

Práctica 2. Circuito RLC

**Gómez Arias, Andres^{1,*}, Lozano Aranda, Rogelio Emmanuel^{1,+}, and Nellen Mondragón,
Stefan Daniel^{1,-}**

¹Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México

* andresgz@ciencias.unam.mx

+ rogr2012.l@gmail.com

- stefan_nellen@ciencias.unam.mx

28 de febrero de 2019

Resumen

Se analiza el comportamiento de un circuito RLC en dos estados; a saber, el transitorio y estacionario. Para el estacionario se miden las variaciones en las diferencias de potencial de excitación producidas por un generador de funciones usando una onda senoidal de 3 V de amplitud y las del voltaje de respuesta, respecto a variaciones en la frecuencia. Para el estado transitorio se simula la conexión del interruptor generando una onda cuadrada de 2.5 V de amplitud con un offset de 2.5 V. Se observa que los datos obtenidos se ajustan bien a el modelo teórico para el caso estacionario. Para el caso transitorio se da una explicación conceptual del fenómeno.

1 Introducción

Un circuito RLC, es un circuito electrónico que contiene una resistencia R , un inductor L y un condensador C . La topología del circuito no está determinada a priori, pero una muy común es con los tres elementos en serie. Debido a que el inductor tiene función de derivar la señal y el condensador de integrarla, el circuito es representado con una ecuación integro-diferencial, que se puede llevar a una ecuación diferencial equivalente de segundo orden.

El problema se caracteriza por la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt}R + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = i_0(t) \quad (1)$$

El estado transitorio del problema es la solución con $i_0 = 0$, es decir, el oscilador armónico amortiguado. El tipo de amortiguación depende de los parámetros R , L y C .

El estado estacionario se analiza dependiendo de i_0 , que es la solución particular al problema. En este caso i_0 es una señal armónica. Un análisis independiente de i se puede lograr en el dominio de Laplace, pues el circuito es lineal. Para los tres circuitos que se estudian V_{in} es en serie y V_{out} es para cada caso la de cada uno de los elementos del circuito. La función de transferencia se expresa como $H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$. Así, las funciones de transferencia son:

$$H_R(s) = \frac{R}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{sRC}{1 + s^2LC + sRC} \quad (2)$$

para el circuito LCR,

$$H_L(s) = \frac{sL}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{s^2LC}{1 + s^2LC + sRC} \quad (3)$$

para el circuito RCL, y

$$H_C(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + sL + R} = \frac{1}{1 + s^2LC + sRC} \quad (4)$$

para el circuito LRC.

La frecuencia de resonancia se puede obtener de estas ecuaciones cuando $H(j\omega) = 1$. Sorprendentemente, esto sólo ocurre en el primer caso, con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. En el caso de H_L se requieren frecuencias imaginarias, que no es posible. Se estudia el comportamiento asintótico. Para $H_L(j\omega)$ se nota que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{-\omega^2LC}{-\omega^2LC} = 1$, es decir, se puede considerar que resuena en infinito. Finalmente, $H_C(j\omega)$ tiene una solución real y una imaginaria, la real ocurre en el límite de ω contra 0, es decir resuena en 0". Estos elementos son entonces, en orden de aparición, un filtro de paso banda, un filtro de paso alto y un filtro de paso bajo. Se espera reproducir el comportamiento de las funciones de transferencia para cada uno de los circuitos.

