

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Informática



Modelación y Simulación
Laboratorio 3

Diego Mellis

Andrés Muñoz

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Francisco Muñoz

Santiago – Chile

2018

TABLA DE CONTENIDO

Índice de tablas	v
Índice de ilustraciones	vii
1 Introducción	1
2 Marco teórico	3
2.1 Función de transferencia	3
2.1.1 Ceros	3
2.1.2 Polos	3
2.2 Filtro bloqueador de orden cero	4
2.3 Interpolación con bloqueador primer orden	4
2.4 Teorema de Shannon-Nyquist	5
3 Desarrollo Primera Parte	7
4 Desarrollo Segunda Parte	11
4.1 Bloqueador de orden cero	11
4.2 Bloqueador de primer orden	12
4.3 Minimización	14
5 Conclusiones	17
Bibliografía	19

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 2.1	Representación matemática de un filtro bloqueador de orden cero.	4
Figura 2.2	Señal en forma de función lineal por piezas.	5
Figura 2.3	Espectro de frecuencias de una señal muestreada a una razón de muestreo mayor al doble de la frecuencia máxima de la señal original.	6
Figura 3.1	Gráfica de respuesta al escalón de la ecuación diferencial	7
Figura 3.2	Gráfica de respuesta al escalón de la función discreta ($T=0.05$)	8
Figura 3.3	Gráfica de respuesta al escalón de la función discreta ($T=0.1$)	8
Figura 3.4	: Gráfica de respuesta al escalón de la función continua (extraída a partir de la discreta)	9
Figura 4.1	Bloqueador de Orden Cero con tiempo de muestreo de 0.5 segundos.	11
Figura 4.2	Bloqueador de Orden Cero con tiempo de muestreo de 0.05 segundos.	12
Figura 4.3	Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.5 segundos en amarillo aplicado a la función discretizada a 0.5 segundos en azul.	13
Figura 4.4	Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.05 segundos en amarillo aplicado a la función discretizada a 0.05 segundos en azul.	13
Figura 4.5	Espectro de frecuencias de la señal producida por la respuesta al escalón de la función de transferencia.	14
Figura 4.6	Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.105 segundos aplicado a la función discretizada a 0.105 segundos.	15

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En la experiencia anterior se trabajó con sistemas y funciones de transferencia enfatizando en su comportamiento ante diferentes entradas de manera continua. Sin embargo, trabajar con funciones de manera continua se hace complejo, dado que las herramientas en la actualidad que facilitan y aceleran el estudio, análisis y utilización de dichas funciones son discretas, como lo es por ejemplo el computador. Es por esto que en esta experiencia, utilizando las herramientas de MATLAB y Simulink, se profundizará en la discretización de funciones y las diferencias existentes entre el antiguo comportamiento continuo que poseían y el nuevo extraído. En base a lo mencionado anteriormente, nace el objetivo principal de esta experiencia, el cual corresponde a simular, analizar, controlar y modelar sistemas utilizando funciones de transferencia discretas, con las herramientas mencionadas.

De esta forma aparecen los siguientes objetivos específicos:

- Utilizar las herramientas de MATLAB para discretizar la función de transferencia planteada.
- Simular mediante un diagrama de bloques, usando Simulink, aplicando conceptos vistos en la asignatura.

El presente informe presenta un marco teórico, en donde se definen conceptos relevantes para el entendimiento de esta experiencia, luego un desarrollo que está separado en dos partes, donde la primera consiste discretizar una función de transferencia con distintos tiempos de muestreo. Luego en la segunda parte, se debe simular la respuesta al escalón de la misma función de transferencia aplicando conceptos de la asignatura.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Una función de transferencia es la razón que existe entre la entrada y la salida de un sistema en el dominio de Laplace considerando condiciones iniciales igual a 0 (Wikibooks, 2017). Tomando en cuenta la salida como $Y(s)$ y la entrada como $U(s)$, la ecuación de transferencia queda como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (2.1)$$

Dicha ecuación de transferencia posee diferentes datos que se pueden extraer, los cuales se definen a continuación.

2.1.1 Ceros

Los ceros de una función de transferencia corresponden a los valores de s en que el numerador se hace 0.

2.1.2 Polos

Los polos de una función de transferencia corresponden a los valores de s en que el denominador se hace 0.

2.2 FILTRO BLOQUEADOR DE ORDEN CERO

Este filtro es una manera muy practica de muestrear una señal continua como lo define (Panagos, 2014), consiste en tomar el valor actual de una entrada y bloquearlo o mantenerlo por cierto tiempo en su salida y al terminar ese tiempo actualiza el valor al de la entrada y lo vuelve a mantener por el mismo tiempo y así sucesivamente generando un muestreo en forma de escalones. Matemáticamente se puede explicar como una señal continua $x(t)$ que es multiplicada por un tren de impulsos $p(t)$ como se muestra en la Figura 2.1, luego el resultado $x_p(t)$ se pasa por un filtro pasa bajo de periodo T que convierte los impulsos en en una función escalonada $x_0(t)$. El nombre orden cero se refiere a que mantiene el valor usando una función de orden cero, por eso se ve como un escalón, orden cero es una linea recta horizontal.

