

Entre Rayos, Señales y Ruido

Miguel Becerra
Juan Andrés Guarín Rojas *

*Universidad Industrial de Santander
CL. 9 Cra 27, Bucaramanga, Santander*

24 de junio de 2022

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
3. El desarrollo y los resultados	3
3.1. Análisis de Fourier de dos señales sinusoidales	3
3.1.1. Comparación transformada discreta y analítica	3
3.1.2. Estudio del espectro de potencias	7
3.1.3. Influencia de los parámetros h y T en la transformada de Fourier Discreta . .	7
3.2. Estudio de una señal pura más un factor de ruido aleatorio	9
3.2.1. Transformada discreta	9
3.2.2. Función autocorrelación	10
3.2.3. Comparación de la transformada de la función autocorrelación con el espectro original	11
3.2.4. Variación del ruido	13
3.3. Espectro de potencias de un evento electro-atmosférico	14
4. Conclusiones y Recomendaciones	16

Resumen

Este trabajo analizó desde las bases matemáticas a la transformada de Fourier de una señal de senos y cosenos. El objetivo principal de este trabajo consistió en comprobar la importancia de la transformada de Fourier para recuperar los armónicos principales de una señal periódica.

* e-mails: ,juan2201870@correo.uis.edu.co

En la primera parte se usó una ecuación sinusoidal, a la cual se le halló la transformada analítica y discreta. Se discutieron las semejanzas y diferencias entre estas dos transformadas, y se realizó un análisis de los parámetros adecuados para que la transformada discreta se asemeje a la analítica. De esto se concluyó que lo más importante es que el número de datos N debe ser tal que la rata de sampleo s cumpla el criterio de Nyquist. Con respecto al periodo se encontró que este debe ser un múltiplo entero del periodo de la señal T_0 . Sin embargo, se encontró que el espectro de potencias no se alteró demasiado al tomar múltiplos no enteros.

En la segunda parte se analizó una señal con ruido, a la cual se le analizó el cambio de la transformada por el ruido y se le aplicó la autocorrelación para eliminar el ruido. Se usó una función de ruido aleatorio con un parámetro α para aumentar el ruido. Se discutió hasta que valores de α la señal se pierde completamente. Con respecto a la autocorrelación, se comprobó que esta permitió hallar el espectro de potencias de la señal pura sin ruido.

Finalmente, los datos analizados anteriormente fueron aplicados a un conjunto de datos del observatorio Pierre Auger sobre un evento electro-atmosférico o Elves. Estos fenómenos son un tipo de descarga eléctrica que emite una señal electromagnética medible. Se analizó si dicha señal mantiene el espectro de potencias al medirse desde diferentes puntos geográficos.

1. Introducción

La huella digital de una señal es su transformada de Fourier, pues a partir de ella es posible reconstruir el espectro de potencias e identificar los armónicos principales de la señal. Por lo tanto estudiar la transformada de Fourier de una señal es bastante útil porque nos da características propias de la señal.

A continuación se mostrarán las ecuaciones analíticas usadas en la transformada de Fourier. Posteriormente se hará un análisis detallado de las transformadas de Fourier de señales formadas solamente por senos o por cosenos. Luego, se usarán nuevamente las transformadas para estudiar señales con un ruido aleatorio. Finalmente se identificarán los armónicos principales de una señal de datos de un evento electroatmosférico. Que es un tipo de descarga eléctrica que se da en la ionósfera¹. Con datos dados por cortesía del observatorio Pierre Auger².

2. Metodología

En cuanto a la transformada de Fourier analítica, en este trabajo se consideró el factor de oscilación como -1 y la normalización $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ que es comúnmente usada en mecánica cuántica [1].

$$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-ist}}{\sqrt{2\pi}} y(t). \quad (1)$$

De esta forma, la transformada de Fourier inversa sería:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(s)\} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{ist}}{\sqrt{2\pi}} Y(s). \quad (2)$$

¹<https://eos.org/science-updates/catching-elves-in-argentina>

²<https://www.auger.org/observatory/observatory>

Ahora, en cuanto a la transformada de Fourier discreta (DFT) se considero un tiempo total T particionado en N intervalos iguales de tamaño $h = \Delta t$. Dadas estas condiciones, la transformada discreta de acuerdo con Landau, et al. (2015) [1] es:

$$Y_n \equiv \frac{1}{h} Y(s_n) = \sum_{k=1}^N y_k \frac{e^{-2\pi i k n / N}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots, N, \quad s_n = n \frac{2\pi}{T}, \quad (3)$$

donde s_n corresponde a la frecuencia angular n-ésima.

Ahora, con respecto a la transformada de Fourier discreta inversa se siguió la misma línea de Landau, et al [1]. Con lo cual se usó:

$$y(t) \simeq \sum_{n=1}^N \frac{2\pi}{Nh} \frac{e^{i_n t}}{\sqrt{2\pi}} Y(s_n). \quad (4)$$

3. El desarrollo y los resultados

3.1. Análisis de Fourier de dos señales sinusoidales

En esta sección se desarrollaron las transformadas discreta y analíticas de dos señales. La transformada discreta se implementó con un código propio en python, y la parte analítica se hizo usando el formalismo y las demostraciones matemáticas pertinentes.

3.1.1. Comparación transformada discreta y analítica

Las dos señales usadas fueron:

$$y_1(t) = 3 \cos(\omega t) + 5 \cos(3\omega t) + 8 \cos(7\omega t), \quad (5)$$

$$y_2(t) = 3 \sin(\omega t) + 2 \sin(3\omega t) + 3 \sin(8\omega t). \quad (6)$$

Con el objetivo de implementar numéricamente la transformada discreta en las siguientes secciones se asumió $\omega = 1$. No obstante, todos los pasos mostrados pueden generalizarse para tomarlo en cuenta, tal y como se mostró al final de esta sección.

A. Transformada discreta

En la señal $y_1(t)$ el término $3 \cos(t)$ tiene el periodo más grande, $T = 2\pi$. Por tanto se decidió tomar este para hacer la transformada discreta. Ahora, para saber el número de intervalos se consideró el criterio de Nyquist. El cual dice que para evitar el *aliasing* se deben considerar frecuencias $f < \frac{s}{2}$, siendo $s \equiv \frac{N}{T} = \frac{1}{h}$ la rata de sampleo. Con esto, se encontró que para medir correctamente una señal con frecuencia máxima f_{\max} se tiene que $N > 2Tf_{\max}$. En este caso, se tiene $N > 14$.

Luego se probaron dos valores de N mayores a 14, pero no se observaron cambios notables en la transformada (ver Fig. 1). Por lo cual se eligió simplemente $N = 20$.

