



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LABORATORIO DE FÍSICA CONTEMPORÁNEA I. GRUPO: 8290.

PROFESOR: ISMAEL RIVERA JIMÉNEZ. AYUDANTE: MÓNICA MALDONADO TERRÓN.

Medición de la constante de Planck

ANDRÉS GÓMEZ ARIAS
ANDRESGZ@CIENCIAS.UNAM.MX

STEFAN DANIEL NELLEN MONDRAGÓN
STEFAN_NELLEN@CIENCIAS.UNAM.MX

9 de diciembre de 2020

RESUMEN

Mediante el uso de LEDs se mide la constante de Planck. El experimento se realiza con materiales de electrónica básicos, que incluyen 8 LEDs distintos. Se obtienen frecuencias y voltajes umbral de cada LED. Usando la relación $E = h\nu$ se asocia esta energía con la brecha de banda del diodo (caracterizada por el voltaje umbral $E = eV_{th}$) y se ajusta h usando estos datos. Las frecuencias se obtienen de una tabla y distribuciones de intensidad de un fabricante de LEDs. Para los voltajes umbral se emplean dos métodos distintos. En el primer método se caracteriza la relación corriente-voltaje del LED y se hace un ajuste lineal en la región de voltajes mayores, extrapolando el voltaje umbral como la raíz de la recta ajustada. En el segundo método se toma el voltaje mínimo para el cual el LED se enciende como voltaje umbral. En comparación con el valor exacto $h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, con el primer método se obtiene $h = 5,909 \times 10^{-34} \pm 2,053 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}$ que tiene un error relativo de 10,8 %. Con el segundo método se obtiene $h = 6,768 \times 10^{-34} \pm 7,769 \times 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{s}$ y corresponde a un error relativo de 2,1 %. Se compara y discute la eficiencia de los dos métodos.

1. Introducción

La constante de Planck fue introducida por primera vez por Max Planck en 1900 para su ley de radiación de cuerpo negro [1]

$$S(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (1)$$

Para esta ecuación, Planck propuso que la radiación térmica se emitía mediante paquetes de energía llamados fotones¹, y la energía de esos paquetes E dependía linealmente en la frecuencia ν . Es decir,

$$E = h\nu. \quad (2)$$

La constante de proporcionalidad, h , es la constante de Planck. Aunque su origen viene de un fenómeno termodinámico, este fenómeno reveló ser de suma importancia para la fundación de la mecánica cuántica. Dentro de esta teoría la constante juega un papel central, ya que ella (o su constante hermana $\hbar = h/(2\pi)$) fijan la escala física² para la cual son significativos los efectos cuánticos. Su interpretación física, a parte de dictar la escala cuántica, se puede obtener de sus unidades: $J \cdot s$, que son unidades de acción³. Se puede interpretar entonces como el cuanto de acción, es decir la acción intrínseca de un cuanto de luz o materia (muchas veces se le llama el cuanto de energía, pero esto es técnicamente incorrecto).

Aunque en un inicio la constante de Planck se medía bajo las condiciones que definían a sus unidades ($J \cdot s$), a partir de 2019 se redefinieron las unidades en el sistema internacional [3], de manera que

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} J \cdot s \quad (3)$$

se define como exacta. Esta convención permite definir a la unidad de masa, el kilogramo, de manera invariante y universal, pues cuando uno realiza mediciones de h , sus resultados y discrepancias en realidad dan la definición o discrepancia sobre lo que uno toma como un kilogramo. Con ello en cuenta, a lo largo de este artículo se seguirá hablando de una medición de la constante de Planck, pero será implícito que, bajo las convenciones modernas, lo que en realidad se mide es al kilogramo.

Dado lo anterior es evidente que el valor de la constante de Planck es de gran importancia, tanto teórica como instrumental. En este trabajo nos centraremos en una forma de determinar experimentalmente la relación (2) y así, medir a la constante de Planck.

1.1. Marco teórico

Los materiales cristalinos son arreglos de átomos que se repiten periódicamente en el espacio. Esta distribución permite que surgen bandas de energía bien definidas [4] en las cuales los electrones que rodean a los átomos pueden ocupar. En general los electrones ocupan los niveles de menor energía, pero como éstos son fermiones, que no pueden ocupar un mismo nivel de energía a la vez, entonces se acumulan desde el nivel mínimo de energía hasta una energía máxima, llamada energía de Fermi⁴. Todos los niveles abajo de esta energía están ocupados, y todos los niveles arriba están desocupados. Sin embargo, ya sea por fluctuaciones térmicas, por un potencial eléctrico externo, o por fotones incidentes en el material, los electrones pueden ser excitados por encima de la energía de Fermi. Cuando hacen esto, dejan a un nivel de energía sin ocupar por debajo de la energía de Fermi. A este nivel desocupado se le denomina hueco, y tiene la propiedad de que se comporta igual que un electrón, pero con carga eléctrica positiva.

La forma de la estructura de bandas depende completamente del arreglo cristalino. En algunos casos se forma una separación entre dos bandas de energía, llamada brecha de banda. Esto causa que se tengan niveles de energía prohibidos, en donde si se quiere excitar a un electrón para que pase a de la banda inferior a la superior, se necesita inyectar una energía mayor a la de la brecha de banda ΔE . A la banda de energía inferior se le denomina banda de valencia, y a la de energía superior banda de conducción. Los electrones en la banda de valencia corresponden a los amarrados a los átomos y los de la de conducción a los electrones libres que pueden formar una corriente eléctrica. Para los huecos pasa lo contrario: En la banda superior no conducen, y en la banda inferior sí.

¹El nombre fotón no lo dio Planck, en su época a estos paquetes se les decía *cuanta de luz*. Fue Gilbert N. Lewis en 1926 quien primero utilizó este nombre y Arthur C. Compton, en 1928, quien lo popularizó[2].

²Una escala física, por ejemplo la escala cuántica, son las dimensiones físicas que debe tener un sistema para que ciertos fenómenos se manifiesten de manera significativa. Estas dimensiones son espacio-temporales, pero también incluyen la energía y el momento.

³La acción es, de cierta forma, la cantidad que indica el “costo” que un sistema físico requiere para tomar una configuración particular.

⁴La energía de Fermi es denotada por E_F , aunque a veces también es aproximada sin distinción al potencial químico μ , que es la energía necesaria para agregar un electrón al sistema.

Un semiconductor es un material cristalino cuya estructura de bandas tiene una brecha menor a 3,6 eV [4]. Los aislantes tienen brechas mayores a 3,6 eV, donde la energía de Fermi se ubica en este nivel prohibido, por lo que no son buenos conductores de corriente eléctrica. Los conductores no tienen brecha, o bien su energía de Fermi se ubica en una banda permitida, por lo que sí conducen corriente eléctrica. De esta forma los semiconductores tienen una conductividad en un punto intermedio entre los conductores y los aislantes, que además tiene la particularidad [5] de que aumenta con la temperatura debido a efectos térmicos (la de los conductores desciende con temperatura).

Cierto dopaje de impurezas e imperfecciones en un semiconductor puede cambiar drásticamente sus propiedades electrónicas [4]:

Si un semiconductor es dopado por átomos donadores de electrones (de valencia mayor), el electrón de valencia extra se sumará a la conducción, dejando al núcleo ionizado con carga positiva (ver figura 2). Así, se tendrá un desequilibrio entre electrones y huecos, siendo los electrones los portadores de carga mayoritaria. Este arreglo recibe el nombre de semiconductor tipo N.

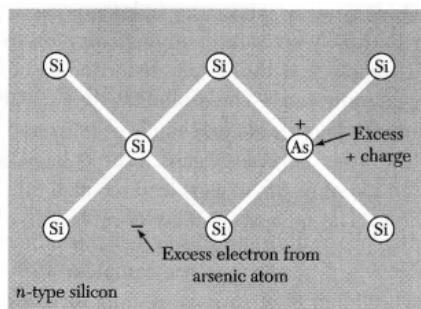


Figura 2: Esquema de un Semiconductor tipo N extraído de [4]. Consiste en un arreglo base de Silicio con 4 electrones de valencia, e impurezas de Arsénico con 5 electrones de valencia. El quinto electrón se suma a la conducción.

Si, por otra parte, el semiconductor es dopado por átomos receptores de electrones (de valencia menor), se habrá removido un electrón de conducción para formar el enlace, dejando un hueco para la conducción y un nódulo con exceso de carga negativa (-) (ver figura 3). De esta forma los huecos serán los portadores de carga mayoritaria con respecto a los electrones. Este arreglo recibe el nombre de semiconductor tipo P.

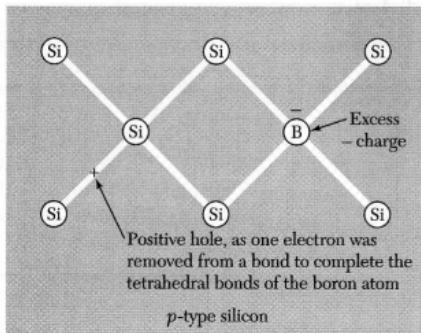


Figura 3: Esquema de un Semiconductor tipo P extraído de [4]. Consiste en un arreglo base de Silicio con 4 electrones de valencia, e impurezas de Boro con 3 electrones de valencia. El cuarto electrón deja un hueco que se suma a la conducción.

