

# Modelos de velocidad de Solitones

Gómez Arias, Andrés

13 de diciembre de 2017

## Resumen

Se trabaja con ondas no lineales (velocidad que depende de la amplitud), estables y poco dispersivas que viajan a través de un canal largo; llamadas solitones. Se muestra un breve contexto histórico en donde se presenta el modelo que rige a los solitones. Se encuentran además 2 fórmulas para la velocidad de éstos, dependientes de la profundidad y amplitud. Se hacen varios experimentos para 4 profundidades, algunas usando jabón y no jabón para comparar los efectos de la tensión superficial. Se hace una muestra de velocidades con amplitudes para una misma profundidad y se ajustan ambos modelos para la profundidad. Tomando en cuenta correcciones con la profundidad, se hace un ajuste favorable para ambos modelos y se encuentran indicios de una cota superior para las amplitudes que coincide con un punto de divergencia entre los modelos. Es decir, se encuentra una restricción que permite que los modelos sean equivalentes.

## 1. Introducción

Un solitón, también llamado onda solitaria es usado para referirse a cualquier pulso de onda plana que se mueve en una dirección sin cambiar su forma. Su forma característica es normalmente la de una función campana  $u(x - vt)$  que se traslada con velocidad  $v$  a lo largo de  $x$ .

El primero en observar un fenómeno de éste estilo fue Russel (1808-1882) cuando trabajaba en investigar la capacidad del *Union Canal* para el uso de buques de vapor. En Agosto de 1834 él describe que el efecto ocurrió cuando dos caballos estaban jalando a un bote rápidamente a través del angosto canal. En algún momento el bote se detuvo, pero no la masa de agua que estaba en movimiento, que se acumuló delante del bote y siguió su camino rápidamente con una forma bien definida. Russel la siguió a caballo, donde ésta mantuvo su forma y velocidad por un par de millas. En su momento, Russel la llamó Onda de Traslación. Hoy se sabe que es un caso particular de un solitón que se produce al empujar un bote a través de un canal angosto con una velocidad crítica.

El estudio de los solitones empezó teóricamente cuando Kruskal y sus colaboradores mostraron cómo resolver la ecuación Korteweg-de Vries [KdV]:

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx} \quad (1)$$

y en particular encontrar sus soluciones de solitones; donde los subíndices denotan derivadas parciales. La ecuación *KdV* describe cualquier sistema de ondas, tomando en cuenta efectos no lineales ( $uu_x$ ) y dispersión ( $u_{xxx}$ ). En las soluciones de solitones la no linealidad se equilibra con la dispersión, otorgándole su estabilidad. Haciendo el cambio de variable  $u$  por  $-u/6$  se obtiene más directamente:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} \quad (2)$$

con solución de onda solitaria:

$$u = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\alpha}{2} (x - \alpha^2 t) \right] \quad (3)$$

donde se observa la no linealidad de los solitones: Con mayor amplitud aumenta la velocidad y disminuye la longitud de onda.

Ahora, la ecuación cuyas soluciones describen a las observadas por Russel es:

$$u_t + \frac{3}{2} \frac{c_s}{h} uu_\xi = \frac{1}{2} c_s h^2 \left( \frac{\gamma}{\rho g h^2} - \frac{1}{3} \right) u_{\xi\xi\xi} \quad (4)$$

donde  $\xi = x - c_s t$  es la variable independiente,  $c_s = \sqrt{gh}$  la velocidad crítica (*sound speed*),  $h$  es la profundidad del agua sin perturbaciones,  $\gamma$  es la tensión superficial del agua y  $\rho$  su densidad. Ésta ecuación surge de la teoría

de ondas en un campo gravitacional en agua con profundidad finita y tiene soluciones positivas como las observadas por Russel en canales angostos para

$$\frac{\gamma}{\rho gh^2} < \frac{1}{3}$$

dadas por:

$$u = k \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{x - ct}{L} \right] \quad (5)$$

donde  $k$  es la altura máxima,  $c$  es la velocidad del solitón y  $L = \sqrt{4h^3/3k}$  su longitud característica. Nótese que la amplitud del solitón y la profundidad del agua determinan completamente el comportamiento del solitón.

Después de una serie de experimentos seguidos de su primer encuentro, Russel hayó empíricamente que  $c^2 = g(h + k)$  por un lado. Por otro, Airy encontró teóricamente que si  $\gamma$  es cero, entonces  $c = c_s(1 + k/2h)$  y que la hipótesis de Russel se cumplía sólo para las soluciones solitarias de la ecuación de Boussinesq:

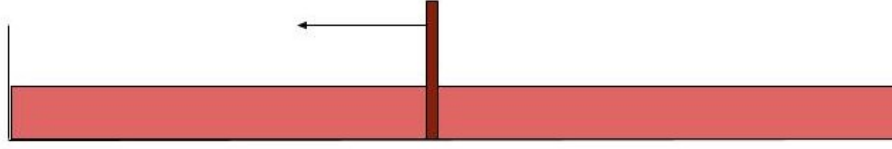
$$u_{tt} = c_s^2 \left( u + \frac{3}{2} \frac{u^2}{h} + \frac{h^2}{3} u_{xx} \right)_{xx} \quad (6)$$

que no tiene ningún parecido a la ecuación KdV, lo que plantea un problema a resolver.

El propósito de éste experimento es la recreación de solitones en un canal angosto, observar que tienen la forma de la ecuación 5 y corroborar si la hipótesis experimental de Russel o el desarrollo teórico de Airy se cumplen.

