Oscilaciones amortiguadas de un líqudio en un tubo con forma de U

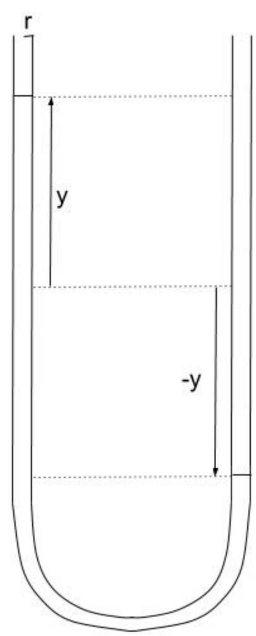
Gómez Arias, Andrés

25 de octubre de 2017

Resumen

1. Introducción

El fenómeno a analizar es el siguiente:



Se tiene un tubo en U de sección transversal uniforme con agua, que en reposo está a cierto nivel que tomaremos como el cero de la altura. A continuación se succiona de un lado, haciendo que la columna se mantenga a una altura inicial y la columna del otro lado se mantenga a la misma altura, pero en sentido opuesto, manteniéndose en reposo. Se libera la succión y el flujo cae. El propósito es analizar el movimiento que describe el nivel del agua e intentar modelar la altura como función del tiempo, tomando en cuenta la fricción con el tubo, pero suponiendo que el fluido es incomprensible y que su movimiento es homogéneo (toda sección transversal a la capa superior se mueve a la misma velocidad). De esta manera, basta con modelar el movimiento de un lado del tubo, puesto que el movimiento del otro lado es el mismo, pero con signo negativo.

Cuando el líquido está a una cierta altura y distinto de cero, hay un desequilibrio de fuerzas debido a la asimetría de la distribución del peso, que inicia a partir de la altura -y. Así, todo el líquido (tomando como .eje chueco.ªl tubo en u) siente una fuerza hacia abajo igual al peso asimétrico, que es igual a $2y(\frac{1}{2}\pi r^2)\rho g$. Con r el radio del tubo y ρ la densidad del fluido; esto es análogo a una fuerza de un resorte dado por $-ky$. Por otra parte, se tomará como modelo de fricción una fuerza que es proporcional a $\dot{y}$, pero en sentido contrario. Es decir, tiene la forma $-c\dot{y}$. Así, debido a que el fluido se mueve de manera uniforme, las fuerzas se aplican a toda la masa del fluido. Por lo tanto, la ecuación de movimiento tiene la forma:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0 \tag{1}$$

Con $y(0) = y_0$ y $\dot{y}(0) = 0$, y la condición de que $c^2 < 4km$ (es decir, la fuerza del resorte es mayor que la fuerza de fricción), ésta ecuación tiene como soulción:

$$y(t) = \frac{2y_0\sqrt{km}}{\sqrt{4km - c^2}} \exp\big(-\frac{c}{2m}t\big) cos\Bigg(\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}t - arcsin\Big(\frac{c}{2\sqrt{km}}\Big)\Bigg) \tag{2}$$

Que en términos simples, es una ecuación de la forma:

$$y(t) = A\exp(-rt)cos(ft - p) \tag{3}$$

Si se tienen errores o variaciones en los parámetros A, r, f y p dados por dA, dr, df y dp, entonces el error implicado en y, dado por dy que ésta causado por éstas variaciones, está dado por el método de cuadratura de derivadas parciales y es:

$$dy = A\exp(-rt)\sqrt{cos^2(ft-p)\Big(\frac{dA^2}{A^2} + t^2dr^2\Big) + sin^2(ft-p)(dp^2 + t^2df^2) + (rcos(ft-p) + fsin(ft-p))^2dt^2} \tag{4}$$

el cual tiene incluido el error de medición en el tiempo, dado por la mitad de la mínima escala, por lo que depénde de él.

El modelo describe oscilaciones amortiguadas con frecuencia constante, pero con amplitud exponencialmente decreciente. Así, se comprobará que el movimiento es de ese tipo, que tiene frecuencia constante que no depende de la amplitud inicial y además se comparará cómo cambia el coeficiente de fricción cuando (utilizando un mismo líquido) se realiza el experimento con diferentes tubos con respecto a material y anchura.

2. Procedimiento

Se fijaron dos extremos de una manguera a dos soportes universales, de manera que sirviera como tubo en U. Se tuvo cuidado con que no hubiera dobleces o deformaciones. Se rellenó hasta la mitad de agua, se succionó de un lado y se tapó con el dedo, para mantener la presión y el nivel del agua inicialmente en reposo. Así, se soltó el tubo y se grabó el movimiento con una cámara ajustada a un soporte universal, y estabilizada de los lados para evitar vibraciones. Ésto se realizó para una manguera de silicón (tubo 1), una de pecera (tubo 2) y un tubo en U de vidrio (Tubo 3) y en cada tubo se repitió con 4 diferentes amplitudes iniciales, obteniendo 12 diferentes movimientos.

El movimiento del menisco superior fue interpolado usando el programa Tracker, tomando como el cero la altura final que prácticamente está en reposo. Así, se ajustó el conjunto de datos al modelo utilizando la paquetería de análisis estadístico de Python: Numpy, obteniendo los ajustes para A, r, f y p.

3. Datos experimentales

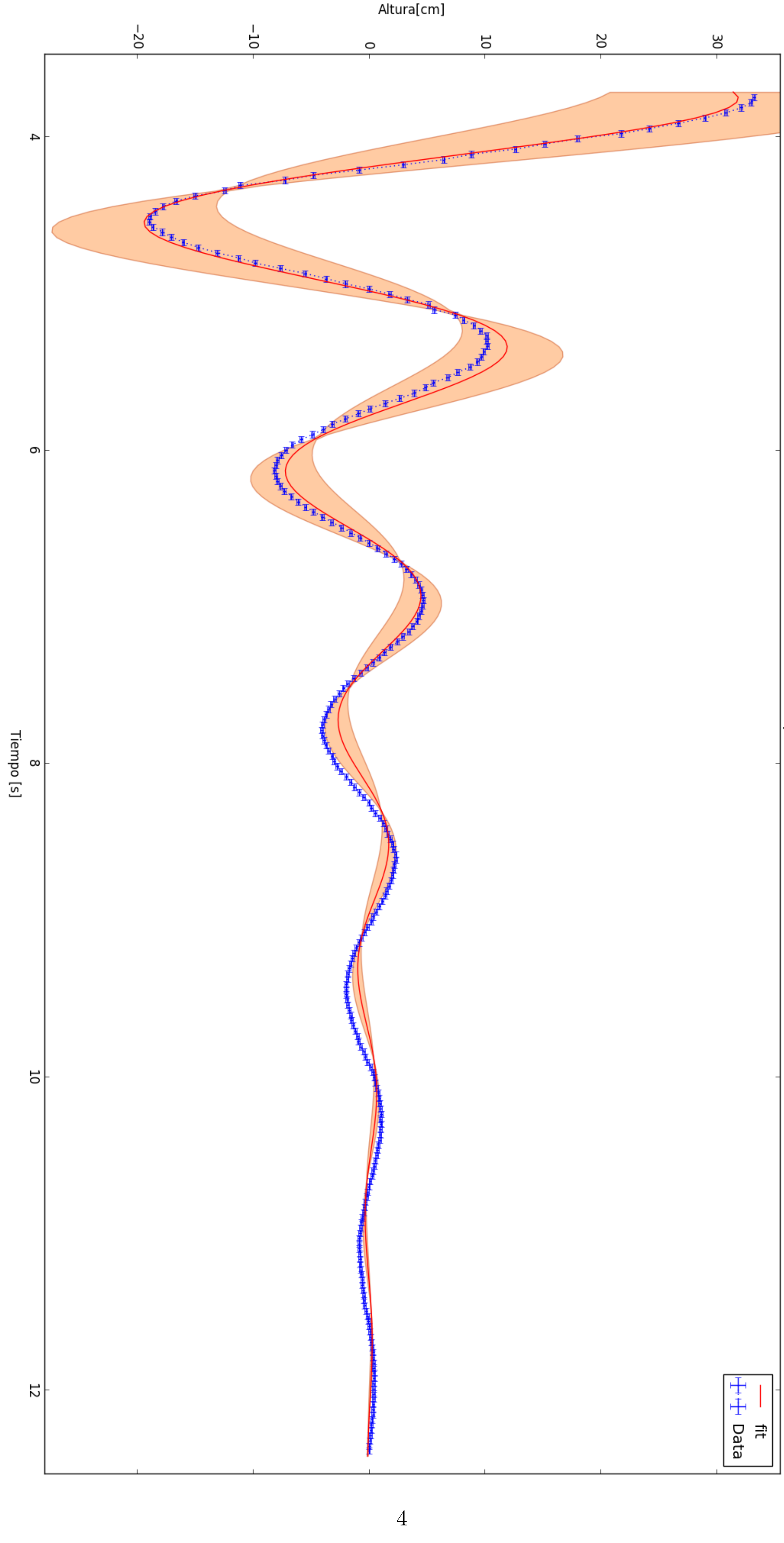
A continuación se muestran los datos experimentales (en azul) de la altura con respecto al tiempo junto con su ajuste al modelo (rojo). El error del ajuste está denotado por barras naranjas y éste está dado por la ecuación 4, utilizando el error del ajuste en los parámetros A, r, f y p. Luego aparece la masa de agua usada en cada tubo y la constante de resorte asociada (cuya expresión está especificada en la indtroducción). El primer tubo tiene un diámetro de $0{,}840cm \pm 0{,}0025cm$, el segundo $0{,}645cm \pm 0{,}0025cm$ y el tercero $1{,}270cm \pm 0{,}0025cm$.