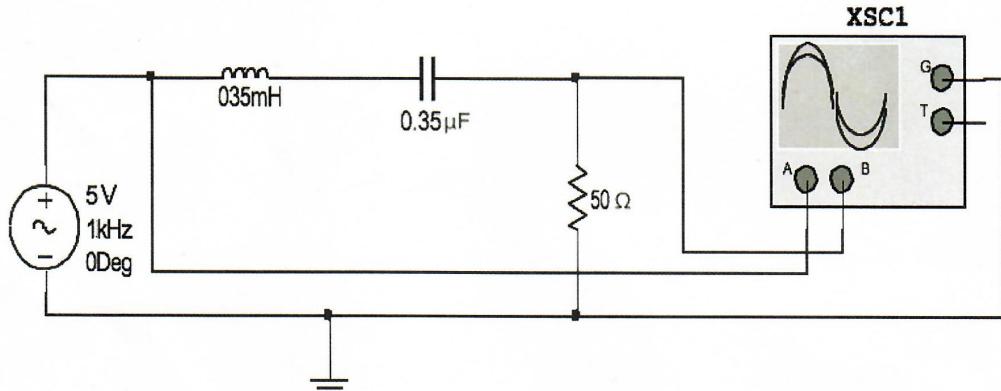


Figura 1. Circuito perteneciente a H_R , para los demás se permuta el elemento posterior al medidor por uno del circuito. Tomado de la hoja del protocolo experimental.

Se espera observar que los circuitos en el estado estacionario en efecto representan los filtros descritos anteriormente, dados los parámetros R , L y C . También se espera observar el estado transitorio usando ondas cuadráticas, para simular el "prender y apagar" del circuito.

2 Desarrollo experimental

El experimento en sí es bastante inmediato. Primero se miden los parámetros del circuito con un multímetro *GDM-8034* R y C , de [1] se obtiene la incertidumbre de la medición. Se obtuvo

$R = 55,6 \pm 0,51\Omega$ y $C = 339,5 \pm 7,19\text{nF}$. Debido a que no hay un puente de impedancias en el laboratorio se tomó L como exacta (nominal) $L = 0,264\text{mH}$.

Se conecta el circuito como indicado en la fig. 1. Es decir, RLC en serie con la fuente (un generador de funciones). La resistencia va a tierra y antes de la resistencia se conecta la prueba B del osciloscopio (salida), entre la fuente y el inductor se conecta la prueba A (entrada). Todas las mediciones subsecuentes se hicieron a partir del osciloscopio, un *Agilent DSO3062A*, donde a la escala empleada la incertidumbre propia del aparato es despreciable [2] para mediciones de la frecuencia, por lo que únicamente se considero la mitad de la mínima escala. Para las mediciones del voltaje, con unidades de voltaje por división (div) igual a 2V, el osciloscopio toma un error $dV = (3\%V + 0,1\text{div} + 1\text{mV}) + 50\text{mV} = 3\%V + 251\text{mV}$

Para el estado transitorio se genera una onda rectangular con 5V pico a pico, con un offset de +2,5V, de tal forma que la onda está en 0V o en V. Con esto se simula el prendido y apagado continuo del interruptor del circuito. Se observan la señal de entrada y salida para distintas frecuencias, estas siendo 1000Hz, 200Hz, 2500Hz y 20000Hz. Los datos se toman en forma de una fotografía, de la pantalla del osciloscopio.

El estado estacionario se realiza quitando el offset y generando ondas senoidales con amplitud de 6V pico a pico. Inicialmente se trabaja con el arreglo de la fig. 1 (H_R). Se mide la respuesta del sistema para una frecuencia de entrada de 500Hz a 100000Hz, usando un espaciamiento aproximadamente igual en una escala logarítmica (base 10). Para cada frecuencia se midió el voltaje de entrada y de salida. Se reajustó en cada caso el voltaje de entrada, para que diera 6V pico a pico, pues al cambiar la frecuencia cambiaba la amplitud. Se repitió este proceso para el mismo arreglo, pero cambiando la posición de la resistencia por la del inductor (H_L) y el condensador (H_C).

3 Resultados

A continuación se muestran imágenes del osciloscopio para el fenómeno de estado transitorio (ondas cuadráticas). La gráfica amarilla es la señal de entrada y la verde es la de salida (y así en todas las demás imágenes del osciloscopio).



Figura 2. Voltaje excitación y respuesta para estado transitorio. Frecuencias de arriba izquierda a abajo derecha: 1000Hz, 200Hz, 2500Hz, 20000Hz.