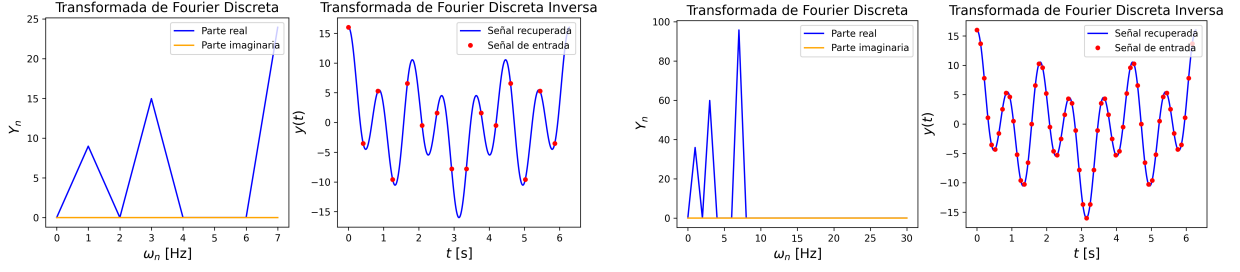


Figura 1: Comparación de la transformada de Fourier de la señal de cosenos, $y_1(t)$, y su respectiva inversa. La primera se hizo tomando $N = 15 \rightarrow s \approx 2,39 [Hz]$ y la segunda, tomando $N = 60 \rightarrow s \approx 9,55 [Hz]$. No hubieron cambios en la ubicación de los picos de la transformada ni en la recuperación de la señal.

Ahora, para implementar correctamente la transformada discreta inversa se consideró nuevamente el criterio de Nyquist. De esta forma se decidió hacer la sumatoria de la ecuación (4) hasta $N/2 - 1$ para evitar tomar frecuencias mayores a la mitad de la rata de sampleo.

La transformada inversa permitió recuperar la señal original y verificar que la transformada de Fourier realmente tiene los armónicos fundamentales. Por su parte, la imagen 1 mostró que no existieron cambios notables en dicha transformada inversa $N = 15$ y $N = 60$. Esto sugiere que el valor de N no cambia la transformada inversa, siempre y cuando cumpla el criterio de Nyquist.

En segundo lugar, partiendo de un análisis similar al anterior se tomó $T = 2\pi$ para la transformada de $y_2(t)$. Y considerando la frecuencia máxima de las componentes: $f_{\max} = \frac{8}{2\pi}$, se obtuvo $N > 16$ por el criterio de Nyquist. Al igual que antes, al probar dos valores de N no se observaron cambios notables (ver Fig. 2).

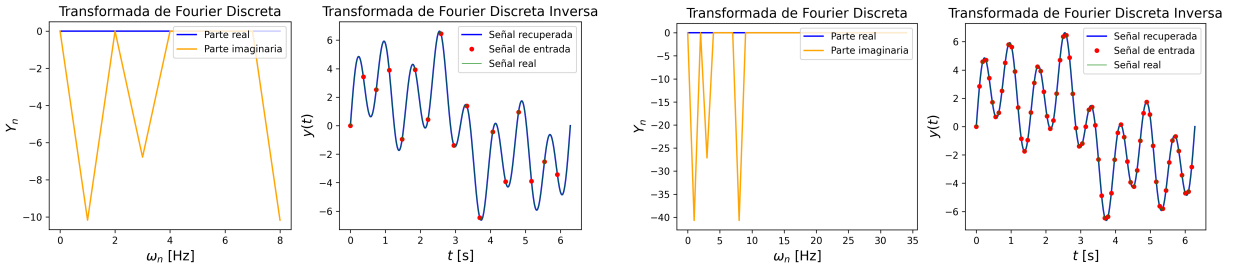


Figura 2: Comparación de la transformada de Fourier de la señal de senos, $y_2(t)$, y su respectiva inversa. La primera se hizo tomando $N = 17 \rightarrow s \approx 2,71 [Hz]$ y la segunda, tomando $N = 68 \rightarrow s \approx 10,82 [Hz]$. No hubieron cambios en la ubicación de los picos ni en la señal recuperada.

B. Transformada analítica

Para hallar la transformada analítica se consideró primero la transformada de $a \cos bt$ y $a \sin bt$.

$$\mathcal{F}\{a \cos bt\} = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2} [\delta(s - b) + \delta(s + b)]. \quad (7)$$

$$\mathcal{F}\{a \sin bt\} = \frac{a\sqrt{2\pi}}{2i} [\delta(s-b) - \delta(s+b)]. \quad (8)$$

Las ecuaciones (7,8) pueden demostrarse de manera sencilla al probar que la transformada de $y(t) = a e^{ibt}$ es $Y(s) = \sqrt{2\pi} a \delta(s-b)$, y luego expresando a $\sin(bt)$ y $\cos(bt)$ en la forma de exponenciales complejas. Para la primera parte se tomó:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\sqrt{2\pi} a \delta(s-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{e^{ist}}{\sqrt{2\pi}} a \sqrt{2\pi} \delta(s-b) = a \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{ist} \delta(s-b) = a e^{ibt}|_{s=b} = a e^{ibt}.$$

Y por lo tanto:

$$\mathcal{F}\{a e^{ibt}\} = \sqrt{2\pi} a \delta(s-b). \quad (9)$$

Después de esto, se puede expresar a $a \sin(bt)$ y a $a \cos(bt)$ en términos de exponenciales complejas y hallar sus transformadas de Fourier. Por ejemplo, para $a \cos(bt)$ se tiene:

$$\mathcal{F}\{a \cos(bt)\} = \mathcal{F}\left\{a \frac{e^{ibt} + e^{-ibt}}{2}\right\}. \quad (10)$$

Con lo cual se obtiene la misma expresión mostrada en la ecuación (7). Ahora, la transformada analítica de las dos señales es:

$$\mathcal{F}\{y_1(t)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [3\delta(s-1) + 3\delta(s+1) + 5\delta(s-3) + 5\delta(s+3) + 8\delta(s-7) + 8\delta(s+7)]. \quad (11)$$

$$\mathcal{F}\{y_2(t)\} = \frac{\sqrt{2\pi}i}{2} [-3\delta(s-1) + 3\delta(s+1) - 2\delta(s-3) + 2\delta(s+3) - 3\delta(s-8) + 3\delta(s+8)]. \quad (12)$$

