz$$

$$Q = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\delta(r-R)\,r\,dr}_{R}\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\delta(z-0)\,dz}_{1}\cdot\rho_{anillo}$$

$$Q = 2\pi R\,\rho_{anillo} \Rightarrow \rho_{anillo} = \frac{Q}{2\pi R} \Rightarrow \boxed{\rho(r,\varphi,z) = \frac{Q}{2\pi R}\,\delta(r-R)\,\delta(z-0)}$$

Hagamos unas consideraciones previas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d^3r'$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)d^3r'$$

donde $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$

Prueba:

$$-\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\hat{\imath} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\hat{\jmath} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)\hat{k}$$

Para la componente en $\hat{\imath}$:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}}\right)$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2(x-x')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right)_{\hat{\imath}}$$

Analogamente para las demás componentes, lo que completa la prueba.

Entonces tenemos:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d^3r' \equiv \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

La única manera de que se satisfaga el lado derecho de la ecuación es cuando:

$$-\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot 4\pi$$

Ahora, regresemos a nuestra ecuación:

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \equiv \frac{\rho_{anillo}}{\varepsilon_0}\,\delta(r-R)\,\delta(z-0)$$

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho_{anillo}}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad \vec{r}=(r,z) \quad \vec{r}\,'=(R,0)$$

Identificamos la ecuación anterior como un problema de funciones de Green:

$$\underbrace{-\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,')}_{\mathbb{L}\,G(\vec{r},\vec{r}\,')} = \frac{\rho_{anillo}}{\varepsilon_0}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Donde la solución será:

$$V(\vec{r}) = \int G(\vec{r},\vec{r}\,') \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} d^3r'$$

Que podemos verlo al notar que:

$$\nabla^2 V = \int \nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} d^3r'$$

$$= \int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} d^3r'$$

$$= \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Como demostramos antes: $-\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') 4\pi$

entonces:

$$-\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{\rho_{anillo}}{\varepsilon_0} \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\Rightarrow \quad G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{\rho_{anillo}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V(\vec{r}) = \int \frac{\rho_{anillo}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'}$$