

Densidad, viscosidad y la Ley de Stokes

Gómez Arias, Andrés

Camacho Castañeda, Yolteotl

6 de noviembre de 2017

Resumen

Se encuentran las frecuencias de resonancia dada una cuerda tensada y oscilando con un vibrador. Se encuentra la relación teórica y se demuestra experimentalmente al dejar fijos los parámetros excepto 1 y ajustando a la frecuencia como función de ese parámetro. Todo eso realizado para cada parámetro. Los resultados de las potencias involucradas son satisfactorias, con errores despreciables, pero bastante exactos dados los problemas con la inestabilidad o sobreestabilidad encontrada en los modos de resonancia.

1. Introducción

El objetivo es encontrar como se relacionan las variables de frecuencia, longitud de onda, tensión y densidad lineal de distintas cuerdas en el fenómeno de vibración. Para esto se realizaron experimentos donde se fueron modificando solamente 2 de dichas variables y dejando el resto constante encontrando los puntos de resonancia.

La resonancia es el fenómeno en el que las ondas de un movimiento periódico se suman de forma constructiva para aumentar de manera significativa la amplitud de la onda. Esto ocurre cuando la fase de la onda inicial coincide con la fase del movimiento periódico. Encontrar los puntos de resonancia ayudó a asegurarnos que estuvieramos en la frecuencia adecuada para el número de nodos correspondiente.

Un nodo es un punto en la onda o vibración el cual se mantiene fijo. En la vibración de una cuerda los puntos inicial y final, en los que la cuerda se encuentra amarrada son nodos.

La frecuencia f es el inverso del tiempo que tarda la onda en repetirse, es decir, cuantas veces se repite la onda en cada unidad de tiempo. La frecuencia se mide en $s^{-1} = Hz$. La longitud de onda es la distancia que existe entre dos puntos que se encuentran en momentos equivalentes de una onda, por ejemplo la distancia entre dos crestas que son los puntos más altos de la onda, lo mismo es cada 2 nodos.

Entre la frecuencia y la longitud de onda existe una relación de proporcionalidad. Dicha relación de proporcionalidad es de tipo inversa.

La tensión de la cuerda F es la fuerza que la mantiene estirada y que la cuerda aplica en su otro extremo. La frecuencia de vibración y la tensión de la cuerda tienen una relación de proporcionalidad, pero esta relación es directa pero en raíz cuadrada.

La densidad lineal μ de la cuerda es la cantidad de masa que tiene la cuerda entre la longitud que mide. Para que tenga sentido se asume que la cuerda es uniforme y que en longitudes iguales las masas son iguales. La frecuencia y la densidad lineal de la cuerda tienen una relación de proporcionalidad de forma inversa y en raíz cuadrada.

La rapidez de una onda en una cuerda estirada [1] es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (1)$$

y la frecuencia del modo de resonancia en una onda estacionaria con n crestas es:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \quad (2)$$

con la longitud de onda $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, L la longitud de la cuerda.

Combinando las ecuaciones 2 y 3 obtenemos que:

$$f_n = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (3)$$

Así, fijando respectivamente 2 de los 3 parámetros, se encontrará la relación entre f y ese tercer parámetro, demostrando que sigue la regla de una potencia al ser lineal en escala logarítmica y viendo que las potencias coinciden experimentalmente.

Variable	Lambda[m]	dLambda[m]	T[N]	dT[N]	Mu[kg/m]	dMu[kg/m]
Lambda	-	-	4.1918	0.0014	1.39E-3	1.6E-5
Tension	0.9665	2.5E-4	-	-	1.39E-3	1.6E-5
Mu	0.9665	2.5E-4	4.1918	0.0014	-	-

Lambda[m]	dLambda[cm]	f[Hz]	df[Hz]
1.933	7E-4	30.472	1
1.289	5E-4	48.644	1
0.966	4E-4	66.232	1
0.773	4E-4	82.555	1
0.644	2E-4	94.768	1
0.552	2E-4	114.91	1
0.483	2E-4	133.38	1

Figura 1: Frecuencia como función de Lambda

2. Procedimiento

Se conectó un motor a un generador de ondas de vibración. Luego se conectó al motor un adaptador por el cual se pasó una cuerda que se amarró por un extremo a un soporte. El otro extremo se pasó encima de una polea y se dejó colgando amarrado de un gancho con pesas que generan la tensión.