Los bloques pueden estar relacionados entre si, en forma secuencial, paralela o mixta, como también pueden presentar retroalimentaciones. A continuación, en la figura 2.1 se pueden distinguir cada uno de los diagramas mencionados anteriormente.

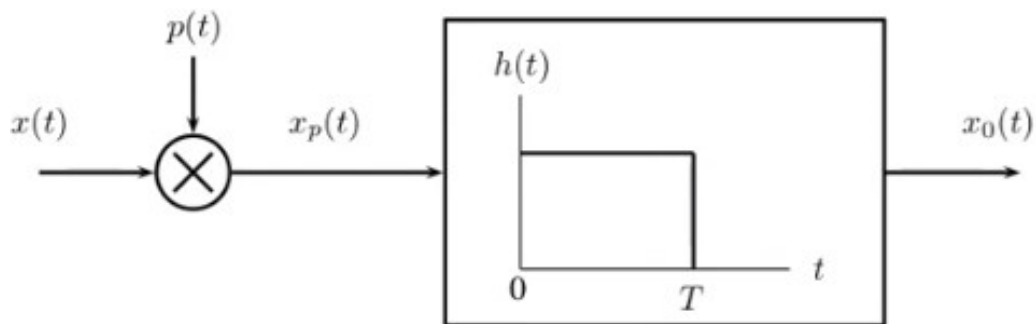


Figura 2.1: Representación matemática de un filtro bloqueador de orden cero.

2.3 INTERPOLACIÓN CON BLOQUEADOR PRIMER ORDEN

Como se define en (Wikipedia, 2018), es un modelo matemático de la reconstrucción práctica de una señal muestreada mediante un conversor de señal digital a analógica como un filtro bloqueador orden cero. La señal es reconstruida como una función lineal por piezas. Esto lo realiza mediante la conversión de una señal muestreada $x_s(t)$ en la forma que se muestra en la

Ecuación 2.2 en la señal reconstruida como función lineal por piezas $x_{FOH}(t)$ como se muestra en la Ecuación 2.3, donde *tri* se refiere a una función triangular.

$$x_s(t) = x(t) \cdot T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.2)$$

$$x_{FOH}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \text{tri}\left(\frac{t - nT}{T}\right) \quad (2.3)$$

Su nombre se debe a que une las muestras mediante una función de primer orden, que son líneas con cierta pendiente como se muestra en la Figura 2.2.

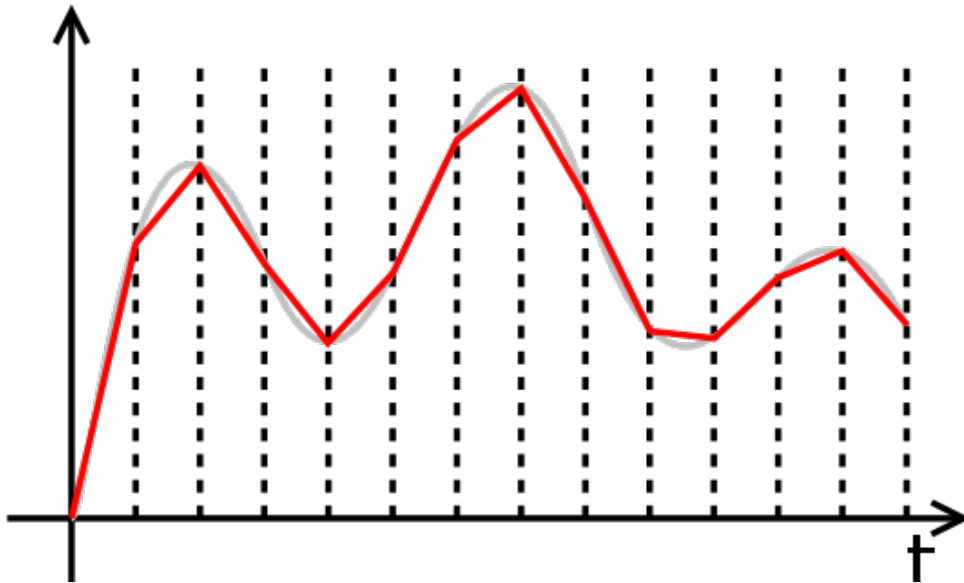


Figura 2.2: Señal en forma de función lineal por piezas.