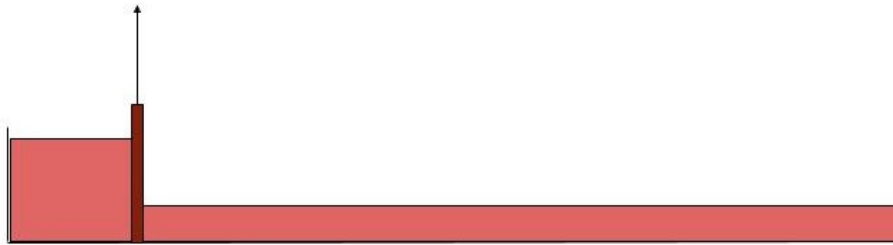
## 2. Procedimiento

En un tanque de 3m de largo, 20cm de ancho y 20cm de alto se puso agua con colorante rojo para una mejor visualización en 4 alturas diferentes (repetiendo para agua con jabón en la segunda y cuarta altura para la comprobación del segundo modelo que pide una tensión superficial baja). En cada altura se marcaba el nivel del agua cuando estaba quieta con un plumón y una regla en la pared del tanque, así como se medía la profundidad con respecto a esa marca con un Vernier. Para hacer los solitones se cortó una tabla de madera triplay barnizada de manera que podía deslizarse en el tanque, pero bloqueaba casi completamente el agua.



La tabla de madera se deslizaba por el tanque, acumulando agua.

Así, se utilizaba manualmente como una compuerta en la que primero se deslizaba verticalmente a través del tanque para ganar altura y luego se levantaba rápidamente, dejando que la sección cuadrada de agua fluyera.



La tabla de madera se elevaba rápidamente, dejando fluir la elevación de agua.

Después de propagarse por unos metros (rebotando un par de veces), la ola decaía en un sistema de solitones [2]. La sección de los solitones vista desde una pared fue videograbada con una cámara de celular sostenida en un soporte. Así, se observaba el cambio de nivel del agua con respecto a la marca de plumón (el punto de referencia). Para cada altura se hicieron 5 repeticiones del experimento. También se observaron colisiones entre dos solitones de la misma forma, pues en el sistema de solitones los primeros se reflejaban con la pared y chocaban con los últimos. Después se combinó el agua con detergente para así disminuir la tensión superficial y probar la fórmula obtenida

por Airy de la velocidad. Ésto fue realizado 5 veces para la segunda y la cuarta altura más alta. Por último se hicieron pruebas en las que se puso un obstáculo (un bote) en el canal y se mandaban solitones, comparando que pasaba cuando por otra parte se mandaban ondas no solitarias.

Cada video fue analizado en Tracker. Para obtener la velocidad del solitón se siguió el movimiento horizontal de su punto máximo durante una sola pasada por la cámara (normalmente en la primera pasada en la cual el solitón se había formado) y se ajustó a la pendiente de la recta que regía la posición con el tiempo. Mientras que se puso el origen en la marca del plumón que representaba el nivel del agua quieta, para el agua que estaba justo antes de que pasara el solitón el nivel era menor. Esto no debía pasar en un sistema ideal con solitón aislado en un canal largo (12m), pero debido a que el canal era relativamente corto y en cada experimento se formaba una cadena de varios solitones, éstos desplazaban una cantidad no despreciable de agua, lo que bajaba el nivel del agua en las partes sin solitones. Debido a que la teoría dice que se tiene que tomar estrictamente el nivel del agua quieta, se mantuvo ésta referencia, pero se agregó un error de altura tanto para el nivel de profundidad del agua como para la altura del solitón igual a dicha diferencia de niveles. Como se hicieron varias pruebas para una misma profundidad y cada una arrojó un valor parecido pero no equivalente, se tomó como error de profundidad de agua el promedio de éstos errores, para poder comparar éstos experimentos. Además, como la altura de cada solitón fue medida mediante una muestra de alturas obtenidas mediante el seguimiento de la cresta, se le agregó el error de la desviación estándar de la muestra (que era significativo con respecto al otro error). Así, su error fue la raíz de la suma cuadrática de esos dos errores y su valor fue el promedio de la muestra.

Utilizando la paquetería de análisis estadístico de Python se ajustaron los datos para una misma profundidad al modelo de velocidad de Russel y al de Airy como función de  $k$ , ajustando para el valor de la profundidad y comparando con el modelo con la profundidad medida.

### 3. Datos experimentales

Primero, a modo de comprobar cualitativamente el modelo de solitones presentado como la solución solitaria de la ecuación KdV, mostraremos una imagen tomada del solitón estudiado en la altura  $h_4$  con jabón, en la 4 repetición. Sobrelapado a ésta imagen se muestra una gráfica con escala 1:1 de la ecuación (5) con parámetros dados por la altura máxima del solitón medida con respecto a la altura mínima del nivel del agua. Es decir, no se tomó como profundidad la medida cuando el agua estaba quieta, sino la altura del agua que estaba justo antes de que pasara el solitón. La imagen muestra un muy buen ajuste debido a ésta corrección. De no haberla hecho, la gráfica no pasaría por encima de la línea de plumón más alta.