Se midió la longitud entre los puntos inicial y final de la cuerda, es decir, el punto donde se encuentra amarrada al soporte y al punto donde se recarga en la polea. Se encendió el generador de ondas y se modificó la frecuencia hasta encontrar la primer resonancia. Se continuó modificando la frecuencia hasta encontrar las siguientes resonancias. Luego se quitó una pesa, lo que modifica la tensión y nuevamente se buscó la primer frecuencia de resonancia y se repitió hasta quitar todas las pesas midiendo las frecuencias correspondientes a las primeras resonancias en cada caso. Después se volvieron a colocar todas las pesas y se cambió la cuerda por otra con diferente densidad y con esta se encontró la primer frecuencia de resonancia. Se repitió con todo el resto de las cuerdas y de cada una se midió la masa y longitud para obtener su densidad lineal.

3. Datos experimentales

A continuación se muestran los parámetros fijos en cada variación de uno de ellos (tabla 1), seguido de los valores de frecuencia obtenidos como función de éstos 3 parámetros, el ajuste para c y n y su representación gráfica. En ésta, los puntos azules son los datos experimentales. La línea roja es el ajuste de datos a un modelo de la forma $c \cdot x^n$, aunado con barras rojas que muestran el error de los parámetros del ajuste. La línea verde es el modelo esperado, obtenido al calcular c y n en cada caso (con los datos de la tabla 1), con su barra de error proveniente del error para medir los parámetros. Hay dos gráficas para cada ajuste: Una con escala lineal y otra con escala logarítmica. La escala lineal muestra directamente la distribución de datos y la logarítmica debe mostrar que los datos se distribuyen efectivamente como una potencia al mostrar que se distribuyen como una recta, pues al aplicar logaritmo al modelo, se obtiene una recta con pendiente igual a la potencia.

El ajuste para $f(\lambda) = c \cdot \lambda^n$ mostró que $c = 62,3600m/s \pm 9,2 \times 10^{-1}m/s$ y $n = -1,03 \pm 7,73 \times 10^{-4}$, cuando se esperaba que $c = 54,9152m/s \pm 0,6324m/s$ y $n = -1$.

El ajuste para $f(F) = c \cdot F^n$ mostró que $c = 30,9167s^{-1}N^{-1/2} \pm 1,6054s^{-1}N^{-1/2}$ y $n = 0,526 \pm 1,4 \times 10^{-3}$, cuando se esperaba que $c = 27,7518s^{-1}N^{-1/2} \pm 0,1599s^{-1}N^{-1/2}$ y $n = 0,5$.

El ajuste para $f(\mu) = c \cdot \mu^n$ mostró que $c = 2,8274kg^{1/2}m^{-1/2}s^{-1} \pm 0,553kg^{1/2}m^{-1/2}s^{-1}$ y $n = -0,64 \pm 0,001$, cuando se esperaba que $c = 2,1184kg^{1/2}m^{-1/2}s^{-1} \pm 6,52 \times 10^{-4}kg^{1/2}m^{-1/2}s^{-1}$ y $n = 0,5$.

