

Determinación de las líneas de campo y superficies equipotenciales de dos campos eléctricos

Gómez Arias, Andrés Navarrete Cruz, Erick Sebastián
Nellen Mondragón, Stefan Daniel

12 de marzo de 2018

Resumen

1. Introducción

El campo eléctrico es un campo conservativo. Es decir, la integral de línea:

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

no depende del camino. Así, podemos definir la diferencia de potencial entre \vec{a} y \vec{b} sin ambigüedad como:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

donde, si hacemos $\vec{a} \rightarrow \infty$, para conjuntos de carga localizadas, $\Phi(a) \rightarrow 0$, por lo que obtenemos la función escalar:

$$\Phi(b) = - \int_{\infty}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Llamada potencial eléctrico, con unidades de $\frac{N \cdot m}{C}$ o $\frac{J}{C}$, simplificados por V (Volts). Cuya interpretación física es, de hecho, el trabajo por unidad de carga necesario para llevar una partícula desde el infinito hasta el punto \vec{b} .

Las líneas equipotenciales se definen como las curvas de nivel de la función Φ . Es decir, las líneas en donde Φ es constante. Ésto nos da una relación vectorial entre \vec{E} y Φ , pues en una línea equipotencial uno podría mover una carga sin realizar trabajo en contra del campo eléctrico. De ahí se sigue que el campo eléctrico siempre es perpendicular a las líneas equipotenciales. Más aún, éste cumple que:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

Lo cual coincide con lo anterior, pues el gradiente siempre es perpendicular a las curvas de nivel.

En un conductor la carga inducida o conducida se mantiene sólo en la superficie o en la frontera, de manera que el campo eléctrico en el interior es cero. Así, el interior de todo conductor es una superficie (o volumen) equipotencial.

Podemos graficar el campo eléctrico en 2 dimensiones entre a) 2 líneas horizontales con carga opuesta con una separación y b) 2 placas paralelas que forman un capacitor, de manera que podamos comparar las líneas de campo del campo eléctrico medido experimentalmente con el obtenido con el módulo de Python 'Electrostatic field line diagrams'[1]. Los resultados son:

En las gráficas las líneas negras son algunas líneas del campo eléctrico y los colores representan la intensidad del campo eléctrico, donde el más claro es el más intenso. De ésta manera, se pueden observar curvas de nivel del campo eléctrico. Como el campo es menos el gradiente del potencial, entonces las líneas equipotenciales serán la familia de curvas ortogonales a las curvas observadas.

2. Material

El material empleado fue el siguiente:

■

3. Metodología

Se fijó la hoja conductora cuadriculada con separaciones de 1cm; con cada uno de los dos arreglos de cargas dados por tinta conductora, respectivamente. Se conectó el circuito de la tinta a una fuente de voltaje y se suministraron 10 volts. Ahora, con un multímetro se midió el voltaje en cada uno de los puntos del mallado, incluidos en donde estaba la carga (pues así se checaba que se tenía una corriente de 10 volts). Un integrante movía la punta del multímetro y el otro observaba la medición y la anotaba en un archivo de datos para su análisis.

