



**Ejercicio 1.** ★ Calcular las siguientes expresiones, donde  $a, b$  son variables reales,  $i$  una variable entera y  $A$  es una secuencia de reales.

- a)  $\text{def}(a + 1)$ .
- b)  $\text{def}(a/b)$ .
- c)  $\text{def}(\sqrt{a/b})$ .
- d)  $\text{def}(A[i] + 1)$ .
- e)  $\text{def}(A[i + 2])$ .
- f)  $\text{def}(0 \leq i \leq |A|)$ .
- g)  $\text{def}(0 \leq i \leq |A| \wedge_L A[i] \leq 0)$ .

### Respuestas

Supongo que  $\text{def}(x) \equiv \text{True}$ , para todas las variables por lo expuesto en la teorica, ya que de este modo se simplifica la notación.

- a)  $\text{def}(a + 1) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(1) \equiv \text{True} \wedge \text{True} \equiv \text{True}$
- b)  $\text{def}(a/b) \equiv \text{def}(a) \wedge \text{def}(b) \wedge b \neq 0 \equiv b \neq 0$ .
- c)  $\text{def}(\sqrt{a/b}) \equiv b \neq 0 \wedge (a/b) \geq 0$ .
- d)  $\text{def}(A[i] + 1) \equiv 0 \leq i < |A|$
- e)  $\text{def}(A[i + 2]) \equiv 0 \leq i + 2 < |A|$
- f)  $\text{def}(0 \leq i \leq |A|) \equiv \text{True}$
- g)  $\text{def}(0 \leq i \leq |A| \wedge_L A[i] \leq 0) \equiv i < |A|$

**Ejercicio 2.** Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde  $a, b$  son variables reales,  $i$  una variable entera y  $A$  es una secuencia de reales.

- a)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} + 1, a \geq 0)$ .
- b)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}/\mathbf{b}, a \geq 0)$ .
- c)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}], a \geq 0)$ .
- d)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{b} * \mathbf{b}, a \geq 0)$ .
- e)  $wp(\mathbf{b} := \mathbf{b} + 1, a \geq 0)$ .

## Respuestas

a)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}+1, a \geq 0) &\equiv \text{def}(a+1) \wedge_L (a \geq 0)_{a+1}^a \\ &\equiv \text{True} \wedge_L a+1 \geq 0 \\ &\equiv a \geq -1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}/\mathbf{b}, a \geq 0) &\equiv \text{def}(a/b) \wedge_L \wedge_L (a \geq 0)_{a/b}^a \\ &\equiv \text{def}(a) \wedge_L \text{def}(b) \wedge_L b \neq 0 \wedge_L (a \geq 0)_{a/b}^a \\ &\equiv \text{True} \wedge_L \text{True} \wedge_L b \neq 0 \wedge_L a/b \geq 0 \\ &\equiv b \neq 0 \wedge_L a \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}], a \geq 0) &\equiv \text{def}(A[i]) \wedge_L (a \geq 0)_{A[i]}^a \\ &\equiv (\text{def}(A) \wedge_L \text{def}(i)) \wedge_L 0 \leq i < |A| \wedge_L A[i] \geq 0 \\ &\equiv 0 \leq i < |A| \wedge_L A[i] \geq 0 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{a} := \mathbf{b}*\mathbf{b}, a \geq 0) &\equiv \text{def}(b*b) \wedge_L (a \geq 0)_{b*b}^a \\ &\equiv \text{True} \wedge_L b*b \geq 0 \\ &\equiv b*b \geq 0 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} wp(\mathbf{b} := \mathbf{b}+1, a \geq 0) &\equiv \text{def}(b+1) \wedge_L (a \geq 0)_a^a \\ &\equiv \text{True} \wedge_L a \geq 0 \\ &\equiv a \geq 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** ★ Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde  $a, b$  son variables reales,  $i$  una variable entera y  $A$  es una secuencia de reales.