Una unión N-P, también llamada diodo, es una unión entre dos semiconductores tipo N y tipo P. Del lado N hay exceso de electrones, y del lado P hay exceso de huecos (ver figura 4). Por difusión, y en ausencia de campos electromagnéticos externos, algunos electrones pasan del lado N al lado P, pero también algunos huecos pasan del lado P al lado N. Eso dejará del lado N un exceso de átomos ionizados positivos, y del lado P un exceso de átomos ionizados negativos. En las zonas lejos de la unión se tendrá un potencial electrostático positivo para los cristales N y uno negativo para los cristales P. Eso crea la llamada *zona de depleción* en la interfaz de los materiales, en la cual se tiene un campo eléctrico intrínseco dado por el gradiente de potencial entre los cristales, que finalmente equilibra al sistema.

Para que un electrón pase del cristal N al cristal P necesitará una energía mayor a eV_{th} , donde V_{th} es la diferencia de potencial inducida entre los cristales (su nombre técnico es voltaje umbral, o *threshold* en inglés; de ahí el subíndice

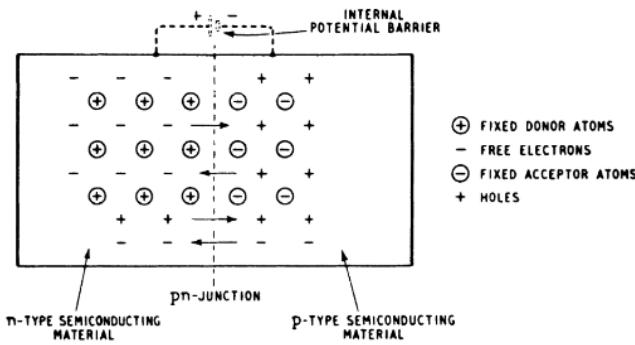


Figura 4: Esquema una unión N-P extraído de [5]. Se muestra el patrón de las cargas fijas dadas por los núcleos de las impurezas, y las cargas móviles dadas por los electrones de valencia de las impurezas.

con el que se denota). La cantidad de electrones con energía mayor a eV_{th} está dada por el factor de Boltzmann [6]

$$I_N = I_0 \exp(-eV_{th}/k_B T), \quad (4)$$

donde I_0 depende de las condiciones del material, e es la carga eléctrica del electrón, k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura. Así también, en el cristal P se tendrán electrones en los núcleos que, por efectos térmicos, se saltarán a la capa de conducción. Consecuentemente el campo eléctrico intrínseco los empujará al cristal N. Eso creará una corriente inversa con el mismo factor de Boltzmann

$$I_P = -I_0 \exp(-eV_{th}/k_B T). \quad (5)$$

La suma de estas dos corrientes térmicas produce corriente total neutra en ausencia de campos.

Al introducir una diferencia de potencial V en una conexión directa (lado P conectado a un voltaje mayor que el lado N), el gradiente entre la frontera cambiará a $V - V_{th}$. La generación térmica de electrones en el cristal P permanecerá inalterada, por lo que se forma una corriente neta

$$I = I_0 \left(e^{-e(V_{th}-V)/k_B T} - e^{-eV_{th}/k_B T} \right) = I_0 e^{-eV_{th}/k_B T} \left(e^{eV/k_B T} - 1 \right). \quad (6)$$

Sin embargo los diodos no son ideales. En general la corriente resulta ser

$$I = I_0 e^{-eV_{th}/nk_B T} \left(e^{eV/nk_B T} - 1 \right), \quad (7)$$

donde n es el factor de idealidad que depende del diodo. A I_0 se le denomina corriente inversa de saturación, ya que es la inducida a temperaturas altas. Esta ecuación es conocida como la ecuación de Schockley.

Para los voltajes usados en este experimento se cumple que $e^{eV/nk_B T} \gg 1$, por lo que

$$I = I_0 e^{(V-V_{th})/nk_B T}. \quad (8)$$

Ciertos arreglos de cristales N-P permiten que al aplicar un voltaje en conexión directa y se produzca una corriente, se puedan emitir fotones. A tales arreglos se les denomina LED (*Light-emitting diode* por sus siglas en inglés). El fenómeno surge del encuentro de los electrones con los huecos en la unión entre los dos cristales (ver figura 5). Los electrones del lado N son inyectados al lado P, y los huecos del lado P son inyectados N. Sin embargo, al llegar a la unión los electrones descienden al nivel de energía disponible por la presencia del hueco, disminuyendo su energía por eV_{th} para así aniquilarse con el hueco. Al pasar de la banda de conducción a la de valencia, el electrón emite un fotón con esa misma energía

$$E = eV_{th}. \quad (9)$$

Por otro lado, la relación de Planck

$$E = h\nu, \quad (10)$$

nos dice que esos fotones se emitirán a una frecuencia ν definida, emitiendo luz de un mismo color. Juntando estas dos ecuaciones, vemos que

$$V_{th} = \frac{h}{e}\nu. \quad (11)$$

Es decir, el diodo con voltaje umbral V_{th} produce luz a una frecuencia relacionada linealmente, y con pendiente h/e . De modo que, si uno mide V_{th} y ν para diferentes LEDs, y asume a la carga eléctrica fundamental e como conocida, puede determinar el valor de h .

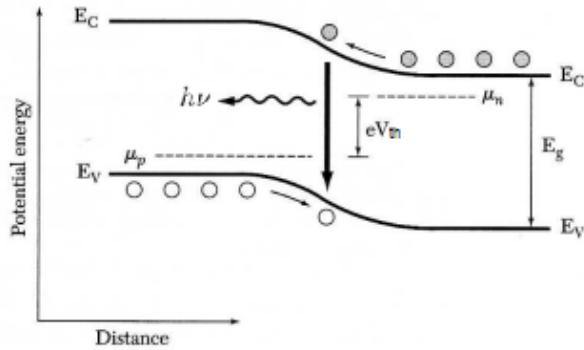


Figura 5: Esquema de la brecha de banda en un LED extraído de [4]. Las bandas de valencia E_V y de conducción E_C cambian al transitar de un cristal a otro, generando una diferencia de energía eV_{th} en la unión. El paso de corriente hace que los electrones (círculos oscuros) y los huecos (círculos blancos) se recombinen, generando fotones con energía bien definida.

1.2. Objetivo

El objetivo principal de este experimento es determinar la constante de Planck en un circuito electrónico simple usando las propiedades de los diodos LED. Un objetivo secundario es determinar la viabilidad del arreglo experimental en un ámbito casero: Determinar si con componentes caseros es posible obtener la frecuencia y voltaje de umbral de múltiples diodos LED, y si con estos datos se puede hacer un ajuste satisfactorio a la constante de Planck. Para ello se propondrán diferentes métodos con los cuales medir y/o determinar la frecuencia ν y el voltaje de umbral V_{th} de forma casera. Se espera poder determinar cuál de los métodos propuestos otorga mejores resultados.

2. Procedimiento experimental

El experimento está basado en dos circuitos distintos, pero cuya idea es, esencialmente, la misma. Se determina el voltaje umbral de distintos diodos midiendo la corriente y el voltaje a través del mismo. Debido a que ninguno de los multímetros empleados tenía un amperímetro funcional la corriente se determinó de manera indirecta a través del voltaje y la Ley de Ohm. Los detalles de la medición de corrientes se explican posteriormente. Otro problema es la determinación de las frecuencias de la luz emitida por los LEDs, ya que se desconoce al fabricante. La determinación de esta se detalla en la siguiente subsección.

2.1. Determinación de la frecuencia

Dado que no se cuenta con un espectrómetro, medir la longitud de onda λ de la luz emitida (a partir de la cual se puede obtener la frecuencia $\nu = c/\lambda$) directamente no es posible, y tampoco se encontraron métodos caseros sencillos para medirla de manera alternativa. Es por ello que para determinar la longitud de onda se recurrió a una **tabla de especificaciones de LEDs con código de color y gráficas de la distribución en el espectro electromagnético** [7]. Se asoció cada uno de los LEDs con la distribución de intensidad correspondiente a su color. Suponiendo que las longitudes de onda se distribuyen de manera gaussiana (que se cumple en buena aproximación) se determina la longitud de onda como el promedio o valor central de la distribución λ_0 , y la incertidumbre como el ancho de la curva dado por la desviación estándar σ_λ . Es decir, se mide el ancho cuando la distribución tiene altura⁵ $w(\lambda = \lambda_0 \pm \sigma_\lambda) = \exp(-(\lambda_0 - (\lambda_0 \pm \sigma_\lambda))^2/(2\sigma_\lambda^2)) = 1/e^{1/2} \approx 0,607$. Con estos datos es fácil transformar a frecuencia usando $\nu = c/\lambda$.

La gráfica de estas distribuciones se muestra en la figura 6. Se puede observar que incluso un mismo color tiene diferentes distribuciones de tonalidades. En general se tomó la distribución que mejor se approximaba a la tonalidad del diodo usado, **comparado con la tabla** [7]. Para los diodos rojo 1 y rojo 2 se tomó la distribución denominada como 'Red (5)', para los verde 1 y verde 2 la 'Ultra Green (A)', para el amarillo la 'Yellow (8)', para azul 1 el 'Pure Blue (C)', para azul 2 el 'Ultra Blue (D)' y para el infrarrojo el 'Infrared (1)' (ver figura 9 para el nombre de los diodos, y figura 6 para

⁵Esto se puede hacer directamente así porque las curvas no están normalizadas y cumplen que en el promedio o valor central la distribución vale 1.

