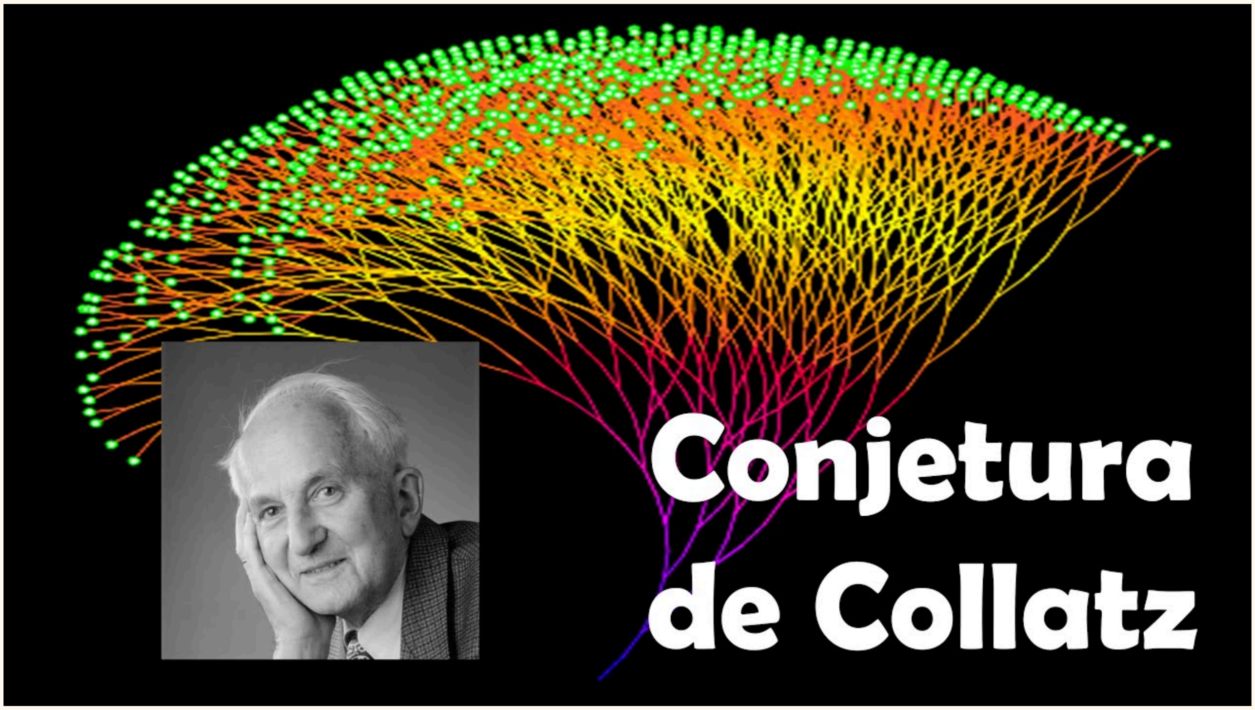
Problemas de **Matemáticas**
M.I Luis Andrés Roblero González

Conjetura de Collatz

CONJETURAS Y PROBLEMAS

—



INTRODUCCIÓN

Las conjeturas y los problemas abiertos son muy usuales en las matemáticas, de hecho, sirven como aliciente para continuar investigando, recabando en los conceptos y obteniendo resultados en las diversas ramas de la disciplina. En este estudio, analizaremos específicamente la conjetura de Collatz, el cual plantea que cualquier número entero positivo converge al ciclo 4→2→1 mediante reglas iterativas simples. A través de esta investigación se exploran aplicaciones y aprendizaje automático.

Lothar Collatz

Fue un matemático alemán nacido en Arnsberg, Westfalia. Estudió en universidades de Alemania, incluidas la Universidad de Greifswald y la Universidad de Berlín, donde fue supervisado por Alfred Klose y recibió su doctorado en 1935. De 1943 a 1952, Collatz ocupó una cátedra en la Universidad Técnica de Hannover. Desde 1952 hasta su jubilación en 1978, Collatz trabajó en la Universidad de Hamburgo, donde fundó el Instituto de Matemáticas Aplicadas en 1953. Después de jubilarse como profesor emérito, continuó siendo muy activo en conferencias de matemáticas.

