UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

Modelación y Simulación

Laboratorio 4

Diego Mellis

Andrés Muñoz

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Francisco Muñoz

Santiago – Chile

2019

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En el asignatura de Modelación y Simulación impartido por la Universidad de Santiago de Chile, se ha hablado sobre modelos de estado, en donde una situación caótica se le aplica un análisis de sistemas para crear un sistema que presenta modelos fenomenológicos. Estos últimos se pueden comprimir en modelos de estado, que con la mínima información necesaria, pueden predecir el comportamiento futuro del sistema mediante una entrada y su modelo. En este laboratorio se trabajará con Sistemas Lineales Invariantes, es decir, los que cumplen con el principio de superposición, que cuando la entrada de un sistema es multiplicada por un factor, la salida del sistema también será multiplicada por el mismo factor. Dado lo anterior, el objetivo principal de la experiencia consiste en:

- Complementar el aprendizaje de modelos de estado, a través de la realización de actividades prácticas en *MATLAB*

De esta forma, es posible identificar los objetivos específicos de esta experiencia:

- Transformar un diagrama de bloques formado por funciones de transferencia, en un modelo de estado.
- Aplicar los conceptos de modelo de estado en una situación real.

En el presente informe se trabajará en lo descrito anteriormente y para entender su desarrollo se presenta un marco teórico, seguido del desarrollo anteriormente mencionado que consta de dos partes. La primera consiste en transformar un diagrama de bloques formado por funciones de transferencia, en un modelo de estado. Luego en la segunda parte, consiste en un problema de dos estanques y la finalidad es tener un modelo de estado de este fenómeno identificando las variables de entrada, estado y salida.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

2.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Una función de transferencia es la razón que existe entre la entrada y la salida de un sistema en el dominio de Laplace considerando condiciones iniciales igual a 0 (Wikibooks, 2017). Tomando en cuenta la salida como $Y(s)$ y la entrada como $U(s)$, la ecuación de transferencia queda como:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{2.1}$$

Dicha ecuación de transferencia posee diferentes datos que se pueden extraer, los cuales se definen a continuación.

2.1.1 Ceros

Los ceros de una función de transferencia corresponden a los valores de s en que el numerador se hace 0.

2.1.2 Polos

Los polos de una función de transferencia corresponden a los valores de s en que el denominador se hace 0.

2.2 DIAGRAMA DE BLOQUES

El diagrama de bloques es una forma de representar gráficamente las relaciones entre las variables de un sistema. Para obtener la función de transferencia entre la entrada y salida de un diagrama, éste se puede simplificar mediante asociación de bloques (Blanco, 2015).

Los bloques pueden estar relacionados entre si, en forma secuencial, paralela o mixta, como también pueden presentar retroalimentaciones. A continuación, en la figura 2.1 se pueden distinguir cada uno de los diagramas mencionados anteriormente.