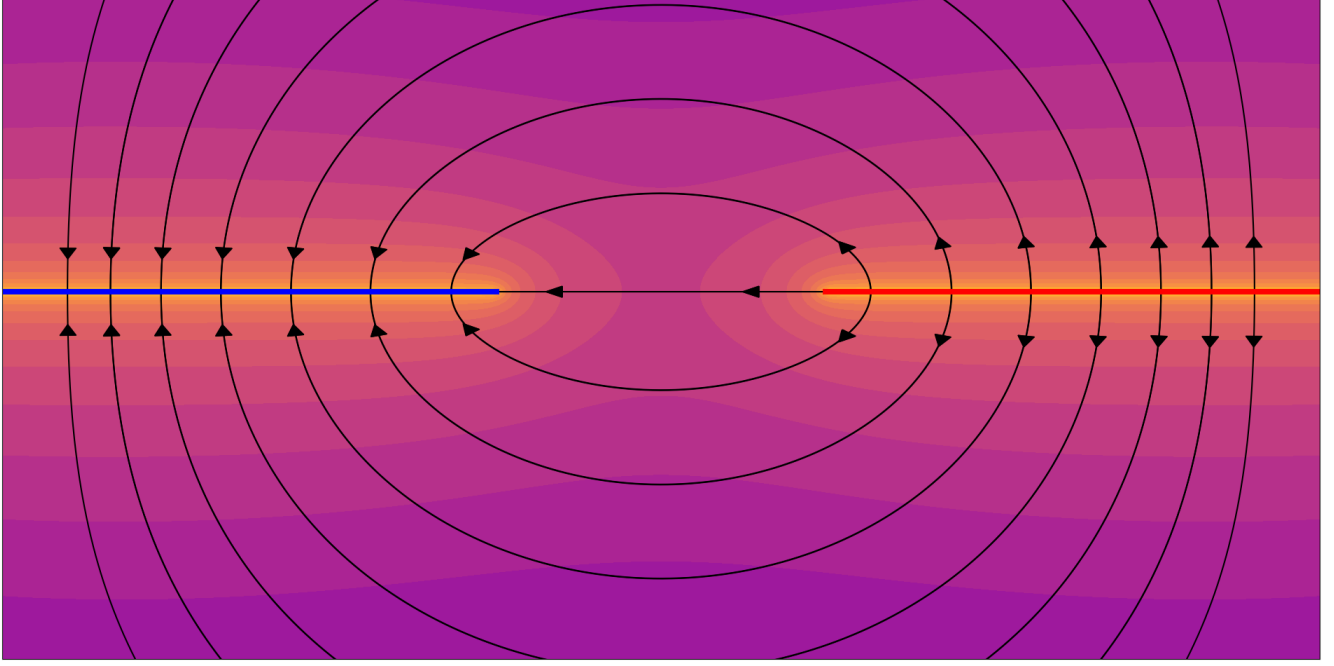


Figura 1: Campo eléctrico entre dos líneas horizontales con carga opuesta

Aún teniendo matrices de aprox 30x30 datos con separación de 1cm, los puntos equipotenciales no eran lo suficientemente cercanos. Por ende, se realizó una interpolación lineal para aumentar el conjunto de datos en espacios entre la cuadrícula inicialmente medida. Si los datos están conformados por la posición y el voltaje: $(x_i, y_j, V_{i,j})$, entonces la primera aproximación a una interpolación lineal en un punto (x,y) contenido por un cuadro formado por los índices $(i-1,j)$, (i,j) , $(i-1,j-1)$, $(i,j-1)$ está dada por:

$$V(x, y) = \frac{[(x_i - x)(y_j - y)V_{i-1,j-1} + (x_i - x)(y - y_{j-1})V_{i-1,j} + (x - x_{i-1})(y_j - y)V_{i,j-1} + (x - x_{i-1})(y - y_{j-1})V_{i,j}]}{[(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})]}$$

Ya que se tiene un conjunto de datos satisfactorios, para encontrar las líneas equipotenciales no se puede pedir exactitud, por lo que simplemente se buscan en la matriz todos los puntos que cumplen:

$$V_0 < V_{i,j} < V_0 + \Delta V$$

Donde ΔV se elige lo suficientemente grande como para que varios puntos cumplan la condición, pero lo suficientemente chica para que los puntos que la cumplan formen una línea continua. Así, variando V_0 desde el potencial mínimo hasta el máximo, dando saltos suficientemente grandes, se encuentran numéricamente las líneas equipotenciales de la configuración.

Ahora, para obtener numéricamente $E = -\nabla\Phi$ en un punto (x_i, y_j) se utilizan las derivadas de segundo orden numéricas, de modo que:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= (E_i, E_j) \\ &= -\left(\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{x_{i+1} - x_i}, \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{y_{i+1} - y_i} \right), \end{aligned}$$

4. Datos experimentales

Se reportan los datos medidos de forma grafica, pues el conjunto de datos es demasiado grande para una table. Esto es consecuencia a que se haya medido en una reticula centimétrica de 28 cm x 20 cm.

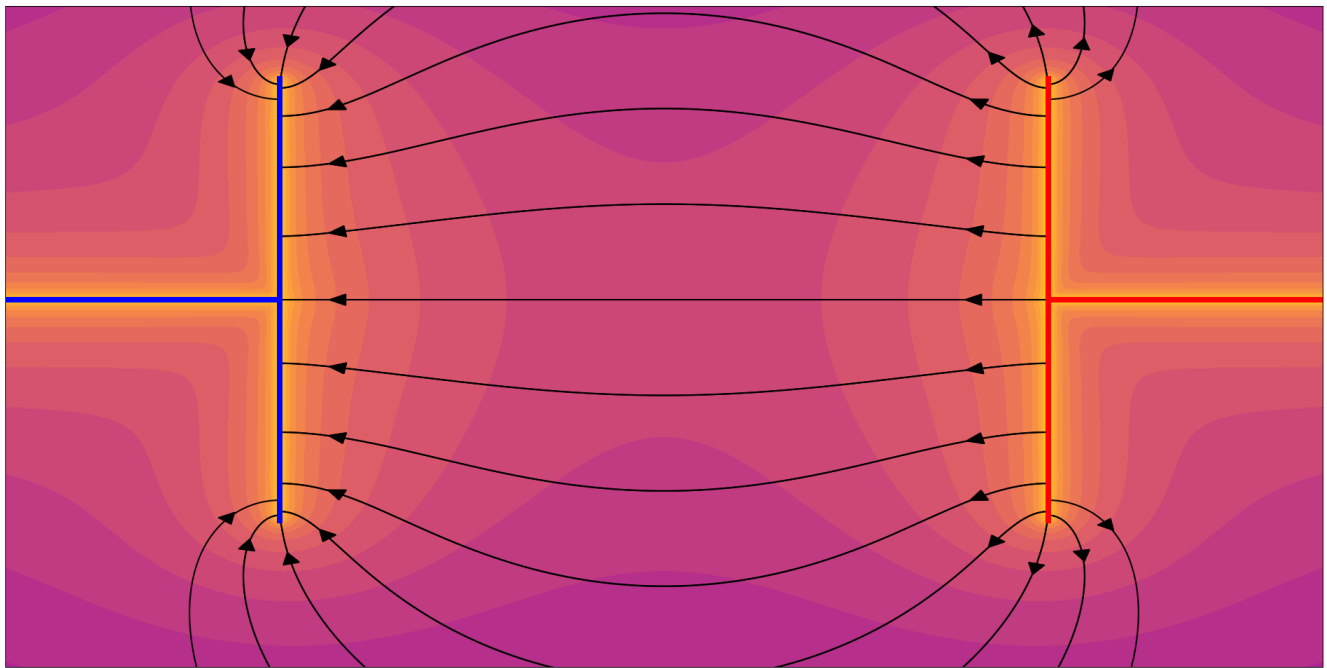


Figura 2: Campo eléctrico entre 2 placas paralelas que forman un capacitor

- 4.1. Campo entre dos círculos unidos a la fuente de corriente por un cable
- 4.2. Campo entre dos placas unidas a la fuente de corriente por un cable