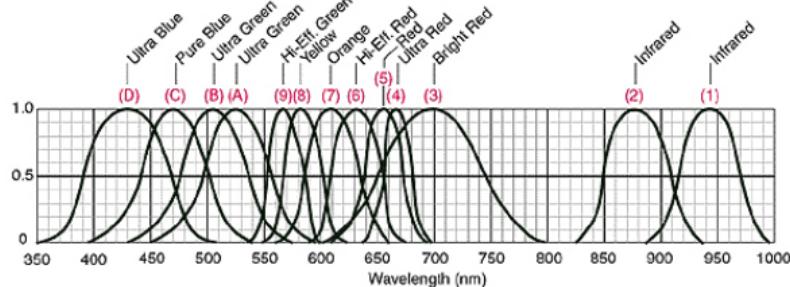


Figura 6: Distribuciones de intensidad relativa para diodos LED como función de la longitud de onda mostradas en [7].

el nombre de las distribuciones). En el infrarrojo, dado que no podemos observar su tonalidad, se tomó la libertad de escoger ese por ser el que da mejores resultados.

2.2. Determinación del voltaje umbral

La determinación de V_{th} es un tanto más complicada. La ecuación (8) no nos permite ajustar directamente a V_{th} al tomar mediciones de voltaje y corriente a través del diodo, dado que el factor e^{-eV_{th}/nk_BT} siempre se puede absorber en la constante I_0 desconocida. Se han hecho propuestas [8][9] para que con esa ecuación se pueda determinar a h de manera alternativa. Sin embargo estas asumen que todos los diodos tienen el mismo factor de idealidad⁶, lo cual no es verdad y a los autores no les dio buenos ajustes. Esto se considera impreciso, por lo que se analizarán otros métodos.

Método 1:

Con la ecuación (8) podemos partir de la suposición de que V_{th} es el voltaje para el cual la corriente comienza a ser no nula. Es decir, este puede ser el voltaje a partir del cual la corriente empieza a aumentar de manera notable. Con esto en mente se puede hacer un ajuste lineal

$$I(V) = m(V - V_{th}) \quad (12)$$

para los datos en la región creciente de la corriente para los cuales se puede ajustar esta recta. A partir de este ajuste, la ordenada al origen se tomará como V_{th} .

Método 2:

Se puede suponer por otra parte que el voltaje V_{th} es el voltaje mínimo necesario para que el LED emita luz. Por ello, se puede variar un voltaje a través del LED de forma manual y medir el voltaje a partir del cual el LED enciende. Se propone entonces que esa sería una medición directa de V_{th} . Inicialmente no se tenía contemplado hacer este método, ya que se pensaba que era impreciso⁷. Pero dadas las complicaciones en las mediciones del método 1, este método se realizó de manera auxiliar. Cabe mencionar que aunque en el infrarrojo no se observa cuando es que se enciende el LED, se logró medir un voltaje umbral tomando el punto en el cual un giro mínimo en el potenciómetro lleva a la saturación del diodo. Este comportamiento se extrapoló de el comportamiento de los otros 7 LEDs en la región cercana al voltaje.

2.3. Descripción de los experimentos

Lo que se quiere lograr en el experimento, y la mayor dificultad de este, es medir la corriente a través del diodo y compararla con el voltaje del mismo. El circuito más sencillo para hacer esto es un circuito de operación de LED básico, con un potenciómetro antes de una resistencia fija (de seguridad), con un amperímetro conectado antes del diodo y un voltímetro conectado a ambas patas. Como no se tenía en posesión un amperímetro funcional se usa la Ley

⁶Si tomamos el logaritmo de la ecuación (8), se obtiene una relación lineal $\ln(I) = mV + b$, donde $m = e/(nk_BT)$ y $b = \ln(I_0) - eV_{th}/(nk_BT)$. Midiendo voltajes y corrientes se puede ajustar a m y b . De ahí se puede obtener una relación lineal dada por $y(\nu) \equiv -be/m = eV_{th} - \ln(I_0)nk_BT = h\nu - \ln(I_0)nk_BT$, que tiene pendiente h y ordenada al origen $-\ln(I_0)nk_BT$. Sin embargo esta última depende del factor de idealidad, el cual cambia en cada diodo.

⁷La imprecisión viene de que en muchos casos lo que se mide en realidad será el voltaje de saturación y no el voltaje umbral, pero si la pendiente de la recta a ajustar es suficientemente grande, estos van a ser parecidos y tomar el voltaje de saturación como umbral es buena aproximación.

de Ohm $I = V_2/R_2$ para determinar una corriente (que es la misma corriente que pasa a través del diodo I_d) a partir de un voltaje y una resistencia. Esto sería el método 1. Con esto se mide un voltaje V_1 para el diodo y un voltaje V_2 correspondiente a la resistencia R_2 . R_2 ⁸ también juega el papel de resistencia de seguridad. El diagrama de este circuito se puede observar en la figura 7.

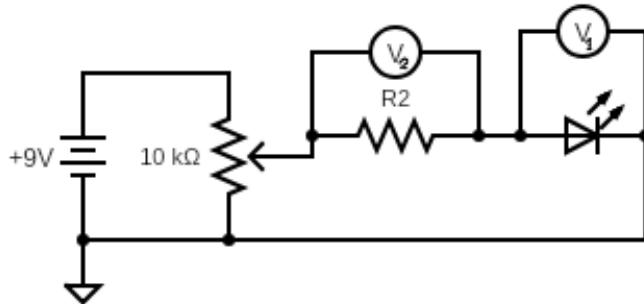


Figura 7: Circuito para el primer método. $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

El problema con el método anterior es que no se toma en cuenta la impedancia del multímetro $Z \sim 10 M\Omega$, que da una Ley de Ohm real como $I = V_2(R_2 + Z)/(R_2Z)$. Usando este número para Z y $R_2 = 100,2 \Omega$, se obtiene la resistencia efectiva $R_{eff} = R_2Z/(R_2 + Z) \approx 99,999 \Omega$, donde este error es significativo para mediciones de precisión, como la que se quiere realizar. En el método 1 no se tomo en cuenta esto, pues no se logró encontrar algún manual o datasheet del multímetro relevante (*Isotronic RL-830A*) y se considera que puede haber un error sistemático. Lo que se hace en general para resolver problemas de esta naturaleza es poner un amplificador operacional (opamp) en lugar del voltímetro directamente. Aquí se aprovecha la impedancia de entrada sumamente grande del opamp, para que la impedancia efectiva del circuito sea la de la resistencia R_2 . El convertidor de corriente a voltaje es una configuración sencilla del opamp, donde la resistencia deseada da retroalimentación a la entrada inversora, mientras que la entrada no-inversora se conecta a tierra. Esto sería una solución trivial, si no fuera por el problema de que la salida del opamp tiene voltaje negativo. El LED operado de esta forma impide el paso de corriente (hasta cierto voltaje) y no es posible observar las curvas deseadas.

La solución a este problema es darle la vuelta al circuito, es decir, invertir la polaridad de todo el circuito. Para esto primero se volteó la batería y el LED. La tierra ahora va a estar en la parte positiva de la batería. Por seguridad del LED se movió la resistencia de seguridad, R_1 , colocándola antes del polo positivo del dispositivo. Después del polo negativo se coloca el convertidor de corriente a voltaje y después de este el potenciómetro, que se une con una pata al polo negativo de la batería y la otra con el polo opuesto. El diagrama del circuito su puede observar en la figura 8. Inicialmente se esperaba realizar el método 1 también en este circuito. Sin embargo el diodo se saturaba con la mínima perturbación del potenciómetro, por lo que fue imposible tomar datos sobre la recta deseada. De ahí es que en este circuito se recurrió al método 2, en el cual únicamente se observaba el voltaje a partir del cual el diodo se enciende.

Los materiales usados para el armado de fueron: una protoboard, cables, resistencias de carbón de distintos valores ($R_1 = 102,0 \pm 0,05 \Omega$ y $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$), un potenciómetro multivuelta de $10 k\Omega$, un multímetro *Isotronic RL-830A*, para medir V_1 , un multímetro *Radioshack 220-0820*, para medir V_2 , un amplificador operacional *LM741*, una batería⁹ de 9 V, una fuente de computadora adaptada para dar $\pm 12 V$ (para el opamp) y LEDs de distintos colores. Los LEDs se ordenaron por color, y en el caso de los LEDs, azul, rojo y verde se usaron dos modelos distintos. En todos los casos se desconoce al fabricante de los LEDs y se caracterizaron con una tabla de longitudes de onda. Los LEDs empleados se denominaron como: infrarrojo, rojo 1, rojo 2, amarillo, verde 1, verde 2, azul 1 y azul 2 (ver figura 9).

3. Resultados

Se presentan los datos medidos y las constantes relevantes en la sección 3.1. y los datos analizados (mediante una regresión por mínimos cuadrados) en la sección 3.2. En la sección 3.3. se discuten los resultados.

⁸Se optó por el nombre R_2 , pues este corresponde a la misma resistencia usada en el método 2.

⁹En realidad se usó un aparato que coloca 12 pilas AA (1,5 V) en serie, para obtener una equivalente de 9 V.