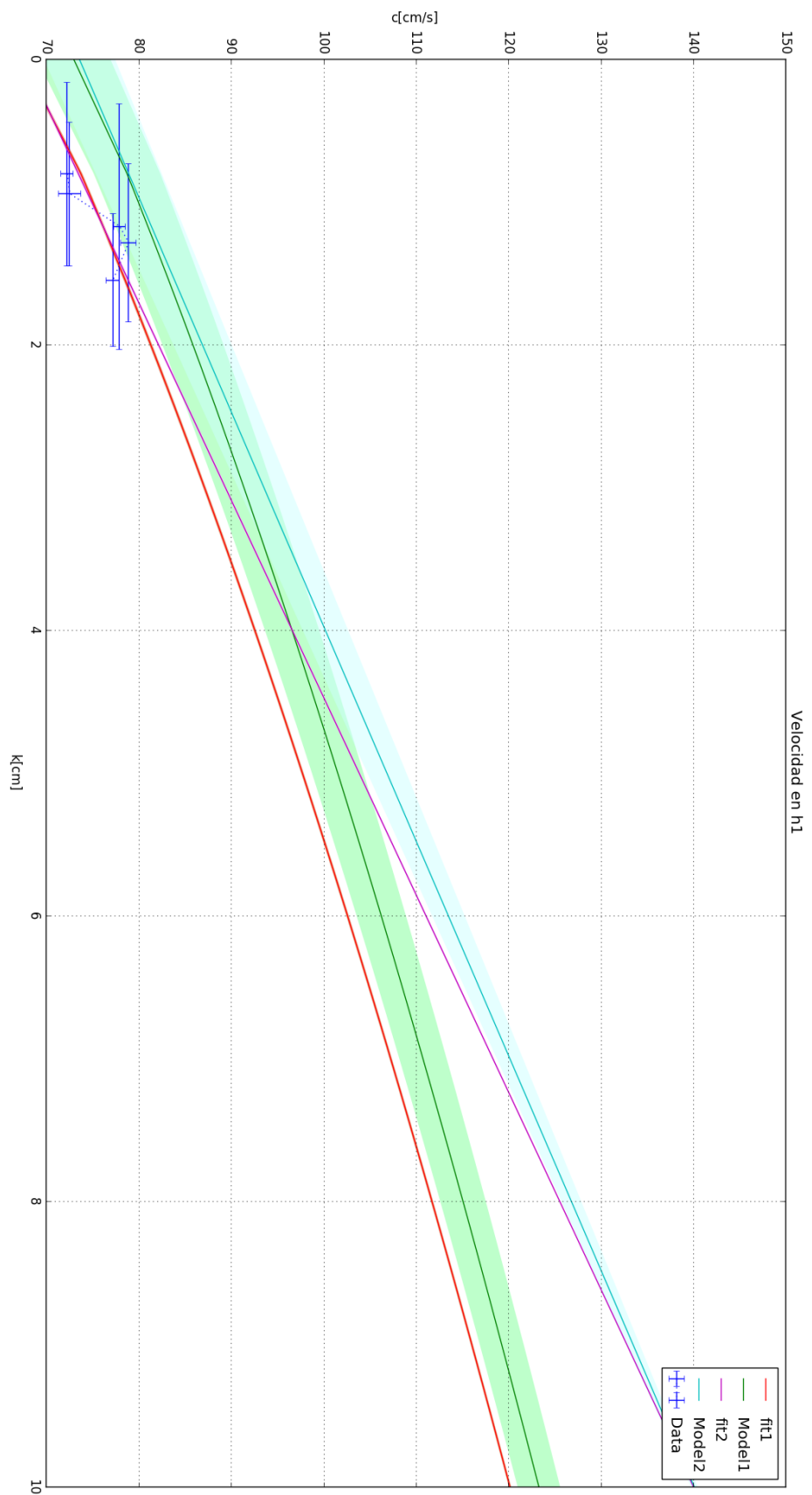


Comparación de solitón con la gráfica del modelo con valores corregidos.

A continuación se muestran las tablas correspondientes para cada altura y su ajuste para ambos modelos de velocidades. El modelo 1 es el de Russel (rojo para el ajuste y verde para los valores teóricos esperados) y el modelo 2 es el de Airy (morado y celeste respectivamente). Por último una tabla muestra los valores de  $h$  encontrados en cada ajuste, donde el ajuste 1 corresponde al primer modelo y el ajuste 2 corresponde al segundo y los dos últimos renglones son los experimentos con jabón.

$k[\text{cm}]$	$dk[\text{cm}]$	$c[\text{cm/s}]$	$dc[\text{cm/s}]$
0.803	0.644	72.22	0.66
1.286	0.553	78.85	0.86
1.172	0.858	77.88	0.61
0.943	0.504	72.48	1.20
1.547	0.465	77.17	0.69

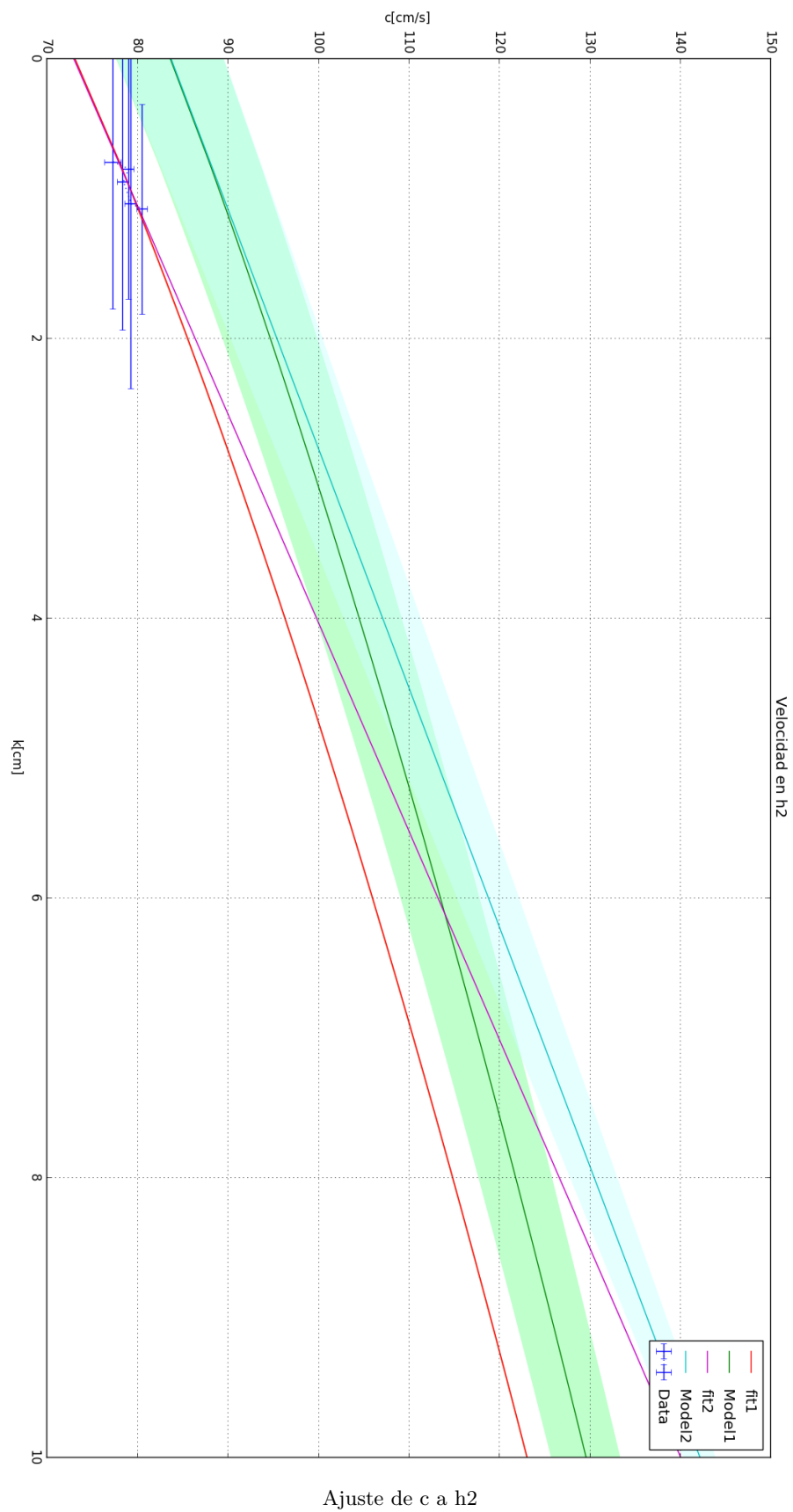
$$h1 = 5,525\text{cm} \pm 0,579\text{cm}$$