C. Comparación

La transformada discreta y la analítica de las señales $y_1(t)$ y $y_2(t)$ puede verse en la imagen 3. En ambos casos se pudo ver que la transformada discreta reproduce la gráfica esperada con la analítica. Por su parte, la diferencia de altitud entre los picos de las distintas frecuencias se explica por las diferencias de amplitud de las componentes de las señales $y_1(t)$ y $y_2(t)$. Se encontró que el alto de dicho pico si la señal es de la forma $y(t) = a \sin bt$ es de:

$$Y_b = \frac{\sqrt{2\pi}a}{2} \quad (13)$$

Y si es de la forma $y(t) = a \cos bt$ es de:

$$Y_b = \frac{\sqrt{2\pi}a}{2}, \quad (14)$$

Estas expresiones concuerdan con las cantidades que multiplican a los deltas de dirac $\delta(t-b)$ en las ecuaciones analíticas (11,12)

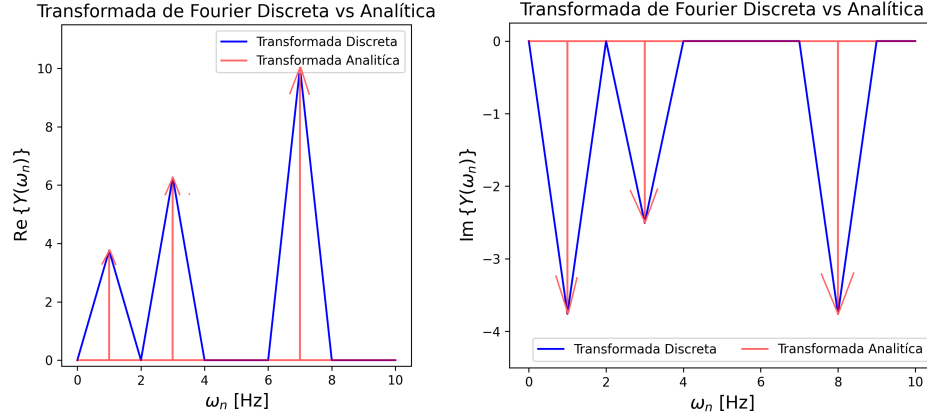


Figura 3: Comparación de la transformada discreta de Fourier con la analítica para las señales $y_1(t)$ y $y_2(t)$ respectivamente. Observe la concordancia entre estas. En el caso de la analítica, se observan las flechas representativas de los deltas de dirac, que van desde 0 hasta el número que acompaña al delta de dirac en el eje y .

Con todo lo anterior fue posible ver que las diferencias en la transformada de Fourier de las dos señales. La señal formada por cosenos tuvo solamente una parte real en su transformada de Fourier y la señal de senos tuvo solamente parte imaginaria (ver Fig. 3). Esto concordó con las ecuaciones analíticas de la transformada de Fourier. De esto se puede concluir que la transformada de Fourier real corresponde a la componente cosenoidal de la señal en cada frecuencia, y la imaginaria, a la componente sinusoidal en cada frecuencia.

D. Dependencia con ω

En el caso más general de las ecuaciones (5,6) donde ω no necesariamente vale 1 se tendría que: Primero el periodo de la transformada discreta sería $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tanto para $y_1(t)$ como para $y_2(t)$. Segundo, el criterio de Nyquist sería:

$$N > 2Tf_{\max} = 2\frac{2\pi}{\omega} \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = 2\frac{\omega_{\max}}{\omega}, \quad (15)$$

donde ω_{\max} es la frecuencia angular máxima de los términos que forman la señal. Entonces se tendría $\omega_{\max} = 7\omega$ para $y_1(t)$ y $\omega_{\max} = 8\omega$ para $y_2(t)$. Con lo anterior, sería posible calcular la transformada discreta para cualquier valor de ω . Tercero y último, las transformadas analíticas quedarían de la forma:

$$\mathcal{F}\{y_1(t)\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} [3\delta(s - \omega) + 3\delta(s + \omega) + 5\delta(s - 3\omega) + 5\delta(s + 3\omega) + 8\delta(s - 7\omega) + 8\delta(s + 7\omega)], \quad (16)$$

$$\mathcal{F}\{y_2(t)\} = \frac{\sqrt{2\pi}i}{2} [-3\delta(s - \omega) + 3\delta(s + \omega) - 2\delta(s - 3\omega) + 2\delta(s + 3\omega) - 3\delta(s - 8\omega) + 3\delta(s + 8\omega)]. \quad (17)$$

Siendo s la variable del espacio de Fourier y ω el parámetro libre.

3.1.2. Estudio del espectro de potencias

Aquí se encontraron las distintas componentes para el espectro de potencias y se mostró que las frecuencias de ubicación de dichos picos tienen los valores esperados.

El espectro de potencias de una señal se definió como $\text{espectro}(s) = |Y(s)|^2$ donde $Y(s)$ es la transformada de Fourier de la señal. En el caso analítico se consideró multiplicar la transformada por su conjugado para hallar $|Y(s)|^2$:

$$|Y_1(s)|^2 = Y_1(s)Y_1^*(s) = \frac{2\pi}{4}[3\delta(s-1) + 3\delta(s+1) + 5\delta(s-3) + 5\delta(s+3) + 8\delta(s-7) + 8\delta(s+7)] \\ [3\delta(s-1) + 3\delta(s+1) + 5\delta(s-3) + 5\delta(s+3) + 8\delta(s-7) + 8\delta(s+7)].$$

Luego se asumió $\delta(s-a)\delta(s-b) = 0 \quad \forall s \in R \wedge a \neq b$ y además $\delta^2(s-a) = \delta(s-a)$ entonces:

$$|Y_1(s)|^2 = \frac{9\pi}{2}\delta(s-1) + \frac{9\pi}{2}\delta(s+1) + \frac{25\pi}{2}\delta(s-3) + \frac{25\pi}{2}\delta(s+3) + 32\pi\delta(s-7) + 32\pi\delta(s+7) \quad (18)$$

Al graficar la transformada discreta y la transformada analítica de las ecuaciones (11,12) para hallar el espectro se hallaron resultados iguales (ver Fig. 4). La exactitud de este resultado se entiende al notar que la transformada analítica del seno y coseno está bastante bien definida haciendo que sea fácilmente reconstruible por medio de una aproximación, como lo es la transformada discreta.

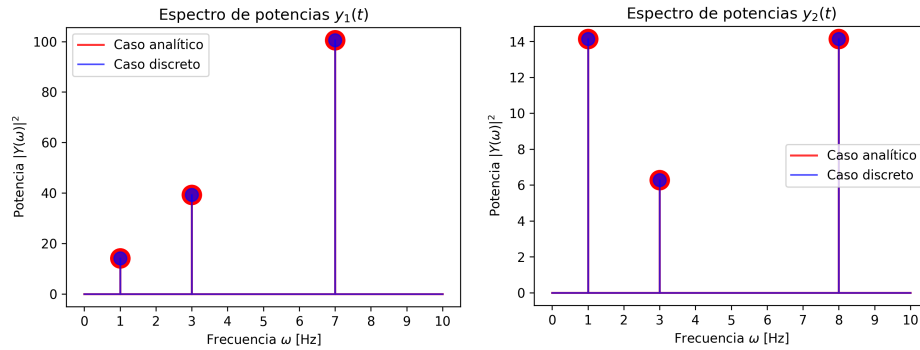


Figura 4: Espectro de potencias de la señal de cosenos $y_1(t)$ y la señal de senos $y_2(t)$ respectivamente. Se observaron resultados concordantes para ambos caso, coincidiendo la transformada discreta con la analítica.