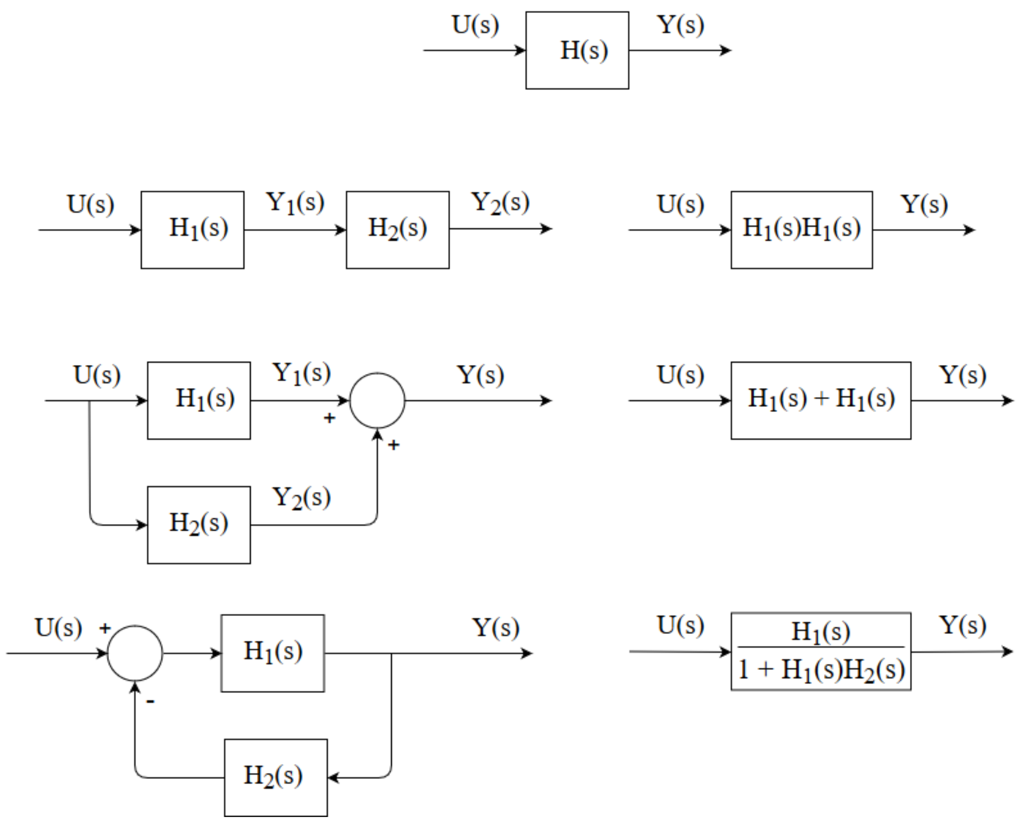

Figura 2.1: Diagramas de bloque en serie, paralelo y retroalimentado.

2.3 MODELO DE ESTADO

Un modelo de estado puede definirse como el conjunto más pequeño de variables que permiten predecir la evolución del sistema conocidas sus entradas. De esta forma dicho modelo se encuentra definido por tres tipos de variables (Rodriguez, s.f.).

- **Variables de entrada**: Corresponden a la entrada del sistema. En otras palabras son las variables que no se ven afectadas por condiciones del sistema.
- **Variables de salida**: Corresponde a lo que se desea estudiar, monitorear o controlar en el sistema.
- **Variables de estado**: Corresponde a las magnitudes que se emplean para describir el estado del sistema.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

La primera parte de este laboratorio trata sobre la transformación de un diagrama de bloques de Funciones de Transferencia en un Modelo de Estado equivalente. Para ello se cuenta con un diagrama de bloques fijo como el que se muestra en la Figura 3.1, en donde hay solo dos funciones de transferencia que se retro alimentan.

Para cumplir con el objetivo del laboratorio, se crea un programa en MATLAB, el cual recibe dos funciones de transferencia y acorde al diagrama de bloques, genera un modelo de estado equivalente.

3.1 RESTRICCIÓN DE ENTRADA

Como un supuesto, se asume que todas las funciones de transferencia ingresadas contienen condiciones iniciales igual a cero y nos encontramos trabajando en el mundo de Laplace. Las funciones de transferencia que este programa admite, deben estar en la siguiente forma:

$$H(s) = \frac{a}{b \cdot s + c} \tag{3.1}$$

Esto significa que sólo se admiten funciones de transferencia de grado -1, o grado 0. De no cumplirse, habría que trabajar con división polinomial, fracciones parciales o similar acciones que no se incluyen en este trabajo y se asume que tales simplificaciones fueron realizadas antes de ingresarlas al programa.

Para ingresar las funciones de transferencia, éstas deben ser definidas en un *script* de MATLAB, allí las funciones son representadas como vectores, donde cada posición representa un escalar de la función de transferencia que se presenta en la Ecuación 3.1. El orden de estos valores deben ser de la forma que se muestra en la Ecuación 3.2

$$H(s) = [\ a\ b\ c\ ] \tag{3.2}$$

3.2 FORMATO DEL MODELO DE ESTADO

Respecto a la salida, el modelo de estado es entregado en su forma matricial con sus matrices A, B, C y D como se muestra en la Ecuación 3.3 y 3.4.