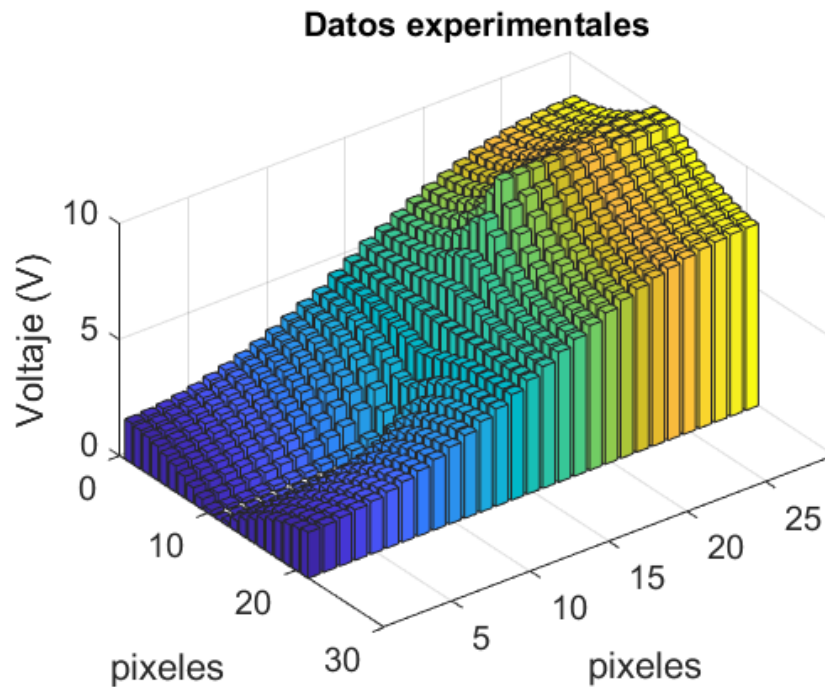


Figura 3: Datos medidos para el la configuración parecida a un dipolo

5. Resultados

Aqui se encuentran las gráficas del campo eléctrico, las líneas equipotenciales y ambos sobrepuestos para cada configuración. Además, se tiene una gráfica para la superficie interpolada (lineal) de los datos medidos. Anexas al final del reporte se encuentran todas las gráficas, pues en esta sección no se distinguen bien.

5.1. Campo entre dos círculos unidos a la fuente de corriente por un cable

5.2. Campo entre dos placas unidas a la fuente de corriente por un cable

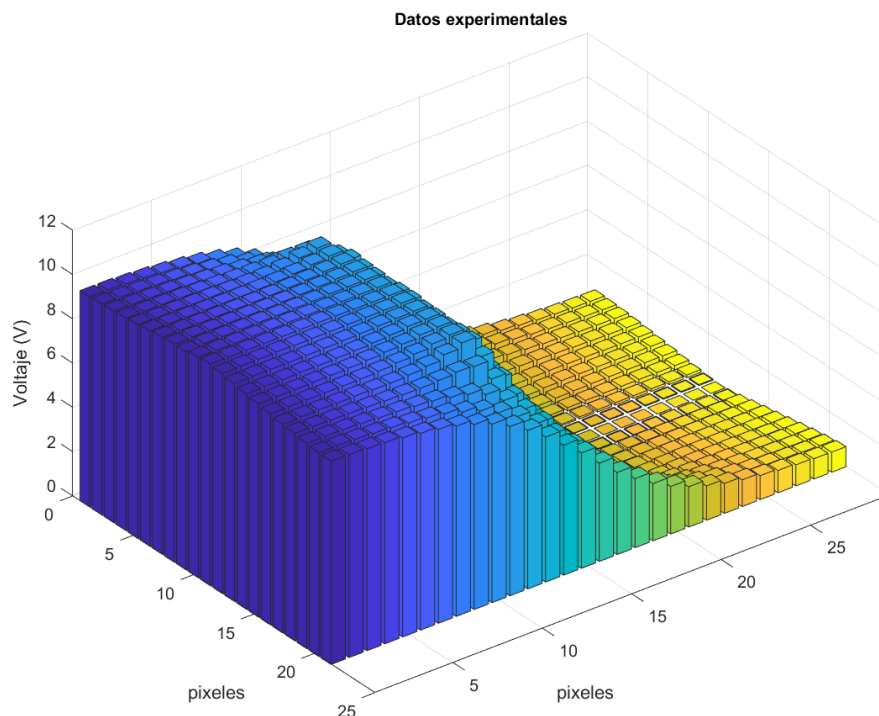


Figura 4: Datos medidos para el la configuración de dos placas

6. Discusión

Como primera observación se puede notar que el campo sobrepuesto es, en efecto, ortogonal a las líneas equipotenciales. Esto se nota especialmente bien en el campo del dipoloide. Esto no es sorprendente, pues el campo se obtuvo derivando numéricamente el conjunto de líneas equipotenciales.