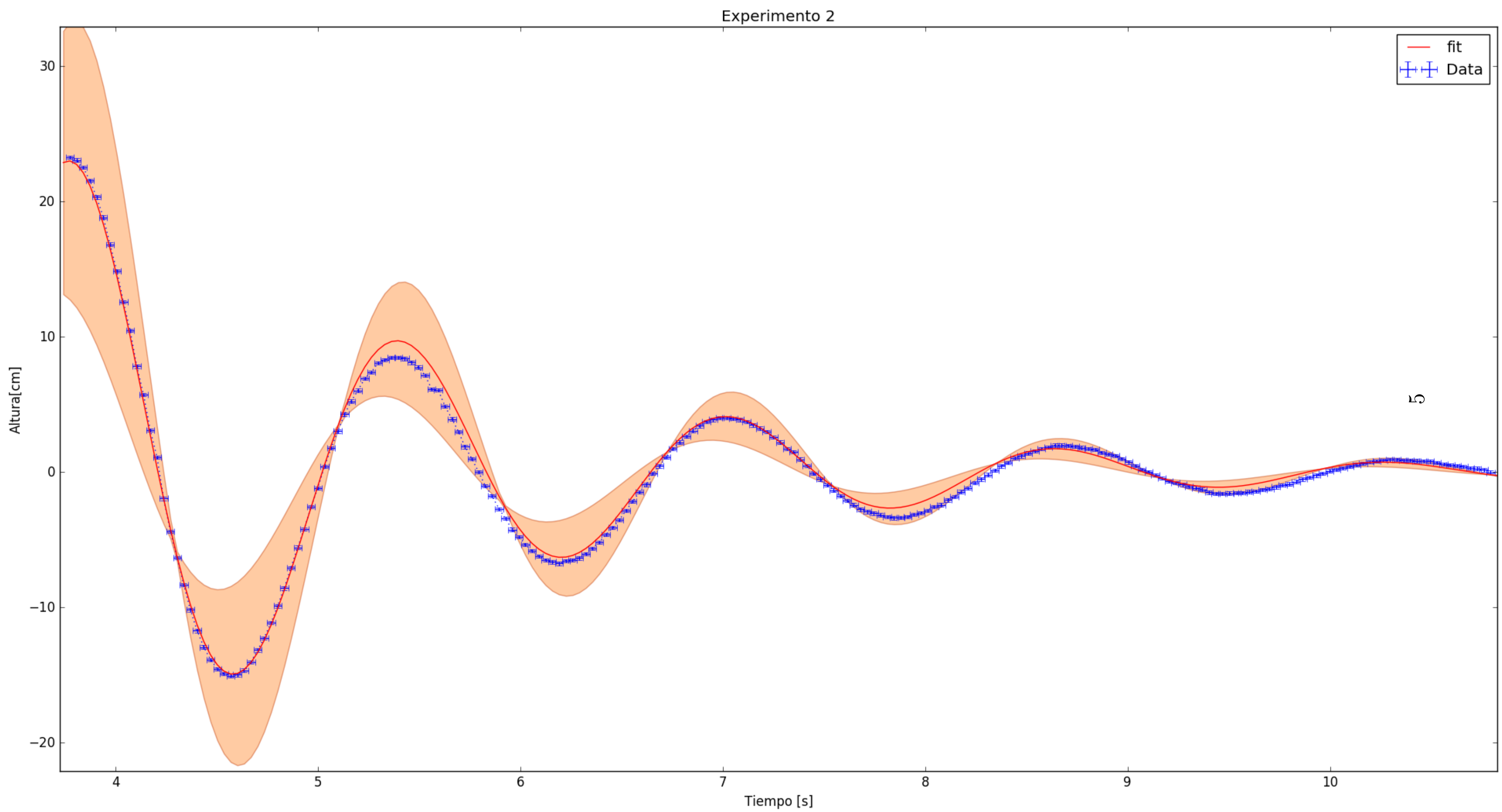
Las alturas iniciales (yo) en cm son:

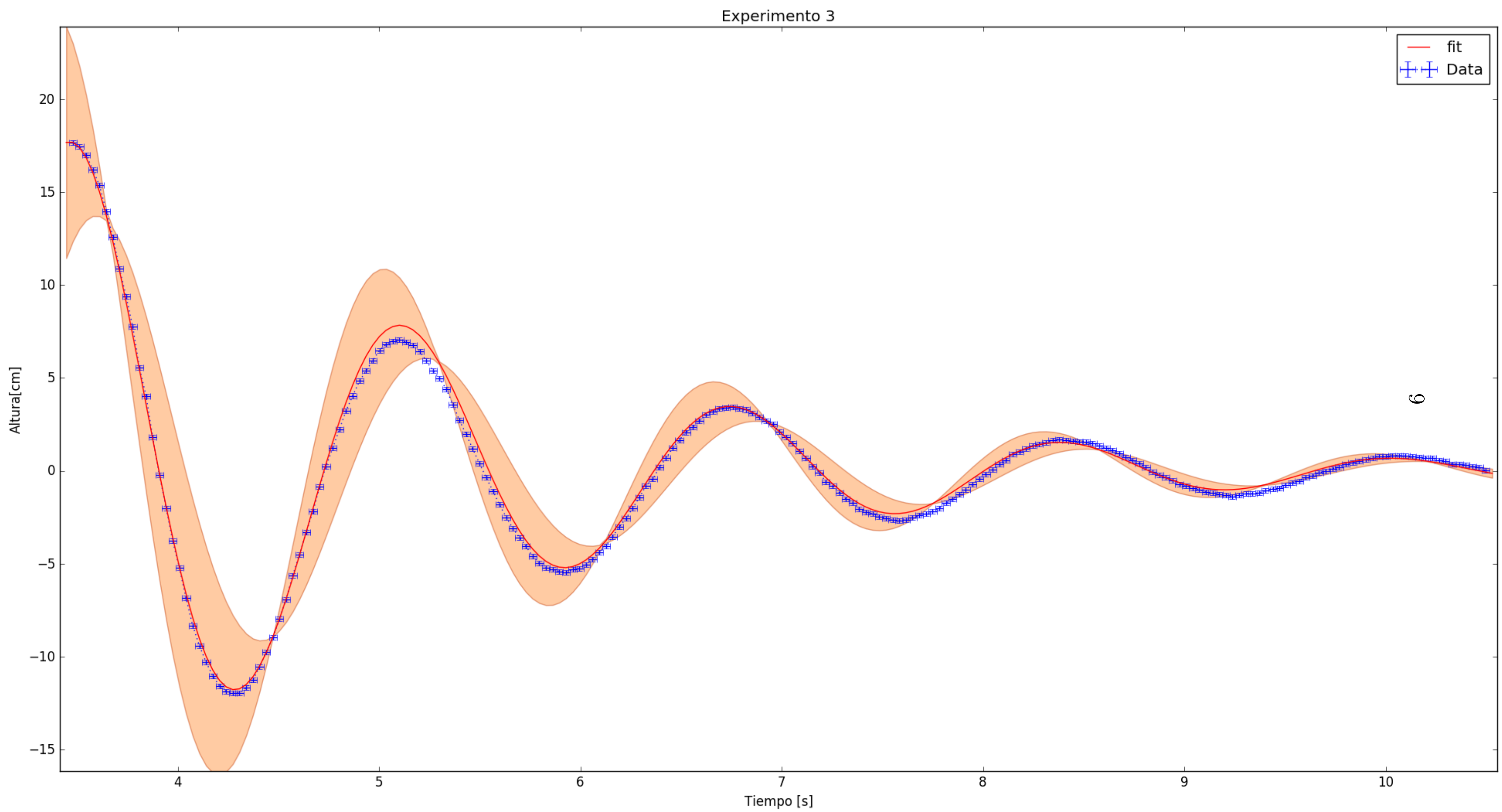
1. 33.2
2. 23.2
3. 17.7
4. 8.9
5. 23.4
6. 17.8

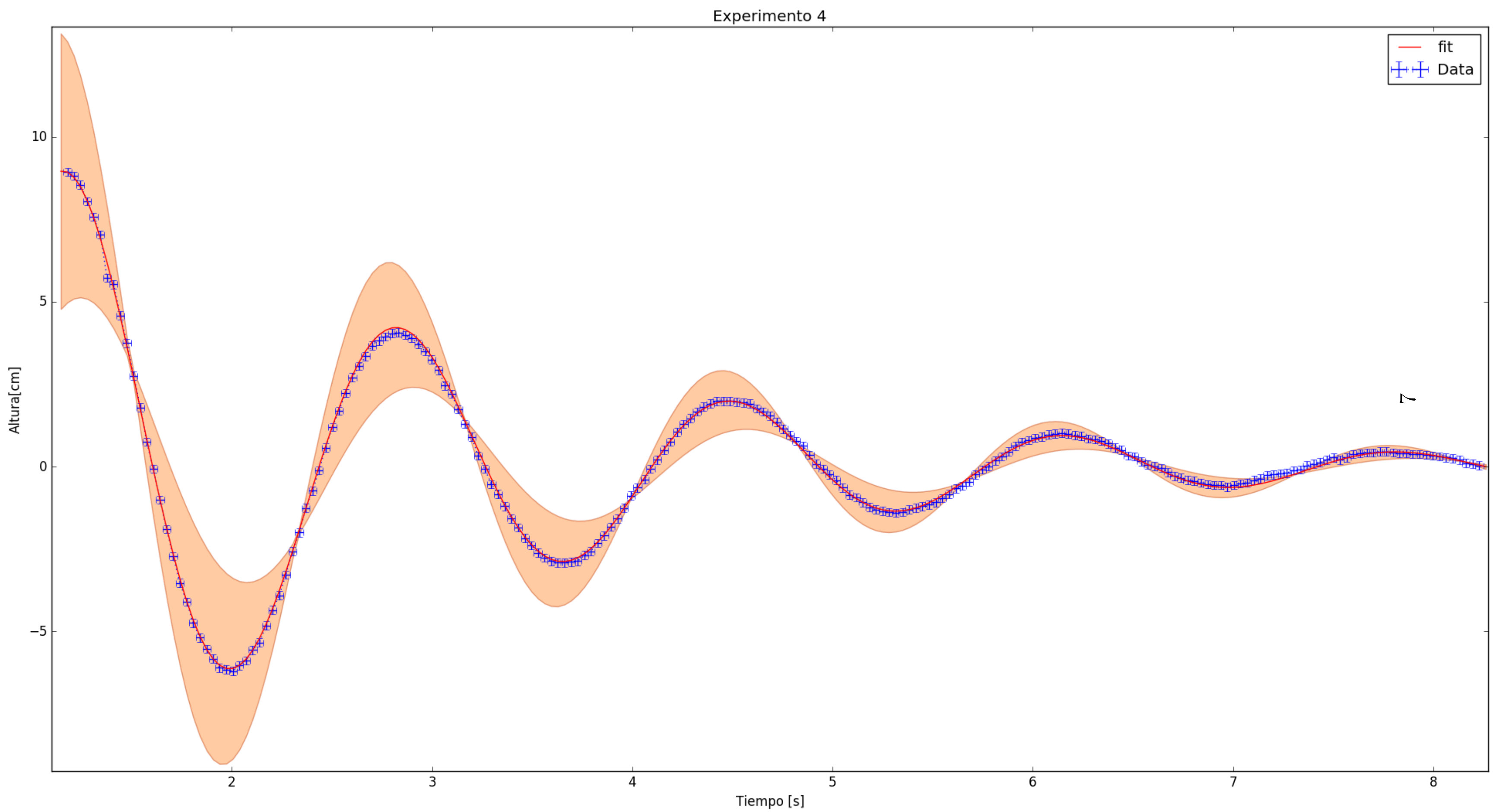
7. 11.9
8. 6.9
9. 27.7
10. 20.4
11. 15.4
12. 4.3