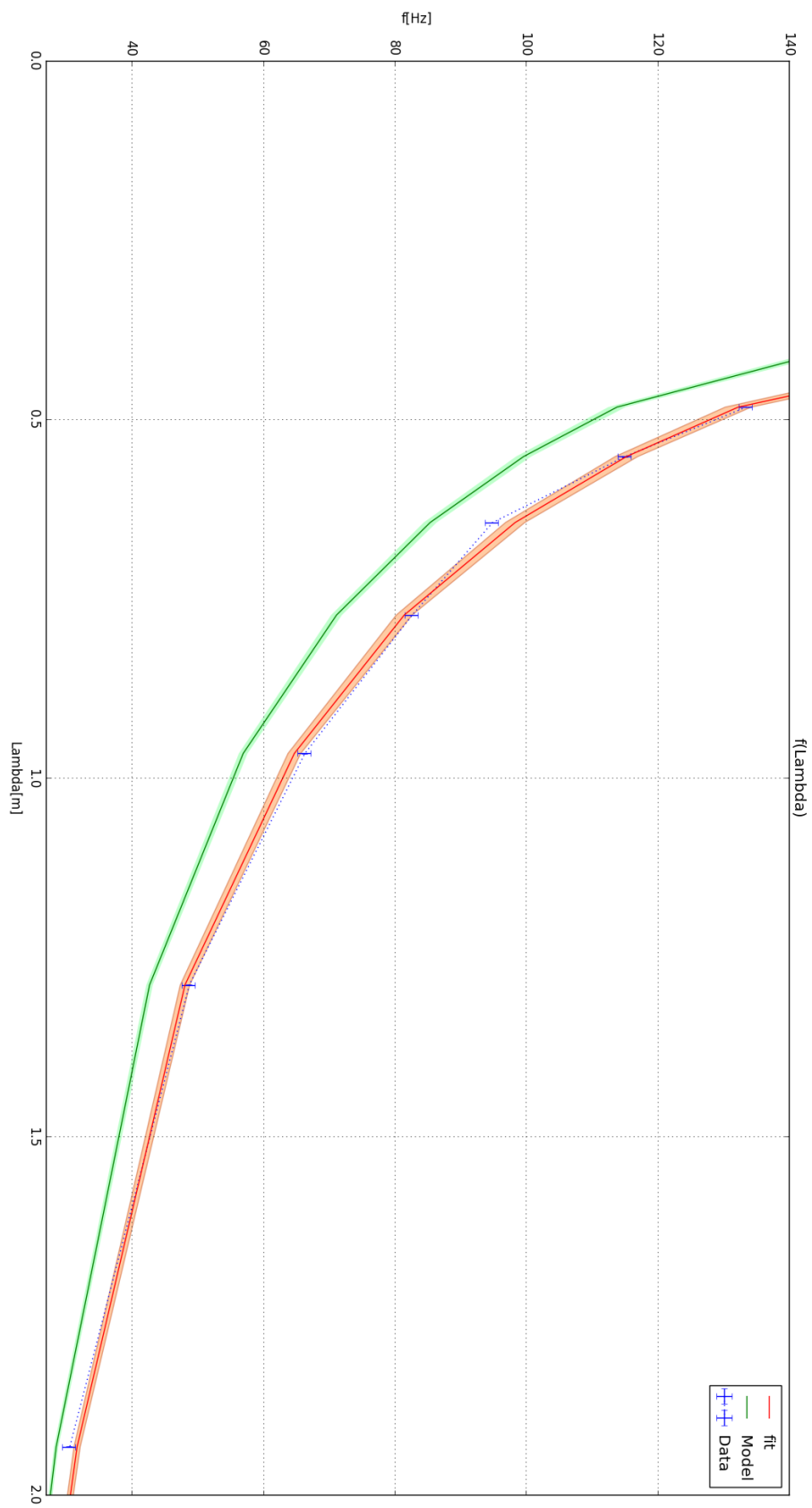


Figura 2: Ajuste a frecuencia como función de Lambda en escala lineal

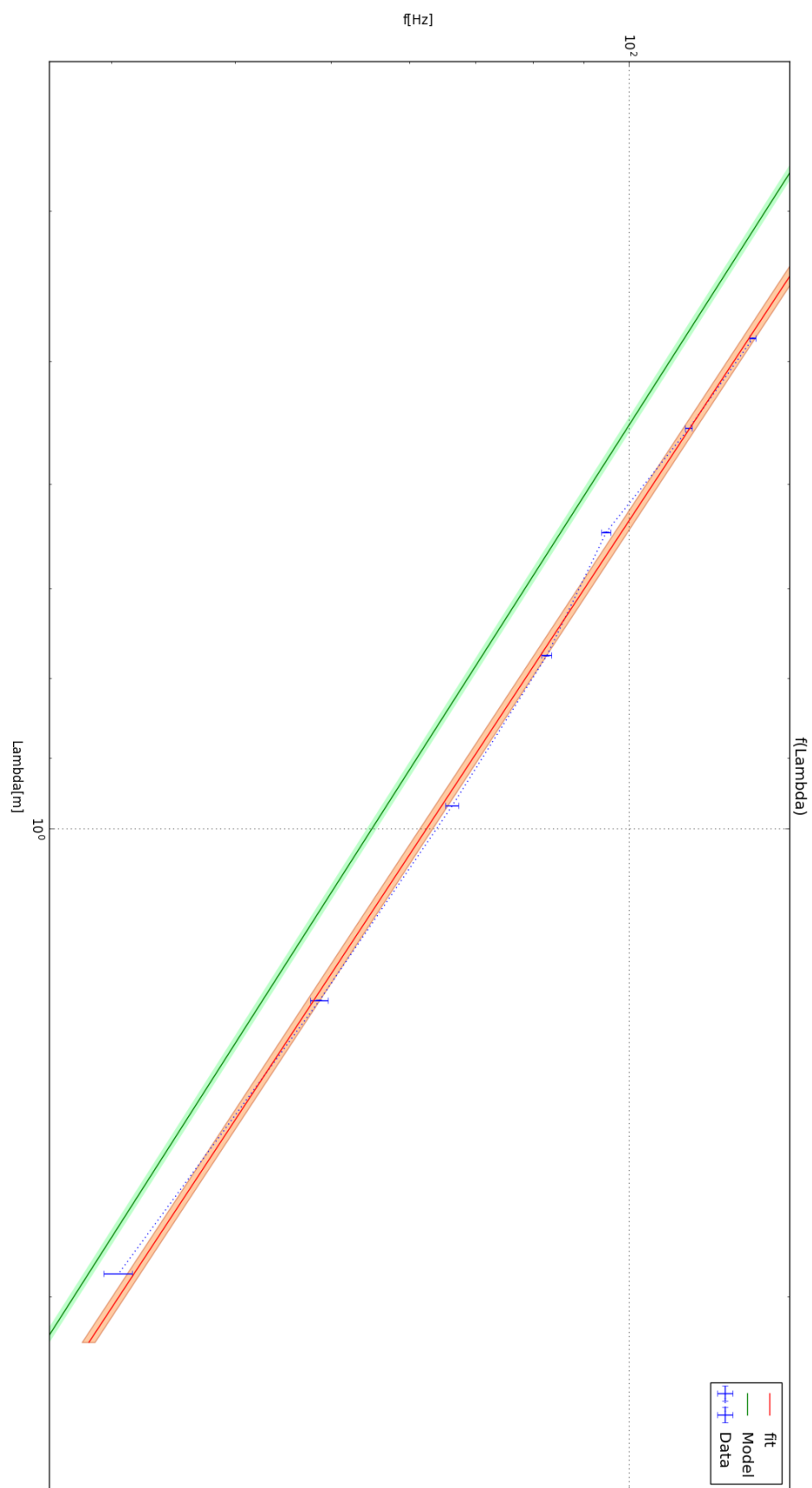


Figura 3: Ajuste a frecuencia como función de Lambda en escala logarítmica

T[N]	dT[N]	f[Hz]	df[Hz]
4.1918	0.0014	66.232	1
3.4315	0.0013	59.778	1
3.2059	0.0012	58.072	1
2.9391	0.0011	52.092	1
2.6713	0.0009	50.747	1
2.4182	0.0008	48.925	1
2.1552	0.0007	46.785	1
1.9277	0.0005	44.960	1