Para los 3 fenómenos estacionarios se tomaron varias mediciones de frecuencias y voltajes pico a pico (amplitud de la onda), que se muestran en los cuadros 1,2 y 3. Para una visualización de la forma de las señales de entrada y salida, se muestran imágenes del osciloscopio para algunas mediciones significativas de los 3 circuitos en las Figuras 3, 4 y 5.

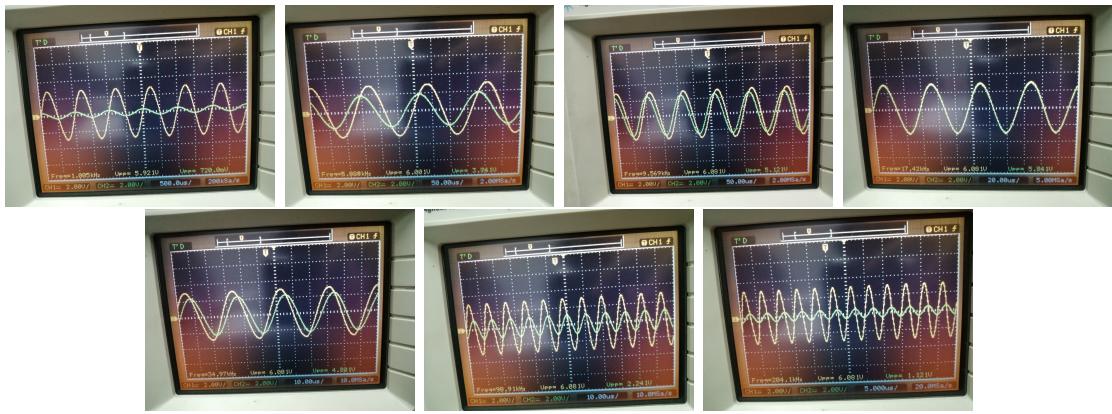


Figura 3. Comportamiento del estado estacionario para el circuito LCR: El voltaje de respuesta aumenta conforme se aumenta la frecuencia hasta llegar a la natural o de resonancia, y luego a partir de ahí empezar a bajar de nuevo. Esto para el caso en que se mide el voltaje en los extremos de la resistencia

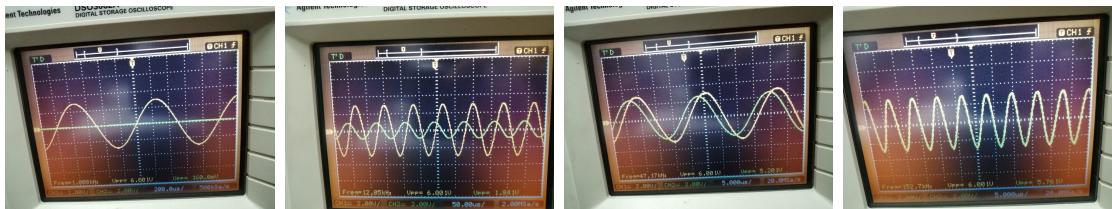


Figura 4. Caso de sustitución de bobina por resistencia. Circuito RLC.

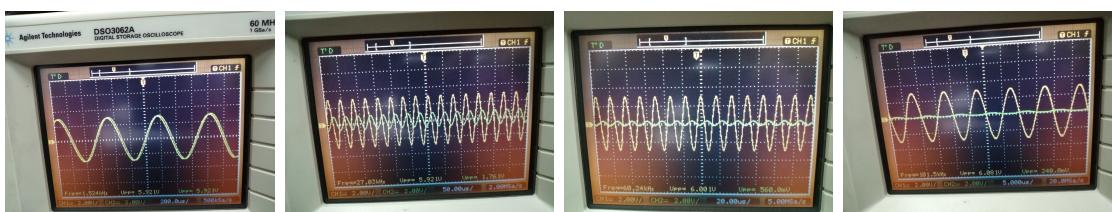


Figura 5. Caso de sustitución del condensador por la resistencia. Circuito LRC.