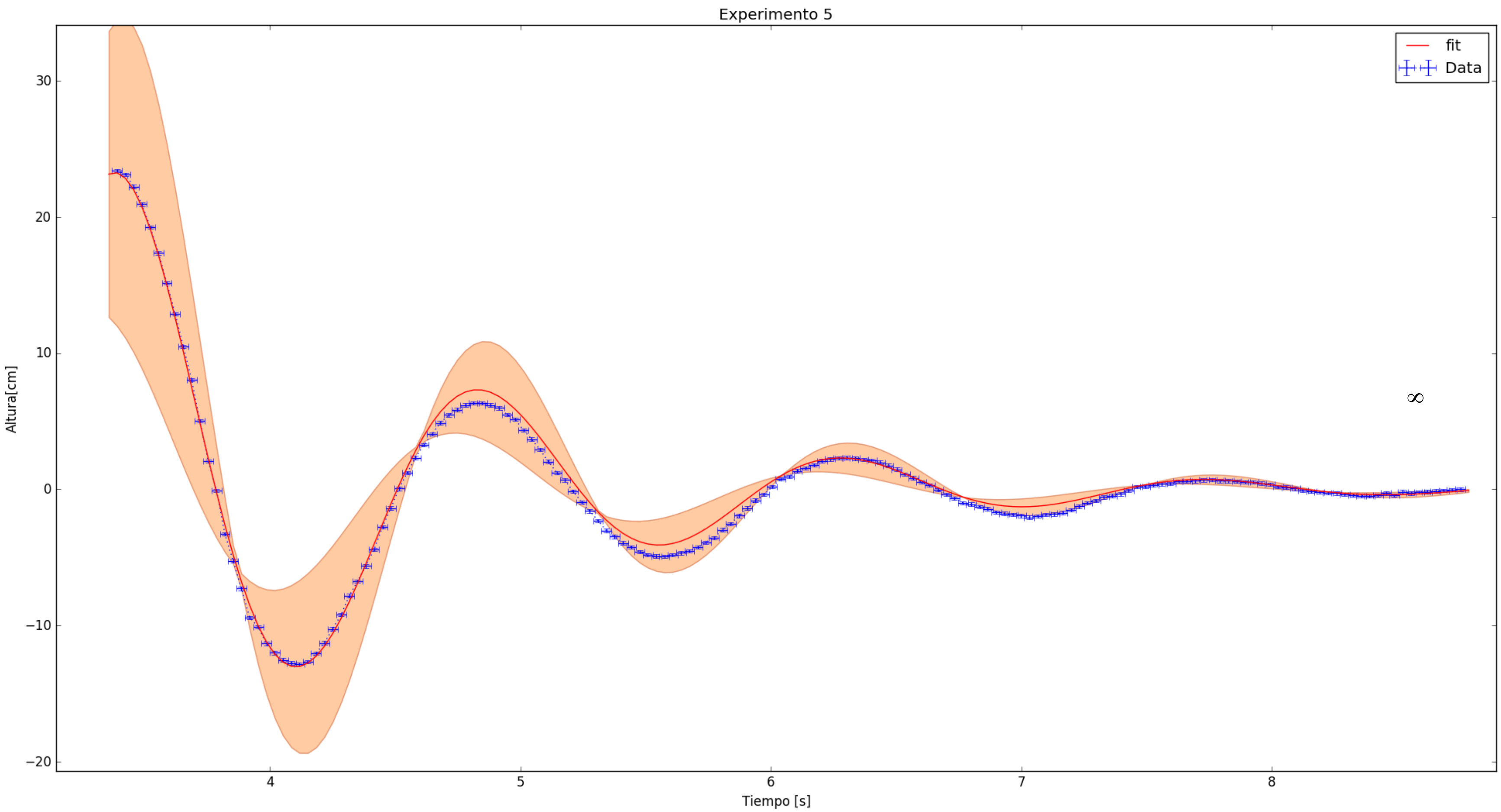
Así, los primeros 4 experimentos corresponden al tubo 1, los siguientes 4 al tubo 2 y los siguientes al tubo 3.