Figura 4: Frecuencia como función de Tension

4. Resultados

Se puede observar que para la variación en λ y en la tensión (F), los datos efectivamente adoptan una forma afín al modelo, con pequeñas variaciones, pero dentro del error experimental. Para la variación en μ hubo dos datos que se salen del ajuste (el 4to y 6to dato), por lo que hubo algún error experimental en esas mediciones. Puede ser incluso que sólo el 4to dato esté mal y que el programa haya intentado ajustar para ese dato, pero en el proceso haya desajustado el 6to. Incluso así, el 3er experimento (μ) es el único que estrictamente arroja un ajuste que coincide dentro del error experimental con el modelo. Los primeros dos parecen tener un claro error metodológico. Puede que los datos hayan sido sobreestimados o que los parámetros del modelo hayan sido subestimados (es decir, c es realmente más grande de lo que se midió). Es lógico pensar que es probable que lo segundo haya sido el caso, sólo por el hecho de que el tercer experimento tuvo la misma metodología, pero no tuvo involucrado en los parámetros de su modelo algo que los primeros dos sí: La densidad lineal μ . Para éstos primeros dos si se utilizó la misma densidad lineal. Debido a que c es inversamente proporcional a la raíz de μ , ésta debió ser más pequeña de lo que se midió. Ésto también concuerda con el error del 6to término en el 3er experimento, puesto que éste corresponde a la misma medición de μ en los primeros dos experimentos (ver figura 7). Éste 6to término ajustaría mejor si μ midiera menos; lo mismo que en los dos primeros experimentos.

Respecto al resultado del ajuste de los parámetros, para el coeficiente de proporcionalidad c se obtiene lo mismo que se ve en las gráficas. Para 1 y 2 hay un sobreajuste y para 3 hay una buena coincidencia. Con respecto al exponente n , el caso fue favorable para los tres experimentos. Se obtuvieron ajustes con discrepancias pequeñas con respecto a los valores teóricos (la mayor siendo de 0.036 y la menor de 0.026), por lo que se puede concluir con bastante seguridad que el modelo es válido. Sólo habría que hacer más experimentos para refinar esa exactitud.

5. Discusión

Fue difícil encontrar la frecuencia con los parámetros dados. Se podían variar hasta 10Hz en algunos casos y la onda no cambiaba mucho al ojo humano. Hubo algunos casos (para frecuencias altas) en los cuales las ondas eran demasiado estables o inestables. Es decir, se tenían un número de crestas, pero se quería la frecuencia con una cresta más; se aumentaba la frecuencia, pero la onda no cambiaba, hasta que abruptamente cambiaba a una con 2 crestas más, saltándose la deseada. Volviendo a bajar la frecuencia se llegaba a la deseada. Así, técnicamente se pudo lograr que para una misma frecuencia y mismos parámetros se pudieron replicar 2 distintas ondas. Ésta tendencia imposibilitó tomar un mayor conjunto de datos (se querían tener hasta 10 datos en cada experimento), puesto que los resultados ya no eran confiables. Para las densidades lineales no se pudieron tener hilos con variaciones muy grandes (se puede ver en la gráfica que la variación del eje x es muy pequeña), por lo que hubiera sido favorable tenerlas.

Las gráficas logarítmicas muestran muy bien que los datos siguen un patrón lineal en esa escala, es decir, tienen una relación de potencia con respecto a la frecuencia. Las discrepancias obtenidas, como fue discutido en los resultados, fueron principalmente debido a una sobreestimación de μ para el coeficiente de proporcionalidad c . Para n no hubo discrepancias notables, su ajuste fue muy favorable. Ahora, debido a que c se elimina cuando se hacen variar los 3 parámetros y el exponente de cada uno es el que completamente determina al modelo, podemos ignorar esa discrepancia (tomando en cuenta aún que está justificada) para afirmar que el modelo coincide muy