Para cada uno de los 3 experimentos se hizo una gráfica del cociente de V_{out}/V_{in} con respecto a la frecuencia en escala logarítmica, representado por los puntos con barras de error azules. Éstos se compararon con su función de transferencia correspondiente $H(s)$ con $s = 2\pi f_j$ (al final tomando el módulo de H).

	Frecuencia(Hz)	V_excitación (V)	dV (V)	V_respuesta (V)	dV (V)	dFrecuencia(Hz)
0	500	6.00	0.4310	0.48	0.2654	0.5
1	743	6.00	0.4310	0.64	0.2702	0.5
2	1003	5.92	0.4286	0.72	0.2726	0.5
3	1503	6.00	0.4310	1.20	0.2870	0.5
4	2500	6.00	0.4310	1.84	0.3062	0.5
5	4000	6.00	0.4310	2.64	0.3302	0.5
6	5000	6.00	0.4310	3.28	0.3494	0.5
7	6015	6.00	0.4310	3.76	0.3638	0.5
8	7519	6.00	0.4310	4.40	0.3830	0.5
9	9542	6.00	0.4310	5.12	0.4046	0.5
10	13090	6.00	0.4310	5.60	0.4190	5.0
11	15020	6.00	0.4310	5.76	0.4238	5.0
12	17420	6.08	0.4334	5.92	0.4286	5.0
13	20000	6.08	0.4334	5.76	0.4238	5.0
14	25000	6.08	0.4334	5.52	0.4166	5.0
15	34970	6.00	0.4310	4.72	0.3926	5.0
16	47170	6.00	0.4310	3.92	0.3686	5.0
17	60980	6.00	0.4310	3.20	0.3470	5.0
18	75190	6.08	0.4334	2.72	0.3326	5.0
19	91740	6.08	0.4334	2.24	0.3182	5.0
20	101500	6.08	0.4334	2.08	0.3134	50.0
21	125000	6.00	0.4310	1.76	0.3038	50.0
22	200000	6.08	0.4334	1.04	0.2822	50.0
23	500000	6.00	0.4310	0.32	0.2606	50.0