a)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}+1; \mathbf{b} := \mathbf{a}/2, b \geq 0).$

b)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \mathbf{b} := \mathbf{a}*\mathbf{a}, b \neq 2).$

c)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \mathbf{a} := \mathbf{b}*\mathbf{b}, a \geq 0).$

d)  $wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}-\mathbf{b}; \mathbf{b} := \mathbf{a}+\mathbf{b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0).$

## Respuestas

a)

$$\begin{aligned} \{wp(\mathbf{a} := \mathbf{a}+1; \mathbf{b} := \mathbf{a}/2, b \geq 0)\} &\equiv \{(a+1)/2 \geq 0\} \\ &\quad \mathbf{a} := \mathbf{a}+1; \\ &\quad \{wp(\mathbf{b} := \mathbf{a}/2, Q)\} \equiv \{a/2 \geq 0\} \\ &\quad \mathbf{b} := \mathbf{a}/2; \\ &\quad \{Q : b \geq 0\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \{wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \mathbf{b} := \mathbf{a}*\mathbf{a}, b \neq 2)\} &\equiv \{0 \leq i < |A| \wedge_L (A[i] + 1) * (A[i] + 1) \neq 0\} \\ &\quad \mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \\ &\quad \{wp(\mathbf{b} := \mathbf{a}*\mathbf{a}, Q)\} \equiv \{a * a \neq 0\} \\ &\quad \mathbf{b} := \mathbf{a}*\mathbf{a}; \\ &\quad \{Q : b \neq 0\} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \{wp(\mathbf{a} := \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \mathbf{a} := \mathbf{b} * \mathbf{b}, a \geq 0)\} &\equiv \{(a + 1)/2 \geq 0\} \\ \mathbf{a} &:= \mathbf{A}[\mathbf{i}] + 1; \\ \{wp(\mathbf{a} := \mathbf{b} * \mathbf{b}, Q)\} &\equiv \{b \geq 0\} \\ \mathbf{a} &:= \mathbf{b} * \mathbf{b}; \\ \{Q : b \geq 0\} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \{wp(\mathbf{a} := \mathbf{a} - \mathbf{b}; \mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{b}, a \geq 0 \wedge b \geq 0)\} &\equiv \{(a + 1)/2 \geq 0\} \\ \mathbf{a} &:= \mathbf{a} - \mathbf{b}; \\ \{wp(\mathbf{b} := \mathbf{a}/2, Q)\} &\equiv \{a/2 \geq 0\} \\ \mathbf{b} &:= \mathbf{a} + \mathbf{b}; \\ \{Q : a \geq 0 \wedge b \geq 0\} \end{aligned}$$

**Ejercicio 4.** ★ Sea  $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq 0)$ . Calcular las siguientes precondiciones más débiles, donde  $i$  es una variable entera y  $A$  es una secuencia de reales.

- a)  $wp(A[i] := 0, Q)$ .
- b)  $wp(A[i + 2] := 0, Q)$ .
- c)  $wp(A[i + 2] := -1, Q)$ .
- d)  $wp(A[i] := 2 * A[i], Q)$ .
- e)  $wp(A[i] := A[i - 1], Q)$ .

## Respuestas

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**Ejercicio 5.** Calcular  $wp(S, Q)$ , para los siguientes pares de programas  $S$  y postcondiciones  $Q$ .

- a)  $S \equiv i := i + 1$   
 $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$
- b)  $S \equiv A[0] := 4$   
 $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$
- c)  $S \equiv A[2] := 4$   
 $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |A| \rightarrow_L A[j] \neq 0)$
- d)  $S \equiv A[i] := A[i + 1] - 1$   
 $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 < j < |A| \rightarrow_L A[j] \geq A[j - 1])$
- e)  $S \equiv A[i] := A[i + 1] - 1$   
 $Q \equiv (\forall j : \mathbb{Z})(0 < j < |A| \rightarrow_L A[j] \leq A[j - 1])$

## Respuestas

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**Ejercicio 6.** . Escribir programas para los siguientes problemas y demostrar formalmente su corrección usando la precondition más débil.