Conjetura de Collatz

La conjetura de Collatz es un problema que ha desconcertado a la comunidad científica durante más de 80 años. Incluso las mentes más brillantes han manifestado la extrema dificultad de abordar esta operación, llegando a considerarla prácticamente imposible de solucionar hasta el momento. Es también conocida como el problema 3n + 1, ha sido objeto de estudio desde su formulación en 1937 por Lothar Collatz. Esta conjetura establece que, cualquier número natural (n), si se aplica el siguiente proceso repetidamente, eventualmente se llegara al número 1:

1. **Si el número es par, se divide entre 2.**
2. **Si es impar, se multiplica por 3 y se suma 1.**

En notación aritmética modular, defina la función *f* de la siguiente manera:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n+1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Eventualmente llevará al ciclo, independientemente del valor inicial. Aunque esta afirmación se ha verificado empíricamente para un rango extenso de números (), sigue siendo un problema abierto en matemáticas (Lagarias, 1985).

Bajo este contexto, si se comienza con el número 13, la secuencia de Collatz es la siguiente: 13→40→20→10→5→16→8→4→2→1.

Si se aplica la conjetura queda de la siguiente manera:

- Para 13 (impar): 13 * 3 + 1 = 40.
- Para 40 (par): 40 / 2 = 20.
- Para 20 (par): 20 / 2 = 10.
- Para 10 (par): 10 / 2 = 5.
- Para 5 (impar): 5 * 3 +1 = 16.
- Para 16 (par): 16 / 2 = 8.
- Para 8 (par): 8 / 2 = 4.
- Para 4 (par): 4 / 2 = 2.
- Para 2 (par): 2 / 2 = 1.

La conjetura de Collatz plantea un desafío matemático aparentemente sencillo, que ha sido verificado para la mayoría de los números naturales. Sin embargo, su misterio persiste, ya que aún no se ha demostrado para números más grandes que superen el umbral de 20 dígitos, y carece de pruebas que confirmen su validez en esos casos.

Complejidad Computacional.

El estudio de la Conjetura de Collatz también está relacionado con la complejidad computacional. Investigaciones recientes han explorado la eficiencia de algoritmos para simular y analizar grandes cantidades de datos relacionados con las secuencias de Collatz (Murillo Morera & Camaño Polini, 2013). Estos estudios han demostrado que, aunque las simulaciones son viables para rangos grandes, la necesidad de optimización computacional se vuelve esencial al incrementar los límites del rango numérico.

La optimización mediante memorización se compara favorablemente con el enfoque iterativo básico. Mientras que el iterativo calcula las longitudes de las secuencias para cada número, la memorización almacena resultados intermedios en un diccionario evitando redundancias y reduciendo significativamente el tiempo y uso de memoria.

Implementación.

Basándonos en la notación aritmética modular:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n+1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

podemos definir a través de la programación en lenguaje python la siguiente formulación:

```
def collatz(n):
    """
    Calcula la secuencia de Collatz para un número dado y devuelve los pasos hasta llegar a 1.
    """
```

Declaramos una cadena la cual almacenará los datos como secuencia[].

```
    secuencia = []
```

Proseguimos un un ciclor While, el cual nos dice, que mientras "n", el cual es el número natural declarado, sea distinto de 1, almacenará en la cadena "secuencia" los valores obtenidos de las siguientes condiciones:

```
    while n != 1:
        secuencia.append(n)
```

Si n es par, entonces procedemos a la primer función *f(n) = n/2*, el cual nos declara que si un número natural es par, se divide entre 2:

```
        if n % 2 == 0:  # Si es par
            n = n // 2
```

En caso de que el número natural sea impar, la segunda función nos dice que *f(n)) = n * 3 + 1*