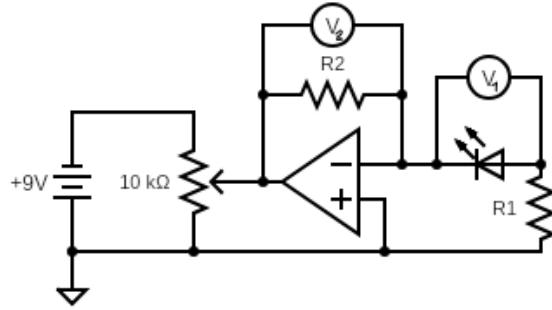


Figura 8: Circuito para el segundo método. $R_1 = 102,0 \pm 0,05 \Omega$ y $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$. La fuente de voltaje de los opamps no se muestra en el esquema.



Figura 9: Los diodos usados y sus nombres. Abajo, de izquierda a derecha: infrarrojo, rojo 1, amarillo, verde 1 y azul 1. Arriba, de izquierda a derecha: rojo 2, verde 2 y azul 2.

3.1. Datos experimentales

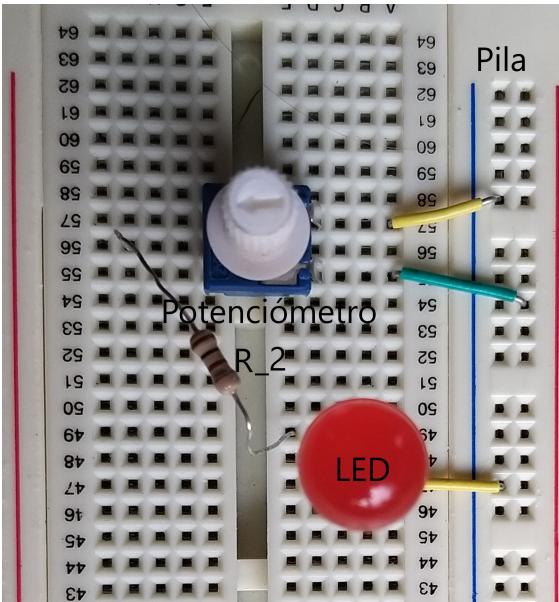
Las constantes físicas relevantes son la constante de Planck esperada h , la velocidad de la luz c y la carga elemental e . En el sistema internacional sus valores son

$$h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}, \quad (13)$$

$$e = 1,602176634 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad (14)$$

$$c = 299792458 \text{ m/s}. \quad (15)$$

Las longitudes de onda determinadas para cada LED se muestran en el cuadro 1. Estos valores fueron utilizados tanto para el método 1 como para el método 2, pues estos sólo consisten en diferentes maneras de medir el voltaje umbral.



(a) Circuito 1. La pila y los multímetros están desconectados.

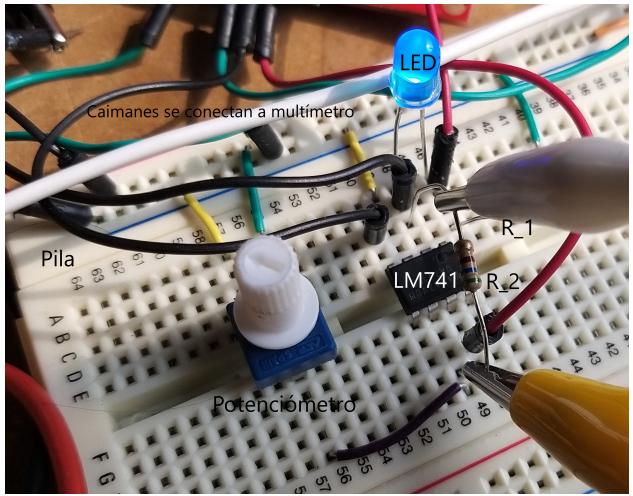
(b) Circuito 2. Los caimanes en R_2 están conectados a un multímetro, los cables rojo y negro en paralelo con el LED al otro.

Figura 10: Fotografías de la parte central del los experimentos. En la periferia se encuentran la batería, la fuente de computadora y los multímetros.

LED	λ [nm]	σ_λ [nm]
Rojo 1	657	15
Rojo 2	657	15
Verde 1	525	27
Verde 2	525	27
Amarillo	583	18
Azul 1	470	27
Azul 2	430	35
Infrarrojo	945	22

Cuadro 1: Longitudes de onda λ determinadas para cada LED. Valores tomados de la figura 6 con la metodología vista en la sección 2.1.

Los cuadros 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11 muestran las mediciones del método 1 para cada uno de los ocho LEDs. Debido a su extensión se decidió ubicarlos en un apéndice. Se muestran V_1 , el voltaje entre la entrada y salida del LED, V_2 , el voltaje en la resistencia, y la corriente a través del LED dada por la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$ con $R_2 = 100,2 \pm 0,05\Omega$. Así también se muestra el respectivo error experimental de cada medición. De estos datos se obtendrá en la siguiente sección el voltaje umbral $V_{1,th}$ de cada diodo mediante el método 1.

El cuadro 2 muestra las mediciones directas del método 2 para el voltaje de umbral $V_{1,th}$, así como su frecuencia asociada obtenida mediante la relación $\nu = c/\lambda$ con las longitudes de onda del cuadro 1.

3.2. Análisis de datos

La finalidad de los dos métodos es encontrar un ajuste a la relación lineal

$$V_{1,th} = M\nu. \quad (16)$$

con

$$M = h/e. \quad (17)$$

Con los valores reales de h y e (ecuaciones (13) y (14)) esta pendiente tiene un valor esperado de

$$M = 4,13566769 \times 10^{-15} \text{ V/Hz}. \quad (18)$$

LED	$V_{1,th}$ [V]	$\sigma_{V_{1,th}}$ [V]	ν [Hz]	σ_ν [Hz]
Rojo 1	2.03	0.05	4.56e+14	0.10e+14
Rojo 2	1.96	0.05	4.56e+14	0.10e+14
Verde 1	2.42	0.05	5.71e+14	0.29e+14
Verde 2	2.43	0.05	5.71e+14	0.29e+14
Amarillo	2.16	0.05	5.14e+14	0.16e+14
Azul 1	2.72	0.05	6.38e+14	0.37e+14
Azul 2	2.89	0.05	6.97e+14	0.57e+14
Infrarrojo	1.19	0.05	3.17e+14	0.07e+14

Cuadro 2: Voltaje de umbral $V_{1,th}$ directamente medido para los ocho LEDs con el **método 2** y sus frecuencias obtenidas mediante la relación $\nu = c/\lambda$ con las longitudes de onda del cuadro 1.

Al hacer un ajuste con los datos experimentales a M_{fit} y, tomando a la carga del electrón como conocida de manera exacta ($e = 1,602176634 \times 10^{-19}$ C), se planea obtener un valor ajustado para la constante de Planck

$$h_{fit} = eM_{fit}. \quad (19)$$

A lo largo de esta sección, para cada variable $f(x_i)$, ya sea por errores de medición o por las varianzas en el ajuste, la propagación de incertidumbres se calcula con la ecuación

$$(\sigma_f)^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (\sigma_{x_i})^2. \quad (20)$$

Método 1:

Las figuras 11 y 12 muestran las gráficas de los datos experimentales del método 1 para los ocho diodos. Se grafica la corriente a través del LED, I_d , como función del voltaje entre la entrada y salida del LED, V_1 , correspondiente a los cuadros 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. De estos, solo un conjunto de los últimos datos que se comportan de manera lineal fueron ajustados. Su número depende del diodo, y se especifica en cada gráfica. Se muestran entonces los datos ajustados (cruces en rojo) y los medidos pero no ajustados (puntos en azul). Se muestra también el ajuste para la ecuación

$$I_d(V_1) = m(V_1 - V_{1,th}), \quad (21)$$

(línea punteada en verde). Su raíz se toma como el voltaje umbral $V_{1,th}$ (círculo relleno en magenta). Las barras de error del ajuste surgen de la varianza de los parámetros ajustados.

Para cada uno de los ocho diodos, los ajustes a la ecuación (21), dados por las figuras 11 y 12, se muestran en el cuadro 3. También se muestran las frecuencias obtenidas mediante la relación $\nu = c/\lambda$ con las longitudes de onda del cuadro 1.

LED	$V_{1,th}$ [V]	$\sigma_{V_{1,th}}$ [V]	ν [Hz]	σ_ν [Hz]
Rojo 1	1.714	0.002	4.56e+14	0.10e+14
Rojo 2	1.781	0.004	4.56e+14	0.10e+14
Verde 1	1.888	0.003	5.71e+14	0.29e+14
Verde 2	2.666	0.005	5.71e+14	0.29e+14
Amarillo	1.822	0.002	5.14e+14	0.16e+14
Azul 1	2.802	0.008	6.38e+14	0.37e+14
Azul 2	2.879	0.009	6.97e+14	0.57e+14
Infrarrojo	1.133	0.004	3.17e+14	0.07e+14

Cuadro 3: Voltaje de umbral $V_{1,th}$ ajustado para los ocho LEDs con el **método 1** y sus frecuencias obtenidas mediante la relación $\nu = c/\lambda$ con las longitudes de onda del cuadro 1.

Con los datos del cuadro 3 se grafica la relación $V_{1,th} - \nu$ en la figura 13. **Se tienen los datos ajustados** (cruces en rojo), el ajuste para la ecuación $V_{1,th}(\nu) = M\nu$, con

$$M_{fit} = 3,688 \times 10^{-15} \pm 1,281 \times 10^{-16} \text{ V/Hz} \quad (22)$$

(línea rayada en verde) y el modelo esperado dado por la misma ecuación, pero con la pendiente esperada dada por $M = 4,13566769 \times 10^{-15}$ V/Hz (línea punteada en azul).