En las gráficas para el dipoloide se puede observar que el campo fluye en el centro de un polo a otro, como era de esperar, pero fuera del centro se degenera del campo teórico. Esto se debe a la presencia del conductor en ambos extremos, que al portar carga (que no es despreciablemente pequeña) tiene una influencia sobre el campo. Así, en los extremos el cable fluye del o hacia el conductor. Además, en este conjunto de gráficas se puede apreciar especialmente bien que el conductor forma su propio conjunto equipotencial, se nota especialmente en la derecha, donde se encontraba la zona de contacto, esta fue demasiado gruesa y tuvo el efecto en el campo que en la región donde se encuentra presente el potencial es igual, su contorno se distingue muy bien. Así mismo, se puede encontrar, que el conductor corre desde los extremos puntuales hasta la funete y sumidero del campo eléctrico. Estos buenos resultados se corroboran con la superficie que se obtuvo de la interpolación, que a simple vista se ve bastante suave.

Las gráficas de las placas no son de tan buena calidad como las del dipoloide. El contorno de las placas no se distingue tan bien, dentro del conductor hay varias líneas equipotenciales y las líneas entre las placas no son exactamente rectas. Se puede observar que esto es, en parte, consecuencia de que la superficie de interpolación no es muy suave. Sin embargo, la gráfica del campo no parece tener problema con esto y no se detectan irregulares como en la de las líneas equipotenciales. Se consideraron otros rangos de interpolación, pero no mejoraban la situación. Esto se debe a que, al contrario del dipoloide, aquí en el conductor no se midió exactamente el mismo potencial, que se explica fácilmente considerando que la resistencia dentro de él era mayor y causó una caída de potencial más rápida que en el pasado. Además, se debe considerar que para este tipo de campo la interpolación lineal no es muy buena, ya que el conductor tiene una frontera que *no* es suave, lo que causa que el método numérico sea menos estable en estas regiones. No obstante, sigue siendo un bonito ejemplo de un campo eléctrico real, ya que resolver las ecuaciones para este sistema no es generalmente posible de manera analítica se tiene que recurrir a la numérica

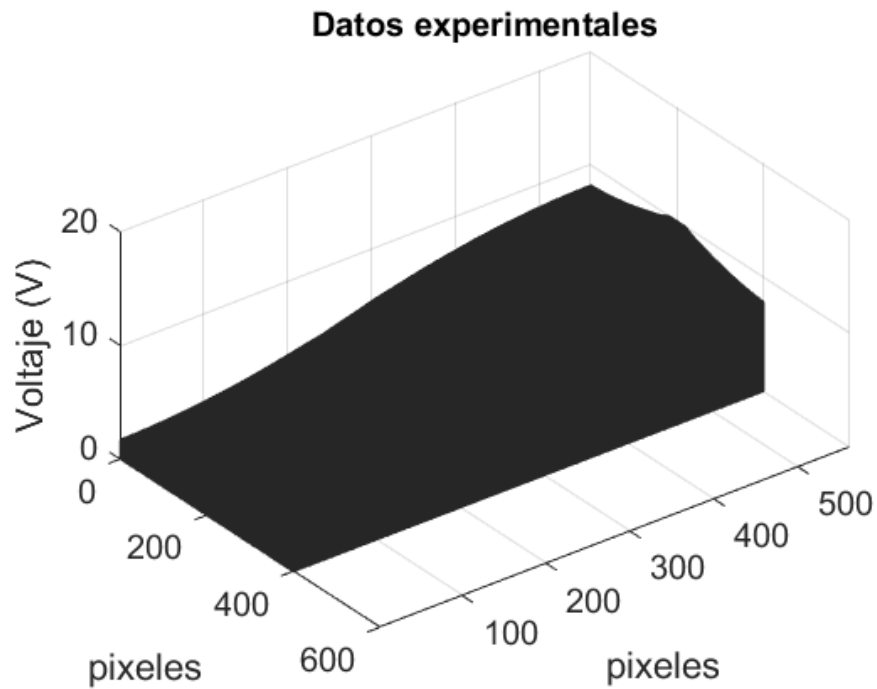


Figura 5: Superficie de interpolación del campo dipoloide

y gracias a ella se puede observar como es el campo y las superficies equipotenciales de un capacitor de placas.

Para mejorar el análisis numérico, interpolando a mayor orden, y mantener de mejor manera los conductores del experimento.

7. Conclusión

Referencias

- [1] tomduck, Electrostatic field line diagrams <https://github.com/tomduck/electrostatics>. 12/03/2018

