

**PRÁCTICA N°3**  
**Álgebra de Matrices**

**Introducción a las matrices. Tipos especiales de matrices. Operaciones con matrices**

1. Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $E = (3 \quad -1 \quad 4)$

- Establezca el orden de cada matriz.
- ¿Cuáles corresponden a matrices cuadradas?
- ¿Qué matrices son triangulares superiores?
- ¿Cuáles son vectores fila?
- ¿Cuáles son vectores columna?
- ¿De qué orden es la traspuesta de E?
- Determine  $A^t$  y  $C^t$

2. Si  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , verifique la propiedad general de que  $(A^t)^t = A$  encontrando  $A^t$  y después  $(A^t)^t$ .

3. Efectúe las siguientes operaciones con matrices siempre que sea posible.

a)  $-\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b)  $-2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

c)  $5\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 20 & -15 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$

d)  $(2 \quad -3)\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

e)  $(3 \quad -1)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

f)  $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

g)  $(-1 \quad 2 \quad -3 \quad 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

h)  $(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

i)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

j)  $(20 \quad -8)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$k) \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$l) \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 20 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$m) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{n}) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$o) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las siguientes matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a)  $A + C$

b)  $2C - 3B$

c)  $D - 5E$

d)  $\frac{6E + 3D}{10}$

5. Dadas las siguientes matrices, efectúe todos los productos posibles tomándolas como factores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Determine los valores de  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  para que se verifique la igualdad:

$$3. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -1 & 2d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ a+d & 3 \end{pmatrix}$$

7. Determine una matriz  $X$  tal que:  $A + \frac{1}{3} \cdot X = B$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & 5 & 2 \end{pmatrix}$

8. Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $E = (3 \ -1 \ 4)$

8.1. Calcule, en los casos en que la operación sea posible. Justifique.

- a)  $C + A^t \cdot B$       b)  $D \cdot E$       c)  $(A - B) \cdot C^2$       d)  $E \cdot D$       e)  $B^t \cdot A - D$

8.2. Obtenga, si existe, una matriz  $X$  que verifique  $A \cdot C + 2X = B$

8.3. Sea la matriz  $P_{m \times n}$ , ¿qué valores deben tomar  $m$  y  $n$  para que el producto  $B \cdot P \cdot C$  pueda realizarse? ¿Qué dimensión tendrá la matriz producto?

### Ejercicios adicionales

9. Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ , **calcule**, si es posible. De lo contrario, **justifique**:

- a)  $(A - 2B)^t$       b)  $C \cdot A$       c)  $C^2$

10. **Obtenga**, si existen, los valores de  $x$  e  $y$  que verifiquen  $a_{11} = 2a_{22}$  y  $a_{12} = -a_{21}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} x & -4 \\ y^2 & 1-x \end{pmatrix}$$

11. **Determine**, si existe, una matriz  $X$ , tal que:  $\frac{1}{2}X - B = I_d$ , siendo

$I_d$  la matriz identidad de orden 2 y  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

12. **Complete** para que la proposición resulte verdadera:

$$\text{Si } \begin{pmatrix} -2 & 2b-3 \\ 5 & -7+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4+b \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \dots\dots\dots \text{ y } b = \dots\dots\dots$$

13. Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ , **obtenga**  $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  no nula, tal que  $A \cdot U = 3 \cdot U$

14. Suponga que el precio de los productos A, B y C está dado, en ese orden, por el vector de precios  $P = (p_1 \ p_2 \ p_3)$ . Si los precios se incrementan en 10%, el vector de los nuevos precios puede obtenerse multiplicando  $P$ , **¿por qué escalar?**

15. Los precios (en dólares por unidad) para tres libros de texto están representados por el vector de precios  $P = (26.25 \ 34.75 \ 28.50)$ . Una librería universitaria hace un pedido de estos libros en las cantidades dadas por el vector columna  $Q = \begin{pmatrix} 250 \\ 325 \\ 175 \end{pmatrix}$ . **Determine** el costo total (en dólares) de la compra.