2.4 TEOREMA DE SHANNON-NYQUIST

Según (Martinez, 2007), este teorema fue creado por H. Nyquist en 1928 y probado matemáticamente por Claude Shannon en 1949. En él se afirma que es posible reconstruir sin errores una señal analógica/continua desde muestras tomadas a intervalos continuos, siempre y cuando la razón de muestreo fuera igual o mayor a dos veces el ancho de banda de la señal

analógica original. Para ello, es necesario que la señal tenga un ancho de banda limitado. Esto se justifica debido a que al muestrear una señal análoga, el espectro de frecuencias formado por su transformada de Fourier toma la forma del espectro original pero repetido secuencialmente por el eje x como se muestra en la gráfica superior de la Figura 2.3. Como la transformada de Fourier contiene una parte negativa, ésta también es desplazada, por eso es que se necesita que el muestreo sea al doble de la frecuencia máxima, para que no se superpongan los espectros y se interfieran entre sí.

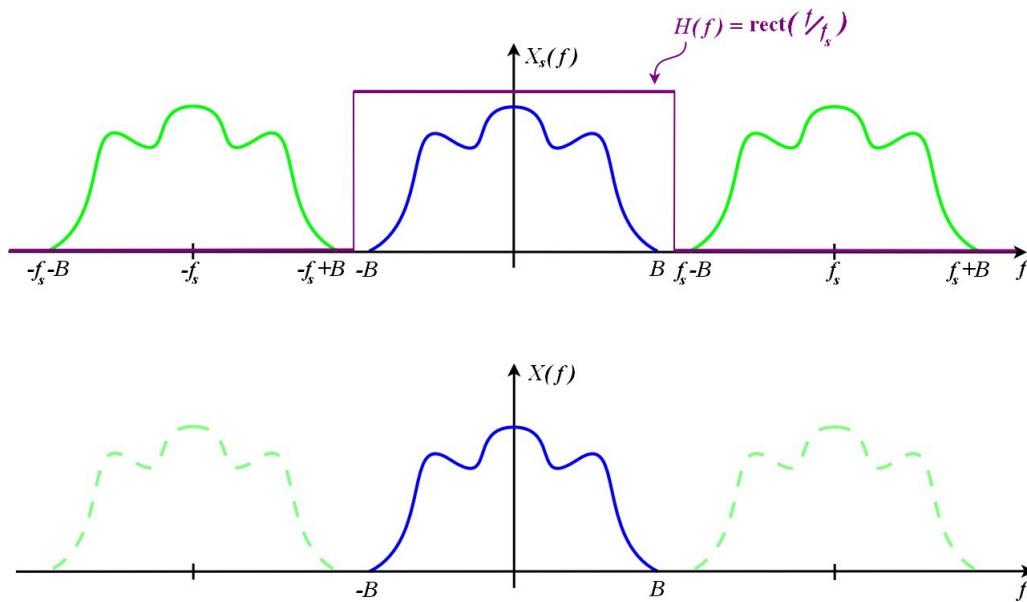


Figura 2.3: Espectro de frecuencias de una señal muestreada a una razón de muestreo mayor al doble de la frecuencia máxima de la señal original.

Usando la misma Figura 2.3 se puede explicar la recuperación de la señal analógica mediante las muestras. Para ello es necesario aplicar la transformada de Fourier a la función muestreada y aplicar un filtro pasa-banda que conserve solo el espectro central, que se encuentra entre $-B$ y B , con ello se eliminan los espectros duplicados en el mundo de las frecuencias como se muestra en la gráfica inferior de la Figura 2.3, entonces si se aplica la transformada inversa de Fourier a la señal filtrada, que tiene exactamente la misma transformada de Fourier que la señal analógica original, se puede recuperar sin error.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

Dada la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales nulas:

$$13\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 20y(t) - 3\frac{du}{dt} + 25u(t) = 0 \quad (3.1)$$

Se busca realizar una discretización de dicha señal y analizar su respuesta al escalón en comparación al caso continuo. Para esto, primeramente se verificó la respuesta continua que presenta dicha ecuación, la cual se encuentra presente en la figura 3.1



Figura 3.1: Gráfica de respuesta al escalón de la ecuación diferencial

Posteriormente, utilizando el comando `c2dm` de MATLAB se discretizó la función utilizando tiempos de muestreo igual a 0.05 (los puntos se fueron tomando cada 0.05 segundos) y 0.1.

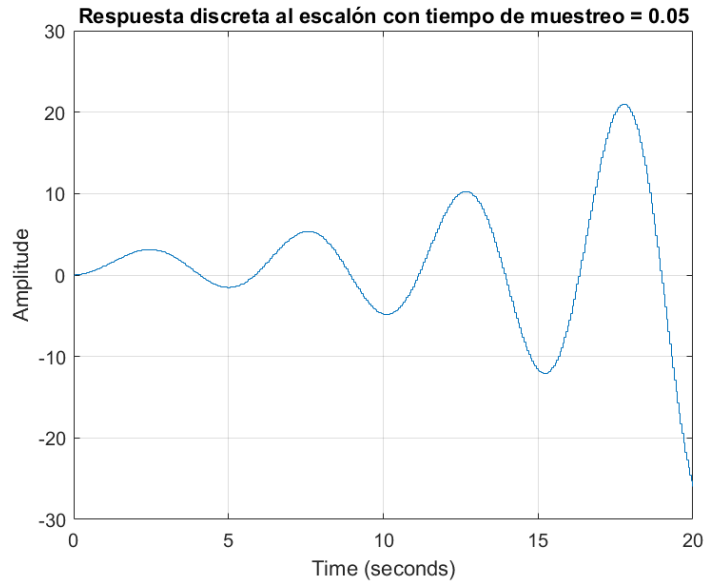


Figura 3.2: Gráfica de respuesta al escalón de la función discreta ($T=0.05$)