3.1.3. Influencia de los parámetros h y T en la transformada de Fourier Discreta

En esta sección se experimentó usando diferentes valores del tamaño de paso h y de el período de medición $T = Nh$ en la transformada discreta de Fourier. El parámetro h se varió tomando distintos valores de N . Dado que en la sección 3.1.1 se demostró que el valor de N no importa para analizar la transformada (ver Fig. 1) se probaron valores no enteros de N . Que quiere decir que el último punto del sampleo no está en $t = T$, si no, un poco antes. Ahora, para el parámetro T se tomaron múltiplos enteros y no enteros del periodo de la señal T_0 .

Para mostrar los resultados, se creó una matriz 3×2 para probar los distintos valores de periodo $T = \{T_0; 2T_0; 1,25T_0\}$ y cantidad de datos $N = \{40; 50, 5\}$ (ver Fig. 5).

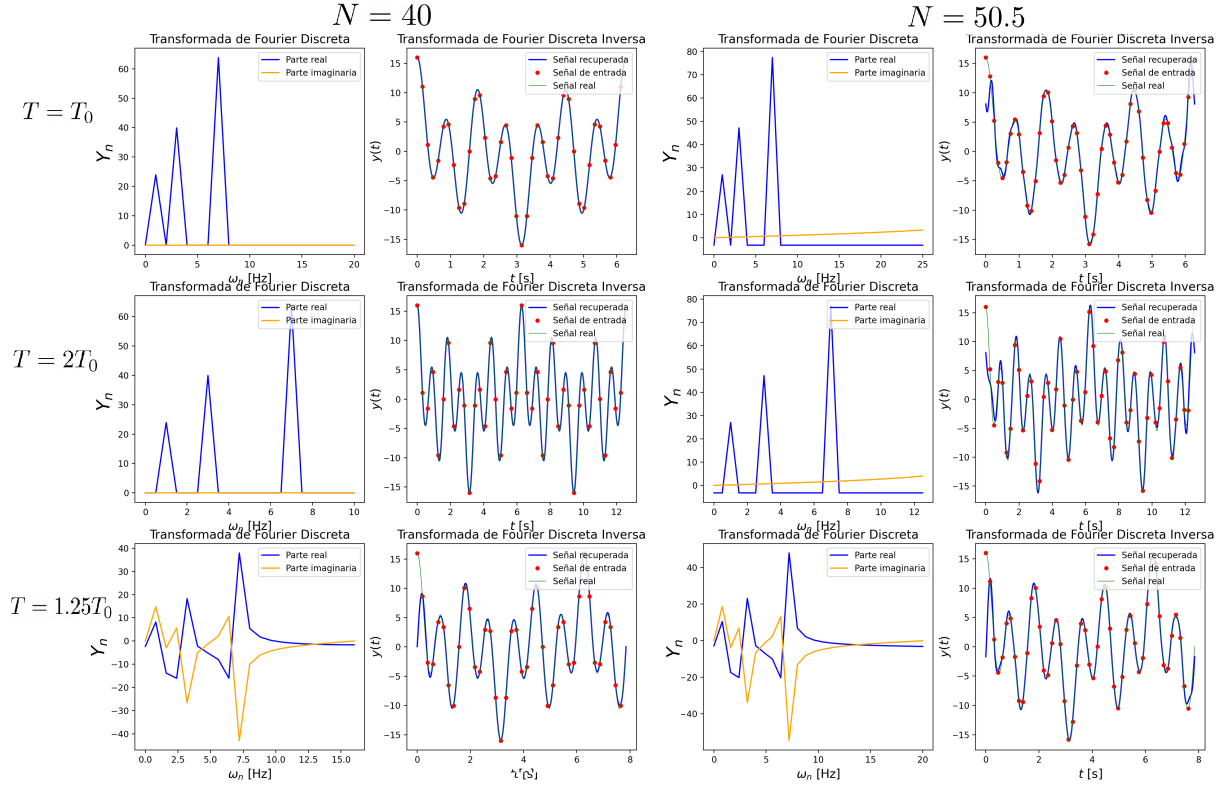


Figura 5: Variación de parámetros de T y N . En cada imagen se muestra la transformada discreta y al lado su inversa. Los valores no enteros de N aumentaron ligeramente la componente imaginaria de la transformada. Por su parte, el periodo que no fue múltiplo entero de T_0 tuvo picos en la componente imaginaria de la transformada que no debería tener. Pese a lo anterior, las transformadas inversas recuperaron adecuadamente la señal.

Se obtuvo que el parámetro N no afecta tanto la transformada de Fourier de la señal. Ya que las proporciones y ubicación de los picos se mantuvieron inalterados. Para un periodo igual al doble de la señal, se halló que la transformada mantenía las mismas proporciones y la misma forma. Para otros múltiplos enteros del periodo se tuvo exactamente lo mismo.

Para un múltiplo no entero del periodo, $1,25T_0$ hubieron grandes cambios. La transformada tuvo una componente imaginaria que antes no tenía, y el alto de los picos de la parte real se redujo en una fracción. Aún así la ubicación de los picos de la transformada estuvieron cerca de los armónicos de la señal original. En concordancia con esta observación, se encontró que el espectro de potencias fue muy similar para los dos periodos, manteniendo máximos parecidos (ver Fig. 6). Al probar con otros múltiplos no enteros, se obtuvieron resultados similares con un espectro de potencias similar, pero con cambios en las partes real e imaginaria.