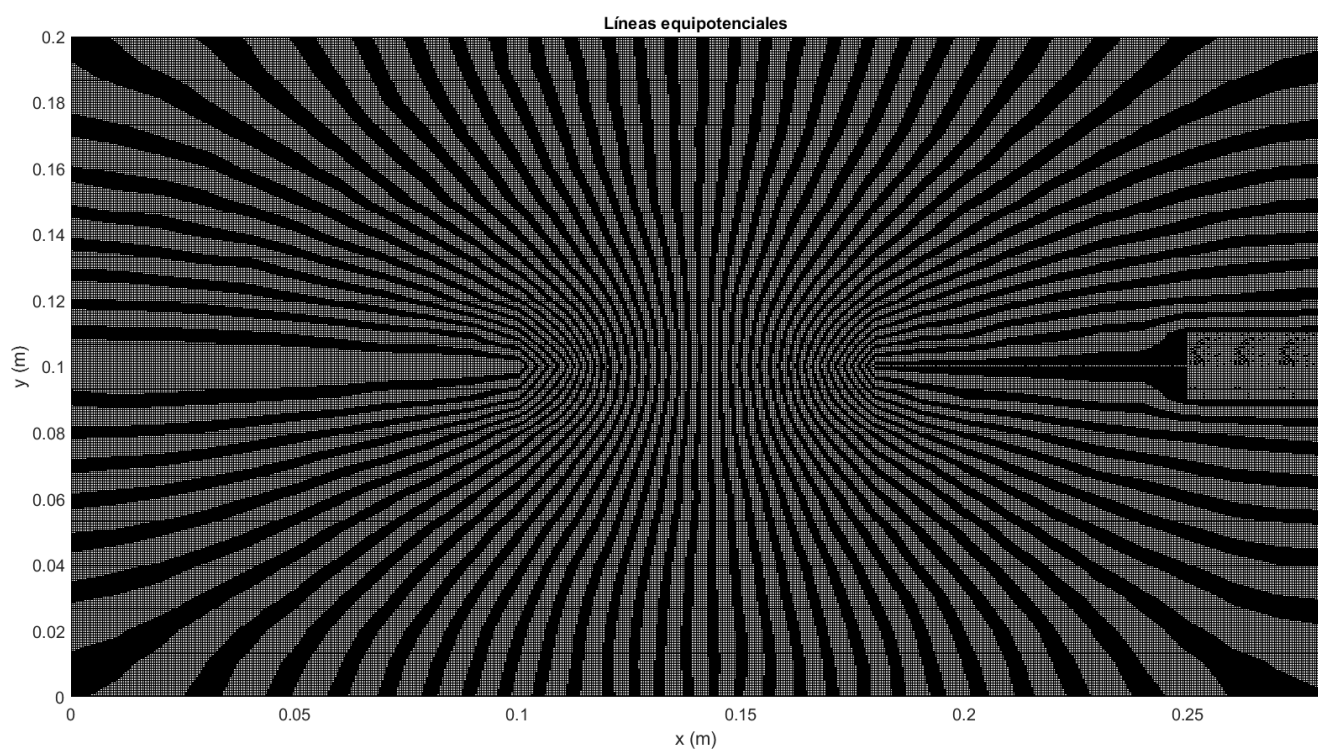


Figura 6: Líneas equipotenciales para el campo dipoloide

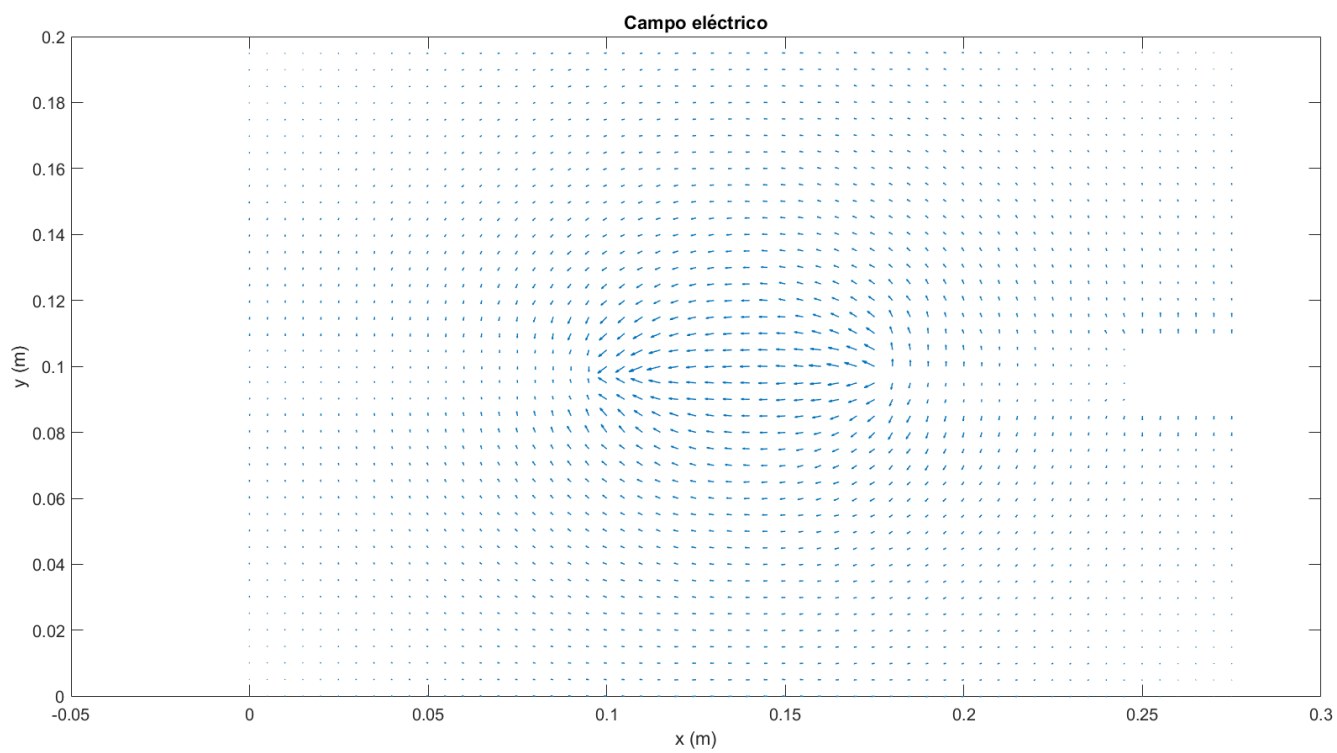


Figura 7: Gráfica para el campo dipoloide

