

Parte I

Guía de Cálculo Integral

Capítulo 1

Carta al lector

“El 80 % del éxito se basa simplemente en insistir” - Woody Allen

Aún recuerdo que hace años, durante mi proceso de formación profesional en la universidad, era recurrente pensar que los docentes eran calificados de acuerdo con la cantidad de estudiantes reprobados de un curso, y más irónicamente todavía, pensar que un número alto de estudiantes reprobados representaba un índice de calidad elevado. Nada más alejado de la realidad.

Mis compañeros contaban anécdotas acerca del abuso o la indolencia que llevaban a cabo varios de sus profesores, y en un acto inconsciente de defensa de su propia integridad mental, se reían de estos acontecimientos. Nos metíamos en la idea de que estudiar ingeniería debía ser algo difícil y que solo una especie de “hombre valiente e indomable” era “merecedor del título de ingeniero” cual si estuviéramos combatiendo contra la tiranía de un reinado enemigo (permítase reírse). Así que, partícipes de dificultar el proceso de enseñanza para enaltecer nuestro ego por aprobar materias difíciles, aceptábamos y hasta promovíamos la ausencia de humanismo en los procesos de enseñanza.

Recuerdo que yo también contaba anécdota de una de esas historias que fueron duras para mis compañeros en la cual, durante un examen en computador, la persona que se sentaba junto a mí decidió simplemente cancelar la materia y retirarse del salón. Otro de mis compañeros contaba cómo se burlaba de haber visto a uno de los estudiantes de la universidad llorando en pleno examen de física mecánica por la frustración que le provocaba, y otros, con mayor cinismo, reproducían los insultos que los mismos docentes proferían a sus estudiantes en plena clase tras hacer preguntas que sonaban ridículas a los oídos de un profesional en todo menos en lo humano.

La misantropía parecía ser el común denominador de muchos de los docentes, el pensar que las clases debían ser duras para preparar a los estudiantes para

un mundo que, al parecer, por alguna extraña razón, debía seguir siendo duro. Lo prioritario era formar personas con carácter fuerte, porque la prepotencia era más importante que la empatía en el camino del éxito que ellos mismo planteaban.

Ojalá la solución a estos problemas fuera tan simple como pedir perdón en nombre de todos los que no entendíamos la indolencia de estas prácticas. La realidad es que las consecuencias de esto ha sido un mundo al que a veces culpamos por “no querer estudiar” que en realidad se aleja de la academia para no sentirse humillado, frustrado, abatido...

Hoy se me encomienda realizar esta guía que sé que no será fructífera si no se considera la causa principal del problema, “la frustración”. La frustración de un estudiante que pudo haber reprobado una materia porque no logró concentrarse para un examen tras la ruptura con su pareja o la muerte de una mascota, de un estudiante que quiso prepararse para un examen durante toda la noche y cuando tuvo que realizarlo simplemente el cansancio no le permitió pensar bien, o la frustración de un estudiante que simplemente se trata mal a sí mismo y que cuando se queda a solas, cuando no entiende un ejercicio, empieza a repetir en su cabeza que la culpa es suya, que se dice que “el problema soy yo”, a quien lo han hecho sentir incapaz e inferior.

Escribo esto pensando en que mucho del estudiantado se identificará con lo que digo, y ojalá que esté equivocado, pues si efectivamente el estudiantado se identifica con esto, es porque ciertamente, el humanismo no ha logrado tomar el lugar que le corresponde en los claustros de educación superior.

Espero que estas páginas sirvan para promover un deseo de superación personal, espero que este documento sea leído sin promover nuevas frustraciones y espero que los logros alcanzados con este representen un eventual motivo de orgullo en el futuro de los lectores.

¡Ánimo! La carrera ya comenzó. Déjenme ser romántico para pedirles que asuman esto como la oportunidad de demostrarse a ustedes mismos que su esfuerzo sí les abrirá el camino para alcanzar sus sueños.

Capítulo 2

La integral

El teorema fundamental del cálculo dice que la derivada y la integral de una función son operaciones inversas, esto quiere decir que si la derivada de $F(x) = f(x)$, entonces la integral de $f(x)$ es $F(x)$.

La integral se representa de la siguiente manera:

$$\int f(x)dx$$

Donde \int es el símbolo de la integral, $f(x)$ es el integrando y dx , que se lee como “el diferencial de x ” denota la variable de integración, en este caso la x . El diferencial de x representa lo mismo que representa en una derivada, o sea un desplazamiento infinitesimal en x .

Nota

En este documento (y en muchos otros libros), se denotará por $f(x)$ a la derivada de la función $F(x)$. En otras palabras $F(x)$ es la función primitiva de $f(x)$.

A partir de lo anterior, se pueden intuir los resultados de las integrales más simples a partir del conocimiento de las derivadas como se muestra a continuación.

La primera integral que se analiza es la integral de 0, la cual se puede intuir a partir de la derivada de una constante. Es decir, dado que la derivada de una constante es igual a 0, la integral de cero necesariamente puede ser cualquier constante.

$$\frac{d}{dx}C = 0 \rightarrow \int 0dx = C \quad (2.1)$$

De igual manera, usando el teorema fundamental (el que se presenta en el primer párrafo de este capítulo) se puede representar la definición de una integral de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) \quad (2.2)$$

Nótese que $F(x)$ no es la única función que puede dar como derivada otra función $f(x)$, puesto que si a $F(x)$ se le suma cualquier constante C , la derivada de esta nueva función seguirá siendo $f(x)$. Esto se representa de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \quad (2.3)$$

De aquí se puede concluir que, dado que la derivada de $F(x)$ es la misma derivada de $F(x) + C$, entonces toda integral, de cualquier función, debe terminar en un $+C$, que quiere decir que este resultado es válido, y que al sumarle cualquier constante a la respuesta sigue siendo igualmente válido.

