Barycentric Lagrange Interpolation

Interpolación con $n+1$ puntos x_j, $j=0,\dots,n$ y f_j muestras de f

- Forma de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \ell_j(x) \quad , \quad \ell_j(x) = \frac{\prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=0, k\neq j}^{n} (x_j - x_k)}$$

con $\ell_j(x_k) = \begin{cases} 1 & , j \neq k \\ 0 & , \text{otros} \end{cases}$ ent. P interpola a f en orden n

- Problemas:

1. Cada evaluación de $p(x)$ requiere $O(n^2)$ sumas y productos
2. Agregar un par (x_{n+1}, f_{n+1}) nuevo requiere computación desde cero
3. Numéricamente inestable

Flop: Floating point operation: Mult. o div. más sumar o restar

- Forma de Newton:

Calculamos Tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{ccccc}
f[x_0] & & & & \\
 & f[x_0,x_1] & & & \\
f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
 & f[x_1,x_2] & \vdots & & f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n] \\
f[x_2] & \vdots & & & \\
\vdots & & f[x_{n-3},\dots,x_n] & & \\
 & f[x_{n-1},x_n] & & & \\
f[x_n] & & & &
\end{array}$$

con la fórmula recursiva: $f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{k-1}, x_k] = \dfrac{f[x_{j+1},\dots,x_k] - f[x_j,\dots,x_{k-1}]}{x_k - x_j}$

$f[x_j] = f_j$

requiere n^2 restas y $n^2/2$ divisiones, y para cada x, la forma de Newton:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots + f[x_0,x_1,\dots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

que requiere sólo n flops.

La fórmula de Lagrange puede ser acomodada de manera que puede ser evaluada y actualizada en $O(n)$ operaciones, como Newton.

Una Fórmula de Lagrange mejorada:

Notemos que el numerador de ℓ_j puede ser escrito como:

$$\ell(x) \equiv (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \quad \text{dividido por } x-x_j$$

Si definimos los pesos baricéntricos como:

$$w_j \equiv \frac{1}{\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)}, \quad j=0,\dots,n \qquad \text{i.e. } w_j = 1/\ell'(x_j)$$

Ent. $\ell_j(x) = \ell(x)\dfrac{w_j}{x-x_j}$ con $\ell(x)$ que no depende de j, ent.

$$P(x) = \ell(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{w_j}{x-x_j}f_j$$

$O(n^2)$ flops para sacar cantidades independientes de x: w_j

Seguido de $O(n)$ flops para evaluar

Para actualizar con otro nodo x_{n+1}:

i) Dividir cada w_j, $j=0,\dots,n$ por x_j-x_{n+1} ($n+1$ flops)

ii) Calcular w_{n+1} con su definición (otros $n+1$ flops)

Las actualizaciones son con $O(n)$ flops.

Ventaja: Las w_j no dependen de f! (Una vez calculado eso de $O(n^2)$ puede ser usado para varias funciones ahora con $O(n)$ flops)

La Fórmula Baricéntrica

Si tomamos la interpolación de la función constante 1:

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x - x_j}$$

Su interpolación es ella misma

Dividiendo la expresión anterior de $p(x)$ cancela $\ell(x)$:

$$\boxed{p(x) = \frac{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j} f_j}{\sum_{j=0}^{n} \frac{w_j}{x-x_j}}}$$

Fórmula Baricéntrica

* Cualquier factor común de los w_j se cancela y no afecta.

Distribuciones de Puntos:

1) Equidistantes: Espaciado $h = 2/n$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Donde se puede calcular $w_j = (-1)^{n-j} \binom{n}{j} / (h^n n!)$

que al cancelar los factores independientes de j da:

$$w_j = (-1)^j \binom{n}{j}$$

Para el intervalo $[a, b]$ se tendría otro factor $2^n (b-a)^{-n}$ que igual se cancela, la forma de arriba es general

- Fenómeno de Runge: Para n grandes éstos w_j varían exponencialmente (como 2^n), provoca que datos pequeños en el centro del intervalo se asocian con oscilaciones grandes (orden 2^n) en los extremos.

  No es un problema de la fórmula, es intrínsico de la interpolación equidistante.

Lo correcto es usar puntos que se acumulan en los extremos

2) Chebyshev points: $x_j = \cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)$, $j = 0, \dots, n$ en $[-1, 1]$

Al cancelar puntos indep. de j: $w_j = (-1)^j \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n+2}\right)$

3) Chebyshev points of second kind: $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$, $j=0,\dots,n$ en $[-1,1]$

con $w_j = (-1)^j \delta_j$, $\delta_j = \begin{cases} 1/2, & j=0 \text{ ó } j=n \\ 1, & \text{otros} \end{cases}$

En ambos transformar de $[-1,1]$ linealmente a $[a,b]$ siempre da $2^n(b-a)^{-n}$, que se cancela

Los C. Points dan un error estimado

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x)-P_n(x)| \leq C K^{-n}$$, C cte, $K>1$, $K \sim$ Área de analiticidad

En general ésto es numéricamente estable, para $n \to \infty$ se pueden tomar consideraciones especiales para evitar "underflow" o "overflow".