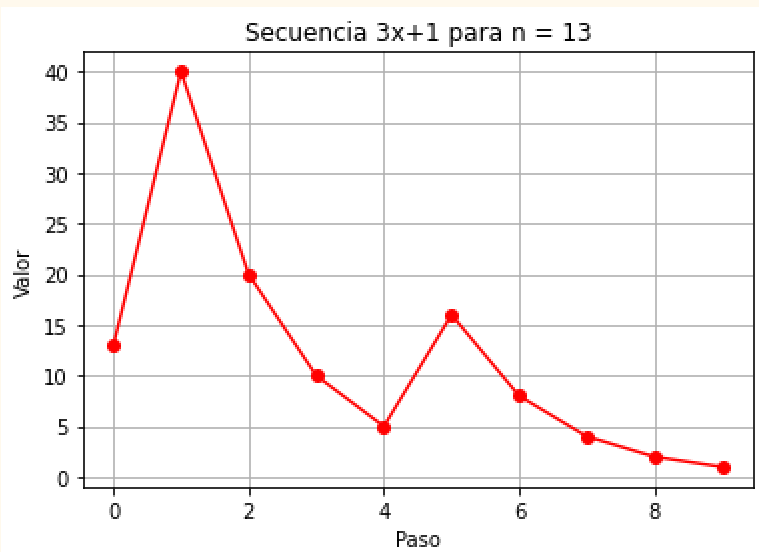
```
        else:  # Si es impar
            n = 3 * n + 1
    secuencia.append(1)  # Añadir el último valor (1)
    return secuencia
```

Resultados.

A continuación se presentan varios casos y sus resultados obtenidos.

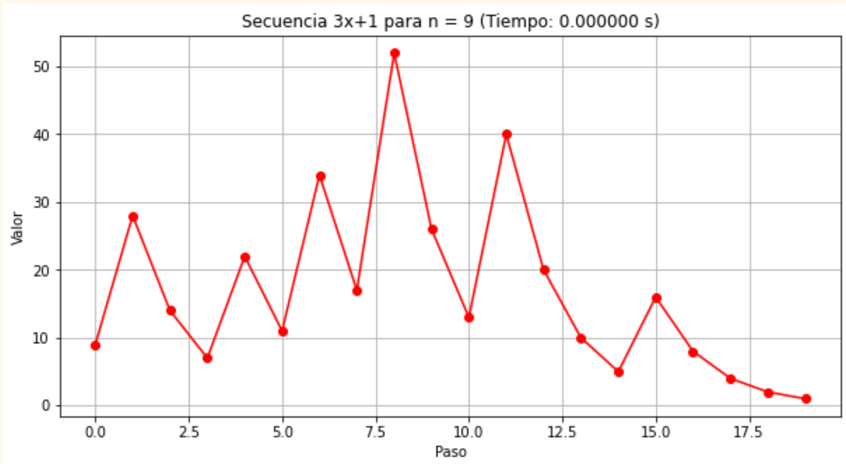
n = 13:

```
Ingrese un número entero positivo: 13

Secuencia para 13:
13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

Total de pasos: 9
Tiempo de ejecución: 0.000000 segundos
```



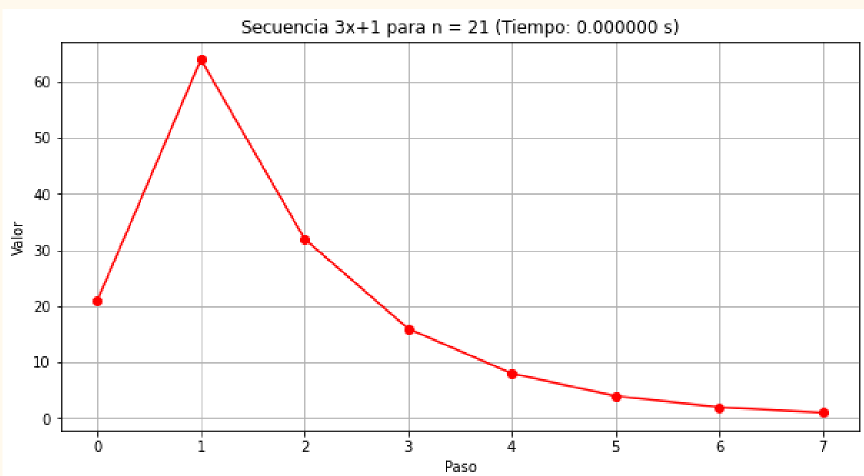
n = 9:

```
Secuencia para 9:
9 → 28 → 14 → 7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8
→ 4 → 2 → 1

Total de pasos: 19
Tiempo de ejecución: 0.000000 segundos
```