2.1. Propiedades de la integral

Las derivadas tienen la propiedad de linealidad y homogeneidad, que permiten simplificar ciertas derivadas. Dado que la integral es la operación inversa de la derivada, la integral también tiene esta propiedad, como se muestra a continuación:

$$\frac{d}{dx}kF(x) = kf(x) \rightarrow \int kf(x)dx = kF(x) + C \quad (2.4)$$

Esta propiedad se suele usar diciendo que “la constante sale de la integral” puesto que el siguiente procedimiento es válido.

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + C \quad (2.5)$$

De igual forma, cuando las funciones se suman, estas se puede separar.

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(x)) = f(x) + g(x) \rightarrow \int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C \quad (2.6)$$

Esta propiedad se suele usar diciendo que “la integral se separa” puesto que la siguiente operación es válida.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C \quad (2.7)$$

Nótese que solo se usa una C , puesto que la constante que se suma al final es arbitraria (o sea que cualquier constante sirve), así que al sumar dos constantes, el resultado seguirá siendo una constante.

A la combinación de estas dos propiedades se le conoce como la propiedad de linealidad, y se puede representar de la siguiente manera:

$$\int (k_1 f(x) + k_2 g(x)) dx = k_1 F(x) + k_2 G(x) + C \quad (2.8)$$

2.2. Resolución de integrales

Las integrales más sencillas se realizan de manera directa sabiendo que son la derivada de ciertas funciones, por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} x = 1 \rightarrow \int 1 dx = x + C$$

Puede parecer obvio que el diferencial está multiplicando al 1, por lo que poner el 1 no es estrictamente necesario, así que la ecuación queda así:

$$\int dx = x + C \quad (2.9)$$

Dado que x es una variable arbitraria, se puede decir que una integral “vacía” (sin integrando) es igual a la variable de integración.

$$\int dy = y + C$$

$$\int dz = z + C$$

$$\int dx^n = x^n + C$$

$$\int d\mathfrak{I} = \mathfrak{I} + C$$

La integral de una constante se deduce de la derivada de una variable por una constante de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx} kx = k \rightarrow \int k dx = k \int dx = kx + C \quad (2.10)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \quad \int 5dy = 5y + C \\
 & \blacksquare \quad \int \pi dz = \pi z + C \\
 & \blacksquare \quad \int e dx^n = ex^n + C \\
 & \blacksquare \quad \int 2024d\P = 2024\P + C
 \end{aligned}$$

Y la integral de x , al igual que la integral de x^k siendo k cualquier número real diferente de -1, se puede analizar a partir de la derivada de x^k .

$$\frac{d}{dx}x^k = kx^{k-1} \rightarrow \int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad (2.11)$$

De ahí que:

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \quad \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C \\
 & \blacksquare \quad \int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-7+1}}{-7+1} + C = \frac{x^{-6}}{-6} + C = \frac{-1}{6x^6} + C \\
 & \blacksquare \quad \int \sqrt{y} dy = \int y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{y^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{y^3} + C
 \end{aligned}$$

De ahora en adelante nos saltaremos el paso de escribir el resultado sumando 1 al exponente y pondremos directamente el resultado de la suma. Ya con esto se puede resolver la integral de cualquier polinomio como se hace a continuación:

$$\begin{aligned}
 \int x^2 + 3x + 8dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx + \int 8dx \\
 &= \frac{x^3}{3} + C \\
 \int 3x dx &= 3 \int x dx = \frac{3x^2}{2} + C \\
 \int 8dx &= 8x + C \\
 \int x^2 + 3x + 8dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x + C
 \end{aligned}$$

Tarea

Lee todo lo que se ha escrito hasta ahora y entiéndelo a profundidad. Preguntar todo lo que no entiendas o anota las preguntas para hacerlas posteriormente, no avances sin haber entendido esto. Si no has entendido algo ¡Ánimo! ¡Es muy pronto para frustrarte! Estamos para ayudarte.

2.2.1. Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios sin saltarte ninguno y sin adelantarte, dispón de tiempo para realizarlos todos el mismo día y sin descansar hasta haberlos terminado. Dos habilidades importantes que hay que trabajar son la constancia y la concentración. ¡La práctica hace al maestro!

1. Represente las siguientes derivadas como una integral (No olvides el +C).

1.0 Ejemplo.

$$\frac{d}{dx}3x^2 = 6x \rightarrow \int 6x dx = 3x^2 + C$$

1.1. $\frac{d}{d\theta}\theta = 1 \rightarrow$

1.2. $\frac{d}{d\alpha}7\alpha = 7 \rightarrow$

1.3. $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2 \rightarrow$

1.4. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \rightarrow$

1.5. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \rightarrow$

2. Realice las siguientes integrales. Los ejercicios que tienen un asterisco (*) son capciosos.

2.1. $\int dm$

2.2. $\int 27dx$

2.3. $\int \pi dx$

2.4. $\int \pi x dx$

2.5. $^*\int \pi x dy$

2.6. $\int x^3 dx$

2.7. $\int 5y^9 dy$

2.8. $\int 3n^{-4} dn$

2.9. $^*\int \sqrt{x^5} dx$

2.10. $\int 98m^\pi dm$

3. Aplica la propiedad de linealidad para resolver las siguientes integrales de sumas y luego simplifica el resultado. Los ejercicios con asterisco (*) son capciosos. Recuerda que las respuestas de los ejercicios impares se encuentran al final del documento. No vayas a las respuestas hasta no haberlos intentado, pero si no lo logras, ve a las respuestas para desestancarte.

1.0 Ejemplo.

$$\begin{aligned}
 & \int (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) dx = \\
 & \int x^4 dx + \int 2x^3 dx + \int 3x^2 dx + \int 4x dx + \int 5 dx = \\
 & \int x^4 dx + 2 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx + 5 \int dx = \\
 & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 5x + C \\
 & \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^3 + 2x^2 + 5x + C
 \end{aligned}$$

3.1. $\int (x^2 + 2x + 1) dx =$

3.2. $\int (x^2 + x^{-2} + e) dx =$

3.3. $\int (x^4 + \sqrt{4x} + x^{1,5}) dx =$

3.4. $\int \left(3 \cos x + \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx =$

3.5. $\int (x + 2)^2 dx =$

3.6. $\int (x + 2)(\sqrt{x} + 3) dx =$

4. Si llegaste hasta aquí sin saltarte ningún ejercicio, tómate un descanso ¡Vas muy bien! Si te saltaste algún punto o tienes alguna pregunta, trata de resolverla con algún compañero, con un monitor o con tu docente. No avances con vacíos conceptuales.