Ajuste de  $c$  a  $h_1$

k[cm]	dk[cm]	c[cm/s]	dc[cm/s]
0.791	0.930	79.00	0.62
1.077	0.750	80.51	0.58
0.741	1.050	77.29	0.94
1.039	1.321	79.26	0.62
0.881	1.061	78.40	0.64

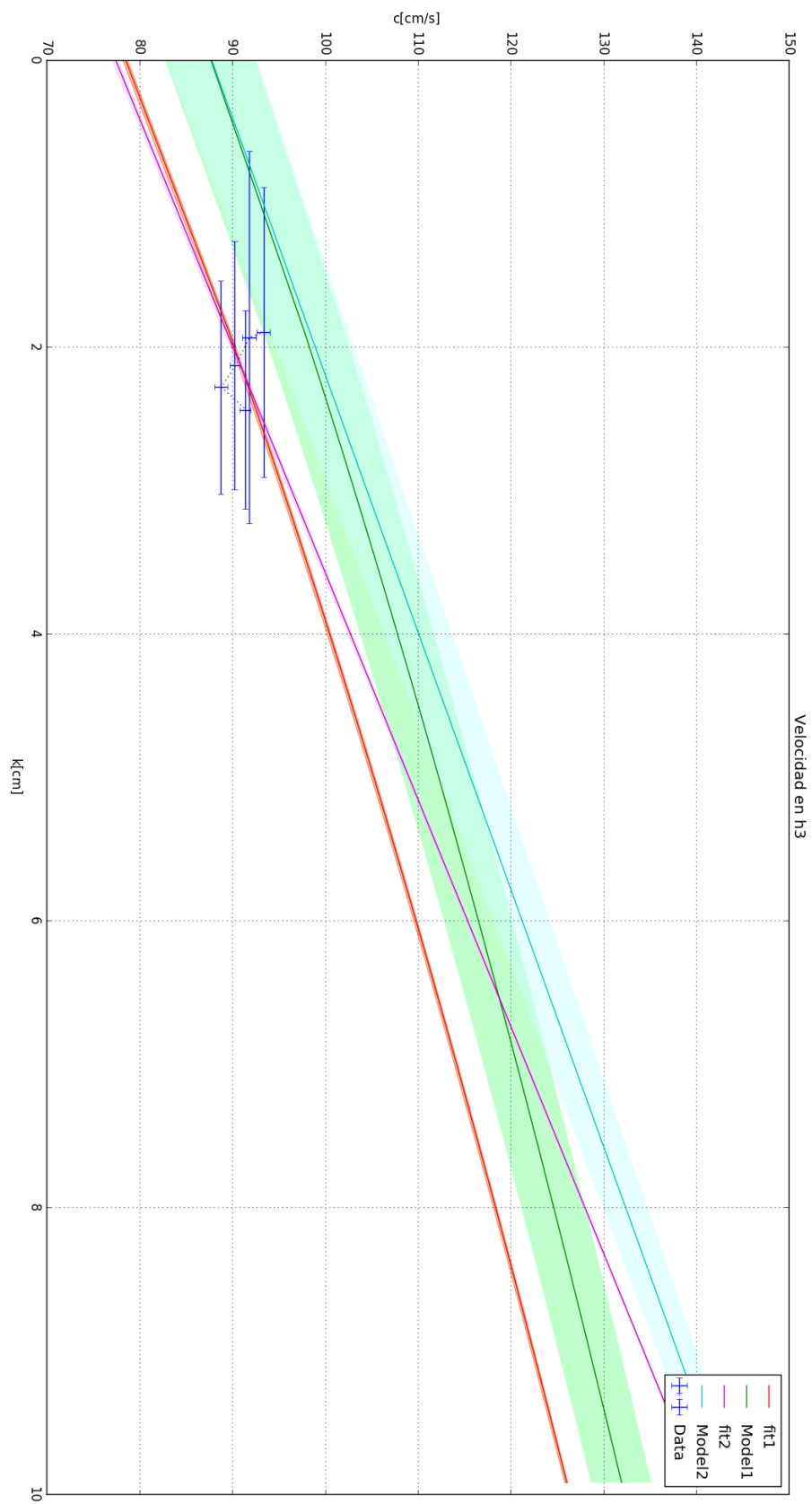
$$h_2 = 7,155\text{cm} \pm 1,013\text{cm}$$