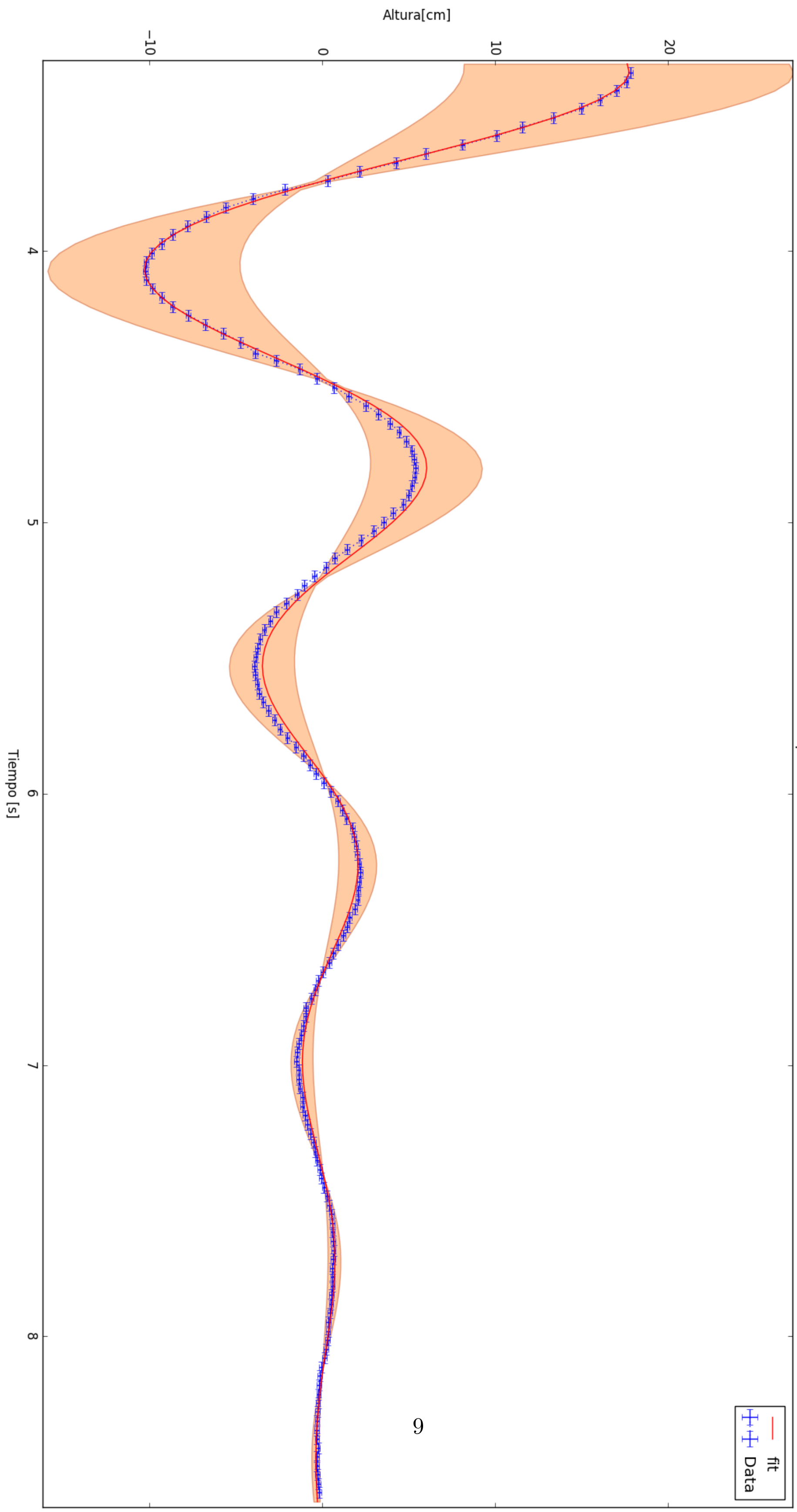

Experimento 1
Altura[cm]
Tiempo [s]
fit
Data
−20
−10
0
10
20
30
4
6
8
10
12

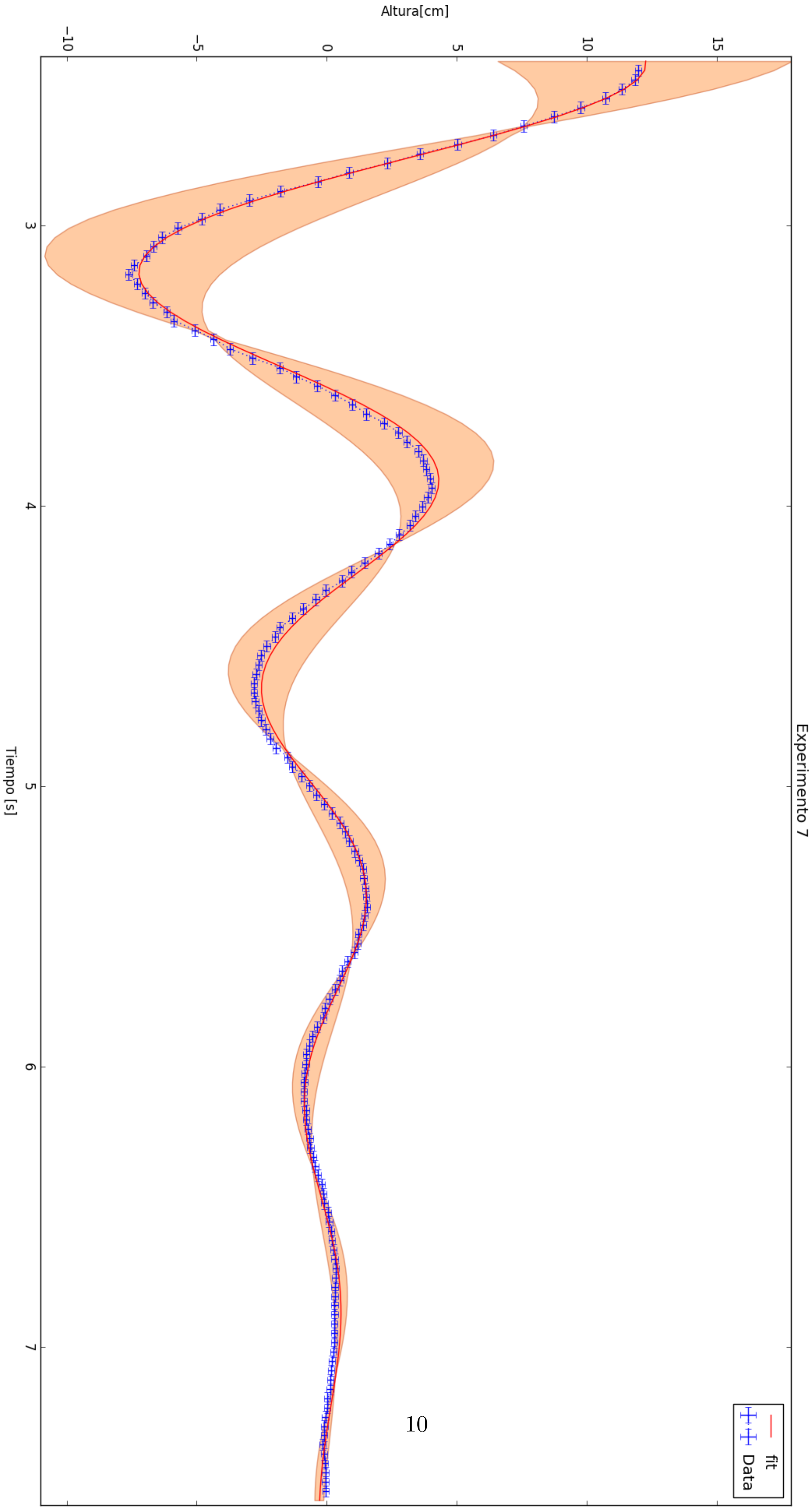

Experimento 2
fit
Data
Altura[cm]
30
20
10
0
−10
−20
Tiempo [s]
4
5
6
7
8
9
10


Experimento 3
fit
Data
Altura[cm]
Tiempo [s]
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
4
5
6
7
8
9
10