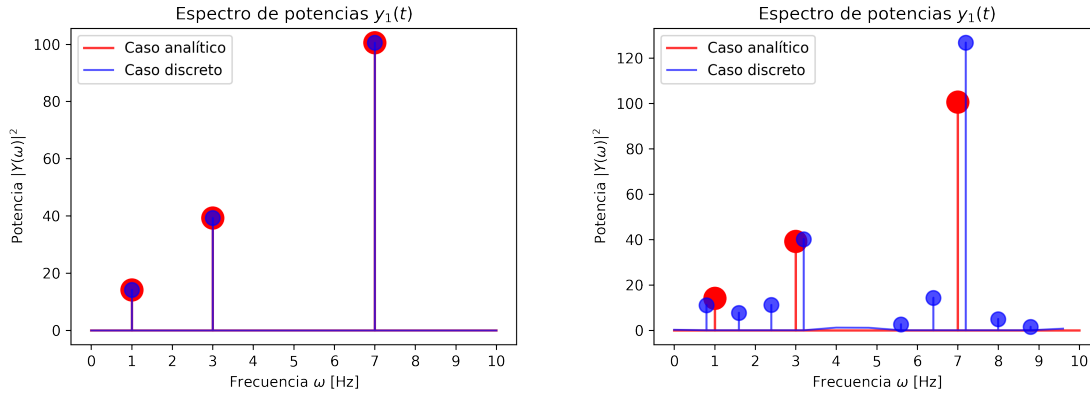


Figura 6: En esta figura se muestra el cambio en el espectro de potencias al transformar la señal con $T = T_0$ y $T = 1,25T_0$ respectivamente. donde T_0 es el periodo de la señal. Note que a rasgos generales, los espectros son parecidos.

Finalmente, se hallaron muy buenos resultados con la transformada inversa en todos los casos, sin importar los valores de N o de T . Lo que es bastante coherente, pues como se había visto antes, la transformada inversa permite elaborar una interpolación de datos de la señal. Se encontró que dicha interpolación será buena siempre y cuando N satisfaga el criterio de Nyquist (15).

Es fundamental considerar el criterio de Nyquist al elegir el valor de N . Pues si este valor no satisface dicho criterio, la transformada no tiene todos los armónicos que debería tener. Haciendo que no podamos recuperar correctamente la señal original.

3.2. Estudio de una señal pura más un factor de ruido aleatorio

Considere ahora la siguiente señal:

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9 \sin(t_i)} + \alpha(3\mathcal{R}_i - 1) \quad \text{con} \quad 0 \leq \mathcal{R}_i \leq 1 \quad (19)$$

donde \mathcal{R}_i es un número aleatorio y α un parámetro de control. Use este parámetro α para simular tres tipos de ruido: alto, medio y bajo. En el caso del ruido alto, la señal se pierde. En los otros dos casos puede ser identificada.

3.2.1. Transformada discreta

a) Grafique su señal ruidosa, su transformada de Fourier y su espectro de potencia.

Lo primero que debemos observar en la ecuación (19) es que el intervalo de la función es un intervalo discreto, para que de esta forma se pueda asociar el número aleatorio a cada uno de los valores del intervalo. Además, Por la relación $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de la señal, y observando que $\omega = 1$, obtenemos que la frecuencia es $f = 1/2\pi$ [Hz] y por ende su periodo T es de 2π [s].

Ahora, sabiendo que entre menor sea el intervalo de tiempo escogido, menor va a ser la definición de la transformada de Fourier, se decidió trabajar con un intervalo de tiempo igual a dos veces el periodo de la señal, es decir, $4\pi \approx 12,57$. Por la relación $T = Nh$, donde h el intervalo temporal y N la cantidad de puntos como se mencionó anteriormente, se decidió que la cantidad de puntos fuera 1000, y recordando que el intervalo que se escogió fue de 4π , obtenemos que el intervalo temporal entre cada uno de los puntos es de aproximadamente 0,012 segundos.

Aora, la ecuación (19) se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(t_i) = s(t_i) + r(t_i) \quad (20)$$

donde $s(t_i)$ hace referencia a la señal pura, la cual tiene un ruido $r(t_i)$ agregado.

Lo primero que se realizó fue crear un array para el tiempo con 1000 elementos como se mencionó anteriormente, iniciando con 0 y terminando con $4\pi \approx 12,57$, siendo este el dominio de nuestra función, para después ingresar estos valores a la función pura $s(t)$. Adicionalmente se creó otro array de la misma longitud que el anterior que representaría el ruido que se le añade a la señal pura. Se decidió crear este array aparte en vez de hacerlo como una sola función para que de esta forma al sumar ambos arrays, tuviera la forma de la ecuación (20).

Posteriormente, con la señal con ruido, se realizó la transformada de Fourier discreta (3) por lo que se mencionó al principio. Por último, si se desea obtener el espectro de potencia de la señal, solamente es necesario obtener el módulo de la transformada de Fourier.

A continuación se muestra la señal con ruido con un parámetro $\alpha = 0,5$, su transformada de Fourier, y por último su espectro de potencias.

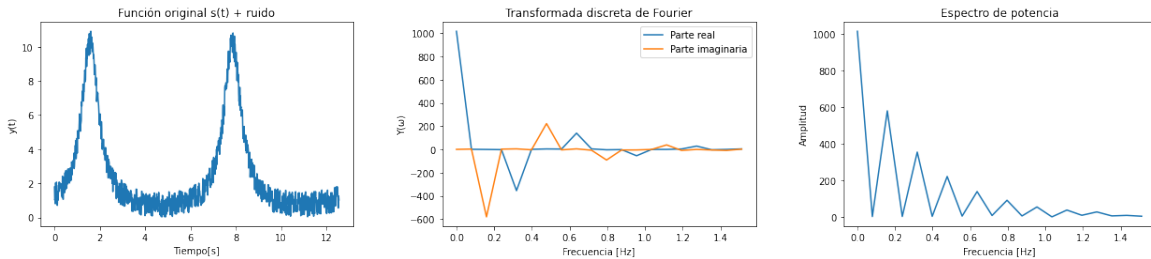


Figura 7: Señal ruidosa con parámetro $\alpha = 0,5$ con su transformada de Fourier y su espectro de potencia.

Podemos observar que en el espectro de potencias, ignorando el primer pico ubicado en cero que es debido al valor máximo que alcanza la señal, podemos observar que el primer pico, es decir, el primer armónico se encuentra justamente en la frecuencia de la señal, que como mencionamos anteriormente es de $f = 1/2\pi \approx 1,59 [Hz]$, y los demás armónicos serán múltiplos de esta frecuencia.

3.2.2. Función autocorrelación

b) Calcule la función de autocorrelación $A(\tau)$ y su transformada de Fourier $A(\omega)$.

