

INFORME LABORATORIO 1 DE ALGORITMOS NUMÉRICOS:
MÉTODOS NUMÉRICOS

ANDRÉS FELIPE MUÑOZ BRAVO

Profesor: Óscar Rojas Díaz.

Santiago - Chile
10 de mayo de 2018

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE FIGURAS.....	v
ÍNDICE DE CUADROS	vi
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN	7
CAPÍTULO 2. EXPERIMENTO: FUNCIONES Y SISTEMAS	9
2.1 FUNCIONES DE UNA VARIABLE	9
2.2 SISTEMAS DE ECUACIONES PARA MÉTODO DE NEWTON RAPH- SON MULTIVARIABLE	10
2.2.1 Sistema de dos variables:	10
2.2.2 Sistema de tres variables:	10
2.3 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES	11
CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE MÉTODOS NO LINEALES	13
3.1 FUNCIÓN 1: $F(X)$	13
3.2 FUNCIÓN 2: $G(X)$	18
3.3 FUNCIÓN 3: $H(X)$	23
3.4 NEWTON RAPHSON MULTIVARIABLE: SISTEMA 1	28
3.5 NEWTON RAPHSON MULTIVARIABLE: SISTEMA 2	30
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE MÉTODOS LINEALES	33
4.1 RESULTADOS SISTEMA 289	33
4.2 RESULTADOS SISTEMA 1089	34

4.3	RESULTADOS SISTEMA 4225	35
4.4	ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS	36
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES		37
CAPÍTULO 6. ANEXO		39
6.1	MÉTODO DE LA BISECCIÓN	39
6.2	MÉTODO DE LA SECANTE	39
6.3	MÉTODO REGULA-FALSI	40
6.4	MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON	40
6.5	MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON MULTIVARIABLE	40
6.6	MÉTODO DE JACOBI	41
6.7	MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL	41
6.8	MÉTODO DE FACTORIZACIÓN LU	41
6.9	MÉTODO DE CHOLSKY	42
6.10	MÉTODO DE FACTORIZACIÓN QR	42
CAPÍTULO 7. BIBLIOGRAFÍA		45

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3-1: Valores de la función 1.	13
Figura 3-2: Valores de la función 1 con zoom.	14
Figura 3-3: Errores de la función 1.	15
Figura 3-4: Errores de la función 1 con zoom.	16
Figura 3-5: Valores de la función 2.	18
Figura 3-6: Valores de la función 2 con zoom.	19
Figura 3-7: Errores de la función 2.	20
Figura 3-8: Errores de la función 2 con zoom.	21
Figura 3-9: Valores de la función 3.	23
Figura 3-10: Valores de la función 3 con zoom.	24
Figura 3-11: Errores de la función 3.	25
Figura 3-12: Errores de la función 3 con zoom.	26
Figura 3-13: Raíces aproximadas por iteración: Newton Multivariable Sistema 1.	28
Figura 3-14: Errores por iteración: Newton Multivariable Sistema 1 3.	29
Figura 3-15: Raíces aproximadas por iteración: Newton Multivariable Sistema 2.	30
Figura 3-16: Errores por iteración: Newton Multivariable Sistema 1.	31
Figura 4-1: Soluciones de sistema de ecuaciones de 289.	33
Figura 4-2: Soluciones de sistema de ecuaciones de 1089.	34
Figura 4-3: Soluciones de sistema de ecuaciones de 4225.	35
Figura 6-1: Formula recurrencia Regula-Falsi	40
Figura 6-2: Formula recurrencia Newton-Raphson multivariable	41
Figura 6-3: Proceso para obtener la matriz QR de una matriz A	43

ÍNDICE DE CUADROS

2.1	Tabla de valores iniciales para los métodos.	9
2.2	Valores iniciales Newton Raphson para dos variables	10
2.3	Valores iniciales Newton Raphson para tres variables	10
3.1	Resumen de datos obtenidos para la función 1 $F(x)$	16
3.2	Ranking para la primera función $F(x)$	17
3.3	Resumen de datos obtenidos para la función 2 $G(x)$	21
3.4	Ranking para la segunda función $G(x)$	23
3.5	Resumen de datos obtenidos para la función 3 $H(x)$	26
3.6	Ranking para la tercera función $H(x)$	27
3.7	Resumen de valores obtenidos para el sistema 1	29
3.8	Resumen de valores obtenidos para el sistema 2	32
4.1	Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 289	33
4.2	Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 1089 . . .	34
4.3	Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 4225 . . .	35

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Desde los inicios del ser humano, este ha intentado buscar solucionar sus problemas, es por esto que siempre está en constante pensamiento para encontrar mejores formas de resolver estos. Existe un sin fin de problemas para los cuales el ser humano ha encontrado solución, entre ellos encontramos los más básicos para sobrevivir como prender fuego, hasta los más difíciles como construir edificios o encontrar soluciones a problemas matemáticos muy complejos.

Dentro de los problemas matemáticos complejos que se tiene actualmente están los de resolver ecuaciones no lineales, así como también resolver sistemas de ecuaciones lineales. Para ello se han encontrado diferentes métodos para encontrar las soluciones, unos más eficiente y eficaces que otros, en donde el ser humano está limitado por sus capacidades de computo. Es por esto que se ha intentado utilizar el poder de computo de los computadores para realizar estas tareas repetitivas para las cuales existe un algoritmo. Esto último es muy importante, ya que la tecnología avanza a pasos agigantados, por lo tanto, también la capacidad de computo, es decir se necesita menos tiempo para poder realizar la búsqueda de soluciones.

Para este presente trabajo se programarán los métodos de resolución de ecuaciones no lineales entre ellos: (a) Método de la Bisección, (b) Método de la Secante, (c) Método Regula Falsi, (d) Método de Newton-Raphson, (e) Método de Newton para varias variables. Por otro lado, también se programará los siguientes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales: Gauss Jacobi, Gauss Seidel, ambos iterativos. Así como también LU, Cholesky, QR, Givens y Housholder, los cuales son directos.

El lenguaje de programación que se utiliza para la programación de los métodos es "MAT" y se realizan diferentes experimentos para poder analizar estos revisando los resultados entregados.

Dentro del informe existen diferentes capítulos, en los cuales se muestran los resultados obtenidos para los métodos de forma categorizada. Además se analizan estos resultados, para finalmente concluir sobre los diferentes métodos. Cabe recalcar que en el anexo se encuentra la descripción de cada uno de los algoritmos utilizados.

CAPÍTULO 2. EXPERIMENTO: FUNCIONES Y SISTEMAS

2.1 FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Para analizar los métodos de resolución de ecuaciones no lineales, es decir, Bisección, Regula Falsi, Secante y Newton Raphson, se utilizan tres funciones las cuales se presentan a continuación:

1. $F(x) = x - 2^{-x}$
2. $G(x) = e^{-x} - x^2 + 3x - 2$
3. $H(x) = x^3 - 7x^2 + 14\text{sen}(2\pi x) - 6$

Cabe recalcar que los métodos de Bisección, Secante y Regula Falsi requieren de un intervalo para poder ser utilizados, es decir, dos valores, el límite inferior y el límite superior. Es muy importante elegir cuidadosamente estos valores para definir el intervalo, ya que si no existe una raíz entre estos, los métodos nunca encontrarán el valor para el cual estan programados encontrar. Es por esto que se el teorema de Bolzano, el cual dice que si f es una función continua en $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$, existe un punto $\alpha \in [a, b]$ donde $f(\alpha) = 0$. De esta forma se pudo comprobar que el intervalo $[a, b]$ es compatible con los métodos a analizar.

Por otro lado, el método de Newton Raphson requiere de un solo punto para ser utilizado, por lo tanto como solo se indica el valor de "a" como se muestra en el cuadro 2.1 . Para encontrar un valor inicial se utiliza la regla de Fourier.

Cuadro 2.1: Tabla de valores iniciales para los métodos.

Método	a_F	b_F	a_G	b_G	a_H	b_H
Bisección	0	1	0	1	0	0.3
Secante	0	1	0	1	0	0.3
Regula Falsi	0	1	0	1	0	0.3
Newton Raphson	0	-	0	-	0	-

2.2 SISTEMAS DE ECUACIONES PARA MÉTODO DE NEWTON RAPHSON MULTIVARIABLE

Para analizar el comportamiento del método Newton Raphson multivariable, se experimentará con dos sistemas de ecuaciones los cuales se presentan a continuación.

2.2.1 Sistema de dos variables:

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \\ X_{(0)} = (0, 0)^T \end{cases}$$

Dado el sistema de ecuaciones los valores iniciales son los siguientes:

Cuadro 2.2: Valores iniciales Newton Raphson para dos variables

Variable	Valor Inicial
x_1	0
x_2	0

2.2.2 Sistema de tres variables:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 37 = 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ X_{(0)} = (0, 0, 0)^T \end{cases}$$

Dado el sistema de ecuaciones los valores iniciales son los siguientes:

Cuadro 2.3: Valores iniciales Newton Raphson para tres variables

Variable	Valor Inicial
x_1	0
x_2	0
x_3	0

2.3 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Para analizarlos métodos lineales se tienen 3 sistemas entregados por el profesor a cargo del curso los cuales son los siguientes:

- Sistema de 289
- Sistema de 1089
- Sistema de 4225

Para cada uno de estos sistemas se utilizarán los diferentes métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales los cuales se dividen en dos grandes grupos y que se muestran a continuación:

- Iterativos:
 - Gauss Jacobi
 - Gauss Seidel
- Directos:
 - LU
 - Cholesky (LLT)
 - QR
 - Givens
 - Housholder.

CAPÍTULO 3. ANÁLISIS DE MÉTODOS NO LINEALES

3.1 FUNCIÓN 1: $F(X)$

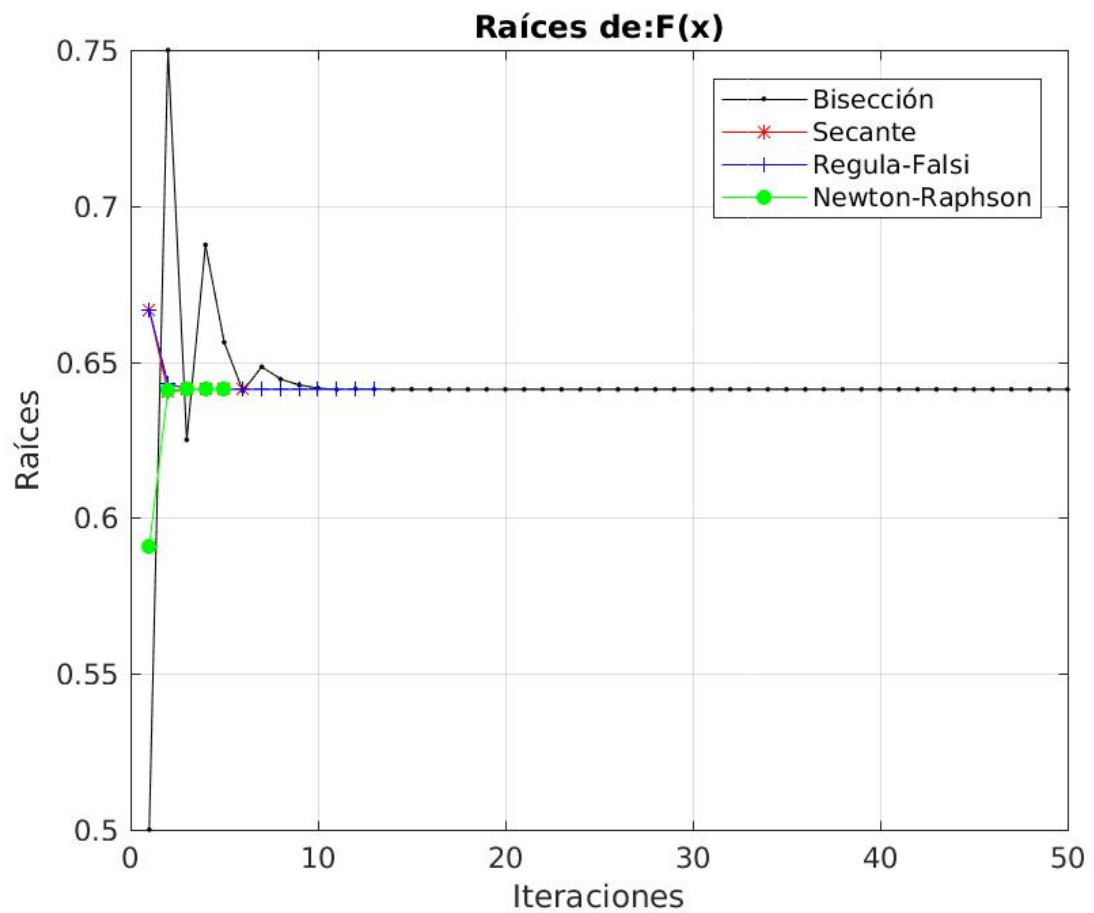


Figura 3-1: Valores de la función 1.