- a) **proc problema1** (inout a: Z)  
    **Pre**  $\{a = a_0 \wedge a \geq 0\}$   
    **Post**  $\{a = a_0 + 2\}$
- b) **proc problema2** (in a: Z, out b: Z)  
    **Pre**  $\{a \neq 0\}$   
    **Post**  $\{b = a + 3\}$
- c) **proc problema3** (in a: Z, in b: Z, out c: Z)  
    **Pre**  $\{true\}$   
    **Post**  $\{c = a + b\}$
- d) **proc problema4** (in a: seqhZi, in i: Z, out result: Z)  
    **Pre**  $\{0 \leq i < |a|\}$   
    **Post**  $\{result = 2 * a[i]\}$
- e) **proc problema5** (in a: seqhZi, in i: Z, out result: Z)  
    **Pre**  $\{0 \leq i \wedge i + 1 < |a|\}$   
    **Post**  $\{result = a[i] + a[i + 1]\}$

## Respuestas

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**Ejercicio 7.** ★ Calcular  $wp(S, Q)$ , para los siguientes pares de programas S y postcondiciones Q.

- a)  $S \equiv$   
    if ( $a < 0$ )  
     $b := a$   
    else  
     $b := -a$   
    endif

$$Q \equiv (b = -|a|)$$

b)  $S \equiv$   
 if  $(a < 0)$   
 $b := a$   
 else  
 $b := -a$   
 endif

$$Q \equiv (b = |a|)$$

c)  $S \equiv$   
 if  $(i > 0)$   
 $s[i] := 0$   
 else  
 $s[0] := 0$   
 endif

$$Q \equiv (\forall j : Z)(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \geq 0)$$

d)  $S \equiv$  if  $(i > 1)$   
 $s[i] := s[i - 1]$   
 else  
 $s[i] := 0$   
 endif

$$Q \equiv (\forall j : Z)(1 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] = s[j - 1])$$

e)  $S \equiv$   
 if  $(s[i] < 0)$   
 $s[i] := -s[i]$   
 else  
 $skip$   
 endif

$$Q \equiv 0 \leq i < |s| \wedge_L s[i] \geq 0$$

f)  $S \equiv$   
 if  $(s[i] > 0)$   
 $s[i] := -s[i]$   
 else  
 $skip$   
 endif

$$Q \equiv (\forall j : Z)(0 \leq j < |s| \rightarrow_L s[j] \geq 0)$$

## Respuestas

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

**Ejercicio 8.** ★ Escribir programas para los siguientes problemas y demostrar formalmente su corrección usando la precondition más débil.

a) **proc problema1** (in s: seqhZi, in i: Z, inout a: Z)

**Pre**  $\{0 \leq i < |s| \wedge_L a = j = 0s[j]\}$

**Post**  $\{a = j = 0s[j]\}$

b) **proc problema2** (in s: seqhZi, in i: Z, inout a: Z)

**Pre**  $\{0 \leq i < |s| \wedge a = j = 0s[j]\}$

**Post**  $\{a = j = 1s[j]\}$

c) **proc problema3** (in s: seqhZi, in i: Z, out res: Bool)

**Pre**  $\{0 \leq i < |s| \wedge (\forall j : Z)(0 \leq j < i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

**Post**  $\{res = true \leftrightarrow (\forall j : Z)(0 \leq j \leq i \rightarrow_L s[j] \geq 0)\}$

d) **proc problema4** (in s: seqhZi, in i: Z, inout a: Z)

**Pre**  $0 \leq i < |s| \wedge_L a = j = 0(if s[j]6 = 0then1else0fi)$

**Post**  $\{a = j = 0(if s[j]6 = 0then1else0fi)\}$

e) **proc problema5** (in s: seqhZi, in i: Z, inout a: Z)

**Pre**  $\{0 < i \leq |s| \wedge_L a = j = 1(if s[j]6 = 0then1else0fi)\}$

**Post**  $\{a = j = 0(if s[j]6 = 0then1else0fi)\}$

## Respuestas

a)

b)

c)

d)

e)