Cuadro 1. Datos para el Circuito LCR

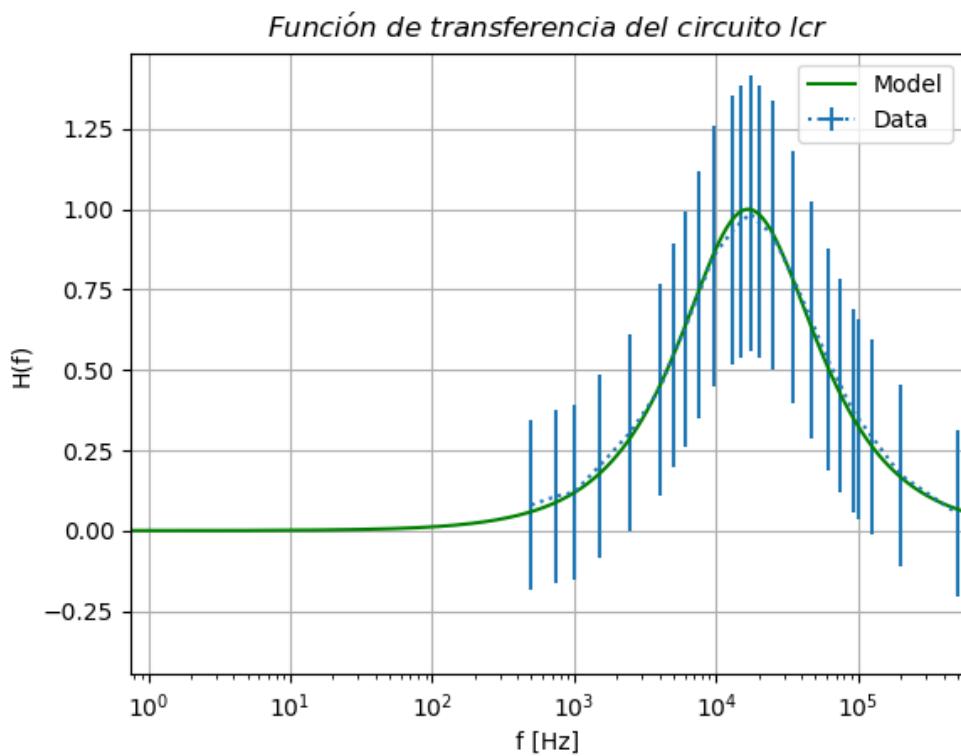


Figura 6. Función de transferencia del circuito LCR en escala logarítmica

	Frecuencia(Hz)	V_excitación (V)	dV (V)	V_respuesta (V)	dV (V)	dFrecuencia(Hz)
0	500	6.08	0.4334	0.08	0.2534	0.5
1	751	6.08	0.4334	0.08	0.2534	0.5
2	1008	6.00	0.4310	0.16	0.2558	0.5
3	1506	6.00	0.4310	0.16	0.2558	0.5
4	2000	6.08	0.4334	0.24	0.2582	0.5
5	4065	6.08	0.4334	0.48	0.2654	0.5
6	6024	6.00	0.4310	0.72	0.2726	0.5
7	7576	6.08	0.4334	1.04	0.2822	0.5
8	9615	6.08	0.4334	1.52	0.2966	0.5
9	12050	6.00	0.4310	1.92	0.3086	5.0
10	15040	6.08	0.4334	2.48	0.3254	5.0
11	17420	6.08	0.4334	2.80	0.3350	5.0
12	20410	6.00	0.4310	3.28	0.3494	5.0
13	25260	6.08	0.4334	3.92	0.3686	5.0
14	35849	6.08	0.4334	4.72	0.3926	5.0
15	47060	6.00	0.4310	5.20	0.4070	5.0
16	60240	6.00	0.4310	5.44	0.4142	5.0
17	75760	6.08	0.4334	5.68	0.4214	5.0
18	90500	6.08	0.4334	5.76	0.4238	5.0
19	152700	6.00	0.4310	5.76	0.4238	50.0