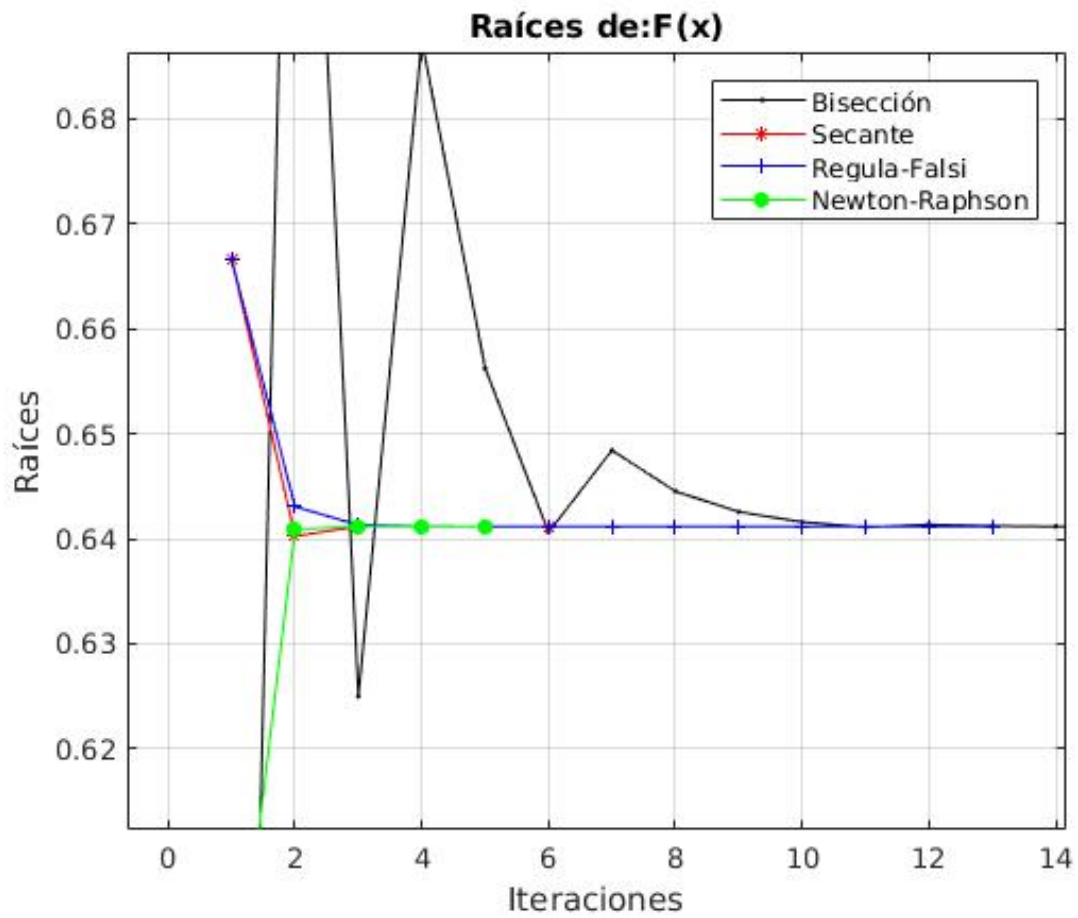


Figura 3-2: Valores de la función 1 con zoom.

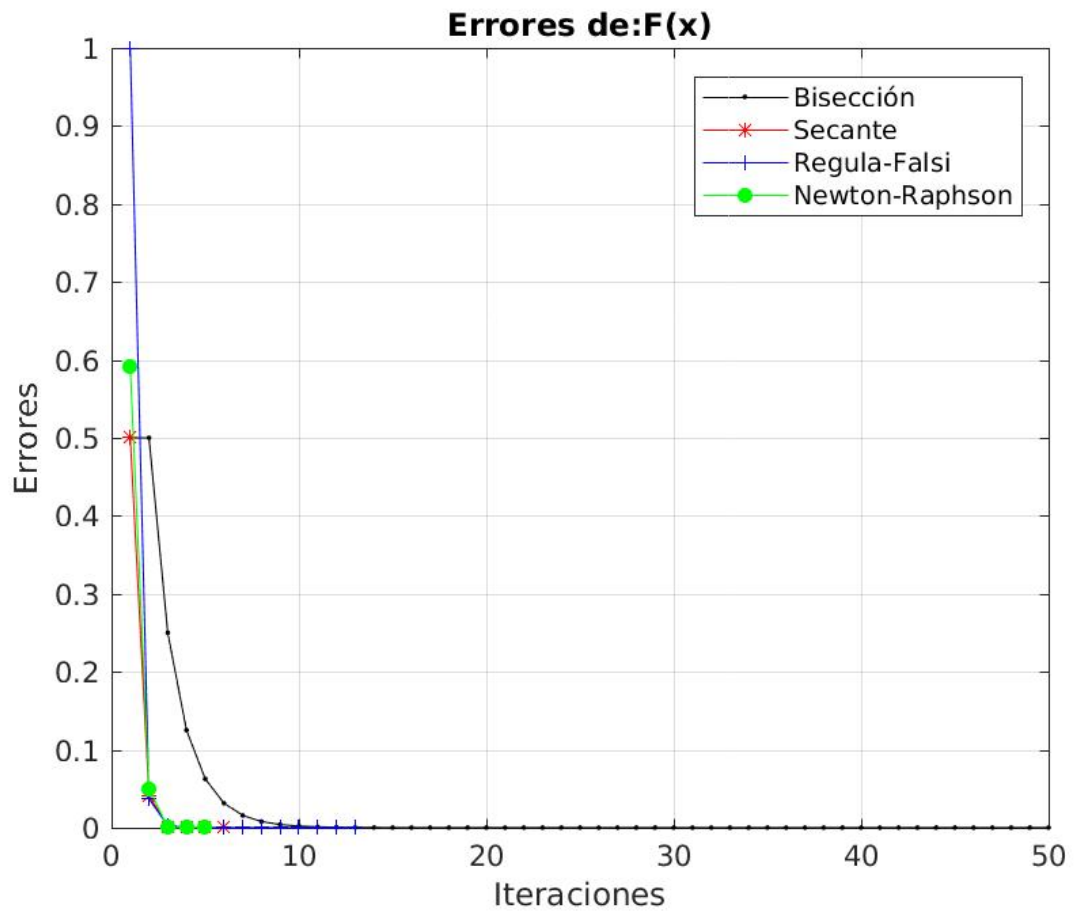


Figura 3-3: Errores de la función 1.

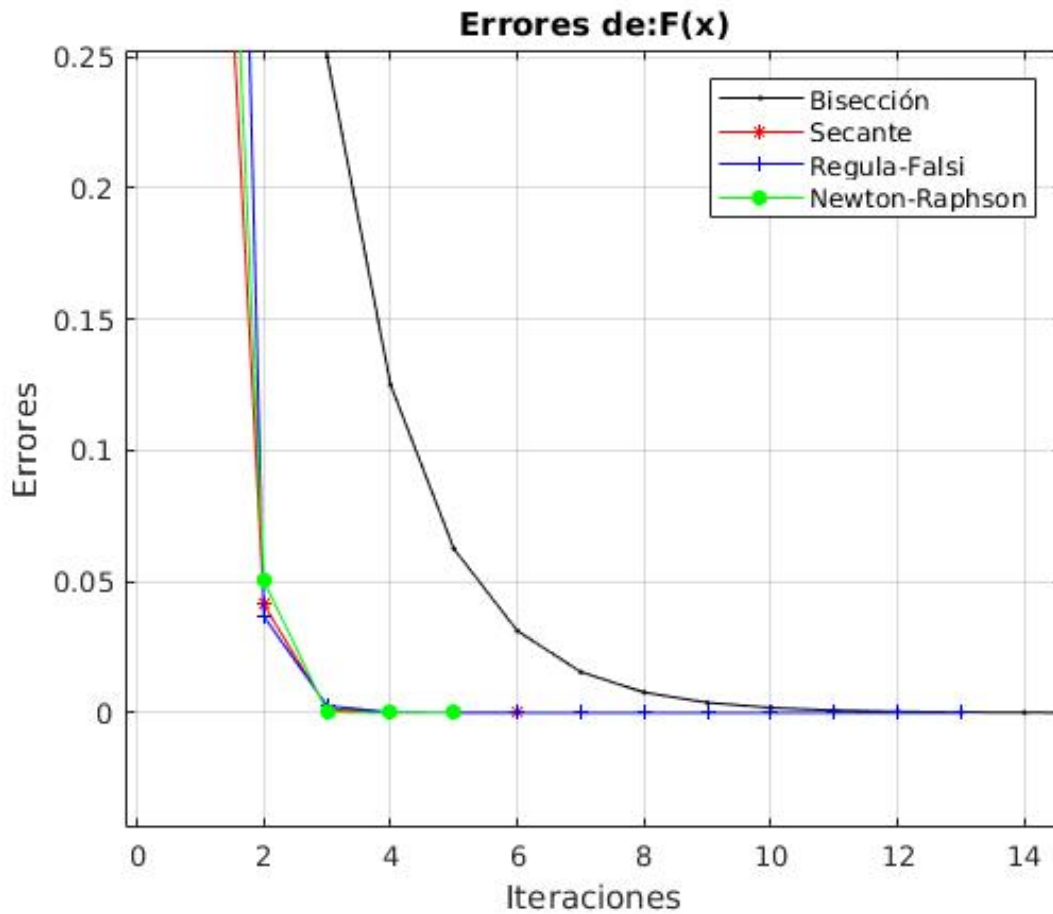


Figura 3-4: Errores de la función 1 con zoom.