k[cm]	dk[cm]	c[cm/s]	dc[cm/s]
1.933	1.300	91.80	0.75
2.280	0.745	88.75	0.71
2.439	0.690	91.39	0.58
1.897	1.009	93.36	0.74
2.130	0.864	90.28	0.56

$$h_3 = 7,865cm \pm 0,0,876cm$$

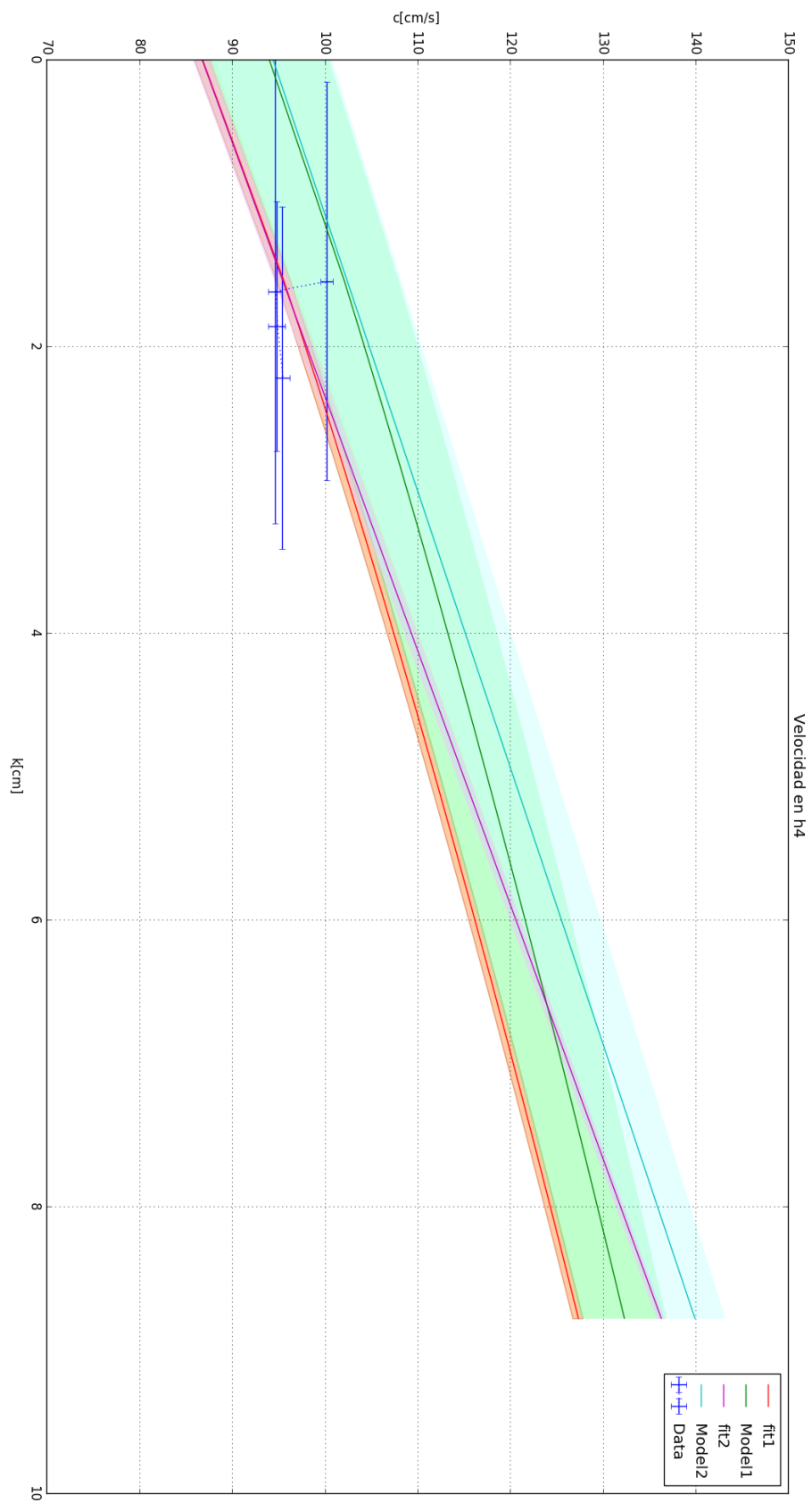




Ajuste de c a h3

k[cm]	dk[cm]	c[cm/s]	dc[cm/s]
1.617	1.617	94.65	0.72
1.546	1.390	100.2	0.68
2.219	1.194	95.42	0.81
1.862	0.871	94.83	0.93