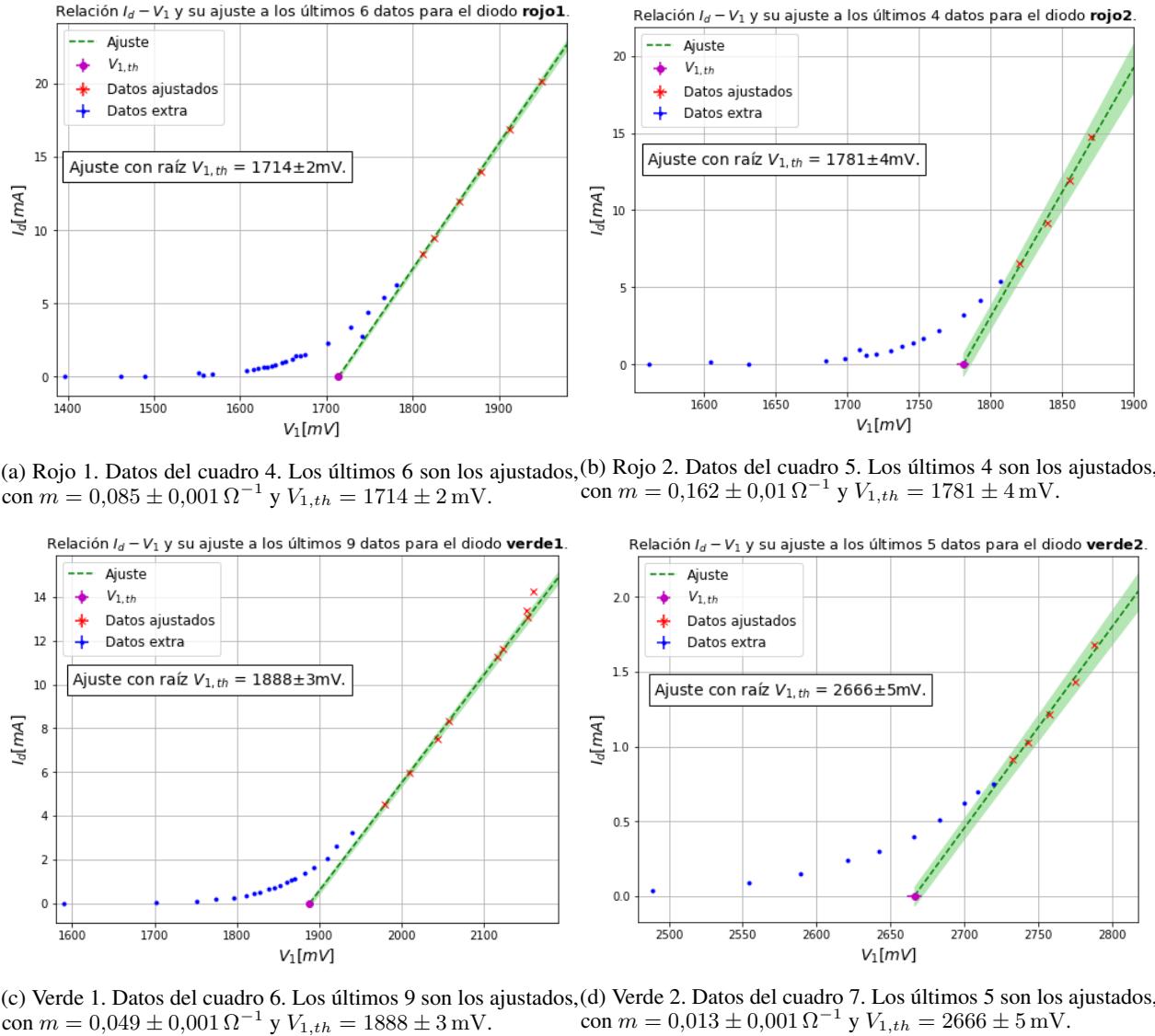
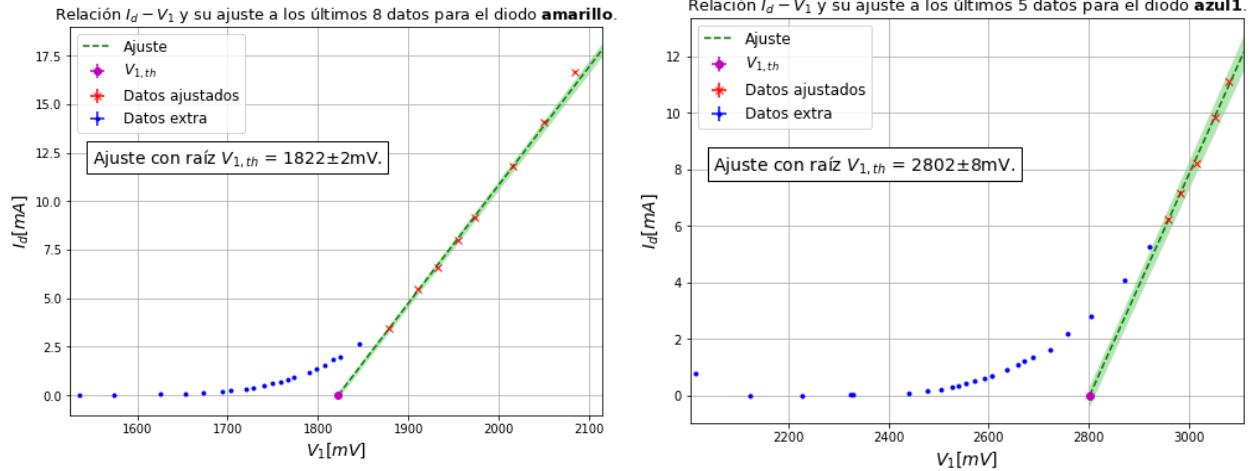
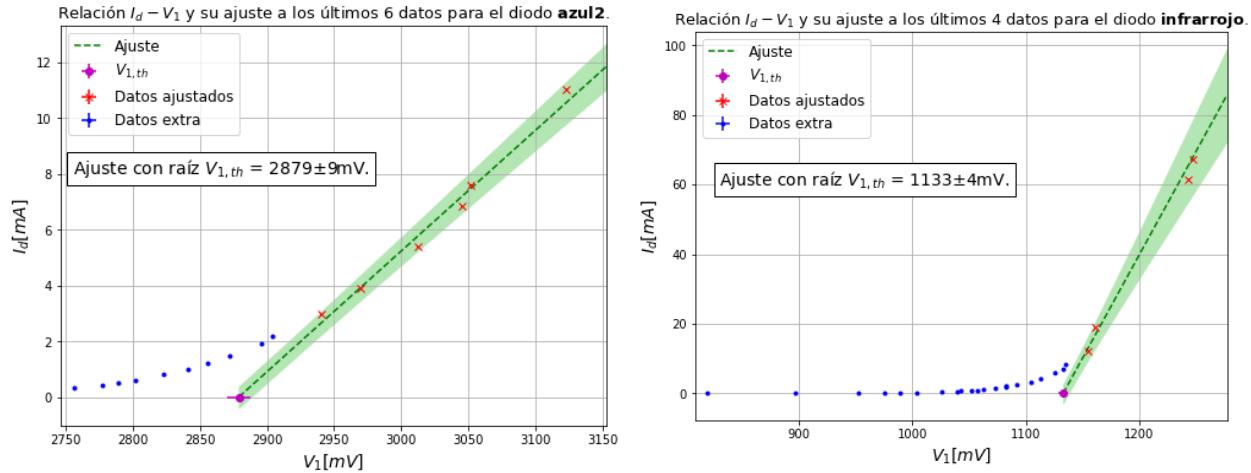


Figura 11: Datos experimentales del método 1 para los diodos rojo 1, rojo 2, verde 1 y verde 2. Se tienen los datos ajustados (cruces en rojo) y los medidos pero no ajustados (puntos en azul). Se muestra también el ajuste para la ecuación $I_d(V_1) = m(V_1 - V_{1,th})$ (línea rayada en verde). Lo relevante es que su raíz se toma como el voltaje umbral $V_{1,th}$ (círculo relleno en magenta).



(a) Amarillo. Datos del cuadro 8. Los últimos 8 son los ajustados, con $m = 0,061 \pm 0,001 \Omega^{-1}$ y $V_{1,th} = 1822 \pm 2 \text{ mV}$.

(b) Azul 1. Datos del cuadro 9. Los últimos 5 son los ajustados, con $m = 0,039 \pm 0,001 \Omega^{-1}$ y $V_{1,th} = 2802 \pm 8 \text{ mV}$.



(c) Azul 2. Datos del cuadro 10. Los últimos 6 son los ajustados, con $m = 0,043 \pm 0,003 \Omega^{-1}$ y $V_{1,th} = 2879 \pm 9 \text{ mV}$.

(d) Infrarrojo. Datos del cuadro 11. Los últimos 4 son los ajustados, con $m = 0,594 \pm 0,089 \Omega^{-1}$ y $V_{1,th} = 1133 \pm 4 \text{ mV}$.

Figura 12: Datos experimentales del método 1 para los diodos amarillo, azul 1, azul 2 e infrarrojo. Se tienen los datos ajustados (cruces en rojo) y los medidos pero no ajustados (puntos en azul). Se muestra también el ajuste para la ecuación $I_d(V_1) = m(V_1 - V_{1,th})$ (línea rayada en verde). Lo relevante es que su raíz se toma como el voltaje umbral $V_{1,th}$ (círculo relleno en magenta).