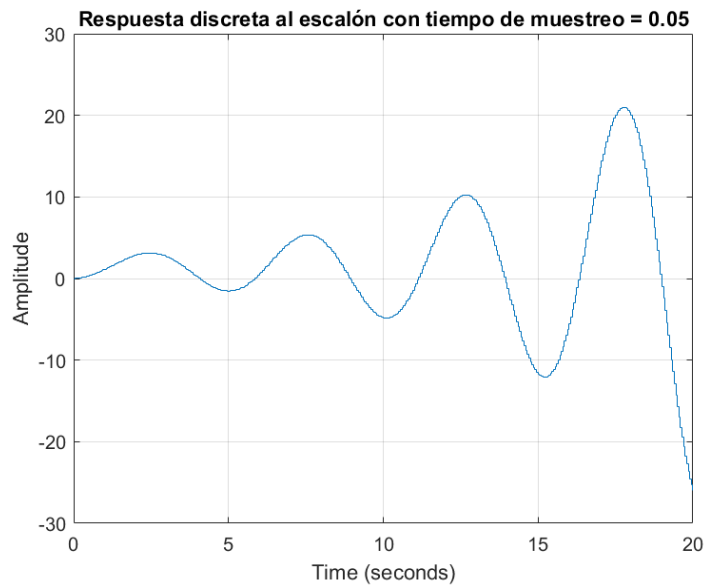


Figura 3.3: Gráfica de respuesta al escalón de la función discreta ($T=0.1$)

Inmediatamente es posible darse cuenta de la diferencia existente entre ambas, siendo la con menor tiempo de muestreo (0.05), una función más limpia y con pliegues menos notorios que la que tiene un mayor tiempo de muestreo (0.1). Esto se debe a que, al tener un menor tiempo de muestreo, la estimación realizada utilizando el bloqueador de orden cero se hace menor que en el otro caso.

En comparación a la gráfica de respuesta continua, ambas intentan parecerse a ella, siendo la más cercana la con $T=0.05$, dada la mayor cantidad de puntos para realizar la discretización.

Dado lo anterior entonces, claramente se presenta la primera gráfica como la más parecida al caso original, influido el resultado por la mayor cantidad de puntos utilizados dado el mayor tiempo de muestreo, y también por la mala calidad del retenedor utilizado. Es posible que si el retenedor tuviese un comportamiento más parecido al de la función original (sinusoidal por ejemplo), las diferencias entre ambos no serían tan notorias. Sin embargo, también cabe mencionar que a menor tiempo de muestreo y por ende, mayor calidad de la discretización, aumenta el número de puntos a almacenar y operar, lo que incrementa el costo de realizarla; sumado a lo anterior, utilizar un bloqueador de mayor orden o más específico, resulta también en una complejización del problema que es necesario tener en cuenta antes de aumentar la especificidad del proceso de discretización.

Finalmente, utilizando la función de MATLAB `d2cm` se volvió a pasar la función con menor tiempo de muestreo (y por ende la que más se distanció a su forma original) a continua, dando como resultado, la respuesta el escalón presentada en la figura 3.4

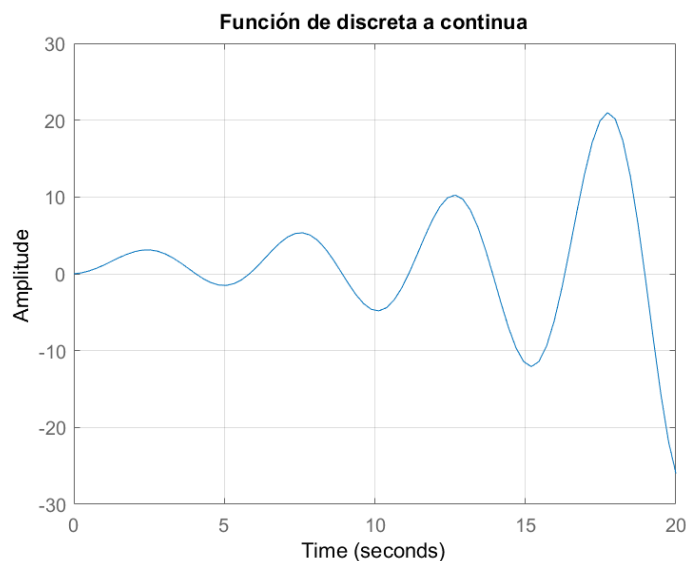


Figura 3.4: : Gráfica de respuesta al escalón de la función continua (extraída a partir de la discreta)

Al igual que para pasar la función original a discreta, al hacer el proceso inverso se

utilizó el mismo bloqueador a modo de intentar obtener los mismos resultados.