Sean dos funciones $x(t)$ y $y(t)$, la correlación entre estas dos funciones es una medida de "similitud." en función de un desplazamiento, en este caso temporal, de una respecto a la otra

y viene dada por:

$$c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy^*(t)x(t+\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dy^*(t-\tau)x(t)$$

Si expresamos los términos involucrados en términos de sus transformada de Fourier, seremos capaces de llegar a un resultado importante el cual nos dice que la transformada de la función correlación va a ser proporcional al producto de la transformada de una señal con el conjugado de la transformada de la otra, o del mismo modo:

$$C(\omega) = \sqrt{2\pi}Y^*(\omega)X(\omega) \quad (21)$$

Un caso particular e interesante por las implicaciones que tiene en tratamiento de señales, es cuando realizamos la correlación de un función consigo misma, a esta función se le conoce como *función de autocorrelación* y viene dada por:

$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy^*(t)y(t+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy^*(t-\tau)y(t) \quad (22)$$

La importancia de esta función de autocorrelación es que nos permite eliminar o disipar el ruido en una señal. Supongamos una señal que tiene la forma de (20) donde $s(t)$ es la señal pura y $r(t)$ es el ruido. Al hallar la función de correlación a esta señal, considerando que el ruido es totalmente aleatorio y no está relacionada con la señal, se llega al resultado de que la la transformada de la función autocorrelación de la señal, su parte pura más el ruido, es proporcional al cuadrado del valor absoluto de la transformada de solamente la parte pura, o dicho de otra manera, es proporcional al espectro de potencia de la señal pura, de igual manera que encontramos en (21):

$$A(\omega) = \sqrt{2\pi}|S(\omega)|^2 \quad (23)$$

Para nuestro caso como estamos realizando el analisis de Fourier solamente en un intervalo de tiempo específico, la integral se realizaría en este intervalo. También se debe recordar que estamos trabajando de forma discreta y no continúa, por lo que la integral termina convirtiéndose en una sumatoria.

A continuación (8) se muestra la función de autocorrelación para la señal tratada en el primer inciso, es decir una señal ruidosa con parámetro $\alpha = 0,5$. Además, se obtuvo la transformada discreta la función autocorrelación.

3.2.3. Comparación de la transformada de la función autocorrelación con el espectro original

c) Compare la transformada discreta de Fourier de $A(\tau)$ con el verdadero espectro de potencia y discuta la eficacia de la reducción del ruido mediante el uso de la función de autocorrelación.

Como se mencionó en el inciso anterior, podemos ser capaces de obtener el espectro puro de una señal ruidosa realizando la transformada de Fourier de la función autocorrelación de la señal ruidosa (23).

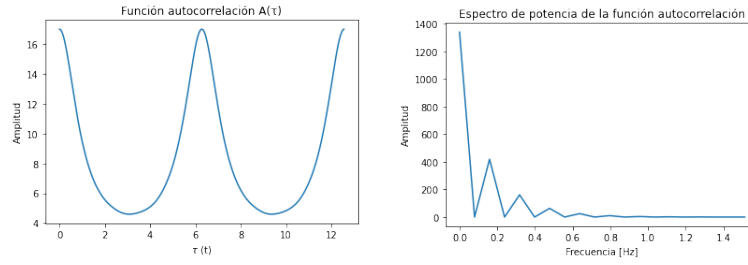


Figura 8: Función autocorrelación de una señal ruidosa con parámetro $\alpha = 0,5$ con su transformada de fourier

En las dos últimas secciones hemos trabajado con una señal ruidosa cuyo parámetro α es de 0.5. A continuación (9) se compara el espectro de la señal pura obtenido mediante la función de autocorrelación, y el espectro obtenido de realizar la transformada a una señal pura (sin ruido.)

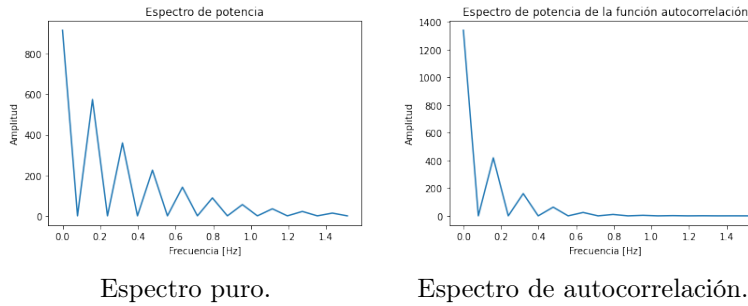


Figura 9: Espectro de una señal sin ruido y espectro obtenido mediante la función de autocorrelación.

Podemos observar que efectivamente la transformada de la función de autocorrelación recupera el espectro de la señal pura, podemos observar que en el espectro de la función autocorrelación los picos se encuentran, como se mencionó anteriormente, en múltiplos de la frecuencia de la señal, $f = 1/2\pi \approx 1,59 [Hz]$. La diferencia principal entre ambos espectros, es la amplitud. El primer armónico de la señal pura se encuentra en 600, mientras que el obtenido por la función autocorrelación se encuentra en 400 aproximadamente. Otra diferencia notoria es la cantidad de armónicos que se encuentran en el espectro, mientras que en el espectro puro se tiene registro de una gran cantidad de armónicos, en el otro espectro se tiene registro de unos pocos.

Cabe aclarar que mediante la función autocorrelación es posible solamente recuperar el espectro de potencia puro de una señal ruidosa, más no se puede disminuir el ruido a la señal. Esto debido a que como podemos observar en la ecuación (23), el espectro de potencia de la señal pura que nosotros obtenemos es el módulo de un número complejo, y hay un número infinito de números complejos que van a tener esa magnitud; sería necesario otra condición para saber estos números con claridad y de esta forma aplicar la transformada de Fourier inversa para obtener la señal pura.

Otro punto a aclarar es que a medida que se aumenta el valor del parámetro α el registro de frecuencias de la señal pura se va a perder, por lo que inclusive utilizando la función de

autocorrelación no se va a ser capaz de obtener el espectro de potencia de la señal pura. En el siguiente inciso se especifica para cuales valores del parámetro ya se considera muy ruidosa la señal.

3.2.4. Variación del ruido

d) ¿Para cuáles valores de α se pierde toda la información en la entrada?

Para poder encontrar para que valores de α se pierde la información de la señal y de esta manera poder clasificar el ruido en bajo, medio y alto, se decidió comparar la señal pura, es decir con el parámetro $\alpha = 0$, con la señal con el ruido agregado mediante el uso de la distancia entre funciones. Para medir la distancia entre funciones se usa la siguiente expresión:

$$d = \sqrt{\int_0^T (f(x) - g(x))^2 dx} \quad (24)$$

Donde $f(x)$ representa la señal pura y $g(x)$ la señal que present ruido, además, para este caso, se realiza la integral en el intervalo de tiempo donde se realizó el análisis de Fourier, desde 0 hasta el periodo que se escogió.

De esta manera se puede clasificar el ruido en función de la distancia con la señal original. Se realizó un análisis cualitativo y se clasificó el ruido bajo para aquellos parámetros α los cuales daban una distancia menor que 5, ruido medio para las distancias entre 5 y 30, y por último el ruido alto para las distancias mayores a 30. De esta manera, trabajando con un decimal, los parametros que corresponden a ruido bajo pertenecen al intervalo de 0 a 1,4, al ruido medio el intervalo de 1,5 hasta 8,4, y ruido alto valores mayores a 8,4.