Cuadro 3.1: Resumen de datos obtenidos para la función 1 $F(x)$

Método	Error	Valor	It.	Tiempo
Bisección	1,77635683940025e-15	0,641185744504987	51	0,0155320000000000
Secante	1,73151545264357e-16	0,641185744504986	6	0,0064940000000000
Regula Falsi	1,29896093881143e-14	0,641185744504987	13	0,0105900000000000
Newton R.	1,11022302462516e-16	0,641185744504986	5	0,0019430000000000

Como se puede ver en las figuras 3-1 y 3-2 se puede apreciar que los diferentes métodos se comportan de diferentes formas, esto es debido a que aproximan las raíces de forma diferente en cada iteración. Se puede apreciar también que en las figuras 3-3 y 3-4 también se presentan diferencias en los métodos esto tiene una clara explicación debido a lo mencionado anteriormente, ya que al aproximar de maneras diferentes cada método en cada iteración, se obtendrá un error diferente debido a que los valores no son los mismos.

En el cuadro 3.1 se pueden apreciar los diferentes valores obtenidos para esta función, donde los valores son diferentes en cada caso. Podemos mencionar que el método con mayores iteraciones es el método de la Bisección con un total de 51 iteraciones, lo cual es bastante más respecto en proporciones con los otros métodos. Además el método con menor número de iteraciones fue el de Newton Raphson con un total de 5 iteraciones, es decir 10 veces menos iteraciones que el método de la Bisección.

Cabe destacar también que para esta función el método con el que se obtiene un menor error es el Newton Raphson, esto quiere decir que tiene una mayor precisión con respecto al valor de la raíz para la función. Mientras que el que tubo menor precisión fue el método de Regula Falsi.

Por otro lado, podemos analizar también el tiempo de ejecución, dentro de los cuales el que obtuvo menor tiempo, es decir se demoró menos en ejecutar sus tareas fue el de Newton Raphson. Mientras que el que obtuvo mayor tiempo es el de la Bisección.

Por lo tanto, podemos realizar un ranking respecto a los diferentes valores obtenidos los cuales se muestran a continuación.

Cuadro 3.2: Ranking para la primera función $F(x)$

Lugar	Tiempo	Iteraciones	Error
1	Newton Raphson	Newton Raphson	Newton Raphson
2	Secante	Secante	Secante
3	Regula Falsi	Regula Falsi	Biseccion
4	Bisección	Bisección	Regula Falsi

3.2 FUNCIÓN 2: $G(X)$

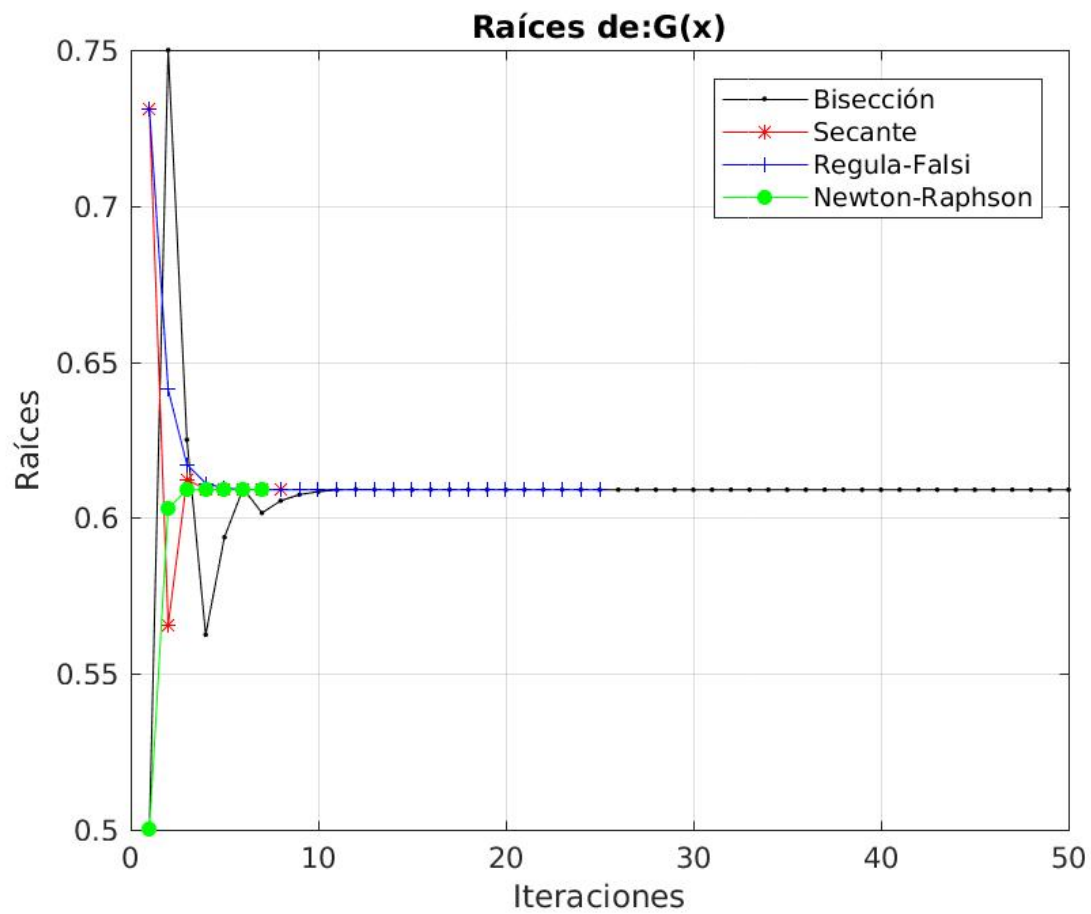


Figura 3-5: Valores de la función 2.

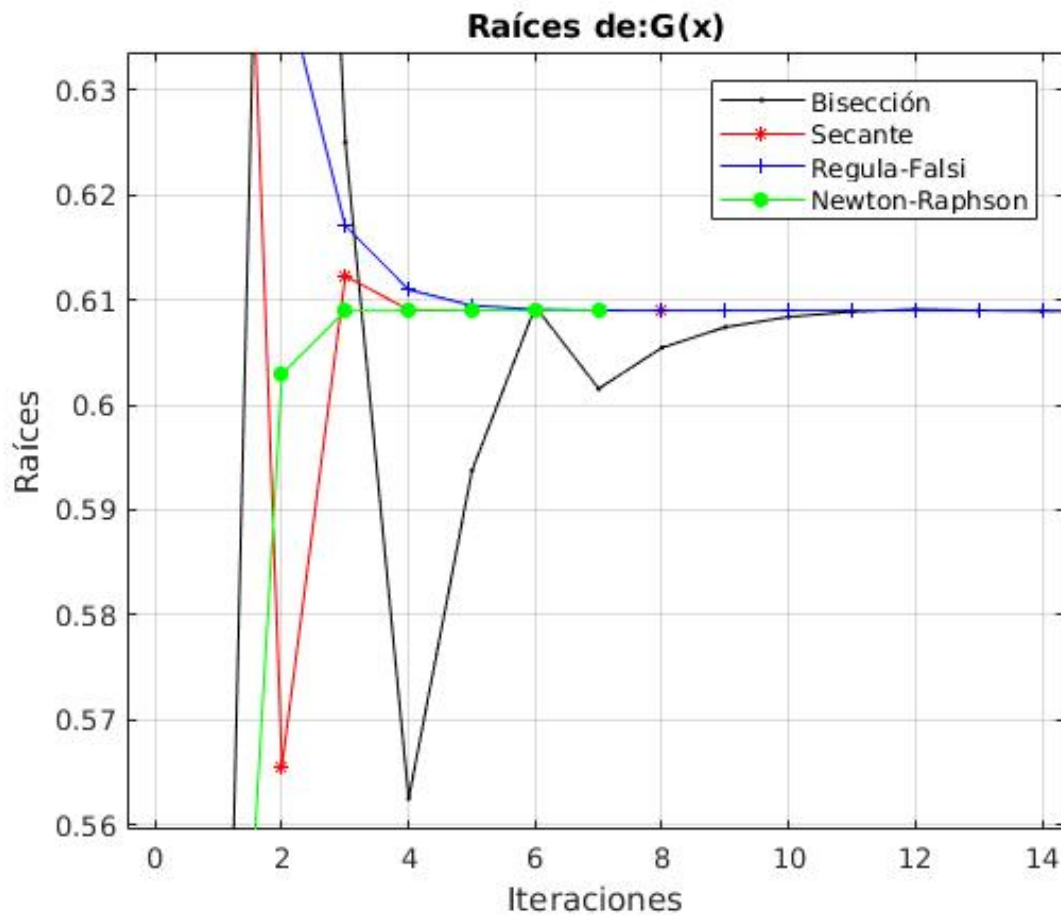


Figura 3-6: Valores de la función 2 con zoom.

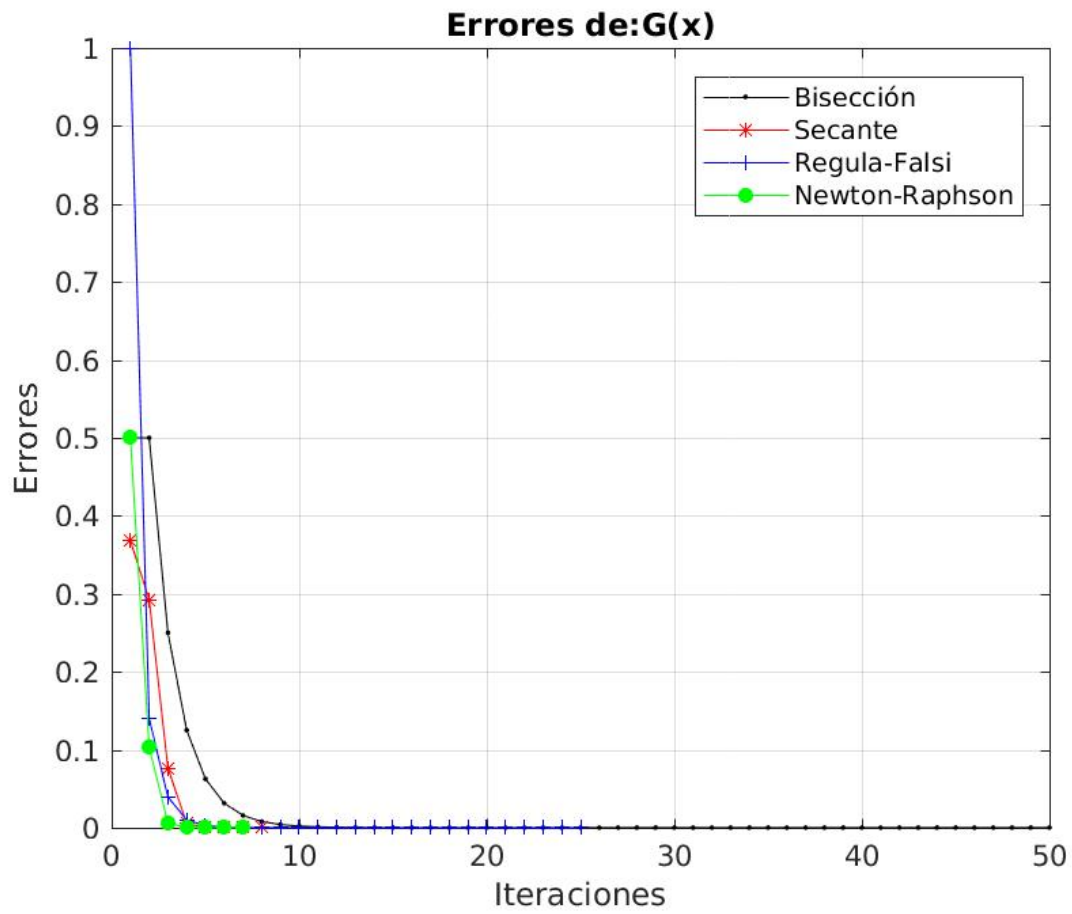


Figura 3-7: Errores de la función 2.