Con esto, y asumiendo la carga elemental como conocida ($e = 1,602176634 \times 10^{-19}$ C) se obtiene una constante de Planck ajustada

$$h_{fit} = eM_{fit} = 5,909 \times 10^{-34} \pm 2,053 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (23)$$

El error relativo de la constante de Planck ajustada con respecto a la esperada es

$$\frac{|h_{fit} - h|}{h} \times 100 \% = 10,8 \%. \quad (24)$$

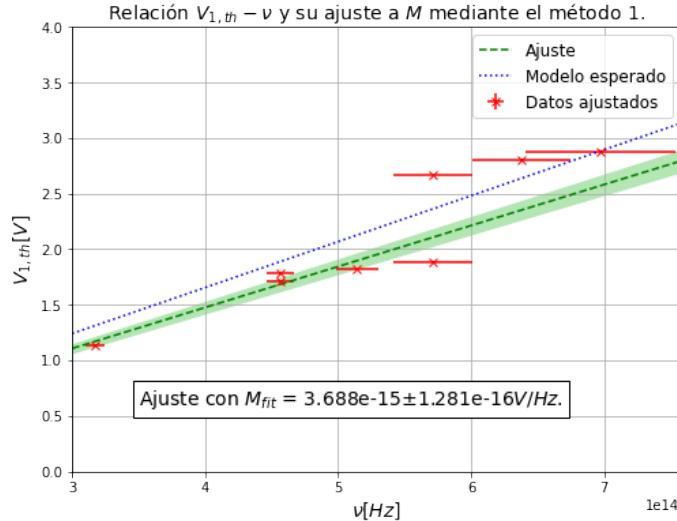


Figura 13: Relación $V_{1,th} - \nu$ para los ocho diodos obtenida con el **método 1** (cuadro 3). Se tienen los datos ajustados (cruces en rojo), el ajuste lineal a $V_{1,th} = M\nu$ con $M_{fit} = 3,688 \times 10^{-15} \pm 1,281 \times 10^{-16}$ V/Hz (línea rayada en verde) y el modelo esperado dado por la misma ecuación, pero con $M = 4,13566769 \times 10^{-15}$ V/Hz esperada (línea punteada en azul).

Método 2:

Con el método 2 ya se obtuvieron directamente del experimento los voltajes de umbral para cada diodo, mostrados en el cuadro 2. Con estos se grafica la relación $V_{1,th} - \nu$ en la figura 14. Se tienen los datos ajustados (cruces en rojo), el ajuste para la ecuación $V_{1,th}(\nu) = M\nu$, con

$$M_{fit} = 4,224 \times 10^{-15} \pm 4,849 \times 10^{-17} \text{ V/Hz} \quad (25)$$

(línea rayada en verde) y el modelo esperado dado por la misma ecuación, pero con la pendiente esperada dada por $M = 4,13566769 \times 10^{-15}$ V/Hz (línea punteada en azul).

Con esto, y asumiendo la carga elemental como conocida ($e = 1,602176634 \times 10^{-19}$ C) se obtiene una constante de Planck ajustada

$$h_{fit} = eM_{fit} = 6,768 \times 10^{-34} \pm 7,769 \times 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{s}. \quad (26)$$

El error relativo de la constante de Planck ajustada con respecto a la esperada es

$$\frac{|h_{fit} - h|}{h} \times 100 \% = 2,1 \%. \quad (27)$$

3.3. Discusión

El método 1 fue el mas complicado de llevar cabo, pues para el ajuste al voltaje umbral se tuvieron que tomar numerosas mediciones de voltajes y corrientes. Como se observa en las figuras 11 y 12, los diodos sí siguen un claro comportamiento exponencial en acorde a la ecuación de Shockley (8). La aproximación lineal para las corrientes mayores es bastante bueno en todos los casos, obteniendo múltiples puntos dentro del ajuste a las rectas. Sin embargo los valores ajustados a $V_{1,th}$ por este método distan de los esperados en casi todos los casos excepto en los diodos azul 1

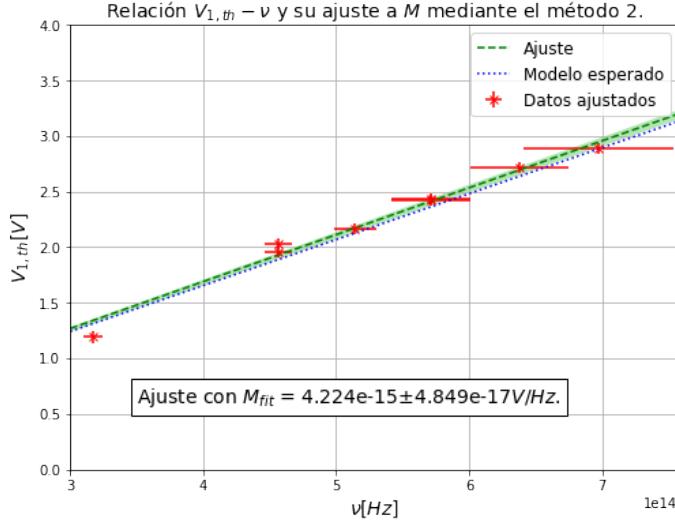


Figura 14: Relación $V_{1,th} - \nu$ para los ocho diodos obtenida con el **método 2** (cuadro 2). Se tienen los datos ajustados (cruces en rojo), el ajuste lineal a $V_{1,th} = M\nu$ con $M_{fit} = 4,224 \times 10^{-15} \pm 4,849 \times 10^{-17} \text{ V/Hz}$ (línea rayada en verde) y el modelo esperado dado por la misma ecuación, pero con $M = 4,13566769 \times 10^{-15} \text{ V/Hz}$ esperada (línea punteada en azul).

y azul 2 (ver figura 13), con discrepancias especialmente grandes para los diodos verde 1 y verde 2. No es de sorprender entonces que el ajuste a la constante de Planck tenga una discrepancia grande del 10,8 % con respecto a la esperada.

Estas discrepancias se pueden deber a múltiples razones. Dado que las mediciones de corrientes debían de ser de precisión, y llegaban a ser de ordenes pequeños, puede que el multímetro sí haya afectado al circuito. Eso se traduce en una impedancia de entrada que es un factor que cambia globalmente los valores de las corrientes calculados a partir del voltaje medido. Sin embargo eso (siendo un factor global) no explica la gran discrepancia entre los diodos verde 1 y verde 2. De hecho, ni siquiera en el rango de frecuencias de todas tonalidades de verde dentro del espectro electromagnético se pudo obtener un buen ajuste para estos dos diodos. **Eso podría significar que uno, o ambos, de los diodos en realidad está pintado**, y emite luz en otra zona del espectro electromagnético. Dichos LEDs son poco frecuentes, pero si existen. Sin embargo el método 2 no tiene esta discrepancia para ninguno de los diodos verdes, ambos ajustan bien (y de hecho tienen valores casi idénticos de $V_{1,th}$). Eso sugiere que la siguiente posibilidad es la más probable: El método en general, aunque preciso y sistemático, no es el adecuado para medir el voltaje umbral. Es decir, el valor medido por este método no corresponde en general al voltaje umbral. Esto es más evidente cuando se analiza el contraste de los resultados obtenidos con respecto al método 2.

El método 2, aunque se pensaba que era impreciso y se realizó de manera auxiliar, resultó dar mediciones directas al voltaje de umbral bastante cercanas a las esperadas (ver figura 13). Eso se traduce en un ajuste a la constante de Planck con una discrepancia del 2,1 % con respecto a la esperada, lo cual es bastante bueno, en especial considerando el contexto casero en el cual se realizó el experimento. Es importante recordar que dado que los LEDs se saturaban muy rápidamente no es fácil distinguir si el voltaje medido es el voltaje umbral o el voltaje de saturación.

Las diferencias entre los dos métodos se pueden explicar pensando en los circuitos de ambos. Si bien la forma sistemática de ajustar rectas y tomar el voltaje umbral como la raíz del ajuste es buena, hay muchos factores que determinan la pendiente y raíz de la recta que no se controlan y, peor aún, no se conocen. Estos incluyen el factor de idealidad n y la temperatura del diodo T . Encima de esto está el hecho de que la impedancia del multímetro en el método 1 no se tomó en cuenta e introduce un error sistemático, cuyo efecto es que el voltaje medido sea menor al real. Esto se expresa como una menor pendiente y por ende un menor voltaje umbral.

El método 2 invierte el circuito para poder hacer mediciones de precisión de la corriente. Con esto los problemas con el multímetro desaparecen. Sin embargo el precio a pagar es que la recta que se quiere ajustar ahora tiene una pendiente muy grande. Tanto es así que para fines prácticos (con el material que se empleó) es imposible tomar más de una medición sobre esta. Por esa razón se mide auxiliarmente el punto donde el LED se enciende, que debería estar entre el voltaje umbral y el voltaje de saturación del diodo. Resulta que esto da muy buenos resultados, y consecuentemente el método 2 es vastamente superior al método 1. Esto puede ser porque el circuito empleado en el método es intrínsecamente más apropiado para mediciones de precisión que el del método 1, pero no es fácil cuantificar

que tanto mejora el experimento con el cambio de circuitos. Se sigue sin poder controlar el factor de idealidad y la temperatura, que posiblemente influyen significativamente en el ajuste. El método de observación directa se salta estos problemas al ignorarlos. Se observa el encendido y ya. Si bien este voltaje puede ser el de saturación (que no necesariamente es igual al voltaje umbral), sigue siendo una mejor medición que el voltaje ajustado. Esto pone en general en duda si el método 1, aún con el circuito apropiado es mejor que una observación directa de cuando el diodo se enciende. La forma de probar esto sería con un potenciómetro de menor resistencia, para poder tomar datos sin que se sature el LED. Lamentablemente $10\text{ k}\Omega$ era la menor resistencia que se tenía para el potenciómetro, por lo que la pregunta queda abierta.