$$\dot{X} = A \cdot x + B \cdot u \tag{3.3}$$

$$Y = C \cdot x + D \cdot u \tag{3.4}$$

3.3 PROCEDIMIENTO

Para esta experiencia se han definido las variables de estado de la siguiente forma:

$$x_1 = \frac{a}{bs + c} \cdot (U - x_2) \tag{3.5}$$

$$x_2 = \frac{d}{es + f} \cdot x_1 \tag{3.6}$$

Desarrollando las ecuaciones 3.5 y 3.6 para obtener el modelo de estado a partir de la función de transferencia se obtienen la siguiente representación matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & -\frac{f}{e} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U \tag{3.7}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Ahora que se ha representado matricialmente el modelo de estado, es posible implementarlo en *MATLAB*, esto se puede observar en la figura 3.1

```
%Despejar las variables de estado de la funcion de transferencia 1.
%Como solo hay s de grado 1, la inversa de laplace deja intacto todo menos s*x1
A(1,1)=(-1)*(fun1(3)/fun1(2));
A(1,2)=(-1)*(fun1(1)/fun1(2));
B(1,1)= fun1(1)/fun1(2);

%Despejar las variables de estado de la funcion de transferencia 2.
%Como solo hay s de grado 1, la inversa de laplace deja intacto todo menos s*x2
A(2,1)=fun2(1)/fun2(2);
A(2,2)=(-1)*(fun2(3)/fun2(2));
B(2,1)=0;

%La salida es siempre la misma para este diagrama de bloques, independiente
%a las funciones de transferencia.
C=[1 0];
D=0;
```

Figura 3.1: Implementación en MATLAB para obtener ME a partir de FT.

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

Para la segunda parte del laboratorio, se debe obtener las expresiones genéricas de dos sistemas de fluidos. El primero corresponde a uno propuesto en el enunciado y el segundo a uno escogido por los integrantes del grupo de trabajo que se haya expuesto durante las clases o se encuentre en la plataforma online.

4.1 PRIMER EJERCICIO

El primer ejercicio a resolver, corresponde a un sistema con dos estanques, a través del cual la salida del primero corresponde a la entrada del segundo. El sistema se puede observar en la figura 4.1.

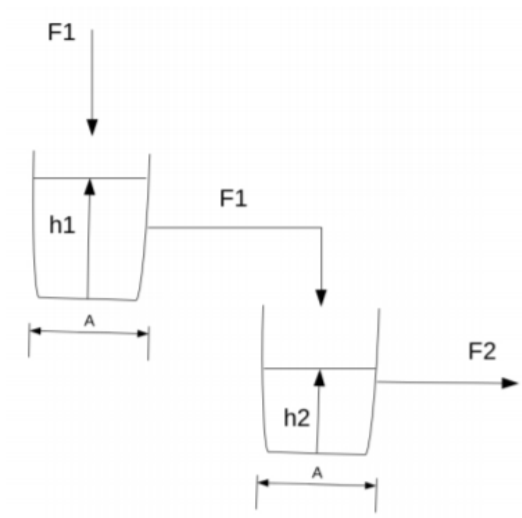

Figura 4.1: Diagrama de vasos comunicantes

Primero se identifican las variables y parámetros del sistema, los cuales son:

- F_1 variable que corresponde al flujo de entrada y salida del primer estanque.
- F_2 variable que corresponde al flujo de salida del segundo estanque.
- h_1 variable que corresponde al nivel de agua del estanque 1.

- h_2 variable que corresponde al nivel de agua del estanque 2.
- A_1 parámetro correspondiente al área de la superficie del estanque 1.
- A_2 parámetro correspondiente al área de la superficie del estanque 2.

Además, se tiene que el flujo de salida del estanque 2, F_2 viene dado por:

$$F_2 = h_2 \tag{4.1}$$

Con los datos anteriores, se define el modelo fenomenológico que defina el comportamiento del sistema.

Para el primer estanque con $\mathrm{d}V_1$ correspondiendo a la variación de volumen del estanque.

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_2 \tag{4.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1 A_1}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4.4}$$

Para el segundo estanque con $\mathrm{d}V_2$ correspondiendo a la variación de volumen del estanque.

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_2 \tag{4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2 A_2}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_2 \tag{4.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{F_1}{A_2} - \frac{F_2}{A_2} \tag{4.7}$$

Por lo tanto, como el flujo de entrada y de salida para el primer estanque es el mismo, ésta variable de estado resulta ser 0.

Ahora bien, con el modelo fenomenológico definido, tomando en consideración que la variable a estudiar corresponde al flujo de salida F_2, se puede proceder a definir las variables de entrada, salida y estado del sistema.