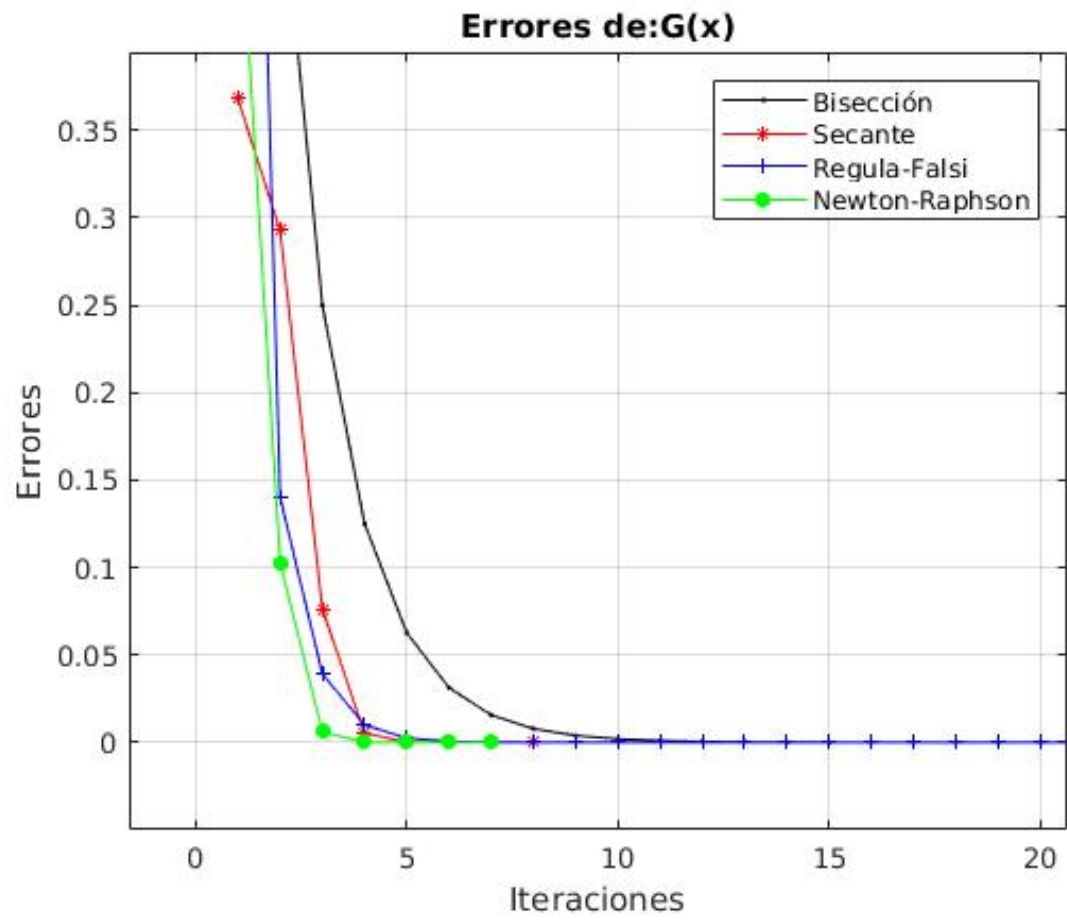


Figura 3-8: Errores de la función 2 con zoom.

Cuadro 3.3: Resumen de datos obtenidos para la función 2 $G(x)$

Método	Error	Valor	It.	Tiempo
Bisección	1,77635683940025e-15	0,608990891397512	51	0,0156340000000000
Secante	0	0,608990891397511	8	0,0021220000000000
Regula Falsi	1,33226762955019e-15	0,608990891397512	25	0,0178090000000000
Newton R.	0	0,608990891397511	7	0,0025740000000000

Como se puede apreciar en las figuras 3-5 y 3-6, se observa que ocurre de igual forma a la función anterior, en donde hay una clara distinción en como se aproximan los valores de la solución para la ecuación no lineal respecto a los distintos métodos. Cabe recalcar

que se puede apreciar en estas figuras que existen métodos que convergen más rápidos que otros.

Podemos apreciar también en las figuras 3-7 y 3-8 que si bien existen distinción en como convergen los errores, hay que recalcar que todos tienden a la misma curva de convergencia donde la distinción radica en cuan pronunciada es esta curva.

En el cuadro 3-3 en el cual se resume los valores obtenidos para la segunda función $G(x)$, se observa que algunos errores tienen un valor igual a cero. Esto es debido a que se excede la cantidad de decimales con la que trabaja el tipo de dato format long el cual corresponde a 16 decimales, por lo que se redondea obteniendo el valor cero. Si bien para muchas ocasiones no se requiere tanta precisión, esto depende netamente del problema que se esté resolviendo, por lo que si se requiere una mayor precisión se necesitará utilizar un tipo de datos que permita una mayor cantidad de decimales.

Por otro lado, se vuelve a obtener que el método que realiza la mayor cantidad de iteraciones es el método de bisección, esto tiene una explicación teórica ya que para obtener un mayor nivel de precisión se requiere más cantidad de iteraciones, donde esta cantidad de iteraciones podría ser calculada a priori, como se ha visto en clases. Cabe recalcar que el método con menor número de iteraciones es el de Newton Raphson, pero cabe mencionar que no por mucho ya que se obtuvo que para el método de la Secante se realizaron ocho iteraciones.

Hay que tener mucho cuidado al decir que tener menos iteraciones, se demora menos tiempo en realizar la aproximación, ya los valores obtenidos para esta ocasión son un claro ejemplo que esto no se cumple. Esto puede ocurrir por dos motivos. El primer motivo, puede ser debido a que en cada iteración se realicen más cálculos para el método de la secante en comparación al método de Newton Raphson, por lo que en cada iteración requiere un tiempo mayor en el caso de la Secante. EL segundo motivo puede ser debido al sistema operativo, donde el tiempo de planificación influye en el tiempo que demora cada uno de estos métodos creando una anomalía en estos tiempos.

A continuación se muestra el ranking obtenido para las distintas comparaciones que se pueden realizar con los datos obtenidos.

Cuadro 3.4: Ranking para la segunda función $G(x)$

Lugar	Tiempo	Iteraciones	Error
1	Secante	Newton Raphson	Newton Raphson - Secante
2	Newton Raphson	Secante	Regula Falsi
3	Biseccion	Regula Falsi	Bisección
4	Regula Falsi	Bisección	-

3.3 FUNCIÓN 3: $H(X)$

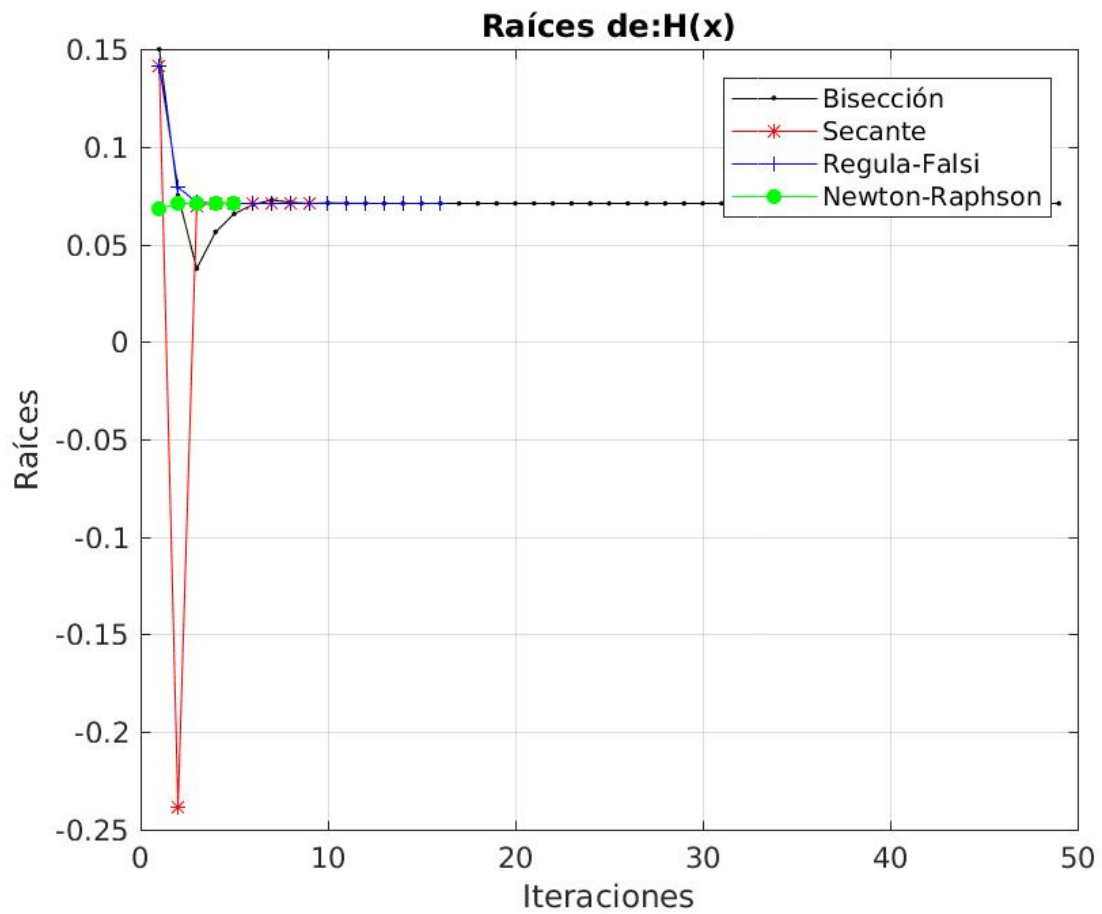


Figura 3-9: Valores de la función 3.