4. Conclusiones

Se hizo un ajuste a la constante de Planck dada por mediciones del voltaje umbral y frecuencia de la luz emitida en ocho LEDs. La frecuencia de la luz emitida se tomó de una gráfica de distribuciones de intensidad de un fabricante de LEDs. Para medir el voltaje umbral se realizaron dos métodos distintos. El método 1 consiste en un ajuste lineal a la corriente y voltaje a través del diodo, de manera que se interpola para obtener el voltaje umbral. El método 2 toma directamente el voltaje umbral como el mínimo voltaje aplicado para el cual se enciende el LED. La teoría del funcionamiento de un diodo es validada por las gráficas en el método 1, que muestran claramente una relación del tipo Shockley para la corriente y el voltaje a través del LED. Los resultados obtenidos para la constante de Planck en ambos métodos son bastante buenos, considerando la naturaleza casera del experimento. Con el primer método, usando un ajuste lineal sin opamp, se obtuvo $h = 5,909 \times 10^{-34} \pm 2,053 \times 10^{-35} \text{ J} \cdot \text{s}$, representando un error relativo de 10,8 %. Con el segundo método, de observación directa usando un opamp, se obtuvo $h = 6,768 \times 10^{-34} \pm 7,769 \times 10^{-36} \text{ J} \cdot \text{s}$, que corresponde a un error relativo del 2,1 %. El segundo método da resultados considerablemente mejores, pues usa un circuito más refinado, pero también pone en duda si esto se debe a que observar directamente el voltaje umbral es un mejor método que obtener este de un ajuste lineal. Para determinar esto de manera cuantitativa sería necesario (e interesante) rehacer el experimento con el circuito del método 2 usando un potenciómetro con una resistencia suficientemente pequeña para tomar varios datos en la región que se busca ajustar.

Referencias

- [1] Autor desconocido. *Planck Constant*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_constant. (última visita: 30.11.2020).
- [2] Autor desconocido. *Photon*. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Photon#Nomenclature>. (última visita: 06.12.2020).
- [3] International Science Council. Comitee on Data. *Fundamental Physical Constants*. URL: <https://codata.org/initiatives/strategic-programme/fundamental-physical-constants/>. (última visita: 1.12.2020).
- [4] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 8.^a ed. John Wiley & Sons Inc, 2005. Cap. 7: 'Energy Bands', 8: 'Semiconductor Cristals' y 17: 'Surface and Interface Physics', págs. 161-177, 185-213, 503-506.
- [5] M. James S. W. Amos. *Principles of Transistor Circuits: Introduction and Guide to the Design of Amplifiers, Function Generators, Recievers and Digital Circuits*. 8.^a ed. Newnes Books, 1994, págs. 1-20.
- [6] D.E. Evans. «Measurement of Boltzmann's constant». En: *Physics Education* 21.5 (1986), págs. 296-299. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0031-9120/21/5/008>.
- [7] Impact Lighting Inc. *Technical LED's: LED color chart*. URL: <http://www.impactlightinginc.com/pdf/colorchart.pdf>. (última visita: 6.12.2020).
- [8] K. Range. *Measuring Planck's constant with LEDs*. URL: https://www.ifsc.usp.br/~lavfis2/BancoApostilasImagens/ApConstantePlanck/ApCtePlanck2013/LED_h.pdf. (última visita: 1.12.2020).
- [9] A. Satz C. Artuso. «Determinación de la Constante de Planck Utilizando Leds». En: *Departamento de Física, Facultad de Ciencias exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires* (2001).

5. Apéndice: Tablas de mediciones de voltajes y corrientes del método 1.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
1397	0.5	0.3	0.05	2.99e-03	4.99e-04
1462	0.5	1.5	0.05	1.50e-02	4.99e-04
1489	0.5	3.1	0.05	3.09e-02	4.99e-04
1557	0.5	14.3	0.05	1.43e-01	5.04e-04
1568	0.5	18.3	0.05	1.83e-01	5.07e-04
1552	0.5	25.6	0.05	2.55e-01	5.15e-04
1607	0.5	41.8	0.05	4.17e-01	5.41e-04
1616	0.5	50.4	0.05	5.03e-01	5.59e-04
1621	0.5	57.4	0.05	5.73e-01	5.75e-04
1627	0.5	63.5	0.05	6.34e-01	5.91e-04
1631	0.5	68.8	0.05	6.87e-01	6.05e-04
1637	0.5	76.2	0.05	7.60e-01	6.27e-04
1641	0.5	83.1	0.05	8.29e-01	6.48e-04
1648	0.5	96.3	0.05	9.61e-01	6.92e-04
1653	0.5	104.9	0.05	1.05e+00	7.22e-04
1661	0.5	121.3	0.05	1.21e+00	7.84e-04
1670	0.5	141.2	0.05	1.41e+00	8.62e-04
1664	0.5	148.1	0.05	1.48e+00	8.90e-04
1675	0.5	155.3	0.05	1.55e+00	9.20e-04
1701	0.5	232.0	0.50	2.32e+00	5.12e-03
1742	0.5	276.0	0.50	2.75e+00	5.18e-03
1728	0.5	342.0	0.50	3.41e+00	5.27e-03
1748	0.5	438.0	0.50	4.37e+00	5.45e-03
1767	0.5	541.0	0.50	5.40e+00	5.67e-03
1781	0.5	628.0	0.50	6.27e+00	5.89e-03
1812	0.5	843.0	0.50	8.41e+00	6.52e-03
1825	0.5	945.0	0.50	9.43e+00	6.86e-03
1854	0.5	1202.0	0.50	1.20e+01	7.79e-03
1880	0.5	1400.0	5.00	1.40e+01	5.04e-02
1912	0.5	1690.0	5.00	1.69e+01	5.06e-02
1949	0.5	2020.0	5.00	2.02e+01	5.09e-02

Cuadro 4: **Mediciones para el LED Rojo 1.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
1561	0.5	0.4	0.05	3.99e-03	4.99e-04
1631	0.5	0.5	0.05	4.99e-03	4.99e-04
1604	0.5	13.9	0.05	1.39e-01	5.04e-04
1685	0.5	25.4	0.05	2.53e-01	5.15e-04
1698	0.5	37.2	0.05	3.71e-01	5.32e-04
1713	0.5	56.6	0.05	5.65e-01	5.73e-04
1720	0.5	70.2	0.05	7.01e-01	6.09e-04
1730	0.5	91.8	0.05	9.16e-01	6.77e-04
1708	0.5	99.8	0.05	9.96e-01	7.04e-04
1738	0.5	115.3	0.05	1.15e+00	7.61e-04
1746	0.5	140.8	0.05	1.41e+00	8.61e-04
1753	0.5	169.9	0.05	1.70e+00	9.82e-04
1764	0.5	217.0	0.50	2.17e+00	5.11e-03
1781	0.5	321.0	0.50	3.20e+00	5.24e-03
1793	0.5	413.0	0.50	4.12e+00	5.40e-03
1807	0.5	537.0	0.50	5.36e+00	5.66e-03
1820	0.5	655.0	0.50	6.54e+00	5.96e-03
1840	0.5	916.0	0.50	9.14e+00	6.76e-03
1855	0.5	1191.0	0.50	1.19e+01	7.75e-03
1870	0.5	1481.0	0.50	1.48e+01	8.90e-03

Cuadro 5: Mediciones para el LED Rojo 2. V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
1590	0.5	0.1	0.05	9.98e-04	4.99e-04
1702	0.5	2.7	0.05	2.69e-02	4.99e-04
1751	0.5	8.7	0.05	8.68e-02	5.01e-04
1775	0.5	17.7	0.05	1.77e-01	5.07e-04
1796	0.5	26.0	0.05	2.59e-01	5.16e-04
1811	0.5	36.2	0.05	3.61e-01	5.31e-04
1821	0.5	46.2	0.05	4.61e-01	5.49e-04
1828	0.5	51.0	0.05	5.09e-01	5.60e-04
1838	0.5	63.7	0.05	6.36e-01	5.91e-04
1845	0.5	72.7	0.05	7.26e-01	6.17e-04
1852	0.5	81.9	0.05	8.17e-01	6.44e-04
1861	0.5	96.1	0.05	9.59e-01	6.91e-04
1866	0.5	105.4	0.05	1.05e+00	7.24e-04
1870	0.5	113.2	0.05	1.13e+00	7.53e-04
1883	0.5	140.1	0.05	1.40e+00	8.58e-04
1893	0.5	164.5	0.05	1.64e+00	9.59e-04
1910	0.5	205.0	0.50	2.05e+00	5.09e-03
1920	0.5	260.0	0.50	2.59e+00	5.16e-03
1940	0.5	326.0	0.50	3.25e+00	5.25e-03
1979	0.5	455.0	0.50	4.54e+00	5.48e-03
2009	0.5	599.0	0.50	5.98e+00	5.81e-03
2044	0.5	750.0	0.50	7.49e+00	6.23e-03
2057	0.5	834.0	0.50	8.32e+00	6.49e-03
2116	0.5	1127.0	0.50	1.12e+01	7.51e-03
2123	0.5	1167.0	0.50	1.16e+01	7.66e-03
2153	0.5	1310.0	5.00	1.31e+01	5.03e-02
2152	0.5	1340.0	5.00	1.34e+01	5.03e-02
2160	0.5	1430.0	5.00	1.43e+01	5.04e-02