Aprovecha el descanso para discutir con tus compañeros acerca de los ejercicios, la guía o el cansancio mental que puedas estar sintiendo. No te sientas mal si estás más cansado que otros, recuerda que todos avanzamos a nuestro propio ritmo. No te sientas inseguro de darle al monitor o al docente una retroalimentación, coméntale cuáles son tus posibles falencias y permite que él te haga recomendaciones para saber cómo abordar ese problema.

2.3. Tabla de Integrales

Otras funciones cuentan con una integral ya establecida, en vista de que su derivada también se lleva a cabo de manera directa. A la lista que contiene varias de las integrales que se pueden calcular de manera directa se le conoce como una "tabla de integrales".

Demostrar que una integral tiene determinado resultado es relativamente fácil cuando se sabe que el integrando es la derivada de otra función. 4 de estas funciones son las que aparecen a continuación.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Lee las 4 integrales anteriores y trata de entender porqué sus resultados son esos. ¿Por qué la integral de $\sin x$ da $\cos x$ negativo y la integral de $\cos x$ da $\sin x$ positivo? ¿Qué pasaría si tratamos de integrar $\frac{1}{x}$ como si fuera un caso de x^n ?

Estas integrales pueden ser deducidas a partir de una ecuación diferencial (ED). Una ED, como su nombre lo indica, es una ecuación (una igualdad, una expresión matemática que tiene un símbolo de igual) que tiene por lo menos una diferencial (un dx , un dy o algun otro diferencial). Un ejemplo de ello se presenta a continuación.

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

Casi siempre se pueden trabajar los diferenciales como cualquier otro factor, y una derivada como cualquier otra división. Siendo así, despejemos $\sin x$. Primero, el diferencial de dx que está dividiendo lo pasamos a multiplicar.

$$d \sin x = \cos x dx$$

Esa expresión anterior se lee de la siguiente manera: “El diferencial de $\sin x$ es igual a $\cos x$ multiplicado por el diferencial de x ”. Nótese que la d que está antes que el $\sin x$ no se puede pasar a dividir, puesto que no se está hablando de una multiplicación, la d no multiplica a $\sin x$, la d representa el diferencial de $\sin x$, es decir, una sección infinitesimal de la función $\sin x$.

Para transformar el diferencial de $\sin x$ en la función $\sin x$ se utiliza la integral, tal como se hacía con la ecuación (2.9) y en sus ejemplos, y para conservar la igualdad, dado que integramos a un lado, también tenemos que integrar al otro.

$$\int d \sin x = \int \cos x dx$$

$$\sin x + C = \int \cos x dx$$

Lo que acabamos de hacer se conoce como “resolver una ecuación diferencial por el método de separación de variables” y es una técnica muy útil para deducir muchas de las integrales que necesitamos. Por ejemplo, deduciremos la integral de e^{ax} siendo a una constante.

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\int de^{ax} = \int ae^{ax} dx$$

$$e^{ax} + C = a \int e^{ax} dx$$

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax} + C}{a}$$

$$\int e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

¡Detente! Es muy buen momento para tomar una pausa, puede que tu cerebro necesite tiempo para hacer la sinapsis de lo que acaba de leer para lograr entenderlo por completo. Pregunta todo lo que necesites, procesa la información, relea si lo consideras necesario. Trabaja a tu propio ritmo.

Algunas de las integrales que puedes demostrar hasta ahora aparecen en la tabla 2.1, que será la primera tabla de integrales de este libro.

Integral	Resultado	Comentarios
$\int dx =$	$x + C$	
$\int k dx =$	$kx + C$	
$\int x^k dx =$	$\frac{x^{k+1}}{k+1} + C$	con $k \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx =$	$\ln x + C$	
$\int e^{ax} dx =$	$\frac{e^{ax}}{a} + C$	con $a \neq 0$
$\int a^x dx =$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	con $a > 0$
$\int \sin(ax) dx =$	$-\frac{\cos(ax)}{a} + C$	con $a \neq 0$
$\int \cos(ax) dx =$	$\frac{\sin(ax)}{a} + C$	con $a \neq 0$
$\int \sec^2(ax) dx =$	$\frac{\tan(ax)}{a} + C$	con $a \neq 0$
$\int \csc^2(ax) dx =$	$-\frac{\cot(ax)}{a} + C$	con $a \neq 0$

Tabla 2.1: Tabla de integrales directas

Lee la tabla 2.1 y responde ¿Logras entender todas las integrales que aparecen resueltas? ¿Hay alguna que no entiendas o que creas que no podrías demostrar? Tómate tu tiempo para entenderlas todas y pregunta si hay alguna que no entiendes su resultado.

Una tabla de integrales más completa se encuentra al final del capítulo 4, pero por lo pronto centrémonos en entender y demostrar las integrales que podamos abordar por el momento.

2.3.1. Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios sin saltarte ninguno y sin adelantarte, dispón de tiempo para realizarlos todos el mismo día y sin descansar hasta haberlos terminado.

1. Resuelve las siguientes integrales usando la tabla 2.1. Recuerda que las respuestas de las preguntas impares aparecen al final del documento.

1.1. $\int \sin 3x dx$

1.2. $\int \cos \pi x dx$

1.3. $\int (4 \sin x - 3e^{2x}) dx$

1.4. $\int (2x + \frac{3}{x}) dx$

1.5. $\int (2x + \frac{3}{x})^2 dx$

1.6. $\int (2x + \frac{3}{x})^3 dx$

1.7. $\int (2x + \frac{3}{x})^4 dx$

1.8. $\int (\sin x + \cos x)^2 dx$

1.9. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$

1.10. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 6x \right)^2 dx$

2. Busca una tabla de derivadas para resolver las siguientes integrales, identifica cuál es la antiderivada de estas funciones.