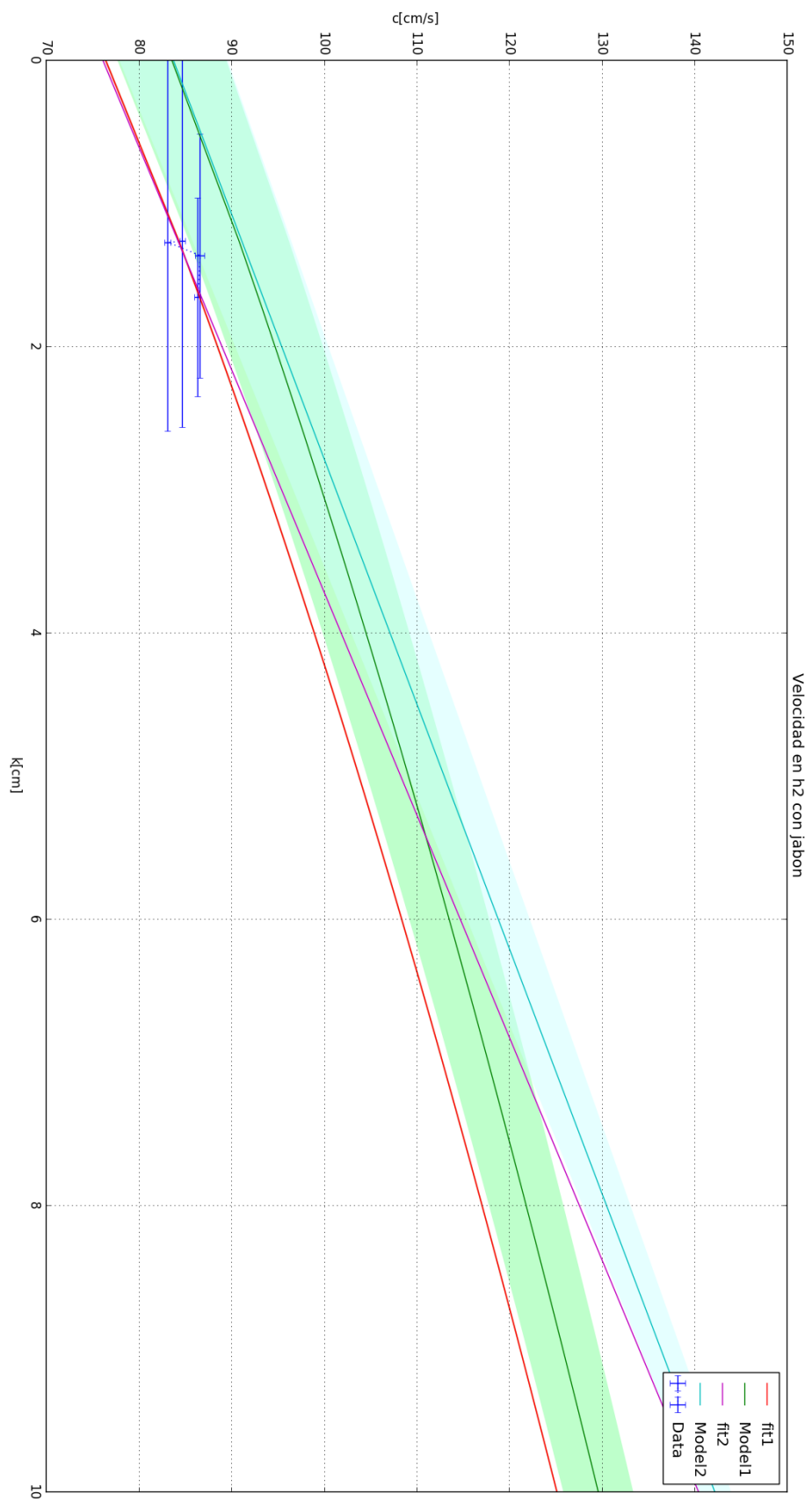
$$h4 = 9,100cm \pm 1,239cm$$



Ajuste de  $c$  a  $h_4$

k[cm]	dk[cm]	c[cm/s]	dc[cm/s]
1.265	1.298	84.71	0.29
1.275	1.316	83.12	0.33
1.656	0.691	86.31	0.32
1.367	0.852	86.56	0.49