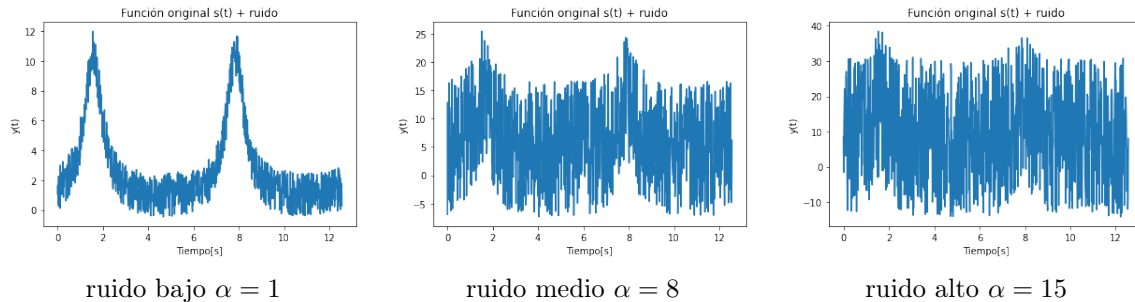


Figura 10: Comparación de la señal para tres tipos de ruido: bajo, medio y alto.

En la figura (10) se encuentran graficadas tres señales con ruido bajo, medio y alto. Como era de esperarse, se observa que a medida que se aumenta el parámetro, también aumenta la amplitud de la señal. En el ejemplo se puede observar que para el ruido bajo, el máximo valor que tomar la función es aproximadamente 12, mientras que para ruido alto el máximo es aproximadamente 40. Si graficamos el espectro de potencias de estas señales (11), podemos observar que, como se esperaba, para ruido bajo se puede observar claramente los picos en los armónicos, los múltiplos de la frecuencia de la señal. Para ruido medio, ya se pierde gran parte de la información del espectro, como se puede observar solo se puede distinguir el primer armónico, mientras que el resto ya se

perdió. Por último, para el ruido alto, ya se pierde totalmente la información de los armónicos. Observe que, aunque el primer pico, el que se encuentra en 0, varía para cada ruido, esto es debido a que la misma amplitud de la señal aumenta a medida que se aumenta el parámetro. Sin embargo, el armónico principal si mantiene aproximadamente el mismo valor para los tres tipos de ruido, aproximadamente 600.

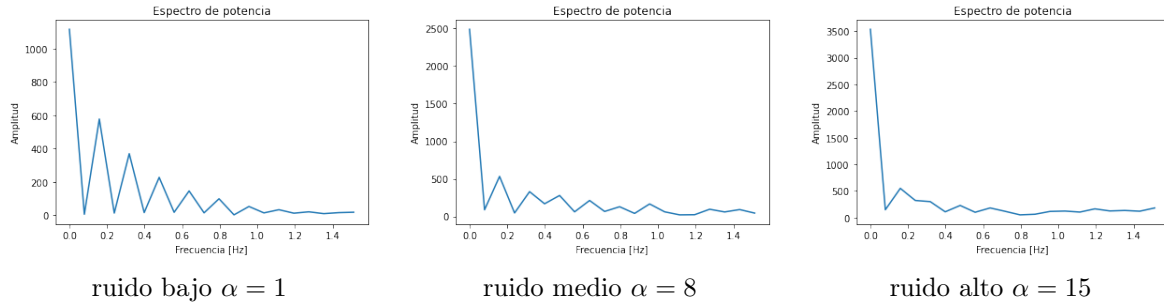


Figura 11: Comparación del espectro de potencia de la señal para tres tipos de ruido: bajo, medio y alto.

3.3. Espectro de potencias de un evento electro-atmosférico

Para la segunda parte del trabajo se nos daba los datos de varios eventos atmosféricos, rayos, los cuales habían sido medidos por diferentes antenas. Lo que se debía realizar era averiguar si el evento visto desde las diferentes antenas conserva su identidad espectral. [2].

Para el trabajo de escogió el evento que se encontraba en el archivo llamado "Trace EVT 1272070496.820081490 820.1". En el archivo se encontraban cinco columnas las cuales tenían datos de tiempo, tiempo corregido, señal, señal2 y por último señal3. Lo que diferencia estas últimas tres columnas es que la señal 2 viene dada por $\text{señal2} = \text{señal} / \text{amplitud} * \text{Normalization} + \text{azimuth}$, mientras que la señal 3 viene dada por $\text{señal3} = \text{señal} / \text{amplitud} * \text{Normalization} + \text{distance} / 1000$. En las indicaciones del trabajo se nos pedía trabajar solamente con la segunda columna, tiempos corregido, y la tercera columna, correspondiente a la señal.

En el archivo, venían todos los datos necesarios para las antenas, así que lo primero que se realizó fue separar los datos de cada una de las antenas. Habían en total 7 antenas, las cuales se llamaban 'R9PLT', 'R9JNN', 'R9RSR', 'R9NDJ', 'R9GLG', 'R9AZL', y 'R9AEP'. Algo importante a mencionar es que la antena 'R9AZL' presentaba pocos datos, por lo que se descartó su porque no arrajaba una buena señal. Lo primero que se encontraba es que para los datos de todas las antenas no estaba a la misma distancia temporal, lo cual es debido a que las antenas recolectan mayor cantidad de datos de la señal generada por el rayo cuando este sucede, resultando en bastantes datos con poca distancia temporal entre ellos; por otro lado, después de que se disipa el rayo, las antenas recolectan pocos datos, lo mismo sucede antes de empezar el suceso, por lo que habrán pocos datos con bastante brecha temporal entre ellos.

Se encontró que la parte con mas intensidad del evento ocurría aproximadamente entre los datos de 819 y 821 segundos, por lo que se eliminó los demás datos y se decidió que este intervalo de dos

segundos fuera el periodo donde se realizara el análisis de Fourier.

Teniendo nuestro intervalo de tiempo ya escogido, queremos tener datos que estén igualmente espaciados temporalmente. Para este caso, queremos que haya un espacio temporal de 0.01 segundos entre cada dato. Creamos un array que nos permite tener un tiempo discreto, iniciando con el tiempo inicial que habíamos establecido, 819 segundos, hasta el tiempo final, 821, en el que cada dato tiene el espacio temporal ya mencionado. Ahora, tenemos que interpolar los datos de la señal para poder obtener datos de señales cada 0.01 segundos. Para realizar esto, para cada elemento t del array temporal, se observa este elemento entre que puntos del intervalo original de tiempo se encuentra, y se procede a obtener la recta que pasa por estos dos puntos entre los cuales se encuentra t , y de este modo al elemento de tiempo t se le asocia el valor de señal que se encuentra sobre la recta. De este modo logramos obtener una señal que tenga el mismo espacio temporal entre cada uno de sus datos.