2.1. $\int \tan(x) \sec(x) dx$

2.2. $\int \cot(x) \csc(x) dx$

2.3. $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

2.4. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2.5. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

3. Deriva las soluciones a las siguientes integrales para corroborar que las integrales son correctas. (Todas son correctas, ningún ejercicio tiene trampa).

- 3.1. $\int \ln x dx = x \ln x + x + C dx$
 - 3.2. $\int \tan x dx = \ln |\sec x| + C$
 - 3.3. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$
 - 3.4. $\int \frac{1}{a-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$
 - 3.5. $\int \cos^2 x = \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) + C$
4. Es momento de tomar un descanso. Pregúntate ¿Cómo te sientes? ¿Te sientes satisfecho/a? Y sino ¿Te sientes preocupado/a? ¿Qué crees que debes hacer para sentirte listo/a? ¿Con quienes has hablado o con quién crees que podrías hablar? Recuerda que la educación es un proceso humano, nuestro sentir es importante. Toma agua si lo crees necesario, levántate de la silla, habla con tus compañeros. Seguramente vas muy bien.
 5. ¿Ya pasaste por la primera evaluación? ¿Te sientes listo/a para ella? Y sino ¿Qué crees que te falte para sentirte listo/a? ¿Consideras que deberías hablarlo con el docente? ¿Consideras que debes hablarlo con el personal de psicopedagogía? No te quedes esperando a que tus propios pensamientos te hagan sentir mal, has algo al respecto y trátate bien, estudiar mucho te dará seguridad para el examen, y si por más que estudies no logras tranquilizarte, tal vez deberías conversar acerca de tus pensamientos inconscientes con el personal de psicopedagogía.
 6. Si tienes el primer examen pronto, procura dormir y alimentarte bien. Si tienes algún problema personal que consideras que definitivamente no te permitirá abordar el examen, no sientas vergüenza al hablarlo con tu profesor ¡No esperes a que te vaya mal en el examen para hablar! Tú eres el estudiante, eres el centro y la razón de ser de este proceso. ¡Priorízate!

Capítulo 3

Integrales Definidas

Más allá de conocer que una integral es el proceso opuesto a la derivación, las integrales tienen una aplicación directa, normalmente se utilizan para calcular el área debajo de una curva.

Para entender esto tenemos que devolvernos a las nociones de la derivada y recordar que el cálculo procura analizar un mundo continuo (procura analizar las cosas desde un enfoque infinitesimal).

Para analizar esto hay que recordar lo que representa un diferencial y una derivada, La figura 3.1 muestra la representación gráfica de una sección de una función.

En la figura 3.1 se presenta con líneas rojas una representación de un diferencial, pero es importante mencionar que la escala está infinitamente maximizada. El tamaño de un diferencial es algo que no se puede comprender, es tiene un tamaño infinitesimal, no tiene una medida, y si la tuviera, sería la más pequeña posible, no solo tan pequeña que no podríamos verla, sino tan pequeña que no se puede comparar con nada, solamente con otros diferenciales. Si el diferencial simplemente tuviera una medida pequeña en comparación con la gráfica, no sería un diferencial, sería lo que se conoce como un segmento, que se representa, no con la letra d , sino con la letra griega Δ (delta).

Un segmento es el concepto que se suele utilizar para calcular la pendiente de una línea recta como se hace con la fórmula de la pendiente que aparece en la ecuación 3.1.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.1)$$

Sin embargo, la fórmula de la pendiente no es precisa cuándo una curva cambia su inclinación en todo momento, tal como ocurre en la curva de la figura 3.1, en

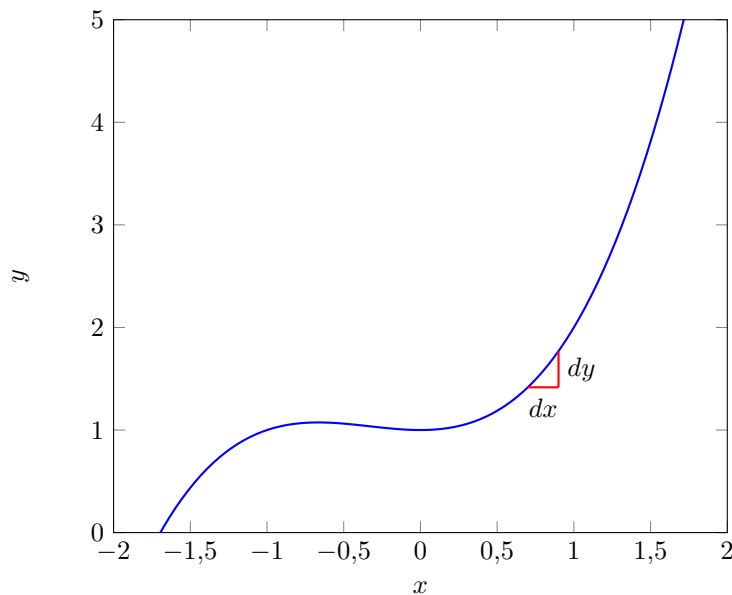


Figura 3.1: Representación gráfica de un diferencial

donde se nota que la curva es demasiado inclinada cuándo x tiende a ser 1.5, y tiende a ser plana cuándo x tiende a ser -0.5.

Para que la pendiente pueda ser calculada de manera precisas, es necesario que los segmentos sean cada vez más pequeños, tan pequeños como sea posible. Ahí es donde se empiezan a usar los diferenciales, ya que el diferencial representa el segmento más pequeño posible que podemos idealizar, por ello, la derivada de una función representa la inclinación de la recta tangente que pasa por el punto que se analiza en la gráfica, pues el cálculo de la derivada es equivalente al cálculo de la pendiente pero haciendo un análisis infinitesimal.

$$\text{A gran escala} \rightarrow m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{A escala ínfima} \rightarrow m = \frac{dy}{dx}$$

¡Momento de pausa activa! Mira al horizonte para descansar los ojos, piensa un poco en lo que acabas de leer y analiza si lo entendiste o no. Recuerda hacerle a tu profesor todas las preguntas que consideres. Si ya volviste, sigamos.