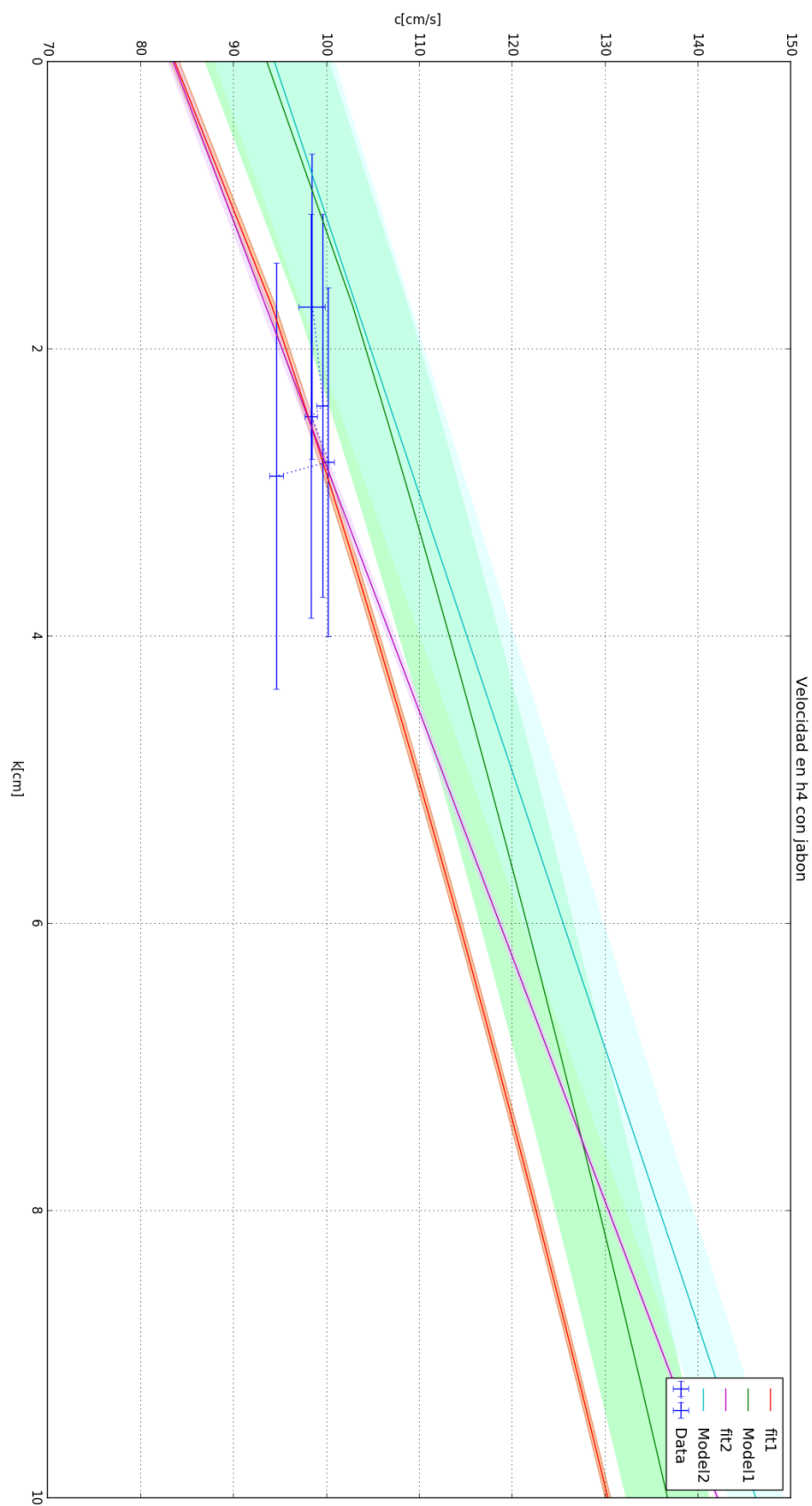
h2 con jabón



Ajuste de  $c$  a  $h_2$  con jabón

k[cm]	dk[cm]	c[cm/s]	dc[cm/s]
2.789	1.214	100.2	0.67
1.708	1.063	98.49	1.42
2.887	1.484	94.67	0.74
2.398	1.331	99.61	0.63
2.472	1.405	98.38	0.65

h4 con jabón

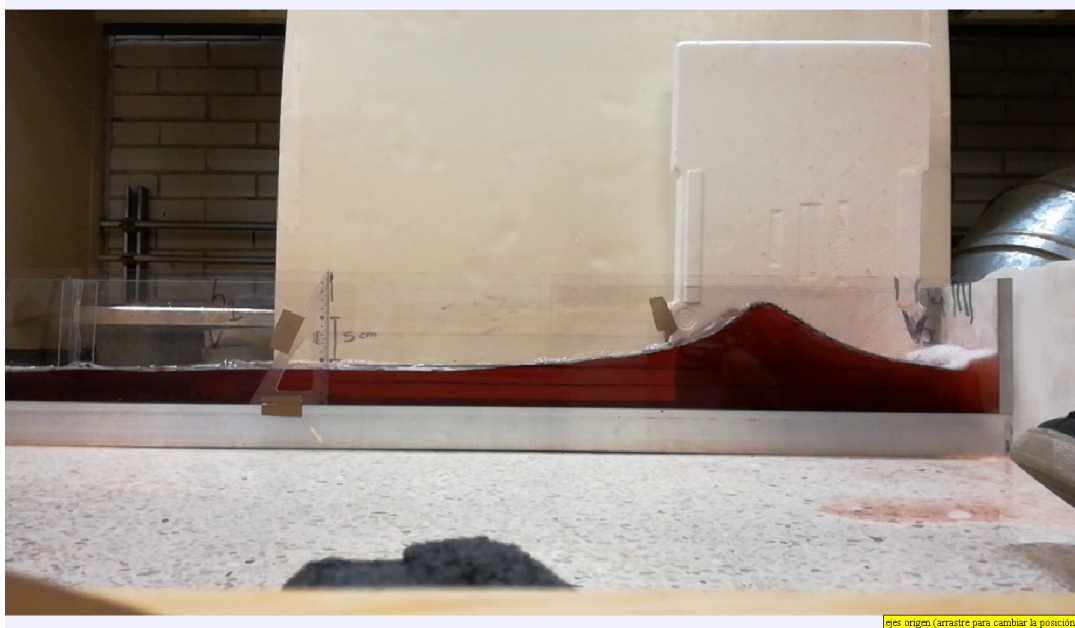


Ajuste de  $c$  a  $h_4$  con jabón

Experimento	Ajuste1[cm]	Error1[cm]	Ajuste2[cm]	Error2[cm]
h1	4.77	0.02	4.672	0.02
h2	5.47	0.02	5.43	0.02
h3	6.31	0.04	6.12	0.05
h4	7.78	0.14	7.68	0.16
jh2	5.99	0.08	5.91	0.08
jh4	7.35	0.08	7.12	0.09

Ajuste de los 2 modelos en los 6 experimentos.

A modo de visualización cualitativa se muestra a continuación la interferencia entre 2 solitones. Ésta tiene una forma característica puntiaguda. Los propósitos del experimento no son analizar esto, pero sólo se muestra como dato de interés. Otro de éstos datos de interés es que los solitones no son afectados por obstáculos. Ésto se comprobó cualitativamente al poner una cubeta en el canal. Cuando se mandó una ola no solitaria y chocó con la cubeta, ésta se dispersó. Cuando se mandó un solitón, éste emergió por los lados y continuó su camino sin importar la presencia de la cubeta.



Interferencia entre 2 solitones

## 4. Resultados

La imagen tomada comparada con el modelo da un muy buen ajuste. Si bien por la izquierda se puede ver que el nivel del agua tiene un nivel mayor al del modelo, ésto se debe meramente a que había otro solitón por la izquierda que empezaba a sobreponerse conforme uno se acercaba. Por la derecha el ajuste es muy bueno, aunque ya en la orilla del canal el nivel baja un poco más que el modelo, lo que sugiere que de hecho la altura mínima medida era todavía menor. Así, esto nos permite concluir que el nivel que se debía tomar no era exactamente el del agua sin perturbación, sino el nivel del agua que se tenía antes de la perturbación. Se usó erróneamente el primero para el ajuste, pero como ya fue mencionado, el segundo se tomó en cuenta como un error de medición. Por último, sólo se mostró una imagen porque todas las demás eran muy parecidas, el ajuste fue similarmente satisfactorio.