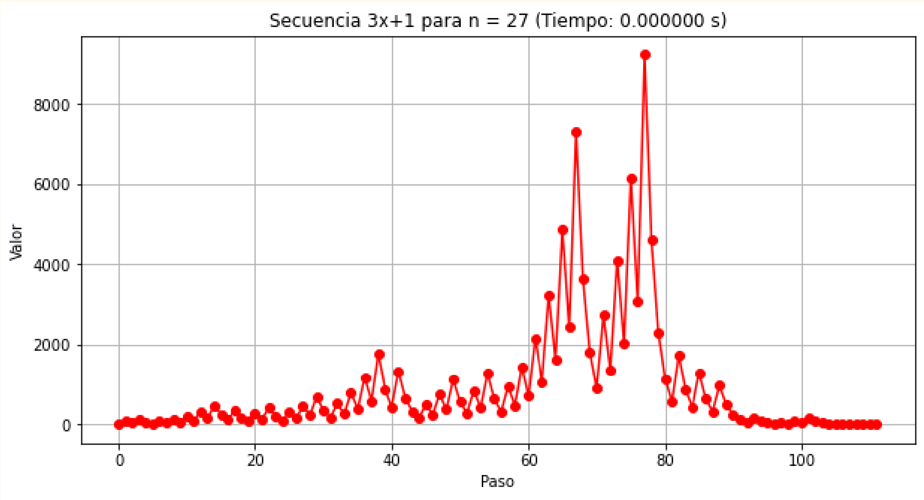
n = 21:

```
Ingrese un número entero positivo: 21

Secuencia para 21:
21 → 64 → 32 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

Total de pasos: 7
Tiempo de ejecución: 0.000000 segundos
```



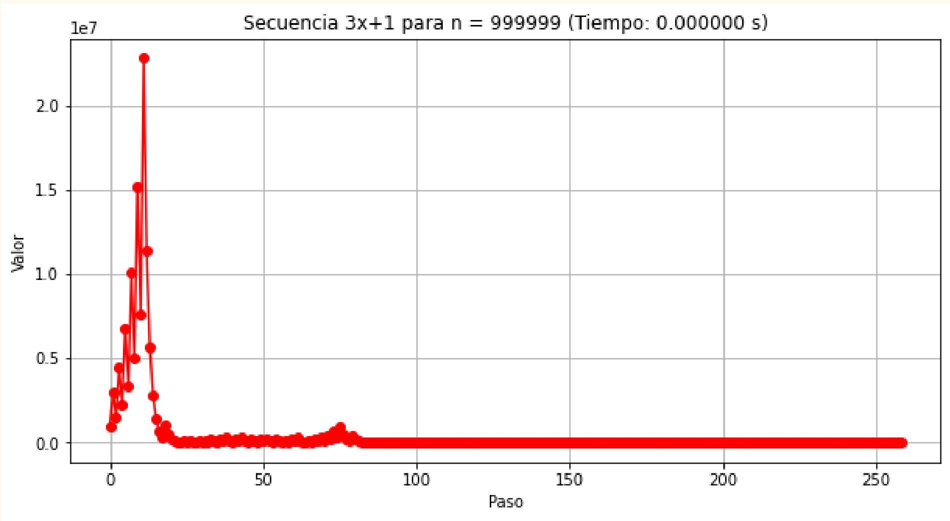
n = 27:

```
Secuencia para 27:
27 → 82 → 41 → 124 → 62 → 31 → 94 → 47 → 142 → 71 → 214 → 107 → 322 → 161 →
484 → 242 → 121 → 364 → 182 → 91 → 274 → 137 → 412 → 206 → 103 → 310 → 155 →
466 → 233 → 700 → 350 → 175 → 526 → 263 → 790 → 395 → 1186 → 593 → 1780 → 890
→ 445 → 1336 → 668 → 334 → 167 → 502 → 251 → 754 → 377 → 1132 → 566 → 283 →
850 → 425 → 1276 → 638 → 319 → 958 → 479 → 1438 → 719 → 2158 → 1079 → 3238 →
1619 → 4858 → 2429 → 7288 → 3644 → 1822 → 911 → 2734 → 1367 → 4102 → 2051 →
6154 → 3077 → 9232 → 4616 → 2308 → 1154 → 577 → 1732 → 866 → 433 → 1300 → 650
→ 325 → 976 → 488 → 244 → 122 → 61 → 184 → 92 → 46 → 23 → 70 → 35 → 106 → 53 →
160 → 80 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1

Total de pasos: 111
Tiempo de ejecución: 0.000000 segundos
```