Una tarea más difícil se puede dar cuando tratamos de calcular el área que hay por debajo de una figura curva, tomemos la misma gráfica que usamos con los diferenciales y tratemos de calcular el área que hay debajo de la curva entre los puntos -1.5 y 1.5, tal como se muestra en la figura 3.2

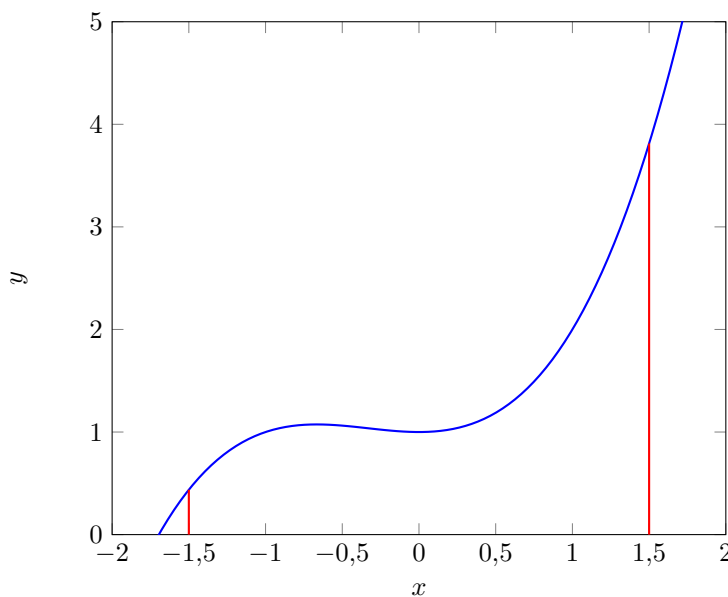


Figura 3.2: Representación gráfica de un diferencial

La figura que se está usando contiene la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 1$ y les anticipo que el área que hay debajo de esa curva entre esos valores de x es igual a 4.125.

Con las tablas tradicionales de áreas de figuras geométricas no se tiene suficiente para calcular el área de esta geometría irregular, pero con el fin de obtener un acercamiento a su tamaño se puede aproximar su forma a la geometría de figuras conocidas. Las integrales parten de la idea de aproximar su forma a la geometría de muchos rectángulos unidos. Si analizamos la figura como si fuera un rectángulo, que claramente no lo es, podríamos por lo menos conseguir información acerca del orden de magnitud que tiene esta geometría.

Si se divide la geometría en muchos rectángulos, uno se puede aproximar cada vez más al área que hay debajo de la curva, que es exactamente lo que se hace en la figura 3.3. Este proceso de sumar el área de muchos rectángulos debajo de la curva se conoce como realizar una suma de Riemann,

Si escribimos este proceso de manera simbólica, esto se representaría de la siguiente manera.

$$A = y(x_1)\Delta x + y(x_2)\Delta x + \dots + y(x_n)\Delta x$$

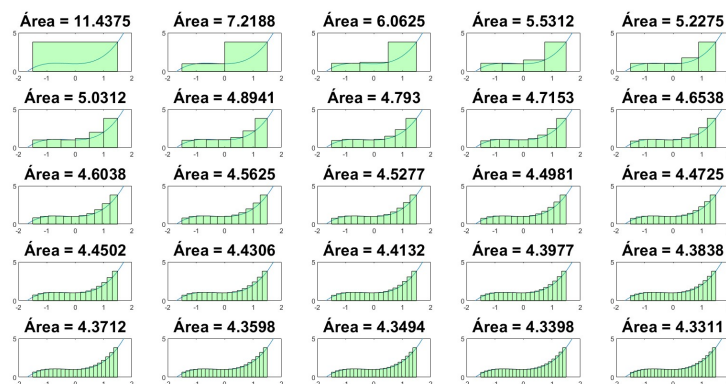


Figura 3.3: Aproximación al área debajo de la curva a partir de sumas de Riemann

Donde n representa el número de rectángulos que se está calculando. Recordemos que el área de un cuadrado es igual a su base multiplicada por su altura, y en este caso, el área de cada rectángulo es el valor de Δx (es decir, un desplazamiento pequeño en x) multiplicado por la altura de la curva que corresponde al valor de y . Si se escribe esto como una sumatoria queda así:

$$\sum_{i=1}^n y(x_i) \Delta x$$

Cuando traducimos esto al mundo infinitesimal, es decir, dejamos de usar Δx y empezamos a usar dx , el término de la sumatoria se convierte en una integral, es decir, la integral representa una sumatoria infinita de aportes infinitesimales ¡Es como si usáramos infinitos rectángulos!.

$$A = \int_a^b y(x) dx \quad (3.2)$$

La expresión anterior se lee de la siguiente manera: “El área es igual a la integral desde a hasta b de $y(x)$ con respecto a x ” y parece que utiliza un símbolo diferente, pero se resuelve de una manera muy parecida a las integrales que no tienen los términos que aparecen arriba y abajo.

Nota

Las integrales que no tienen los números arriba y abajo se conocen como **integrales indefinidas**, mientras que las que sí tienen estos números se conocen como **integrales definidas**.

3.1. Resolución de una integral definida

Ahora explicaré cómo se hizo para determinar que el área bajo la curva era 4.125, para ello se utilizará la integral y una fórmula que conocemos como el **segundo teorema fundamental del cálculo**, que es la que aparece en la ecuación 3.3

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (3.3)$$

En donde $F(b)$ y $F(a)$ representan las integrales de las funciones evaluadas en b y en a respectivamente (sin el $+C$).