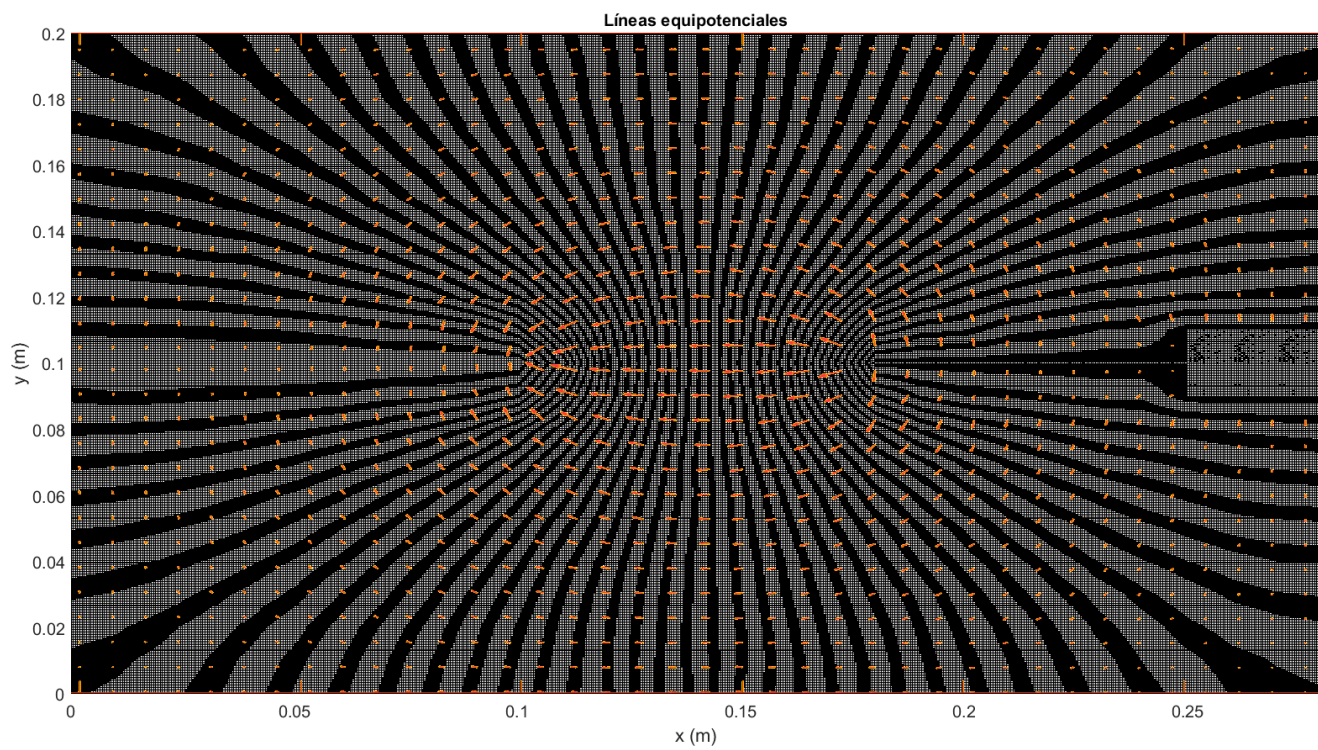


Figura 8: Gráfica para el campo dipoloide

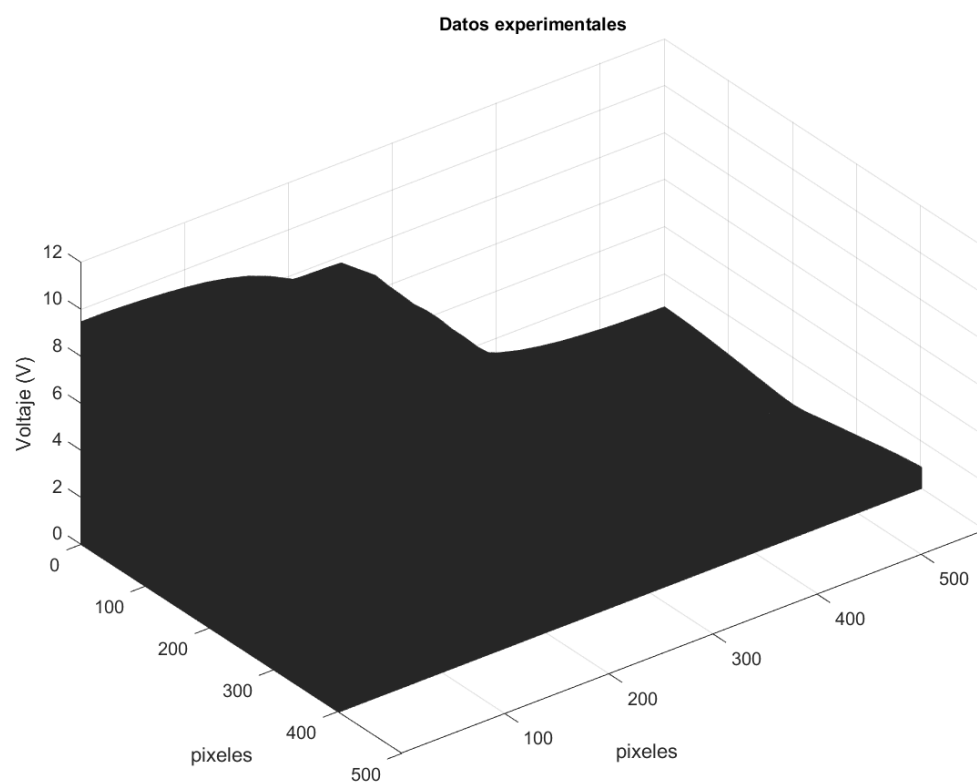