Una vista a los ajustes nos muestra varias cosas que se repiten en todos los experimentos: Los datos están muy pegados (las amplitudes no varían mucho con una misma altura), puntalmente éstos no siguen un patrón definido y ambos modelos son muy parecidos en la vecindad estudiada.



El primer hecho viene de que la altura de los solitones creados no era controlable, de haber sido así, se hubieran hecho experimentos con una mayor dispersión para ajustar mejor al patrón. Que estén pegados implica que la amplitud estaba seguramente definida por la profundidad, aunque probablemente las condiciones iniciales tenían un efecto significativo, pues había veces que usábamos poca agua con la compuerta y se hacían solitones muy pequeños que por obvias razones no fueron tomados en cuenta. Además se puede ver a través de las 4 primeras gráficas que la amplitud de los solitones tuvo una tendencia a subir. Empezando desde 1.5cm hasta los 2cm por h4. La tendencia no es muy notable, pero eso y todo lo anterior llevan a pensar que la profundidad define una cota superior en la amplitud de los solitones. Inferiormente no se cumple, pues claramente pueden haber solitones tan pequeños como se quiera.

Es desafortunado que debido a lo anterior no sea posible observar un patrón definido, pero el error grande anteriormente descrito permite dejar validez para la existencia de dicho patrón, no necesariamente es un comportamiento caótico o no implica que las ondas no sean no lineales.

Lo concluido en el primer punto aunado con el tercer hecho lleva a pensar que de hecho ambos modelos son válidos con errores despreciables. Es decir, en la vecindad estudiada los datos ajustan suficientemente bien al modelo y entre sí son equivalentes. Aunque ambos divergan con amplitudes mayores, ésto es irrelevante, puesto que dichas son inaccesibles para la profundidad dada (la cota superior mencionada en el primer punto). Algo que además respalda éste hecho son los valores obtenidos mediante el ajuste. Por un lado, se encontraron valores menores a la profundidad y era lo esperado bajo lo que se concluyó en el ajuste a la imagen del solitón. Por otro, los valores de alturas entre los dos modelos son prácticamente iguales, lo que nos lleva a pensar de nuevo que realmente no hay mucha diferencia entre los modelos alrededor de las amplitudes permitidas por la profundidad. Algo más que respalda ésta hipótesis es el hecho de que entre mayor profundidad se permite una mayor amplitud antes de que los modelos teóricos divergan.

Por último, no se encontraron diferencias muy conclusas entre los solitones en agua con jabón con respecto a la de sin él. Es decir, la altura 2 con jabón si ajustó mejor a ambos modelos, pero en la altura 4 con jabón ajustó peor. Se quería ver si el modelo 2 efectivamente era válido con tensiones superficiales bajas, pero se encontró que es igualmente válido para cualquiera de los 2 casos.

## 5. Discusión

Hubo varias dificultades en la realización del experimento. La primera e inmediata fue la construcción del canal, dado que no había canales suficientemente largos. De hecho, idealmente el canal debía de ser de hasta 12m de largo para evitar la colisión de los solitones con las paredes (con lo que perdían energía). Dado que el equipo tuvo que poner de su propio presupuesto, el material para un canal de 3m fue el más rentable. Afortunadamente nada posterior a eso relacionado con la construcción del canal fue gran problema debido a que el taller de la Facultad de Ciencias UNAM nos hizo el favor de cortar, pegar y reforzar el material; para lo cual estamos inmensamente agradecidos. En cuanto a la instalación del experimento otro problema fue poder guardar el tanque en algún lugar en el que hubiera espacio, fuera seguro y pudiera dejarse sin mover durante la realización del experimento, debido a que una vez lleno de agua el tanque ya no se podía trasladar y se tendría que tirar el agua sólo para eso. Para ello los docentes del laboratorio de termodinámica de la facultad nos hizo el favor de reservarnos un espacio, por lo cual también estamos muy agradecidos, pero también apenados por el regadero de agua que resultó del experimento.

Ya en la realización del experimento, despreciando algunos problemas con el mejoramiento en la creación de los solitones, el principal problema (mencionado anteriormente) fue el desplazamiento de agua causado por el tren de solitones creado. Tener menos agua en la compuerta sí disminuía ese efecto, pero claramente también porque disminuía radicalmente la amplitud de los solitones y por ende nuestra capacidad para detectarlos sin perderlos en el ruido de la turbulencia creada. Lo único que hubiera disminuido satisfactoriamente éste problema hubiera sido el uso de un canal mucho más largo, en el cual el desplazamiento de agua hubiera sido despreciable con respecto a la cantidad de agua del tanque. Se hizo lo que se pudo, y aunque éste problema significó una gran disminución en la validez del experimento, el ajuste con los errores descrito anteriormente fue aceptable.

## 6. Conclusión

En conclusión los resultados fueron aceptables, pero no eran lo que se esperaba obtener. Se encontró que existe una cota superior para la amplitud no descrita en la teoría de los solitones que era proporcional a la profundidad. No se pudo concluir cuál de los modelos era válido (con jabón o sin jabón) y de hecho se encontró que ambos son probablemente equivalentes; son muy parecidos en las vecindades de las amplitudes permitidas dada una profundidad. Es claro que no son exactamente iguales, por lo que un estudio mucho más cuidadoso podría detectar una diferencia con un canal más largo, un control mejor de la turbulencia para poder experimentar con

amplitudes menores y una capacidad mayor de altura para poder comprobar e incluso detectar el patrón de la hipotética cota superior.

## Referencias

- [1] R.K. Bullough, P.J. Caudrey. *Solitons*. Topics in Current Physics. Springer-Verlag, Berlin y Heidelberg, 1990. Páginas 1 - 85.
- [2] A. Bettini, T.A. Minelli, D. Pascoli. *Solitons in undergraduate laboratory*. American Journal of Physics, College Park, MD, 1983. Páginas 977 - 984.  
<http://www.phy.cuhk.edu.hk/djwang/teachlab/projects/waterWave/soliton.pdf>