Recordemos entonces que la función que utilizamos en la gráfica era $\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 1$ y que la estabamos analizando desde -1.5 hasta 1.5. Entonces como estamos analizando la integral entre esos valores, decimos que $a = -1,5$ y $b = 1,5$ y comenzamos a integrar

$$A = \int_{-1,5}^{1,5} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx$$

Lo primero es resolver la integral, para ello usamos la propiedad de linealidad de las integrales de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1,5}^{1,5} \frac{x^3}{2} dx + \int_{-1,5}^{1,5} \frac{x^2}{2} dx + \int_{-1,5}^{1,5} dx = \\ A &= \frac{1}{2} \int_{-1,5}^{1,5} x^3 dx + \frac{1}{2} \int_{-1,5}^{1,5} x^2 dx + \int_{-1,5}^{1,5} dx \end{aligned}$$

Ahora, cuando resolvemos la integral, hay que recordar que ya no se usa el $+C$ porque estamos haciendo una integral definida, en vez de ello, se agrega una línea vertical al final que indica entre qué valores se pretenden evaluar las expresiones. Las siguientes expresiones son los resultados de las integrales de arriba, si hay alguna que no entiendes recuerda preguntar.

$$A = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x \right) \Big|_{-1,5}^{1,5}$$

La línea vertical que se muestra al final de la expresión representa que esa función va a ser evaluada en 1.5 y su resultado se va a restar por la misma función evaluada en -1.5. En este caso, toda la expresión se lee de la siguiente manera: “El área es igual a la función $\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x$ evaluada entre 1.5 y -1.5”.

$$A = \left(\frac{(1,5)^4}{8} + \frac{(1,5)^3}{6} + (1,5) \right) - \left(\frac{(-1,5)^4}{8} + \frac{(-1,5)^3}{6} + (-1,5) \right)$$

$$A = 0,6328125 + 0,5625 + 1,5 - (0,6328125 - 0,5625 - 1,5)$$

$$A = 0,6328125 + 0,5625 + 1,5 - 0,6328125 + 0,5625 + 1,5$$

$$A = 4,125$$

Así se calcula el área que hay debajo de la curva entre esos dos puntos. Para analizar si lo entendiste bien considera lo siguiente ¿Qué hubiera pasado si quisiéramos calcular el área que hay debajo de la figura entre dos puntos distintos de x , por ejemplo entre 0 y 3? Intententa calcularlo.

Estas integrales definidas suelen dar como resultado un valor numérico (puesto que se está calculando un área), por lo que tales operaciones suelen ser resueltas usando una calculadora científica. Normalmente los estudiantes optan por utilizar calculadoras marca Casio, por ello, a continuación se enlistan las calculadoras que pueden resolver integrales de esta marca, indicando en el ranking de precios con un 1 la de precio más bajo y con números mayores ordenados las de precios más altos.

Resuelve integrales en formato			
Calculadora	Lineal	Profesional	Ranking de precio
Casio fx 82 Plus			1
Casio fx 350 Plus			2
Casio fx 570 Plus		x	3
Casio fx 570MS Plus	x		3

Tabla 3.1: Características de las calculadoras Casio más usadas

Las calculadoras suelen completar el nombre que aparece en la tabla 3.1 con 2 letras que hacen referencia al idioma en el que están configuradas, por ejemplo, la Casio fx 570LA Plus indica “LA” para indicar que está configurada en español de latinoamérica.

Algunas calculadoras más avanzadas permiten graficar las funciones, pero no serán mostradas en este documento para no extender mucho la tabla.

3.2. Áreas acotadas por funciones

Es frecuente encontrar que no se quiera calcular un área que esté delimitada entre una función y eje x , sino que las figuras de las que se quiera conocer el área se ven delimitadas por dos o más funciones, tal como se ve en la figura 3.4.

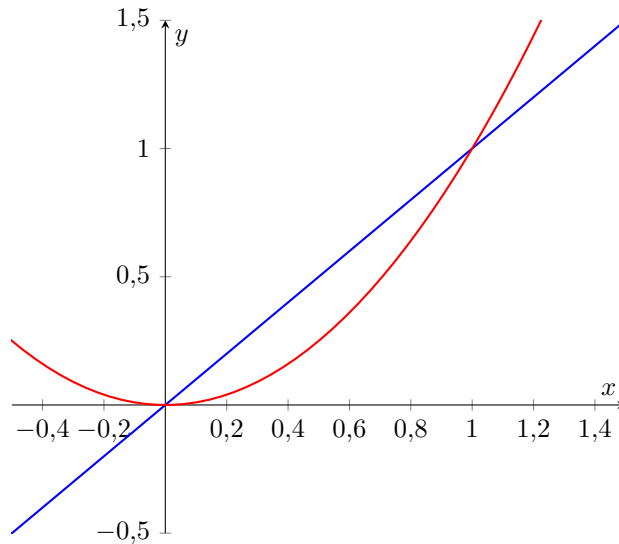


Figura 3.4: Área acotada por funciones

En este caso, existe un área delimitada entre las 2 funciones, en donde la línea azul es la función $f(x) = x$ y la línea roja es la función $f(x) = x^2$. Si se quiere calcular el área que existe en medio de estas dos funciones, el primer paso sería determinar el punto en el que ambas funciones se conectan. Esto se logra igualando ambas funciones.

$$x = x^2$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 1$$

De aquí se puede intuir la razón por la que la integral necesaria para calcular el área en cuestión va a tener como límite de integración al 0 y al 1. Sin embargo, si se calcula la integral de x se calculará el área entre la función azul y el eje x , y si se calcula la integral de x^2 se calculará el área que hay por debajo de la línea roja. Si se quiere calcular el área que hay en medio de las dos funciones, habría que calcular el área que hay debajo de la línea azul y restarle la que hay debajo de la línea roja, por lo que la integral en cuestión es la siguiente.

$$\int_0^1 x - x^2 dx$$

Esta integral se resuelve de la siguiente manera.

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{6}$$

Si esto se presenta como una función general, el área que hay entre 2 funciones se calcula con la ecuación 3.4.

$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx \quad (3.4)$$

Donde $f(x)$ es la función superior (la que se encuentra más arriba) y $g(x)$ es la función inferior (la que se encuentra más abajo).