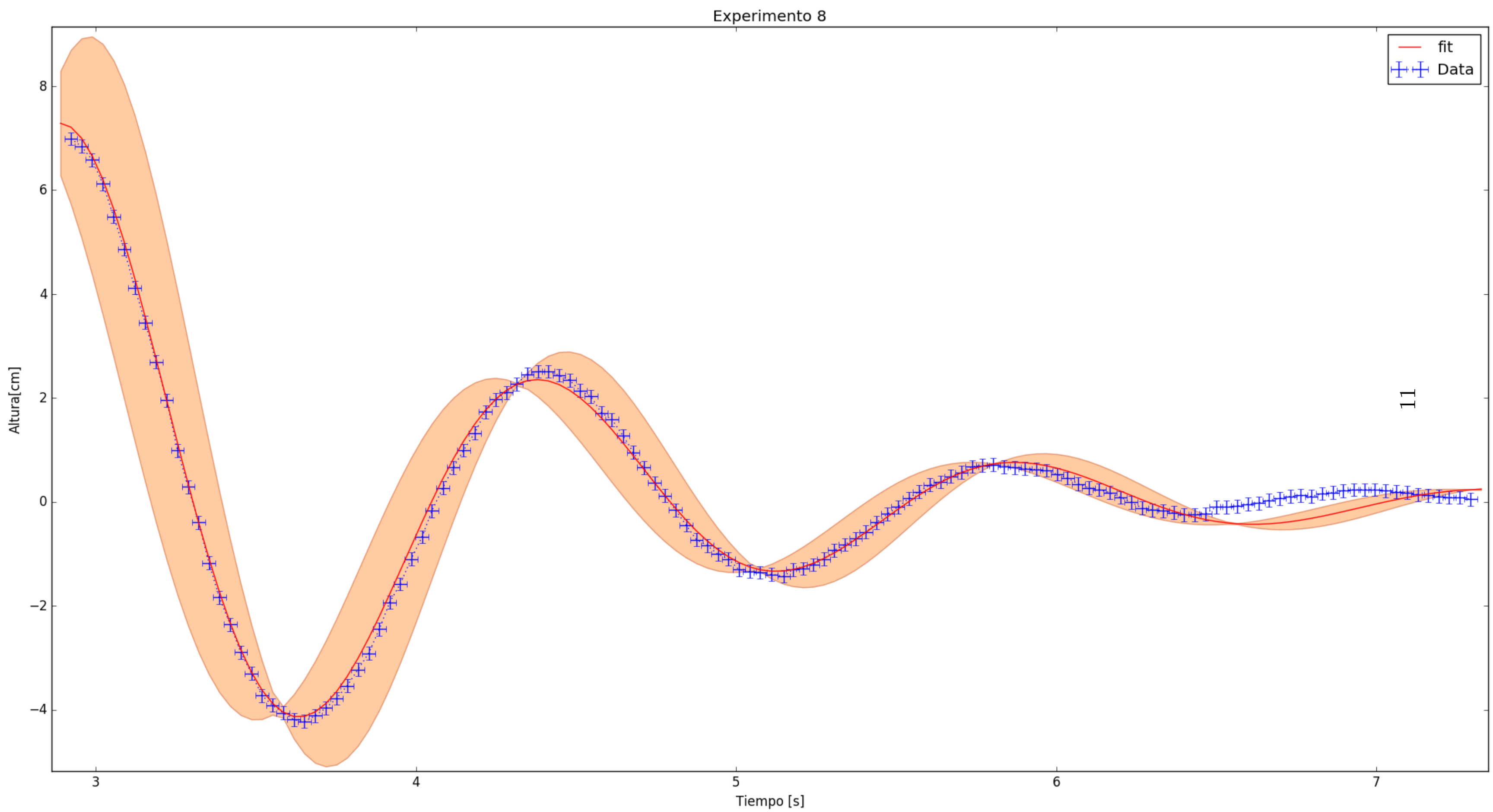

Experimento 4
fit
Data
Altura[cm]
Tiempo [s]
10
5
0
−5
2
3
4
5
6
7
8

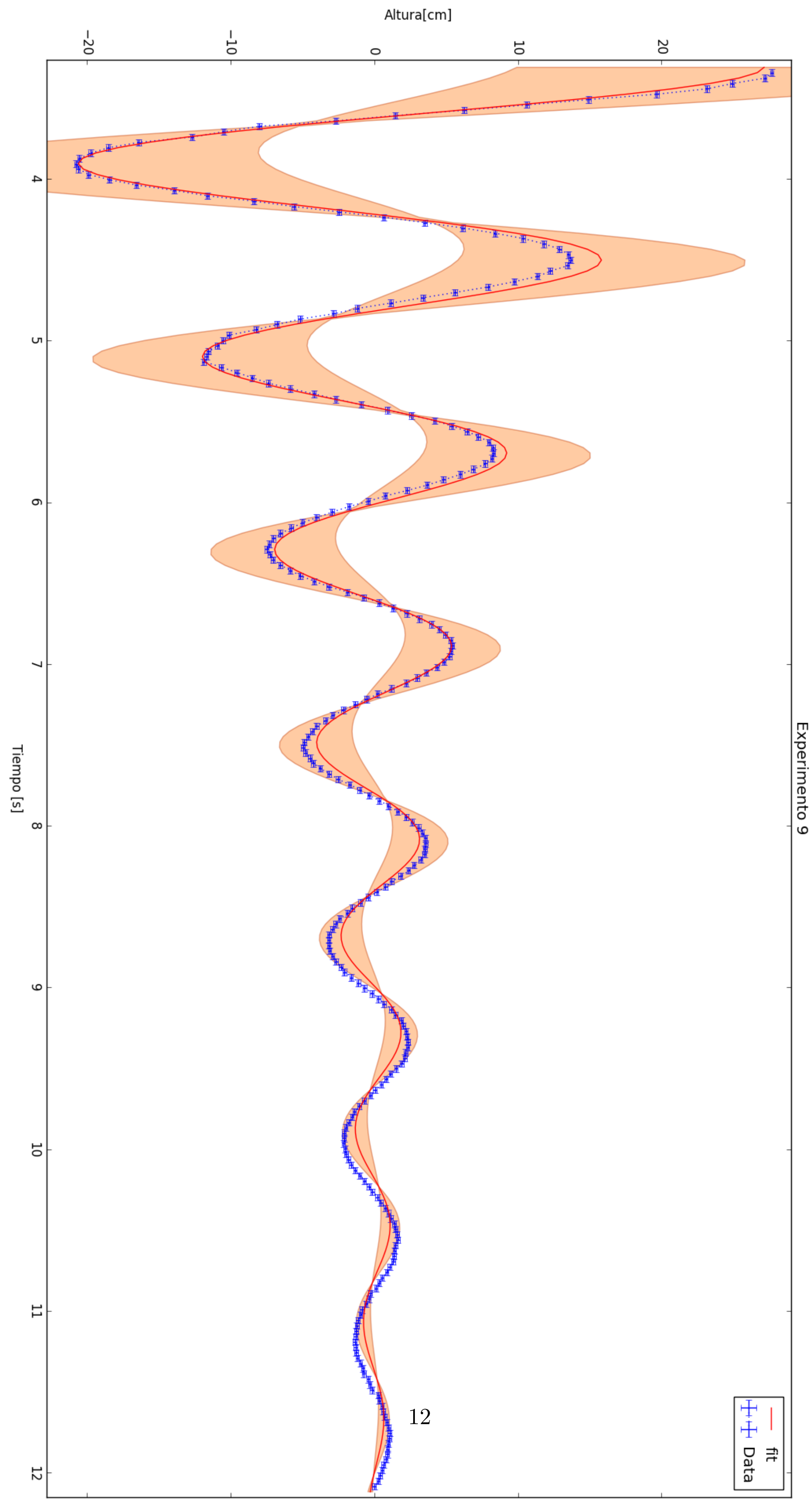

Experimento 5
Altura[cm]
Tiempo [s]
fit
Data
30
20
10
0
−10
−20
4
5
6
7
8