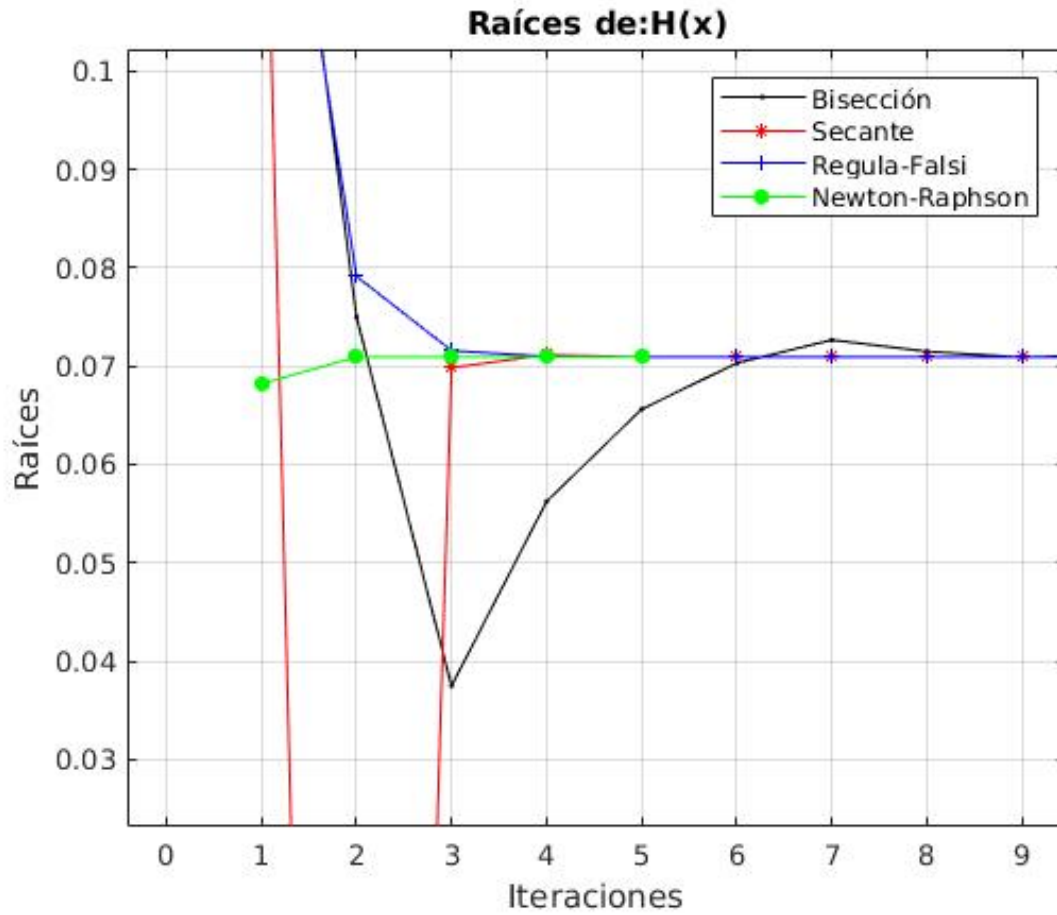


Figura 3-10: Valores de la función 3 con zoom.

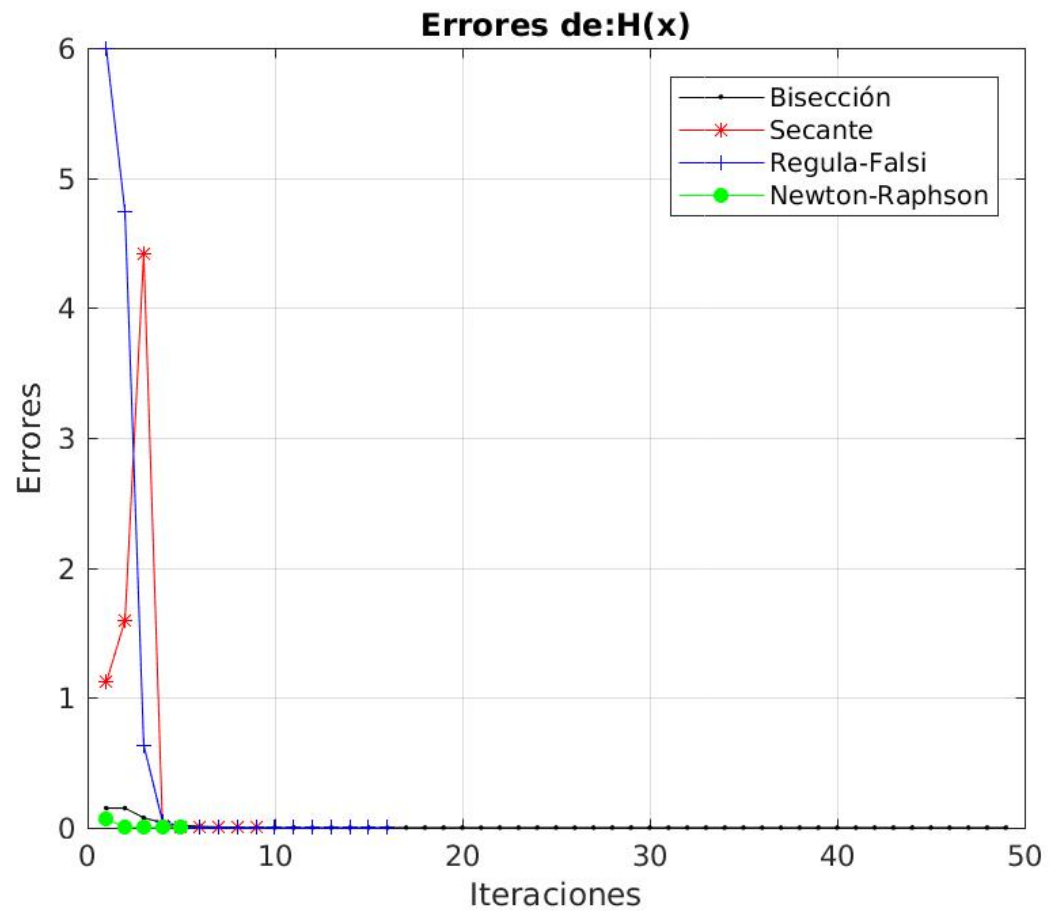


Figura 3-11: Errores de la función 3.

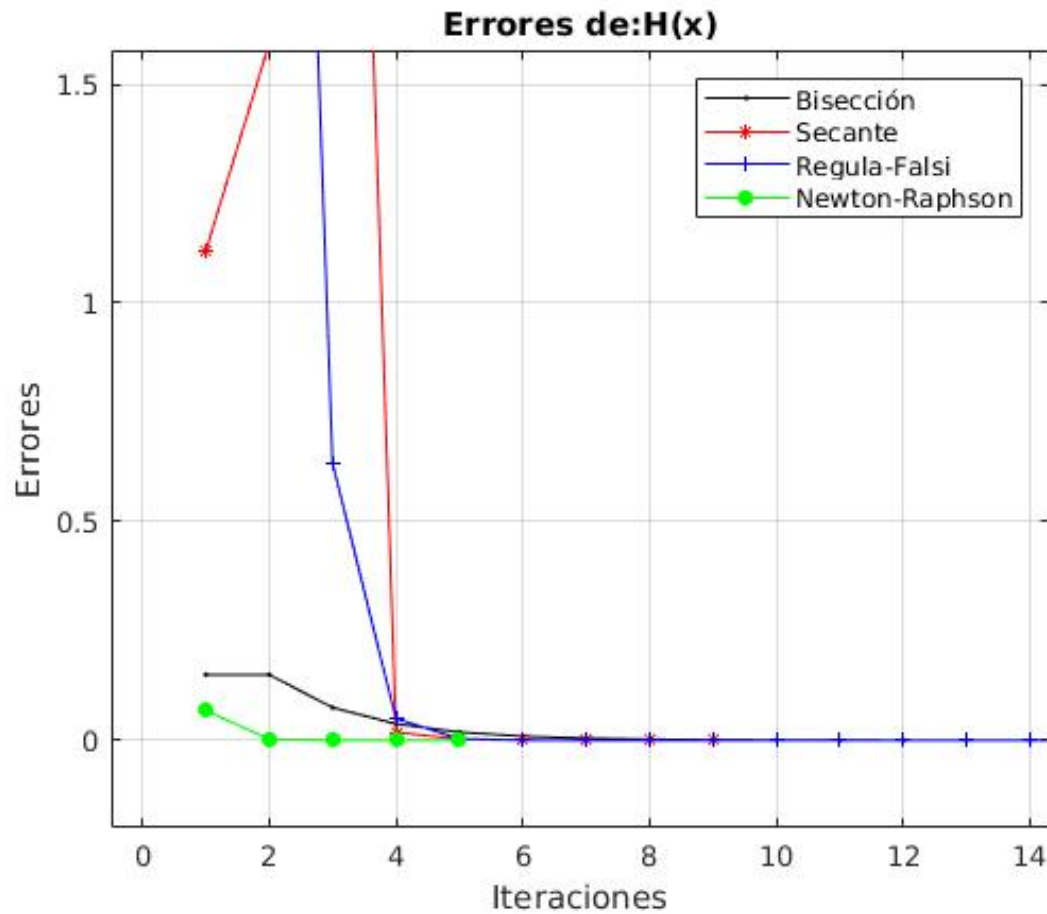


Figura 3-12: Errores de la función 3 con zoom.

Cuadro 3.5: Resumen de datos obtenidos para la función 3 H(x)

Método	Error	Valor	It.	Tiempo
Bisección	1,06165076729781e-15	0,0709325193141543	50	0,0185750000000000
Secante	1,95647750030573e-16	0,0709325193141543	9	0,0024030000000000
Regula Falsi	1,77635683940025e-15	0,0709325193141543	16	0,0127280000000000
Newton R	1,38777878078145e-17	0,0709325193141543	5	0,0010650000000000

Como se puede apreciar en las figuras 3-9 y 3-10 se presenta algo muy similar dentro de lo que es el comportamiento de los métodos y en comparación con las dos funciones anteriores.

Un punto a considerar es la anomalía que presenta el método de la secante, ya que se aleja mucho de la raíz en una iteración en específico. Esto repercute fuertemente en que el error aumente en vez de disminuir, esto se puede apreciar en la figura 3-11. Esta anomalía se puede deber a la forma que tiene la curva de la función, ya que al utilizar el método de la secante para obtener la nueva aproximación, este depende del valor obtenido al evaluar la función dada.

Cabe destacar que los demás métodos tienen un comportamiento esperado y a pesar de la anomalía que presenta el método de la secante, éste de todas formas converge hacia el mismo valor de la solución entregado por los demás métodos para esta ecuación no lineal.

Se puede apreciar en el cuadro 3.5 el cual resume los valores obtenidos, de que el comportamiento para esta función es muy parecida a la de la primera función, por lo que sin mas preámbulos se entregará el ranking para no redundar en el tema.