16. Una firma de automóviles dispone de dos plantas de fabricación en dos ciudades distintas en las que fabrica dos modelos M1 y M2, de tres colores x, y, z. Su capacidad de producción diaria en cada planta está dada por las siguientes matrices A y B. |

$$A = \begin{pmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{pmatrix}$$

- Determine la representación matricial de la producción total por día.
- Si se eleva la producción en la planta A un 20% y se disminuye en B un 10% ¿qué matriz representa la nueva producción total?

**RESPUESTAS**

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad E = (3 \quad -1 \quad 4)$$

a)  $3 \times 2; 3 \times 3; 2 \times 2; 3 \times 1; 1 \times 3$

b) B y C

c) B

d) E

e) D

f)  $3 \times 1$

g)  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} y \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

3. a)  $\begin{pmatrix} -5 & -19 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 80 & 4 \\ -14 & 24 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} -70 & 95 \\ 55 & 60 \end{pmatrix}$       d) (-16)

e) no es posible

f)  $(ax + by)$

g) (8)

h)  $(ae + bf + cg + dh)$

i)  $\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ -11 & 44 \end{pmatrix}$

j)  $(20 \quad -8)$

k)  $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 10 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

l) no es posible

m)  $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 28 \\ -3 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & 29 \end{pmatrix}$

n)  $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

ñ)  $\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & 12 & 6 \\ 14 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 24 & 8 & 8 & -8 & 0 \\ -6 & -7 & -4 & 19 & 9 \end{pmatrix}$

o)  $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 19 & 19 \\ 3 & -6 & 5 & -2 \\ -15 & 22 & 9 & 14 \end{pmatrix}$

4. a)  $\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 1 & -19 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$       c)  $\begin{pmatrix} -9 & -17 & 3 \\ -33 & 15 & -6 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{33}{10} & \frac{-6}{10} \\ \frac{2}{10} & \frac{10}{10} & \frac{5}{10} \\ \frac{24}{10} & \frac{-9}{10} & \frac{12}{10} \\ \frac{5}{10} & \frac{5}{10} & \frac{5}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{21}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$

5.  $A \cdot B = \begin{pmatrix} 32 & 5 \\ 24 & 3 \\ -28 & -3 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -20 \\ 16 & 14 & 16 \\ 10 & -2 & 18 \end{pmatrix}$

$B \cdot C = \begin{pmatrix} 14 & 35 & -7 \\ 7 & 20 & 2 \\ 13 & 35 & -1 \end{pmatrix}$

$$D^2 = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 28 & 32 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 6 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 18 & 18 & 10 \\ 29 & 48 & -15 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 4 \\ 61 & 14 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 26 & 80 & 20 \end{pmatrix}$$

6.  $a = 2$  ;  $b = \frac{9}{2}$  ;  $c = \frac{4}{3}$  ;  $d = 3$

7.  $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

8.

8.1) a)  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 5 & -16 \\ -14 & 35 \\ 13 & -22 \end{pmatrix}$

d) (10)

e) no es posible efectuar la resta

8.2)  $X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 13/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

8.3)  $m = 2$  y  $n = 2$  . Orden del producto,  $3 \times 2$ .

9. a)  $\begin{pmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 6 & -9 & 2 \end{pmatrix}$

b) no es posible

c)  $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$

10.  $x = 2/3$   $y = 2$  o  $y = -2$

11.  $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

12.  $a = 15$ ;  $b = -1$

13.  $u = \begin{pmatrix} x \\ \frac{2}{3}x \end{pmatrix}$  Existen infinitas soluciones, una de ellas es:  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$  si  $x = 1$

14. 0,1

15. 22 843,75 dólares

$$16. \quad A + B = \begin{pmatrix} 490 & 185 \\ 450 & 200 \\ 350 & 180 \end{pmatrix}$$

$$1,2A + 0,9B = \begin{pmatrix} 531 & 195 \\ 480 & 210 \\ 375 & 192 \end{pmatrix}$$