El resultado obtenido fue sorprendente, dado que la respuesta obtenida fue idéntica a la original, teniendo incluso la misma función de transferencia. Lo anterior demuestra la gran capacidad que existe de volver a la función original, incluso a pesar de tener un tiempo de muestreo tan bajo como 0.1 y con un interpolador de mala calidad como lo es el de orden cero.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

La segunda parte consiste en trabajar con la herramienta Simulink de MATLAB, que permite modelar y simular sistemas gráficamente. Para ello se simula la respuesta a un escalón de la función de transferencia encontrada en la Parte 1 de este trabajo, luego se discretiza e invierte el proceso para tratar de recuperar la señal original, esto se realiza en distintos tiempos de muestreo que son definidos en las siguientes secciones.

4.1 BLOQUEADOR DE ORDEN CERO

El primer paso es simular la respuesta al escalón y luego aplicarle un Bloqueador de Orden Cero (*Zero-Order Hold*) para discretizar esa respuesta, en tal paso es necesario definir un tiempo en el cual tomar cada muestra (periodo) que denominaremos T_m . Arbitrariamente se define el T_m de 0.5 segundos, el cual entrega la gráfica de la Figura 4.1.

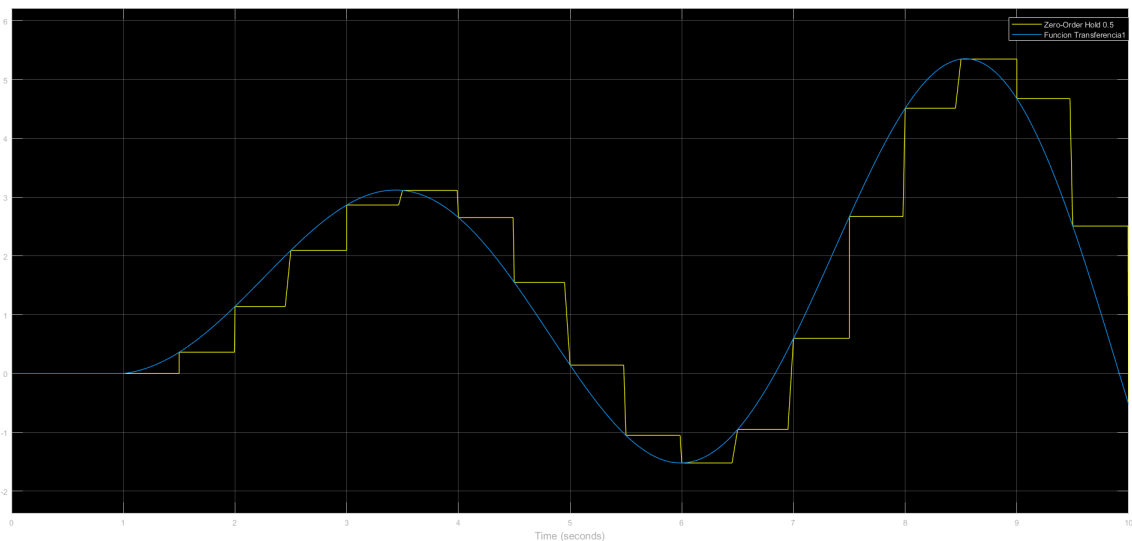


Figura 4.1: Bloqueador de Orden Cero con tiempo de muestreo de 0.5 segundos.

Como se puede observar en la Figura 4.1 las muestras tomadas están considerablemente separadas en comparación a las curvas que posee la respuesta al impulso de la función de transferencia por lo que se propone usar un período menor que produzca muestras más juntas

para lograr una representación más fiel del espacio continuo. Se aplica un T_m de 0.05 segundos y se grafica en la Figura 4.2.