n = 999,999:

```
Secuencia para 999999:
999999 → 2999998 → 1499999 → 4499998 → 2249999 → 6749998 → 3374999 → 10124998
→ 5062499 → 15187498 → 7593749 → 22781248 → 11390624 → 5695312 → 2847656 →
1423828 → 711914 → 355957 → 1067872 → 533936 → 266968 → 133484 → 66742 → 33371
→ 100114 → 50057 → 150172 → 75086 → 37543 → 112630 → 56315 → 168946 → 84473 →
253420 → 126710 → 63355 → 190066 → 95033 → 285100 → 142550 → 71275 → 213826 →
106913 → 320740 → 160370 → 80185 → 240556 → 120278 → 60139 → 180418 → 90209 →
270628 → 135314 → 67657 → 202972 → 101486 → 50743 → 152230 → 76115 → 228346 →
114173 → 342520 → 171260 → 85630 → 42815 → 128446 → 64223 → 192670 → 96335 →
289006 → 144503 → 433510 → 216755 → 650266 → 325133 → 975400 → 487700 → 243850
→ 121925 → 365776 → 182888 → 91444 → 45722 → 22861 → 68584 → 34292 → 17146 →
8573 → 25720 → 12860 → 6430 → 3215 → 9646 → 4823 → 14470 → 7235 → 21706 →
10853 → 32560 → 16280 → 8140 → 4070 → 2035 → 6106 → 3053 → 9160 → 4580 → 2290
→ 1145 → 3436 → 1718 → 859 → 2578 → 1289 → 3868 → 1934 → 967 → 2902 → 1451 →
4354 → 2177 → 6532 → 3266 → 1633 → 4900 → 2450 → 1225 → 3676 → 1838 → 919 →
2758 → 1379 → 4138 → 2069 → 6208 → 3104 → 1552 → 776 → 388 → 194 → 97 → 292 →
146 → 73 → 220 → 110 → 55 → 166 → 83 → 250 → 125 → 376 → 188 → 94 → 47 → 142 →
71 → 214 → 107 → 322 → 161 → 484 → 242 → 121 → 364 → 182 → 91 → 274 → 137 →
412 → 206 → 103 → 310 → 155 → 466 → 233 → 700 → 350 → 175 → 526 → 263 → 790 →
395 → 1186 → 593 → 1780 → 890 → 445 → 1336 → 668 → 334 → 167 → 502 → 251 → 754
→ 377 → 1132 → 566 → 283 → 850 → 425 → 1276 → 638 → 319 → 958 → 479 → 1438 →
719 → 2158 → 1079 → 3238 → 1619 → 4858 → 2429 → 7288 → 3644 → 1822 → 911 →
2734 → 1367 → 4102 → 2051 → 6154 → 3077 → 9232 → 4616 → 2308 → 1154 → 577 →
1732 → 866 → 433 → 1300 → 650 → 325 → 976 → 488 → 244 → 122 → 61 → 184 → 92 →
46 → 23 → 70 → 35 → 106 → 53 → 160 → 80 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 →
1
```



Conclusiones.

La conjetura de Collatz es todavía un problema de actualidad. Es interesante tanto para aficionados a las matemáticas como para expertos debido a su sencillez y su dificultad al mismo tiempo. Todavía hay matemáticos que continúan trabajando en ella. Por citar uno de los últimos intentos realizados, Peter Schorer dio a conocer una nueva vía de demostración en septiembre de 2019, pero desgraciadamente se le encontró un error insalvable. El avance más importante, quizás, sea el realizado por Terence Tao en 2019, el cual presentamos en el teorema 38, y parece que establece una nueva conexión de la conjetura con el área de ecuaciones en derivadas parciales.

Referencias.

Dr, Ruiz Castillo, J.C.(2024) El estudio de la conjetura de Collatz en el contexto de sistemas dinámicos y la relación entre la complejidad computacional y la efectividad de las técnicas de optimización.

WikiLibros (2025, 2 de agosto). Implementación de algoritmos de teoría de números/Conjetura de Collatz. https://es.wikibooks.org/wiki/Implementaci%C3%B3n_de_algoritmos_de_teor%C3%ADa_de_n%C3%BAmeros/Conjetura_de_Collatz

Academia Lab (2025, 2 de agosto). Conjetura de Collatz. https://academia-lab.com/enciclopedia/conjetura-de-collatz/#google_vignette

Academia Lab (2025, 2 de agosto). Lothar Collatz. https://academia-lab.com/enciclopedia/lothar-collatz/#google_vignette