- Variables de entrada: F_1
- Variables de salida: F_2
- Variables de estado: h_1 y h_2

Reemplazando la ecuación 4.1 en 4.7 se obtienen las ecuaciones del modelo de estado del sistema.

$$\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} = \frac{F_1}{A_2} - \frac{h_2}{A_2} \tag{4.8}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{h_1} \\ \dot{h_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \cdot U \tag{4.9}$$

$$y = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Posteriormente, se reemplazarán valores en las variables del modelo de estado obtenido para 3 casos diferentes.

4.1.1 Primer caso

Para el primer caso se utilizaron los siguientes valores:

- Flujo de entrada F_1: $100\frac{m^3}{s}$.
- Área de la superficie del segundo estanque A_2: $10m^2$.
- Nivel de agua del segundo estanque h_2: $30m$.

Los resultados obtenidos fueron que el nivel de agua del estanque 2 varía a razón de $7\frac{m}{s}$ y el flujo de salida es $30\frac{m^3}{s}$, lo cual implica que en la situación actual el nivel de agua del estanque iría en aumento y por lo tanto, también su flujo de salida.

4.1.2 Segundo caso

Para el segundo caso se utilizaron los siguientes valores:

- Flujo de entrada F_1: $8,154\frac{km^3}{s}$.
- Área de la superficie del segundo estanque A_2: $5km^2$.
- Nivel de agua del segundo estanque h_2: $8,145km$.

Los resultados para este caso fueron que el nivel de agua del estanque 2 varía a razón de $0\frac{km}{s}$, dado que ambos flujos son iguales y el flujo de salida es $8,145\frac{m^3}{s}$, lo cual implica que en la situación actual el nivel de agua del estanque está estancado y por lo tanto, su flujo de salida se mantendrá en dicho valor a menos que se modifique la entrada.

4.1.3 Tercer caso

Para el tercer caso se utilizaron los siguientes valores:

- Flujo de entrada F_1: $2300\frac{m^3}{s}$.
- Área de la superficie del segundo estanque A_2: $65km^2$.
- Nivel de agua del segundo estanque h_2: $6300,15m$.

Los resultados para este caso fueron que el nivel de agua del estanque 2 varía a razón de $-61,5408\frac{km}{s}$ y el flujo de salida es $6300,15\frac{m^3}{s}$, lo cual implica que en la situación actual el nivel de agua del estanque está disminuyendo rápidamente, dado a la alta diferencia entre el flujo de entrada y el flujo de salida.

4.2 SEGUNDO EJERCICIO

Este posee dos estanques con un comportamiento similar a los del ejercicio anterior. Sin embargo, para este caso el flujo de entrada del primer estanque no es igual a su flujo de salida, por lo que se presentan ciertas variaciones, sumado a la integración de válvulas que generan ciertas resistencias a los flujos. La imagen del sistema se presenta en la figura 4.2.

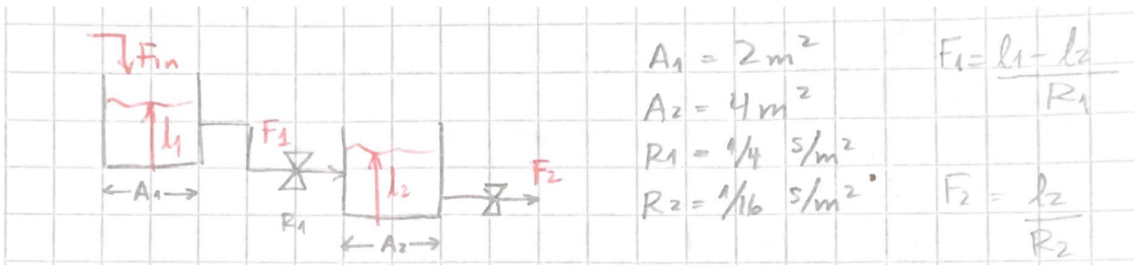

Figura 4.2: Diagrama de vasos comunicantes

Como en el caso anterior, se identifican las variables y parámetros del sistema.

- F_{in} variable que corresponde al flujo de entrada en el primer estanque.
- F_1 variable que corresponde al flujo de salida del primer estanque y entrada del segundo.
- F_2 variable que corresponde al flujo de salida del segundo estanque.
- l_1 variable que corresponde al nivel de agua del estanque 1.
- l_2 variable que corresponde al nivel de agua del estanque 2.
- A_1 parámetro correspondiente al área de la superficie del estanque 1 con valor igual a $2m^2$.
- A_2 parámetro correspondiente al área de la superficie del estanque 2 con valor igual a $4m^2$.
- R_1 parámetro que corresponde a la resistencia de la válvula para el flujo F_1 con valor igual a $1/4\ \frac{s}{m^2}$.
- R_2 parámetro que corresponde a la resistencia de la válvula para el flujo F_2 con valor igual a $1/16\ \frac{s}{m^2}$.