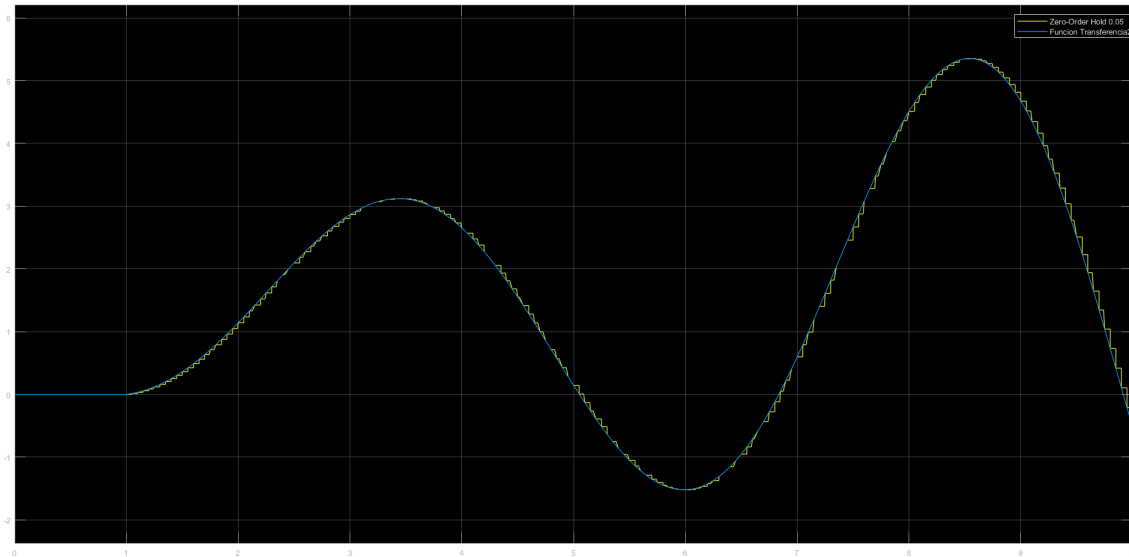


Figura 4.2: Bloqueador de Orden Cero con tiempo de muestreo de 0.05 segundos.

En la Figura 4.2 se destaca que se tienen tantas muestras que la discretización es casi igual a la respuesta al escalón, siendo que esta última se encuentra en el espacio continuo. Se estima que una interpolación de la discretización entregaría una curva muy similar a la original, quizás innecesariamente idéntica para la práctica.

4.2 BLOQUEADOR DE PRIMER ORDEN

En este paso se intenta recuperar la señal original mediante un bloqueador de primer orden (*First-Order Hold*) aplicado a cada una de las discretizaciones que se obtienen de la Sección 4.1. Primero se intenta recuperar la respuesta al escalón usando la discretización con período de 0.5 segundos, aplicando un bloqueador de primer orden también a 0.5 segundos. El resultado se entrega en la Figura 4.3.

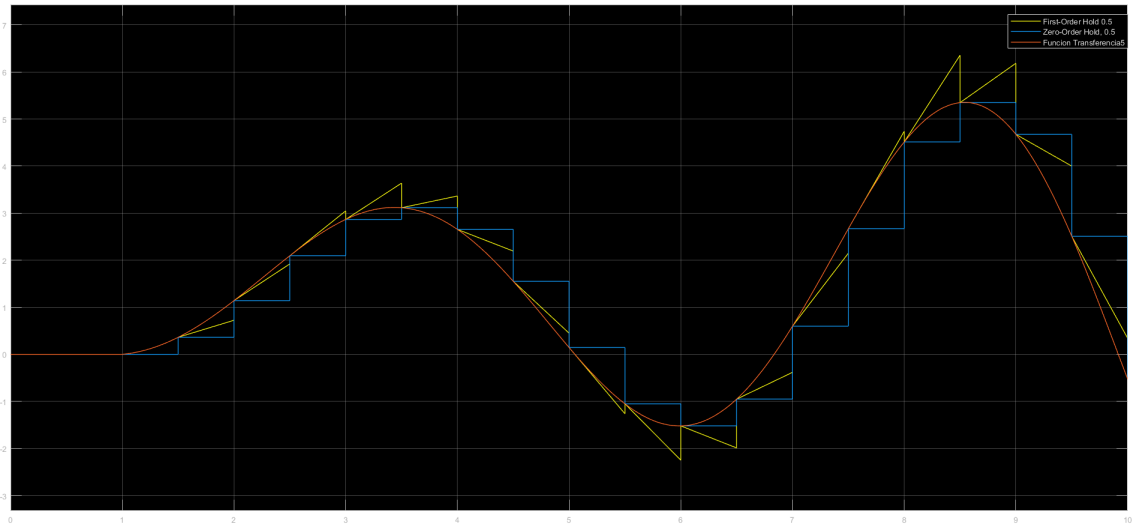


Figura 4.3: Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.5 segundos en amarillo aplicado a la función discretizada a 0.5 segundos en azul.

Como se muestra en la Figura 4.3, a simple vista existe un gran error entre la función transformada de discreta a continua y la respuesta al escalón. Esto se debe a que el tiempo de muestreo usado en la discretización es muy grande, es necesario tomar más muestras para representar curvas tan pronunciadas. Para ello se propone arbitrariamente recuperar la respuesta al escalón discretizada a un período de 0.05 segundos y se entrega en la Figura 4.4.