Cuadro 3.6: Ranking para la tercera función $H(x)$

Lugar	Tiempo	Iteraciones	Error
1	Newton Raphson	Newton Raphson	Newton Raphson
2	Secante	Secante	Secante
3	Regula Falsi	Regula Falsi	Bisección
4	Bisección	Bisección	Regula Falsi

3.4 NEWTON RAPHSON MULTIVARIABLE: SISTEMA 1

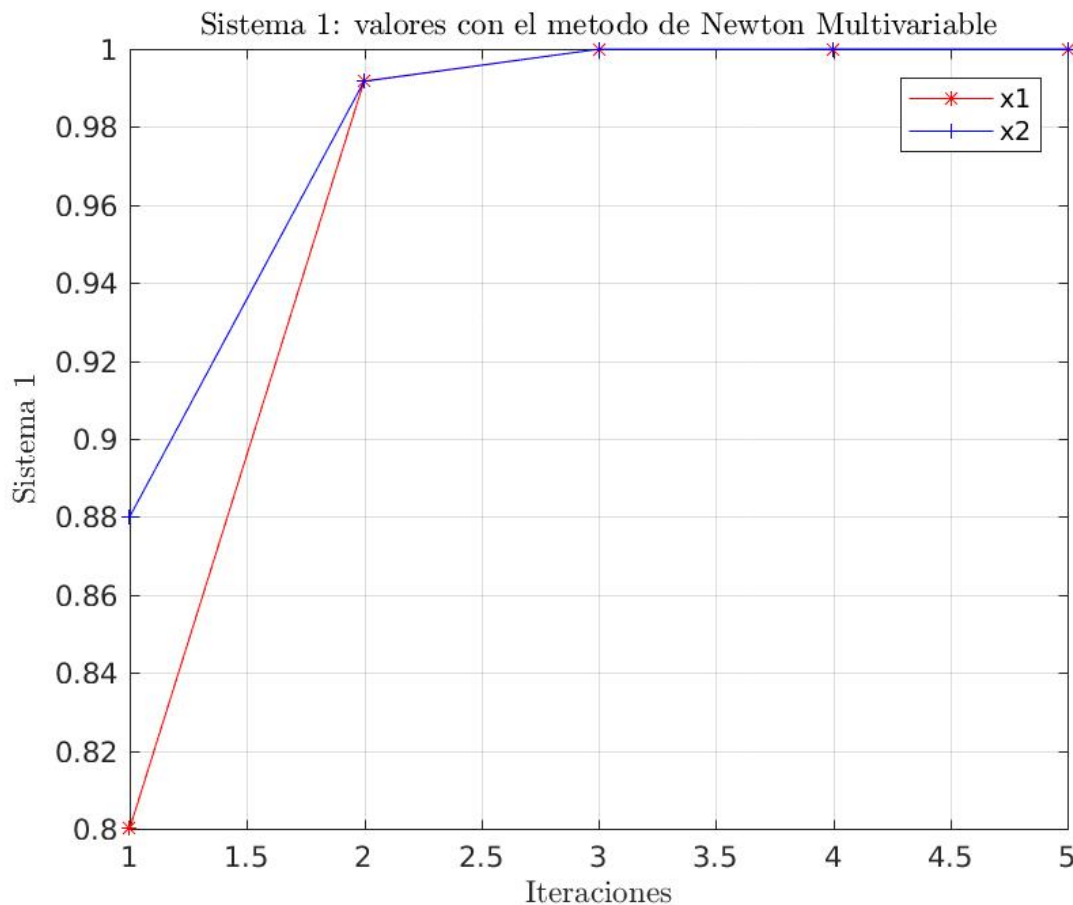


Figura 3-13: Raíces aproximadas por iteración: Newton Multivariable Sistema 1.

En la Figura 3-13, se puede observar el comportamiento del método de Newton Raphson para múltiples variables, específicamente para este caso se desean encontrar dos variables. Se puede observar que en cada iteración este método se acerca a un valor de convergencia que en este caso es el valor uno para ambas variables. Cabe recalcar que para llegar al valor de convergencia se necesitaron 5 iteraciones.

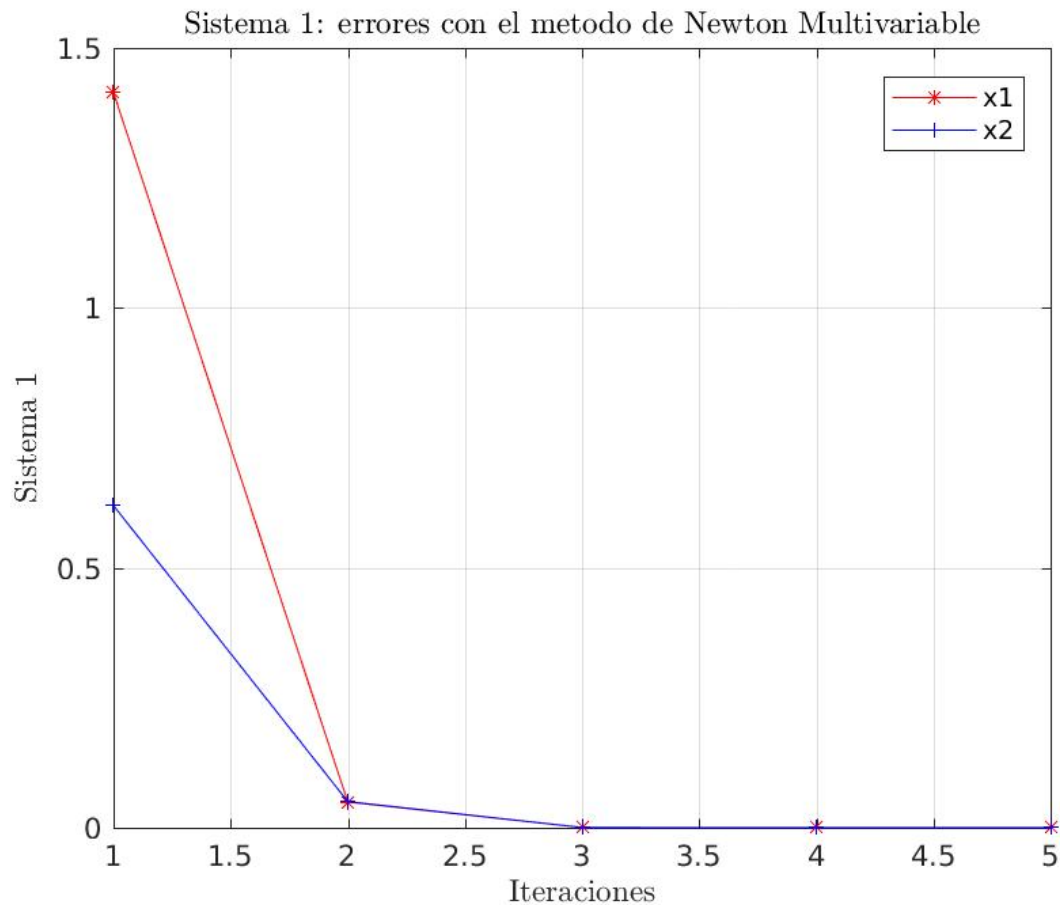


Figura 3-14: Errores por iteración: Newton Multivariable Sistema 1 3.

Cuadro 3.7: Resumen de valores obtenidos para el sistema 1

Variable	Aproximación	Error
x1	1,000000000000000	1,77635683940025e-15
x2	1,000000000000000	1,77635683940025e-15

En la Figura 3-14 se observa el comportamiento de los errores en cada iteración, para dos variables. Aquí se observa que convergen rápidamente un un valor cercano a cero. Cabe recalcar la tolerancia al error fue de 10^{-10} , por lo que el error obtenido refleja que existe aún más precisión dada dicha tolerancia. Esto es debido al algoritmo empleado que no termina su ejecución sin obtener un error menor al de la tolerancia.

3.5 NEWTON RAPHSON MULTIVARIABLE: SISTEMA 2

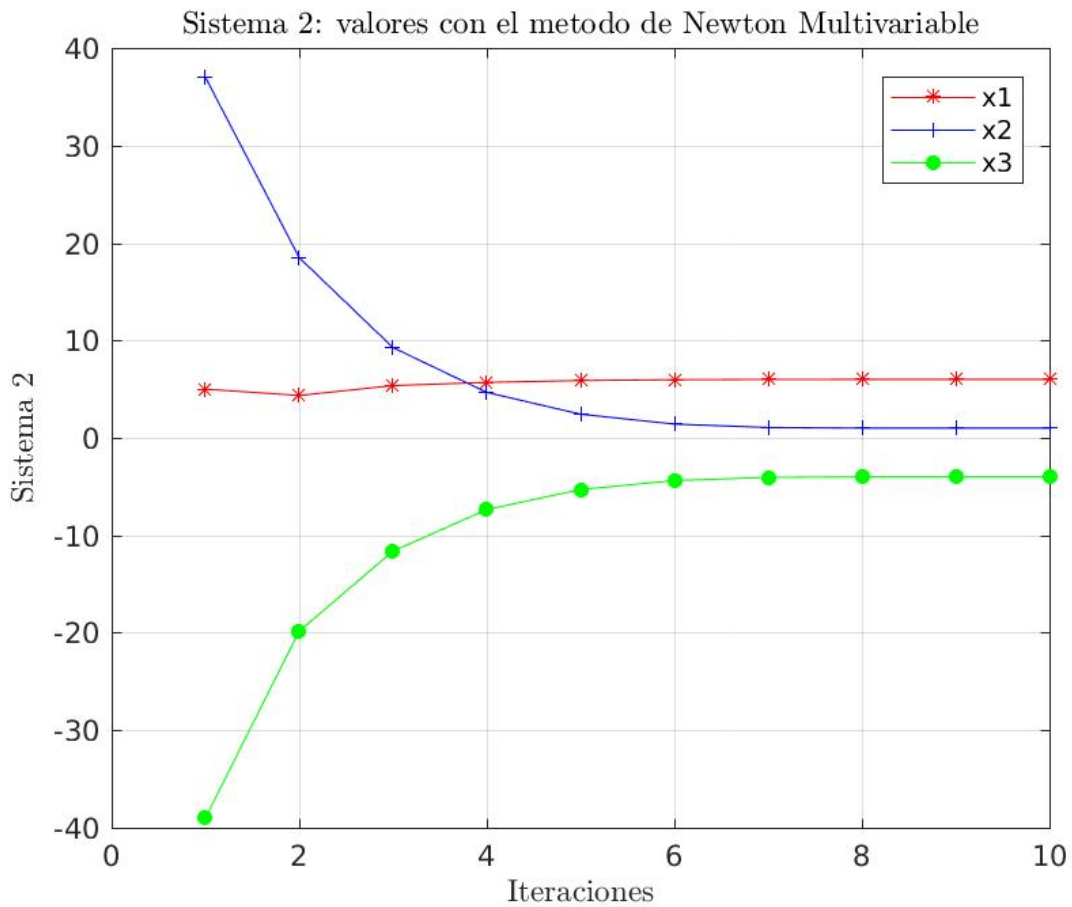


Figura 3-15: Raíces aproximadas por iteración: Newton Multivariable Sistema 2.

En la Figura 3-15 se observa como convergen las variables a sus respectivos valores para un sistema de 3 variables. Cabe recalcar que los valores aproximados a los que convergen son: $x_1 = 6$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. También mencionar que la cantidad de iteraciones necesarias para este sistema fue de 10 unidades.