3.2.1. Ejercicios

Realiza los siguientes ejercicios sin saltarte ninguno y sin adelantarte, dispón de tiempo para realizarlos todos el mismo día y sin descansar hasta haberlos terminado.

1. Resuelve las siguientes integrales definida a mano y trata de interpretar el resultado. Una buena estrategia para interpretar los resultados podría ser utilizar una aplicación para graficar las funciones (desmos.com o geogebra).

1.1. $\int_0^3 x^3 dx$

1.2. $\int_{-3}^3 x^3 dx$

1.3. $\int_0^3 x^2 dx$

1.4. $\int_{-3}^3 x^2 dx$

1.5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$

1.6. $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin 3x dx$

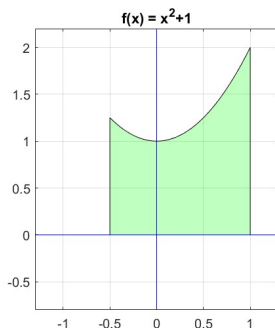
1.7. $\int_0^4 (x^2 - 4x) dx$

1.8. $\int_0^4 \frac{(x^2 - 4x)^2}{2} dx$

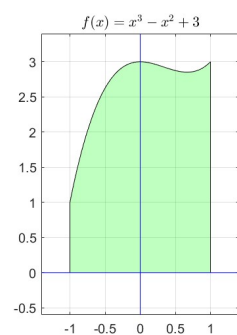
1.9. $\int_{-2}^2 |x| dx$

1.10. $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\cos x| dx$

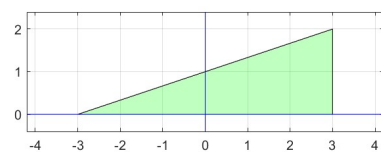
2. Utiliza la integral para calcular el área sombreada de las siguientes figuras.



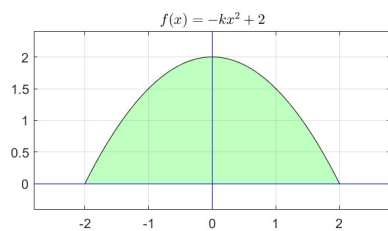
2.1.



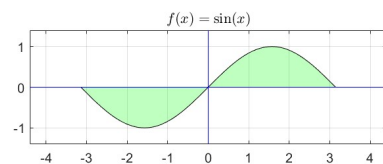
2.2.



2.3.

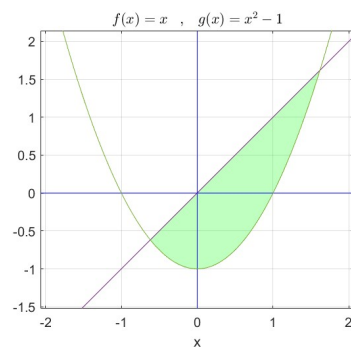


2.4.

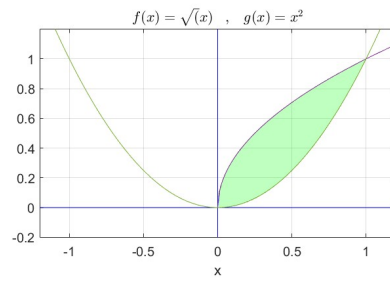


2.5. *

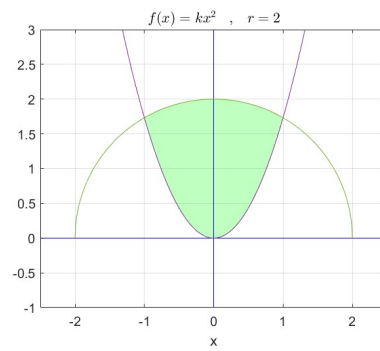
3. Identifica la función mayor y la función menor para determinar cuál es el área de la figura sombreada.



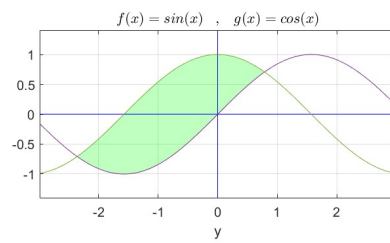
3.1.



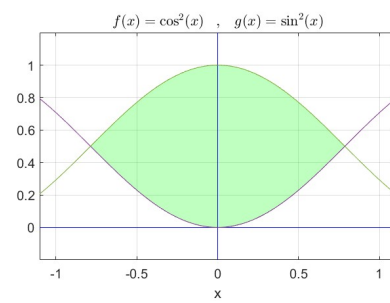
3.2.



3.3. *



3.4.



3.5.

Consejo

Busca y utiliza la identidad de ángulo doble para resolver esta ecuación.

4. Es momento de otro descanso. Pregúntate ¿Cómo te sientes? Para este punto, la matemática no cuenta con procedimientos estandarizados como en otros procesos que se aboraban en otras materias. Debes ser creativo para ingeniar formas en las que puedas encontrar la solución. Tómate tu tiempo para entrenar esta capacidad. Recuerda que no debes frustrarte.
5. ¿Ya pasaste por la primera evaluación? Recuerda que tu sentir y comodidad importan, No te quedes esperando a que tus propios pensamientos te hagan sentir mal, has algo al respecto y trátate bien, ¿Ya estudiaste lo suficiente? La respuesta a esa pregunta solo la tienes tú.

Capítulo 4

Técnicas de integración

Las integrales que se han resuelto hasta ahora son la antiderivada de funciones que se pueden resolver de manera directa, pero es bien sabido que las técnicas de derivación son variadas, no todas las derivadas se extraen de forma instantánea, lo que da cabida a tener resultados muy complejos de una derivada, y por ende, tener integrales más difíciles de resolver.

Existen funciones que no tienen una antiderivada, por ejemplo e^{x^2} o $\frac{\sin x}{x}$. Para estas funciones se crean expresiones matemáticas nuevas que representan la solución a estas integrales, por ejemplo $\int \frac{\sin x}{x} dx = Si(x) + C$ donde $Si(x)$ no es más que la solución a la integral, que no puede ser escrita con otras expresiones matemáticas. Pero normalmente los libros proporcionan ejercicios de integrales que sí pueden ser resueltas, así que este tema lo dejaremos para más adelante.