Cuadro 2. Datos para el circuito RCL

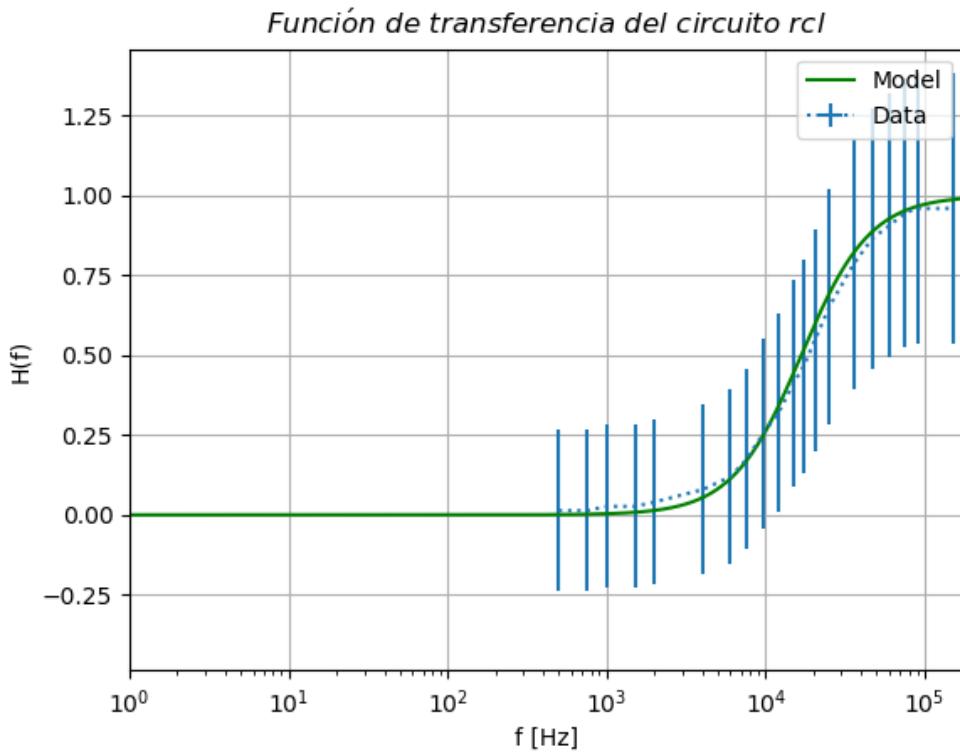


Figura 7. Función de transferencia del circuito RCL en escala logarítmica

	Frecuencia(Hz)	V_excitación (V)	dV (V)	V_respuesta (V)	dV (V)	dFrecuencia(Hz)
0	534	6.00	0.4310	6.16	0.4358	0.5
1	834	6.00	0.4310	6.08	0.4334	0.5
2	1087	6.00	0.4310	6.08	0.4334	0.5
3	1520	6.00	0.4310	6.00	0.4310	0.5
4	2525	6.00	0.4310	5.92	0.4286	0.5
5	4000	6.08	0.4334	5.76	0.4238	0.5
6	7463	6.00	0.4310	5.12	0.4046	0.5
7	10640	6.00	0.4310	4.40	0.3830	5.0
8	12500	6.08	0.4334	3.92	0.3686	5.0
9	16000	6.08	0.4334	3.12	0.3446	5.0
10	20000	6.08	0.4334	2.56	0.3278	5.0
11	27030	6.00	0.4310	1.68	0.3014	5.0
12	35710	6.00	0.4310	1.20	0.2870	5.0
13	47730	6.08	0.4334	0.90	0.2780	5.0
14	60240	6.00	0.4310	0.56	0.2678	5.0
15	75760	6.00	0.4310	0.40	0.2630	5.0
16	87720	6.08	0.4334	0.32	0.2606	5.0
17	101500	6.08	0.4334	0.24	0.2582	50.0