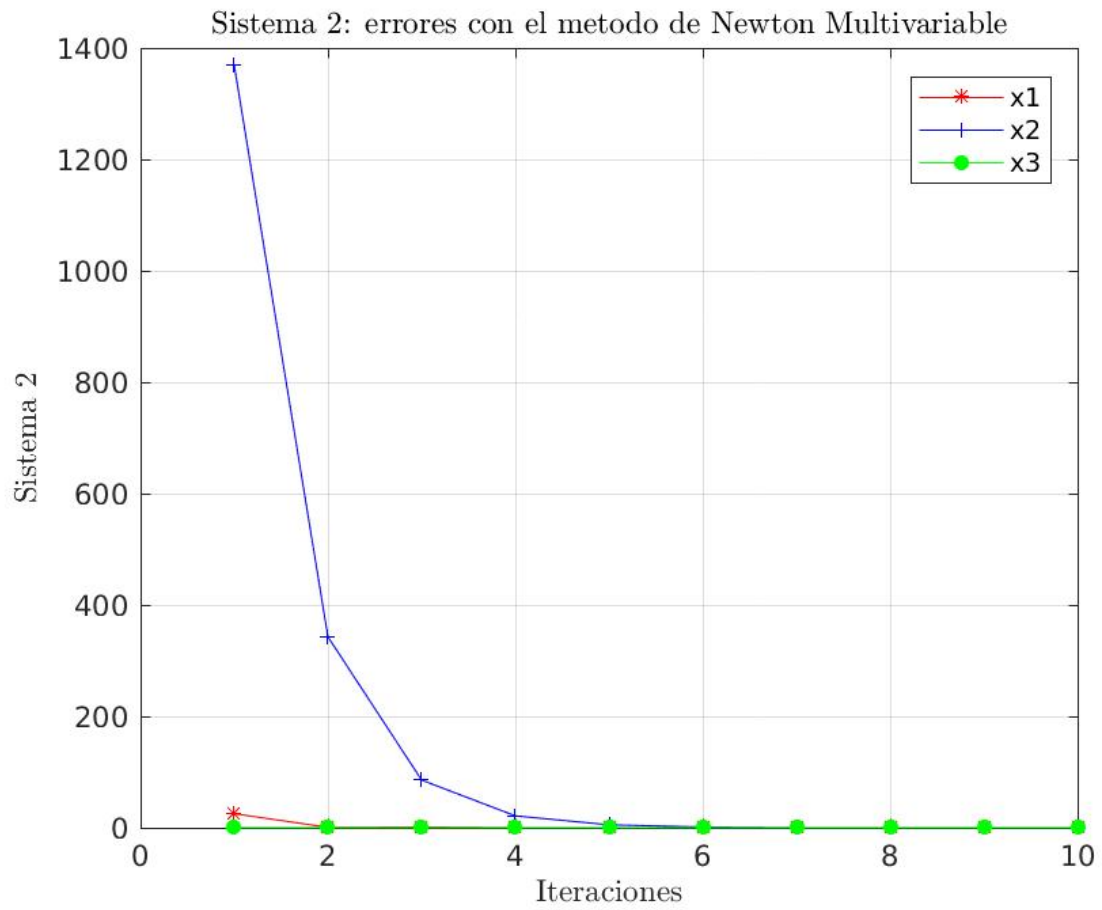


Figura 3-16: Errores por iteración: Newton Multivariable Sistema 1.

Cuadro 3.8: Resumen de valores obtenidos para el sistema 2

Variable	Aproximación	Error
x_1	5,99999999999995	1,42108547152020e-14
x_2	1,000000000000065	1,35980116056089e-12
x_3	4,000000000000060	0

En La Figura 3-16 se puede ver que los errores calculados para cada variable convergen rápidamente a 0. Para este sistema también se utilizó una tolerancia al error de 10^{-10} , lo cual es la razón de los valores de estos errores obtenidos, ya que deben ser menores estos errores respecto a dicha tolerancia. Se puede decir que se necesitó 10 iteraciones para alcanzar el grado de precisión solicitado. También mencionar que uno de estos errores es completamente cero, el cual es debido al tipo de dato utilizado ya que no admite tantos decimales y redondea a este valor.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE MÉTODOS LINEALES

4.1 RESULTADOS SISTEMA 289

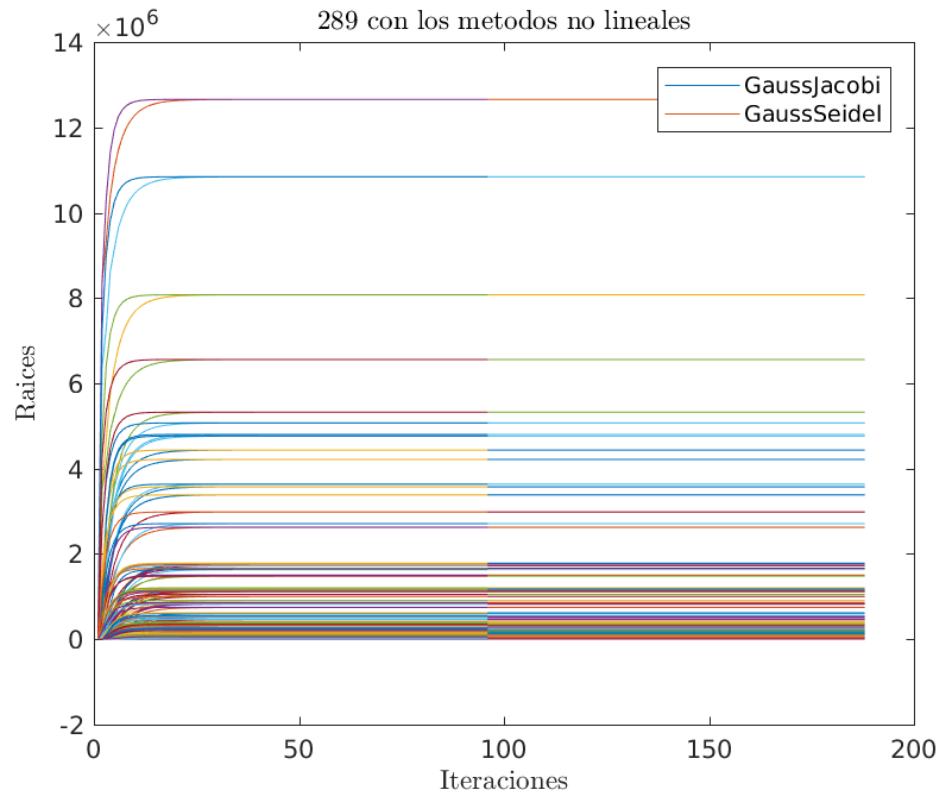


Figura 4-1: Soluciones de sistema de ecuaciones de 289.

Cuadro 4.1: Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 289

Método	Tipo	Tiempo
Gauss Jacobi	Iterativo	0.2359380000000000
Gauss Seidel	Iterativo	0.1040010000000000
LU	Directo	0.0536960000000000
QR	Directo	0.1031190000000000
LLT	Directo	0.0769740000000000
House Holder	Directo	0.1246500000000000

4.2 RESULTADOS SISTEMA 1089

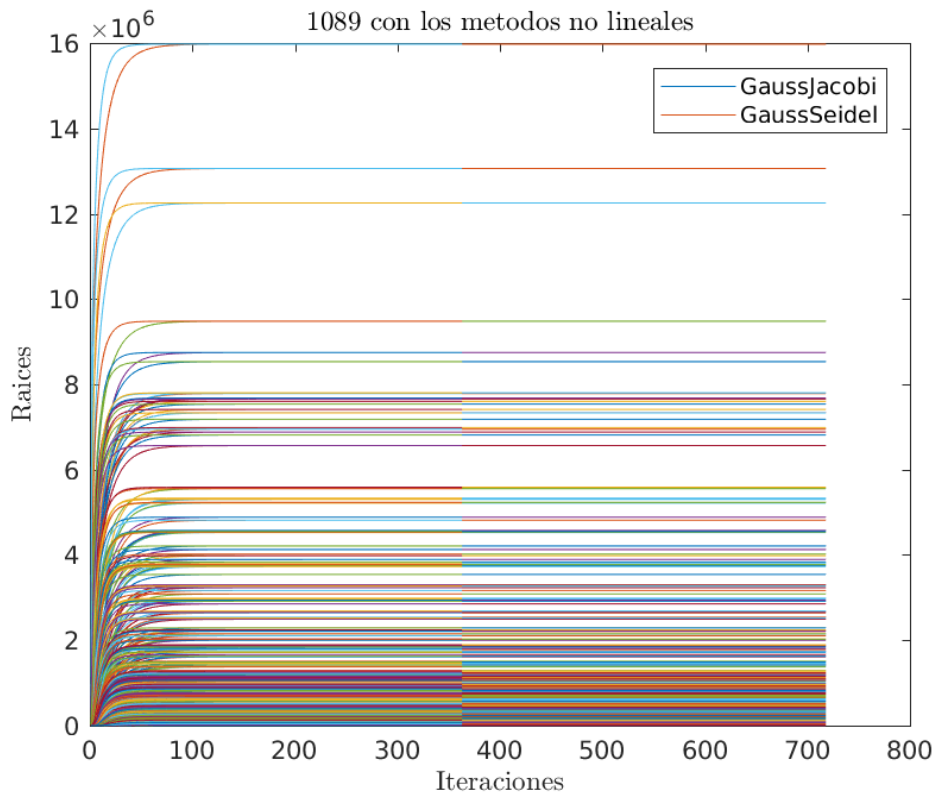


Figura 4-2: Soluciones de sistema de ecuaciones de 1089.

Cuadro 4.2: Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 1089

Método	Tipo	Tiempo
Gauss Jacobi	Iterativo	19.810751000000000
Gauss Seidel	Iterativo	9.036035000000000
LU	Directo	3.272025000000000
QR	Directo	2.683542000000000
LLT	Directo	4.586577000000000
House Holder	Directo	22.472318000000000

4.3 RESULTADOS SISTEMA 4225

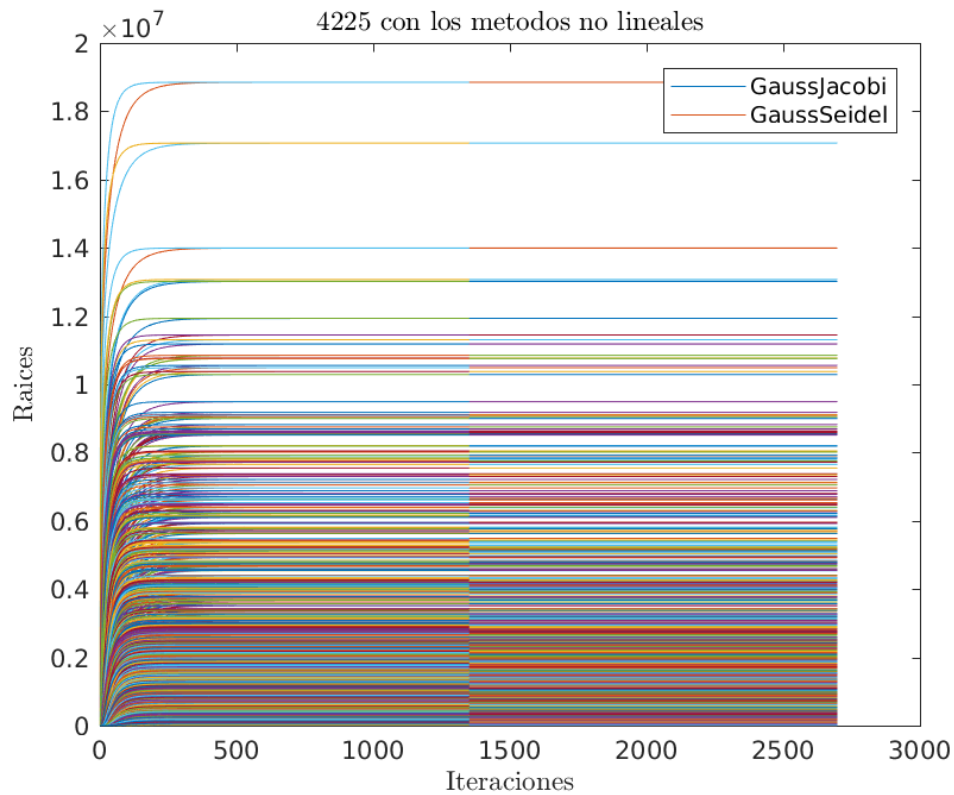


Figura 4-3: Soluciones de sistema de ecuaciones de 4225.