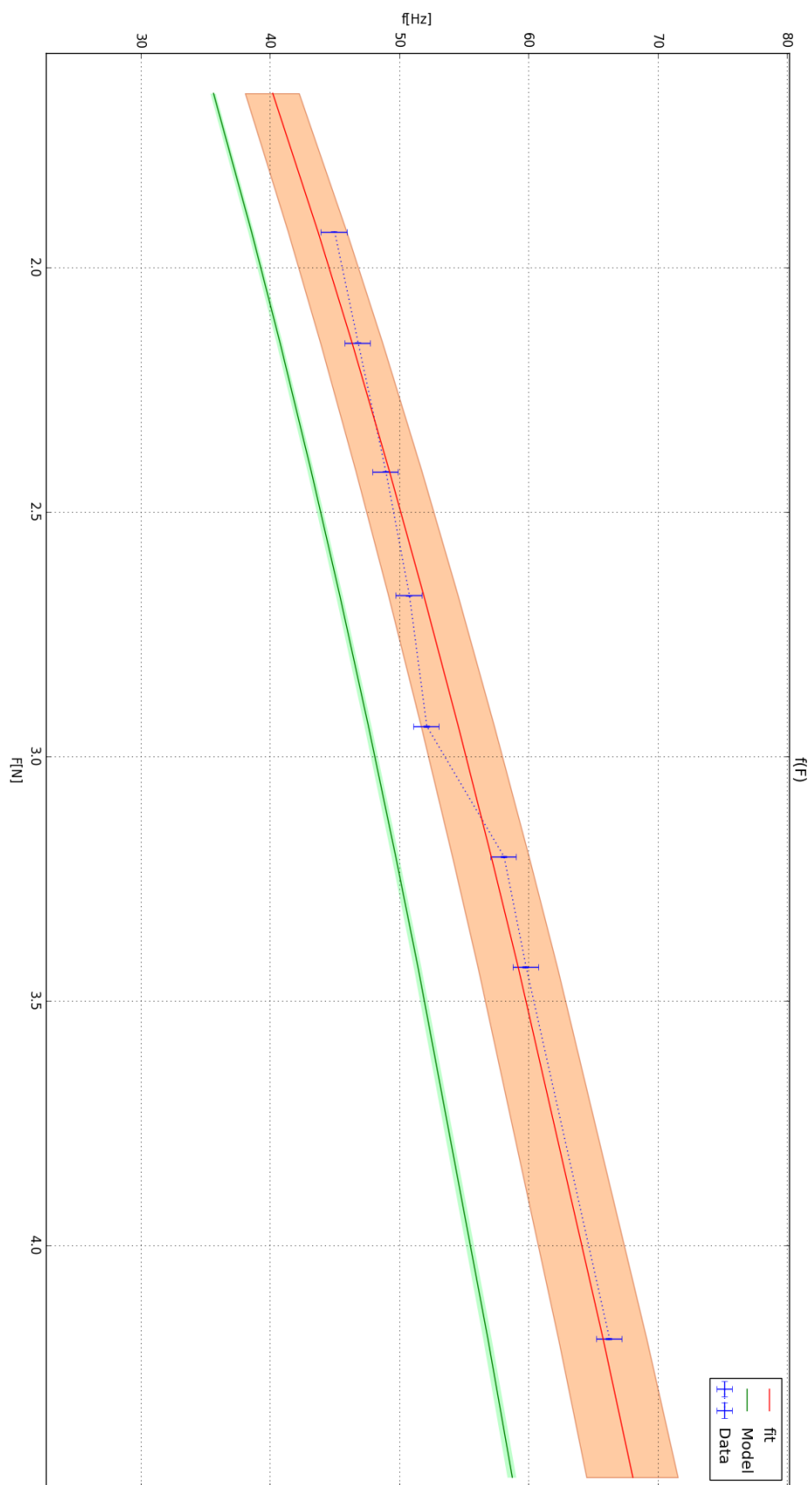


Figura 5: Ajuste a frecuencia como función de Tension en escala lineal

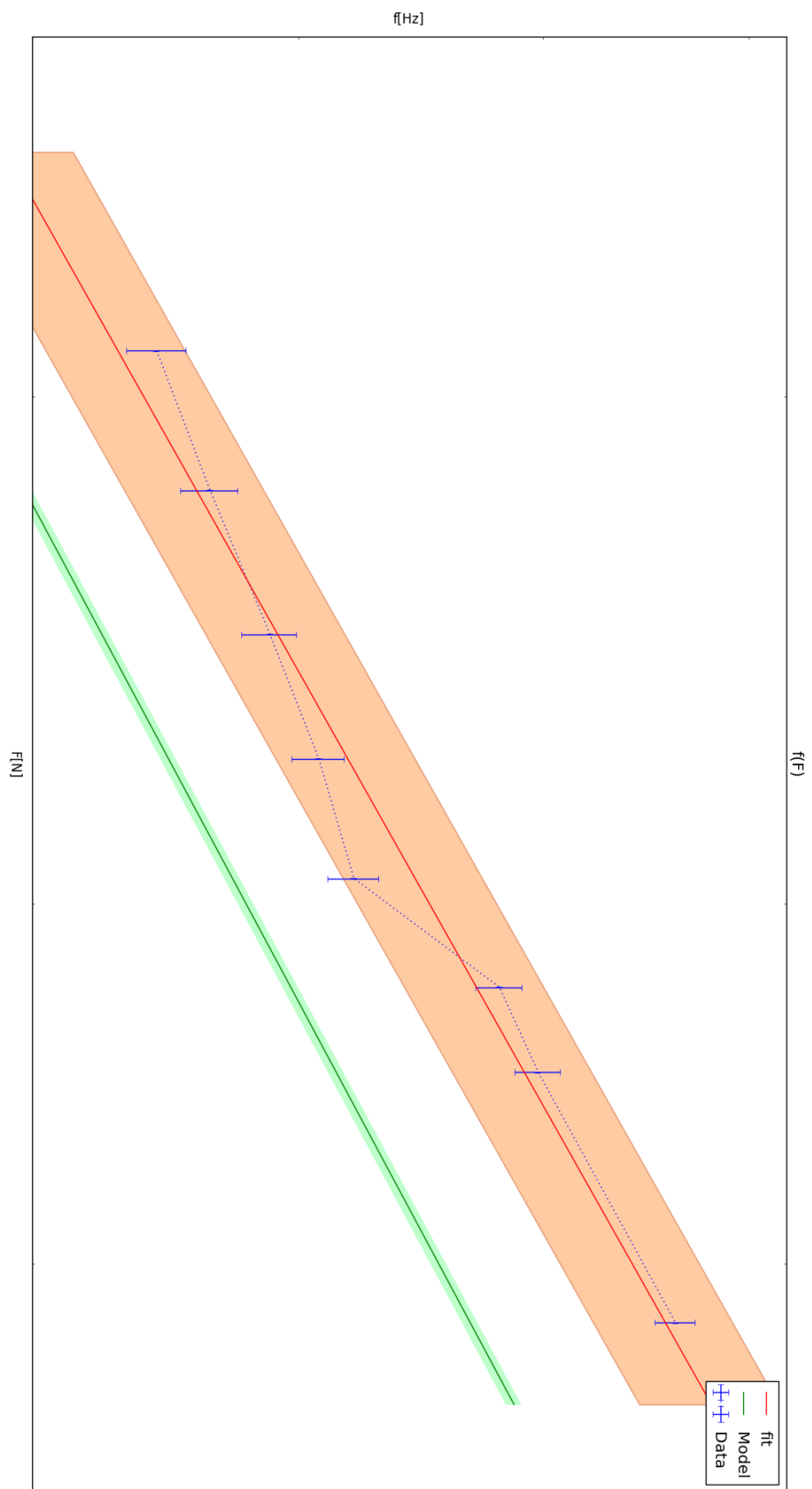


Figura 6: Ajuste a frecuencia como función de Tension en escala logarítmica

Mu[kg/m]	dMu[kg/m]	f[Hz]	df[Hz]
2.2E-4	1.9E-6	142.44	1
5.0E-4	2.5E-6	97.06	1
6.6E-4	1.7E-6	82.799	1
6.9E-4	1.8E-6	76.250	1
8.8E-4	2.0E-6	74.316	1
1.39E-3	1.6E-5	66.232	1

Figura 7: Frecuencia como función de Mu

bien con los datos experimentales.

6. Conclusión

Se concluye con bastante seguridad que la relación

$$f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

se cumple experimentalmente. Los experimentos 1 y 2 tuvieron discrepancias sólo en que la λ que se fijó debió ser menor, lo que se ve reflejado en el experimento 3, que a excepción de ese y otro dato, ajusta muy bien al modelo. Los exponentes ajustaron muy bien en los 3 experimentos y como son los únicos determinantes en la relación, pues las constantes de proporcionalidad sólo aplican para cada caso, la conclusión es bastante fuerte.

Referencias

- [1] Resnick, Robert, Halliday, David, S. Krane, Kenneth. *Física*. Volumen 1. Grupo editorial Patria. México 2015. Pag 407 y 417.