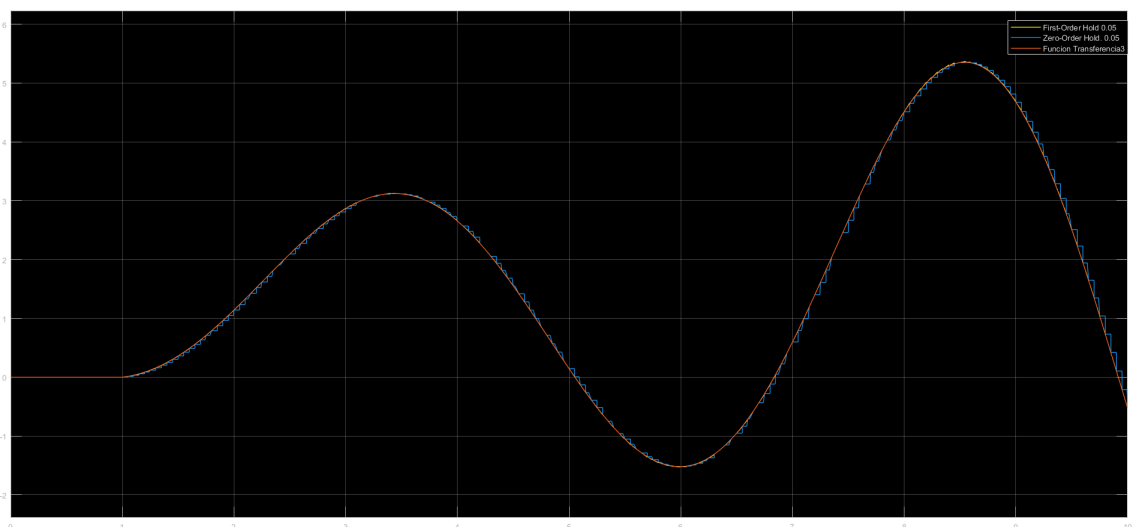


Figura 4.4: Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.05 segundos en amarillo aplicado a la función discretizada a 0.05 segundos en azul.

En la Figura 4.4 se puede apreciar que la función transformada discreta a continua

(amarillo) es casi idéntica a la respuesta al escalón (roja), tanto que hay sectores en que no es posible verla. Esto soluciona el problema anterior, ya que se tienen tantas muestras en el bloqueador de orden cero, que resulta imposible no recuperar la señal original, tanto que interpolar casi pierde sentido, se podría recuperar la señal simplemente uniendo puntos con líneas.

4.3 MINIMIZACIÓN

Como se mencionó en la Sección 4.2, un período de 0.5 segundos es muy grande y no entrega suficientes muestras como para recuperar la respuesta al escalón original, en el espacio continuo que fue discretizada mediante el bloqueador de orden cero. En el caso contrario, un período de 0.05 segundos entrega demasiadas muestras, a tal nivel que es quizás redundante tener tantas, para ello se procede a aplicar el Teorema de muestreo de Shannon-Nyquist, el cual indica que una señal continua puede recuperarse completamente si se utiliza una frecuencia de muestreo mayor al doble de su frecuencia máxima, es posible trabajar con periodo en vez de frecuencia si se transforma como se muestra en la Ecuación 4.1.

$$T_m = \frac{1}{2 * f_{max} * 10} \quad (4.1)$$

La Ecuación 4.1 contiene una amplificación de 10 debido a que en la práctica no es suficiente con solo el doble. Para hallar la frecuencia máxima de la respuesta al escalón, se aplica el bloque *Power Spectral Density* de Simulink, el cual entrega una gráfica del espectro de frecuencias de la señal que se le ingrese, este espectro se muestra en la Figura 4.5.

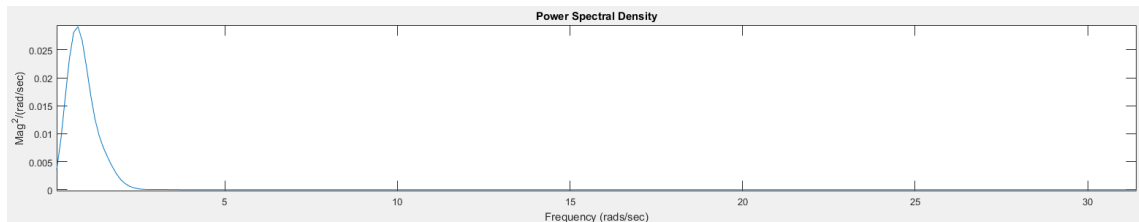


Figura 4.5: Espectro de frecuencias de la señal producida por la respuesta al escalón de la función de transferencia.

Como se puede apreciar en la Figura 4.5, la respuesta al escalón tiene su frecuencia máxima a los $3 \frac{rad}{seg}$ que equivalen a 0.477 [Hz] al colocar esta frecuencia en la Ecuación 4.1 se obtiene un período de 0.1048 segundos. Como el Teorema de muestreo de Shannon-Nyquist indica que la frecuencia de muestreo debe ser mayor al doble que la frecuencia máxima, si usamos período, que es el inverso de la frecuencia, se obtiene que el período de muestreo que se debe usar en este caso tiene que ser menor o igual a 0.1048 segundos, por lo que se propone dar un margen y utilizar un período de 0.1 segundos para el bloqueador de orden cero y para el bloqueador de primer orden, ya que ambos trabajan con la misma señal y frecuencia. El resultado de utilizar un período de 0.1 segundos se muestra en la Figura 4.6.