Cuadro 3. Datos para el circuito LRC

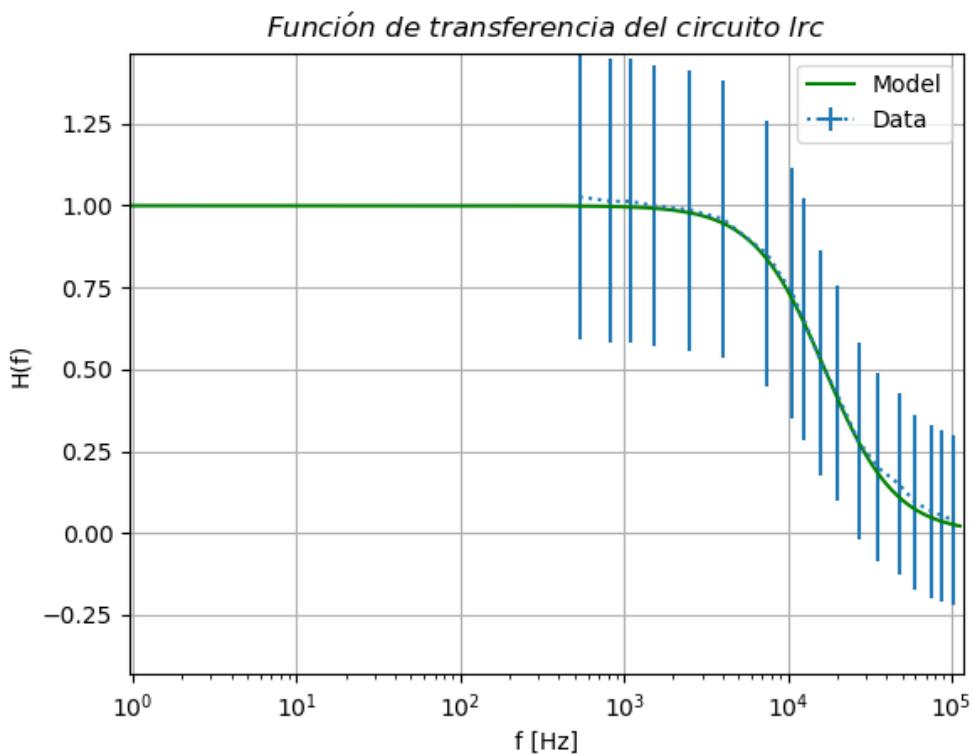


Figura 8. Función de transferencia del circuito LRC en escala logarítmica

4 Discusión

En la primera parte del experimento, la de los fenómenos transitorios (Figura 2), se puede observar (para 200Hz, 1kHz y 2.5kHz) que en el prendido de la señal ocurre un aumento instantáneo del voltaje, que después decae a cero. Esto se debe a que el condensador se satura e iguala el voltaje de la señal (con signo opuesto). Cuando se interrumpe la señal de manera súbita, el voltaje opuesto del condensador genera un voltaje negativo. A medida que se descarga, éste vuelve al equilibrio en voltaje cero. Desafortunadamente para frecuencias de 20kHz no se produjeron ondas cuadradas (el generador de funciones no era eficiente en esas frecuencias), por lo que no se pudo simular el efecto de prendido y apagado.

En la segunda parte del experimento, a de los fenómenos estacionarios, se pueden observar relaciones muy parecidas entre los datos del cociente de amplitud de las señales y las funciones de transferencia teóricas. En la figura 6 (circuito LCR) se aprecia bastante bien que la señal es atenuada para frecuencias diferentes de la de resonancia. Esto es aparente al tomar la analogía entre el circuito y el oscilador armónico amortiguado con forzamiento. En la figura 7 se puede ver que, en efecto, la frecuencia de resonancia se ubica en infinito (los datos se acercan de manera asintótica a 1). Asimismo, en la Figura 8 la frecuencia de resonancia se ubica en el cero (los datos se acercan de manera asintótica al 1 conforme disminuyen, estando en escala logarítmica). Los errores de medición resultaron ser sobre estimados; la similitud entre el modelo y los datos coincide hasta en la mínima escala.

Éstos fenómenos son propiamente independientes de la forma de la señal, pues las funciones de transferencia pudieron ser expresadas en función sólo de la frecuencia mediante el dominio de Laplace. La diferencia determinante entre su comportamiento viene dada al final de cuentas por la transformada de su numerador (la transformada de su denominador es igual para todas). Es decir, el comportamiento de la función de transferencia viene dado por el tipo de elemento que está conectado entre la tierra y los otros 2 elementos.

5 Conclusiones

Los resultados fueron muy satisfactorios, en la medida en que todos los fenómenos fueron reproducidos sin discrepancias con los modelos teóricos. Los fenómenos transitorios fueron representados para frecuencias no muy altas; el osciloscopio no lograba reproducir ondas cuadradas para frecuencias del orden de los 20kHz. Para frecuencias bajas se logró el fenómeno esperado. Los fenómenos estacionarios coincidieron muy bien en términos de sus funciones de transferencia. Hubo una correlación exacta entre las propiedades de ésta y lo observado experimentalmente.

Referencias

[1] Gw Instek. “Digital Multimeter Model: GDM-8034”. (Fecha desconocida. Revisado el 27/2/19). Disponible en:

<https://www.gwinstek.com/en-US/products/downloadSeriesDownNew/9711/709>

[2] Agilent Technologies. “Agilent 3000 Series Oscilloscopes User’s Guide”. (2008 [27/02/19]). Disponible en:

[3]http://ecelabs.njit.edu/student_resources/D3000-97017%20UL%20Agilent%203000%20series%20oscilloscop