Cuadro 4.3: Resumen de tiempos que demoran los métodos para el sistema 4225

Método	Tipo	Tiempo
Gauss Jacobi	Iterativo	9.813459760000000e+02
Gauss Seidel	Iterativo	6.980818730000000e+02
LU	Directo	2.078046900000000e+02
QR	Directo	2.338065280000000e+02
LLT	Directo	2.078046900000000e+02
House Holder	Directo	9.231260070000000e+02

4.4 ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS

En esta sección se analizarán los resultados obtenidos para los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Estos métodos como bien se dijo anteriormente, se dividen en dos grupos: directos e iterativos. Lo que diferencia a los métodos directos en comparación a los iterativos es que, al no iterar, es decir, no aproximar los valores en cada iteración, es que entregan una solución con mayor precisión, dado que es un resultado de despejar variables, por lo tanto, entregando un resultado exacto. Cabe recalcar que los computadores de por sí, agregan un error al resultado, pero este no es el que se está analizando en esta ocasión.

En las figuras 4-1,4-2,4-3 se puede observar el comportamiento de los métodos iterativos, es decir, como convergen las diferentes variables a sus respectivos valores, si bien no se puede observar con mucha claridad cuales son estos valores, se puede rescatar que el comportamiento de estos dos métodos es muy similar, y esto es debido a que sus algoritmos son muy parecidos, pero el método de Gauss Seidel es una versión mejorada del Gauss Jacobi.

En los cuadros 4-1,4-2,4-3 se puede observar los diferentes tiempos que demoran los algoritmos en ser ejecutados para cada sistema. Además, se puede ver como para los primeros dos sistemas demoran menos de 20 segundos cada algoritmo, pero para el tercer sistema la demora crece considerablemente debido a la cantidad de operaciones que tiene que realizar cada uno de estos.

Lo que se puede obtener en base a estos resultados es que los métodos directos tienen un mejor desempeño en tiempo de ejecución, en comparación a los iterativos. Cabe recalcar que solamente está graficado los resultados del método Gauss Seidel y Gauss Jacobi. Esto es debido a que estos entregan una matriz en la cual cada columna representa una iteración lo cual sirve para poder graficar el valor versus la iteración, mientras que los metedos directos, es decir, LU, LLT, QR, House Holder y Givens, entregan un vector el cual contiene los valores finales de cada variable del sistema.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

En base a los resultados obtenidos y el análisis realizado para los métodos no lineales, es decir, bisección, secante, regula falsi y newton raphson, podemos recalcar que el método que obtuvo mejor desempeño en cuanto a eficiencia y eficacia, frente a las diferentes ecuaciones no lineales, es el de newton raphson. Por otro lado, el que obtuvo peor desempeño en la mayoría de los experimentos fue el método de la bisección.

En este trabajo también se analizaron los métodos lineales, en los cuales los métodos iterativos tienen un peor desempeño en cuanto a eficiencia y eficacia, esto es debido a que los métodos directos entregan un resultado teóricamente exacto, ya que no iteran aproximando el resultado, sino, que "despejan variables" hasta llegar el resultado.

Es muy importante realizar un análisis previo a las funciones que se desean estudiar, ya que estos métodos requieren puntos con los cuales se trabajará. Por eso se utilizan el teorema de Bolzano y Fourier. Además, se debe analizar la existencia de la primera y segunda derivada de las funciones, ya que si estas no existen, no se podrían aplicar algunos métodos, o simplemente no se podrían calcular los puntos que se requieren para trabajar.

También, es importante tener en consideración la tolerancia al error con la cual se trabaja para los diferentes métodos, ya que esto servirá para obtener una mayor o menor precisión sobre los resultados obtenidos. Esto significa que si se tiene un menor valor como tolerancia al error, el resultado será mas preciso.

Un punto a considerar también es el error de la máquina o computadora, ya que este afecta los resultados. Lo anterior se debe a la cantidad de información que se puede guardar dependiendo de la arquitectura del computador.

Finalmente se concluye que se cumple el objetivo principal del laboratorio, y esto trae consigo una mayor asimilación de los métodos numéricos y sus comportamientos, de tal forma, que ayudó a comprender mejor las ventajas y desventajas de cada uno. Cabe mencionar que los códigos entregados se pueden mejorar y se podría realizar un mejor análisis respecto al error en los métodos lineales. Además, se podría optimizar el método de Givens, el cual no fue objeto de análisis debido a sus grandes tiempos de ejecución.

CAPÍTULO 6. ANÉXO

A continuación se muestra la descripción de los métodos utilizados, poniendo énfasis en el funcionamiento y lógica de los mismos.

6.1 MÉTODO DE LA BISECCIÓN

El método de la bisección consiste a grandes rasgos en ir subdividiendo una región en donde se encuentra contenida la raíz de una función, acotando cada vez mas esta. Es una aplicación del teorema del Bolzano, el cual postula lo siguiente:

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, existe por lo menos un punto c entre a y b para el cual $f(c)=0$.

Luego el método propone en acotar cada vez mas este intervalo $[a,b]$, de modo que al final el promedio entre a y b sea el punto “ c ” el cual es la raíz de la función. El algoritmo del método es el siguiente.

1. Se calcula el punto medio “ m ” entre a y b (verificar que $f(a)f(b) \neq 0$)
2. Si $f(m)$ es 0, entonces se ha encontrado la raíz, la cual es m .
3. Si no es así, se revisa $f(m)$ tiene un cambio de signo con respecto a $f(a)$ o $f(b)$, si existe un cambio de signo con respecto a “ $f(a)$ ”, se repite el proceso con el intervalo $[a,m]$, por el contrario, si existe un cambio de signo con respecto al “ $f(b)$ ” se repite el proceso en el intervalo $[m,b]$.

Las desventajas de este método es que se necesitan 2 puntos para encontrar la raíz, y aparte entre estos debe estar contenida la misma (evaluados en la función deben poseer distinto signo) Además este método requiere de más iteraciones para dar con la aproximación de la raíz, debido a que es de tipo “lineal”.

6.2 MÉTODO DE LA SECANTE

El método de la secante es una variación del método de Newton-Raphson, posee la ventaja de no necesitar la derivada de la función a estudiar, debido a que en vez de esta, utiliza la recta secante resultante a partir del punto anterior y siguiente.

La ecuación de recurrencia es la que se presenta a continuación:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (6.1)$$

Simplemente consiste en aplicar la ecuación de recurrencia hasta que se obtenga una aproximación aceptable según un criterio de error fijado con anterioridad. Notar además que se necesita inicialmente dos puntos.

6.3 MÉTODO REGULA-FALSI

Método que combina el método de la bisección y secante, viene siendo una mejora de la bisección. Consiste en buscar la solución dentro de un intervalo $[a, b]$ a través de la traza sucesiva de rectas que unen estos puntos.

A continuación se presenta su formula de recurrencia:

$$x = x_a - \left[\frac{f(x_a) (x_b - x_a)}{f(x_b) - f(x_a)} \right]$$

Figura 6-1: Formula recurrencia Regula-Falsi

6.4 MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON

Newton-Raphson es un método de rápida convergencia, de tipo abierto (necesita solo un punto para realizar la iteración inicial) y posee como particularidad que necesita el calculo de la derivada de la función a estudiar.

Su convergencia es cuadrática, es decir, que el error disminuye de manera cuadrática con el transcurso de cada iteración. (Mucho mas rápido que los de convergencia lineal)

Solo hace falta aplicar la siguiente ecuación de recurrencia de manera reiterada:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6.2)$$

6.5 MÉTODO DE NEWTON-RHAPSON MULTIVARIABLE

Newton-Raphson puede ser adaptado para poder encontrar "n" variables que den solución a un sistema de ecuaciones, teniendo en consideración que por cada variable se necesita una ecuación.

La formula de recurrencia es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}_n - \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \mathbf{J}^-(\mathbf{x}_n) & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_M(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}$$

Figura 6-2: Formula recurrencia Newton-Raphson multivariable

6.6 MÉTODO DE JACOBI

Método iterativo que da solución a sistemas de ecuaciones lineales.

Consiste en aplicar la siguiente formula de recurrencia de manera reiterada:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)})$$

Como consideración se debe tener en cuenta que el método converge solo si A es matriz diagonal dominante, es decir que para todas las filas, el valor absoluto del elemento de la diagonal de esa fila es estrictamente mayor que la norma del resto de elementos de esa fila.

6.7 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

El método de Gauss-Seidel sigue el mismo algoritmo que el método de Jacobi.

la diferencia radica en que para el calculo de las siguientes aproximaciones, en vez de utilizar nuevos valores calculados iteración a iteración, utiliza los valores mas actuales que existan disponibles. Esto trae consigo una leve mejora en rendimiento.

6.8 MÉTODO DE FACTORIZACIÓN LU

Este método no es iterativo, es decir posee una serie finita de pasos, consiste en que la matriz A de dimensiones $m \times n$, se puede escribir como un producto de matrices LU, quedando del siguiente modo:

$$A = LU$$

donde en específico, L (lower) es matriz triangular inferior y U (upper) es matriz triangular superior.

Esto se realiza con el fin de dar solución al siguiente sistema:

$$Ax = b$$

El cual, en base a lo enunciado con anterioridad, se puede reescribir de la siguiente forma:

$$LUx = b$$

Si denominamos "z." a la matriz columna de n filas resultado del producto de las matrices Ux , se obtiene lo siguiente.

$$Lz = b$$

Como L es matriz triangular, se obtiene un nuevo sistema fácil de resolver, el cual se resuelve utilizando una sustitución reiterada.

Finalmente al tener la solución de z , el sistema buscado se resuelve simplemente despejando x .

6.9 MÉTODO DE CHOLESKY

Dado el sistema $Ax = b$, y si además A es una matriz simétrica y positiva (esto quiere decir que $\det(A_i) > 0$), se puede ocupar el mismo procedimiento utilizado en la factorización LU.

Sin embargo dado que A es simétrica, no resulta necesario realizar el pivoteo, por lo que el número de operaciones se reduce a la mitad con respecto a la factorización LU, para ello se expresa la matriz A de la siguiente forma $A = LL^T$.

6.10 MÉTODO DE FACTORIZACIÓN QR

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ con columnas linealmente independientes, entonces esta se puede reescribir en función de Q y R , donde Q específicamente posee todas sus columnas ortonormales y R es triangular superior invertible.

Con esto en cuenta, A puede quedar expresada de la siguiente manera:

$$A = QR$$

La forma de realizar esto se puede observar en la siguiente figura, la cual incluye el algoritmo utilizado.

Demostración

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ las columnas de \mathbf{A} y sean $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ los vectores obtenidos al ortonormalizarlas según el proceso de Gram-Schmidt. Así,

$$\text{Gen}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{Gen}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$$

Definamos

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_n]$$

Como cada \mathbf{a}_i es combinación lineal de $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ deben existir escalares r_{ij} tales que

$$\mathbf{a}_i = r_{1i} \mathbf{q}_1 + \cdots + r_{ni} \mathbf{q}_n = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} r_{1i} \\ \vdots \\ r_{ni} \end{bmatrix} \text{ para } i = 1, \dots, n$$

siendo $r_{ji} = 0$ para $j = i + 1, \dots, n$ y para $i = 1, \dots, n$, de acuerdo al proceso de Gram-Schmidt. Así,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n] = \left[\mathbf{Q} \begin{bmatrix} r_{11} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \mathbf{Q} \begin{bmatrix} r_{1n} \\ \vdots \\ r_{nm} \end{bmatrix} \right] = \mathbf{QR}$$

Figura 6-3: Proceso para obtener la matriz QR de una matriz A

CAPÍTULO 7. BIBLIOGRAFÍA

Plaza, S. (2006). *Métodos Numéricos*. Universidad de Santiago de Chile.