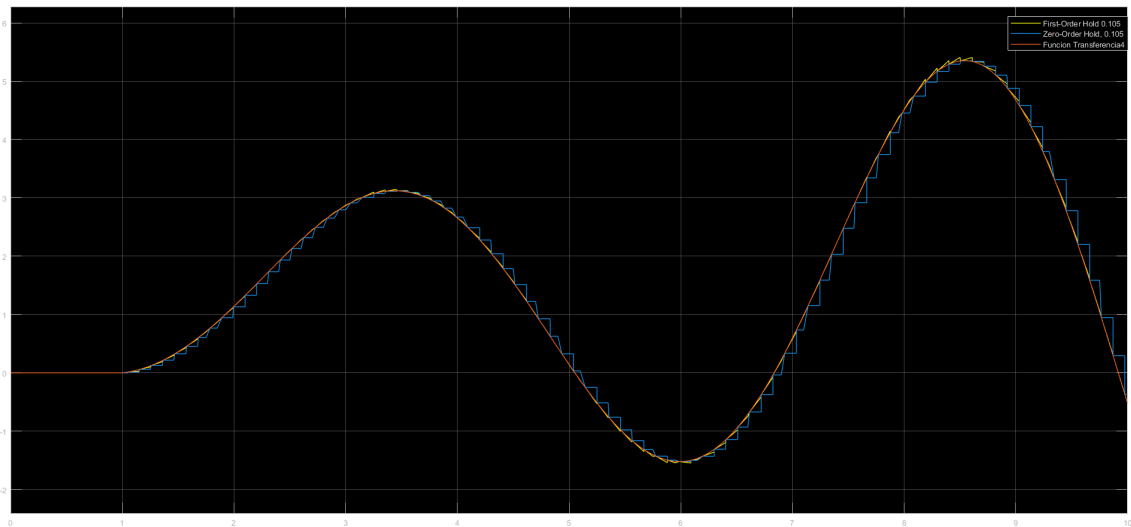


Figura 4.6: Bloqueador de Primer Orden con tasa de muestreo de 0.105 segundos aplicado a la función discretizada a 0.105 segundos.

En la Figura 4.6 se puede apreciar que la función recuperada es muy similar a la respuesta al escalón, mucho mejor que la discretizada a 0.5 segundos, aunque quizás no tan exageradamente similar como al usar un período de 0.05 segundos, pero suficiente acorde al teorema de muestreo de Shannon-Nyquist. Al utilizar este período obtenido del teorema, se puede asumir que se logra minimizar la cantidad de muestras para discretizar la respuesta al escalón sin comprometer su calidad al recuperarla con el bloqueador de primer orden.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

A través de la experiencia realizada se logró trabajar con sistemas continuos y su transformación a discretos vistos en clases, a través de MATLAB y su herramienta Simulink, pudiendo observar el comportamiento de estos al aplicarle de entrada un escalón como se pudo ver en las gráficas del desarrollo de las dos partes de este informe.

En la parte 1 de este informe, se observó cómo tiempos de muestreo o periodos más pequeños mejoraban la calidad de la discretización de la señal continua debido a que se tomaban muestras más juntas y que incluso un periodo tan grande como 0.1 era suficiente para recuperar una señal muy parecida a la original, tanto así que tienen la misma función de transferencia. También cabe destacar que distintos interpoladores tienen diferencias de calidad entre sí y que el bloqueador de orden cero no es el mejor de ellos.

Tomando en cuenta los resultados de la parte 1, en la parte 2 se llevó la misma función de transferencia a un simulador para ver cómo se comportaría la señal en un medio análogo, llegando al mismo caso en que la tasa de muestreo afectó enormemente la recuperación de la señal, pero esta vez se realizó un análisis de cuánto tiempo de muestreo es realmente necesario utilizar, ya que como es conocido gracias al teorema de Shannon-Nyquist, después de un punto es innecesario seguir disminuyendo el tiempo de muestreo, acción que obligaría a gastar muchos más recursos tanto de espacio como de procesamiento, ya que matemáticamente se puede recuperar toda la información solo con una tasa de muestreo al menos del doble de la frecuencia máxima de la señal continua. Usando ese teorema y ajustándolo a la práctica volviéndolo 20 veces en vez de 2, se pudo obtener el tiempo de muestreo mínimo que resultó ser 0.1048 segundos, muy cercano al 0.1 que se usó en la parte 1 y que entregó la misma función de transferencia, reforzando así aún mas el teorema.

BIBLIOGRAFÍA

Martinez, E. (2007). Teoría del muestreo de nyquist. Recuperado desde <http://www.eveliux.com/mx/Teoria-del-muestreo-de-Nyquist.html>".

Panagos, A. (2014). Sampling signals (7/13) - zero order hold sampling. Recuperado desde <https://www.youtube.com/watch?v=gzAAr3OLxwY>".

Wikibooks (2017). Control systems/transfer functions. Recuperado desde https://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems/Transfer_Functions.

Wikipedia (2018). First-order hold. Recuperado desde https://en.wikipedia.org/wiki/First-order_hold".