Cuadro 6: Mediciones para el LED Verde 1. V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
2489	0.5	3.4	0.05	3.39e-02	4.99e-04
2554	0.5	9.1	0.05	9.08e-02	5.01e-04
2589	0.5	15.0	0.05	1.50e-01	5.05e-04
2621	0.5	23.6	0.05	2.36e-01	5.13e-04
2642	0.5	30.0	0.05	2.99e-01	5.21e-04
2666	0.5	40.0	0.05	3.99e-01	5.37e-04
2683	0.5	50.8	0.05	5.07e-01	5.59e-04
2700	0.5	62.2	0.05	6.21e-01	5.87e-04
2709	0.5	69.6	0.05	6.95e-01	6.08e-04
2720	0.5	75.1	0.05	7.50e-01	6.24e-04
2733	0.5	91.4	0.05	9.12e-01	6.75e-04
2743	0.5	103.1	0.05	1.03e+00	7.16e-04
2758	0.5	121.8	0.05	1.22e+00	7.85e-04
2775	0.5	143.4	0.05	1.43e+00	8.71e-04
2788	0.5	168.5	0.05	1.68e+00	9.76e-04

Cuadro 7: **Mediciones para el LED Verde 2.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
1536	0.5	0.5	0.05	4.99e-03	4.99e-04
1574	0.5	1.2	0.05	1.20e-02	4.99e-04
1626	0.5	4.4	0.05	4.39e-02	4.99e-04
1653	0.5	8.1	0.05	8.08e-02	5.01e-04
1673	0.5	12.8	0.05	1.28e-01	5.03e-04
1694	0.5	20.0	0.05	2.00e-01	5.09e-04
1703	0.5	24.3	0.05	2.43e-01	5.13e-04
1720	0.5	34.3	0.05	3.42e-01	5.27e-04
1728	0.5	40.4	0.05	4.03e-01	5.38e-04
1740	0.5	49.9	0.05	4.98e-01	5.57e-04
1750	0.5	60.7	0.05	6.06e-01	5.83e-04
1758	0.5	70.7	0.05	7.06e-01	6.11e-04
1767	0.5	84.0	0.05	8.38e-01	6.51e-04
1773	0.5	91.8	0.05	9.16e-01	6.77e-04
1790	0.5	121.2	0.05	1.21e+00	7.83e-04
1798	0.5	136.4	0.05	1.36e+00	8.43e-04
1807	0.5	157.3	0.05	1.57e+00	9.29e-04
1817	0.5	183.6	0.05	1.83e+00	1.04e-03
1824	0.5	200.0	0.50	2.00e+00	5.09e-03
1845	0.5	267.0	0.50	2.66e+00	5.16e-03
1878	0.5	346.0	0.50	3.45e+00	5.28e-03
1910	0.5	550.0	0.50	5.49e+00	5.69e-03
1932	0.5	660.0	0.50	6.59e+00	5.98e-03
1955	0.5	801.0	0.50	7.99e+00	6.39e-03
1974	0.5	915.0	0.50	9.13e+00	6.76e-03
2016	0.5	1184.0	0.50	1.18e+01	7.72e-03
2050	0.5	1412.0	0.50	1.41e+01	8.62e-03
2084	0.5	1670.0	5.00	1.67e+01	5.06e-02

Cuadro 8: **Mediciones para el LED Amarillo.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
2228	0.5	0.7	0.05	6.99e-03	4.99e-04
2124	0.5	0.9	0.05	8.98e-03	4.99e-04
2330	0.5	2.0	0.05	2.00e-02	4.99e-04
2325	0.5	3.4	0.05	3.39e-02	4.99e-04
2441	0.5	9.0	0.05	8.98e-02	5.01e-04
2479	0.5	16.1	0.05	1.61e-01	5.05e-04
2504	0.5	22.4	0.05	2.24e-01	5.11e-04
2528	0.5	31.6	0.05	3.15e-01	5.23e-04
2541	0.5	36.7	0.05	3.66e-01	5.31e-04
2554	0.5	42.7	0.05	4.26e-01	5.42e-04
2573	0.5	52.2	0.05	5.21e-01	5.63e-04
2592	0.5	63.2	0.05	6.31e-01	5.90e-04
2607	0.5	72.2	0.05	7.21e-01	6.15e-04
2014	0.5	77.1	0.05	7.69e-01	6.30e-04
2637	0.5	93.5	0.05	9.33e-01	6.83e-04
2658	0.5	110.7	0.05	1.10e+00	7.44e-04
2672	0.5	122.7	0.05	1.22e+00	7.89e-04
2688	0.5	137.4	0.05	1.37e+00	8.47e-04
2722	0.5	161.7	0.05	1.61e+00	9.47e-04
2759	0.5	218.0	0.50	2.18e+00	5.11e-03
2804	0.5	283.0	0.50	2.82e+00	5.19e-03
2872	0.5	410.0	0.50	4.09e+00	5.39e-03
2921	0.5	528.0	0.50	5.27e+00	5.64e-03
2958	0.5	626.0	0.50	6.25e+00	5.88e-03
2984	0.5	718.0	0.50	7.17e+00	6.14e-03
3015	0.5	824.0	0.50	8.22e+00	6.46e-03
3053	0.5	987.0	0.50	9.85e+00	7.00e-03
3080	0.5	1114.0	0.50	1.11e+01	7.46e-03

Cuadro 9: **Mediciones para el LED Azul 1.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
2756	0.5	32.1	0.05	3.20e-01	5.24e-04
2777	0.5	43.1	0.05	4.30e-01	5.43e-04
2789	0.5	50.8	0.05	5.07e-01	5.59e-04
2802	0.5	60.8	0.05	6.07e-01	5.84e-04
2823	0.5	80.3	0.05	8.01e-01	6.39e-04
2841	0.5	100.0	0.05	9.98e-01	7.05e-04
2856	0.5	121.9	0.05	1.22e+00	7.86e-04
2872	0.5	148.1	0.05	1.48e+00	8.90e-04
2896	0.5	191.4	0.05	1.91e+00	1.08e-03
2904	0.5	218.0	0.50	2.18e+00	5.11e-03
2940	0.5	296.0	0.50	2.95e+00	5.20e-03
2970	0.5	389.0	0.50	3.88e+00	5.35e-03
3012	0.5	540.0	0.50	5.39e+00	5.67e-03
3045	0.5	687.0	0.50	6.86e+00	6.05e-03
3052	0.5	759.0	0.50	7.57e+00	6.26e-03
3123	0.5	1105.0	0.50	1.10e+01	7.43e-03

Cuadro 10: **Mediciones para el LED Azul 2.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.

V_1 [mV]	σ_{V_1} [mV]	V_2 [mV]	σ_{V_2} [mV]	I_d [mA]	σ_{I_d} [mA]
819	0.5	0.5	0.05	4.99e-03	4.99e-04
897	0.5	3.2	0.05	3.19e-02	4.99e-04
953	0.5	10.8	0.05	1.08e-01	5.02e-04
976	0.5	17.3	0.05	1.73e-01	5.06e-04
989	0.5	22.8	0.05	2.28e-01	5.12e-04
1004	0.5	31.6	0.05	3.15e-01	5.23e-04
1026	0.5	51.8	0.05	5.17e-01	5.62e-04
1039	0.5	66.1	0.05	6.60e-01	5.98e-04
1043	0.5	71.8	0.05	7.17e-01	6.14e-04
1052	0.5	89.3	0.05	8.91e-01	6.68e-04
1057	0.5	100.7	0.05	1.00e+00	7.07e-04
1063	0.5	118.2	0.05	1.18e+00	7.72e-04
1073	0.5	144.7	0.05	1.44e+00	8.77e-04
1083	0.5	193.4	0.05	1.93e+00	1.08e-03
1082	0.5	222.0	0.50	2.22e+00	5.11e-03
1092	0.5	250.0	0.50	2.50e+00	5.14e-03
1104	0.5	333.0	0.50	3.32e+00	5.26e-03
1113	0.5	434.0	0.50	4.33e+00	5.44e-03
1126	0.5	602.0	0.50	6.01e+00	5.82e-03
1133	0.5	706.0	0.50	7.05e+00	6.10e-03
1135	0.5	828.0	0.50	8.26e+00	6.47e-03
1155	0.5	1206.0	0.50	1.20e+01	7.81e-03
1161	0.5	1908.0	0.50	1.90e+01	1.07e-02
1243	0.5	6150.0	5.00	6.14e+01	5.85e-02
1247	0.5	6730.0	5.00	6.72e+01	6.01e-02

Cuadro 11: **Mediciones para el LED Infrarrojo.** V_1 es el voltaje entre la entrada y la salida del LED. Con V_2 se obtiene la corriente a través del diodo mediante la Ley de Ohm $I_d = V_2/R_2$, con $R_2 = 100,2 \pm 0,05 \Omega$.