Teniendo ya los datos con la misma distancia temporal se procedió a aplicarles la transformada de Fourier y sacarle el valor absoluto para de esta manera obtener el espectro de potencia de las señales.

A continuación se muestra el espectro obtenido para las diferentes antenas.

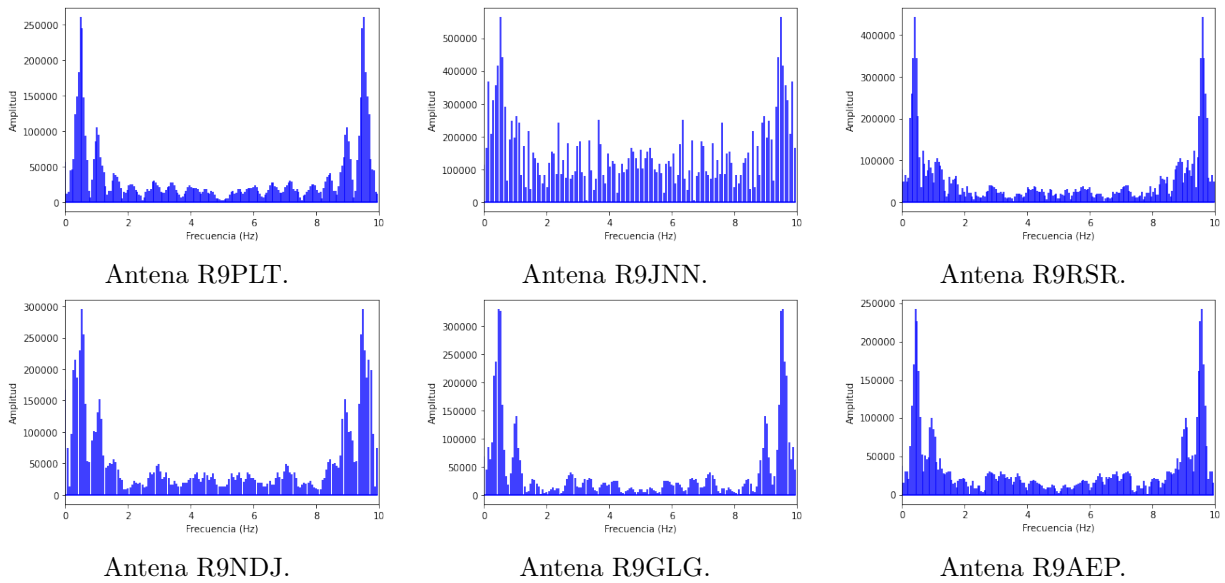


Figura 12: Comparación del espectro de potencia del evento para las 6 antenas diferentes.

Podemos observar en la figura (12) que para todas las antenas el espectro de potencia se conserva en general, podemos observar que en todas se presentan los mismos picos o armónicos, lo único que varía es la intensidad de estos mismos, lo cual puede ser debido a que las antenas no se encuentran todas a la misma distancia desde donde ocurrió el evento.

Otra manera de comparar las señales medidas por cada una de las antenas es mediante un análisis de espectrograma. Un espectrograma es una representación visual del espectro de frecuencia de una señal varía con el tiempo. Para obtener el espectrograma de una señal se tiene que hacer uso de la

Short-time Fourier Transform (STFT).

Sea $x(t)$ la señal, esta tiene que ser multiplicada por una función ventana la cual es diferente de cero en un intervalo de tiempo corto, esto es:

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)v(t - \tau)e^{-i\omega t}dt \quad (25)$$

donde $v(t)$ es la función ventana.

Si en vez de una señal continua tenemos una señal discreta, la STFT viene dada por:

$$X(m, \omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]v[n - m]e^{-j\omega n} \quad (26)$$

Para finalizar, para obtener el espectrograma de la señal, solamente es necesario obtener la magnitud de la STFT y elevarla al cuadrado.

$$\text{espectrograma}(t, \omega) = |STFT(t, \omega)|^2 \equiv |X(t, \omega)|^2. \quad (27)$$

4. Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se logró establecer la correcta correlación de las componentes real e imaginaria de la transformada de Fourier con la señal de senos o cosenos (ver Figs. 1, 2). Esto fue visto tanto en la forma analítica como en la forma discreta de la transformada (ver Fig. 3). Se explicaron los altos de los picos de la transformada en el caso discreto y su relación con las ecuaciones analíticas [ver ecuaciones (13, 14)]. También se pudo ver la concordancia exacta del espectro de potencias analítico y discreto (ver Fig. 4).

Con respecto a los parámetros que afectaron la transformada discreta se encontró que el más relevante es el periodo de toma de datos (ver Fig. 5). De esta forma cuando se tomó un múltiplo no entero del periodo de la señal se obtuvieron cambios en la transformada. Pese a esto, se observó que el espectro de potencias sí mantuvo sus picos principales en concordancia con el espectro analítico (ver Fig. 6).

En el tratamiento de la señal con ruido confirmó que la transformada de la función de autocorrelación reproduce correctamente el espectro de potencias de la señal pura (ver Fig. 9). Se observó además que a partir de un valor de $\alpha = 8$ en adelante la señal pierde la intensidad de los picos de sus armónicos principales en su transformada de Fourier (ver Figs. 10, 11). Se encontró que este valor de α donde se pierde la señal es bastante cercano al valor máximo de la señal sin ruido [ver ecuación (19) y Fig. 7].

Finalmente, para los eventos electroatmosféricos se encontró que la transformada de Fourier fue similar para los datos de las distintas antenas (ver Fig. 12). Esto implicó que la señal no se modificó demasiado en su trayecto desde su punto de origen hasta cada antena. Por último se planteó como propuesta realizar el espectrograma de las señales medidas, Para lo cual se plantearon las ecuaciones analíticas y discretas (25, 26, 27).

Es importante mencionar que para el desarrollo de este trabajo se usó la hoja guía de la asignación [2] y el libro del curso [3]. Al mismo tiempo, se pueden encontrar varios de los códigos en los repositorios de GitHub de [AndresGuarin](#) y [TareasCursos20B](#).

Referencias

- [1] Landau R., Páez M., and Bordeianu C. *Computational Physics: Problem solving with Python*, chapter 12, pages 275–306. John Wiley & Sons, 2015.
- [2] Luis A. Núñez. Asignación 1 entre rayos, señales y ruido. 2022.
- [3] Hector Hernández and Luis A. Núñez. *Matemáticas Avanzadas: Variable Compleja, Series y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, con aplicaciones en Maxima*, chapter 3. Universidad industrial de Santander - Universidad de los Andes, 2021.