Figura 9: Superficie de interpolación del campo de dos placas

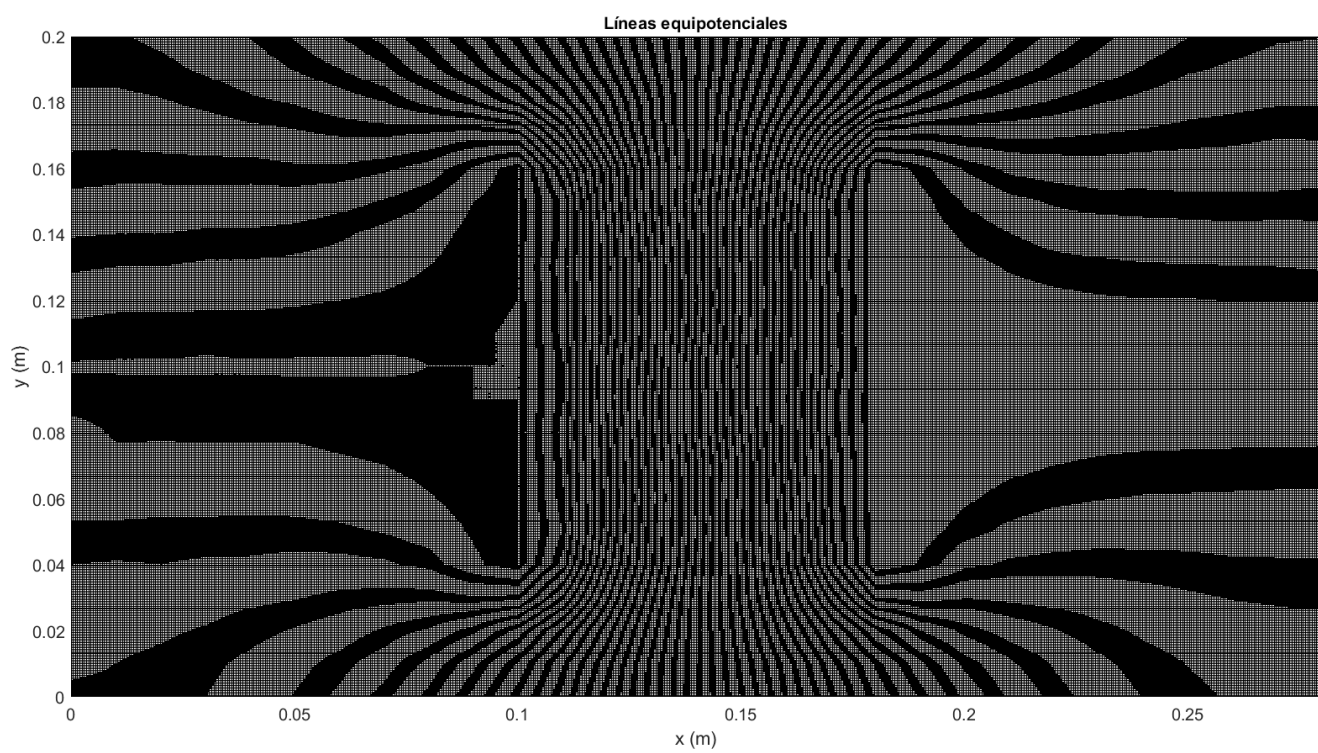


Figura 10: Lineas equipotenciales para el campo de dos placas