Además, se tienen ecuaciones para definir los flujos F_1 y F_2:

$$F_1 = \frac{l_1 - l_2}{R_1} \tag{4.11}$$

$$F_2 = \frac{l_2}{R_2} \tag{4.12}$$

Identificado lo anterior es posible definir el modelo de estado. Para el primer estanque se tiene dV_1 que corresponde a la variación de volumen del estanque 1. Las siguientes ecuaciones representan lo mencionado anteriormente:

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = F_{in} - F_1 \tag{4.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_1 A_1}{\mathrm{d}t} = F_{in} - F_1 \tag{4.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{in}}{A_1} - \frac{F_1}{A_1} \tag{4.15}$$

Para el segundo estanque se tiene dV_2 y se representa con las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_2 \tag{4.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_2 A_2}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_2 \tag{4.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}t} = \frac{F_1}{A_2} - \frac{F_2}{A_2} \tag{4.18}$$

Como ya fue mencionado, a diferencia del caso anterior, aquí el diferencial del nivel de líquido del estanque 1 es distinto de 0, dado que el flujo de entrada y de salida de este difieren. Al igual que en el caso anterior se definen los tipos de variables dentro del sistema considerando que se desea supervisar el flujo de salida F_2.

- Variable de entrada: F_1
- Variables de estado: l_1, l_2
- Variables de salida: F_2

Ahora, reemplazando los parámetros y variables que se definieron anteriormente, es posible llegar al modelo de estado del sistema.

$$\frac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}t} = \frac{F_{in}}{2} - 2l_1 + 2l_2 \tag{4.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}t} = l_1 - 5l_2 \tag{4.20}$$

$$Y = F_2 = 16l_2 \tag{4.21}$$

Dejando el modelo de estado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{l_1} \\ \dot{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot U \tag{4.22}$$

$$y = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

A través de la experiencia realizada, se trabajó con los ya conocidos sistemas de pasadas experiencias, pero esta vez utilizando modelos de estado para representarlos. De esta forma, se profundizó en el trabajo de los sistemas utilizando los modelos de estado vistos en cátedra.

Los objetivos, tanto generales como específicos fueron cumplidos a cabalidad dejando clara evidencia en el desarrollo de ambas partes en esta experiencia.

Para la primera parte, se transformó un sistema mostrado con una función de transferencia a un modelo de estado, pudiendo así observar la relación existente entre estas dos formas de representación del sistema y no verlas como mundos separados.

En la segunda parte se trabajó netamente con los sistemas utilizando el modelo de estado con sus respectivas variables de entrada, salida y estado. Con esto se pudo analizar el comportamiento de estos sistemas desde un punto de vista diferente a las experiencias anteriores en que se utilizaban funciones de transferencia y se trabajó directamente con las variables y parámetros reconocidos dentro de este.

Relacionando ambas partes realizadas se hace notoria la diferencia entre trabajar con una función de transferencia que busca entregar directamente un resultado a partir de una entrada y los modelos de estado que demuestran más el comportamiento y función de cada una de las variables y parámetros dentro del modelo fenomenológico.

Cabe mencionar que se presentó cierta problemática al realizar los experimentos solicitados, dada la dificultad de abstraer los contenidos ejercitados en clases de cátedra hacia el programa *MATLAB* para obtener los resultados deseados. Sin embargo, se superaron dichas dificultades finalizando cada una de las tareas de la experiencia satisfactoriamente, cumpliendo los objetivos propuestos.

BIBLIOGRAFÍA

Blanco, D. (2015). Diagramas de bloques. Recuperado desde http://ocw.uc3m.es/ingenieria-de-sistemas-y-automatica/senales-y-sistemas/programa.

Rodriguez, D. (s.f.). Espacio de estados: Representación y propiedades. Recuperado desde http://www.control-class.com/Tema_9/Slides/Tema_9_Espacio_de_Estados.pdf".

Wikibooks (2017). Control systems/transfer functions. Recuperado desde https://en.wikibooks.org/wiki/Control_Systems/Transfer_Functions.