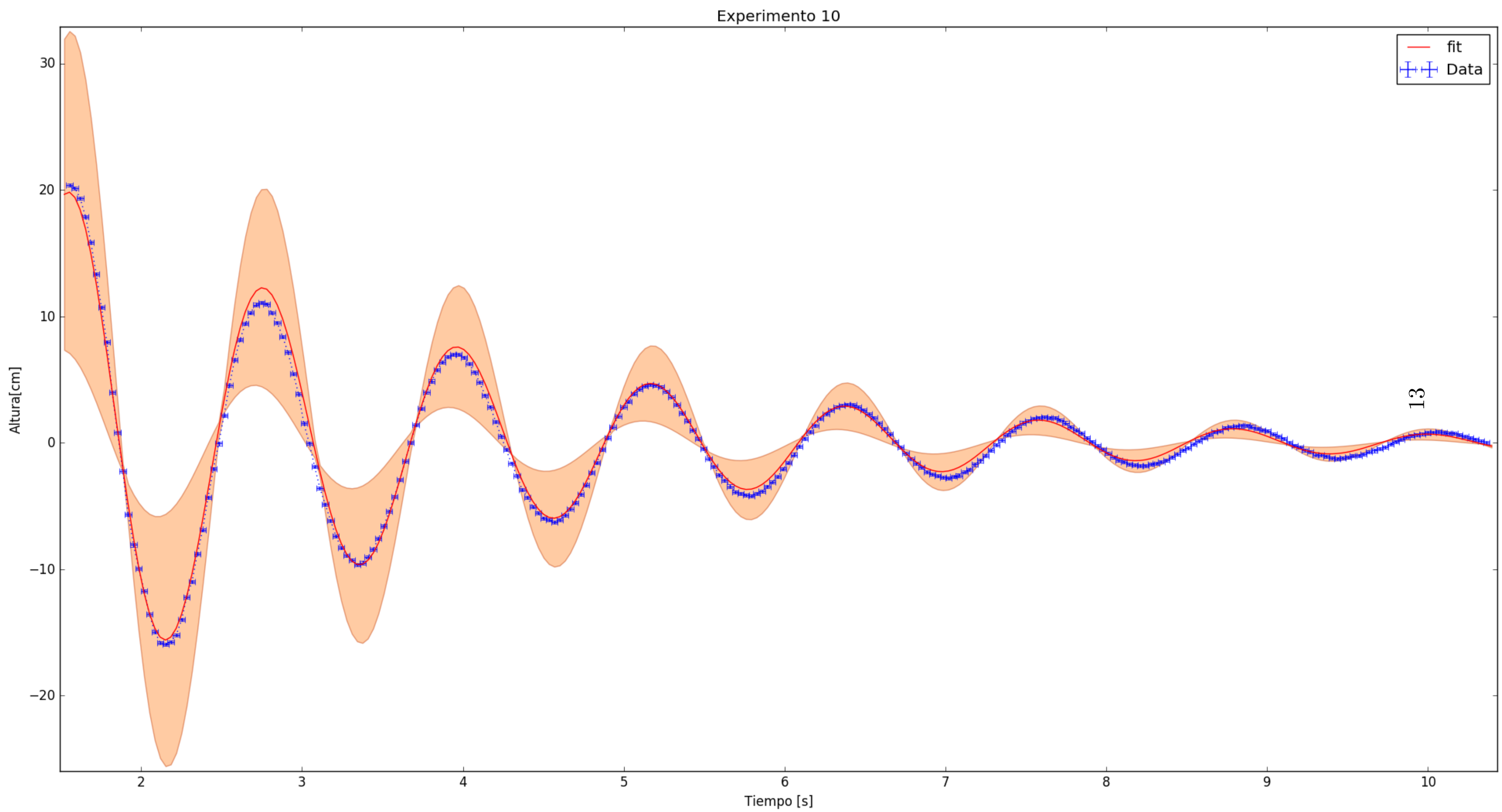

Experimento 6
fit
Data
Altura[cm]
Tiempo [s]
20
10
0
−10
4
5
6
7
8

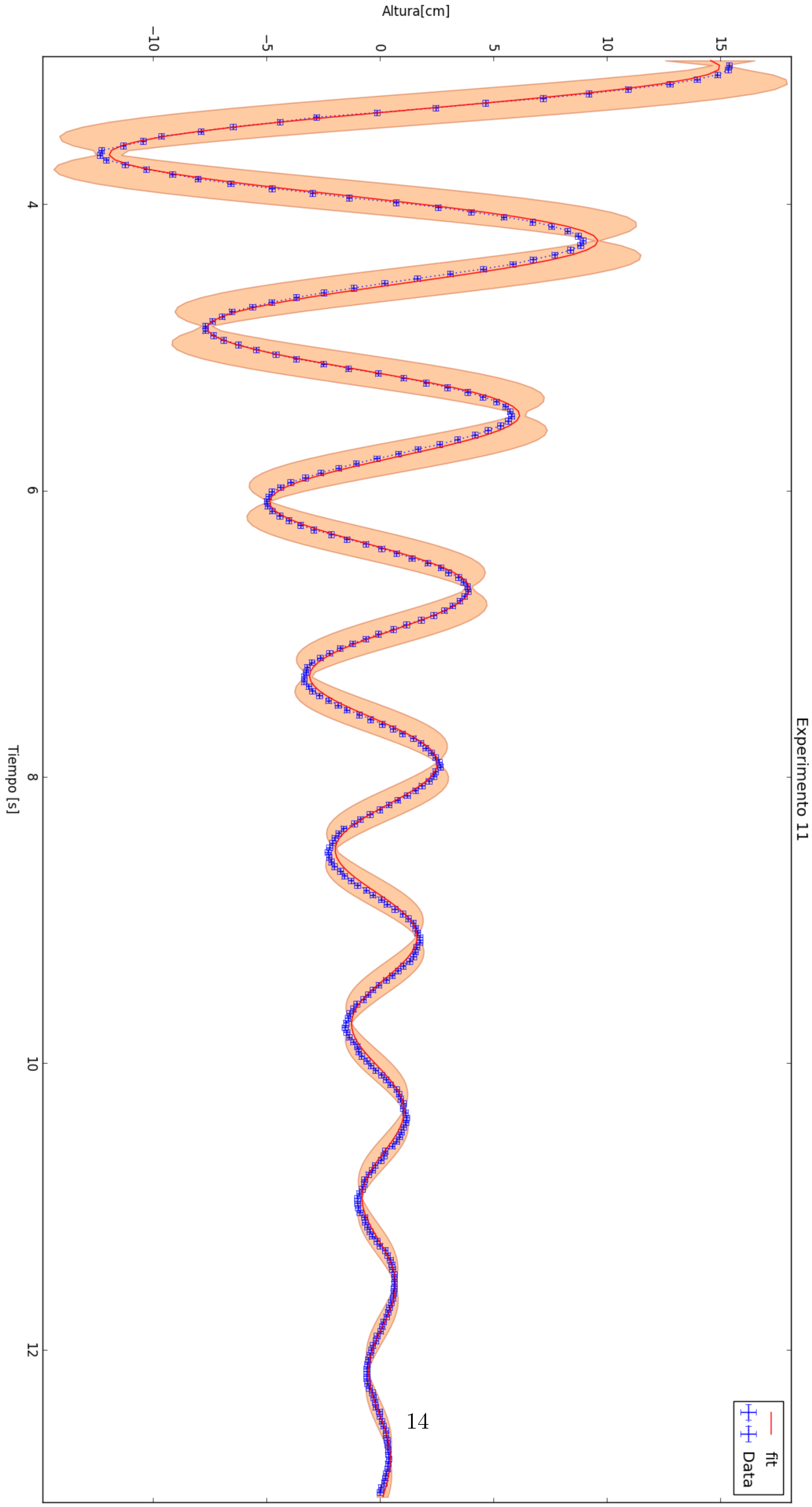


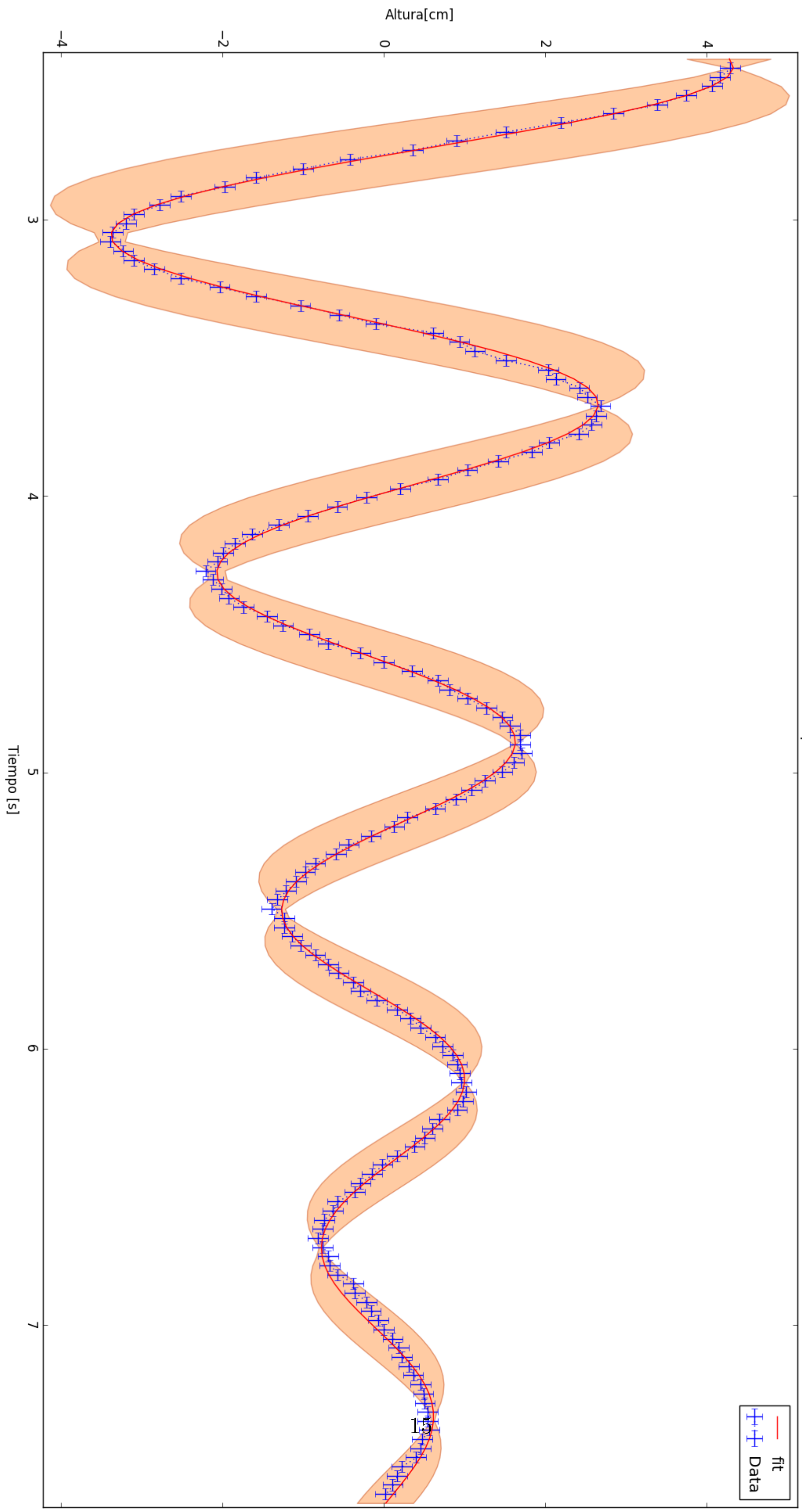
Experimento 7
Altura[cm]
Tiempo [s]
fit
Data
−10
−5
0
5
10
15
3
4
5
6
7