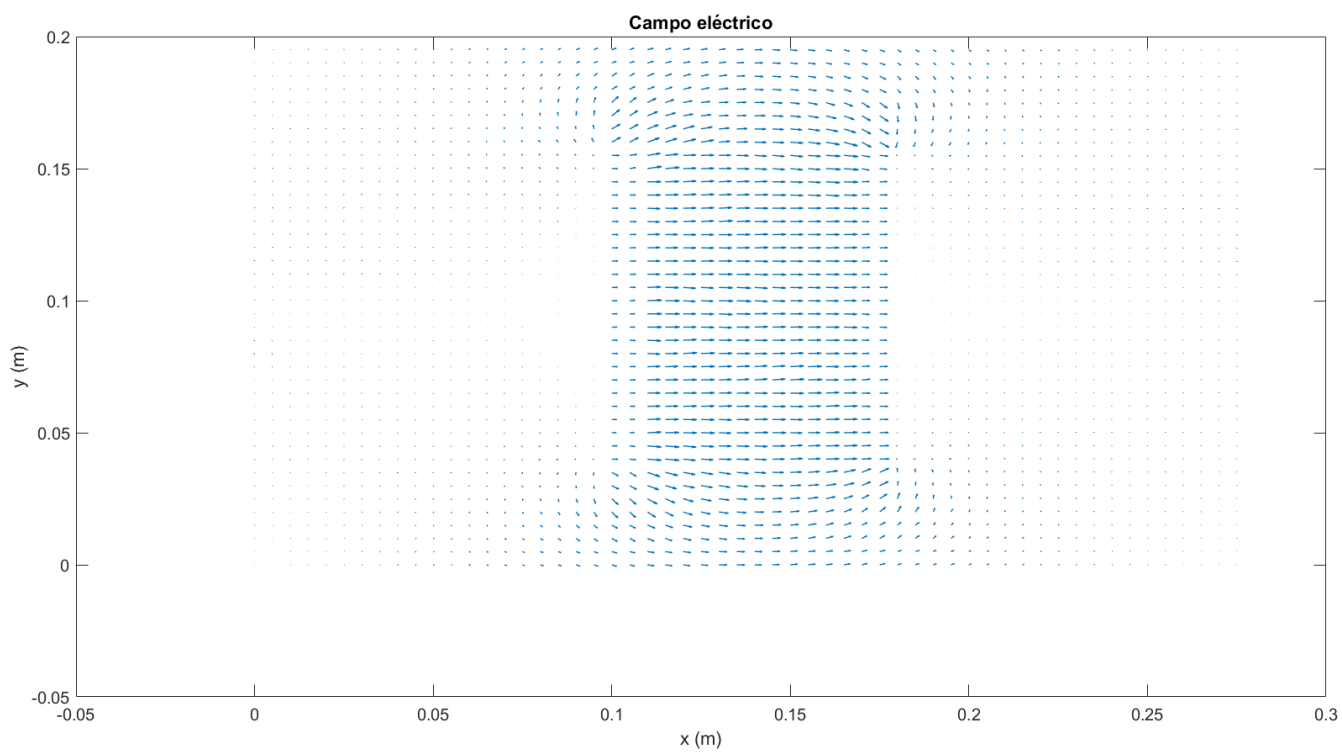


Figura 11: Gráfica para el campo de dos placas

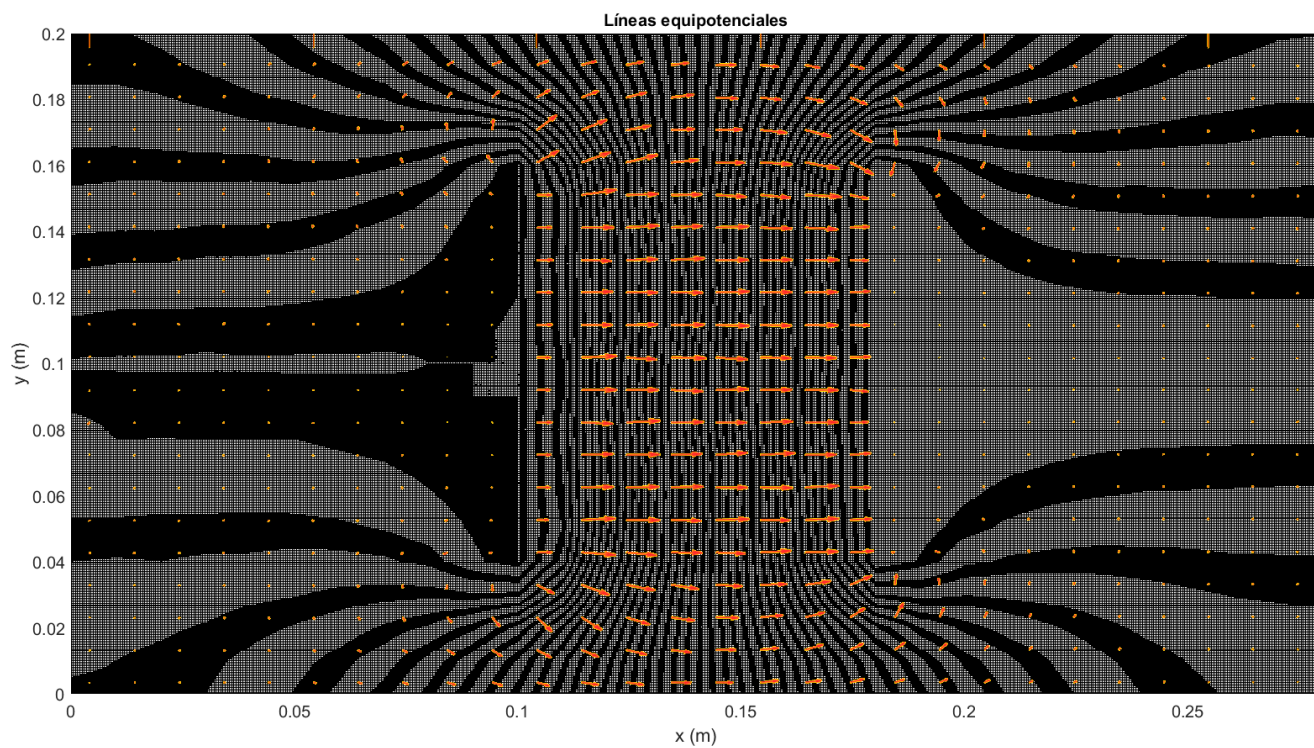


Figura 12: Gráfica para el campo de dos placas