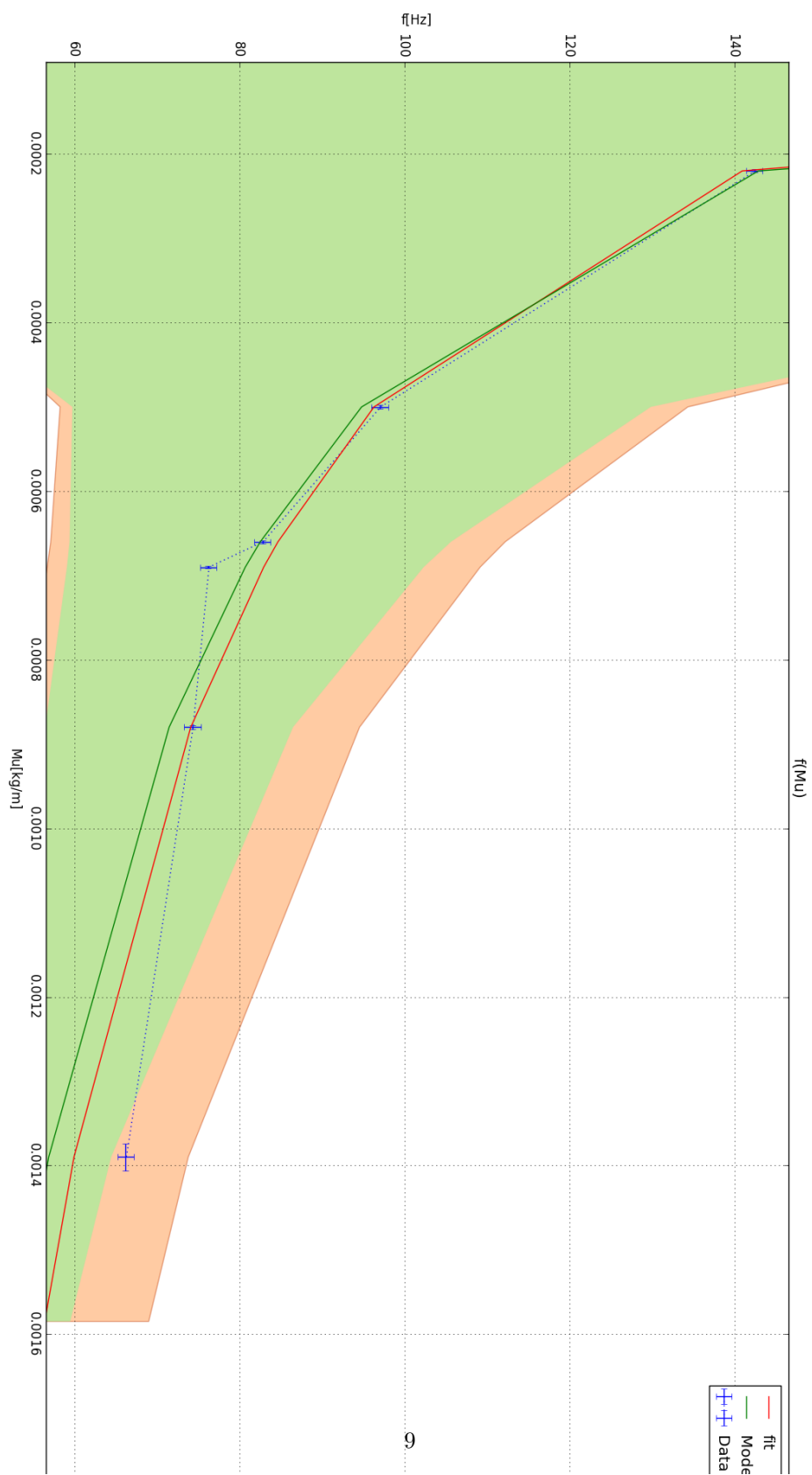


Figura 8: Ajuste a frecuencia como función de Mu en escala lineal



Figura 9: Ajuste a frecuencia como función de M_u en escala logarítmica