Experimento 8
fit
Data
Altura[cm]
Tiempo [s]
8
6
4
2
0
−2
−4
3
4
5
6
7


Experimento 9
Altura[cm]
Tiempo [s]
fit
Data


Experimento 10
fit
Data
Altura[cm]
30
20
10
0
−10
−20
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Tiempo [s]


Experimento 11
Altura[cm]
Tiempo [s]
fit
Data
−10
−5
0
5
10
15
4
6
8
10
12


Experimento 12
fit
Data
Altura[cm]
Tiempo [s]
4
2
0
−2
−4
3
4
5
6
7

Tubo	m[g]	dm[g]	k[g/s^2]	dk[g/s^2]
1	67	0.7	0.05	0.04
2	30g	0.7	0.03	0.03
3	84	0.7	0.12	0.07

	Num	A[cm]	dA	r[s^-1]	dr
	1	32.39	0.094	0.62	7.6e-05
	2	23.21	0.035	0.53	4e-05
	3	17.8	0.014	0.5	2.4e-05
	4	8.97	0.00077	0.45	4.2e-06
	5	23.45	0.044	0.8	0.00011
	6	17.96	0.013	0.74	5e-05
	7	12.23	0.0064	0.71	4.6e-05
	8	7.23	0.006	0.76	0.00014
	9	26.8	0.088	0.45	5.2e-05
	10	19.88	0.027	0.4	2.3e-05
	11	15.08	0.0065	0.37	8.3e-06
	12	4.33	0.00073	0.4	1.6e-05

f[s^-1]	df	phi[-]	dphi
3.96	9.8e-05	15.03	0.0022
3.87	4.8e-05	14.73	0.0011
3.83	2.8e-05	13.4	0.0006
3.78	4.8e-06	4.49	3.2e-05
4.34	0.00015	14.83	0.0025
4.3	6.6e-05	14.54	0.0011
4.24	5.8e-05	13.6	0.00064
4.22	0.00018	15.3	0.0024
5.26	5.3e-05	20.64	0.0011
5.21	2.4e-05	8.14	0.00023
5.17	9.1e-06	15.81	0.00019
5.14	1.8e-05	12.66	0.00026

Es importante mencionar que, dado que conocemos todos los parámetros de la ecuación 2 a excepción de c, se podría haber hecho un ajuste únicamente para c. Esto fue lo que inicialmente fue concebido, pero como se puede ver en la ecuación (2), las variaciones en c cambian de manera bastante caótica el comportamiento del modelo, por lo que el programa que hace el ajuste se pierde y obtiene términos con covarianzas infinitas. Por otra parte, al ajustar a los parámetros dados por la ecuación (3) se pueden obtener mejores interpretaciones físicas de los ajustes y aún así, conociendo m, se puede obtener c mediante r.

4. Resultados

De inmediato se puede ver que los datos ajustan muy bien a una ecuación de la forma dada en (3). Los datos quedan dentro del error de los parámetros el máximo desajuste (si existe) está ubicado normalmente en la parte final de la gráfica, cuando las oscilaciones son muy pequeñas. Esto probablemente se debe a que la idealización del modelo tiene errores notables para desfases de tiempos grandes, cuando efectos no lineales que al principio eran despreciables, empiezan a ser aparentes. Aún así, esos pequeños desajustes son aceptables. Este ajuste comprueba que la ecuación (1) describe muy bien el movimiento de la columna de agua. Esto implica que el fenómeno tiene una frecuencia constante y oscila con amplitudes exponencialmente decrecientes. La parte de los parámetros es otra historia.

A simple vista, los valores obtenidos para A efectivamente disminuyen con la amplitud inicial, los de r, f y $sen(p)$ no parecen depender de experimentos realizados con un mismo tubo, a excepción de unas pocas variaciones, dependen de propiedades intrínsecas del tubo y de la masa de agua. Nota: nos interesa $sen(p)$ porque recordemos que p es igual a un arcoseno, función cuya imagen no coincide con muchos valores. Esto se restaura al aplicar el seno y obtener el valor del argumento, que es lo que nos interesa. Aún así, $sen(p)$ si tiene variaciones considerables entre experimentos de un mismo tubo, pero se sospecha que esto se debe principalmente a errores para colocar el cero en el tiempo, que cambian entre experimentos. Éstos errores no afectan a los demás parámetros y p realmente no tiene una gran significancia física, por lo que es aceptable ignorarlo.

5. Discusión

Los valores obtenidos para A demuestran que dependen linealmente de la amplitud inicial yo. De hecho, se puede observar que salvo errores muy pequeños, $A \approx y_o$. Esto nos dice que el otro término es aproximadamente 1 en los casos estudiados, es decir $c^2 \ll 4km$ y aquí es donde las limitaciones del ajuste se destacan. Calculando $c = 2mr$ se obtiene exactamente lo contrario, de hecho, saldrían raíces negativas en los términos de la ecuación. Esto no implica que el modelo en sí esté mal, sino que c juega un papel muy importante en todos los parámetros, pero variaciones pequeñas pueden llevar a divisiones entre cero o a raíces negativas. No sólo eso, esos límites están completamente determinados por los valores medidos k y m, los cuales tienen también variaciones alrededor del valor exacto, pero esas variaciones no toman un papel en el ajuste. Así, una subdeterminación de k y m acota estrictamente a un valor menor al que debería ser. Así, al aumentar el valor de c en el ajuste, la ecuación llega a un polo y rompe el ajuste. Éste mismo error de colocar el cero en el tiempo si fue tomado en cuenta en el argumento de la exponencial, por lo que no debe haber preocupaciones por ése parámetro.

Ahora, el valor de c obtenido mediante éste método para el primer tubo varía entre 60,3s^-1 y 83,08s^-1, para el segundo está entre 42,6s^-1 y 48s^-1 y el tercero entre 62,16s^-1 y 75,6s^-1. Ésto nos dice que el tubo 2 es el que menor fricción sintió. Notemos que el valor de c tendió a bajar cuando disminuyó la amplitud inicial; es decir, hubo menos fricción. Esto se debe probablemente a que había otro efecto presente. Cada que la columna disminuía, una capa de agua se quedaba adherida al tubo y se deslizaba lentamente; cuando la columna volvía a subir, su momento se combinaba con la de esa agua que caía y se frenaba. Así, se tenía una fricción que aumentaba con la amplitud máxima de la columna, lo que se vió reflejado en el valor de c.

Los valores de f obtenidos indican que no dependen de la altura inicial, sino de las propiedades del tubo y de la masa del agua, como se esperaba teóricamente.

6. Conclusión

En general se obtuvieron resultados favorables, bajo la hipótesis de que los términos del ajuste de (3) están directamente relacionados por los términos de (2). El movimiento de una columna de agua en un tubo en U se puede modelar con una ecuación como (1) con ajustes muy favorables, pero obtener c al hacer un ajuste conociendo los demás parámetros no es recomendable a menos que se tengan mejores algoritmos. Se obtuvo que A depende efectivamente de y_0 en forma lineal, que la frecuencia no cambia con la amplitud ni el tiempo y que el tubo 2 es el que menos fricción tiene, mientras que el tubo 1 bajo una variación es el que más tiene.