Las técnicas de integración son los resultados llevar a cabo el proceso inverso de las técnicas de derivación. Existen 5 técnicas tradicionales de integración, las cuales son:

1. Método de integración directa
2. Método de sustitución
3. Método de integración por partes
4. Método de Fracciones parciales
5. Método de sustitución trigonométrica

E l método de integración directa es la técnica que hemos venido usando hasta el momento, que consiste en identificar que la función que se pretende integrar es la antiderivada de una función conocida. Los demás métodos serán abordados a continuación.

4.1. Método de sustitución

El método de sustitución es una técnica desarrollada a partir de la regla de la cadena en las derivadas, cuya fórmula se extrae de la siguiente ecuación.

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} \quad (4.1)$$

Esta expresión es la que solemos conocer como la “regla de la cadena”, que es la que utilizábamos para resolver derivadas de funciones que tuvieran a otra función adentro, como por ejemplo:

$$\frac{d}{dx} \cos x^2 = -2x \sin x^2$$

(detente aquí y pregúntate si pudiste resolver esta derivada tú solo, si hay algo que no entiendes recuerda que siempre puedes preguntar).

En esta última derivada, primero se deriva la función “más grande.” más general” (que es el coseno, ya que ésta es la que contiene al x^2) y luego el resultado se multiplica por la derivada de la función interna (que es el x^2), que es tal cual lo que se está haciendo en ecuación 4.1 que, si se lee en voz alta se diría de la siguiente manera: “Si se deriva con respecto a x una función que está en términos de otra función u , el resultado es igual a la derivada en términos de u de la función multiplicado por la derivada de u en términos de x . Relee todo esto hasta que entiendas cada parte”.

Sabiendo que hay algunas derivadas que se resuelven de esta manera, a veces hay que tener cierta habilidad para darse cuenta de que la derivada de una función interna está multiplicando a toda una expresión. Por ejemplo. si quisiéramos resolver la siguiente integral, diríamos lo siguiente:

$$\int -2x \sin x^2 dx$$

Es muy fácil saber la respuesta puesto que es el resultado de la anterior derivada, pero en un contexto más general, lo que habría que hacer es identificar que la derivada de x^2 es exactamente igual a $2x$, el cual es un término que está multiplicando en el integrando, y lo que queda, no es más que $-\sin x$ (o $-\sin x^2$ si se entiende más fácil). cuya integral es $\cos x$. De ahí que:

$$\int -2x \sin x^2 dx = \cos x^2 + C$$

Evidentemente este no es un razonamiento tan fácil de hacer, por lo que existe la técnica de la sustitución para simplificar el problema. Esta misma técnica se conoce como el método de “cambio de variable”, pues se asigna una variable nueva para simplificar el problema. Esta variable nueva sería la misma u que utilizamos en la ecuación 4.1, y se resuelve de la siguiente manera: En la integral

$$\int -2x \sin x^2 dx$$

se sabe que la derivada de x^2 está multiplicando al integrando, por lo que decimos que $u = x^2$. La expresión quedaría de la siguiente manera:

$$\int -2x \sin u dx$$

Sin embargo, en este caso, u no es independiente de x , por lo que no podemos tratarla como una constante como sí se hacía con otras letras que multiplicaban a otras integrales. Lo ideal para esto, es escribir toda la expresión (incluyendo al diferencial) en términos de u .

Para representar al diferencial de x en términos de u , se deriva u de la siguiente manera.

$$u = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2x dx$$

Ahora para incorporar este diferencial de u en la expresión, se enseñan 2 maneras en las universidades, una es despejando la dx y la otra es reemplazando.

Por un lado, nótese que la integral puede ser reordenada de la siguiente manera:

$$\int -\sin(u) 2x dx$$

Y de ahí se logra evidenciar que el diferencial de u está escrito tal cual al frente de la expresión, puesto que $du = 2x dx$, entonces la integral quedaría como:

$$\int -\sin u du = \cos u + C$$

Pero como $u = x^2$, entonces la expresión quedaría así:

$$\int -2x \sin x^2 du = \cos x^2 + C$$

Este procedimiento se hizo reemplazando el valor de du tomándolo lo que fuera necesario de la integral, pero a veces lo hacen despejando dx de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} du = 2x dx &\rightarrow \frac{du}{2x} = dx \\ \int -2x \sin u dx &\rightarrow \int -2x \sin u \frac{du}{2x} \end{aligned}$$

Capítulo 5

Respuestas

2.2.1

1. 1.1 $\frac{d}{d\theta}\theta = 1 \rightarrow \int d\theta = \theta + C$
1.3 $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{3} = x^2 \rightarrow \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$
1.5 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C$
2. 2.1 $\int dm = m + C$
2.3 $\int \pi dx = \pi x + C$
2.5 $\int \pi x dy = \pi xy + C$

Esta integral era capciosa porque la variable de integración no era la x sino la y , eso quiere decir que en este caso, x es asumida como una constante, y la integral de una constante es la misma constante multiplicada por su variable de integración. Tal como pasaba en la ecuación (2.10) con la k .

- 2.7 $\int 5y^9 dy = \frac{y^{10}}{2} + C$
2.9 $\int \sqrt{x^5} dx = \frac{2\sqrt{x^7}}{7} + C$

Esta integral no era necesariamente capciosa, solamente que hay que interpretar correctamente la raíz de x como un exponente a la $1/2$, sabiendo esto, se puede resolver como la integral de $x^{5/2}$

3. 3.1 $\int (x^2 + 2x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$
3.3 $\int (x^4 + \sqrt{4x} + x^{1.5}) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + C$
3.5 $\int (x + 2)^2 dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + C$

Esta integral es capciosa porque se necesita desarrollar el exponente para poder representar la expresión como un polinomio. $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, y la integral de esta nueva expresión es más fácil de resolver.